

TADEUSZ GRABIŃSKI

WYBRANE PROBLEMY DYNAMICZNEJ WIELOWYMIAROWEJ ANALIZY PORÓWNAWCZEJ

I. UWAGI OGÓLNE

W ostatnich latach szczególnie dynamicznie rozwijającym się dzia-
łem statystyki jest wielowymiarowa analiza porównawcza (WAP), okre-
ślana też mianem statystycznej analizy porównawczej (SAP), wzglę-
dnie stosowaną wielowymiarową analizą porównawczą. Metody WAP są
przedmiotem zainteresowań przedstawicieli różnych dyscyplin: ekono-
mistów, socjologów, psychologów, biologów, demografów itd., czego re-
zultatem jest rosnący dorobek metodologiczny oraz stale rozszerzający się
zakres zastosowań¹.

Najogólniej biorąc WAP zajmuje się metodami i technikami porów-
nywania obiektów wielocechowych². Bardziej szczegółowa definicja mó-
wi, że zadaniem WAP jest uporządkowanie względnie jednorodnego zbioru
obiektów (lub cech) w celu podejmowania decyzji wyboru obiektu
(lub cechy) według ustalonego z góry kryterium³. Szersza definicja WAP
stwierdza, że jest ona spójnym formalnie zespołem metod statystycz-
nych służących celowemu doborowi informacji o elementach pewnej
zbiorowości i wykrywaniu prawidłowości we wzajemnych relacjach
tych elementów⁴.

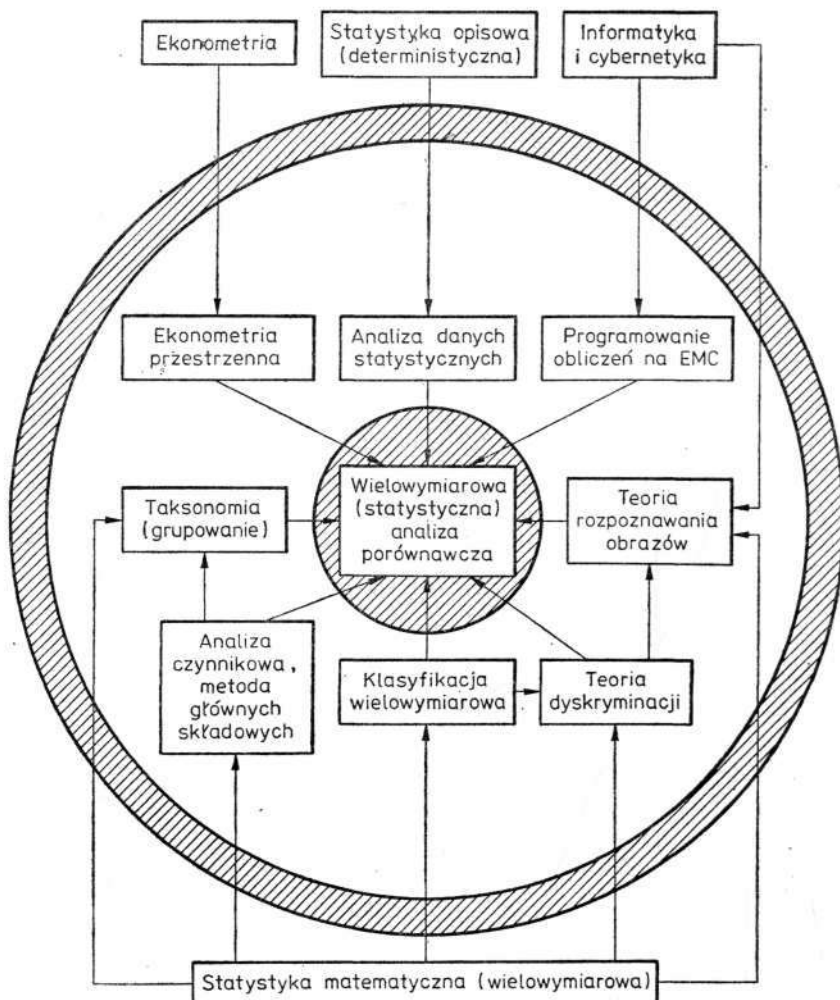
Wielowymiarowa analiza porównawcza powiązana jest z wieloma in-
nymi dyscyplinami. Na ryc. 1 przedstawiono bezpośrednie powiązania

¹ Pewne metody i mierniki podobne w swojej istocie do metod WAP znane
i stosowane są w praktyce od dawna, np. wskaźniki kosztów utrzymania i indeksy
agregatowe w statystyce, ilorazy inteligencji w psychologii itp.

² Por. Z. Hellwig, *Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie
w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych*, w: *Metody i modele ekono-
miczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną*, red.
W. Welfe, Warszawa 1981.

³ Por. T. Borys, *Przedmiot i podział statystyki i ekonometrii — artykuł dysku-
syjny*, *Wiadomości Statystyczne* 1982, nr 5.

⁴ Por. G. Gorzelak, *Statystyczna analiza porównawcza — teoria a praktyka*,
Wiadomości Statystyczne 1981, nr 8.



Ryc. 1. Powiązania bezpośrednie WAP z innymi dyscyplinami

WAP z niektórymi dyscyplinami, które wydają się być szczególnie ważne⁵. Na ryc. 1 wyróżniono trzy sfery, przy czym w sferze zewnętrznej znajdują się samodzielne dyscypliny naukowe (informatyka, statystyka, ekonometria), w sferze wewnętrznej gałęzie tych dyscyplin, które mają bezpośredni związek z WAP, natomiast w centrum zamieszczono, jako odrębną gałąź statystyki, wielowymiarową analizę porównawczą.

WAP jest najbardziej powiązana z różnymi gałęziami statystyki wielowymiarowej, a zwłaszcza z taksonomią numeryczną rozumianą jako

⁵ Pominiento tu szereg dyscyplin jak np. programowanie wielokryterialne, analizę kanoniczną, teorię grafów, teorię sieci, testowanie i weryfikacja hipotez wielowymiarowych i inne, których dorobek jest lub może być wykorzystany w WAP, jakkolwiek w nieco mniejszym stopniu.

zbiór metod i technik grupowania bezwzorcowego, analizą czynnikową i metodą głównych składowych oraz metodami klasyfikacji wzorcowej i dyskryminacji. W metodach WAP wykorzystuje się także standardowe procedury analizy danych statystycznych wchodzące w skład statystyki opisowej.

Związki WAP z ekonometrią są szczególnie widoczne w zakresie procedur doboru zmiennych oraz modelowania przestrzennego, będącego przedmiotem zainteresowań nowej gałęzi ekonometrii, jaką jest ekonometria przestrzenna⁶. Na ryc. 1 uwidoczniono także powiązania WAP z niektórymi gałęziami informatyki i cybernetyki. Chodzi tu zarówno o transfer metod opracowanych w ramach teorii rozpoznawania obrazów (obiektów), jak i osiągnięcia w zakresie ETO, bez której stosowanie WAP w praktyce byłoby niemożliwe.

Jak można zauważyć z ryc. 1, wielowymiarową analizę porównawczą traktuje się jako dyscyplinę niezależną od taksonomii numerycznej, jakkolwiek jeszcze do niedawna był to tylko nurt badawczy w ramach taksonomii. Wydaje się jednak, że z uwagi na problematykę badań, specyfikę wykorzystywanych metod i technik oraz dotychczasowy dorobek w zakresie zastosowań praktycznych, należy uznać WAP za dyscyplinę odrębną.

W ramach WAP rozpatrywane są m. in. takie zagadnienia, jak:

— hierarchizacja obiektów i ich zbiorów ujmowanych w wielowymiarowych przestrzeniach cech z punktu widzenia pewnej charakterystyki, której nie można zmierzyć w sposób bezpośredni (poziom rozwoju społeczno-gospodarczego, standard życia, stopień jakości wyrobów, efektywność działalności przedsiębiorstwa, przydatność różnych wariantów lokalizacyjnych, itp.),

— wyodrębnienie jakościowo jednorodnych podzbiorów obiektów, zawierających elementy podobne do siebie z punktu widzenia wyróżnionej charakterystyki agregatowej, a jednocześnie niepodobne do elementów należących do innych podzbiorów,

— wybór cech najbardziej informatywnych, szacowanie współczynników ich ważności oraz ocena kierunku i siły wpływu, jaki wywierają poszczególne zmienne na poziom rozwoju ekonomicznego, społecznego, technicznego, itd.,

— metody normowania i agregacji różnoimiennych zmiennych,

— analiza charakteru i siły współzależności pomiędzy zbiorami zmiennych,

— przeprowadzenie szczegółowej analizy prawidłowości dynamiczno-strukturalnych (izokwanty rozwoju, optymalna ścieżka rozwoju, optymalna strategia rozwoju itd.),

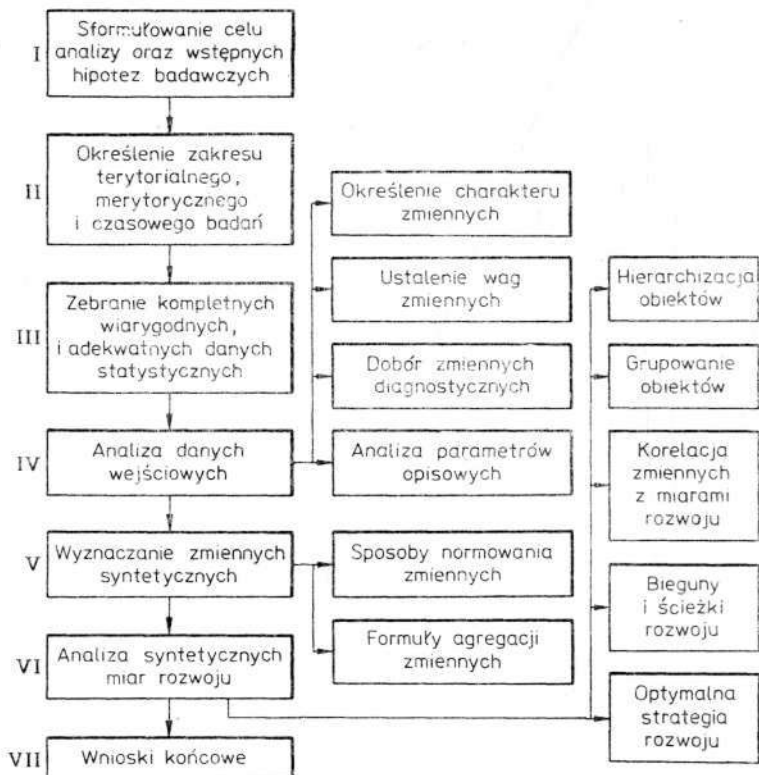
⁶ Por. L. H. Klassen, J. H. P. Paelinck, S. Wagenaar, *Systemy przestrzenne*, Warszawa 1982; J. H. P. Paelinck, L. H. Klassen, *Ekonometria przestrzenna*, Warszawa 1983.

— określenie wzorców rozwoju w procesie predykcji metodą analogii oraz ustalenie wielkości opóźnień pomiędzy poszczególnymi obiektami z punktu widzenia syntetycznej miary rozwoju.

II. ETAPY BADAŃ WAP

Schemat postępowania w wielowymiarowej analizie porównawczej zależy od specyfiki analizowanego problemu, tym niemniej można tu wyróżnić pewne stałe elementy, które zazwyczaj pojawiają się w trakcie badań. Ogólnie biorąc można je ująć w postaci siedmiu następujących po sobie etapów, przedstawionych na ryc. 2.

Najbardziej rozbudowane są etapy IV - VI, w ramach których można wyróżnić szereg zadań cząstkowych, przy czym ich lista podana na rycinie nie jest wyczerpująca (zwłaszcza w zakresie etapu VI) i zapewne można ją znacznie rozszerzyć. Z drugiej strony w konkretnych badaniach empirycznych niektóre z wymienionych podetapów można pominąć.



Ryc. 2. Etapy wielowymiarowej analizy porównawczej

Podstawą WAP jest dwuwymiarowa macierz obserwacji:

$$X = [x_{ij}] \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m) \quad (1)$$

gdzie n , m to liczba obiektów oraz liczba zmiennych. Macierz (1) dotyczy określonego momentu (okresu) czasu t_0 .

Dynamiczna wielowymiarowa analiza porównawcza (w skrócie DWAP) zajmuje się analizą statystyczną danych ujętych w postaci macierzy trójwymiarowej:

$$X = [x_{ijt}] \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m; t=1, \dots, k) \quad (2)$$

gdzie k oznacza liczbę uwzględnionych w badaniach momentów (okresów) czasu.

Zakres możliwości DWAP jest znacznie szerszy aniżeli WAP, ponieważ można tu wszystkie zagadnienia rozpatrywane w WAP analizować nie tylko w ujęciu przekrojowym, ale także i dynamicznym. Ponadto DWAP pozwala na wykrywanie szeregu prawidłowości strukturalno-dynamicznych, których nie sposób uchwycić przy pomocy metod WAP⁷. M. in. można tu prowadzić analizy o charakterze predykcyjnym, prowadzące się na ogół do ekstrapolacji zaobserwowanych relacji strukturalnych. Ponadto niektóre z problemów (np. dobór zmiennych diagnostycznych) wymagają z uwagi na ich specyfikę, opracowania odrębnych względnie dodatkowych procedur badawczych.

Należy nadmienić, że w praktyce często zachodzi potrzeba prowadzenia wielowariantowych analiz porównawczych, przy czym poszczególne warianty różnią się pomiędzy sobą zestawami zmiennych wyjściowych. Zazwyczaj rozpatrywane warianty charakteryzują różne układy (sektory) zmiennych społeczno-ekonomicznych, np. przemysł—rolnictwo—transport—handel, gospodarka—demografia, miasto—wieś, warunki produkcji—nakłady—efekty itp.⁸

Wielowariantową, wielowymiarową analizę porównawczą można prowadzić zarówno w ujęciu statycznym, jak i dynamicznym. W pierwszym przypadku analiza ta opiera się na macierzy trójwymiarowej:

$$X = [x_{ijp}] \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m; p=1, \dots, s), \quad (3)$$

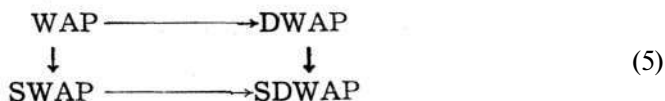
⁷ Warto tu zauważyć, że takie pojęcia jak izokwanty rozwoju, optymalne ścieżki rozwoju, optymalne strategie rozwoju itp. są w swojej istocie konstrukcjami quasi-dynamicznymi, ponieważ opierają się one na informacjach **statycznych**, dotyczących określonego momentu czasowego.

⁸ Występuje tu pewna analogia do podziału algorytmów taksonomicznych na proste i dualne (grupowanie obiektów i zmiennych). Przedmiotem rozważań w WAP są zbiory obiektów, natomiast w sektorowej wielowymiarowej analizie porównawczej — zbiory zmiennych. W tym sensie SWAP podobna jest w swoich założeniach do analizy kanonicznej.

gdzie s jest liczbą wyróżnionych układów analizy, natomiast w drugim przypadku podstawą badań jest macierz czterowymiarowa:

$$X = [x_{ijtp}] \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m; t=1, \dots, k; p=1, \dots, s). \quad (4)$$

Sektorową wielowymiarową analizę porównawczą proponuje się określić w skrócie SWAP (w ujęciu statycznym) lub SDWAP (w ujęciu dynamicznym):



III. ZAŁOŻENIA PRZYKŁADU EMPIRYCZNEGO

Przedmiotem dalszych rozważań będą wybrane metody i techniki postępowania przydatne do celów DWAP. Jak dotychczas WAP, w ujęciu dynamicznym i sektorowym, nie stosowano na szerszą skalę w praktyce, co jest spowodowane co najmniej dwoma przyczynami. Pierwszą tkwi w dużej pracochłonności tego rodzaju analiz oraz związanej z tym konieczności stosowania ETO. Drugą przyczyną polega na trudnościach w utworzeniu obszernych baz danych, zawierających porównywalne, wiarygodne i kompletne informacje statystyczne na przestrzeni dłuższego okresu.

Omawiane dalej metody DWAP ilustrowane będą na konkretnym przykładzie empirycznym. W przykładzie tym analizuje się zbiór 22 krajów Europy⁹:

1. Austria (A), 2. Belgia (B), 3. Bułgaria (BG), 4. CSRS (CS), 5. Dania (DK), 6. Finlandia (SF), 7. Francja (F), 8. Grecja (GR), 9. Hiszpania (E), 10. Holandia (NL), 11. Jugosławia (YU), 12. Norwegia (N), 13. NRD (DD), 14. Polska (PL), 15. Portugalia (P), 16. RFN (D), 17. Rumunia (R), 18. Szwajcaria (CH), 19. Szwecja (S), 20. Węgry (H), 21. W. Brytania (GB), 22. Włochy (I).

Poszczególne kraje opisane zostały wstępnie przy pomocy 18 zmiennych charakteryzujących poziom życia, przy czym do dalszych badań wybrano spośród nich 7 zmiennych najbardziej diagnostycznych¹⁰:

- X1. Dochód narodowy w tys, \$/osobę,

⁹ W nawiasach podano skróty stosowane do oznaczenia poszczególnych państw (są to międzynarodowe znaki rozpoznawcze pojazdów mechanicznych).

¹⁰ Dobór zarówno wstępnego jak i finalnego zbioru zmiennych diagnostycznych określony był głównie przez dostępność danych empirycznych a w mniejszym stopniu przez ich przydatność merytoryczną. Bardziej szczegółowe informacje o metodach doboru zmiennych diagnostycznych do zagadnień DWAP (w tym również i w zakresie poziomu życia) można znaleźć m. in. w pracy T. Grabińskiego, *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach dynamiki zjawisk gospodarczych*, Kraków 1984 (publikacja AE w Serii specjalnej nr 61).

- X2. Śmiertelność niemowląt na 1000 urodzeń żywych,
 X3. Liczba mieszkańców przypadająca na 1 łóżko szpitalne,
 X4. Liczba radiodbiorników przypadająca na 1000 ludności,
 X5. Udział zużycia energii elektrycznej w handlu, usługach i gospodarce komunalnej,
 X6. Zużycie energii elektrycznej przez odbiorców indywidualnych w kWh/osobę,
 X7. Zużycie energii elektrycznej w sektorze bytowo-komunalnym w kWh/lkm².

W procesie redukcji zbioru zmiennych wyjściowych wykorzystano następujące przesłanki:

- wyniki grupowania zmiennych metodą taksonomii wrocławskiej oraz metodą Warda,
- kształtowanie się współczynników zmienności oraz współczynników „jednoznaczności” poszczególnych zmiennych w ujęciu dynamicznym¹¹.

Zmienne X2 i X3 traktowane były w analizach jako destymulanty, natomiast pozostałe zmienne jako stymulanty.

Dane statystyczne odnosiły się do lat 1960 - 1980 i pochodziły z komputerowej bazy GOSPEL¹². Bank ten został założony do celów analizy prawidłowości dynamiczno-przestrzennych głównie w sektorze energetyki¹³, w związku z czym nie można było w badaniach uwzględnić wszystkich tych zmiennych, które zgodnie z teorią są bardziej adekwatnymi cząstkowymi miernikami poziomu życia¹⁴.

IV. SYNTETYCZNE MIERNIKI ROZWOJU

Punktem wyjścia w WAP jest wyznaczenie syntetycznych mierników rozwoju. Mierniki te ustala się ze wzoru:

$$q'_i = \frac{q_i}{\|O\|} \quad (i=1, \dots, n), \quad (6)$$

¹¹ Z uwagi na ograniczony zakres pracy szczegółowe omówienie zastosowanej procedury doboru zmiennych diagnostycznych zostanie pominięte. Wyniki analizy w tym zakresie przedstawiono w pracy: T. Grabiński, *Wielowymiarowa analiza*.

¹² Podstawę analizy stanowiła więc trójwymiarowa macierz danych $X(n,m,fc)$, gdzie $n=22$ kraje $m=18$ zmiennych wyjściowych, a następnie (po redukcji zmiennych wyjściowych) $m=7$ zmiennych finalnych oraz $k=21$ lat.

¹³ Założenia, etapy postępowania i wyniki prac związanych z tym bankiem danych podane są w pracach: *Baza danych „GOSPEL” — wersja poprawiona i zaktualizowana*, pr. zb. pod kier. A. Zeliasia w ramach problemu PR.8.8., Warszawa—Kraków 1982; *Komputerowy bank danych „Gospel”*, pr. zb. pod kier. A. Zeliasia w ramach problemu PR.8.8., Kraków 1982.

¹⁴ Por. m. in. J. Drewnowski, *On Measuring and Planning the Quality of Life*, Haga—Paris 1974; A. Luszniwicz, *Statystyka poziomu życia ludności*, Warszawa 1972.

gdzie $\|Q\|$ jest normą zmiennej syntetycznej, za którą można przyjąć:

- wartość maksymalną tej zmiennej:

$$\|Q\| = \max_i \{q_i\} \quad (i=1, \dots, n), \quad (7)$$

- statystyczną wartość maksymalną tej zmiennej:

$$\|Q\| = \bar{q} + 2s_q,$$

przy czym \bar{q} oraz s_q to średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe zmiennej syntetycznej,

- sumę wartości zmiennej:

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (9)$$

- rozstęp zmiennej:

$$\|Q\| = \max_i \{q_i\} - \min_i \{q_i\}. \quad (10)$$

Symbol q_i oznacza i -tą realizację zmiennej syntetycznej wyznaczoną według schematu¹⁵:

$$X \rightarrow X' \rightarrow C \rightarrow W \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow Q, \quad (11)$$

gdzie:

X — macierz realizacji zmiennych wyjściowych (pierwotnych),

X' — macierz zredukowana realizacji zmiennych diagnostycznych (finalnych),

C — kierunek preferencji zmiennych diagnostycznych w stosunku do zmiennej syntetycznej,

W — system wag zmiennych diagnostycznych,

N — sposób normalizacji zmiennych,

A — formuła agregacji zmiennych znormalizowanych,

Q — realizacje zmiennej syntetycznej (agregatowej).

W analizowanym przykładzie mierniki rozwoju (6) wyznacza się przyjmując, że norma zmiennej syntetycznej dana jest wzorem (8), natomiast realizacje zmiennej syntetycznej q_i ustala się korzystając z wag jednostkowych, normalizacji na O-1 oraz wykorzystaniu, jako formuły

¹⁵ Podany tu schemat nie jest jedyną możliwą procedurą wyznaczania zmiennych syntetycznych (są też znane inne metody jak gradientowa, nieliniowych odwzorowań itd.) jakkolwiek w praktyce schemat (11) stosowany jest najczęściej. Szersze omówienie algorytmów określania zmiennych syntetycznych można znaleźć m. in. w pracach: T. Borys, *Elementy teorii jakości*, Warszawa 1980; M. Cieślak, *Taksonomiczna procedura prognozowania rozwoju gospodarczego*, Przegląd Statystyczny 1974, z. 1; Z. Hellwig, *The Selection of a Set of „Core” Indicators of Socio-economic Development*, Paris 1972.

agregacji zmiennych znormalizowanych, odległości Euklidesa względem górnego bieguna zbioru¹⁶. Prowadzi to w rezultacie do wzoru:

$$q_i = \left[\frac{\sum_{j=1}^m (x'_{ij} - x'_{oj})^2}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, \dots, n), \quad (12)$$

gdzie x'_{ij} to znormalizowane na 0-1 wartości j -tej zmiennej diagnostycznej dla i -tego obiektu:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \quad (j=1, \dots, m), \quad (13)$$

przy czym \bar{x}_j , s_j to średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe j -tej zmiennej, natomiast x'_{oj} to współrzędne górnego bieguna zbioru (wzorca rozwoju) ustalane ze wzoru¹⁷:

$$x'_{oj} = \begin{cases} \max_i \{x'_{ij}\} & \text{dla stymulant} \\ \min_i \{x'_{ij}\} & \text{dla destymulant} \end{cases} \quad (j=1, \dots, m) \quad (14)$$

Symbole n , m w powyższych wzorach oznaczają jak zwykle liczbę obiektów i liczbę zmiennych diagnostycznych.

Mierniki rozwoju (zmiennie syntetyczne) w DWAP można wyznaczać dwoma różnymi sposobami. W pierwszym ustala się je oddzielnie dla każdego rozpatrywanego okresu czasu. Drugie podejście polega na jednorazowym wyznaczeniu mierników rozwoju na podstawie informacji mających postać „obiektookresów”. Obydwie metody prowadzą do macierzy mierników o jednakowych wymiarach $n \times k$, przy czym elementy tych macierzy różnią się w swej interpretacji.

W pierwszym przypadku agregatowe mierniki rozwoju umożliwiają uporządkowanie obiektów na skali rozwoju o charakterze statycznym. Faktu tego nie zmienia nawet uwzględnienie w rozważaniach szeregów czasowych tego rodzaju mierników rozwoju, ponieważ procedury normalizacji stosowane oddzielnie dla każdego okresu eliminują zmienność w czasie wartości mierników. Natomiast w drugim przypadku uzyskuje się syntetyczne mierniki rozwoju pozwalające nie tylko na uporządkowanie obiektów na skali rozwoju, ale także i na ocenę wielkości i kierunków zmian zachodzących w tym zakresie na przestrzeni analizowanego czasookresu. Z tych właśnie względów wydaje się, że mierniki

¹⁶ Wybór zastosowanego systemu wag, sposobu normalizacji i formuły agregacji wynika z przeprowadzonych analiz ich przydatności w procedurach porządkowania liniowego. Por. cytowaną pracę T. Grabińskiego *Wielowymiarowa analiza*.

¹⁷ Jest to najprostsza, statystyczna metoda określania współrzędnych wzorca rozwoju.

Tabela 1

Agregatowe mierniki poziomu życia krajów Europy w latach 1960- 1980

Lp.	1960		1965		1970		1975		1980	
	Kraj	q	Kraj	q	Kraj	q	Kraj	q	Kraj	q
1	CH	0,67	CH	0,71	GB	0,84	B	1,00	CH	1,17
2	DK	0,62	GB	0,69	CH	0,77	GB	0,95	B	1,16
3	GB	0,59	S	0,68	B	0,76	CH	0,94	GB	1,03
4	S	0,57	DK	0,67	DK	0,74	N	0,87	N	1,02
5	N	0,56	B	0,64	N	0,73	S	0,86	DK	0,98
6	NL	0,54	N	0,63	S	0,73	DK	0,86	SF	0,97
7	DD	0,51	D	0,57	D	0,66	D	0,82	S	0,96
8	B	0,50	DD	0,56	SF	0,63	NL	0,80	D	0,93
9	D	0,49	SF	0,54	DD	0,62	SF	0,78	NL	0,82
10	F	0,47	NL	0,53	A	0,58	F	0,74	A	0,80
11	A	0,47	A	0,53	NL	0,55	A	0,69	F	0,78
12	CS	0,41	F	0,52	F	0,54	DD	0,68	DD	0,75
13	SF	0,36	I	0,45	I	0,49	I	0,57	I	0,60
14	I	0,35	CS	0,44	CS	0,49	CS	0,53	CS	0,58
15	H	0,32	BG	0,42	BG	0,44	BG	0,51	BG	0,57
16	PL	0,31	H	0,40	H	0,43	PL	0,50	H	0,54
17	GR	0,29	PL	0,34	PL	0,38	H	0,47	GR	0,50
18	BG	0,23	GR	0,33	GR	0,37	E	0,44	E	0,50
19	E	0,21	R	0,32	R	0,34	GR	0,43	PL	0,47
20	R	0,17	E	0,24	E	0,33	P	0,41	R	0,42
21	P	0,14	P	0,22	YU	0,27	R	0,37	YU	0,40
22	YU	0,01	YU	0,21	P	0,25	YU	0,35	P	0,40

„dynamiczne” ustalane na podstawie zmiennych znormalizowanych w przekroju „obiektookresów” są bardziej przydatne do celów DWAP.

Wartości mierników poziomu życia krajów Europy otrzymane przy pomocy tej metody podane są w tab. 1. Mierniki te¹⁸ dotyczą wybranych lat i są uporządkowane malejąco, co wyznacza zarazem kolejność krajów na skali poziomu życia (od kraju o najwyższym do kraju o najniższym poziomie życia).

V. PROGNOZY SYNTETYCZNYCH MIERNIKÓW ROZWOJU

Syntetyczne mierniki rozwoju pozwalają na zredukowanie wyjściowej macierzy obserwacji X o wymiarach $n \times m \times k$ do macierzy dwuwymiarowej $n \times k$ zawierającej dla każdego obiektu realizacje zmiennych

¹⁸ Dla ułatwienia interpretacji zmieniono tu kierunek preferencji mierników rozwoju stosując przekształcenie:

$$q_i' = q_i - \max_i \{q_i\}$$

dzięki czemu wysokie wartości mierników rozwoju odpowiadają krajom o wysokim poziomie życia.

syntetycznych w postaci k -elementowych szeregów czasowych. Szeregi te można wykorzystać do oszacowania parametrów modeli tendencji rozwojowych:

$$q_{it} = f_i(t, \xi) \quad (i=1, \dots, n; t=1, \dots, k), \quad (15)$$

gdzie q_{it} jest miernikiem rozwoju i -tego obiektu w okresie t , natomiast ξ jest składnikiem losowym. Modele (15) stanowią podstawę konstruowania prognoz mierników rozwoju w drodze ekstrapolacji ich tendencji rozwojowych¹⁹.

W przeprowadzonych badaniach dla każdego kraju oszacowano metodą najmniejszych kwadratów po 21 modeli tendencji rozwojowych dwu- i trójparametrowych, w których postać analityczna funkcji trendu (15) określona była przez liniowe, logarytmiczne, odwrotnościowe i kwadratowe transformacje mierników rozwoju g_{it} oraz (lub) zmiennej czasowej t . Jak się okazało najlepsze rezultaty (z punktu widzenia stop-

Tabela 2

Oceny parametrów funkcji trendu agregatowych mierników
poziomu życia krajów Europy

Lp.	Kraj	Funkcja liniowa				Funkcja wykładnicza				f
		a	b	$t(b)$	V_p	a	b	$t(b)$	V_p	
1	A	0,430	1,63	22,1	2,9	0,450	2,68	30,7	2,6	W
2	B	0,439	3,33	31,7	2,7	0,491	4,29	47,6	2,7	L
3	BG	0,280	1,45	14,4	5,1	0,290	3,65	10,1	10,8	L
4	CS	0,398	0,86	38,8	1,1	0,404	1,77	37,6	1,4	L
5	DK	0,560	1,90	23,4	2,5	0,580	2,48	30,6	2,4	W
6	SF	0,354	2,73	36,0	2,4	0,393	4,42	25,6	5,2	L
7	F	0,422	1,75	13,7	4,8	0,443	2,85	14,5	5,9	L
8	GR	0,258	1,10	19,1	3,5	0,271	2,92	20,4	4,3	L
9	E	0,168	1,62	22,2	4,2	0,194	4,99	22,1	6,7	L
10	NL	0,425	2,10	9,4	7,7	0,456	3,17	9,2	10,3	L
11	YU	0,048	1,87	18,3	6,8	0,044	14,13	4,7	85,9	L
12	N	0,490	2,39	24,9	2,9	0,522	3,21	39,1	2,5	W
13	DD	0,493	1,24	49,6	1,0	0,503	1,99	48,8	1,2	L
14	PL	0,286	1,04	10,9	5,6	0,296	2,66	12,1	6,6	L
15	P	0,129	1,43	16,4	6,0	0,153	5,36	18,4	8,6	L
16	D	0,435	2,31	31,6	2,4	0,467	3,42	52,3	2,0	W
17	R	0,207	1,07	12,3	6,0	0,213	3,67	9,0	12,2	L
18	CH	0,574	2,36	12,5	5,3	0,608	2,77	15,1	5,5	L
19	S	0,539	2,00	26,0	2,4	0,560	2,67	32,5	2,4	W
20	H	0,320	1,03	25,6	2,2	0,330	2,43	22,9	3,2	L
21	GR	0,563	2,37	41,3	1,6	0,584	3,01	26,9	3,3	L
22	I	0,355	1,27	31,7	1,9	0,366	2,66	23,3	3,4	L

¹⁹ Jest to najprostszy schemat prognozowania w oparciu o macierz realizacji mierników rozwoju $Q(n, k)$. Do celów predykcji można też wykorzystać szereg metod jak modele adaptacyjne, segmentowe, autoregresyjne i inne

Kształtowanie się wartości prognoz mierników poziomu życia w latach 1981-1990 przedstawione jest na ryc. 3. Prognozy te otrzymano wykorzystując dla każdego z krajów funkcję trendu dającą mniejsze błędy predykcji. Wykresy przytoczone na ryc. 3 ilustrują zarówno przewidywane kierunki zmian agregatowych mierników poziomu życia poszczególnych krajów jak i wzajemne relacje w poziomach tych mierników pomiędzy krajami.

VI. GRUPOWANIE OBIEKTÓW WEDŁUG SYNTETYCZNYCH MIERNIKÓW ROZWOJU

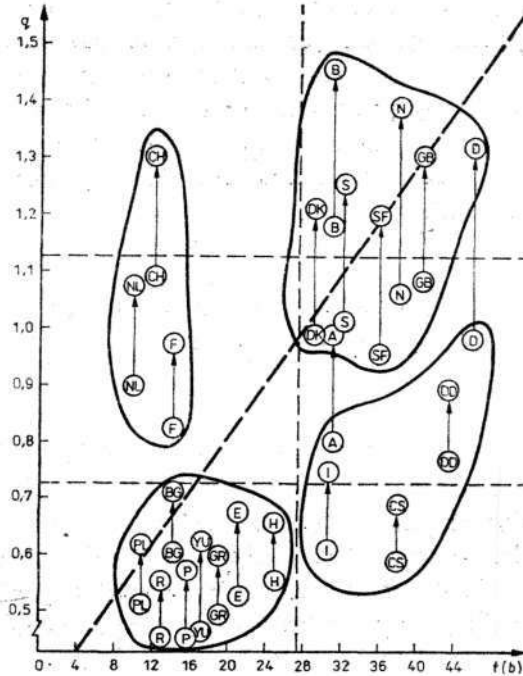
Agregatowe mierniki rozwoju mogą stanowić podstawę do podziału obiektów na grupy jednorodne z punktu widzenia osiągniętego w danym okresie stopnia rozwoju. Grupowanie odbywa się w tym przypadku w oparciu o pojedyncze zmienne, w związku z czym algorytmy delimitacji są tu stosunkowo łatwe i w ostateczności mogą bazować na wzrokowej ocenie rozkładu obiektów według wielkości mierników rozwoju²¹. Na ryc. 3 zaznaczono grupy krajów o zbliżonym poziomie rozwoju w początkowym i końcowym okresie prognozowanym.

Dalsze możliwości grupowania krajów uzyskuje się uwzględniając nie tylko osiągnięty poziom ich rozwoju, ale także i tempo rozwoju, mierzone na przykład wartością statystyki studenta współczynnika kierunkowego. funkcji trendu $t(b)$, wykorzystywanej do prognozowania mierników rozwoju²². Na ryc. 4 zamieszczono diagram korelacyjny przedstawiający zależność mierników poziomu życia krajów Europy w dwóch latach 1980 i 1990 od tempa ich zmian w czasie. Wykres ten ilustruje zarazem wielkość i kierunek zmian poziomu życia analizowanych krajów w okresie 1980-1990, równych długości pionowych odcinków łączących identyfikatory krajów w okresie wyjściowym i końcowym.

Ponadto osie współrzędnych wykresu podzielono na 2 lub 3 części, dzięki czemu otrzymano grupy krajów o zbliżonym poziomie życia i tempie jego zmian. Kraje znajdujące się w lewym dolnym rogu wykresu mają niski poziom życia oraz relatywnie niewielkie tempo jego wzrostu. Kraje położone w prawym górnym rogu wykresu są w najkorzystniejszej sytuacji, ponieważ charakteryzują się nie tylko wysokim

²¹ Bardziej poprawne jest wykorzystanie algorytmów grupowania wariancyjnego podanych w pracy: J. Steczkowski, *Statystyczna procedura określania struktury zbiorowości*, Kraków 1970. (Publikacja WSE w Serii Rozpraw Habilitacyjnych nr 21).

²² W przypadku predykcji mierników rozwoju w oparciu o funkcje trendu mające jednakową postać analityczną dla każdego kraju (np. tylko funkcje wykładnicze) tempo zmian mierników rozwoju można byłoby określić przy pomocy współczynników kierunkowych tych funkcji.



Ryc. 4. Zależność między miernikami poziomu życia a tempem jego rozwoju

poziomem życia, ale także i dużym tempem jego wzrostu. Pozytywnie należy także ocenić sytuację krajów znajdujących się poniżej głównej przekątnej wykresu. Wprawdzie mają one niski poziom życia, ale wysokie tempo jego wzrostu pozwala im na przesuwanie się do grup o wyższym poziomie życia. Odwrotnie jest natomiast z krajami położonymi powyżej głównej przekątnej.

VII. OCENA OPÓŹNIEŃ W POZIOMIE ROZWOJU OBIEKTÓW

Parametry funkcji trendu agregatowych mierników rozwoju można wykorzystać do oceny opóźnień czasowych pomiędzy poszczególnymi obiektami. Wielkość opóźnienia pomiędzy analizowanym obiektem a obiektem bazowym (wzorcowym) w okresie t równa jest liczbie jednostek czasu, które muszą upłynąć, aby analizowany obiekt uzyskał poziom rozwoju właściwy dla obiektu bazowego w tym samym okresie t . Opóźnienie może być dodatnie lub ujemne w zależności od aktualnych poziomów rozwoju porównywanych obiektów. Opóźnienie analizowanego obiektu w stosunku do różnych obiektów bazowych jest inne, a jego wielkość zmienia się w czasie.

Tabela 3

Wzory określające wielkość międzyobiektowych opóźnień czasowych

Obiekt	Funkcje	Wzór
analizowany bazowy	L L	$\Delta_i(t) = \frac{a_o - a_i}{b_i} + \left(\frac{b_o}{b_i} - 1 \right) t$
analizowany bazowy	L W	$\Delta_i(t) = \frac{\lg a_i}{\lg b_i} + \frac{\lg(a_o - b_o t)}{\lg b_i} - t$
analizowany bazowy	W L	$\Delta_i(t) = -\frac{a_i}{b_i} + \frac{a_o}{b_i} b_o^t - t$
analizowany bazowy	W W	$\Delta_i(t) = \frac{\lg a_o - \lg a_i}{\lg b_i} + \left(\frac{\lg b_o}{\lg b_i} - 1 \right) t$

Przyjmując, że kształtowanie się mierników rozwoju w czasie można wyrazić przy pomocy liniowych (L) lub wykładniczych (W) funkcji trendu danych wzorami (16) i (17) oraz że funkcje te mogą dotyczyć zarówno obiektu analizowanego, jak i bazowego otrzymuje się cztery różne formuły określające wielkość opóźnień czasowych (por. tab. 3).

We wzorach podanych w tab. 3 symbole a_o , b_o oznaczają parametry liniowej lub wykładniczej funkcji trendu dla obiektu analizowanego, natomiast a_i , b_i odpowiednie parametry dla obiektu bazowego. Przytoczone formuły pozwalają bezpośrednio wyznaczać wielkość opóźnienia obiektu analizowanego $\Delta_i(t)$ od i -tego obiektu bazowego w okresie t ($t=1, \dots, k$). Jak można zauważyć opóźnienia czasowe $\Delta_i(t)$ określone są na poziomie wielkości zmiennej czasowej t w funkcji trendu mierników rozwoju obiektu bazowego, dla której teoretyczna wartość mierników rozwoju tego obiektu równa jest teoretycznej wartości miernika rozwoju obiektu analizowanego w kolejnych okresach $t=1, \dots, k$. W pierwszym i czwartym przypadku opóźnienia czasowe są liniową funkcją zmiennej czasowej, natomiast w pozostałych przypadkach są to funkcje złożone.

; W tab. 4 podano oceny opóźnień Polski w stosunku do pozostałych krajów Europy w zakresie poziomu życia w wybranych latach okresu 1960-1990. Podstawą obliczeń były tu parametry liniowych lub wykładniczych funkcji trendu agregatowych mierników rozwoju, przy czym dla każdego kraju wybierano funkcję lepiej aproksymującą wartości empiryczne mierników (informacje o wybranych typach funkcji podane są w ostatniej kolumnie tab. 4).

Ponadto w tab. 4 zamieszczono współczynniki kierunkowe b_i oraz b_w liniowych funkcji trendu określających wielkość opóźnień w zależności od zmiennej czasowej. Pierwszy z tych parametrów odnosi się do sytuacji, w której obydwie funkcje trendu mierników rozwoju (dla kraju, bazowego i Polski) mają postać liniową, natomiast drugi parametr dotyczy przypadku, gdy obydwie te funkcje są funkcjami wykładniczy-

Tabela 4

Opóźnienia Polski w zakresie poziomu życia w stosunku do pozostałych krajów Europy w okresie 1960 - 1990

Lp.	Kraj	1960	1970	1980	1990	$10b_l$	$10b_w$	f
1	A	-16,8	-15,4	-16,7	-19,6	-3,6	-0,8	W
2	B	-5,3	-12,2	-19,0	-25,9	-6,9	-3,8	L
3	BG	0,1	-2,7	-5,5	-8,4	-2,8	-2,7	L
4	CS	-12,7	-10,7	-8,6	-6,5	2,1	4,9	L
5	DK	-28,4	-26,1	-26,7	-29,0	-4,5	0,7	W
6	SF	-3,1	-9,3	-15,5	-20,7	-6,2	-4,1	L
7	F	-8,2	-12,2	-16,3	-20,3	-4,1	-0,7	L
8	GR	2,5	1,9	1,3	0,9	-0,5	-0,9	L
9	E	6,9	3,3	-0,2	-3,8	-3,5	-4,5	L
10	NL	-7,1	-12,2	-17,2	-22,3	-5,0	-1,6	L
11	YU	12,3	7,8	3,4	-1,0	-4,4	-7,8	L
12	N	-18,9	-19,4	-22,1	-26,2	-5,6	-1,7	W
13	DD	-16,9	-18,5	-20,1	-21,7	-1,6	3,3	L
14	PL	-	-	-	-	-	-	L
15	P	10,7	8,0	5,3	2,5	-2,7	-4,9	L
16	D	-14,5	-15,6	-18,7	-23,1	-5,5	-2,2	W
17	R	7,4	7,1	6,8	6,5	-0,3	-2,7	L
18	CH	-12,9	-18,4	-23,9	-29,5	-5,6	-0,4	L
19	S	-25,1	-23,7	-25,0	-27,9	-4,8	-0,1	W
20	H	-3,3	-3,2	-3,1	-3,0	0,1	1,0	L
21	GB	-12,2	-17,9	-23,5	-29,1	-5,6	-1,2	L
22	I	-5,6	-7,4	-9,2	-11,0	-1,8	0,0	L

mi²³. Wartości współczynników kierunkowych b_l oraz b_w pomnożono przez 10, w związku z czym informują one o ile wzrośnie lub spadnie (w zależności od znaku parametru) wielkość opóźnienia Polski od kraju bazowego w okresie 10 lat.

Jak wynika z przytoczonych informacji w badanym czasokresie tylko 5 krajów (GR, E, R, P, YU) jest opóźnionych w zakresie poziomu życia w stosunku do Polski²⁴, natomiast w porównaniu z wszystkimi innymi krajami obserwuje się zjawisko odwrotne. Opóźnienie Polski do takich krajów, jak H, CS, BG, I jest niewielkie (rzędu 3 - 9 lat w roku 1980), podczas gdy w stosunku do pozostałych krajów opóźnienie to jest znaczne i wynosi w roku 1980 od 16 do 27 lat.

Tendencje w kształtowaniu się opóźnień Polski do pozostałych krajów w zakresie poziomu życia są niekorzystne. Tylko w porównaniu

²³ Ponieważ dla Polski właściwszą funkcją odzwierciedlającą przebieg mierników rozwoju jest funkcja liniowa, dlatego też w trakcie analizy należy korzystać z parametrów b_l i to w przypadku, gdy mierniki rozwoju dla kraju bazowego również przebiegają według funkcji liniowej. Pozostałe wartości parametrów b_l oraz b_w podano dla celów porównawczych.

²⁴ „Wyrzucenie” Polski w stosunku do tych krajów w roku 1980 szacowane jest na 2-7 lat.

z CSRS obserwuje się spadek opóźnienia (o 2 lata w ciągu każdego dziesięciolecia). Opóźnienie Polski do R, GR utrzymuje się w całym badanym okresie na stałym poziomie. Natomiast w stosunku do wszystkich pozostałych krajów opóźnienie Polski wzrasta. Najwięcej do Belgii (o 7 lat w ciągu 10 lat) oraz SF, GB, CH, N, NL, S (o 5-6 lat w okresie każdych 10 lat).

ZAKOŃCZENIE

Z przeprowadzonych rozważań nasuwają się następujące wnioski ogólne:

1. Wielowymiarowa analiza porównawcza stanowi obecnie odrębną gałąź statystyki (ściśle powiązaną z innymi gałęziami, a zwłaszcza taksonometrią) o wyraźnie sprecyzowanej problematyce, specyficznych metodach i technikach badawczych oraz znacznym dorobku w zakresie zastosowań empirycznych.

2. Jednym z możliwych kierunków rozwoju WAP jest opracowanie procedur dynamicznej i sektorowej wielowymiarowej analizy porównawczej (DWAP, SWAP). Pozwala to na określenie kierunków i wielkości zmian w czasie w rozpatrywanych prawidłowościach strukturalnych oraz ocenę stopnia i charakteru zależności między zbiorami zmiennych.

3. Metody DWAP pozwalają na analizę statystyczną danych ujmowanych w postaci macierzy trójwymiarowych (obiekty, zmienne, okresy czasu). Analiza prawidłowości strukturalno-dynamicznych nie sprawia wiele kłopotów dzięki sprowadzeniu danych wejściowych do macierzy dwuwymiarowych (obiekty, okresy czasu), przy stosunkowo niewielkich stratach informacji wynikających z zastąpienia zbioru zmiennych diagnostycznych przez jedną zmienną syntetyczną.

4. Warunkiem efektywnego stosowania metod DWAP i SWAP jest dysponowanie obszernymi bazami danych empirycznych, zawierającymi porównywalne, wiarygodne i kompletne informacje statystyczne. Wymaga to szerszego stosowania w badaniach ETO.

5. Syntetyczne mierniki rozwoju w DWAP lepiej jest wyznaczać normalizując zmienne w przekroju wszystkich badanych okresów (tzw. „obiektookresy”) niż oddzielnie w ramach każdego okresu. W przypadku stosowania wzorcowych formuł agregacji współrzędne punktów—wzorców również powinny opierać się na informacjach w postaci „obiektookresów”.

6. Zmiany syntetycznych mierników poziomu życia krajów Europy w latach 1960-1980 najlepiej można opisać przy pomocy liniowych funkcji trendu, a w dalszej kolejności funkcji wykładniczych.

7. Syntetyczne mierniki poziomu życia krajów Europy charakteryzują się na ogół regularnym przebiegiem w czasie, w związku z czym moż-

liwe jest ich prognozowanie krótko- i średniookresowe. Wielkości względnych błędów predykcji *ex ante* na okres do 5 lat zawierają się w granicach 1 - 8%.

8. DWAP pozwala na grupowanie obiektów nie tylko w jednowymiarowych przestrzeniach zmiennej syntetycznej, ale także i na podziały; w których uwzględnia się kilka kryteriów równocześnie. Szczególnie interesująca jest klasyfikacja obiektów z punktu widzenia poziomu i tempa ich rozwoju.

9. Przy pomocy mierników DWAP można szacować wielkości opóźnień czasowych pomiędzy dowolnymi obiektami ze względu na agregatywne miary rozwoju. Analiza opóźnień Polski w stosunku do większości krajów Europy w zakresie poziomu życia wykazuje zarówno znaczne wielkości tych opóźnień (rzędu 16 - 27 lat w roku 1980), jak i niekorzystne tendencje w tym względzie (wzrost opóźnień przeciętnie o 5-7 lat w ciągu 10 lat).

SELECTED PROBLEMS OF A DYNAMIC MULTIDIMENSIONAL COMPARATIVE ANALYSIS

Summary

The work presents assumptions, methods and technics of proceeding elaborated in a multidimensional comparative analysis applied to examine dynamics of economic phenomena. The study is illustrated with the example of analysis of living standard of 22 European states in the years 1960 - 80 on the grounds of 7 diagnostic variables selected from a wider 18-element set of initial variables. Prognoses of synthetic measures of the living standard till 1990 have been constructed, European states are grouped from the viewpoint of a degree and a pace of changes in the living standard. Brackwardness of Poland in relation to other European states in that respect is also estimated.