

EWA FILIPOWICZ

OCENA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ PORTFELA FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH

I. WSTĘP

Kilka ostatnich lat było okresem rozwoju rynków finansowych, ale również dużych strat ponoszonych przez inwestorów, a przez to większego ich zainteresowania metodami wyznaczania oraz kontrolowania ryzyka. Konieczność stosowania metod zarządzania ryzykiem wynika z zaobserwowanego wzrostu zmienności cen instrumentów finansowych¹, jak również pojawienia się wielu nowych produktów finansowych, będących kolejnymi źródłami ryzyka. Należy zauważyć, że produkty rynku finansowego są ze sobą wzajemnie powiązane, co przyczynia się do trudniejszego kontrolowania nieakceptowanego poziomu ryzyka ponoszonego przez inwestorów, a tym samym zmusza instytucje nadzorujące rynek, analityków rynku, jak również praktyków – do poszukiwania nowych, dokładniejszych metod pomiaru i lepszych metod kontroli ryzyka.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie koncepcji wartości zagrożonej (VaR), która stanowi jeden z najczęściej wykorzystywanych sposobów pomiaru ryzyka. Oszacowania wartości zagrożonej portfela, składającego się z jednostek uczestnictwa dwóch otwartych akcyjnych funduszy inwestycyjnych, przeprowadzone zostały z wykorzystaniem wektora warunkowych wartości oczekiwanych oraz macierzy warunkowej wariancji – kowariancji, wyznaczonych na podstawie wielowymiarowego modelu GARCH z rozkładem t -Studenta.

W pierwszej części pracy zostanie przedstawiona definicja oraz klasyfikacja ryzyka, w drugiej – koncepcja wartości zagrożonej, a w trzeciej model diagonalny BEKK oraz sposób wyznaczenia wartości zagrożonej na podstawie prognozy warunkowej średniej, wariancji oraz kowariancji. Następnie omówiony zostanie test Kupca, test Christoffersena oraz definicja oczekiwanego niedoboru – pozwalają one określić jakość oszacowanej wartości zagrożonej i jej prognoz, otrzymanych z przeprowadzonego badania w ostatniej części pracy.

¹ Początek okresu wzrostu zmienności instrumentów finansowych na światowym rynku finansowym przypada na połowę lat 70. ubiegłego wieku.

II. DEFINICJA I KLASYFIKACJA RYZYKA

Samo pojęcie ryzyka bywa różnie rozumiane. Intuicyjnie, koncentrując się tylko na negatywnych jego skutkach, ryzyko definiowane jest jako możliwość zajścia zdarzenia gorszego od oczekiwanego. Druga definicja, zwana neutralną, określa ryzyko jako przedsięwzięcie, którego wynik nie jest znany. W tym wypadku efektem występowania ryzyka mogą być zarówno zysk, jak i strata².

Źródła niepewności co do przyszłego kształtowania się stopy zwrotu mogą być różne i są one przesłanką wyróżnienia czterech podstawowych typów ryzyka. Pierwszy z nich to ryzyko kredytowe, związane z możliwą stratą spowodowaną niezdolnością partnera w interesach do wywiązywania się z przyjętych zobowiązań. Drugi – to ryzyko płynności, związane z zagrożeniem utraty zdolności do wywiązywania się z bieżących zobowiązań płatniczych, spowodowane koniecznością realizacji nieoczekiwanych, dużych przepływów pieniężnych w krótkim okresie. Kolejne typy to ryzyko operacyjne – ryzyko strat wynikające z nieodpowiednich lub zawodnych systemów zarządzania oraz niewystarczającej kontroli. Ostatnie, a zarazem najważniejszy, to ryzyko rynkowe, określające potencjalną stratę spowodowaną zmianami warunków rynkowych. Wśród metod służących do pomiaru ryzyka rynkowego portfela aktywów coraz większą popularnością wśród instytucji finansowych cieszy się metoda *Value at Risk* (VaR).

III. ISTOTA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ

Value at Risk jest miarą opierającą się wyłącznie na negatywnych skutkach ryzyka. Wartość zagrożona jest to strata wartości rynkowej np. instrumentu lub portfela, jaka może być zrealizowana, przy czym prawdopodobieństwo osiągnięcia jej lub przekroczenia w zadanym horyzoncie czasowym jest równe ustalonemu poziomowi tolerancji³. VaR pozwala określić, jaka część portfela w danym okresie jest zagrożona stratą przy ustalonym poziomie istotności. Koncepcja wartości zagrożonej jest zatem bardzo prosta, gdyż sprowadza ona ocenę ryzyka rynkowego, związanego z danym portfelem, do wyznaczenia tylko jednej liczby. Powyższy fakt przyczynił się do szerokiego wykorzystywania jej przez instytucje finansowe przyjmujące na siebie ryzyko i instytucje je nadzorujące.

Formalnie wartość zagrożona to liczba $VaR(\alpha)$, spełniająca następujące równanie⁴:

$$P(p_t < p_{t-1} - VaR(\alpha)) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie p_t oznacza wartość analizowanego portfela w momencie t , zaś α – zadany poziom istotności z przedziału $(0; 1)$.

² K. Jajuga, T. Jajuga, *Inwestycje, instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWE, Warszawa 2006, s. 179.

³ *Ibidem*, s. 188.

⁴ *Ibidem*.

Biorąc pod uwagę szereg procentowych logarytmicznych stóp zwrotu $r_t = 100 \cdot (\ln p_t - \ln p_{t-1})$, wartość zagrożoną można wyrazić w przybliżeniu za pomocą wzoru⁵:

$$P(r_t \leq -\text{VaR}(x)) = \alpha, \quad (2)$$

wobec tego $\text{VaR}(x)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu r_t .

W celu uwzględniania właściwości finansowych szeregów stóp zwrotu, takich jak zgrupowania zmienności, do szacowania wartości zagrożonej należy wykorzystać kwantyle warunkowych rozkładów stóp zwrotu. Wówczas wartość zagrożona na poziomie istotności α dla inwestora zajmującego pozycję dłużą ($\text{VaR}_t^l(x)$) i krótką ($\text{VaR}_t^s(x)$) można wyrazić za pomocą następujących równań⁶:

$$P(r_t \leq -\text{VaR}_t^l(x) | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha, \quad (3)$$

$$P(r_t \geq \text{VaR}_t^s(x) | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha, \quad (4)$$

gdzie \mathcal{F}_{t-1} jest zbiorem dostępnych informacji do momentu $t-1$ włącznie.

IV. WIELOWYMIAROWY MODEL GARCH

Przyjmijmy wielowymiarowy szereg stóp zwrotu $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{n,t})'$. Wektor ten możemy opisać równaniem:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{y}_t, \quad (5)$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_t$ jest średnią warunkową wektora \mathbf{r}_t pod warunkiem zbioru informacji \mathcal{F}_{t-1} dostępnych do momentu $t-1$ włącznie. Składniki wektora warunkowej wartości oczekiwanej $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{1,t}, \mu_{2,t}, \dots, \mu_{n,t})'$ są wyrażone za pomocą średniej warunkowej jednowymiarowego modelu ARMA(p,q) określonej wzorem⁷:

$$\mu_{i,t} = a_{i0} + \sum_{j=1}^p a_{ij} r_{i,t-j} - \sum_{j=1}^q b_{ij} \varepsilon_{i,t-j}. \quad (6)$$

Oznaczmy przez \mathbf{H}_t macierz kowariancji warunkowych. Wówczas proces $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{n,t})'$ dla ogólnego k -wymiarowego modelu GARCH jest następującej postaci:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (7)$$

gdzie \mathbf{H} jest dodatnio określoną macierzą spełniającą warunek $\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_t$, zaś $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ jest n -wymiarowym procesem niezależnych zmiennych losowych o zerowej średniej i jednostkowej macierzy kowariancji $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim iid(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.

⁵ M. Doman, R. Doman, *Modelowanie zmienności i ryzyka, Metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer, Kraków 2009, s. 198.

⁶ Ibidem, s. 201.

⁷ Ibidem, s. 78.

Każda z grup wielowymiarowego modelu GARCH określona jest przez odpowiednią specyfikację macierzy kowariancji warunkowych. Z definicji macierz ta jest dodatnio określona, jednak dla pewnych modeli z rodziny GARCH określenie warunków, jakie powinny być spełnione przez parametry modelu, jest trudne. Modelem, z którego postaci bezpośrednio wynika spełnienie powyższego założenia, jest model BEKK(p, q) następującej postaci⁸:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{j=1}^q \mathbf{A}'_j \mathbf{y}_{t-j} \mathbf{y}'_{t-j} \mathbf{A}_j + \sum_{j=1}^p \mathbf{G}'_j \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{G}_j, \quad (8)$$

gdzie: \mathbf{C} , \mathbf{A}_j , \mathbf{G}_j są macierzami $n \times n$, przy czym \mathbf{C} jest macierzą górno-trójkątną. Chociaż model ten charakteryzuje się dużą dokładnością opisu, to wymaga on szacowania dużej liczby parametrów, co niewątpliwie uważa się za jego dużą wadę. W praktyce ze względu na ten problem stosuje się uproszczone wersje tego modelu.

Jedną z nich jest diagonalny model BEKK (Diag – BEKK), który zakłada dodatkowo diagonalną postać macierzy \mathbf{A}_j oraz \mathbf{G}_j . Fakt ten upraszcza procedurę estymacji modelu, jednocześnie zmniejszając stopień ogólności modelu. Macierz warunkowych kowariancji wyznaczona zgodnie ze specyfikacją Diag – BEKK dla GARCH(1,1) opisana jest równaniem:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \mathbf{A}'_1 \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}'_{t-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{G}'_1 \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{G}_1. \quad (9)$$

Jeśli przez $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ oznaczymy wektor wag rozpatrywanego portfela, to wartość zagrożoną portfela dla pozycji długiej oraz krótkiej można opisać równaniem:

$$\text{VaR}_{t+1}^L(\alpha) = - \left(\mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}_t(1) + z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}' \mathbf{H}_t(1) \mathbf{w}} \right), \quad (10)$$

$$\text{VaR}_{t+1}^S(\alpha) = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}_t(1) + z_{1-\alpha} \sqrt{\mathbf{w}' \mathbf{H}_t(1) \mathbf{w}}, \quad (11)$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_t(1)$, $\mathbf{H}_t(1)$ oznaczają odpowiednio jednodniowe prognozy wektora warunkowej wartości oczekiwanej oraz macierzy kowariancji warunkowych, zaś z_α oraz $z_{1-\alpha}$ są α - oraz $(1-\alpha)$ kwantylami zmiennej ε_t o wielowymiarowym standaryzowanym rozkładzie t -Studenta z ν stopniami swobody, otrzymanymi z oszacowanego wielowymiarowego modelu GARCH.

V. OCENA JAKOŚCI OSZACOWAŃ VaR

Znając oszacowania wartości zagrożonej oraz wartość zrealizowanej stopy zwrotu, można określić liczbę przekroczeń oszacowań VaR, która służy ocenie przydatności wykorzystanej metody na tle innych wykorzystywanych metod.

⁸ R. F. Engle, K. F. Kroner, *Multivariate Simultaneous Generalized Arch*, „Econometric Theory” 11, 1995, nr 1, s. 127.

Techniką temu służącą jest tzw. testowanie wsteczne (*backtesting*), które polega na analizie liczby przekroczeń oszacowań VaR w przeszłości. Ocena ta opiera się na założeniu, że udział przekroczeń wartości zagrożonej wyznaczonej przez model w stosunku do wszystkich rzeczywiście zrealizowanych zwrotów portfela w próbie powinien być bliski założonemu poziomowi istotności α .

Najczęściej wykorzystywanym w ocenie jakości oszacowanego VaR-u jest test Kupca o następującym układzie hipotez:

$$\begin{aligned} H_0 : f &= \alpha, \\ H_1 : f &\neq \alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie f oznacza udział przekroczeń zrealizowanych zwrotów.

Niech I będzie ciągiem zer i jedynek przyjmującym podane wartości w zależności od oszacowanej wartości zagrożonej portfela dla długiej i krótkiej pozycji oraz faktycznie realizowanego poziomu stopy zwrotu. Elementy tego ciągu przyjmują następujące wartości:

$$I_t = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r_t \geq -\text{VaR}_t^L(\alpha) \\ 1, & \text{gdy } r_t < -\text{VaR}_t^L(\alpha) \end{cases} \tag{13}$$

lub

$$I_t = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r_t \leq -\text{VaR}_t^S(\alpha) \\ 1, & \text{gdy } r_t > -\text{VaR}_t^S(\alpha) \end{cases} \tag{14}$$

Wówczas statystyka testowa jest następującej postaci⁹:

$$LR_K = 2 \left(\ln \left(\left(\frac{T_1}{T_0 + T_1} \right)^{T_1} \left(1 - \frac{T_1}{T_0 + T_1} \right)^{T_0} \right) - \ln(\alpha^{T_1} (1 - \alpha)^{T_0}) \right), \tag{15}$$

przy czym $T_1 = \sum_t I_t$ jest liczbą przekroczeń, zaś $T_0 + T_1$ – liczbą obserwacji. Przy prawdziwej hipotezie zerowej statystyka LR_K ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$.

Test ten weryfikuje, czy udział przekroczeń jest zgodny z zadanyim poziomem istotności. Wobec tego hipoteza zerowa tego testu jest odrzucana, niezależnie od tego, czy model niedoszacowuje, czy przeszacowuje wartość zagrożoną.

Ponadto istotne dla inwestorów są miary określające, ile mogą oni stracić w wypadku gdy oszacowany model VaR zawiedzie. Pierwszą z nich jest oczekiwany niedobór (ESF1), rozumiany jako wartość oczekiwanej straty pod

⁹ D. Papla, K. Piontek, Wykorzystanie wielorównaniowych modeli AR-GARCH w pomiarze ryzyka metodą VaR, w: W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga (red.), *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a polski rynek*, t. 2 (Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1088), Wrocław 2005, s. 134.

warunkiem, że strata będzie większa niż VaR. ESF1 dla pozycji długiej oraz krótkiej wyraża się wzorami:

$$\text{ESF1}^L = E(r_t | (r_t < -\text{VaR}_t^L(\alpha))), \quad (16)$$

$$\text{ESF1}^S = E(r_t | (r_t > \text{VaR}_t^S(\alpha))). \quad (17)$$

Druga zaś – jest średnim stosunkiem zrealizowanej straty do straty oczekiwanej, wyrażonym dla obu pozycji równaniami:

$$\text{ESF2}^L = E\left(\frac{r_t}{-\text{VaR}_t^L(\alpha)} | (r_t < -\text{VaR}_t^L(\alpha))\right), \quad (18)$$

$$\text{ESF2}^S = E\left(\frac{r_t}{\text{VaR}_t^S(\alpha)} | (r_t > \text{VaR}_t^S(\alpha))\right). \quad (19)$$

Bardzo ważny jest również rozkład przekroczeń wartości zagrożonej przez zrealizowane zwroty. Model może być uznany za poprawny wtedy i tylko wtedy, gdy rozmieszczenie przekroczeń próbie jest równomierne. Jeśli przekroczenia VaR miałyby miejsce w krótkich odstępach czasu, oznaczałoby to, że model przeszacowuje wartość zagrożoną i nie spełnia swojej funkcji zabezpieczającej w sytuacjach trudnych, takich jak wzrost zmienności na rynku. W tym celu dodatkowo, oprócz badania weryfikującego liczbę przekroczeń wartości zagrożonej, przeprowadza się testy sprawdzające, czy przekroczenia te są niezależne w czasie. Najczęściej wykorzystuje jest test Christoffersena o następującym układzie hipotez:

$$H_0: \text{przekroczenia są niezależne w czasie}, \quad (20)$$

$$H_1: \text{przekroczenia są zależne w czasie}.$$

Statystyka testowa testu Christoffersena jest wyrażona za pomocą wzoru¹⁰:

$$\begin{aligned} LR_{ind} = & 2\ln\left(\left(1 - \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}\right)^{T_{00}} \left(\frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}\right)^{T_{01}} \left(1 - \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}\right)^{T_{10}} \left(\frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}\right)^{T_{11}}\right) \\ & - 2\ln\left(\left(\frac{T_{10} + T_{11}}{T_{00} + T_{01} + T_{10} + T_{11}}\right)^{T_{10} + T_{11}} \left(1 - \frac{T_{10} + T_{11}}{T_{00} + T_{01} + T_{10} + T_{11}}\right)^{T_{00} + T_{01}}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie T_{ij} oznacza liczbę okresów, dla których $I_t = j$ oraz $I_{t-1} = i$. Przy prawdziwej hipotezie zerowej statystyka LR_{ind} ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$.

¹⁰ P. Christoffersen, D. Pelletier, *Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach*, „Journal of Financial Econometrics” 2, 2004, nr 1, s. 91.

W praktyce, ze względu na fakt, że T_{11} bardzo często przyjmuje wartość zero, statystyka opisana równaniem (21) zastępowana jest wzorem¹¹:

$$LR_{ind} = 2\ln\left(\left(1 - \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}\right)^{T_{00}} \left(\frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}\right)^{T_{01}}\right) - 2\ln\left(\left(\frac{T_{10}}{T_{00} + T_{01} + T_{10}}\right)^{T_{10}} \left(1 - \frac{T_{10}}{T_{00} + T_{01} + T_{10}}\right)^{T_{00} + T_{01}}\right). \quad (22)$$

VI. ANALIZA EMPIRYCZNA

Przedmiotem badania niniejszej pracy jest oszacowanie wartości zagrożonej dwuskładnikowego portfela składającego się z jednostek uczestnictwa dwóch otwartych akcyjnych funduszy inwestycyjnych: Millennium Fundusz Inwestycyjny Otwarty – Subfundusz Akcji oraz PZU Fundusz Inwestycyjny Otwarty – Akcji KRAKOWIAK¹².

Analiza empiryczna przeprowadzona została na podstawie danych dla okresu od 4 stycznia 2002 r. do 31 grudnia 2009 r.¹³. W okresie badawczym wyróżniono dwa podokresy. Na podstawie pierwszego podokresu, obejmującego okno badawcze od 4 stycznia 2002 r. do 30 czerwca 2007 r., przeprowadzono oszacowanie wartości zagrożonej w oparciu o wielowymiarowy model GARCH, a dokładnie: przedstawiony w punkcie trzecim pracy model Diag – BEKK. Następnie, wykorzystując otrzymane oszacowania parametrów modelu, wyznaczono jednodniowe prognozy wartości zagrożonej w okresie od 1 lipca 2007 r. do 31 grudnia 2009 r. Należy zauważyć, że drugi z podokresów przypada na trwający na rynku polskim kryzys finansowy, dlatego jakość oszacowanych prognoz modelu VaR jest bardzo interesująca.

Przeprowadzone wstępne testy dla każdego z wybranych dwóch szeregów stóp zwrotu jednostek uczestnictwa badanych funduszy wykazały, że ich rozkłady charakteryzują się leptokurtycznością i grubymi ogonami¹⁴. Wobec tego zasadne jest wykorzystanie przy szacowaniu modelu VaR rozkładu t -Studenta. Ponadto z analizy wyników testów oraz z powyższych wykresów wynika, że największą zmiennością charakteryzuje się drugi z podokresów,

¹¹ Powyższe równanie wynika bezpośrednio z wyznaczenia prawostronnej granicy z LR_{ind} przy T_{11} dążącym do zera z wykorzystaniem reguły de l'Hospitala.

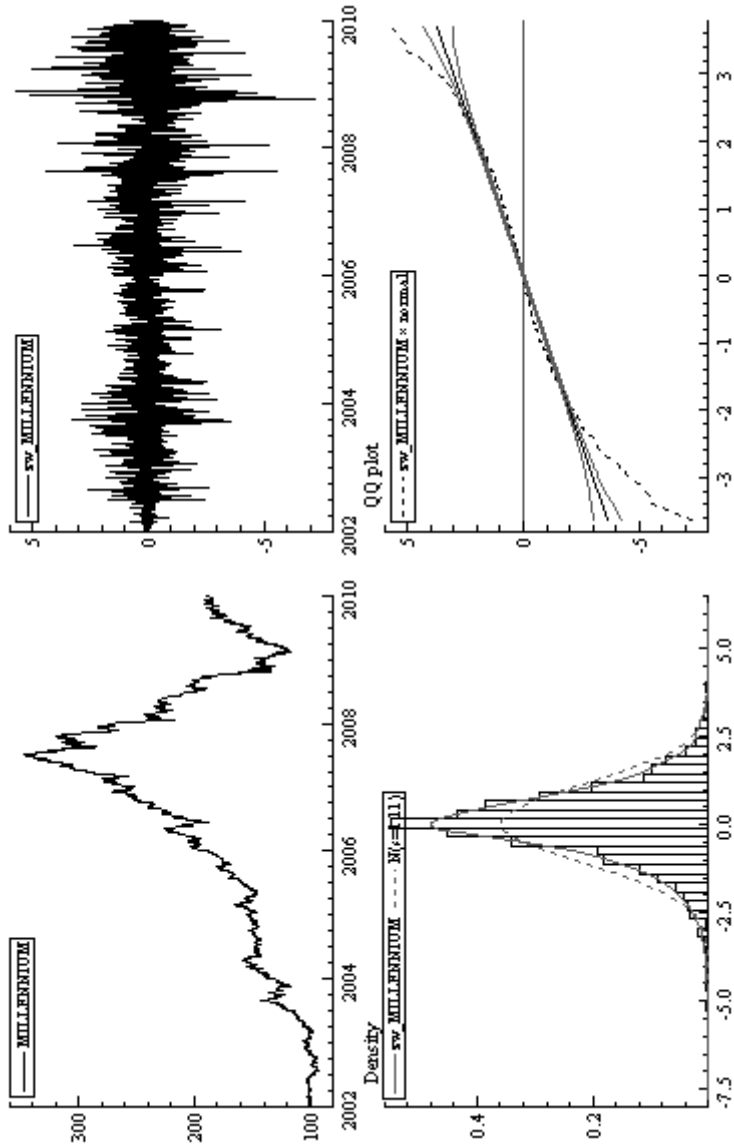
¹² Oba fundusze charakteryzują się na dzień 31 listopada 2010 r. wartością aktywów netto powyżej 500 milionów oraz poniżej 1 miliarda złotych. Każdy z tych funduszy lokuje wolne środki w akcje polskich firm notowanych na rodzimym parkiecie. Badania przeprowadzone przez K. Gabryelczyk i J. Truskowski, których rezultaty znajdują się w publikacji *Celowość inwestowania w polskie fundusze akcji – analiza empiryczna*, w: S. Buczek, A. Fierla (red.), *Rynek kapitałowy w Polsce i na świecie – jak mądrze inwestować*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2008, s. 241-253, wykazały, że polskie otwarte fundusze akcyjne właśnie o takim poziomie aktywów są w stanie wykreować ponadprzeciętne wyniki inwestycyjne.

¹³ Rok 2002 uznaje się za przełomowy dla polskich funduszy inwestycyjnych ze względu na zaobserwowany od tego roku zwiększony napływ kapitału do funduszy.

¹⁴ Nadwyżkowa kurtioza rozkładu szeregów stóp zwrotu dla Millennium kształtuje się na poziomie 3,7326, a dla PZU = 3,4460.

Wykres 1

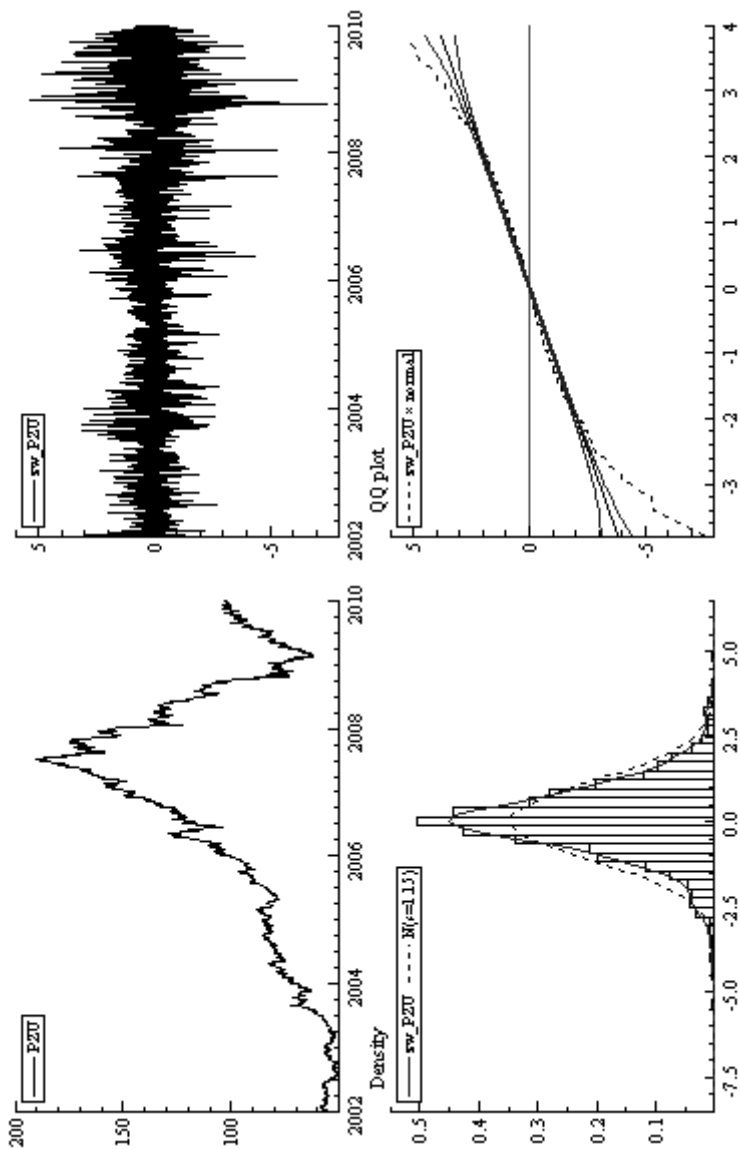
Millennium FIO – akcje: w górnej części wykres cen zamknięcia jednostek uczestnictwa oraz logarytmicznych procentowych stóp zwrotu, poniżej histogram oraz wykres kwantyl–kwantyl dla szeregu stóp zwrotu



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2

PZU FIO – akcje: w górnej części wykres cen zamknięcia jednostek uczestnictwa oraz logarytmicznych procentowych stóp zwrotu, poniżej histogram oraz wykres kwantyl–kwantyl dla szeregu stóp zwrotu



Źródło: opracowanie własne.

czyli okres, w którym zostały wyznaczone jednodniowe prognozy wartości zagrożonej¹⁵.

Następnie do dwuwymiarowego szeregu stóp zwrotu z pierwszego podokresu (4 stycznia 2002 r. – 31 grudnia 2009 r.) dopasowany został model Diag – BEKK z rozkładem *t*-Studenta. Oszacowania parametrów tego modelu dla zawiera tabela 1.

Tabela 1

Oszacowanie wartości parametrów modelu ARMA oraz Diag- BEKK z rozkładem *t*-Studenta dla okresu od 4 stycznia 2002 r. do 30 czerwca 2007 r.

	Oszacowanie	Błąd standardowy	p-value
Cst1	0.056696	0.016232	0.0005
Cst2	0.053800	0.016698	0.0013
C_11	0.080686	0.018022	0.0000
C_12	0.078305	0.017294	0.0000
C_22	0.038566	0.006067	0.0000
G_1.11	0.954145	0.006421	0.0000
G_1.22	0.951946	0.006887	0.0000
A_1.11	0.298635	0.024161	0.0000
A_1.22	0.305426	0.026135	0.0000
ν	5.617265	0.64917	0.0000

Źródło: opracowanie własne.

Wyznaczone oszacowania średniej warunkowej oraz warunkowych wariancji i kowariancji posłużyły do oszacowania wartości zagrożonej portfela w próbie dla pozycji krótkiej oraz długiej. Należy zaznaczyć, że na potrzeby badania przyjęto stały, równy udział instrumentów finansowych w portfelu. Wartość VaR wyznaczono dla trzech poziomów istotności wynoszących: 1%, 2,5% i 5%. Na podstawie wykresu można uznać, że oszacowania wartości zagrożonej są dobrze dopasowane w przypadku obu pozycji przyjmowanych przez inwestorów.

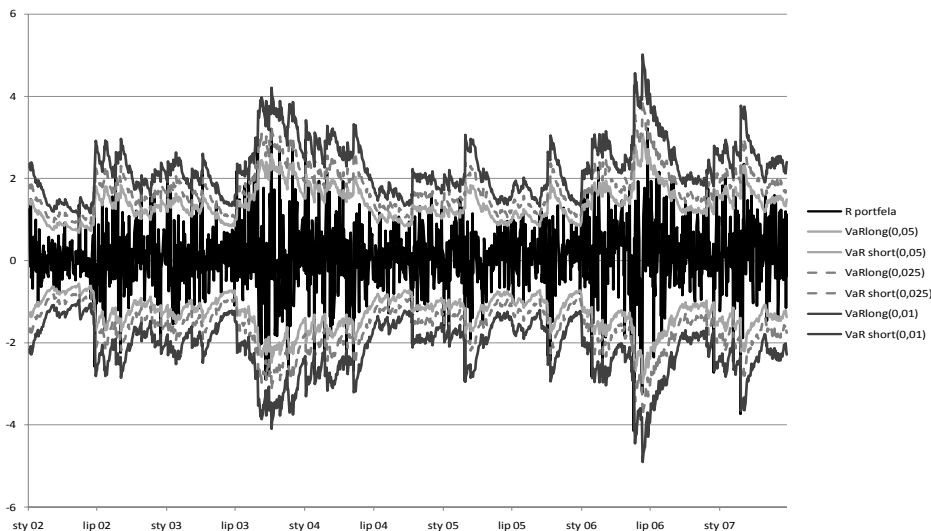
W celu dokładnej analizy jakości wartości zagrożonej portfela w próbie wyznaczono statystykę Kupca oraz wartości oczekiwanego niedoboru ESF1 oraz ESF2. Charakterystyki te wyliczono dla każdego z rozpatrywanych poziomów istotności oraz dla obu pozycji.

Na podstawie wartości statystyki testu Kupca oraz odpowiadających im *p*-wartości wnioskujemy, że udział przekroczeń wartości zagrożonej przez zrealizowaną stopę zwrotu jest dla wszystkich rozpatrywanych poziomów

¹⁵ Odchylenie standardowe szeregu stóp zwrotu Millennium oraz PZU w drugim podokresie w stosunku do podokresu pierwszego wzrosło, odpowiednio, o około 75% i 80%.

Wykres 3

Oszacowanie wartości zagrożonej portfela dla pozycji długiej oraz krótkiej w próbie (4 stycznia 2002 r. – 30 czerwca 2007 r.). Poziomy istotności: 1%, 2,5%, 5%



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2

Ocena jakości oszacowań VaR dla okresu od 4 stycznia 2002 r. do 30 czerwca 2007 r. (poniżej statystyki testu Kupca oraz Christoffersena (ind) podano w nawiasach p -wartość)

α	Pozycja	T	Udział przekroczeń	Test Kupca	ESF1	ESF2	Test ind
0,01	długa	16	0,011619	0,34673 (0,55596)	-2,6286	1,29596	0,19467 (0,65905)
0,01	krótka	10	0,007262	1,15227 (0,28307)	2,04641	1,13602	0,07587 (0,78297)
0,025	długa	32	0,023238	0,17936 (0,67192)	-2,2793	1,4234	0,78349 (0,37607)
0,025	krótka	36	0,026143	0,07283 (0,78725)	1,97647	1,19741	0,42195 (0,51596)
0,05	długa	60	0,043572	1,24945 (0,26365)	-1,9582	1,48832	1,55905 (0,21180)
0,05	krótka	83	0,060275	2,88073 (0,08964)	1,66647	1,2786	3,52144 (0,06057)

Źródło: opracowanie własne.

istotności zgodny z założonym¹⁶. Dla poziomu tolerancji równego 5% i 2,5% udział przekroczeń oszacowanej wartości zagrożonej jest jednak większy dla pozycji krótkiej niż dla pozycji długiej. Dla poziomu istotności wynoszącego 1% zachodzi zależność odwrotna. Należy jednak zauważyć, że dla wszystkich trzech poziomów istotności oczekiwana strata w sytuacji, gdy model VaR zawiedzie, jest większa dla pozycji długiej. Wobec tego, chociaż udział przekroczeń w przypadku pozycji krótkiej dla poziomu istotności 5% oraz 2,5% jest większy, to bezwzględna wartość tych przekroczeń jest mniejsza niż w przypadku pozycji długiej. Zatem w wypadku gdy zrealizowana stopa zwrotu przekroczy oszacowanie wartości zagrożonej, inwestor zajmujący pozycję krótką może stracić średnio więcej niż inwestor w pozycji długiej. Z przeprowadzonego testu Christoffersena wynika, że przekroczenia wartości zagrożonej są wzajemnie niezależne – brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej dla obu pozycji oraz każdego z trzech poziomów istotności. Najniższa wartość p -wartości w przypadku testu niezależności dla oszacowań wartości zagrożonej dla pozycji krótkiej przy poziomie istotności równym 0,05 potwierdza, że oszacowania te charakteryzują się, z sześciu szeregów otrzymanych w badaniu, najgorszą jakością.

W kolejnym kroku wyznaczono prognozy dla okresu od 1 lipca 2007 r. do 31 grudnia 2009 r. W tym celu wykorzystano oszacowane wcześniej parametry dwuwymiarowego modelu GARCH. Na podstawie otrzymanych prognoz oszacowano wartość zagrożoną portfela dla pozycji długiej oraz krótkiej przy ustalonych trzech poziomach istotności. Rezultaty przedstawiono na wykresie 4.

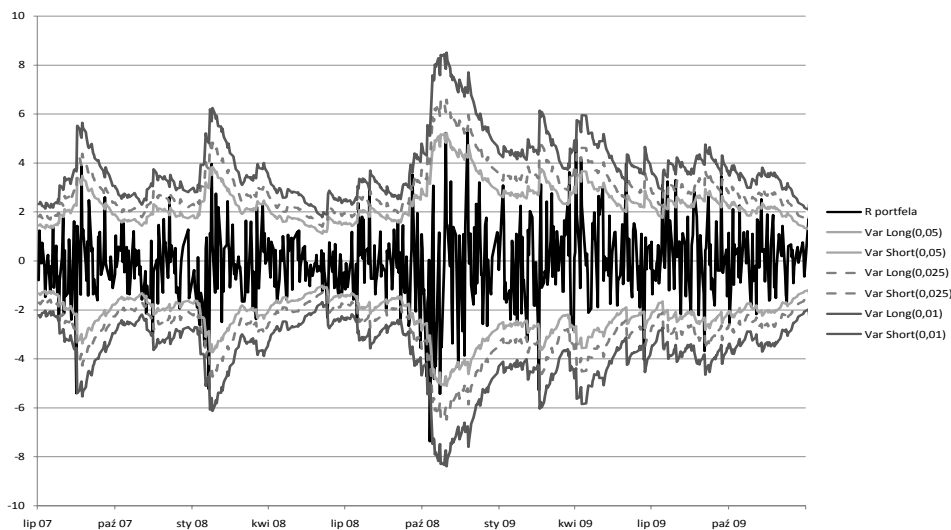
W przypadku oszacowania wartości zagrożonej w drugim podokresie szczególnie dużą rolę odegrała prognoza zmienności. Przedstawiony model można uznać za dobrze dopasowany, o dobrych własnościach prognostycznych, czego końcowym rezultatem jest dobra jakość oszacowań wartości zagrożonej, co przedstawia tabela 3.

W przypadku prognoz hipoteza zerowa testu Kupca została odrzucona w jednym na sześć rozpatrywanych przypadków – dla pozycji długiej przy poziomie istotności wynoszącym 5%. W pozostałych przypadkach brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o zgodnym, z góry ustalonym, udziałem przekroczeń wartości zagrożonej przez zrealizowaną stopę zwrotu. Dla wszystkich rozpatrywanych poziomów istotności lepsze dopasowania VaR otrzymano dla pozycji krótkiej. Na podstawie średniego stosunku zrealizowanej straty do straty oczekiwanej można wnioskować, iż dużą jakością oszacowań charakteryzuje się pozycja krótka. Podobnie kształtuje się sytuacja pod względem bezwzględnej wartości oczekiwanej straty, jednak z wyłączeniem przypadku, w którym odrzucono hipotezę zerową testu Kupca. W tym przypadku – chociaż ilość przekroczeń jest zdecydowanie wyższa od założonego poziomu istotności 5%, co świadczy, że wartość zagrożona jest niedoszacowana – bezwzględna wartość ESF1 jest najniższa ze wszystkich rozpatrywanych przypadków. Wobec tego inwestor średnio traci mniej, zajmując pozycję długą, chociaż zrealizowane stopy zwrotu przewyższają oszacowania wartości zagrożonej średnio o około

¹⁶ Hipoteza zerowa testu Kupca nie została odrzucona.

Wykres 4

Oszacowanie wartości zagrożonej portfela dla pozycji długiej oraz krótkiej dla prognoz (1 sierpnia 2007 r. – 31 grudnia 2009 r.). Poziomy istotności: 1%, 2,5%, 5%



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3

Ocena jakości oszacowań VaR dla okresu od 1 lipca 2007 r. do 31 grudnia 2009 r. (poniżej statystyki testu Kupca oraz Christoffersena (ind) podano w nawiasach p -wartość)

α	Pozycja	T	Udział przekroczeń	Test Kupca	ESF1	ESF2	Test ind
0,01	długa	9	0,014376	1,066931 (0,301639)	-4,4199	1,19702	0,26300 (0,60807)
0,01	krótka	4	0,006389	0,94514 (0,33095)	3,79207	1,12751	0,05153 (0,82042)
0,025	długa	19	0,030351	0,68920 (0,40643)	-3,6005	1,34773	0,02714 (0,86914)
0,025	krótka	12	0,019169	0,94824 (0,33016)	3,45338	1,25935	0,46985 (0,49305)
0,05	długa	48	0,076677	8,12137 (0,00437)	-2,8309	1,36292	1,47404 (0,22470)
0,05	krótka	27	0,04313	0,65083 (0,41981)	3,13725	1,32606	0,02714 (0,86913)

Źródło: opracowanie własne.

36% (czyli o 4 punkty procentowe więcej niż w przypadku pozycji krótkiej). Rezultaty przeprowadzonego testu niezależności przekroczeń w czasie nie dostarczyły podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej w żadnym z rozpatrywanych przypadków. Stąd wnioskujemy, że przekroczenia wartości zagrożonej są rozłożone równomiernie¹⁷.

VII. PODSUMOWANIE

Zainteresowanie podmiotów rynku finansowego i organów je nadzorujących zagadnieniem szacowanie wartości zagrożonej portfela cieszy się dużą popularnością. Przedstawiona w pracy jedna z metod szacowania VaR, wykorzystująca dwuwymiarowy model Diag-BEKK z rozkładem t -Studenta, pozwala na otrzymanie dobrej jakości oszacowań wartości zagrożonej. Jest to możliwe dzięki wykorzystanemu w badaniu modelowi autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej, który pozwala uwzględnić charakterystyczne dla szeregów stóp zwrotu zgrupowania zmienności oraz leptokurtyczność ich rozkładów, co przekłada się na dokładny opis zmienności i wysoką jakość wyznaczonych prognoz zmienności. Prawidłowy opis zmienności wpływa w konsekwencji na jakość oszacowań wartości zagrożonej. Użyteczność przedstawionej metody na pewno podkreśla fakt, że wykorzystany wielowymiarowy model GARCH został oszacowany na danych poprzedzających kryzys finansowy, natomiast prognozy wartości zagrożonej dla portfela zostały wyznaczone w okresie odpowiadającym kryzysowi finansowemu trwającemu na rynku polskim. Okres od lipca 2007 r. do grudnia 2009 r. charakteryzował się dużą zmiennością instrumentów finansowych, mimo to otrzymane oszacowania VaR dla tego okresu można uznać jednak za dobrze dopasowane. Taki wniosek pozwalają wyciągnąć rezultaty przeprowadzonego testu Kupca, z którego wynika, iż udział przekroczeń wartości zagrożonej przez zrealizowaną stopę zwrotu w pięciu na sześć rozpatrywanych przypadków jest zgodny z przyjętym poziomem istotności. Z przeprowadzonego badania wynika, że przedstawiona metoda jest skuteczna nawet w sytuacji kryzysu, czyli kiedy wykorzystywanie wielu innych metod nie daje użytecznych rezultatów, a nawet wręcz zawodzi.

mgr Ewa Filipowicz
Uniwersytet Ekonomiczny
w Poznaniu

¹⁷ Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że niezależny udział przekroczeń otrzymano również dla pozycji krótkiej przy poziomie istotności równym 0,05, co do której z powodu bliskiej zadanemu poziomowi istotności p -wartości testu Christoffersena z próby istniała obawa, że model ten może zawieść w sytuacji zwiększonej zmienności na rynku, a niewątpliwie było tak w okresie oszacowań prognoz wartości zagrożonej.

ESTIMATION OF THE VALUE AT RISK
OF THE INVESTMENT FUNDS PORTFOLIO

Summary

The paper is focused on the issue of the Value at Risk and the chosen method of its estimation. Identification of a possible loss that may be incurred due to the changes in the market prices of financial instruments in a given investment portfolio, taking account for a certain tolerance level at a particular time, is of vital importance to the financial market.

The paper is divided into five parts. The first part contains the definition and classification of risk. The second part presents the concept of Value at Risk. The third part shows the two-dimensional diagonal model BEKK and a method of estimating the VaR based on the forecasts of conditional mean, variance and covariance. The fourth section reviews the methods of assessing the quality of Value at Risk and its one-day-ahead forecast. The final last part includes the results of the estimation of Value at Risk of two-component portfolio consisting of two selected Polish joint stock investment funds.

