Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki

Waldemar Sieg

Topologia dziedziny a rozkłady pewnych funkcji pierwszej klasy Baire'a na sumy i różnice funkcji o domkniętym wykresie

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
dra hab. Marka Wójtowicza

Poznań, luty 2012

Spis treści

Spis oznaczeń

symbol	znaczenie
$[a, b]$	przedział domknięty o końcach a i b
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\operatorname{int} A$	wnętrze zbioru A
$\operatorname{cl} A$	domknięcie zbioru A
$\operatorname{bd} A$	brzeg zbioru A
$\operatorname{dom} f$	dziedzina funkcji f
$\operatorname{rng} f$	zbiór wartości funkcji f
$\operatorname{card} A$	moc zbioru A
$f(A)$	obraz zbioru A wyznaczony przez funkcję f
$f^{-1}(A)$	przeciwobraz zbioru A wyznaczony przez funkcję f
$[f = a]$	$= \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) = a\}$
$[f \neq a]$	$= \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \neq a\}$

symbol	znaczenie
$[f > a]$	$= \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) > a\}$
$[f < a]$	$= \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) < a\}$
$f{\restriction}A$	zawężenie funkcji f do zbioru A
χ_A	funkcja charakterystyczna zbioru A
$\operatorname{sgn}(x)$	funkcja znak x
$C(f)$	zbiór wszystkich punktów ciągłości funkcji f
$D(f)$	zbiór wszystkich punktów nieciągłości funkcji f
Y^X	rodzina wszystkich funkcji $f \colon X \to Y$
$\mathcal{C}(X)$	rodzina wszystkich funkcji ciągłych określonych na przestrzeni Hausdorffa X
$\mathcal{C}^*(X)$	$= \{f \in \mathcal{C}(X) : f \equiv 0$ lub $f(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in X\}$
$\mathcal{D}(X)$	rodzina wszystkich funkcji Darboux określonych na przestrzeni Hausdorffa X (definicja 1.16)
$\mathcal{U}(X)$	rodzina wszystkich funkcji o domkniętym wykresie określonych na przestrzeni Hausdorffa X (definicja 1.17)
$\mathcal{Q}(X)$	rodzina wszystkich funkcji quasi-ciągłych określonych na przestrzeni Hausdorffa X (definicja 1.18)
$\mathcal{QU}(X)$	$= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{U}(X)$; rodzina wszystkich funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie określonych na przestrzeni Hausdorffa X
$\mathcal{SC}(X)$	rodzina wszystkich funkcji półciągłych określonych na przestrzeni polskiej X (definicja 1.15)

symbol	znaczenie
$\mathcal{P}(X)$	rodzina wszystkich funkcji kawałkami ciągłych określonych na przestrzeni normalnej X (definicja 4.1)
$\mathcal{K}(X)$	rodzina wszystkich funkcji klikowych określonych na przestrzeni Hausdorffa X (definicja 1.19)
$\mathcal{B}_1(X)$	rodzina wszystkich funkcji pierwszej klasy Baire'a określonych na przestrzeni Hausdorffa X (definicja 1.12)
$\mathcal{F}^+(X)$	rodzina wszystkich funkcji f o wartościach nieujemnych określonych na niepustym zbiorze X
$\mathcal{F}^b(X)$	rodzina wszystkich ograniczonych funkcji f określonych na niepustym zbiorze X
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	niepuste podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^X$
$\mathcal{A} \pm \mathcal{B}$	$= \{f \pm g : f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B}\}$
$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$	$= \{fg : f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B}\}$
$\mathcal{A}^n$	$= \underbrace{\mathcal{A} + \mathcal{A} + \ldots + \mathcal{A}}_{n}$
$\alpha\mathcal{A}$	$= \{\alpha \cdot a : a \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}\}$
$D\mathcal{A}$	$= \mathcal{A} - \mathcal{A} = \{f \colon X \to \mathbb{R} : f = g - h; g, h \in \mathcal{A}\}$
$-\mathcal{A}$	$= (-1)\mathcal{A}$
$\pm\mathcal{A}$	$= \mathcal{A} \cup (-\mathcal{A}) = \{\pm f : f \in \mathcal{A}\}$
$\mathcal{A}\mathcal{B}$	$= \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
$\operatorname{lin}(X)$	powłoka liniowa przestrzeni X
$\rho(x, y)$	odległość punktu x od punktu y w przestrzeni metrycznej (X, ρ)

symbol	znaczenie
$\rho(x, F)$	odległość punktu x od zbioru F w przestrzeni metrycznej (X, ρ)
f^+	$= \max\{f, 0\}$
f^-	$= \max\{-f, 0\}$
$\delta(U)$	$= \max\{\rho(x, y) : x, y \in U\}$; średnica zbioru U w przestrzeni metrycznej (X, ρ)
$K(x_0, r)$	$= \{x : \rho(x, x_0) < r\}$; kula otwarta o środku w punkcie x_0 i promieniu $r > 0$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ)
$G(f)$	wykres funkcji f
$\mathcal{G}(\mathcal{A})$	grupa addytywna generowana przez rodzinę $\mathcal{A}$ (definicja 1.7)
$\mathcal{PS}(X, Y)$	klasa perturbacji rodziny $\mathcal{S}$, ciągłych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha X i Y (uwaga 5.1)

Wstęp

W 1927 roku A. Lindenbaum zauważył, że każda funkcja rzeczywista jest sumą dwóch funkcji Darboux [**38**]. Był to jeden z pierwszych wyników rozwiązujących problem rozkładu funkcji rzeczywistej $f\colon X \to \mathbb{R}$ na sumę (różnicę lub iloczyn) "lepszych" do badania odwzorowań. W ciągu ostatnich 15 lat uzyskano wiele analogicznych rezultatów w tej dziedzinie.

W 2002 roku Borsik [**11**] udowodnił, że jeżeli X jest przestrzenią doskonale normalną, to

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{U}(X) + \mathcal{U}(X), \tag{0.1}$$

tj., dowolną funkcję kawałkami ciągłą można przedstawić w postaci sumy dwóch odwzorowań o domkniętym wykresie. W tym samym roku Chaatit i Rosenthal [**16**] scharakteryzowali strukturę klasy

$$D\mathcal{SC}(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R} : f = g - h; g, h \in \mathcal{SC}(X)\},$$

funkcji dających się przedstawić jako różnica dwóch odwzorowań półciągłych określonych na przestrzeni polskiej X. Wcześniej, w 1997 roku Borsik [**12**] udowodnił, że jeżeli X jest przestrzenią pseudometryzowalną, to $K(X) = \mathcal{Q}(X) + \mathcal{Q}(X)$, tj., dowolną tzw. funkcję klikową można przedstawić w postaci sumy dwóch odwzorowań quasi-ciągłych.

Bardziej subtelne wyniki dotyczą rozkładów funkcji z pewnych podzbiorów zbioru funkcji pierwszej klasy Baire'a: $\mathcal{B}_1^*(X)$, oraz kawałkami ciągłych $\mathcal{P}(X)$ (patrz str. 6 oraz definicje 1.13 i 4.1). W 1999 roku Borsík, Doboš i Repický pokazali [**13**], że jeżeli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to dowolne odwzorowanie z klasy $\mathcal{B}_1^*(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$ można przedstawić w postaci sumy trzech funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie tj., $\mathcal{B}_1^*(X) \subset \mathcal{QU}(X)+$ $+\mathcal{QU}(X)+\mathcal{QU}(X)$. W tej samej pracy pokazano, że jeżeli X jest przestrzenią polską, to zachodzi równość

$$\mathcal{B}_1^*(X) = \mathcal{P}(X) = \mathrm{lin}(\mathcal{QU}(X)) = \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X). \tag{0.2}$$

Zatem, na mocy (0.1) oraz (0.2), jeżeli X jest przestrzenią polską, to

$$\mathcal{B}_1^*(X) = \mathcal{U}(X) + \mathcal{U}(X). \tag{0.3}$$

Sugerując się równościami (0.2) oraz (0.3), Borsík, Doboš i Repický postawili problem [**13**, str. 5] charakteryzacji zbioru $\mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X)$. W rozdziale 2 niniejszej rozprawy wyznaczyłem dosyć ogólne warunki wystarczające na to, aby odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$ było sumą (lub iloczynem) dwóch funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie.

Innym problemem związanym z wyżej opisaną tematyką i rozważanym przeze mnie jest następujące zagadnienie.

Niech (W) oznacza pewną własność funkcji rzeczywistych, X - ustaloną przestrzeń topologiczną, A - niepusty podzbiór przestrzeni X. Wprowadźmy oznaczenie

$$W_A = \{f \in \mathbb{R}^A : f \text{ ma własność } (W)\}.$$

Przy jakich założeniach o zbiorze A każdą funkcję $f \in W_A$ można przedłużyć do funkcji $\overline{f} \in W_X$?

Klasyczny wynik Tietzego mówi, że odwzorowanie f ciągłe na domkniętym podzbiorze A przestrzeni normalnej X można przedłużyć do funkcji $\overline{f}$ ciągłej na X. Ponadto, w 1951 roku Borsuk i Dugundji udowodnili twierdzenie [**49**, 21.1.4] o istnieniu liniowego operatora rozszerzania funkcji ciągłej z podzbioru domkniętego A przestrzeni metrycznej X, na całą tę przestrzeń.

W niniejszej pracy zostanie udowodniony analogon twierdzenia Tietzego dla przypadku funkcji o domkniętym wykresie (Twierdzenie 3.1) oraz analogon twierdzenia Borsuka-Dugundjiego dla przypadku pewnej specjalnej podklasy klasy funkcji kawałkami ciągłych (Twierdzenie 4.6).

Podstawą niniejszej rozprawy są artykuły [**50**], [**51**] oraz [**58**]. W artykule [**50**] podałem warunki wystarczające na to, aby odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$ określone na dowolnej przestrzeni metrycznej X można było przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie. W pracy [**58**] badałem zależność między klasami $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{U}(X)$ i $\mathcal{B}_1(X)$ (odpowiednio funkcji ciągłych, o domkniętym wykresie i pierwszej klasy Baire'a). W artykule [**51**] określiłem maksymalne klasy działań (addytywną, multiplikatywną, maksimum i minimum) dla rodziny funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie. Część zawartych w tej rozprawie wyników jest jednak nowa i nie była publikowana. Szczegółowe omówienie rozprawy zamieszczam poniżej.

Praca podzielona jest na pięć rozdziałów. Rozdział 1. zawiera podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze. W podrozdziale 1.3 przypominam szereg twierdzeń dotyczących rozpatrywanych rodzin funkcji, jak również dowodzę kilku lematów, na które powołuję się w dalszej części pracy.

Rozdział 2. poświęcony jest rodzinie funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni metrycznej X, którą na użytek moich badań oznaczyłem symbolem $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$. W podrozdziale 2.1 podaję jej definicję oraz określam i dowodzę podstawowe własności. W podrozdziale 2.2 dowodzę jedno z kluczowych twierdzeń rozprawy pokazujące, że dowolną funkcję z klasy $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$ można przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie (Twierdzenie 2.5).

W rozdziale 3. zajmuję się rozszerzaniem funkcji o domkniętym wykresie. W podrozdziale 3.1 podaję wzór na rozszerzenie $\overline{f}$ funkcji f o domkniętym wykresie, określonej na zerowym podzbiorze A przestrzeni normalnej X na całą tą przestrzeń z zachowaniem domkniętości wykresu $\overline{f}$. Wynik ten stosuję do nowej charakteryzacji P-przestrzeni: w podrozdziale 3.3 wykazałem, że jeżeli X jest przestrzenią doskonale normalną, to rodziny funkcji $\mathcal{B}_1(X)$, $\mathcal{U}(X)$ i $\mathcal{C}(X)$, odpowiednio, pierwszej klasy Baire'a, o domkniętym wykresie i ciągłych są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest P-przestrzenią.

Wyniki uzyskane w rozdziale 3. wykorzystuję w kolejnym. Poświęcony jest on specjalnej podklasie klasy $\mathcal{P}(X)$ funkcji kawałkami ciągłych określonych na przestrzeni normalnej X. Na użytek moich badań oznaczyłem ją symbolem $\mathcal{P}_0(X)$. W podrozdziale 4.1 podaję jej definicję i dowodzę własności, z których korzystam w dalszej części rozdziału. W podrozdziale 4.2 pokazuję, że dowolne odwzorowanie z klasy $\mathcal{P}_0(X)$ można przedstawić w postaci różnicy dwóch nieujemnych funkcji o domkniętym wykresie. W podrozdziale 4.3 podaję, wykorzystując wynik z podrozdziału 3.1, wzór określający liniowy operator rozszerzania odwzorowania z $\mathcal{P}_0(A)$ do $\mathcal{P}_0(X)$, gdzie $A \subset X$ jest domkniętym i typu G_δ (tj., zerowym) podzbiorem przestrzeni normalnej X.

W 1987 r. Menkyna podał opis ([**39**]) maksymalnej klasy addytywnej (patrz definicja 5.1) dla rodziny funkcji rzeczywistych o domkniętym wykresie. Rozdział 5. mojej pracy poświęcony jest badaniu klas maksymalnych dla rodziny funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie. Okazuje się, że w zakresie teorii operatorów liniowych pojęcie klasy maksymalnej ma swój odpowiednik: jest to perturbacja rodziny przekształceń liniowych. Teoria ta jest dość mocno rozbudowana, a większość wyników pochodzi od P. Aiena i M. Gonzaleza [**1**].

Stosowana przeze mnie numeracja definicji, twierdzeń, lematów itp. składa się z dwóch liczb, z których pierwsza oznacza numer rozdziału, a druga numer twierdzenia, lematu, itp. Odrębną numerację w każdym rozdziale prowadzę dla definicji, oznaczeń, uwag i problemów, natomiast w danym rozdziale wspólnie numeruję twierdzenia, lematy i wnioski. Symbol $\square$ oznacza koniec dowodu lematu, twierdzenia lub wniosku.

ROZDZIAŁ 1

Podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze

1.1. Podstawowe definicje

Podane oznaczenia i definicje pochodzą z prac [**50**], [**51**], [**58**] oraz monografii [**20**]. Przyjmujemy w nich, że X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa.

Oznaczenie 1.1.

Niech $x \in X$. Symbolem $\mathcal{V}_x$ oznaczamy zbiór wszystkich otoczeń otwartych punktu x w przestrzeni X.

Definicja 1.1.

Niech S będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru S jest *filtrem właściwym podzbiorów zbioru* S, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $S \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- jeśli $A \subset B \subset S$ i $A \in \mathcal{F}$, to $B \in \mathcal{F}$,
- jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Filtr właściwy $\mathcal{F}$ jest *filtrem maksymalnym* (*ultrafiltrem*), jeśli jedynym filtrem zawierającym $\mathcal{F}$ jest $\mathcal{F}$.

Definicja 1.2.

Niech $\mathcal{E}$ będzie algebrą rodziny podzbiorów przestrzeni X. Mówimy, że podzbiór $\mathcal{J}$ zbioru $\mathcal{E}$ jest *ideałem*, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\emptyset \in \mathcal{J}$,

- jeśli $A \in \mathcal{J}$ i $B \in \mathcal{E}$, to z faktu $B \subset A$ wynika, że $B \in \mathcal{J}$,
- jeśli $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$, to $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}$.

Ponadto, ideał $\mathcal{J}$ nazywamy *σ-ideałem*, gdy ostatni warunek można zastąpić warunkiem

- jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}$.

(Najczęściej pojęcie σ-ideału pojawia się gdy $\mathcal{E}$ jest σ-algebrą.)

Definicja 1.3.

Niech T będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Niepusty zbiór domknięty $F \subset T$ nazywamy *stożkiem* (w przestrzeni T), gdy spełnione są następujące warunki:

- $F + F \subset F$,
- $\alpha F \subset F$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
- $F \cap (-F) = \{0\}$.

Definicja 1.4.

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *zerowy*, jeżeli istnieje funkcja ciągła $f\colon X \to [0,1]$ taka, że $A = [f = 0]$. Dopełnienie $A' = [f > 0]$ zbioru zerowego nazywamy zbiorem *kozerowym*.

Definicja 1.5.

Niech X będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest *afiniczne*, jeżeli dla dowolnych elementów $x_1, x_2 \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takich, że $\alpha + \beta = 1$, spełniona jest równość $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$.

Odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ będziemy nazywać *dodatnio afinicznym*, jeżeli powyższa równość będzie spełniona dla parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

PRZYKŁAD 1.1.

(i) Niech $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Odwzorowanie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f(t) = t_1 + t_2 + 5$ jest przekształceniem afinicznym.

(ii) Niech $\mathcal{F}[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R}_+ : f\text{-ciągłe}\}$ oraz niech $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odwzorowanie $T \colon \mathcal{F}[0,1] \to \mathbb{R}_+^{[0,s]}$ określone wzorem
$T(f)(s) = \int_0^s f(x)dx + c$ jest dodatnio afiniczne.

DEFINICJA 1.6.

Niech $E \subset X$. Ciągłe odwzorowanie $r \colon X \to E$ takie, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in E$, nazywamy *retrakcją*, a zbiór E - *retraktem* przestrzeni X.

DEFINICJA 1.7.

Niech $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$. *Grupą addytywną generowaną przez niepustą rodzinę* $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\pm\mathcal{F})^n.$$

Działanie grupowe $\bigoplus$ w $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ jest działaniem zawężonym z przestrzeni $\mathbb{R}^X$ (tj., dodawanie elementów z $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ odbywa się "po współrzędnych").

W poniższych definicjach zakładamy, że $\succ$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze A.

DEFINICJA 1.8.

Mówimy, że zbiór częściowo uporządkowany (poset) $(A, \succ)$ jest *zbiorem skierowanym*, jeżeli dla dowolnych dwóch elementów $a, b \in A$ istnieje element $c \in A$ taki, że $c \succ a$ i $c \succ b$.

PRZYKŁAD 1.2.

(i) Rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{Z}$ z relacją $\subset$ jest rodziną skierowaną. Dla dowolnych skończonych zbiorów F i G odpowiednim zbiorem zawierającym je oba jest na przykład zbiór $F \cup G$.

(ii) W rodzinie I wszystkich przedziałów domkniętych zbioru $\mathbb{R}$ określmy relację $\succ$ następująco:

$$[c,d] \succ [a,b] \Leftrightarrow c > a \wedge d > b.$$

Rodzina $(I, \succ)$ jest zbiorem skierowanym. Dla dowolnych przedziałów $[a,b]$, $[c,d] \subset \mathbb{R}$, odpowiednim przedziałem $[x,y]$ spełniającym warunki $[x,y] \succ [a,b]$ i $[x,y] \succ [c,d]$, jest na przykład przedział $[|a|+|c|, |b|+|d|]$.

(iii) Zbiór liczb porządkowych z relacją $<$ $(\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta)$ jest rodziną skierowaną. Dla dowolnych liczb porządkowych α i β odpowiednią liczbą γ spełniającą warunek $\alpha < \gamma$ i $\beta < \gamma$ jest na przykład liczba $\alpha + \beta$.

DEFINICJA 1.9.

Ciągiem uogólnionym (*MS-ciągiem*, *ciągiem Moore'a-Smitha*) w przestrzeni topologicznej X, nazywamy funkcję odwzorowującą niepusty zbiór skierowany $(A, \succ)$ w przestrzeń X.

OZNACZENIE 1.2.

Ciąg uogólniony odwzorowujący niepusty zbiór skierowany $(A, \succ)$ w przestrzeń X oznaczać będziemy symbolem $(x_\sigma)_{\sigma \in A}$.

PRZYKŁAD 1.3.

(i) Ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ elementów przestrzeni topologicznej V może być rozważany jako ciąg uogólniony w V określony na zbiorze $\mathbb{N}$.

(ii) Niech ω będzie pierwszą nieskończoną liczbą porządkową. Rozważmy dobrze uporządkowany zbiór $A = [0, \omega)$ (złożony z liczb porządkowych $\alpha < \omega$) i funkcję f określoną na A i o wartościach w przestrzeni topologicznej V. Funkcja ta jest MS-ciągiem w przestrzeni V.

Definicja 1.10.

Jeżeli (x_α) jest MS-ciągiem w przestrzeni topologicznej X i $x \in X$, to mówimy, że ciąg (x_α) *jest zbieżny do punktu* x, i piszemy

$$x_\alpha \to x,$$

gdy dla dowolnego otoczenia U punktu x istnieje element $\beta \in A$ taki, że $x_\alpha \in U$ dla dowolnego $\alpha \geqslant \beta$.

Definicja 1.11.

Niech (x_α) i (y_β) będą MS-ciągami odwzorowującymi zbiory skierowane, odpowiednio, A i B w przestrzenie topologiczne, odpowiednio, X i Y. Mówimy, że ciąg (y_β) jest *podciągiem* ciągu (x_α), jeżeli istnieje funkcja $k\colon B \to A$ taka, że:

- $y_\beta = x_{k(\beta)}$,
- dla dowolnego $\alpha \in A$ istnieje element $\beta_0 \in B$ taki, że $k(\beta) \geqslant \alpha$ dla każdego $\beta \geqslant \beta_0$.

1.2. Rodziny funkcji

Przyjmujemy, że X i Y są przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa.

Oznaczenie 1.3.

Niech $\mathcal{F}(X)$ będzie rodziną funkcji określonych na przestrzeni topologicznej X. Symbolem $\mathcal{F}^+(X)$ oznaczać będziemy zbiór funkcji z rodziny $\mathcal{F}(X)$ o wartościach nieujemnych.

Oznaczenie 1.4.

Rodzinę wszystkich funkcji ciągłych odwzorowujących X w $\mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{C}(X)$.

Definicja 1.12.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f należy do *I klasy Baire'a*, jeżeli jest punktową granicą pewnego ciągu (f_n) funkcji ciągłych $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Oznaczenie 1.5.

Rodzinę wszystkich funkcji I klasy Baire'a odwzorowujących X w $\mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{B}_1(X)$.

Kolejna definicja określa przynależność odwzorowania f do rodziny funkcji $\mathcal{B}_1^*(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$. Rodzinę tę zdefiniował O'Malley w 1976 r. [**43**]

Definicja 1.13.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f należy do *klasy* $\mathcal{B}_1^*(X)$, jeżeli dla dowolnego niepustego podzbioru domkniętego F przestrzeni X, wnętrze zbioru $C(f{\restriction}F)$ jest niepuste.

Przykład 1.4.

Prostym przykładem funkcji z klasy $\mathcal{B}_1^*(X)$ jest $f(x) = [x], x \in \mathbb{R}$.

Kolejna definicja określa przynależność odwzorowania f do rodziny funkcji $\mathcal{B}_1^{**}(X) \subset \mathcal{B}_1^{*}(X)$. Rodzinę tę zdefiniował Pawlak w 2000 r. [**45**]

Definicja 1.14.

Niech $f\colon X \to Y$. Mówimy, że funkcja f należy do *klasy* $\mathcal{B}_1^{**}(X)$, jeżeli zawężona do zbioru $D(f)$ jest ciągła.

Przykład 1.5.

Każda funkcja rzeczywista f, dla której zbiór $D(f)$ jest skończony jest funkcją z klasy $\mathcal{B}_1^{**}(X)$ (np. $f(x) = \operatorname{sgn}(x), x \in \mathbb{R}$).

Definicja 1.15.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in X$. Mówimy, że funkcja f jest *półciągła z góry* [odpowiednio, *z dołu*] *w punkcie* x_0, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ taki, że $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ [odpowiednio, $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$] dla dowolnego $x \in U$.

Oznaczenie 1.6.

Rodzinę wszystkich funkcji półciągłych (z góry lub z dołu) odwzorowujących X w $\mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{SC}(X)$.

Definicja 1.16.

Niech X i Y będą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma *własność Darboux* (albo, że f jest *funkcją Darboux*), jeżeli obraz dowolnego spójnego podzbioru przestrzeni X jest zbiorem spójnym w przestrzeni Y.

Oznaczenie 1.7.

Rodzinę wszystkich funkcji Darboux odwzorowujących $A \subset X$ w Y oznaczamy symbolem $\mathcal{D}(A)$.

Definicja 1.17.

Niech $f\colon X \to Y$. Mówimy, że funkcja f ma *domknięty wykres*, jeżeli jej wykres $G(f)$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $X \times Y$.

Definicja 1.18.

(Zobacz [**26**]) Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie X jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że funkcja f jest *quasi-ciągła w punkcie* $x \in X$, jeżeli istnieje ciąg (x_n) punktów ciągłości funkcji f taki, że $x_n \to x$ i $f(x_n) \to f(x)$.

Mówimy, że funkcja f jest *quasi-ciągła*, jeżeli jest quasi-ciągła w każdym punkcie $x \in X$.

Przykład 1.6.

Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ gdy $x \neq 0$ oraz $f(0) = \frac{1}{2}$ jest funkcją quasi-ciągłą, która nie ma domkniętego wykresu.

Oznaczenie 1.8.

Rodzinę wszystkich funkcji quasi-ciągłych odwzorowujących X w $\mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{Q}(X)$.

Definicja 1.19.

Mówimy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest *klikowa w punkcie* $x \in X$, jeżeli dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{V}_x$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $G \subset U$ taki, że $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, dla każdych $y, z \in G$.

Mówimy, że funkcja f jest *klikowa*, jeżeli jest klikowa w każdym punkcie $x \in X$.

Przykład 1.7.

Każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której zbiór $C(f)$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, jest klikowa (przykładem funkcji klikowej, która nie jest quasi-ciągła jest odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f(x) = 0$ gdy $x \neq 0$ oraz $f(x) = 1$ gdy $x = 0$).

OZNACZENIE 1.9.

Rodzinę wszystkich funkcji klikowych odwzorowujących X w $\mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{K}(X)$.

OZNACZENIE 1.10.

Symbolem $\mathcal{QU}(X)$ oznaczamy rodzinę $\mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{U}(X)$; jej elementami są zatem funkcje quasi-ciągłe o domkniętym wykresie.

PRZYKŁAD 1.8.

Przykładem funkcji nieciągłej należącej do klasy $\mathcal{QU}(X)$ jest odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$.

1.3. Twierdzenia pomocnicze

W tym podrozdziale, jeżeli nie zdefiniujemy dokładniej, to przyjmujemy, że X i Y są przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa.

Uwaga 1.1.

(Zobacz [**20**, strona 62]) Podzbiór A przestrzeni normalnej X jest zbiorem domkniętym typu G_δ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem zerowym pewnej funkcji ciągłej $f\colon X \to I = [0,1]$.

Lemat 1.1.

(Zobacz [**57**, strona 161]*) Niech K będzie niepustym zbiorem skierowanym. Zbiór K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy MS-ciąg w K zawiera podciąg zbieżny do elementu zbioru K.*

Lemat 1.2.

(Zobacz [**57**, strona 191]*) Funkcja $f\colon X \to Y$ ma domknięty wykres wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego MS-ciągu $x_\sigma \subset X$ takiego, że $x_\sigma \to x$ i $f(x_\sigma) \to y$, zachodzi równość $y = f(x)$.*

Lemat 1.3.

(Zobacz [**57**, strona 196]*) Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją o domkniętym wykresie. Jeżeli Y jest przestrzenią zwartą, to f jest odwzorowaniem ciągłym.*

Na podstawie powyższego lematu otrzymujemy

Wniosek 1.4.

Każda ograniczona funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie jest ciągła.

Dowód kolejnego lematu znajduje się w [**28**]. Dla pełności niniejszej rozprawy podajemy jego uzasadnienie wykorzystując w tym celu Lemat 1.2.

LEMAT 1.5.

Dla ustalonej funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$ oraz elementu $x \in X$, zdefiniujmy zbiór $C(f,x)$ wzorem

$$C(f,x) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} cl f(V) =$$
$$= \{y \in \mathbb{R}: \text{ istnieje MS-ciąg } (x_\alpha) \subset X \text{ taki, że } x_\alpha \to x \text{ i } f(x_\alpha) \to y\}.$$

Funkcja f ma domknięty wykres wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ prawdziwa jest równość

$$C(f,x) = \{f(x)\}. \tag{1.1}$$

DOWÓD.

Załóżmy najpierw, że $C(f,x) = \{f(x)\}$ dla dowolnego punktu $x \in X$. Przypuśćmy niewprost, że f nie ma domkniętego wykresu. Na podstawie Lematu 1.2 istnieją wówczas: punkt $x_0 \in X$ i MS-ciąg (t_α) taki, że $t_\alpha \to x_0$ oraz $f(t_\alpha) \to a \neq f(x_0)$. Wtedy, z określenia zbioru $C(f,x_0)$ wynika, że $\{a\} \subset C(f,x_0)$. Znaleźliśmy więc element $a \neq f(x_0)$, który należy do zbioru $C(f,x_0)$, wbrew przyjętemu założeniu. Pokazaliśmy tym samym, że jeżeli $C(f,x) = \{f(x)\}$ dla dowolnego punktu $x \in X$, to f ma domknięty wykres.

Z drugiej strony załóżmy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ ma domknięty wykres. Przypuśćmy, niewprost, że istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że $C(f,x_0) \supsetneq \{f(x_0)\}$. Istnieje wówczas MS-ciąg $(x_\alpha) \subset X$ taki, że $x_\alpha \to x_0$ i $f(x_\alpha) \to y_0 \neq f(x_0)$. Zatem $(x_\alpha, f(x_\alpha)) \to (x_0, y_0) \in \operatorname{cl} G(f) \setminus G(f)$. Wynika stąd, że

$\operatorname{cl} G(f) \setminus G(f) \neq \emptyset$, wbrew założeniu o domkniętości wykresu odwzorowania f. $\square$

Lemat 1.6.

(Zobacz [**23**, Tw. 3.6] *oraz* [**57**, strona 196]*) Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa i ponadto, niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją o domkniętym wykresie. Jeżeli K jest zwartym podzbiorem przestrzeni Y, to zbiór $f^{-1}(K)$ jest domknięty w X.*

Kolejny z lematów podaje wygodne kryterium sprawdzania domkniętości wykresów funkcji o wartościach rzeczywistych. Szkic jego dowodu znajduje się w [**11**]. W celu uzyskania pełnej jasności prowadzonych rozważań podajemy poniżej jego uzasadnienie.

Lemat 1.7.

Niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Jeżeli dla dowolnego $x \in X$ i dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{V}_x$ taki, że

$$f(V) \subset (-\infty, -m) \cup \left(f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m}\right) \cup (m, \infty),$$

to funkcja f ma domknięty wykres.

Dowód.

Dowód oparty jest na Lemacie 1.5. Wykażemy, że powyższy warunek implikuje równość (1.1) dla dowolnego $x \in X$. Niech $y \in C(f, x)$. Pokażemy, że $y = f(x)$. Ponieważ dla dowolnych $x \in X$ i $m \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{V}_x$ taki, że

$$f(V) \subset (-\infty, -m) \cup \left(f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m}\right) \cup (m, \infty),$$

więc

$$y \in \operatorname{cl} f(V) \subset (-\infty, -m] \cup \left[f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m}\right] \cup [m, \infty).$$

Stąd,

$$y \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Big((-\infty, -m] \cup \Big[f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m} \Big] \cup [m, \infty) \Big) = \{f(x)\}.$$

Zatem, na mocy Lematu 1.5, funkcja f ma domknięty wykres. To kończy dowód. □

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać następujący wynik (patrz [**17**]).

LEMAT 1.8.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o domkniętym wykresie. Wówczas funkcja $|f|$ ma domknięty wykres.

Odnotujmy również następujący oczywisty fakt.

UWAGA 1.2.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o domkniętym wykresie oraz $a \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcja af ma domknięty wykres.

W 1985 r. Doboš udowodnił [**17**], że suma dwóch nieujemnych funkcji o domkniętym wykresie jest funkcją o domkniętym wykresie. Ponieważ $0 \in \mathcal{U}^+(X)$, więc wynik Doboša przyjmuje nastepującą postać.

LEMAT 1.9.

$\mathcal{U}^+(X) + \mathcal{U}^+(X) = \mathcal{U}^+(X)$.

Z powyższego Lematu, na mocy Uwagi 1.2 wynika, że zbiór $\mathcal{U}^+(X)$ jest stożkiem w zbiorze wszystkich funkcji $\mathbb{R}^X$.

Na zakończenie tego rozdziału udowodnimy lemat, w którym określona została pewna własność funkcji quasi-ciągłych (ale nie ciągłych) o domkniętym wykresie.

LEMAT 1.10.

Niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem z klasy* $\mathfrak{QU}(\mathbb{R})$ *o dyskretnym zbiorze punktów nieciągłości i ponadto, niech* $x_0 \in D(g)$*. Wtedy*

$$\begin{gathered} \lim_{x\to x_0^-} g(x) = g(x_0) \text{ oraz } |\lim_{x\to x_0^+} g(x)| = \infty, \text{ lub} \\ \lim_{x\to x_0^+} g(x) = g(x_0) \text{ oraz } |\lim_{x\to x_0^-} g(x)| = \infty. \end{gathered} \tag{1.2}$$

(Przykładem takiego odwzorowania jest funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $g(x) = x$ *dla* $x \in (-\infty, 0]$ *oraz* $g(x) = \frac{1}{x}$ *dla* $x \in (0, \infty)$*)*

DOWÓD.

Niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem z klasy $\mathfrak{QU}(\mathbb{R})$, nieciągłym w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Ponieważ g ma domknięty wykres oraz zbiór $D(g)$ jest dyskretny, więc jedna z granic jednostronnych funkcji g w punkcie x_0 musi mieć wartość $\pm\infty$ (w przeciwnym przypadku punkt x_0 byłby punktem ciągłości funkcji g). Zatem druga ze wspomnianych granic jednostronnych musi być równa wartości $g(x_0)$ (w przeciwnym przypadku funkcja g nie byłaby quasi-ciągła w punkcie x_0). $\square$

ROZDZIAŁ 2

Struktura rodziny odwzorowań będącej sumą dwóch funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie

2.1. Klasa $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$

W 1999 r. Borsík, Doboš i Repický pokazali [**13**], że jeżeli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to dowolne odwzorowanie z klasy $\mathcal{B}_1^*(X)$ można przedstawić w postaci sumy trzech funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie, tj.,

$$\mathcal{B}_1^*(X) \subset \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X).$$

Postawili oni jednocześnie problem [**13**, str. 5] charakteryzacji zbioru $\mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X)$.

W niniejszym rozdziale określimy klasę funkcji $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$ określonych na przestrzeni metrycznej X, której elementy da się przedstawić w postaci sumy **dwóch** funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie.

Definicja 2.1.

Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f *należy do klasy* $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$, jeżeli jest ciągła lub spełnione są dla niej następujące warunki:

(t_1) zbiór $D(f)$ jest ośrodkowy,

(t_2) zawężenie $f{\restriction}D(f)$ jest ciągłe (tj., $f \in \mathcal{B}_1^{**}(X)$, patrz Definicja 1.14),

(t_3) $\overline{\lim}_{u\to x}|f(u)| = \infty$, dla każdego $x \in D(f)$ (tj., na mocy warunku (t_2), dla każdego $x \in D(f)$ istnieje ciąg (u_n) punktów ciągłości funkcji f taki, że $|f(u_n)| \uparrow \infty$).

Z określenia warunku (t_2) oraz faktu, że $\mathcal{B}_1^{**}(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$ (zobacz [**45**, Proposition. 1]) wynika natychmiast, że $\mathcal{B}_1^{\#}(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$ (tj., jeśli X jest przestrzenią metryczną, to każda funkcja $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$ jest pierwszej klasy Baire'a).

Zauważmy najpierw, że

Uwaga 2.1.

Z warunków (t_2) i (t_3) wynika natychmiast, że dla dowolnego odwzorowania $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$, zbiór $D(f)$ ma puste wnętrze (tj., zbiór $C(f)$ jest gęsty w X).

W kolejnym lemacie udowodniona zostanie podstawowa własność funkcji z klasy $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$. Stanowi on uogólnienie wyników uzyskanych przez Kostyrkę i Šalát'a [**35**], Baggsa [**4**] (dla dziedziny X będącej przestrzenią metryczną) oraz przez Doboša [**17**, Theorem 3] (dla dziedziny X bedącej przestrzenią topologiczną). Wykorzystamy ją w dowodzie głównego twierdzenia tego rozdziału.

Lemat 2.1.

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek (t_3) definicji 2.1:

$$\overline{\lim_{u \to t}} |f(u)| = \infty, \tag{2.1}$$

dla każdego $t \in D(f)$. Wtedy zbiór $D(f)$ jest domknięty. W szczególności, własność ta przysługuje wszystkim nieciągłym funkcjom $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X) \cup U(X)$.

Dowód.

Przypuśćmy, że zbiór $D(f)$ nie jest domknięty, tj.,

$$\operatorname{cl} D(f) \setminus D(f) \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Niech x będzie elementem należącym do zbioru

$$\operatorname{cl} D(f) \setminus D(f) = \operatorname{cl} D(f) \cap C(f) \tag{2.3}$$

i niech (x_j) będzie ciągiem elementów zbioru $D(f)$ takim, że

$$\lim_{j\to\infty} \rho(x_j, x) = 0. \tag{2.4}$$

Ponieważ $(x_j) \subset D(f)$, więc

$$\overline{\lim_{u\to x_j}} |f(u)| = \infty$$

dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Z powyższego warunku wynika, że istnieje ciąg $(u_j) \subset C(f)$ taki, że

$$\lim_{j\to\infty} \rho(x_j, u_j) = 0 \text{ oraz } |f(u_j)| \geqslant 1 + |f(x)| \ \text{ dla wszystkich } j. \tag{2.5}$$

Z (2.4) i pierwszego z warunków (2.5) uzyskujemy $u_j \to x$ przy $j \to \infty$. Ponieważ jednak x jest punktem ciągłości odwzorowania f (na mocy (2.3)), więc z drugiego z warunków (2.5) otrzymujemy sprzeczność: $|f(x)| \geqslant 1+$ $+|f(x)|$. Stąd, warunek (2.2) jest niemożliwy, a zatem musi być $\operatorname{cl} D(f) =$ $= D(f)$, tj., zbiór $D(f)$ jest domknięty, jak twierdziliśmy. □

Oznaczenie 2.1.

Niech $\mathcal{F}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, ρ). Symbolami $K_{\mathcal{F}}$ i $U_{\mathcal{F}}$ oznaczamy, odpowiednio, zbiory $\bigcup_{K\in\mathcal{F}} \operatorname{cl} K$ oraz $\bigcup_{K\in\mathcal{F}} K$, gdzie $\operatorname{cl} K$ jest domknięciem zbioru K w przestrzeni X. Ponadto, symbolem $K^{\mathcal{F}}$ oznaczać będziemy rodzinę $\{\operatorname{cl} K, K \in \mathcal{F}\}$.

Oznaczenie 2.2.

Symbolem $\overline{K}(t, \varepsilon)$ oznaczamy kulę domkniętą o środku w punkcie $t \in X$ i promieniu $\varepsilon > 0$.

Kolejny lemat jest kluczowym dla dowodu głównego twierdzenia tego rozdziału. Stanowi on rozszerzoną wersję wyniku pochodzącego od Borsíka, Doboša i Repický'ego [**13**, Lemma 3.3]. Poprzedzimy go uwagą określającą sposób rozumienia zbieżności ciągu zbiorów (U_n) do punktu x.

Definicja 2.2.

Mówimy, że ciąg (U_n), niepustych podzbiorów przestrzeni X, *jest zbieżny do elementu* x, i piszemy:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = x,$$

gdy obydwa ciągi $(\delta(U_n))$ i $(\rho(x, U_n))$ są zbieżne do 0.

Przykładem ciągu (U_n) podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$ zbieżnym do 0 jest $U_n = (1/(n+1), 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Lemat 2.2.

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Dla każdej nieciągłej funkcji $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$ istnieją nieskończone rodziny $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ otwartych podzbiorów przestrzeni X takie, że dla rodziny $\mathcal{L} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ spełnione są warunki (patrz oznaczenia 2.1 na poprzedniej stronie):

(*i*) *$K^{\mathcal{L}} \subset C(f)$ (tj., $\operatorname{cl} K \cap D(f) = \emptyset$ dla każdego $K \in \mathcal{L}$); w szczególności, $U_{\mathcal{A}}$ i $U_{\mathcal{B}}$ są otwartymi podzbiorami zbioru $C(f)$;*

(*ii*) *rodzina $\{\operatorname{cl} K : K \in \mathcal{L}\}$, podzbiorów przestrzeni $C(f)$, jest dyskretna (tj., dla każdego $x \in C(f)$ istnieje zbiór $U \in \mathcal{V}_x$ przecinający co najwyżej jeden element rodziny $\{\operatorname{cl} K : K \in \mathcal{L}\}$);*

(*iii*) *dla każdego ciągu (K_p) parami rozłącznych elementów $K^{\mathcal{L}}$ i dla każdego ciągu (y_p) takiego, że $y_p \in \operatorname{cl} K_p$, $p = 1, 2, \ldots$, zachodzi:*

$$\varlimsup_{p\to\infty} |f(y_p)| = \infty;$$

(iv) $D(f) \subset \operatorname{cl} U_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{cl} U_{\mathcal{B}} = \operatorname{cl} K_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{cl} K_{\mathcal{B}}$ *(zauważmy, że* $\operatorname{cl} U_{\mathcal{A}} = \operatorname{cl} K_{\mathcal{A}}$ *i* $\operatorname{cl} U_{\mathcal{B}} = \operatorname{cl} K_{\mathcal{B}}$*).*

DOWÓD.

Niech $F = D(f)$. Z Lematu 2.1 i własności (t_3) Definicji 2.1 wynika, że

$$\textit{zbiór } F \textit{ jest domknięty i nie posiada punktów izolowanych w przestrzeni } X. \tag{2.6}$$

Na podstawie aksjomatu (t_1) Definicji 2.1 zbiór F jest ośrodkowy; niech zatem G oznacza ustalony przeliczalny i gęsty podzbiór zbioru F. Ponieważ zbiór F jest nigdziegęsty (patrz Uwaga 2.1 i Lemat 2.1), więc możemy przyjąć, że

$$G = \{x_k : x_i \neq x_j \text{ przy } i \neq j\}_{k=1}^{M},$$

gdzie $M = \operatorname{card} F$, gdy F jest zbiorem skończonym oraz $M = \infty$, gdy F jest zbiorem nieskończonym.

Główną ideą konstrukcji elementów rodziny $\mathcal{L}$ jest określanie ciągów $\left(U_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}$, otwartych podzbiorów zbioru $C(f)$ w taki sposób, aby $U_j^{(k)} \to x_k$ przy $j \to \infty$ (patrz Definicja 2.2), oraz aby $|f(x)| \geqslant k + j$ dla dowolnego elementu $x \in U_j^{(k)}$ i dla wszystkich indeksów $j, k \in \mathbb{N}$. Konstrukcję przeprowadzimy indukcyjnie w trzech krokach.

KROK 1. Na mocy warunku (2.6), punkt $x_1 \in G$ nie jest izolowany w X. Z ciągłości zawężenia $f{\restriction}F$ (aksjomat (t_2)) oraz warunku $\operatorname{cl} C(f) = X$ (patrz Uwaga 2.1) wnosimy, że istnieje nieskończony ciąg $(t_j^{(1)})$ elementów zbioru $C(f)$ taki, że:

$$t_j^{(1)} \neq t_m^{(1)} \text{ dla } j \neq m, \tag{2.7}$$

oraz

$$\lim_{j\to\infty} t_j^{(1)} = x_1. \tag{2.8}$$

Ponadto, na podstawie warunku (t_3) Definicji 2.1, mamy

$$\overline{\lim_{t\to x_1}}|f(t)| = \infty,$$

więc możemy przyjąć (przechodząc do odpowiedniego podciągu ciągu $(t_j^{(1)})$), że

$$|f(t_{j+1}^{(1)})| > |f(t_j^{(1)})| > 1 + j, \tag{2.9}$$

dla wszystkich indeksów j. Ponieważ zbiór $C(f)$ jest otwarty oraz $t_j^{(1)} \in C(f), j = 1, 2, \ldots$, więc istnieje ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_j^{(1)})$ spełniający warunek $\varepsilon_j^{(1)} \downarrow 0$ przy $j \to \infty$ i takich, że

$$\overline{K}(t_j^{(1)}, \varepsilon_j^{(1)}) \subset C(f) \text{ dla wszystkich } j, \tag{2.10}$$

oraz, na mocy (2.7),

$$\overline{K}(t_j^{(1)}, \varepsilon_j^{(1)}) \cap \overline{K}(t_m^{(1)}, \varepsilon_m^{(1)}) = \emptyset \text{ przy } j \neq m. \tag{2.11}$$

Ponadto, na mocy (2.9) i (2.10) możemy założyć, że wszystkie liczby $\varepsilon_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots$, są takie, że

$$|f(x)| > 1 + j, \textit{ dla wszystkich } x \in \overline{K}(t_j^{(1)}, \varepsilon_j^{(1)}) \textit{ oraz dla wszystkich indeksów } j. \tag{2.12}$$

Niech teraz $\mathcal{K}_1 = \{U_j^{(1)} : j = 1, 2, \ldots\}$, gdzie $U_j^{(1)} = K(t_j^{(1)}, \varepsilon_j^{(1)})$, $j = 1, 2, \ldots$. Dla rodziny $\mathcal{K}_1$ spełnione są nastepujące warunki:

(a_1) $\operatorname{cl} U_j^{(1)} \subset C(f)$, dla każdego $j = 1, 2, \ldots$ (co wynika z (2.10)),

(b_1) $|f(x)| > 1 + j$, dla każdego $x \in \operatorname{cl} U_j^{(1)}$ i każdego $j = 1, 2, \ldots$ (co wynika z (2.12)),

(c_1) $\operatorname{cl} U_j^{(1)} \cap \operatorname{cl} U_k^{(1)} = \emptyset$, przy $j \neq k$ (co wynika z (2.11)),

(d_1) $\lim_{j\to\infty} \operatorname{cl} U_j^{(1)} = x_1$ (patrz Definicja 2.2; wynika to z (2.8) oraz faktu, że $\varepsilon_j^{(1)} \downarrow 0$ przy $j \to \infty$).

W przypadku, gdy $M = 1$, konstrukcja rodziny $\mathcal{L}$ jest zakończona. Połóżmy bowiem $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1$, $\mathcal{A} = \{U_{2j-1}^{(1)} : j \geqslant 1\}$ i $\mathcal{B} = \{U_{2j}^{(1)} : j \geqslant 1\}$. Własności (a_1), (b_1) i (d_1) implikują, odpowiednio, warunki (i), (iii), oraz (iv) Lematu 2.2. Pokażemy, że spełniony jest również warunek (ii).

Przypuśćmy, że istnieje element $x_0 \in C(f)$ taki, że dla dowolnej liczby $p \in \mathbb{N}$, istnieją różne od siebie liczby $j_p, j_p' \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} U_{j_p}^{(1)} \neq \emptyset \neq K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} U_{j_p'}^{(1)}. \tag{2.13}$$

Zauważmy, że ciągi $(j_p), (j_p')$ są ograniczone:

> *w przeciwnym przypadku możemy założyć, że istnieje ciąg (u_p) taki, że np. $u_p \in K(x_0, \frac{1}{p}) \cap \operatorname{cl} U_{j_p}^{(1)}$, dla wszystkich indeksów p, oraz $\lim_{p\to\infty} u_p = x_0$; stąd, ponieważ x_0 jest punktem ciągłości funkcji f, $\lim_{p\to\infty} f(u_p) = f(x_0)$, wbrew nierówności w warunku (b_1).*

Stąd, przechodząc do podciągów, możemy założyć, że oba ciągi (j_p) i (j_p') są stałe:

$$j_p = m_1, j_p' = m_2 \text{ oraz } m_1 \neq m_2,$$

dla wszystkich $p, p' \in \mathbb{N}$.

Połóżmy teraz $U_{j_p}^{(1)} = M$ oraz $U_{j_p'}^{(1)} = P$. Z warunku (c_1) wynika, że:

$$\operatorname{cl} M \cap \operatorname{cl} P = \emptyset. \tag{2.14}$$

Z drugiej strony, z (2.13) otrzymujemy:

$$K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} M \neq \emptyset \neq K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} P$$

dla nieskończenie wielu indeksów p. Stąd

$$x_0 \in \operatorname{cl} M \cap \operatorname{cl} P,$$

wbrew równości (2.14). Z powyższej sprzeczności wynika, że warunek (ii) Lematu 2.2 nie może być fałszywy. To kończy dowód pierwszego kroku konstrukcji. Dla $M = 1$ dowód lematu jest zakończony.

KROK 2. Niech $M \geqslant 2$ i załóżmy, że dla liczby naturalnej $r < M$ skonstruowaliśmy przeliczalną rodzinę $\mathcal{K}_r$ otwartych podzbiorów przestrzeni X postaci $\mathcal{K}_r = \{U_j^{(i)} : i = 1, \ldots, r; j \geqslant 1\}$, dla których spełnione są poniższe warunki (odpowiadające warunkom dla $r = 1$, uzyskanym w pierwszym kroku konstrukcyjnym):

(a_r) $\operatorname{cl} U_j^{(i)} \subset C(f)$, dla każdego $j = 1, 2, \ldots$ oraz każdego $i = 1, \ldots, r$,

(b_r) $|f(x)| > i + j$, dla każdego $x \in \operatorname{cl} U_j^{(i)}$, każdego $j = 1, 2, \ldots$ oraz każdego $i = 1, \ldots, r$,

(c_r) $\operatorname{cl} U_{j_1}^{(i_1)} \cap \operatorname{cl} U_{j_2}^{(i_2)} = \emptyset$, dla $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, przy $i_1, i_2 \leqslant r$ oraz $j_1, j_2 \geqslant 1$,

(d_r) $\lim_{j \to \infty} \operatorname{cl} U_j^{(i)} = x_i$, dla $i = 1, \ldots, r$.

Pokażemy teraz, że istnieje rodzina $\mathcal{K}^{(r+1)}$ otwartych podzbiorów $U_j^{(r+1)}$ przestrzeni X, gdzie $j = 1, 2, \ldots$, taka, że dla rodziny $\mathcal{K}_{r+1} = \mathcal{K}_r \cup \mathcal{K}^{(r+1)}$ spełnione są powyższe cztery warunki przy r zastąpionym przez $r + 1$.

Argumentacja jest podobna do uzasadnienia z Kroku 1. Ponieważ $r < M$, więc istnieje element

$$x_{r+1} \in G \setminus \{x_1, \ldots, x_r\} \subset F = D(f). \tag{2.15}$$

Na mocy warunku (2.6) wnioskujemy, że punkt x_{r+1} jest punktem nieizolowanym w przestrzeni X. Z ciągłości zawężenia $f \restriction F$ (aksjomat (t_2)) oraz warunku $\operatorname{cl} C(f) = X$ (patrz Uwaga 2.1) wnosimy, że istnieje ciąg
$(t_j^{(r+1)}) \subset C(f)$ taki, że:

$$t_j^{(r+1)} \neq t_m^{(r+1)} \text{ dla } j \neq m, \tag{2.16}$$

oraz

$$\lim_{j\to\infty} t_j^{(r+1)} = x_{r+1}. \tag{2.17}$$

Ponadto, na podstawie warunku (t_3) Definicji 2.1, mamy

$$\overline{\lim_{t\to x_{r+1}}} |f(t)| = \infty,$$

więc możemy przyjąć (przechodząc do odpowiedniego podciągu ciągu $(t_j^{(1)})$), że

$$|f(t_{j+1}^{(r+1)})| > |f(t_j^{(r+1)})| > (r+1) + j, \tag{2.18}$$

dla wszystkich indeksów j. Ponieważ zbiór $C(f)$ jest otwarty oraz
$t_j^{(r+1)} \in C(f), j = 1, 2, \dots$, więc istnieje ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_j^{(r+1)})$ spełniający warunek $\varepsilon_j^{(r+1)} \downarrow 0$ przy $j \to \infty$ i takich, że

$$\overline{K}(t_j^{(r+1)}, \varepsilon_j^{(r+1)}) \subset C(f) \text{ dla wszystkich } j, \tag{2.19}$$

oraz, na mocy (2.16),

$$\overline{K}(t_j^{(r+1)}, \varepsilon_j^{(r+1)}) \cap \overline{K}(t_m^{(r+1)}, \varepsilon_m^{(r+1)}) = \emptyset \text{ przy } j \neq m. \tag{2.20}$$

Ponadto, na mocy nierówności (2.18) i inkluzji (2.19) możemy założyć, że wszystkie liczby $\varepsilon_j^{(r+1)}$, $j = 1, 2, \dots$, są takie, że

$$|f(x)| > (r+1) + j, \tag{2.21}$$

dla wszystkich $x \in \overline{K}(t_j^{(r+1)}, \varepsilon_j^{(r+1)})$ oraz dla wszystkich indeksów j.

Zgodnie z wcześniej przyjętymi założeniami, mamy $x_{r+1} \notin \{x_1, \ldots, x_r\}$. Z określenia ciągów $(t_j^{(r+1)})$ oraz $(\varepsilon_j^{(r+1)})$ wynika (patrz Definicja 2.2), że

$$\lim_{j\to\infty} \overline{K}(t_j^{(r+1)}, \varepsilon_j^{(r+1)}) = x_{r+1}.$$

Zatem, z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że przekrój

$$\overline{K}(t_j^{(r+1)}, \varepsilon_j^{(r+1)}) \cap \bigcup \mathcal{K}_r$$

jest niepusty tylko dla skończonej ilości indeksów j:

> *w przeciwnym wypadku bowiem, element x_{r+1} należałby do któregoś ze zbiorów z rodziny $\mathcal{K}_r$, czyli - na mocy założenia (a_r) -byłby punktem ciągłości funkcji f, wbrew warunkowi* (2.15).

Zatem, istnieje indeks j_0 taki, że

$$\overline{K}(t_{j_0+j}^{(r+1)}, \varepsilon_{j_0+j}^{(r+1)}) \cap \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{cl} U_j^{(i)} = \emptyset, \text{ dla } j = 1, 2, \ldots \ . \tag{2.22}$$

Połóżmy $U_j^{(r+1)} = K(t_{j_0+j}^{(r+1)}, \varepsilon_{j_0+j}^{(r+1)})$, $j = 1, 2, \ldots$ oraz $\mathcal{K}^{(r+1)} = \{U_j^{(r+1)} : j \geqslant 1\}$. Dla rodziny $\mathcal{K}^{(r+1)}$ spełnione są nastepujące warunki:

(a) $\operatorname{cl} U_j^{(r+1)} \subset C(f)$, dla każdego $j = 1, 2, \ldots$ (co wynika z (2.19)),

(b) $|f(x)| > (r+1) + j$, dla każdego $x \in \operatorname{cl} U_j^{(r+1)}$ i każdego $j = 1, 2, \ldots$ (co wynika z (2.21)),

(c) $\operatorname{cl} U_j^{(r+1)} \cap \operatorname{cl} U_k^{(r+1)} = \emptyset$, przy $j \neq k$ (co wynika z (2.20)),

(d) $\lim_{j\to\infty} \operatorname{cl} U_j^{(r+1)} = x_{r+1}$ (co wynika z (2.17) oraz faktu, że $\varepsilon_j^{(r+1)} \downarrow 0$ przy $j \to \infty$),

(e) $\operatorname{cl} U_j^{(r+1)} \cap \operatorname{cl} U_k^{(m)} = \emptyset$, dla każdego $m \leqslant r$ i każdych $j, k = 1, 2, \ldots$ (co wynika z (2.22)).

Zatem

- z warunków (a) i (a_r) wynika warunek (a_{r+1}),
- z warunków (b) i (b_r) wynika warunek (b_{r+1}),
- z warunków (c), (e) i (c_r) wynika warunek (c_{r+1}),
- z warunków (d) i (d_r) wynika warunek (d_{r+1}).

Tak więc $\mathcal{K}^{(r+1)}$ jest poszukiwaną rodziną otwartych podzbiorów przestrzeni X, tj., taką, że rodzina $\mathcal{K}_{r+1} = \mathcal{K}_r \cup \mathcal{K}^{(r+1)}$ spełnia wymagane warunki (a_{r+1}), (b_{r+1}), (c_{r+1}) i (d_{r+1}).

Udowodniliśmy tym samym, że dla $M \geqslant 2$ istnieje wstępujący ciąg $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots \mathcal{K}_r \subset \ldots$ przeliczalnych rodzin podzbiorów przestrzeni X, postaci takiej jak powyżej spełniający, dla każdego r, warunki $(a_r) - (d_r)$. Dla $M < \infty$, ciąg jest skończony a jego ostatni wyraz ma indeks $r = M$; dla $M = \infty$, na mocy indukcji matematycznej, ciąg jest nieskończony przeliczalny.

KROK 3. Połóżmy teraz

$$\mathcal{L} = \bigcup_{r=1}^{M} \mathcal{K}_r = \{U_j^{(i)} : i, j \geqslant 1\},$$

$$\mathcal{A} = \{U_{2j-1}^{(i)} : i, j \geqslant 1\},$$

oraz

$$\mathcal{B} = \{U_{2j}^{(i)} : i, j \geqslant 1\}.$$

Podobnie jak w Kroku 1, własności (a_r), (b_r) i (d_r) implikują, odpowiednio, warunki (i), (iii) oraz (iv) Lematu 2.2.

Ponadto, argumentację dowodzącą prawdziwości warunku (ii) w Kroku 1 (tj., przy użyciu teraz własności (b_r) i (c_r) zamiast (b_1) i (c_1)) można zastosować w następujący sposób aby pokazać, że warunek

$$K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} U_{j_p}^{(s_p)} \neq \emptyset \neq K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} U_{j'_p}^{(s'_p)},\ p = 1, 2, \ldots,\ (s_p, j_p) \neq (s'_p, j'_p), \tag{2.23}$$

dla dowolnego $x_0 \in C(f)$ jest fałszywy.

Zauważmy najpierw, że ciągi (s_p) i (s'_p) są ograniczone. Istotnie, wartości funkcji $|f|$ na wyrazach ciągów $\left(U_{j_p}^{(s_p)}\right)_p$ i $\left(U_{j'_p}^{(s'_p)}\right)_p$ (zbieżnych, odpowiednio, do punktów $x_0, x'_0 \in C(f)$), są większe (patrz warunek (b_{r+1})) niż suma dolnego i górnego indeksu każdego ze zbiorów takiego ciągu. Gdyby więc ciągi (s_p) i (s'_p) nie były ograniczone, to punkty x_0 i x'_0 nie byłyby punktami ciągłości funkcji f.

Stąd, przechodząc do podciągów możemy założyć, że te ciągi są stałe:

$$s_p = q_1, s'_p = q_2,$$

dla wszystkich $p = 1, 2, \ldots$.

Twierdzimy także, że ciągi (j_p) oraz (j'_p) są ograniczone:

> *w przeciwnym przypadku możemy założyć, że istnieje ciąg (u_p) taki, że np. $u_p \in K\left(x_0, \frac{1}{p}\right) \cap \operatorname{cl} U_{j_p}^{(s_p)}$, dla wszystkich indeksów p, oraz $\lim_{p\to\infty} u_p = x_0$; stąd, ponieważ x_0 jest punktem ciągłości funkcji f, $\lim_{p\to\infty} f(u_p) = f(x_0)$, wbrew nierówności w warunku (b_{r+1}).*

Przechodząc do podciągów możemy teraz założyć, że oba ciągi (j_p) i (j'_p) są stałe:

$$s_p = m_1, s'_p = m_2,$$

dla wszystkich $p = 1, 2, \ldots$.

Połóżmy $M = U_{m_1}^{(q_1)} = U_{j_p}^{(s_p)}$, $P = U_{m_2}^{(q_2)} = U_{j'_p}^{(s'_p)}$. Ponieważ $(s_p, j_p) \neq$ $\neq (s'_p, j'_p)$, więc $(q_1, m_1) \neq (q_2, m_2)$, skąd $M \neq P$. Z określenia zbiorów M i P oraz z warunku (c_{r+1}) wynika teraz, że:

$$\operatorname{cl} M \cap \operatorname{cl} P = \emptyset. \tag{2.24}$$

Z drugiej strony, z (2.23) otrzymujemy:

$$K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} M \neq \emptyset \neq K\Big(x_0, \frac{1}{p}\Big) \cap \operatorname{cl} P,$$

dla nieskończenie wielu indeksów p. Stąd

$$x_0 \in \operatorname{cl} M \cap \operatorname{cl} P,$$

wbrew równości (2.24). Z powyższej sprzeczności wynika, że warunek (ii) Lematu 2.2 nie może być fałszywy. Tym samym zakończony został dowód Lematu 2.2. □

Na zakończenie tego podrozdziału udowodnimy dwa dodatkowe lematy. Zostaną one wykorzystane w dowodzie głównego twierdzenia Rozdziału 2.

LEMAT 2.3.

Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$. Zbiór $D(f) \cup K_{\mathcal{L}}$, gdzie $\mathcal{L}$ jest rodziną zbiorów określoną tak jak w powyższym lemacie, jest domknięty.

DOWÓD.

Połóżmy $W = D(f) \cup K_{\mathcal{L}}$. Pokażemy, że

$$W = \operatorname{cl} W. \tag{2.25}$$

Na mocy Lematu 2.1, zbiór $F = D(f)$ jest domknięty, skąd

$$\operatorname{cl} W = F \cup \operatorname{cl} K_{\mathcal{L}}. \tag{2.26}$$

Ustalmy element $x \in \operatorname{cl} W$. Ponieważ $F \subset W$ (i F jest domknięty), więc z równości (2.26) wynika, że bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $x \in \operatorname{cl} K_{\mathcal{L}} = (\operatorname{cl} K_{\mathcal{L}} \cap F) \cup (\operatorname{cl} K_{\mathcal{L}} \setminus F)$, a zatem, że

$$x \in \operatorname{cl} K_{\mathcal{L}} \setminus F = \operatorname{cl} K_{\mathcal{L}} \cap C(f) \tag{2.27}$$

(przypominamy, że $X \setminus F = X \setminus D(f) = C(f)$). Twierdzimy, że warunek (2.27) implikuje $x \in K_{\mathcal{L}}$, tj., $x \in \operatorname{cl} K'$ dla pewnego $K' \in \mathcal{L}$ (co w dalszej kolejności implikuje, że $x \in W$, skąd $\operatorname{cl} W = W$). Istotnie, przypuśćmy, że $x \notin \operatorname{cl} K$ dla każdego $K \in \mathcal{L}$. Z równości w warunku (2.27) wynika, że $x \in C(f)$ zatem, na mocy Lematu 2.2 (ii) wnioskujemy, że istnieje otwarte otoczenie U punktu x takie, że albo $U \cap \operatorname{cl} K_0 \neq \emptyset$ dla dokładnie jednego zbioru $K_0 \in \mathcal{L}$, lub $U \cap \operatorname{cl} K = \emptyset$ dla każdego $K \in \mathcal{L}$. Połóżmy teraz $U_x = U \setminus \operatorname{cl} K_0$ w pierwszym przypadku oraz $U_x = U$ w drugim. Wtedy zbiór U_x jest otwartym otoczeniem punktu x takim, że $U_x \cap K_{\mathcal{L}} = \emptyset$, skąd $x \notin \operatorname{cl} K_{\mathcal{L}}$ - wbrew warunkowi (2.27). Zatem nasze stwierdzenie musi być prawdziwe. To kończy dowód równości (2.25). □

Lemat 2.4.

Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą rodzinami zbiorów określonymi tak jak w Lemacie 2.2. Wtedy zbiory $K_{\mathcal{A}}$ i $K_{\mathcal{B}}$ są rozgraniczone, tj.,

$$K_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{cl} K_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \cap \operatorname{cl} K_{\mathcal{A}} = \emptyset. \tag{2.28}$$

Dowód.

Zauważmy najpierw, że z warunków (i) oraz (ii) Lematu 2.2 wynika, iż

$$\operatorname{cl} M \cap \operatorname{cl} N = \emptyset \tag{2.29}$$

dla dowolnych zbiorów $M \in \mathcal{A}$ i $N \in \mathcal{B}$. Przypuśćmy, że istnieje element $w \in K_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{cl} K_{\mathcal{B}}$. Wtedy istnieją: zbiór $K \in \mathcal{A}$ taki, że $w \in \operatorname{cl} K$ oraz ciąg $(w_r) \subset K_{\mathcal{B}}$ zbieżny do w. Zauważmy, że $K_{\mathcal{B}} = \bigcup_{K \in \mathcal{B}} \operatorname{cl} K$ oraz $\mathcal{B} = \{U_{2j}^{(i)} : i, j \geqslant 1\}$, gdzie $U_j^{(i)} = K(t_j^{(i)}, \varepsilon_j^{(i)})$, $j = 1, 2, \ldots$ są zbiorami określonymi tak, że $\lim_{j \to \infty} U_j^{(i)} = x_i \in D(f)$. Z powyższych określeń wynika, że $(w_r) \subset K_{\mathcal{B}}$ gdy istnieje nieskończenie wiele indeksów r takich, że:

- $w_r \in \operatorname{cl} H_0$ dla pewnego $H_0 \in \mathcal{B}$
- $w_r \in \operatorname{cl} H_r$, gdzie $H_r \in \mathcal{B}$ oraz $H_{r'} \neq H_{r''}$ przy $r' \neq r''$.

Z założeń pierwszego punktu wynika, że $x \in \operatorname{cl} K \cap \operatorname{cl} H_0$, wbrew warunkowi (2.29). W drugim przypadku zaś, na mocy warunku (iii) Lematu 2.2, otrzymujemy $\overline{\lim}_{r\to\infty}|f(w_r)| = \infty$, wbrew ciągłości funkcji f w punkcie $x \in K_{\mathcal{A}} \subset C(f)$. Tak więc warunek (2.28) nie może być fałszywy. $\square$

2.2. Rozkład funkcji z klasy $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$ na sumę dwóch składników z klasy $\mathcal{QU}(X)$

W niniejszym podrozdziale podamy i udowodnimy główne twierdzenie tego rozdziału. Określimy w nim sposób rozkładu funkcji z klasy $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$ na sumę dwóch składników z klasy $\mathcal{QU}(X)$.

Oznaczenie 2.3.

Symbolem $\mathcal{B}_{01}^{\#}(X)$ oznaczać będziemy podzbiór klasy $\mathcal{B}_1^{\#}(X)$ złożony z funkcji f takich, że $f \restriction D(f) \equiv 0$.

Poniższa uwaga pozwoli nam skrócić dowód twierdzenia głównego (dzięki niej ograniczymy się do przypadku funkcji $f \in \mathcal{B}_{01}^{\#}(X)$).

Uwaga 2.2.

Jeśli $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$ to $f = f_0 + g$, gdzie $f_0 \in \mathcal{B}_{01}^{\#}(X)$ oraz $g \in C(X)$.

Dowód.

Niech $f \in \mathcal{B}_1^{\#}(X)$. Wówczas, na mocy warunku (t_2) Definicji 2.1, zawężenie $f \restriction D(f)$ jest ciągłe. Na mocy Lematu 2.1, zbiór $D(f) \subset X$ jest domknięty. Zatem, z twierdzenia Tietzego wynika, że odwzorowanie $f \restriction D(f)$ można przedłużyć do funkcji $g \in C(X)$. Niech $f_0(x) = f(x) - g(x)$, dla dowolnego $x \in X$. Wtedy $f_0 \in \mathcal{B}_{01}^{\#}(X)$, $f_0 + g = f$ i $f_0(x) = 0$ dla dowolnego $x \in D(f)$. To kończy dowód. $\square$

Z powyższej uwagi wynika, że

$$\mathcal{B}_1^{\#}(X) = \mathcal{B}_{01}^{\#}(X) + C(X). \tag{2.30}$$

Podamy teraz i udowodnimy główny wynik tego rozdziału. Stanowi on uogólnienie twierdzenia Borsíka, Doboša i Repický'ego [**13**, Theorem 4.1], w którym udowodniono, że jeżeli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to każda funkcja z klasy $\mathcal{B}_1^*(X)$ jest sumą trzech funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie.

Twierdzenie 2.5.

Niech (X, ρ) będzie nieskończoną przestrzenią metryczną. Każde odwzorowanie $f \in B_1^{\#}(X)$ jest sumą dwóch funkcji quasi-ciągłych i o domkniętym wykresie na X, tj.,

$$B_1^{\#}(X) \subset \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X). \tag{2.31}$$

Dowód.

Na mocy równości (2.30) wystarczy, że udowodnimy - równoważną do związku (2.31) - inkluzję:

$$\mathcal{B}_{01}^{\#}(X) \subset \mathcal{QU}(X) + \mathcal{QU}(X). \tag{2.32}$$

Ustalmy w tym celu funkcję $f \in \mathcal{B}_{01}^{\#}(X)$. Wystarczy, że rozważymy jednynie przypadek, gdy f jest odwzorowaniem nieciągłym. W dowodzie twierdzenia podamy określenia funkcji $h_1, h_2 \in \mathcal{QU}(X)$ takich, że $f = h_1 + h_2$. Oba te odwzorowania będą określone z wykorzystaniem przeliczalnej rodziny $\mathcal{L}$, otwartych podzbiorów zbioru $C(f)$, których własności zostały wymienione w Lemacie 2.2.

Niech $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, $F = D(f)$. Na podstawie Lematu 2.3, zbiór W zdefiniowany wzorem

$$W = F \cup K_{\mathcal{L}} = F \cup K_{\mathcal{A}} \cup K_{\mathcal{B}}, \tag{2.33}$$

(gdzie $K_{\mathcal{A}} = \bigcup_{K \in \mathcal{A}} \operatorname{cl} K$ oraz $K_{\mathcal{B}} = \bigcup_{K \in \mathcal{B}} \operatorname{cl} K$), jest zbiorem domkniętym. Przypomnijmy ponadto, że elementami rodzin $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są takie otwarte podzbiory przestrzeni X, że $K_{\mathcal{A}} \cup K_{\mathcal{B}} \subset C(f)$. Oznaczmy przez ℓ_W funkcję ciągłą określoną na zbiorze $X \setminus W$ wzorem $\ell_W(x) = 1/\rho(x, W)$. Ponieważ $W = \operatorname{cl} W$, więc $\rho(x, W) > 0$ dla dowolnego $x \in X \setminus W$. Zdefiniujemy teraz funkcje h_1, h_2 wzorami

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in K_{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{dla} \quad x \in K_{\mathcal{B}} \cup F \\ f^+(x) + \ell_W(x) & \text{dla} \quad x \in X \setminus W, \end{cases} \tag{2.34}$$

oraz

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in K_{\mathcal{A}} \\ f(x) & \text{dla} \quad x \in K_{\mathcal{B}} \cup F \\ -f^-(x) - \ell_W(x) & \text{dla} \quad x \in X \setminus W. \end{cases} \tag{2.35}$$

Oczywiście $f = h_1 + h_2$. Pokażemy, że obie funkcje h_1, h_2 są quasi-ciągłe i mają domknięte wykresy. Zauważmy, że są one ciągłe - więc też quasi-ciągłe - na zbiorze otwartym $X \setminus W$ (bo W jest domknięty).

Podamy teraz uzasadnienie (wykorzystując w tym celu Definicję 1.18) quasi-ciągłości odwzorowania h_1 na zbiorze W.

Jeżeli $x_0 \in K_{\mathcal{A}} = \bigcup_{K \in \mathcal{A}} \operatorname{cl} K$, to istnieje zbiór otwarty $K \in \mathcal{A}$ taki (patrz warunek (i) w Lemacie 2.2), że $x_0 \in \operatorname{cl} K \subset C(f)$. Jeżeli $x_0 \in K$, to oczywiście $x_0 \in C(h_1)$ (ponieważ $f(x) = h_1(x)$ dla dowolnego $x \in \operatorname{cl} K$, $K \in \mathcal{A}$). Jeżeli z kolei $x_0 \in \operatorname{cl} K \setminus K$, to istnieje ciąg $(t_n) \subset K$ zbieżny do x_0. Zatem $h_1(t_n) = f(t_n) \to f(x_0) = h_1(x_0)$, skąd wynika, że funkcja h_1 jest quasi-ciągła w punkcie x_0.

Jeżeli $x_0 \in K_{\mathcal{B}} = \bigcup_{K \in \mathcal{B}} \operatorname{cl} K$, to istnieje zbiór $K \in \mathcal{B}$ taki, że $x_0 \in \operatorname{cl} K$. Ponieważ K jest zbiorem otwartym i $h_1(x) = 0$ dla każdego $x \in K$, więc zbiór K jest zawarty w zbiorze $C(h_1)$ punktów ciągłości funkcji h_1. Zatem

$x_0 = \lim_{n\to\infty} t_n$, gdzie $t_n \in K \subset C(h_1), n = 1, 2, \ldots$. Stąd, na mocy Definicji 1.18, funkcja h_1 jest quasi-ciągła w każdym punkcie $x_0 \in K_{\mathcal{B}}$.

Niech teraz $x_0 \in F$. Wtedy $h_1(x_0) = 0$. Na podstawie warunku (iv) Lematu 2.2 mamy

$$F \subset \operatorname{cl} U_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{cl} U_{\mathcal{B}},$$

gdzie $U_{\mathcal{A}}$ i $U_{\mathcal{B}}$ są zbiorami otwartymi (patrz Oznaczenie 2.1). Zatem $x_0 =$ $= \lim_{n\to\infty} t_n$, gdzie $t_n \in U_{\mathcal{B}} \subset C(h_1), n = 1, 2, \ldots$. Stąd, na mocy Definicji 1.18, funkcja h_1 jest quasi-ciągła w każdym punkcie $x_0 \in F$.

Podobnie udowodnimy quasi-ciągłość na zbiorze W funkcji h_2.
Jeżeli $x_0 \in K_{\mathcal{B}} = \bigcup_{K\in\mathcal{B}} \operatorname{cl} K$, to istnieje zbiór otwarty $K \in \mathcal{B}$ taki (patrz warunek (i) w Lemacie 2.2), że $x_0 \in \operatorname{cl} K \subset C(f)$. Jeżeli $x_0 \in K$, to oczywiście $x_0 \in C(h_2)$ (ponieważ $f(x) = h_2(x)$ dla dowolnego $x \in \operatorname{cl} K$, $K \in \mathcal{B}$). Jeżeli z kolei $x_0 \in \operatorname{cl} K \setminus K$, to istnieje ciąg $(t_n) \subset K$ zbieżny do x_0. Zatem
$h_2(t_n) = f(t_n) \to f(x_0) = h_2(x_0)$, skąd wynika, że funkcja h_2 jest quasi-ciągła w punkcie x_0.

Jeżeli z kolei $x_0 \in K_{\mathcal{A}} = \bigcup_{K\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} K$, to istnieje zbiór $K \in \mathcal{A}$ taki, że $x_0 \in \operatorname{cl} K$. Ponieważ K jest zbiorem otwartym i $h_2(x) = 0$ dla każdego $x \in K$, więc zbiór K jest zawarty w zbiorze $C(h_2)$ punktów ciągłości funkcji h_2. Zatem $x_0 = \lim_{n\to\infty} t_n$, gdzie $t_n \in K \subset C(h_2), n = 1, 2, \ldots$. Stąd, na mocy Definicji 1.18, funkcja h_2 jest quasi-ciągła w każdym punkcie $x_0 \in K_{\mathcal{A}}$.

Niech teraz $x_0 \in F$. Wtedy $h_2(x_0) = f(x_0)$ i ponieważ $f{\restriction}D(f) \equiv 0$, więc $h_2(x_0) = 0$. Na podstawie warunku (iv) Lematu 2.2 mamy

$$F \subset \operatorname{cl} U_{\mathcal{B}} \cap \operatorname{cl} U_{\mathcal{A}},$$

gdzie $U_{\mathcal{A}}$ i $U_{\mathcal{B}}$ są zbiorami otwartymi (patrz Oznaczenie 2.1). Zatem $x_0 = = \lim_{n\to\infty} t_n$, gdzie $t_n \in U_{\mathcal{A}} \subset C(h_2), n = 1, 2, \ldots$. Stąd, na mocy Definicji 1.18, funkcja h_2 jest quasi-ciągła w każdym punkcie $x_0 \in F$.

Z powyższych rozważań wynika, że odwzorowanie h_1 (a także h_2) jest quasi-ciągłe na zbiorze $W = K_{\mathcal{A}} \cup K_{\mathcal{B}} \cup F = K_{\mathcal{L}} \cup F$. Zatem h_1 i h_2 są quasi-ciągłe na zbiorze $(X \setminus W) \cup W = X$.

Aby udowodnić, że odwzorowania h_1 i h_2 mają domknięte wykresy, ustalmy punkt $x_0 \in X$ i ciąg $x_n \to x_0$. Niech ponadto $h_j(x_n) \to \alpha_j \in \mathbb{R}$ przy $n \to \infty$, $j = 1, 2$. Musimy pokazać, że $\alpha_j = h_j(x_0)$, $j = 1, 2$. Ponieważ zbiór $X \setminus W$ jest otwarty i (jak pokazaliśmy wcześniej) odwzorowania $h_j, j = 1, 2$ są na nim ciągłe, więc obydwa mają na nim domknięte wykresy. Rozważmy więc pozostałe podprzypadki przypadku $x_0 \in W = K_{\mathcal{A}} \cup (K_{\mathcal{B}} \cup F)$:

(a) $x_0 \in K_{\mathcal{A}}$,

(b) $x_0 \in K_{\mathcal{B}}$,

(c) $x_0 \in F$.

Zauważmy najpierw, że

$$x_n \in W \textit{ dla prawie wszystkich } n : \tag{2.36}$$

gdyby bowiem dla nieskończenie wielu indeksów n było $x_n \in X \setminus W$, to dla tychże indeksów mielibyśmy $h_1(x_n) = f^+(x_n) + \ell_W(x_n)$ oraz $h_2(x_n) = -f^-(x_n) - \ell_W(x_n)$; wówczas $|h_j(x_n)| \geqslant \ell_W(x_n) = \frac{1}{\rho(x_n,W)}$ dla nieskończenie wielu indeksów n; ponieważ jednak $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, W) = 0$, więc $\overline{\lim}_{n\to\infty}|h_j(x_n)| = \infty$ dla $j = 1, 2$, sprzeczność.

W podprzypadku (a), zachodzi równość $\alpha_1 = f(x_0) = h_1(x_0)$, ponieważ na podstawie Lematu 2.2(i) zbiór $K_{\mathcal{A}}$ jest podzbiorem zbioru $C(f)$, punktów ciągłości funkcji f.

Aby udowodnić, że $\alpha_2 = h_2(x_0) = 0$ wystarczy pokazać, że

$$x_n \in K_{\mathcal{A}} \textit{ dla prawie wszystkich indeksów } n. \tag{2.37}$$

W przeciwnym przypadku, na podstawie warunku (2.36) mielibyśmy

$x_n \in K_{\mathcal{B}} \cup F$ dla nieskończenie wielu indeksów n, skąd $x_0 \in \mathrm{cl}(K_{\mathcal{B}} \cup F) =$

$= \mathrm{cl}\, K_{\mathcal{B}} \cup F$ (ponieważ na podstawie Lematu 2.1, mamy $\mathrm{cl}\, F = F = D(f)$). Stąd, na mocy (2.28) i Lematu 2.2(i), otrzymalibyśmy sprzeczność:

$$x_0 \in K_{\mathcal{A}} \cap (\mathrm{cl}\, K_{\mathcal{B}} \cup F) = \underbrace{K_{\mathcal{A}} \cap \mathrm{cl}\, K_{\mathcal{B}}}_{=\emptyset, \text{ patrz Lemat 2.4}} \cup \underbrace{K_{\mathcal{A}} \cap F}_{=\emptyset, \text{ bo } K_{\mathcal{A}} \subset C(f) = X \setminus F} = \emptyset.$$

Ostatecznie, warunek (2.37) jest prawdziwy, co implikuje $\alpha_2 = h_2(x_0) = 0$, jak twierdziliśmy.

W podprzypadku (b),

$$x_n \in K_{\mathcal{B}} \textit{ dla prawie wszystkich indeksów } n, \tag{2.38}$$

ponieważ ponownie, na mocy (2.28) i Lematu 2.2(i)(ii), $F \cap K_{\mathcal{B}} = \emptyset = \mathrm{cl}\, K_{\mathcal{A}} \cap$ $\cap K_{\mathcal{B}}$. Tak więc $h_1(x_0) = 0 = h_1(x_n) = 0 \to 0 = \alpha_1$ oraz $h_2(x_n) = f(x_n) \to$ $f(x_0) =$

$= \alpha_2$ (ponieważ $x_0 \in C(f)$: patrz Lemat 2.2(i)) przy $n \to \infty$.

W podprzypadku (c) zauważmy, że z postaci odwzorowań h_1, h_2 i z przyjętego warunku $f \restriction F \equiv 0$ wynika, że $h_1(x_0) = 0 = f(x_0) = h_2(x_0)$. Ponadto, odwzorowania h_1 i h_2 są równe f, odpowiednio, na $K_{\mathcal{A}}$ i $K_{\mathcal{B}}$. Zatem, na mocy Lematu 2.2(iii), $x_n \in K_{\mathcal{A}}$ dla skończonej ilości indeksów n w przypadku odwzorowania h_1 oraz $x_n \in K_{\mathcal{B}}$ dla skończonej ilości indeksów n w przypadku odwzorowania h_2. Wreszcie, $x_n \in K_{\mathcal{B}} \cup F$ dla prawie wszystkich indeksów n

przy h_1 oraz $x_n \in K_{\mathcal{A}} \cup F$ dla prawie wszystkich indeksów n przy h_2. Ale wówczas, ponieważ h_1 i h_2 "znikają", odpowiednio, na zbiorach $K_{\mathcal{B}} \cup F$ i $K_{\mathcal{A}} \cup F$, więc $h_j(x_n) = 0 \to 0 = h_j(x_0) = \alpha_j$, $j = 1, 2$, przy $n \to \infty$.

Pokazaliśmy w ten sposób, że w każdym z podprzypadków (a), (b) i (c) warunki $x_n \to x_0$ i $h_j(x_n) \to \alpha_j \in \mathbb{R}$ (przy $n \to \infty$), $j = 1, 2$, implikują, że $\alpha_j = h_j(x_0)$, tj., obie funkcje h_1 i h_2 mają domknięte wykresy.

Dowód inkluzji (2.32) jest zakończony. □

Po zastosowaniu Twierdzenia 2.5 do funkcji $g = \ln f$ otrzymujemy natychmiast następujący wynik.

Twierdzenie 2.6.

Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją spełniającą warunki (t_1) i (t_2). Jeśli $\overline{\lim}_{u \to x} f(u) = \infty$ lub $\underline{\lim}_{u \to x} f(u) = 0$ dla każdego $x \in D(f)$, to f jest iloczynem dwóch dodatnich funkcji quasi-ciągłych.

Uwaga 2.3.

Żadne z odwzorowań będących czynnikami iloczynu określonego w powyższym twierdzeniu nie musi mieć domkniętego wykresu.

Powyższą uwagę dobrze obrazuje następujący przykład.

Przykład 2.1.

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = 0 \\ \frac{1}{|x|} & ; \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Wtedy $C(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dla f spełnione są warunki (t_1) oraz (t_2) Definicji 2.1. Ponadto, oczywiście $\overline{\lim}_{u \to 0} f(u) = \infty$. Zatem, na mocy Twierdzenia 2.6, funkcja f jest iloczynem dwóch funkcji quasi-ciągłych e^{h_1} i e^{h_2} (funkcje h_1 i

h_2 określone są w Twierdzeniu 2.5), z których jednak e^{h_2} nie ma domkniętego wykresu. Istotnie, niech

$$\mathcal{A} = \Big\{ \Big(\frac{1}{4k+2}, \frac{1}{4k+1} \Big) : k = 0, 1, 2, \dots \Big\},$$

oraz

$$\mathcal{B} = \Big\{ \Big(\frac{1}{4k+4}, \frac{1}{4k+3} \Big) : k = 0, 1, 2, \dots \Big\}.$$

Połóżmy

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x \in K_{\mathcal{A}} \\ 0 & ; \quad x \in K_{\mathcal{B}} \cup \{0\} \\ f^+(x) + \frac{1}{|x|} & ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

oraz

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in K_{\mathcal{A}} \\ f(x) & ; \quad x \in K_{\mathcal{B}} \cup \{0\} \\ f^-(x) - \frac{1}{|x|} & ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Wtedy $e^{h_2(0)} = e^1 = e$, ale $\lim_{x \to 0^-} h_2(x) = -\infty$, skąd $\lim_{x \to 0^-} e^{h_2(x)} = 0$. Oznacza to, że wykres funkcji e^{h_2} nie jest domknięty.

Z Twierdzeń 2.5 i 2.6 otrzymujemy

Wniosek 2.7.

Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f \colon X \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją spełniającą warunki (t_1) i (t_2). Jeśli $\overline{\lim}_{u \to x} f(u) = \infty$ dla każdego $x \in D(f)$, to $f = g_1 + g_2 = g_3 \cdot g_4$, gdzie g_1, g_2, g_3, g_4 są quasi-ciągłe na X i dodatkowo g_1, g_2 mają domknięte wykresy.

ROZDZIAŁ 3

Rozszerzenia funkcji o domkniętym wykresie i ich zastosowanie do charakteryzacji P-przestrzeni

3.1. Rozszerzenia funkcji o domkniętym wykresie

W 1916 roku Tietze udowodnił, że funkcję ciągłą f określoną na domkniętym podzbiorze A przestrzeni normalnej X, można przedłużyć do funkcji ciągłej określonej na całej przestrzeni X.

Okazuje się, że jeśli X jest przestrzenią metryczną, to twierdzenie Tietzego można znacznie wzmocnić: klasyczne twierdzenie Borsuka (uogólnione przez Dugundjiego [**49**, Theorem 21.1.4]) mówi, że istnieje operator liniowy Ext z $\mathcal{C}(A)$ do $\mathcal{C}(X)$ taki, że $\mathrm{Ext}(f)\restriction A = f$ dla wszystkich $f \in \mathcal{C}(A)$; operator Ext jest więc liniowym operatorem rozszerzania. Ponadto, operator ten zawężony do $\mathcal{C}^b(A)$, funkcji ograniczonych z $\mathcal{C}(A)$, jest dodatnią izometrią o wartościach w $\mathcal{C}^b(X)$.

Badania w tym kierunku, dla przestrzeni funkcji różniczkowalnych, prowadzone były m.in. przez Merriena [**40**] i Bromberga [**14**]. W roku 2007 Fefferman [**21**] uzyskał następujące uogólnienie ich wyników: *Dla ustalonych $m, n \in \mathbb{N}$ oraz nieskończonego podzbioru E przestrzeni $\mathbb{R}^n$, niech $C^m(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń m-krotnie różniczkowalnych funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zaś $C^m(E)$ - przestrzeń zawężeń do E elementów $C^m(\mathbb{R}^n)$. Wtedy istnieje liniowy i ciągły operator $T\colon C^m(E) \to C^m(\mathbb{R}^n)$ taki, że $T(f)(e) = f(e)$,* dla dowolnego $e \in E$. Operator T jest oczywiście liniowym operatorem rozszerzania.

Naturalnym problemem w zakresie moich badań jest przedłużanie odwzorowań z zachowaniem klasy innej niż ciągłość. W roku 2005 Kalenda i Spurný [**32**] opublikowali pracę o rozszerzeniach funkcji pierwszej klasy Baire'a określonych na podzbiorach przestrzeni całkowicie regularnej X, uogólniając klasyczny wynik w tym zakresie pochodzący od Kuratowskiego [**37**], gdy X jest przestrzenią metryczną. W głównym twierdzeniu tego podrozdziału podany jest jawny wzór na rozszerzenie funkcji o domkniętym wykresie określonej na podzbiorze zerowym przestrzeni normalnej X, do funkcji o domkniętym wykresie na całej przestrzeni X. Zostanie on wykorzystany do konstruowania rozszerzeń funkcji z pewnej podklasy klasy funkcji kawałkami ciągłych. Część tego rozdziału oparta jest na publikacji [**58**].

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $g\colon X \to \mathbb{R}$ - funkcją ciągłą, $A = [g = 0]$ - zbiorem zerowym funkcji g, oraz $f\colon A \to \mathbb{R}$ - funkcją o domkniętym wykresie. Dla przejrzystości prowadzonych rozważań wprowadźmy następujące określenia.

Definicja 3.1.

Symbolem $\overline{f}_{(A,g)}$ oznaczać będziemy odwzorowanie $\overline{f}_{(A,g)}\colon X \to \mathbb{R}$ określone wzorem

$$\overline{f}_{(A,g)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ \frac{1}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ponadto, symbolem $\mathrm{Ext}_{(A,g)}$ oznaczać będziemy odwzorowanie $\mathrm{Ext}_{(A,g)}\colon \mathcal{U}^+(A) \to \mathcal{U}^+(X)$ określone wzorem

$$\mathrm{Ext}_{(A,g)}(f) = \overline{f}_{(A,g)}.$$

Uwaga 3.1.

Z powyższych określeń wynika natychmiast, że jeżeli $g_1 \neq g_2$, to $\overline{f}_{(A,g_1)} \neq \overline{f}_{(A,g_2)}$, skąd $\mathrm{Ext}_{(A,g_1)}(f) \neq \mathrm{Ext}_{(A,g_2)}(f)$. Podobnie, jeśli $f_1 \neq f_2$, to $\mathrm{Ext}_{(A,g)}(f_1) \neq \mathrm{Ext}_{(A,g)}(f_2)$.

Twierdzenie 3.1.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $g\colon X \to \mathbb{R}$ - ustaloną funkcją ciągłą, A - zbiorem zerowym funkcji g (przyjmujemy, że $X \neq A \neq \emptyset$), oraz $f\colon A \to \mathbb{R}$ - odwzorowaniem o domkniętym wykresie. Wtedy funkcja $\overline{f}_{(A,g)}$ określona wzorem (3.1) ma domknięty wykres, przekształcenie $\mathrm{Ext}_{(A,g)}$ jest dodatnio afiniczne (patrz Definicja 1.5) oraz zbiór $D(\overline{f}_{(A,g)})$ - punktów nieciągłości funkcji $\overline{f}_{(A,g)}$ - jest postaci:

$$D(\overline{f}_{(A,g)}) = D(f) \cup \operatorname{bd} A.$$

Dowód.

Uzasadnimy najpierw, że odwzorowanie $\overline{f}_{(A,g)}$ ma domknięty wykres. Jeżeli $x \notin A$, to $\overline{f}_{(A,g)}(x) = \frac{1}{g(x)}$, skąd $x \in C(\overline{f}_{(A,g)})$. Zatem funkcja $\overline{f}_{(A,g)}$ ma domknięty wykres na zbiorze $X \setminus A$. Pokażemy teraz, że f ma domknięty wykres również na zbiorze A. Wykorzystamy w tym celu Lemat 1.2. Pokażemy więc, że dla dowolnego MS-ciągu (x_δ) takiego, że $x_\delta \to x \in A$ i $f(x_\delta) \to y \in \mathbb{R}$, zachodzi równość $y = f(x)$. Rozpatrzmy w tym celu następujące przypadki:

$(\cdot)$ $x \in \operatorname{int} A$,

$(\cdot\cdot)$ $x \in A \setminus \operatorname{int} A$.

W przypadku $(\cdot)$, niech (x_α) będzie MS-ciągiem zbieżnym do punktu x oraz niech $\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha) \to t \in \mathbb{R}$. Ponieważ zbiór $\operatorname{int} A$ jest otwarty, więc istnieje wskaźnik α_0 taki, że $x_\alpha \in \operatorname{int} A$ dla każdego $\alpha > \alpha_0$. Zatem $\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha) =$

$= f(x_\alpha) \to t$. Z faktu, że funkcja f ma domknięty wykres wynika, że $t = f(x) = \overline{f}_{(A,g)}(x)$.

W przypadku $(\cdot\cdot)$ mamy $\overline{f}_{(A,g)}(x) = f(x)$ oraz $g(x) = 0$. Niech (x_α) będzie MS-ciągiem zbieżnym do punktu x, oraz niech $\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha) \to t \in \mathbb{R}$. Twierdzimy, że istnieje element β taki, że dla dowolnego indeksu $\alpha > \beta$, zachodzi $x_\alpha \in A$:

> *Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnego elementu β istnieje indeks $\alpha_\beta > \beta$ taki, że $x_{\alpha_\beta} = y_\beta \in X \setminus A$. Wtedy*
>
> $$\overline{f}_{(A,g)}(y_\beta) = \frac{1}{g(y_\beta)} \to t \neq 0$$
>
> *(bo w przeciwnym przypadku mielibyśmy $|g(y_\beta)| \to \infty$ przy $y_\beta \to x$, co prowadzi do sprzeczności z faktem, iż funkcja g jest ciągła). Zatem*
>
> $$g(y_\beta) \to \frac{1}{t} \neq 0. \tag{3.2}$$
>
> *Z drugiej strony, z ciągłości funkcji g wynika, że*
>
> $$g(y_\beta) \to g(x) = 0,$$
>
> *wbrew* (3.2).

Zatem istnieje element β taki, że dla dowolnego indeksu $\alpha > \beta$, zachodzi $\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha) = f(x_\alpha) \to t$. Z domkniętości wykresu funkcji f wynika, że $t = f(x) = \overline{f}_{(A,g)}(x)$.

Pokazaliśmy w ten sposób, że dla dowolnego elementu $x \in A$ i dla dowolnego MS-ciągu (x_α) zbieżnego do punktu x, zachodzi $\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha) \to t = \overline{f}_{(A,g)}(x)$. Stąd, na mocy Lematu 1.2, funkcja $\overline{f}_{(A,g)}$ ma domknięty wykres w całej dziedzinie.

Niech teraz liczby $a, b \geqslant 0$ będą takie, że $a + b = 1$. Ponadto, niech f_1, f_2 będą nieujemnymi funkcjami rzeczywistymi na A, obie o domkniętym wykresie. Wtedy funkcje af_1 i bf_2 są oczywiście nieujemne oraz (patrz Uwaga 1.2) mają domknięte wykresy. Z Lematu 1.9 wynika teraz, że odwzorowanie $af_1 + bf_2$ ma domknięty wykres; ponadto

$$\mathrm{Ext}_{(A,g)}(af_1 + bf_2) = \overline{af_1 + bf_2}_{(A,g)} = \begin{cases} (af_1 + bf_2)(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ \frac{a}{g(x)} + \frac{b}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} af_1(x) + bf_2(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ \frac{1}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} = a\overline{f_1}_{(A,g)} + b\overline{f_2}_{(A,g)} =$$

$$= a\,\mathrm{Ext}_{(A,g)}(f_1) + b\,\mathrm{Ext}_{(A,g)}(f_2).$$

Wykazaliśmy w ten sposób dodatnią afiniczność odwzorowania $\mathrm{Ext}_{(A,g)}$.

Na zakończenie wykażemy, że $D(\overline{f}_{(A,g)}) = D(f) \cup \operatorname{bd} A =$
$= (X \setminus C(f)) \cup \Big(A \cap (X \setminus \operatorname{int} A)\Big)$.

Niech $x \in D(\overline{f}_{(A,g)})$. Przypuśćmy, niewprost, że $x \notin D(f) \cup \operatorname{bd} A$. Mamy zatem $x \in C(f) \cap \big[(X \setminus A) \cup \operatorname{int} A\big]$, skąd $x \in C(f)$ oraz $x \in (X \setminus A) \cup \operatorname{int} A$. Jeżeli $x \in X \setminus A$, to $\overline{f}_{(A,g)}(x) = \frac{1}{g(x)}$, skąd $x \in C(\overline{f}_{(A,g)})$. Jeżeli z kolei $x \in \operatorname{int} A$, to $\overline{f}_{(A,g)}(x) = f(x)$, skąd $x \in C(\overline{f}_{(A,g)})$. W obu przypadkach mamy zatem $x \in C(\overline{f}_{(A,g)})$, wbrew założeniu. Pokazaliśmy tym samym, że

$$D(\overline{f}_{(A,g)}) \subset D(f) \cup \operatorname{bd} A. \tag{3.3}$$

Pokażemy teraz, że $D(f) \cup \operatorname{bd} A \subset D(\overline{f}_{(A,g)})$. Niech $x \in D(f) \cup \operatorname{bd} A$. Załóżmy najpierw, że $x \in D(f)$. Ponieważ każdy punkt nieciągłości funkcji f jest punktem nieciągłości funkcji $\overline{f}_{(A,g)}$, więc $x \in D(\overline{f}_{(A,g)})$. Niech teraz $x \in \operatorname{bd} A$. Wtedy istnieje MS-ciąg $(x_\alpha) \subset X \setminus A$ zbieżny do punktu x. Wówczas, z ciągłości funkcji g wynika, że $\frac{1}{\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha)} = g(x_\alpha) \to 0$. Zatem $|\overline{f}_{(A,g)}(x_\alpha)| \to \infty$, skąd $x \in D(\overline{f}_{(A,g)})$.

Pokazaliśmy tym samym, że jeżeli $x \in D(f) \cup \operatorname{bd} A$, to $x \in D(\overline{f}_{(A,g)})$. Stąd

$$D(f) \cup \operatorname{bd} A \subset D(\overline{f}_{(A,g)}). \tag{3.4}$$

Łącząc inkluzje (3.3) oraz (3.4) otrzymujemy drugą część tezy Twierdzenia. To kończy jego dowód. □

Udowodnimy teraz wniosek wynikający z powyższego Twierdzenia. Określimy w nim odwzorowanie, które okaże się być retrakcją (patrz Definicja 1.6). W literaturze przyjmuje się zwykle, że retrakcja jest odwzorowaniem ciągłym. W naszym przypadku rozważamy funkcje, które nie muszą być ciągłe (ale zachowują domkniętość wykresu). Tak więc powiemy, że odwzorowanie surjektywne $e\colon X \to A \subset X$ jest retrakcją, o ile $e^2 = e \circ e = e$.

Wniosek 3.2.

Przy oznaczeniach i założeniach przyjętych w Twierdzeniu 3.1, odwzorowanie $e\colon \mathcal{U}(X) \to \mathcal{U}(X)$ *określone wzorem* $e(f) = \mathrm{Ext}_{(A,g)}(f{\restriction}A)$ *jest retrakcją.*

Dowód.

Niech $e(f) = \mathrm{Ext}_{(A,g)}(f{\restriction}A)$. Przyjmijmy ponadto, że $r_A(f) = f{\restriction}A$. Mamy wówczas

$$e \circ e = (\mathrm{Ext}_{(A,g)} \circ r_A) \circ (\mathrm{Ext}_{(A,g)} \circ r_A) = \mathrm{Ext}_{(A,g)} \circ \underbrace{(r_A \circ \mathrm{Ext}_{(A,g)})}_{\mathrm{id}_{\mathcal{U}(X)}} \circ r_A =$$

$$= \mathrm{Ext}_{(A,g)} \circ r_A = e.$$

□

W Twierdzeniu 3.1 zbiór A jest domknięty i typu G_δ. Okazuje się, że założenia tego nie można na ogół osłabić. Jeżeli np. domkniętość zbioru $A \subset X$ zastąpimy założeniem, że jest on typu F_σ, to istnieją przykłady funkcji $f \in \mathcal{U}(A)$, których nie da się przedłużyć do odwzorowania $\overline{f}_{(A,g)} \in \mathcal{U}(X)$. Rozważmy jeden z nich.

Przykład 3.1.

Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $A = (0, \infty)$. A jest oczywiście zbiorem typu G_δ (bo jest otwarty) oraz zbiorem typu F_σ (ponieważ $(0, \infty) = \bigcup_n [\frac{1}{n}, n]$) w X. Niech $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Oczywiście f jest ciągłe w każdym punkcie $x \in A = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, a więc $f \in \mathcal{U}(A)$. Jednak funkcji f nie da się przedłużyć do żadnej funkcji $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie. Wynika to z faktu, że w produkcie $\{0\} \times [0, 1] \subset [0, 1] \times \mathbb{R}$ znajdzie się nieskończenie wiele punktów skupienia wykresu każdej funkcji g takiej, że $g{\restriction}A = f$.

Ponadto, warto zauważyć, że

Uwaga 3.2.

Niech X będzie normalną przestrzenią spójną. Wówczas jedynymi zbiorami domknięto-otwartymi w X są $\emptyset$ i X. Wtedy, nawet w sytuacji gdy odwzorowanie f jest ciągłe, jego rozszerzenie $\overline{f}_{(A,g)}$ określone wzorem (3.1) jest "nietrywialne" (tj., nieciągłe). Jest tak np. wtedy, gdy niepusty ustalony zbiór $A \neq X$ nie jest otwarty w X.

3.2. Zastosowanie rozszerzeń funkcji o domkniętym wykresie do charakteryzacji P-przestrzeni

W niniejszym podrozdziale wykorzystamy Twierdzenie 3.1 do uzyskania nowej charakteryzacji P-przestrzeni.

DEFINICJA 3.2.

Mówimy, że całkowicie regularna przestrzeń topologiczna X jest *P-przestrzenią* [**24**, str. 62-63], jeśli dowolny jej podzbiór typu G_δ jest otwarty; równoważnie, każdy zbiór kozerowy [zerowy] jest domknięty [otwarty].

DEFINICJA 3.3.

Mówimy, że całkowicie regularna przestrzeń topologiczna X jest *zero-wymiarowa* [**20**, str. 435], jeśli jest niepustą T_1-przestrzenią i ma bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych.

Niech X będzie przestrzenią normalną, $g\colon X \to \mathbb{R}$ - funkcją ciągłą oraz A - zbiorem zerowym funkcji g (przyjmujemy, że $X \neq A \neq \emptyset$). Ponadto, niech $f(x) = 0$ dla dowolnego $x \in A$. Wtedy rozszerzenie funkcji f określone wzorem (3.1) przyjmuje postać:

$$\overline{0}_{(A,g)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in A, \\ \frac{1}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases} \tag{3.5}$$

Wiemy już (patrz Twierdzenie 3.1), że funkcja $\overline{0}_{(A,g)}$ ma domknięty wykres. Ponieważ funkcja $f \equiv 0$ na A jest ciągła, więc naturalnym jest problem ciągłości funkcji $\overline{0}_{(A,g)}$, tj.,

Problem. *Przy jakim założeniu o zbiorze A, funkcja* $\mathrm{Ext}_{(A,g)}(0) = \overline{0}_{(A,g)}$ *jest ciągła?*

Odpowiedź zawarta jest w kolejnym Lemacie (będącym wnioskiem z Twierdzenia 3.1). Dla pełności rozprawy podajemy jego uzasadnienie.

LEMAT 3.3.

Niech X będzie przestrzenią normalną, $g\colon X \to \mathbb{R}$ - funkcją ciągłą oraz A - zbiorem zerowym funkcji g (przyjmujemy, że $X \neq A \neq \emptyset$). Funkcja $\overline{0}_{(A,g)}$ określona wzorem (3.5) jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest otwarty.

DOWÓD.

Jeżeli zbiór A jest otwarty, to z faktu, że jest zbiorem zerowym wynika, że jest on domknięto-otwarty. Stąd, odwzorowanie $\overline{0}_{(A,g)}$ jest oczywiście ciągłe. Pokażemy teraz, że implikacja odwrotna również jest prawdziwa.

Z Twierdzenia 3.1 wynika, że zbiór punktów nieciągłości funkcji $\overline{f}_{(A,g)}$ jest równy sumie $D(f) \cup \operatorname{bd} A$. Ponieważ w naszym przypadku mamy $f(x) = 0$ dla dowolnego $x \in A$, więc $D(f) = \emptyset$. Zatem odwzorowanie $\overline{0}_{(A,g)}$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A = \emptyset$. Ponieważ zbiór A jest domknięty (jako zbiór zerowy), więc $\operatorname{bd} A = A \setminus \operatorname{int} A$. Stąd, $\operatorname{bd} A = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \subset \operatorname{int} A$. Zatem $A = \operatorname{int} A$. □

Z powyższego Lematu i definicji P-przestrzeni otrzymujemy następujący

WNIOSEK 3.4.

Niech X będzie przestrzenią normalną. Dla dowolnego zerowego podzbioru A przestrzeni X i odpowiadającej mu funkcji g, funkcja $\overline{0}_{(A,g)}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy X jest P-przestrzenią.

UWAGA 3.3.

(a) Jeżeli X jest P-przestrzenią i każda funkcja ciągła określona na przestrzeni X jest ograniczona na pewnym podzbiorze $S \subset X$, to zbiór S jest skończony (zobacz [**24**, 4K(3)]);

(b) Każda doskonale normalna (lub spełniająca pierwszy aksjomat przeliczalności) P-przestrzeń jest dyskretna (wynika to z faktu, że w każdej takiej P-przestrzeni zbiory jednoelementowe są otwarte).

Warto ponadto zaznaczyć, że

LEMAT 3.5.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną spełniającą aksjomat oddzielania T_1. Niech ponadto A będzie skończonym podzbiorem przestrzeni X. Jeżeli zbiór A jest otwarty, to dla każdego elementu $a \in A$, zbiór $\{a\}$ również jest otwarty[1].

Z Uwagi 3.3 i Lematu 3.5 wynika, że (zobacz także [**24**, 4K(3)])

STWIERDZENIE 3.1.

Każda lokalnie zwarta P-przestrzeń jest dyskretna.

DOWÓD.

Ponieważ X jest P-przestrzenią lokalnie zwartą, więc każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie zwarte. Z Uwagi 3.3(a) wynika, że takie otoczenie zwarte jest skończone. Zatem, na mocy Lematu 3.5, zbiór $\{x\}$ jest otwarty dla każdego $x \in X$, tj., X jest przestrzenią dyskretną. □

[1]Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Ponieważ X jest T_1-przestrzenią, więc zbiór $\{a_1\}$ jest domknięty. Zatem jego dopełnienie $X \setminus \{a_1\}$ jest otwarte. Ponieważ zbiory $X \setminus \{a_1\}$ oraz A są otwarte, więc zbiór $A_1 = \Big(X \setminus \{a_1\}\Big) \cap A = \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ jest otwarty. Podobnie zbiór $A_2 = \Big(X \setminus \{a_2\}\Big) \cap A_1 = \{a_3, \ldots, a_n\}$ jest także otwarty. Postępując indukcyjnie otrzymamy, że zbiór $A_{k-1} = \Big(X \setminus \{a_{k-1}\}\Big) \cap A_{k-2} = \{a_k\}$ jest otwarty dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Podamy teraz pewien specjalny przykład P-przestrzeni. Jego szczególnym przypadkiem jest przestrzeń opisana w przykładzie Nakano (zobacz [**48**, Ex. 43.15]).

PRZYKŁAD 3.2.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech A będzie niepustym ustalonym podzbiorem przestrzeni X. Niech ponadto $\mathcal{J}$ będzie σ-ideałem podzbiorów przestrzeni X takim, że dla dowolnego $x \in X$ mamy $\{x\} \in \mathcal{J}$ oraz $\bigcup \mathcal{J} \notin \mathcal{J}$ (przykłady takich σ-ideałów na konkretnych przestrzeniach X podamy poniżej). Niech τ_A będzie rodziną zbiorów do której należą:

- *podzbiory przestrzeni X rozłączne z A oraz*
- *podzbiory przestrzeni X zawierające A, których dopełnienia należą do $\mathcal{J}$,*

tj.,

$$\tau_A = 2^{X \setminus A} \cup \mathcal{B}_A, \tag{3.6}$$

gdzie $\mathcal{B}_A = \{B \subset X : A \subset B \text{ oraz } X \setminus B \in \mathcal{J}\}$. *Wtedy*

(i) rodzina τ_A jest topologią na X;

(ii) bazę topologii w przestrzeni (X, τ_A) stanowi rodzina zbiorów domknięto-otwartych postaci $\mathcal{B}_A \cup \mathcal{C}_A$, gdzie $\mathcal{C}_A = \{C \in X \setminus A : C \in \mathcal{J}\}$;

(iii) następujące warunki są równoważne:

1. *(X, τ_A) jest przestrzenią normalną;*
2. *(X, τ_A) jest przestrzenią Hausdorffa;*
3. $\operatorname{card} A = 1$;

(iv) jeżeli $\operatorname{card} A \geqslant 2$, *to (X, τ_A) nie jest T_0 - przestrzenią;*

(v) (X, τ_A) jest P-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{card} A = 1$.

Dowód warunku (i).

Pokażemy, że dla rodziny τ_A spełnione są aksjomaty topologii.

Ponieważ $\emptyset \cap A = \emptyset$, więc $\emptyset \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$. Ponadto, ponieważ $A \subset X$ i $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{J}$, więc $X \in \mathcal{B}_A \subset \tau_A$.

Niech teraz $M, N \in \tau_A$. Pokażemy, że $M \cap N \in \tau_A$. Rozważmy w tym celu następujące przypadki.

- Jeżeli jeden ze zbiorów M lub N należy do rodziny $2^{X \setminus A}$, to $M \cap N \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$.
- Jeżeli $M, N \in \mathcal{B}_A$, to $A \subset M \cap N$ oraz $X \setminus (M \cap N) = (X \setminus M) \cup$ $\cup (X \setminus N) \in \mathcal{J}$, skąd wynika, że $M \cap N \in \mathcal{B}_A \subset \tau_A$.

Niech wreszcie S będzie dowolnym zbiorem oraz dla każdego $s \in S$, $M_s \in \tau_A$. Pokażemy, że $\bigcup_{s \in S} M_s \in \tau_A$. Rozważmy w tym celu nastepujące przypadki.

- Wszystkie zbiory M_s należą do rodziny $2^{X \setminus A}$. Wtedy $\bigcup_{s \in S} M_s \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$.
- Istnieje przynajmniej jeden indeks s_0 taki, że $M_{s_0} \in \mathcal{B}_A$. Wtedy, ponieważ $A \subset M_{s_0}$, więc $A \subset \bigcup_{s \in S} M_s$. Ponadto

  $$X \setminus \bigcup_{s \in S} M_s \subset X \setminus M_{s_0} \in \mathcal{J} \text{ (ponieważ } M_{s_0} \in \mathcal{B}_A).$$

  Zatem $\bigcup_{s \in S} M_s \in \mathcal{B}_A \subset \tau_A$.

W ten sposób zakończyliśmy uzasadnienie faktu, że τ_A jest topologią. $\square$

Dowód warunku (ii).

Uzasadnimy najpierw, że zbiór

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{C}_A,$$

gdzie $\mathcal{C}_A = \{C \subset X \setminus A : C \in \mathcal{J}\}$, jest bazą topologii w przestrzeni (X, τ_A). Niech $U \in \tau_A \setminus \{\emptyset\}$. Jeżeli $U \in \mathcal{B}_A$, to oczywiście $U \in \mathcal{B}(X)$. Niech więc $U \in 2^{X \setminus A}$ (tj., $U \cap A = \emptyset$). Pokażemy, że zbiór U jest pokryty elementami zbioru $\mathcal{C}_A$. Z określenia σ-ideału $\mathcal{J}$ wynika, że dla każdego punktu $x \in X$ (w szczególności $x \in X \setminus A$), mamy $\{x\} \in \mathcal{J}$. Połóżmy

$$U = \bigcup_{x_U \in U} \{x_U\}.$$

Każdy ze zbiorów $\{x_U\}$ należy do σ-ideału $\mathcal{J}$ oraz oczywiście $\{x_U\} \cap A = \emptyset$. Zatem $\{x_U\} \in \mathcal{C}_A$ dla dowolnego $x_U \in U$, a więc zbiór U możemy pokryć elementami $\mathcal{B}(X)$. Z obu rozważanych przypadków wynika, że $\mathcal{B}(X)$ jest bazą topologii w przestrzeni (X, τ_A).

Pokażemy teraz, że klasa $\mathcal{B}(X)$ składa się wyłącznie ze zbiorów domknięto-otwartych. Uzasadnimy najpierw, że $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{DO}(X)$. Niech $B \in \mathcal{B}_A$. Ponieważ $\mathcal{B}_A \subset \tau_A$, więc zbiór B jest otwarty i $A \subset B$. Stąd $X \setminus B \subset X \setminus A$. Zatem $X \setminus B \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$ skąd wynika, że B jest zbiorem domkniętym.

Zauważmy teraz, że klasa $\mathcal{C}_A$ składa się z dopełnień zbiorów $B \in \mathcal{B}_A$:

$$\mathcal{C}_A = \{F \subset X : X \setminus F \in \mathcal{B}_A\},$$

skąd $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{DO}(X)$. Pokazaliśmy tym samym, że

$$\mathcal{B}_A \cup \mathcal{C}_A \subset \mathcal{DO}(X) \setminus \{\emptyset\}. \tag{3.7}$$

W celu wykazania prawdziwości inkluzji odwrotnej przyjmijmy, że niepusty zbiór $U \subset X$ jest domknięto-otwarty w X. Skoro U jest zbiorem otwartym, to $U \in \tau_A = 2^{X \setminus A} \cup \mathcal{B}_A$. Ponieważ $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}(X)$, więc wystarczy rozważyć przypadek $U \in 2^{X \setminus A}$. Pokażemy, że wtedy $U \in \mathcal{C}_A$. Mamy zatem

$$U \subset X \setminus A. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{F}_A$ - zbiorów domkniętych w przestrzeni (X, τ_A) - jest postaci

$$\{F \subset X : A \subset F\} \cup \left(2^{X \setminus A} \cap \mathcal{J}\right).$$

Ponieważ $U \in \mathcal{F}_A \setminus \{\emptyset\}$ więc, z inkluzji (3.8), otrzymujemy

$$U \in \mathcal{J}. \tag{3.9}$$

Z faktów (3.8) i (3.9) wynika więc, że $U \in \mathcal{C}_A$. Pokazaliśmy tym samym, że dowolny niepusty zbiór domknięto-otwarty w przestrzeni X jest podzbiorem sumy $\mathcal{B}_A \cup \mathcal{C}_A$, tj., $\mathcal{DO}(X) \setminus \{\emptyset\} \subset \mathcal{B}_A \cup C_A$. W połączeniu z inkluzją (3.7) otrzymujemy więc równość

$$\mathcal{DO}(X) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{B}(X),$$

a więc baza $\mathcal{B}(X)$ topologii τ_A składa się wyłącznie z niepustych zbiorów domknięto-otwartych. □

Dowód warunku *(iii)*.

Implikacja $1 \Rightarrow 2$ jest oczywista. Dla uzasadnienia implikacji $2 \Rightarrow 3$ załóżmy, że (X, τ_A) jest przestrzenią Hausdorffa. Przypuśćmy, niewprost, że $\{a, b\} \subset A$, $a \neq b$. Niech x, y będą różnymi elementami przestrzeni X. Ponieważ X jest przestrzenią Hausdorffa, więc punkty te można oddzielić rozłącznymi zbiorami $U_x, V_y \in \tau_A$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $U_x, V_y \in \mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{C}_A$. Rozważmy przypadek gdy $x, y \in A$, $x = a$, $y = b$. Wtedy oczywiście $x \neq y$. Naszym celem jest znalezienie rozłącznych zbiorów $U_x, V_y \in \mathcal{B}(X)$ takich, że $x \in U_x$ oraz $y \in V_y$. Niemożliwe jest, aby $U_x, V_y \in \mathcal{C}_A$ (gdyż wówczas mielibyśmy $A \cap U_x = A \cap V_y = \emptyset$). Niech więc $U_x, V_y \in \mathcal{B}_A$ będą takimi zbiorami, że $x \in U_x$ oraz $y \in V_y$. Wtedy jednak $A \subset U_x \cap V_y$, skąd wynika, że $U_x \cap V_y \neq \emptyset$, sprzeczność.

Aby zakończyć dowód warunku (iii) wykażemy prawdziwość implikacji $3 \Rightarrow 1$. Niech $A = \{a\}$. Pokażemy, że przestrzeń (X, τ_A) jest normalna.

Musimy najpierw wykazać, że (X, τ_A) jest przestrzenią Hausdorffa. Rozważmy w tym celu następujące przypadki.

$(\cdot)$ Niech $x_1, x_2 \in X$ będą punktami takimi, że $x_1 \neq x_2$ oraz $x_1 \neq a \neq x_2$. Przyjmijmy wówczas, że $U = \{x_1\}$ oraz $V = \{x_2\}$. Oczywiście $x_1 \in U$ i $x_2 \in V$. Ponieważ $x_1 \neq x_2$, więc $U \cap V = \emptyset$. Ponadto, ponieważ $x_1 \neq a \neq x_2$, więc $U, V \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$.

$(\cdot)$ Niech $x_1, x_2 \in X$ będą punktami takimi, że $x_1 = a$ oraz $x_2 \neq a$. Przyjmijmy wówczas, że $V = \{x_2\}$ oraz $U = X \setminus V$. Oczywiście $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Ponieważ $x_2 \neq a$, więc $V \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$. Ponadto, $a \in U$ oraz $X \setminus U = X \setminus (X \setminus V) = V = \{x_2\} \in \mathcal{J}$, skąd wynika, że $U \in \mathcal{B}_A \subset \tau_A$.

Pokazaliśmy tym samym, że gdy $A = \{a\}$, to (X, τ_A) jest przestrzenią Hausdorffa. Wykażemy, że jest to przestrzeń normalna. Rozważmy następujące przypadki.

- Niech $F, G \subset X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi takimi, że $a \notin F \cup G$. Przyjmijmy wówczas, że $U = F$ oraz $V = G$. Oczywiście $F \subset U$, $G \subset V$ oraz $U \cap V = F \cap G = \emptyset$. Ponieważ $a \notin F \cup G = U \cup V$, więc $U, V \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$.
- Niech $F, G \subset X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi takimi, że $a \in G \setminus F$. Przyjmijmy wówczas, że $U = F$ oraz $V = X \setminus U$. Oczywiście $F \subset U$, $G \subset V$ oraz $U \cap V = F \cap G = \emptyset$. Ponieważ $a \notin F = U$, więc $U \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$. Ponadto, ponieważ zbiór F jest domknięty, więc zbiór $V = X \setminus F$ jest otwarty.

Tym samym zakończyliśmy uzasadnienie faktu, że przestrzeń $(X, \tau_{\{a\}})$ jest normalna. $\square$

DOWÓD WARUNKU (iv).

Pokażemy, że jeżeli $\operatorname{card} A \geqslant 2$, to przestrzeń (X, τ_A) nie spełnia aksjomatu oddzielania T_0. Niech a, b będą różnymi elementami zbioru A. Przypuśćmy, że istnieje zbiór otwarty $U_a \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $a \in U_a$ oraz $b \notin U_a$. Z określenia bazy $\mathcal{B}(X)$ wynika, że $U_a \notin \mathcal{C}_A$ (ponieważ elementami zbioru $\mathcal{C}_A$ są podzbiory przestrzeni X rozłączne z A). Zatem $U_a \in \mathcal{B}_A$, skąd wynika, że $b \in A \subset U_a$, sprzeczność. $\square$

DOWÓD WARUNKU (v).

Jeżeli (X, τ_A) jest P-przestrzenią, to - jako całkowicie regularna - jest przestrzenią Hausdorffa; z udowodnionego warunku (iii) otrzymujemy
$\operatorname{card} A = 1$. Na zakończenie pokażemy, że jeżeli $\operatorname{card} A = 1$, to przestrzeń (X, τ_A) jest P-przestrzenią. Jeżeli $\operatorname{card} A = 1$, to z własności (iii) wynika, że przestrzeń (X, τ_A) jest normalna (w szczególności, całkowicie regularna). Niech $(M_n) \subset \tau_A$. Pokażemy, że niepusty zbiór $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ jest otwarty. Rozważmy w tym celu nastepujące przypadki.

- *Wszystkie zbiory M_n należą do rodziny $\mathcal{B}_A$.* Wtedy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy $A \subset M_n$ oraz $X \setminus M_n \in \mathcal{J}$. Zatem $A \subset M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ oraz
$$X \setminus M = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus M_n) \in \mathcal{J},$$
skąd $M \in \mathcal{B}_A \subset \tau_A$.
- *Istnieje przynajmniej jeden indeks n_0 taki, że zbiór M_{n_0} jest rozłączny z A.* Wtedy $M \cap A = \emptyset$, skąd $M \in 2^{X \setminus A} \subset \tau_A$.

Tym samym udowodniliśmy, że jeżeli A jest zbiorem jednoelementowym, to (X, τ_A) jest P-przestrzenią. To kończy dowód całego warunku. $\square$

Jak wspominają Gillman i Jerison [**24**], P-przestrzenie występują stosunkowo rzadko. Zwykle wymyśla się ich przykłady dla osiągnięcia jakichś celów wynikowych w teorii funkcji. Poniżej podajemy przykłady konkretnych przestrzeni (X, τ_A): wszystkie one są szczególnymi przypadkami Przykładu 3.2.

Przykład 3.3.

(Nakano [**48**, Ex. 43.15]) Niech X będzie nieprzeliczalnym zbiorem punktowym, x_∞-ustalonym elementem zbioru X, oraz niech $A = \{x_\infty\}$. Topologię τ_A definiujemy na X następująco:

$$\tau_A = 2^{X \setminus \{x_\infty\}} \cup \{B \subset X : x_\infty \in B \text{ oraz } \overline{\overline{X \setminus B}} \leqslant \aleph_0\},$$

gdzie $\overline{\overline{X \setminus B}}$ oznacza moc zbioru $X \setminus B$. Tu, ideał $\mathcal{J}$ składa się ze zbioru pustego i wszystkich przeliczalnych podzbiorów zbioru X. Topologia τ_A jest normalna, (X, τ_A) jest P-przestrzenią, a klasa niepustych podzbiorów domknięto--otwartych jest jej bazą i jest postaci:

$$\mathcal{B}(X) = \{B \subset X : x_\infty \in B \text{ oraz } \overline{\overline{X \setminus B}} \leqslant \aleph_0\} \cup \{C \subset X : x_\infty \notin C \text{ oraz } \overline{\overline{C}} \leqslant \aleph_0\}.$$

Przykład 3.4.

Oznaczmy przez μ miarę Lebesgue'a na prostej rzeczywistej, oraz niech A będzie niepustym i właściwym podzbiorem przedziału $X = [0, 1]$. σ-ideał $\mathcal{J}$ zdefiniujmy jako zbiór $\mathcal{J} = \{J \subset [0, 1] : \mu(J) = 0\}$. Oczywiście $\bigcup \mathcal{J} \notin \mathcal{J}$, ponieważ

$$\mu\Big(\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\Big) = 1.$$

Zgodnie z definicją topologii τ_A (patrz wzór (3.6), str. 62), mamy

$$\tau_A = 2^{[0,1] \setminus A} \cup \{B \subset [0, 1] : A \subset B \text{ oraz } \mu(B) = 1\}.$$

Dla $A = \{0\}$, topologia τ_A jest normalna, (X, τ_A) jest P-przestrzenią, a klasa niepustych podzbiorów domknięto-otwartych jest jej bazą i jest postaci:

$$\mathcal{B}(X) = \{B \subset [0,1] : 0 \in B \text{ oraz } \mu(B) = 1\} \cup \{C \subset (0,1] : \mu(C) = 0\}.$$

Przykład 3.5.

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech $\emptyset \neq A \subset X$. σ-ideał $\mathcal{J}$ zdefinujmy jako zbiór $\mathcal{J} = \{J \subset X : J \text{ jest zbiorem I kategorii}\}$. Przyjmując

$$\tau_A = 2^{X \setminus A} \cup \{B \subset X : A \subset B \text{ jest zbiorem I kategorii}\},$$

otrzymujemy postać bazy topologii τ_A:

$$\mathcal{B}(X) = \{B \subset X : A \subset B \text{ oraz } B \text{ - jest zbiorem II kategorii}\} \cup$$

$$\cup \{C \subset X \setminus A : C\text{- jest zbiorem I kategorii}\}.$$

Zgodnie z warunkami (iii) i (v) Przykładu 3.2, przestrzeń (X, τ_A) jest P-przestrzenią (równoważnie, Hausdorffa) wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\overline{A}} = 1$.

Inne przykłady P-przestrzeni przedstawione zostały m.in. w monografii Gillmana i Jerisona [**24**, Ex. 4JKL, 4N] oraz w pracach: Nakano [**41**], Dowa [**19**], Kunena [**36**], Osby i Henriksena [**44**] oraz Raphaela i Woodsa [**47**].

3.3. P-przestrzenie i twierdzenie o domkniętym wykresie

Główne twierdzenie tego podrozdziału jest kontynuacją Wniosku 3.4 i rozszerza listę warunków równoważnych na to, aby całkowicie regularna przestrzeń X była P-przestrzenią. Warunki te zostały sformułowane przez Tuckera [**55**, Theorem 5]:

- zbieżność porządkowa w $\mathcal{C}(X)$ jest równoważna ograniczonej zbieżności punktowej[2],

oraz Gillmana i Henriksena [**25**, Theorem 5.3]:

- każdy zerowy podzbiór przestrzeni X jest otwarty;
- pierścień $\mathcal{C}(X)$ jest regularny[3];
- każdy ideał pierwszy pierścienia $\mathcal{C}(X)$ jest maksymalny;
- każdy podzbiór typu G_δ w X jest otwarty (Każdy podzbiór typu F_σ w X jest domknięty);
- każdy ideał pierścienia $\mathcal{C}(X)$ jest przekrojem wszystkich ideałów maksymalnych, które go zawierają.

Twierdzenie 3.6.

Niech X będzie całkowicie regularną przestrzenią topologiczną. Następujące warunki są równoważne.

i) $\mathcal{U}(X) = \mathcal{C}(X)$ *(tj., każda funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie jest ciągła);*

ii) $\mathcal{B}_1(X) = \mathcal{C}(X)$*;*

iii) $\mathcal{B}_1(X) = \mathcal{U}(X)$*;*

---

[2] Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest porządkowo zbieżny do elementu x, jeżeli istnieją dwa ciągi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że $y_n \uparrow x$, $z_n \downarrow x$ i $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ dla każdego n.

[3] Pierścień A jest *regularny* jeśli dla każdego elementu $a \in A$ istnieje element $x \in A$ taki, że $axa = a$.

iv) *X jest P-przestrzenią.*

Dowód tego twierdzenia jest oparty na kilku własnościach funkcji ciągłych i o domkniętym wykresie określonych w Lematach 3.7 i 3.8.

Lemat 3.7 stanowi uogólnienie konstrukcji Dobošа[**17**] i Baggsa[**5**] nieciągłej funkcji o domkniętym wykresie. W jego sformułowaniu niepusty zbiór zerowy $[f = 0]$ jest dowolny, podczas gdy wyżej wymienieni autorzy zakładają, że zbiór ten jest nigdziegęsty [**17**, Theorem 5] lub zwarty [**5**, Theorems 3.2 i 4.3].

Lemat 3.7.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Niech ponadto $f\colon X \to [0,1]$ będzie taką funkcją ciągłą, że $[f = 0] \neq \emptyset$. Rozważmy odwzorowanie $f^*\colon X \to \mathbb{R}_+$ dane wzorem:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \textit{dla} \quad x \in [f > 0], \\ 0 & \textit{dla} \quad x \in [f = 0]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Wtedy f^* jest odwzorowaniem o domkniętym wykresie oraz $D(f^*) = \mathrm{bd}[f = 0]$.

Prawdziwość Lematu 3.7 wynika z Twierdzenia 3.1 (gdyż stanowi on jego szczególny przypadek).

Kolejny lemat zawiera znane fakty. Ponieważ jednak stwierdzenie (a) pozostawione zostało czytelnikowi jako ćwiczenie (patrz [**24**, 4J(2)]), pod koniec rozdziału podamy jego prosty dowód.

Lemat 3.8.

Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa.

(a) Jeśli X jest P-przestrzenią i $\xi \in X$, to każda funkcja $f \in \mathcal{C}(X)$ jest stała na pewnym otoczeniu punktu ξ.

(b) Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o domkniętym wykresie. Wtedy (zobacz [**57**, str. 196 - (iii), (iv)]*)*

(*) dla każdego przedziału domkniętego $[a,b]$, zbiór $f^{-1}([a,b])$ jest domknięty;

(**) jeśli f jest ograniczona, to jest ciągła.

Podamy teraz dowód głównego twierdzenia tego podrozdziału.

Dowód Twierdzenia 3.6.

Niech X będzie całkowicie regularną przestrzenią topologiczną.

Zaprzeczenie warunku (iv) *implikuje zaprzeczenie warunku* (i). Jeśli X nie jest P-przestrzenią, to istnieje funkcja f określona na X taka, że zbiór $[f = 0]$ nie jest otwarty. Zatem $\mathrm{bd}[f = 0] \neq \emptyset$. Na mocy Lematu 3.7, funkcja f^* ma domknięty wykres i $D(f^*) \neq \emptyset$, tj., f^* jest odwzorowaniem nieciągłym. Stąd $\mathcal{U}(X) \neq \mathcal{C}(X)$.

Każdy z warunków (ii) *oraz* (iii) *implikuje warunek* (iv). Niech U będzie dowolnym niepustym zbiorem kozerowym w przestrzeni X, tj., $U = [f > 0]$, gdzie $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą. Wówczas χ_U (funkcja charakterystyczna zbioru U) jest z pierwszej klasy Baire'a[4]. Dla przypadku (ii)

[4]Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym o wyrazie ogólnym $f_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Każda z funkcji f_n jest oczywiście ciągła. Zatem punktowa granica ciągu (f_n) określona jako 1 gdy $f(x) > 0$, oraz 0 gdy $f(x) = 0$, jest funkcją z pierwszej klasy Baire'a (zobacz [**32**, dowód Theorem 2]).

otrzymujemy teraz, że U jest zbiorem domkniętym. Stąd, ponieważ U był dowolnym zbiorem kozerowym otrzymujemy (na mocy Definicji 3.2), że X jest P-przestrzenią.

W przypadku (iii), na mocy Lematu 3.8(b)(**), funkcja χ_U jest ciągła, skąd - tak jak poprzednio - X jest P-przestrzenią.

Warunek (iv) *implikuje warunek* (ii). Jest to prosty wniosek z Lematu 3.8(a). Niech $\xi \in X$. Punktowa granica f ciągu funkcyjnego $(f_n) \subset \mathcal{C}(X)$, którego wyrazy są stałe, odpowiednio, na otoczeniach V_n punktu ξ, $n = 1, 2, \ldots$, jest stała na przekroju $V = \bigcap_n V_n$, który jest zbiorem otwartym (co wynika z definicji P-przestrzeni). Stąd, funkcja f jest ciągła w punkcie ξ.

Warunek (iv) *implikuje warunek* (i). Niech $f \in \mathcal{U}(X)$. Twierdzimy, że dla dowolnego przedziału otwartego (a, b), zbiór $f^{-1}\big((a, b)\big)$ jest typu G_δ, a więc otwarty na mocy definicji P-przestrzeni. Z Lematu 3.8(b)(*) wynika, że każdy zbiór

$$A_n = f^{-1}\big([b, b + n]\big),\ n = 1, 2, \ldots,$$

jest domknięty. Zatem zbiór $f^{-1}\big([b, \infty)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest typu F_σ. Podobnie, zbiór $f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ jest także typu F_σ. Wynika stąd, że zbiór

$$f^{-1}\big((a, b)\big) = X \setminus \Big(f^{-1}\big([b, \infty)\big) \cup f^{-1}\big((-\infty, a]\big)\Big),$$

jest typu G_δ.

Warunek (iv) *implikuje warunek* (iii). Ponieważ, jak już zostało pokazane, (iv) implikuje zarówno (i) jaki i (ii), zatem warunek (iv) implikuje równość $\mathcal{U}(X) = \mathcal{C}(X) = \mathcal{B}_1(X)$.

To kończy dowód twierdzenia. □

Uwzględniając Stwierdzenie 3.1 otrzymujemy następujący wniosek z Twierdzenia 3.6.

Wniosek 3.9.

Niech X będzie przestrzenią doskonale normalną lub przestrzenią spełniającą pierwszy aksjomat przeliczalności (np. metryzowalną), lub przestrzenią lokalnie zwartą. Następujące warunki są równoważne.

i) $\mathcal{U}(X) \neq \mathcal{C}(X)$ *(tj., istnieje nieciągła funkcja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *o domkniętym wykresie);*

ii) $\mathcal{B}_1(X) \neq \mathcal{C}(X)$*;*

iii) $\mathcal{B}_1(X) \neq \mathcal{U}(X)$*;*

iv) X *nie jest dyskretna.*

Kolejny wniosek wynika z faktu, że każda P-przestrzeń jest zerowymiarowa (zobacz [**24**, 4K(7)]).

Wniosek 3.10.

Niech X będzie całkowicie regularną przestrzenią topologiczną. Ponadto, jeśli X jest przestrzenią spójną, to istnieje nieciągłe odwzorowanie na X o domkniętym wykresie (tj., $\mathcal{U}(X) \neq \mathcal{C}(X)$*).*

Na zakończenie tego podrozdziału podamy brakujący dowód stwierdzenia (a) w Lemacie 3.8.

Dowód stwierdzenia (a) Lematu 3.8.

Niech X będzie P-przestrzenią i niech $\xi \in X$. Ponadto, niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokażemy, że istnieje otoczenie V punktu ξ, na którym funkcja f jest stała. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $f(\xi) = 0$. Położmy $V_n = f^{-1}\Big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big)$ dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$. Zbiór $V = \bigcap_n V_n$ jest zbiorem typu G_δ. Ponieważ X jest P-przestrzenią, więc jest on otwartym otoczeniem punktu ξ. Ponadto, oczywiście $f(x) = 0$ dla każdego $x \in V$. To kończy dowód żądanego warunku. $\square$

ROZDZIAŁ 4

Liniowe rozszerzenia pewnych funkcji kawałkami ciągłych

4.1. Klasa $\mathcal{P}_0(X)$

W pierwszym podrozdziale tego rozdziału wprowadzimy do użytku pewną specjalną podklasę klasy funkcji kawałkami ciągłych. Składa się ona z pewnych funkcji pierwszej klasy Baire'a i będzie potrzebna do sformułowania nowych wyników w zakresie liniowego rozszerzania pewnych funkcji kawałkami ciągłych.

Niech $\mathcal{F}(X)$ oznacza klasę funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni Hausdorffa X (np. $\mathcal{U}(X)$ oznacza klasę funkcji o domkniętym wykresie, $\mathcal{Q}(X)$ - klasę funkcji quasi-ciągłych, a $\mathcal{C}(X)$ - klasę funkcji ciągłych). Niech A będzie ustalonym (niepustym) podzbiorem przestrzeni X. Mówiąc o liniowym rozszerzaniu funkcji z $\mathcal{F}(A)$ do elementów z $\mathcal{F}(X)$, będziemy mieli na myśli liniowy operator $E\colon \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(X)$ taki, że $E(f)\restriction A = f$ dla każdego $f \in \mathcal{F}(A)$.

Definicja 4.1.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i niech $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *kawałkami ciągła*, jeżeli istnieje ciąg (W_n), domkniętych podzbiorów przestrzeni X takich, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = X$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zawężenie $f\restriction W_n$ jest ciągłe. Rodzinę wszystkich funkcji kawałkami ciągłych określonych na przestrzeni X oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{P}(X)$.

Odnotujmy, że ponieważ suma dwóch zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, więc w powyższej definicji możemy przyjąć, iż ciąg (W_n) jest wstępujący.

Wprost z powyższej definicji wynika, że jeżeli X jest przestrzenią normalną, to

$$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{B}_1(X) \tag{4.1}$$

(wyrazami ciągu funkcji ciągłych (f_n) - zbieżnego do $f \in \mathcal{P}(X)$ - są przedłużenia Tietzego zawężeń $f{\restriction}W_n$).

Poniższy lemat określa związek między klasą funkcji o domkniętym wykresie i klasą funkcji kawałkami ciągłych.

Lemat 4.1.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Każda funkcja o domkniętym wykresie jest kawałkami ciągła, tj., $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}(X)$.

Dowód.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i niech $f \in \mathcal{U}(X)$. Przyjmijmy $F_n = f^{-1}([-n, n])$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy Lematu 1.6 każdy ze zbiorów F_n jest domknięty. Ponadto, oczywiście

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = f^{-1}([-1,1]) \cup f^{-1}([-2,2]) \cup \ldots \cup f^{-1}([-n,n]) \cup \ldots = X.$$

Wreszcie, ponieważ każde z zawężeń $f{\restriction}F_n$ jest ograniczone więc, na mocy Wniosku 1.4, jest ciągłe. To kończy dowód. □

Definicja 4.2.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f należy do klasy $\mathcal{P}_0(X)$, jeżeli istnieje ciąg (W_n), domkniętych i typu G_δ podzbiorów przestrzeni X takich, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = X$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zawężenie $f{\restriction}W_n$ jest ciągłe.

Ponieważ każdy domknięty podzbiór przestrzeni doskonale normalnej jest typu G_δ, więc z Definicji 4.1 oraz 4.2 otrzymujemy natychmiast

Stwierdzenie 4.1.

Dla każdej przestrzeni topologicznej Hausdorffa X zachodzi inkluzja $\mathcal{P}_0(X) \subset \mathcal{P}(X)$; ponadto, $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X)$, gdy X jest doskonale normalna.

Z inkluzji (4.1) oraz powyższego stwierdzenia wynika, że jeżeli X jest przestrzenią normalną, to $\mathcal{P}_0(X) \subset \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$; w szczególności

funkcje z $\mathcal{P}_0(X)$są pierwszej klasy Baire'a, gdy Xjest przestrzenią normalną.

Problem 4.1.

Nietrudno jest wskazać przykład przestrzeni X i funkcji rzeczywistej f na niej określonej, która jest kawałkami ciągła, ale nie ma domkniętego wykresu (zobacz Lemat 4.1). Wystarczy np. przyjąć $X = \mathbb{R}$ oraz $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, gdy $x \neq 0$ i $f(x) = 0$, gdy $x = 0$. Stąd, inkluzja $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ jest, na ogół, właściwa. Nie potrafię jednak wskazać normalnej (ale nie doskonale normalnej) przestrzeni topologicznej X takiej, aby $\mathcal{P}_0(X) \neq \mathcal{P}(X)$.

Lemat 4.2.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to każda funkcja o domkniętym wykresie określona na przestrzeni X jest odwzorowaniem z klasy $\mathcal{P}_0(X)$, tj., $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}_0(X)$.

Dowód.

Niech $f \in \mathcal{U}(X)$. Połóżmy $W_n = f^{-1}([-n, n])$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = X$ i z Lematu 1.6 wynika, że zbiory W_n są domknięte. Ponadto, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zawężenia $f \restriction W_n$ są ograniczone, a więc ciągłe (na mocy Wniosku 1.4). Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, mamy

$$X \setminus W_n = f^{-1}\Big((-\infty, -n)\Big) \cup f^{-1}\Big((n, \infty)\Big).$$

Ponieważ

$$(-\infty, -n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[-n - k, -n - \frac{1}{k}\Big]$$

oraz

$$(n, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[n + \frac{1}{k}, n + k\Big],$$

więc

$$f^{-1}\Big((-\infty, -n)\Big) = f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[-n-k, -n-\frac{1}{k}\Big]\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\Big(\Big[-n-k, -n-\frac{1}{k}\Big]\Big)$$

oraz

$$f^{-1}\Big((n, \infty)\Big) = f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[n + \frac{1}{k}, n + k\Big]\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\Big(\Big[n + \frac{1}{k}, n + k\Big]\Big).$$

Z Lematu 1.6 wynika, że zbiory $f^{-1}\Big([-n - k, -n - \frac{1}{k}\Big]\Big)$ i $f^{-1}\Big(\Big[n + \frac{1}{k}, n + k]\Big)$ są domknięte. Stąd, zbiór $X \setminus W_n$ jest typu F_σ. Zatem, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zbiór W_n jest typu G_δ. Pokazaliśmy w ten sposób, że wyrazami ciągu (W_n) są zbiory domknięte typu G_δ. Ponadto, $\bigcup_n W_n = X$ oraz zawężenia $f{\restriction}W_n$ są ciągłe dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $f \in \mathcal{P}_0(X)$. $\square$

LEMAT 4.3.

Niech X będzie przestrzenią normalną. Wtedy $\mathcal{P}_0(X) - \mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}_0(X)$.

DOWÓD.

Niech $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami z klasy $\mathcal{P}_0(X)$. Wówczas istnieją rodziny $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ domkniętych zbiorów typu G_δ takich, że $\bigcup_n W_n = X = \bigcup_n H_n$ oraz, dla dowolnych $j, k \in \mathbb{N}$, zawężenia $f{\restriction}W_k$ i $g{\restriction}H_j$ są ciągłe. Wtedy oczywiście zbiory $W_k \cap H_j$ są domknięte i typu G_δ dla dowolnych $k, j \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$\bigcup_{j,k=1}^{\infty} (W_k \cap H_j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j = X \cap X = X$$

oraz zawężenia $(f - g){\restriction}(W_k \cap H_j)$ są ciągłe dla każdych $k, j \in \mathbb{N}$. Zatem $f - g \in \mathcal{P}_0(X)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że $\mathcal{P}_0(X) - \mathcal{P}_0(X) \subset \mathcal{P}_0(X)$.

Niech z kolei $f \in \mathcal{P}_0(X)$. Ponieważ $0 \in \mathcal{P}_0(X)$, więc $f = f - 0 \in$ $\in \mathcal{P}_0(X) - \mathcal{P}_0(X)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że $\mathcal{P}_0(X) \subset \mathcal{P}_0(X) - \mathcal{P}_0(X)$. To kończy dowód lematu. $\square$

4.2. Klasa $\mathcal{P}_0(X)$ jako różnica dwóch nieujemnych funkcji o domkniętym wykresie

Główne twierdzenie tego podrozdziału zostanie wykorzystane do konstruowania rozszerzeń funkcji z klasy $\mathcal{P}_0(X)$. Jest ono uogólnioną (z przestrzeni doskonale normalnej na przestrzeń normalną) wersją wyniku Borsika. Pokazał on [**11**, Theorem 2], że jeżeli X jest przestrzenią doskonale normalną, to $\mathcal{P}(X) = \mathcal{U}^+(X) - \mathcal{U}^+(X)$. W uzasadnieniu tego faktu występują jednak pewne luki. W naszym dowodzie ich uzupełnienia oznaczone są kursywą.

TWIERDZENIE 4.4.

Niech X będzie przestrzenią normalną. Klasa funkcji $\mathcal{U}^+(X)$ jest stożkiem generującym klasy $\mathcal{P}_0(X)$ tj., $\mathcal{U}^+(X)$ jest stożkiem w $\mathbb{R}^X$ oraz

$$\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{U}^+(X) - \mathcal{U}^+(X). \tag{4.2}$$

DOWÓD.

Na podstawie Uwagi 1.9, klasa $\mathcal{U}^+(X)$ jest stożkiem w $\mathbb{R}^X$. Na podstawie Lematu 4.2, zachodzą inkluzje:

$$\mathcal{U}^+(X) \subset \mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}_0(X), \tag{4.3}$$

więc z Lematu 4.3 otrzymujemy:

$$\mathcal{U}^+(X) - \mathcal{U}^+(X) \subset \mathcal{P}_0(X) - \mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}_0(X). \tag{4.4}$$

Wykażemy teraz inkluzję przeciwną do inkluzji (4.4).

Niech $f \in \mathcal{P}_0(X)$ i niech $(W_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ściśle wstępującym, nieskończonym ciągiem domkniętych i typu G_δ podzbiorów przestrzeni X takich, że $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = X$ i zawężenia $f{\restriction}W_k$ są ciągłe dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że jeżeli ciąg (W_k) *ma skończenie wiele elementów* r, *to wówczas* $W_r = X$, *skąd wynika, że funkcja* f *jest ciągła na całej przestrzeni* X; *podobnie, jeżeli w ciągu* (W_k) *nieskończenie wiele elementów stanowią zbiory domknięto-otwarte, to wówczas funkcja* f *także jest ciągła na całej przestrzeni* X.

Rozważamy więc jedynie przypadek, gdy skończenie wiele elementów ciągu (W_k) stanowią zbiory domknięto-otwarte. Wówczas (na mocy faktu, że ciąg ten jest ściśle wstępujący) możemy je w naszych rozważaniach pominąć i przyjąć, że dla dowolnego indeksu $k \in \mathbb{N}$, zbiór W_k nie jest otwarty w przestrzeni X. Połóżmy

$$W_0 = \emptyset \text{ i } E_k = W_k \setminus W_{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

i zauważmy, że zbiory E_k są parami rozłączne i niepuste (bo $W_k \subsetneq W_{k+1}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$), oraz

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = W_1 \cup (W_2 \setminus W_1) \cup (W_3 \setminus W_2) \cup \ldots \cup (W_k \setminus W_{k-1}) \cup \ldots = X.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów W_k jest domknięty i typu G_δ więc, na mocy Uwagi 1.1, istnieją nieujemne funkcje ciągłe $g_k \colon X \to [0, 1]$ takie, że

$$g_k^{-1}(0) = W_{k-1}. \tag{4.5}$$

Ponadto, z założenia, że $W_k \subsetneq W_{k+1}$ dla wszystkich k, wynika ostra nierówność

$$g_k(x) > 0, \text{ gdy } x \in W_k \setminus W_{k-1} = E_k \neq \emptyset. \tag{4.6}$$

Dalsza część argumentacji jest uszczegółowieniem dowodu wyniku Borsika [**11**, Theorem 1].

Niech $h_k = \min\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Wtedy każda z funkcji h_k jest nieujemną funkcją ciągłą i taką, że $h_{k+1} \leqslant h_k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Ponadto, z równości

(4.5), z określenia funkcji h_k i faktu, że ciąg $(W_k)_{k=1}^{\infty}$ jest wstępujący wynika, że

$$h_k^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{k} W_{i-1} = W_{k-1} = g_k^{-1}(0). \tag{4.7}$$

Łącząc warunki (4.6) oraz (4.7) otrzymujemy ostrą nierówność dla funkcji h_k:

$$h_k(x) > 0, \text{ dla } x \in E_k; \ k = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

Ponieważ zbiory E_k są parami rozłączne, więc z własności (4.8) wynika, że funkcja $t\colon X \to \mathbb{R}$, określona wzorem $t(x) = \frac{1}{h_k(x)}$ gdy $x \in E_k$, jest dobrze zdefiniowana. Odwzorowanie to jest oczywiście ściśle dodatnie.

Połóżmy $f_1 = f^+ + t$ oraz $f_2 = f^- + t$, gdzie $f^+ = \max\{f, 0\}$ i $f^- = \max\{-f, 0\}$. Odwzorowania f_1 i f_2 są oczywiście nieujemne. Ponadto, $f_1 - f_2 = f$.

Dowód twierdzenia będzie zakończony gdy pokażemy, że funkcja f_1 ma domknięty wykres (uzasadnienie dla f_2 jest analogiczne). (4.9)

Wykorzystamy w tym celu Lemat 1.7. Będziemy poszukiwać więc otoczenia V punktu $x \in X$ takiego, aby

$$f(V) \subset (-\infty, -m) \cup \left(f(x) - \frac{1}{m}, f(x) + \frac{1}{m}\right) \cup (m, \infty), \tag{4.10}$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $x \in X$ i $m \in \mathbb{N}$. Z równości $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X$ wynika, że istnieje indeks $k_0 \in \mathbb{N}$ taki, że $x \in E_{k_0} = W_{k_0} \setminus W_{k_0-1}$.

Ponieważ, na podstawie równości równości (4.7), funkcja h_{k_0+1} zeruje się wyłącznie na zbiorze W_{k_0}, więc $h_{k_0+1}(x) = 0$. Stąd i z faktu, że funkcja h_{k_0+1} jest ciągła na X wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie V_x punktu x takie, że $h_{k_0+1}(V_x) \subset [0, \varepsilon)$. Zatem, dla ustalonej liczby $m \in \mathbb{N}$, istnieje otoczenie $V_x^{(m)}$ punktu x takie, że $h_{k_0+1}(V_x^{(m)}) \subset [0, \frac{1}{m})$. Tak więc,

$$0 \leqslant h_{k_0+1}(y) < \frac{1}{m} \tag{4.11}$$

dla dowolnego $y \in V_x^{(m)}$.

Ze związku (4.7) i z faktu, że funkcje h_k są ściśle dodatnie na E_k (patrz (4.8)), otrzymujemy $h_{k_0}(x) > 0$. Zatem, z ciągłości odwzorowania h_{k_0} wynika, że istnieje otoczenie $S_x^{(m)}$ punktu x takie, że

$$\left|\frac{1}{h_{k_0}(y)} - \frac{1}{h_{k_0}(x)}\right| < \frac{1}{2m} \tag{4.12}$$

dla dowolnego $y \in S_x^{(m)}$.

Ponadto, ponieważ funkcja f^+ jest ciągła na zbiorze W_{k_0}, więc istnieje otoczenie $U_x^{(m)}$ punktu x takie, że

$$|f^+(x) - f^+(y)| < \frac{1}{2m} \tag{4.13}$$

dla dowolnego $y \in U_x^{(m)} \cap W_{k_0}$.

Połóżmy $V(x;m) = V_x^{(m)} \cap S_x^{(m)} \cap U_x^{(m)}$. Tak określony zbiór $V(x;m)$ jest oczywiście otwartym otoczeniem punktu x. Pokażemy, że po pewnych modyfikacjach - patrz warunek (4.15) - będzie dla niego spełniona inkluzja (4.10). Rozpatrzmy w tym celu dwa przypadki:

(a) $y \in E_{k_0} \cap V(x;m)$,

(b) $y \in V(x;m) \setminus E_{k_0}$.

Rozważmy najpierw przypadek (a). Ustalmy w tym celu $y \in E_{k_0} \cap V(x;m)$. Ponieważ $(W_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ściśle wstępującym ciągiem zbiorów domkniętych i

$$x \in E_{k_0} = W_{k_0} \setminus W_{k_0-1}, \tag{4.14}$$

więc otoczenie $V(x;m)$ punktu x można dobrać tak, aby

$$V(x;m) \cap W_{k_0-1} = \emptyset \tag{4.15}$$

(jeżeli bowiem przekrój zbioru W_{k_0-1} z każdym otoczeniem $V \in \mathcal{V}_x$ byłby niepusty, to mielibyśmy $x \in \operatorname{cl} W_{k_0-1} = W_{k_0-1}$, wbrew (4.14)).

Wówczas, z (4.15) wynika, że $y \in W_{k_0} \cap V(x;m)$. Z własności (4.12) oraz (4.13) otrzymujemy:

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f^+(x) + t(x) - f^+(y) - t(y)| = \Big|[f^+(x) - f^+(y)] +$$

$$+ \Big[\frac{1}{h_{k_0}(x)} - \frac{1}{h_{k_0}(y)}\Big]\Big| \leqslant |f^+(x) - f^+(y)| + \Big|\frac{1}{h_{k_0}(x)} - \frac{1}{h_{k_0}(y)}\Big| <$$

$$< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

Stąd,

$$f_1(x) - \frac{1}{m} < f_1(y) < f_1(x) + \frac{1}{m} \text{ dla dowolnego } y \in E_{k_0} \cap V(x;m). \tag{4.16}$$

W przypadku (b), pamiętając, że $E_{k_0} = W_{k_0} \setminus W_{k_0-1}$, mamy

$$y \in V(x;m) \setminus (W_{k_0} \setminus W_{k_0-1}), \text{ a zatem } y \in V(x;m) \text{ oraz } y \notin W_{k_0} \setminus W_{k_0-1},$$

skąd

$$y \in V(x;m) \text{ oraz } (y \notin W_{k_0} \text{ lub } y \in W_{k_0-1}).$$

Ponieważ $V(x;m) \cap W_{k_0-1} = \emptyset$, więc z powyższych warunków wynika, że $y \in V(x;m) \setminus W_{k_0}$.

Dalej, skoro $W_j \subset W_{j+1}$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$, więc $y \notin W_j$ dla $j \leqslant k_0$. Stąd wynika, że $y \notin E_j = W_j \setminus W_{j-1}$ dla $j \leqslant k_0$

(w przeciwnym przypadku bowiem, istniałby indeks $j_0 \leqslant k_0$ taki, że $y \in W_{j_0}$, sprzeczność).

Z drugiej strony, na podstawie równości $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = X$, istnieje indeks $p > k_0$ taki, że $y \in E_p$, a ponieważ ciąg (h_j) jest nierosnący, więc $h_p(y) \leqslant h_{k_0+1}$. Stąd i z nierówności (4.11) otrzymujemy

$$f_1(y) = f^+(y) + \frac{1}{h_p(y)} \geqslant \frac{1}{h_{k_0+1}(y)} > m \text{ dla dowolnego } y \in V \setminus E_{k_0}. \quad (4.17)$$

Wykazaliśmy tym samym (patrz nierówności (4.16) oraz (4.17)), że dla dowolnego elementu $x \in X$ i dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ istnieje otoczenie $V = V(x; m)$ punktu x takie, że

$$f_1(y) \in \Big(f_1(x) - \frac{1}{m}, f_1(x) + \frac{1}{m}\Big) \cup (m, \infty),$$

dla dowolnego $y \in V$.

Na mocy Lematu 1.7 wnioskujemy więc, że funkcja f_1 ma domknięty wykres. Na podstawie uwagi (4.9) dowód twierdzenia jest zakończony. □

Na przełomie XX i XXI wieku matematycy słowaccy (Borsík, Doboš i Repický) badali strukturę grupy addytywnej $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, generowanej przez pewne klasy funkcji, których wspólną cechą jest domkniętość wykresu. Borsík wykazał [**11**], że jeżeli X jest przestrzenią doskonale normalną, to

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}(X)) = \mathcal{U}(X) + \mathcal{U}(X). \quad (4.18)$$

Z inkluzji (4.3), Lematów 4.2 i 4.3 oraz równości (4.2), otrzymujemy pewne wzmocnienie cytowanego wyniku; równość (4.18) zachodzi również w przypadku, gdy X jest przestrzenią normalną.

Wniosek 4.5.

Niech X będzie normalną przestrzenią topologiczną. Wówczas $\mathcal{G}(\mathcal{U}(X)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\pm\mathcal{U}(X))^n = \mathcal{U}(X) \pm \mathcal{U}(X) = \mathcal{P}_0(X)$.

4.3. Rozszerzenia liniowe funkcji z klasy $\mathcal{P}_0(A)$

W kolejnym podrozdziale podamy jawny wzór określający liniowy operator rozszerzania funkcji z klasy $\mathcal{P}_0(A)$ do klasy $\mathcal{P}_0(X)$, gdzie A jest domkniętym i typu G_δ podzbiorem normalnej przestrzeni X.

Oznaczenie 4.1.

Niech $\mathcal{F}(X)$ będzie rodziną funkcji określonych na przestrzeni X. Symbolem $\mathcal{F}^b(X)$ oznaczać będziemy podrodzinę rodziny $\mathcal{F}(X)$, złożoną z tych funkcji rodziny $\mathcal{F}(X)$, które są ograniczone.

Definicja 4.3.

Jeżeli $A \subset X$ i $f \in \mathcal{P}^b(A)$, to *normę* $\|\cdot\|_A$ odwzorowania f na A definiujemy jako

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

W dowodzie twierdzenia głównego wykorzystamy fakty uzasadnione w Twierdzeniach 4.4 i 3.1. Twierdzenie to ma nastepującą postać.

Twierdzenie 4.6.

Niech X będzie normalną przestrzenią topologiczną, oraz niech $A \subset X$ będzie domkniętym i typu G_δ podzbiorem przestrzeni X. Niech ponadto $f \in \mathcal{P}_0(A)$. Połóżmy

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in A \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases} \tag{4.19}$$

Odwzorowanie $T\colon \mathcal{P}_0(A) \to \mathbb{R}^X$ określone wzorem $T(f) = \widetilde{f}$, ma następujące własności:

- *jego przeciwdziedziną jest $\mathcal{P}_0(X)$,*

- *jest liniowym operatorem rozszerzania takim, że jego zawężenie do dziedziny ${\mathcal{P}_0}^b(A)$ jest izometrią (tj., $\|T(f)\|_X = \|f\|_A$).*

Dowód.

Niech A będzie domkniętym i typu G_δ podzbiorem przestrzeni normalnej X. Jest on (patrz Uwaga 1.1) zbiorem zerowym pewnej funkcji ciągłej $g\colon X \to \mathbb{R}$. Skoro $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest funkcją z klasy $\mathcal{P}_0(A)$ to, na podstawie Twierdzenia 4.4, istnieją odwzorowania $p, q \in \mathcal{U}^+(A)$ takie, że $f(x) = p(x) - q(x)$ dla każdego $x \in A$. Z Twierdzenia 3.1 wynika, że funkcje p i q dają się jednoznacznie przedłużyć, odpowiednio, do funkcji o domkniętym wykresie $\overline{p}_{(A,g)}, \overline{q}_{(A,g)}\colon X \to \mathbb{R}_+$, określonych wzorem (3.1):

$$\overline{p}_{(A,g)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{dla} \quad x \in A \\ \frac{1}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A, \end{cases}$$

oraz

$$\overline{q}_{(A,g)}(x) = \begin{cases} q(x) & \text{dla} \quad x \in A \\ \frac{1}{g(x)} & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Mamy więc $\overline{p}_{(A,g)}, \overline{q}_{(A,g)} \in \mathcal{U}^+(X)$ i, na mocy Twierdzenia 4.4,

$$\overline{p}_{(A,g)} - \overline{q}_{(A,g)} \in \mathcal{P}_0(X).$$

Rozważmy odwzorowanie $T\colon \mathcal{P}_0(A) \to \mathcal{P}_0(X)$ określone wzorem

$$T(f) = \widetilde{f}(x) = \overline{p}_{(A,g)}(x) - \overline{q}_{(A,g)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Widać, że *nie zależy ono od funkcji* g i oczywiście jest przedłużeniem funkcji $f \in \mathcal{P}_0(A)$. Pokażemy, że jest to przedłużenie liniowe.

Istotnie, niech $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_0(A)$. Wtedy, dla dowolnego $x \in X$, mamy

$$\Big(T(f_1 + f_2)\Big)(x) = \widetilde{f_1 + f_2}(x) = \begin{cases} (f_1 + f_2)(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_1(x) + f_2(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_1(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} + \begin{cases} f_2(x) & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A \end{cases} = \widetilde{f}_1(x) + \widetilde{f}_2(x) =$$

$$= \Big(T(f_1)\Big)(x) + \Big(T(f_1)\Big)(x).$$

Dowód równości $\Big(T(sf)\Big)(x) = \Big(sT(f)\Big)(x)$ jest analogiczny.

Ponadto, jeżeli funkcja f jest ograniczona, to

$$\|T(f)\|_X = \|\widetilde{f}\|_X = \sup_{x\in X} |\widetilde{f}(x)| = \sup_{x\in A} |f(x)| = \|f\|_A.$$

$\square$

W kontekście powyższych rozważań pojawia się naturalne pytanie.

Czy domkniętość zbioru A w Twierdzeniu 4.6 można zastąpić (bez zmiany tezy) słabszym założeniem, np. że jest to zbiór typu F_σ?

Nie wiemy czy jest to możliwe w zakresie klasy $\mathcal{P}_0(A)$, ale dla odwzorowań z rodziny $\mathcal{P}(A)$ odpowiedź jest pozytywna.

Lemat 4.7.

Niech X będzie normalną przestrzenią topologiczną oraz niech $A \subset X$ będzie podzbiorem przestrzeni X jednocześnie typu F_σ i G_δ. Wtedy, dla dowolnego odwzorowania $f \in \mathcal{P}(A)$, wzór (4.19) określa jego przedłużenie $\widetilde{f} \in \mathcal{P}(X)$.

DOWÓD.

Niech X będzie przestrzenią normalną i niech $f \in \mathcal{P}(A)$. Ponadto, niech (F_n) i (G_n) będą takimi ciągami zbiorów domkniętych w X, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ oraz $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Oczywiście $F_n \cap G_m = \emptyset$ dla dowolnej pary indeksów $n, m \in \mathbb{N}$. Ponieważ funkcja f jest kawałkami ciągła na A, więc A jest sumą zbiorów ciągu (A_j) - domkniętych w A i takich, że zawężenia $f \restriction A_j$ są ciągłe dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Ponieważ zbiory A_j są domknięte w A, więc każdy z nich można przedstawić w postaci przekroju $A \cap R_j$, gdzie (R_j) jest ciągiem zbiorów domkniętych w X. Mamy więc

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap R_j) = \bigcup_{j,n=1}^{\infty} (F_n \cap R_j) = \bigcup_{j,n=1}^{\infty} A(j,n).$$

Połóżmy $H(j,n) = A(j,n) \cup G_n$ dla dowolnych $j, n \in \mathbb{N}$. Zbiory $H(j,n)$ są więc domknięte w X oraz

$$\bigcup_{j,n=1}^{\infty} H(j,n) = \bigcup_{j,n=1}^{\infty} (A(j,n) \cup G_n) = \bigcup_{j,n=1}^{\infty} A(j,n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = A \cup (X \setminus A) = X.$$

Dla funkcji $\widetilde{f}$ zdefiniowanej wzorem (4.19), zawężenie $\widetilde{f} \restriction G_n = 0$ jest oczywiście ciągłe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, z określenia zbiorów $A(j,n)$ wynika, że każde z zawężeń $\widetilde{f} \restriction A(j,n) = f \restriction A(j,n)$ także jest ciągłe. $\square$

Założeń powyższego lematu dotyczących zbioru $A \subset X$ nie da się na ogół osłabić. Np. nie można pominąć założenia, że jest on zbiorem typu G_δ. Uzasadnia to poniższy przykład.

PRZYKŁAD 4.1.

Niech $X = [0,1]$ oraz niech $A = (0,1) \cap \mathbb{Q} \subset X$ będą zbiorami rozważanymi z topologią naturalną. Wówczas X jest doskonale normalną przestrzenią topologiczną (więc $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X)$) oraz A jest zbiorem typu F_σ (ale nie typu G_δ) w X. Ponadto $\mathcal{P}(A) = \mathbb{R}^A$, gdyż zbiór A jest przeliczalną sumą zbiorów skończonych (na każdym takim zbiorze dowolna funkcja jest ciągła). Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(\frac{k}{\ell}) = \ell, \tag{4.20}$$

przy założeniu, że ułamek $\frac{k}{\ell}$ jest nieskracalny. Pokażemy, że odwzorowania f nie da się rozszerzyć do funkcji należącej do klasy $\mathcal{P}(X)$.

Zauważmy najpierw, że funkcja f jest nieciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Istotnie, wynika to z faktu, że nieskracalnych ułamków o danym mianowniku jest w A skończenie wiele.

Przypuśćmy, że f można rozszerzyć do funkcji $\widetilde{f} \in \mathcal{P}(X)$. Wtedy istniałby ciąg (F_n), zbiorów domkniętych taki, że $[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ oraz zawężenia $f{\restriction}F_n$ są ciągłe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, z własności Baire'a, istniałby indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Zatem istniałby niepusty przedział (a,b) zawarty w zbiorze F_{n_0}. Stąd, na mocy ciągłości zawężeń $f{\restriction}F_n$, każda liczba wymierna $\xi \in (a,b)$ byłaby punktem ciągłości odwzorowania f, wbrew faktowi, iż f jest nieciągła w każdym punkcie dziedziny.

Na zakończenie tego podrozdziału podamy jeszcze jeden sposób rozszerzania funkcji kawałkami ciągłych. Do jego uzasadnienia potrzebne będą dwa fakty zawarte w poniższych lematach. Dowód pierwszego z lematów podobny jest do uzasadnienia Lematu 4.7.

Lemat 4.8.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Ponadto, niech E będzie podzbiorem typu F_σ i jednocześnie G_δ w przestrzeni X, oraz niech $g\colon X \setminus E \to E$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas retrakcja $\varphi\colon X \to X$

określona wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & : \; x \in E \\ g(x) & : \; x \in X \setminus E, \end{cases} \tag{4.21}$$

jest odwzorowaniem kawałkami ciągłym na X.

Dowód.

Niech $i_E \colon E \to E$ będzie odwzorowaniem identycznościowym na zbiorze E. Ponieważ E jest zbiorem jednocześnie typu F_σ i G_δ, więc istnieją ciągi zbiorów domkniętych (F_n) i (G_n) takie, że $\bigcup_n F_n = E$ oraz $\bigcup_n G_n = X \setminus E$. Oczywiście $F_j \cap G_k = \emptyset$ dla dowolnych $j, k \in \mathbb{N}$. Ponadto, ponieważ g jest funkcją ciągłą, więc zawężenia $i_E \restriction F_n$ oraz $g \restriction G_n$ są ciągłe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy $H_n = F_n \cup G_n$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\bigcup_n H_n = \bigcup_n (F_n \cup G_n) = \bigcup_n F_n \cup \bigcup_n G_n = E \cup (X \setminus E) = X$. Ponadto, z ciągłości zawężeń $i_E \restriction F_n$ oraz $g \restriction G_n$ wynika ciągłość funkcji φ na każdym ze zbiorów H_n. To kończy dowód lematu. $\square$

Drugi z lematów jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia [**6**, Theorem 5.2]. Ponieważ autorzy pomijają fragment dowodu, z którego wynika prawdziwość tego lematu, poniżej podajemy jego uzasadnienie.

Lemat 4.9.

Złożenie dwóch funkcji kawałkami ciągłych jest funkcją kawałkami ciągłą.

Dowód.

Niech X, Y i Z będą przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa. Niech ponadto $g \colon X \to Y$ oraz $f \colon Y \to Z$ będą funkcjami kawałkami ciągłymi.
Wtedy istnieją ciągi zbiorów domkniętych (F_n) i (G_n) takie, że $\bigcup_n F_n = Y$ i $\bigcup_n G_n = X$, oraz zawężenia $f \restriction F_k$ oraz $g \restriction G_j$ są ciągłe dla dowolnych $j, k \in \mathbb{N}$. Niech $H_{jk} = (g \restriction G_j)^{-1}(F_k) = \{x \in G_j : g(x) \in F_k\}$ dla dowolnych $j, k \in \mathbb{N}$.

Zbiór H_{jk} jest domknięty w X (bo jest domkniętym podzbiorem zbioru G_j, który jest domknięty w X). Ponadto

$$\bigcup_{j,k} H_{jk} = \bigcup_{j,k} \left[G_j \cap g^{-1}(F_k)\right] = \bigcup_j G_j \cap \bigcup_k g^{-1}(F_k) =$$

$$= X \cap g^{-1}\Big(\bigcup_k F_k\Big) = X \cap g^{-1}(Y) = X \cap X = X.$$

Pokażemy, że funkcja $h = f \circ g$ jest ciągła na każdym z domkniętych zbiorów H_{jk}. Niech (x_α) będzie MS-ciągiem zbieżnym do punktu $x \in H_{jk}$. Wówczas $h(x_\alpha) = (f \circ g)(x_\alpha) = f(g(x_\alpha))$ oraz

$$(\exists \alpha_0)\ (\forall \alpha > \alpha_0)\ x_\alpha \in H_{jk}. \tag{4.22}$$

Z (4.22) wynika, że $g(x_\alpha) \in F_k$ dla dowolnego $\alpha > \alpha_0$. Ponieważ $x_\alpha \to x$ i F_k jest zbiorem domkniętym dla każdego $k \in \mathbb{N}$, więc $g(x_\alpha) \to g(x) \in F_k$. Zatem $f(g(x_\alpha)) \to f(g(x)) \in F_k$, a więc funkcja $h = f \circ g$ jest ciągła na każdym ze zbiorów H_{jk}. □

Teraz możemy już podać twierdzenie, w którym opiszemy wspomniany wyżej sposób rozszerzania funkcji kawałkami ciągłych. Stanowi ono uogólnienie Lematu 4.7 i pokazuje, że ilość wszystkich rozszerzeń odwzorowania $f \in \mathcal{P}(E)$ jest równa co najmniej ilości ciągłych odwzorowań $g\colon X \setminus E \to X$.

Twierdzenie 4.10.

Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa i niech $E \subset X$ będzie zbiorem typu F_σ i jednocześnie G_δ w X. Ponadto, niech $f\colon E \to \mathbb{R}$ będzie funkcją kawałkami ciągłą na E, a φ retrakcją określoną wzorem (4.21), gdzie $g\colon X \setminus E \to E$ jest funkcją ciągłą. Odwzorowanie $T_\varphi\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^X$ określone wzorem $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$ ma następujące własności:

- *jego przeciwdziedziną jest $\mathcal{P}(X)$,*

- *jest liniowym operatorem rozszerzania takim, że jego zawężenie do $\mathcal{P}^b(E)$ jest izometrią.*

Dowód.

Z Lematu 4.8 wynika, że funkcja φ jest kawałkami ciągła. Zatem (na mocy Lematu 4.9) $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$, jako złożenie dwóch funkcji kawałkami ciągłych, jest kawałkami ciągłe na X. Liniowość T_φ oraz fakt, że $T_\varphi\colon \mathcal{P}^b(E) \to \mathcal{P}^b(X)$ jest izometrią dowodzi się tak samo jak w przypadku Twierdzenia 4.6. □

Powyższe twierdzenie można zastosować do uzyskania istotnego wniosku z wyniku Jayne'a i Rogersa. W 1982 roku udowodnili oni **[30]** następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.11.

Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi, przy czym Y jest przestrzenią zupełną. Ponadto, niech f będzie kawałkami ciągłą funkcją przekształcającą zbiór $E \subset X$ w przestrzeń Y. Wtedy f można przedłużyć do funkcji $\widehat{f} \in \mathcal{P}(E_1)$ o wartościach w Y, gdzie $E_1 \supset E$ jest zbiorem będącym przekrojem zbioru A typu F_σ i zbioru B typu G_δ w X.

Stosując Twierdzenie 4.10 do wyniku Jayne'a i Rogersa, uzyskujemy następujące

Stwierdzenie 4.2.

W Twierdzeniu 4.11 *nie można przyjąć, że E_1 jest jednocześnie zbiorem typu F_σ i G_δ w X.*

Dowód.

Jako uzasadnienie posłuży nam funkcja f określona w Przykładzie 4.1. Niech więc $X = [0,1]$ oraz niech $A = [0,1] \cap \mathbb{Q} \subset X$ będą zbiorami rozważanymi z topologią naturalną. Odwzorowanie $f\colon A \to X$ określamy wzorem

$$f(\frac{k}{\ell}) = \ell,$$

przy założeniu, że ułamek $\frac{k}{\ell}$ jest nieskracalny. Jak wcześniej pokazaliśmy (Przykład 4.1) f jest funkcją kawałkami ciągłą na A. Przypuśćmy, że istnieje funkcja $\widehat{f} \in \mathcal{P}(E_1)$ taka, że zbiór $E_1 \supset A$ jest typu F_σ i G_δ w X oraz $\widehat{f}\restriction A = f$. Wówczas, na mocy Twierdzenia 4.10, funkcja $T_\varphi(\widehat{f}) = \widehat{f} \circ \varphi$ jest kawałkami ciągłym przedłużeniem funkcji $\widehat{f}$ (a więc i f) na X, wbrew wnioskom uzyskanym w Przykładzie 4.1. $\square$

ROZDZIAŁ 5

Maksymalna klasa addytywna dla rodziny $\mathcal{QU}(\mathbb{R})$

Ostatni z rozdziałów rozprawy powstał w całości na podstawie pracy [**51**]. Rozszerzymy w nim listę wyników związanych z wyznaczaniem klas maksymalnych dla dwóch rodzin funkcji.

W głównej mierze skupimy się na maksymalnej klasie addytywnej (wyniki opisujące klasy: multiplikatywną, maksimum i minimum podamy bez dowodów - znajdują się one w pracy [**51**]).

Definicja 5.1.

Niech $\mathcal{F}(X,Y)$ będzie rodziną składającą się z odwzorowań $f\colon X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami metrycznymi. W tym rozdziale rozpatrywać będziemy takie rodziny przy założeniu, że $X = Y = \mathbb{R}$. *Maksymalną klasą addytywną dla rodziny* $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór:

$$\mathcal{M}_a(\mathcal{F}) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g + f \in \mathcal{F},\ \text{dla każdej funkcji } f \in \mathcal{F}\}.$$

Podobnie, *maksymalną klasą multiplikatywną, maksimum* i *minimum dla rodziny* $\mathcal{F}$ nazywamy, odpowiednio, zbiór:

$$\mathcal{M}_m(\mathcal{F}) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : gf \in \mathcal{F},\ \text{dla każdej funkcji } f \in \mathcal{F}\},$$

$$\mathcal{M}_{\max}(\mathcal{F}) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \max\{g, f\} \in \mathcal{F},\ \text{dla każdej funkcji } f \in \mathcal{F}\},$$

$$\mathcal{M}_{\min}(\mathcal{F}) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \min\{g, f\} \in \mathcal{F},\ \text{dla każdej funkcji } f \in \mathcal{F}\}.$$

Uwaga 5.1.

Odpowiednikiem maksymalnej klasy addytywnej dla rodziny funkcji $\mathcal{F}(X,Y)$ jest - w przypadku rodziny $\mathcal{S}(X,Y)$, podzbioru przestrzeni $\mathcal{L}(X,Y)$ operatorów liniowych ciągłych działających z przestrzeni Banacha X do Y - *klasa perturbacji*, którą definiujemy jako:

$$\mathcal{PS}(X,Y) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) : K + A \in \mathcal{S}(X,Y), \text{ dla każdego } K \in \mathcal{S}(X,Y)\}.$$

Jednym z pierwszych matematyków, który ją badał był w roku 1966 Washenberger [**56**]. Współcześnie, najwięcej wyników dotyczących klas perturbacji pochodzi od Aiena i Gonzaleza (zobacz m.in. [**1**], [**2**] oraz [**3**]).

Na przestrzeni całego minionego stulecia wielu matematyków zajmowało się badaniem maksymalnych klas (głównie addytywnej) dla różnych rodzin funkcji. W szczególności, w 1990 roku, Grande i Sołtysik [**27**] udowodnili następujący wynik.

Lemat 5.1.

Niech $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ *będzie rodziną funkcji quasi-ciągłych określonych na przestrzeni* $\mathbb{R}$. *Wtedy* $\mathcal{M}_a(\mathcal{Q}) = \mathcal{C}$.

Ponadto, pokazano między innymi, że

- $\mathcal{M}_a(\mathcal{D}) = \mathcal{C}onst$ (Radakovič [**46**], 1931),
- $\mathcal{M}_a(\mathcal{DB}_1) = \mathcal{C}$ (Bruckner [**15**], 1978),
- $\mathcal{M}_a(\mathcal{DQ}) = \mathcal{C}onst$ (Natkaniec [**42**], 1992),
- $\mathcal{M}_a(\mathcal{DB}_1\mathcal{Q}) = \mathcal{C}$ (Banaszewski [**7**], 1992), (zobacz także [**31**]).

W roku 1987 Menkyna [**39**] badał rodzinę funkcji rzeczywistych określonych na lokalnie zwartej przestrzeni normalnej X i uzyskał dwa wyniki które, dla przypadku $X = \mathbb{R}$, przyjmują postać

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a(\mathcal{U}) &= \mathcal{C}, \\ \mathcal{M}_m(\mathcal{U}) &= \mathcal{C}^*. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Poniżej podajemy główne twierdzenie tej części pracy. Określona w nim została maksymalna klasa addytywna dla rodziny funkcji quasi-ciągłych o domkniętym wykresie.

TWIERDZENIE 5.2.

Niech $\mathcal{QU} = \mathcal{QU}(\mathbb{R})$ *będzie rodziną funkcji quasi-ciągłych i o domkniętym wykresie określonych na przestrzeni* $\mathbb{R}$. *Wtedy* $\mathcal{M}_a(\mathcal{QU}) = \mathcal{C}$.

DOWÓD.

W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$ oraz $\mathcal{U}(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$. Z Lematu 5.1 i faktu, że $\mathcal{C} + \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, otrzymujemy $\mathcal{C} + \mathcal{QU} \subset \mathcal{QU}$, skąd $\mathcal{C} \subset$ $\subset \mathcal{M}_a(\mathcal{QU})$. Pokażemy, że prawdziwa jest inkluzja odwrotna.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje funkcja nieciągła g należąca do $\mathcal{M}_a(\mathcal{QU})$. Mamy przy tym $g \in \mathcal{QU}$, ponieważ $\mathcal{M}_a(\mathcal{QU}) \subset \mathcal{QU}$. Niech teraz $\overline{g}(x) =$ $= -g(x) + \arctan(g(x))$. Mamy $\overline{g} = \varphi \circ g$, gdzie $\varphi(x) = -x + \arctan(x)$, a zatem $\overline{g}$ jest funkcją quasi-ciągłą jako złożenie funkcji quasi-ciągłej i ciągłej. Pokażemy teraz, że $\overline{g}$ jest także funkcją o domkniętym wykresie. Niech $(t_n, \overline{g}(t_n)) \to (t, A)$, $A \in \mathbb{R}$. Stąd ciąg $(\overline{g}(t_n))_n$ jest ograniczony, a zatem, wobec ograniczoności ciągu $(\arctan(g(t_n)))_n$, ograniczony musi być także ciąg $(g(t_n))_n$. Zatem, ponieważ g ma domknięty wykres, $g(t_n) \to g(t)$. Stąd $\arctan(g(t_n)) \to \arctan(g(t))$, a więc $A = \overline{g}(t)$. Tak więc $\overline{g}$ ma domknięty wykres oraz, wobec założenia $g \in \mathcal{M}_a(\mathcal{QU})$, mamy $g + \overline{g} = \arctan(g(\cdot)) \in \mathcal{QU}$.

Niech x_0 będzie punktem nieciągłości funkcji g. Ponieważ funkcja $g - g(x_0)$ także należy do $M_a(\mathcal{QU})$, więc można bez straty ogólności przyjąć, że

$g(x_0) = 0$. Jeśli $x_n \to x_0$ i $g(x_n) \nrightarrow g(x_0)$, to ciąg $(x_n)_n$ zawiera podciąg $(x_{n_k})_k$ taki, że $|g(x_{n_k})| \to \infty$ (gdyby tak nie było, $(x_n)_n$ zawierałby podciąg $(x_{n_k})_k$ taki, że $g(x_{n_k}) \to y$, $y \neq 0$, a to byłoby sprzeczne z domkniętością wykresu funkcji g). Możemy więc bez straty ogólności założyć, że $x_n \to x_0$ i $|g(x_n)| \to \infty$. W istocie, znów bez straty ogólności, można założyć, że $g(x_n) \to \infty$, skąd $\arctan(g(x_n)) \to \frac{\pi}{2}$, a ponieważ $g(x_0) = 0$, pokazuje to, że wykres funkcji $\arctan(g(\cdot))$ nie jest domknięty. Uzyskaliśmy więc sprzeczność z $g \in \mathcal{M}_a(\mathcal{QU})$.

$\square$

W pracy (**[51]**) uzasadniłem ponadto, że

$$\mathcal{M}_{\max}(\mathcal{QU}) = \mathcal{M}_{\min}(\mathcal{QU}) = \emptyset$$

oraz

$$\mathcal{M}_m(\mathcal{QU}) = \mathcal{C}^*,$$

gdzie

$$\mathcal{C}^* = \{f \in \mathcal{C} : f \equiv 0 \text{ lub } f(x) \neq 0 \text{ dla wszystkich } x \in \mathbb{R}\}.$$

Bibliografia

[1] P. Aiena, M. Gonzalez, *Inessential operators and incomparability of Banach spaces*, Extracta Math. 6 (1991), no. 2-3, 177—180.

[2] P. Aiena, M. Gonzalez, *On the perturbation classes of semi-Fredholm and Fredholm operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), Suppl. No. 40 (1996), 37—46.

[3] P. Aiena, M. Gonzalez, *Intrinsic characterizations of perturbation classes on some Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) 94 (2010), no. 4, 373—381.

[4] I. Baggs, *Functions with a closed graph*, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 439–442.

[5] I. Baggs, *Nowhere dense sets and real-valued functions with closed graphs*, Int. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 1, 1–8.

[6] T. Banakh, B. Bokalo, *On scatteredly continuous maps between topological spaces*, Topology Appl. 157 (2010), no. 1, 108–122.

[7] D. Banaszewski, *On some subclasses of* $\mathcal{DB}_1$ *functions*, Problemy Mat. 13 (1993), 33–41.

[8] J. Borsík, *Algebraic structures generated by real quasicontinuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 8 (1996), 175–184.

[9] J. Borsik, *Local characterization of functions with closed graph*, Demonstratio Math. 29 (1996), 643–650.

[10] J. Borsík, *Sums of quasicontinuous functions*, Math. Bohemica 118 (1993), 313–319.

[11] J. Borsík, *Sums, differences, products and quotients of closed graph functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 117–123

[12] J. Borsík, *Sums of quasicontinuous functions defined on pseudometrizable spaces*, Real Anal. Exch. 22 (1996/97), 328–337.

[13] J. Borsík, J. Doboš, M. Repický, *Sums of quasicontinuous functions with closed graphs*, Real Anal. Exch. 25 (1999/00), 679–690.

[14] S. Bromberg, *An extension in class* C^1, Bol. Soc. Mat. Mex. II, Ser. 27 (1982), 35–44.

[15] A.M. Bruckner, *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Math. no. 659, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[16] F. Chaatit, P. Haskell Rosenthal, *On differences of semi-continuous functions*, Quaest. Math. 23 (2000), no. 3, 295–311.

[17] J. Doboš, *On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs*, Čas. Pěst. Mat. 110 (1985), 60–68.

[18] J. Doboš, *Sums of closed graph functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 14 (1998), 9–11.

[19] A. Dow, *On F-spaces and F'-spaces*, Pacific J. Math. 108 (1983), 275–284.

[20] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN Warszawa, 1975.

[21] C. L. Fefferman, *C^m extension by linear operators*, Annals of Math. vol. 166 (2007), No. 3, 779–835.

[22] C. L. Fefferman, *The Structure of linear extension operators for C^m*, Rev. Mat. Iberoam. 23 (2007), 269–280.

[23] R. V. Fuller, *Relations among continuous and various non-continuous functions*, Pacific Math. J. 25 (3), (1968), 495–509.

[24] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer-Verlag, Berlin.

[25] L. Gillman, M. Henriksen, *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 2, 340–362.

[26] Z. Grande, T. Natkaniec, *Lattices Generated by F-quasi-continuous Functions* , Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 34 (1986), 525–530.

[27] Z. Grande, L. Sołtysik *Some remarks on quasi-continuous real functions*, Problemy Mat. 10 (1990), 79–86.

[28] T. R. Hamlett, L. L. Herrington, *The Closed Graph and P-closed Graph Properties in General Topology*, Vol. 3, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1980.

[29] S. Hartman, J. Mikusiński, *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN Warszawa, 1957.

[30] J. E. Jayne, C. A. Rogers *First level Borel functions and isomorphisms*, J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 2, 177–205.

[31] J.M. Jastrzębski, J.M. Jędrzejewski, T. Natkaniec *On some subclasses of Darboux functions*, Fund. Math. 138 (1991), no. 3, 165–173.

[32] O. F. K. Kalenda, J. Spurný, *Extending Baire-one functions on topological spaces*, Topology Appl. 149 (2005), no. 1-3, 195–216.

[33] O. Karlova, *Extension of continuous mappings and H_1-retracts*, Bull. Aust. Math. Soc. 78 (2008), no. 3, 497–506.

[34] B. Kirchheim, *Baire one star functions*, Real Anal. Exch. 18 (1992/93), 385–399.

[35] P. Kostyrko, T. Šalát, *On functions the graphs of which are closed sets* (in Russian), Čas. Pěst. Mat. 89 (1964), 426–432.

[36] K. Kunen, *Rigid P-spaces*, Fund. Math. 133 (1989), 59–65.

[37] K. Kuratowski, *Sur les théorémes topologiques de la théorie des fonctions de variables réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 197 (1933), 19–20.

[38] A. Lindenbaum, *Sur quelques propriétés des fonctions de variable réelle*, Ann. Soc. Math. Polon. 6 (1927), 129–130.

[39] R. Menkyna, *The maximal additive and multiplicative families for functions with closed graph*, Act. Math. Univ. Com. 52/53 (1987), 149–152.

[40] J. Merrien, *Prolongateurs de foncions differentiables d'une variable relle*, J. Math. Pures Appl. (9) 45, (1966), 291–309.

[41] H. Nakano, *Über das System aller stetigen Funktionen auf einen topologischen Raum*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941), 308–310.

[42] T. Natkaniec, *On quasi-continuous functions having Darboux property*, Math. Pannon. 3 (1992), 81–96.

[43] R. J. O'Malley, *Baire* 1, Darboux function*, Proc. Amer. Math. Soc. 60 (1976), 187–192.

[44] E.A. Osba, M. Henriksen, *Essential P-spaces: a generalization of door spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 45 (2004), 509–518.

[45] R.J. Pawlak, *On some class of functions intermediate between the class B_1^* and the family of continuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 19 (2000), 135–144.

[46] T. Radakovič, *Über Darbouxsche und stetige Funktionen*, Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 117–122.

[47] R. Raphael, R.G. Woods, *On RG-spaces and the regularity degree*, Appl. Gen. Topol. 7 (2006), 73–101.

[48] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen *Riesz spaces* I, North-Holland, 1971.

[49] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Vol. I, Monografie Matematyczne Tom 55, PWN Warszawa, 1971.

[50] W. Sieg, *Functions represented as sums of two quasicontinuous functions with a closed graph*, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010), 558–565.

[51] W. Sieg, *Maximal classes for the family of quasi-continuous functions with closed graph*, Dem. Math. 42 (2009), no. 1, 39–43.

[52] S. Solecki, *Decomposing Borel sets and functions and the structure of Baire class 1 functions*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 521–550.

[53] E. Strońska, *On some representations of almost everywhere continuous functions on* $\mathbf{R}^m$, Colloq. Math. (105), No. 2 (2006), 319–331.

[54] P. Szczuka, *Maximal classes for the family of strong Świątkowski functions*, Real Anal. Exchange 28(2), (2003), 429–438.

[55] C.T. Tucker, *Pointwise and order convergence for spaces of continuous functions and spaces of Baire functions*, Czech. Math. J. 34 (109), (1989), 562–569.

[56] J. K. Washenberger, *Perturbation classes of operators on a linear topological space*, Iowa State University, 1996.

[57] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell (Ginn) New York, 1964.

[58] M. Wójtowicz, W. Sieg, *P-spaces and an uncoditional closed graph theorem*, RACSAM 104 (1), (2010), 13–18.