Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Piotr Kasprzak

Twierdzenia o punktach stałych pewnych klas operatorów nieliniowych wraz z ich zastosowaniami

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
prof. UAM dra hab. Dariusza Bugajewskiego

Poznań 2012

Spis treści

Wstęp

Podstawowym zagadnieniem rozważanym w teorii punktu stałego jest pytanie, przy jakich założeniach odwzorowanie f przekształcające zbiór X na pewien jego nadzbiór posiada punkt stały, tj. taki punkt $x \in X$, że $f(x) = x$. Choć teoria punktu stałego swoimi początkami sięga prac takich matematyków jak H. Poincaré czy Ch.-É. Picard, to wydaje się, iż za moment wyodrębnienia się tej teorii jako samodzielnego działu matematyki należy uznać początek wieku XX, kiedy to ukształtował się specyficzny język oraz metody topologii (w szczególności teorii przestrzeni metrycznych) czy analizy funkcjonalnej. Nie sposób nie wspomnieć w tym miejscu takich klasycznych wyników, udowodnionych w omawianym czasie, jak twierdzenie Brouwera (1912) wraz z jego uogólnieniem uzyskanym przez J. P. Schaudera w roku 1930, twierdzenie Banacha o kontrakcji (1922) czy twierdzenie Lefschetza (1926), które łączy teorię punktu stałego z topologią algebraiczną. Szczególnie dynamiczny rozwój teorii punktu stałego nastąpił w drugiej połowie XX wieku i związany był z badaniami dotyczącymi m.in. odwzorowań nierozszerzających, odwzorowań α-zgęszczających oraz ich uogólnień czy wreszcie multifunkcji; należy również nadmienić o badaniach dotyczących interesującej z punktu widzenia niniejszej rozprawy klasy odwzorowań słabo kontrakcyjnych, stanowiącej swoisty pomost pomiędzy odwzorowaniami kontrakcyjnymi a nierozszerzającymi i ściśle związanej z wynikami M. Edelsteina czy M. Furiego i A. Vignolego, a także klasy do niej „dualnej”, składającej się z odwzorowań silnie rozszerzających.

Rozwój teorii punktu stałego od samego początku był związany z licznymi jej zastosowaniami w innych działach matematyki, a także takich naukach jak ekonomia, teoria gier czy informatyka teoretyczna. Metoda kolejnych przybliżeń Picarda oraz jej abstrakcyjne ujęcie przez S. Banacha w postaci twierdzenia o kontrakcji, jak również wyniki J. Leray'a i J. P. Schaudera ukazały, że twierdzenia o punktach stałych stanowią szczególnie użyteczne narzędzie do badania istnienia lub istnienia i jedyności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych i całkowych.

Jednym z typów równań całkowych rozważanych w niniejszej rozprawie są uogólnione równania Fredholma drugiego rodzaju, do badania których można zastosować wyniki dotyczące odwzorowań silnie rozszerzających; drugim typem są natomiast tzw. równania funkcyjno-całkowe Hammersteina, które niejednokrotnie mogą być również traktowane jako zaburzenia nieliniowych równań Hammersteina pewnym składnikiem zależnym od funkcji niewiadomej. Okazuje się, że w przypadku, gdy zaburzenie jest tzw. odwzorowaniem wyższego rzędu, często badanie istnienia i jedyności rozwiązań równania funkcyjno-całkowego można sprowadzić do badania własności odpowiedniego równania bez zaburzenia.

Odwzorowania wyższego rzędu wprowadzone zostały w roku 1970 przez S. I. Grossmana i R. K. Millera w pracy [48]. Rozważane były one również przez D. L. Lovelady'ego w artykule [59], w związku z pewnym twierdzeniem o punkcie stałym (zob. Paragraf 2.4) i zostały zastosowane do badania istnienia i jedyności rozwiązań m.in. dla abstrakcyjnego nieliniowego równania różniczkowego z zaburzeniem, równania różniczkowo-całkowego Fredholma oraz pewnego układu równań całkowych. Według najlepszej wiedzy autora rozprawy, do tej pory nie prowadzono jednak systematycznych badań dotyczących klasy odwzorowań wyższego rzędu samej w sobie. Jest to jednym z celów niniejszej dysertacji.

Głównym celem prezentowanej rozprawy jest udowodnienie pewnych twierdzeń o punktach stałych dla wybranych operatorów nieliniowych, a także zaprezentowanie zastosowań uzyskanych wyników w teorii równań różniczkowych oraz całkowych. W szczególności zainteresowani będziemy rozwiązaniami będącymi funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana oraz w sensie Younga. Okazuje się bowiem, iż niejednokrotnie rozwiązania równań opisujących konkretne fizyczne zagadnienia są właśnie takimi funkcjami. Uwagę kierujemy również ku równaniom różniczkowym i całkowym w przestrzeniach funkcji prawie okresowych, w szczególności w przestrzeni funkcji pseudo prawie okresowych oraz w klasie funkcji prawie okresowych w sensie Levitana. Ponieważ w odróżnieniu od funkcji prawie okresowych oraz prawie automorficznych (a także ich zaburzeń) funkcje prawie okresowe w sensie Levitana mogą być nieograniczone, wiele problemów dotyczących równań nieliniowych w tej klasie funkcji od wielu lat pozostaje otwartych.

Oddzielny rozdział pracy poświęcony jest odwzorowaniom wyższego rzędu. Omówiono w nim zarówno ogólne własności takich odwzorowań, jak również szczegółowo przebadano operatory superpozycji oraz całkowe operatory Hammersteina działające w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji oraz w przestrzeniach funkcji prawie okresowych różnych typów.

Przedłożona rozprawa ma następującą strukturę. Rozdział 1, który dotyczy podstawowych pojęć potrzebnych w dalszych rozdziałach, składa się z pięciu paragrafów. Pierwszy z nich poświęcony jest ustaleniu konwencji oraz oznaczeń. W Paragrafie 1.2 przypominamy definicję tzw. funkcji górnie półciągłych z dołu oraz podajemy pewne ich własności. W Paragrafie 1.3 przytaczamy natomiast podstawowe fakty dotyczące przestrzeni unormowanych częściowo uporządkowanych oraz krat Banacha, a także dowodzimy abstrakcyjny lemat Gronwalla. Kolejne dwa paragrafy dotyczą odpowiednio przestrzeni Banacha funkcji o ograniczonej wariacji (w sensie Jordana oraz w sensie Younga) oraz przestrzeni funkcji prawie okresowych różnych typów. W szczególności w Paragrafach 1.5.1 oraz 1.5.2 przypominamy podstawowe definicje funkcji prawie okresowych oraz podajemy zależności, jakie zachodzą pomiędzy takimi funkcjami. Dowodzimy również fakt stwierdzający, że nie istnieje niezerowa funkcja prawie okresowa będąca funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą. W Paragrafie 1.5.3 przedstawiamy nowe wyniki dotyczące operatora superpozycji oraz operatora splotu w przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Levitana, a także poruszamy zagadnienie związane z określeniem naturalnej topologii w zbiorze takich funkcji. Ostatni paragraf Rozdziału 1 poświęcony jest zaprezentowaniu pewnych wybranych faktów z teorii przestrzeni niearchimedesowych.

Rozdział 2 dotyczy twierdzeń o punktach stałych dla odwzorowań jednowartościowych i składa się z czterech paragrafów. W Paragrafie 2.1 dowodzimy wyniki dla odwzorowań słabo F-kontrakcyjnych oraz silnie F-rozszerzających określonych w przestrzeniach topologicznych. Ponadto, w paragrafie tym przytaczamy pewien wariant twierdzenia Petalasa-Vidalisa dla odwzorowań słabo kontrakcyjnych w unormowanych przestrzeniach niearchimedesowych. W Paragrafie 2.2 prezentujemy twierdzenie typu Möncha pochodzące z pracy [20]. Trzeci paragraf poświęcony jest omówieniu twierdzeń typu Leggetta-Williamsa dla odwzorowań określonych w rzeczywistych częściowo uporządkowanych przestrzeniach Banacha. Z punktu widzenia zastosowań na szczególną uwagę zasługuje jedno z rozszerzeń wspomnianego twierdzenia, w którym warunek istnienia pewnego dodatnio jednorodnego, addytywnego oraz ciągłego operatora zastępuje się warunkiem dotyczącym seminormy. W ostatnim czwartym paragrafie rozważamy twierdzenia typu Lovelady'ego dla odwzorowań będących złożeniem odwzorowania spełniającego warunek Lipschitza z odwzorowaniem wyższego rzędu, zarówno w przypadku archimedesowym jak i niearchimedesowym.

Rozdział 3, składający się z trzech paragrafów, poświęcony jest omówieniu odwzorowań wyższego rzędu. W Paragrafie 3.1 badamy ogólne własności takich odwzorowań, definiujemy rodzinę odwzorowań jednakowo wyższego rzędu i dowodzimy, że punktowa granica ciągu odwzorowań jednakowo wyższego rzędu jest odwzorowaniem wyższego rzędu. Ponadto badamy związki, jakie zachodzą pomiędzy odwzorowaniami wyższego rzędu a odwzorowaniami różniczkowalnymi (w sensie Frécheta). W drugiej części Paragrafu 3.1 zajmujemy się autonomicznymi operatorami superpozycji będącymi odwzorowaniami wyższego rzędu. W kolejnych dwóch paragrafach omawiamy odwzorowania wyższego rzędu określone zarówno w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji (w sensie Jordana oraz w sensie Younga), jak również w przestrzeniach funkcji prawie okresowych różnych typów. W szczególności dowodzimy, iż funkcja analityczna generuje autonomiczny operator superpozycji, który jest odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$, tzn. gdy pierwszy współczynnik rozwinięcia funkcji f w szereg potęgowy jest równy zero. Ponadto, prezentujemy przykład nietrywialnego nieautonomicznego operatora superpozycji, będącego odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji, a także podajemy warunki, przy których nieliniowy operator całkowy Hammersteina jest odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$.

Ostatni czwarty rozdział poświęcony jest zaprezentowaniu przykładowych zastosowań udowodnionych w niniejszej rozprawie twierdzeń o punktach stałych, a także wyników dotyczących odwzorowań wyższego rzędu i funkcji prawie okresowych. Składa się on z czterech paragrafów. W Paragrafie 4.1 dowodzimy, iż przy pewnych założeniach uogólnione równanie Fredholma drugiego rodzaju posiada dokładnie jedno rozwiązanie całkowalne w sensie Lebesgue'a z kwadratem. W Paragrafie 4.2 zajmujemy się natomiast badaniem istnienia ciągłych rozwiązań dodatnich dla całkowego równania Hammersteina. Celem paragrafu trzeciego jest omówienie zagadnienia istnienia oraz jedyności rozwiązań m.in. dla nieliniowego równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem oraz liniowego i semi-liniowego równania różniczkowego odpowiednio w klasie funkcji pseudo prawie okresowych oraz prawie okresowych w sensie Levitana. Ostatni paragraf jest poświęcony natomiast problemowi istnienia oraz jedyności rozwiązania dla mieszanego równania Volterry-Fredholma oraz nieliniowego równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Younga.

Wszystkie wyniki, które pochodzą z prac opublikowanych (w tym również przez autora rozprawy) lub przyjętych do druku zawierają informacje o źródle. Brak takiej informacji oznacza, że dane twierdzenie jest nieopublikowanym oryginalnym wynikiem.

Niniejsza rozprawa została przygotowana częściowo w okresie, gdy autor był stypendystą Fundacji Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu na rok 2011.

PODZIĘKOWANIA

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi prof. UAM dr. hab. Dariuszowi Bugajewskiemu za okazaną życzliwość i wyrozumiałość, liczne dyskusje matematyczne oraz opiekę naukową podczas studiów doktoranckich, a także za cenne uwagi i wskazówki, które w sposób istotny przyczyniły się do ulepszenia kształtu niniejszej rozprawy.

Rozdział 1

Preliminaria

Niniejszy rozdział poświęcony jest ustaleniu notacji oraz przytoczeniu podstawowych faktów, które będą przydatne w dalszej części rozprawy. Należy zwrócić uwagę, iż nie jest to wykaz kompletny i pewne pojęcia oraz wyniki zostaną przedstawione dopiero w rozdziałach, w których będą potrzebne.

1.1. Konwencje i oznaczenia

Przez $\mathbb{R}_+$ oznaczać będziemy zbiór liczb nieujemnych, przez $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, natomiast przez $\mathbb{N}_0$ zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Symbol $:=$ oznacza „równa się z definicji"; będzie on używany nie tylko w definicjach, lecz również w rozumowaniach, celem podkreślenia, że dana równość wynika wprost z definicji. Stosowany niekiedy zapis $x{=:}y$ jest oczywiście równoznaczny z $y{:=}x$.

Symbolami $\preccurlyeq$ oraz $\succcurlyeq$ oznaczać będziemy zarówno relację częściowego porządku, relację w zbiorze skierowanym, jak również dowolną dwuargumentową relację przechodnią w abstrakcyjnym zbiorze. Za każdym razem jednak bądź będziemy wyraźnie pisać, jakie własności mają relacje $\preccurlyeq$ i $\succcurlyeq$, bądź będzie to wynikało z kontekstu. Literami Λ i M będziemy oznaczać dowolne zbiory indeksów, w tym także zbiory skierowane, gdy mowa będzie o ciągach uogólnionych.

Choć przez przestrzeń topologiczną rozumiemy parę uporządkowaną $(X, \mathfrak{T}_X)$, składającą się z niepustego zbioru X, w którym określono topologię $\mathfrak{T}_X$, często dla prostoty będziemy pisać „przestrzeń topologiczna X". Analogicznie, zamiast „przestrzeń metryczna (X, d_X)" czy „przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|_X)$" będziemy zwykle pisać „przestrzeń metryczna X" oraz „przestrzeń unormowana X"; wówczas metrykę oraz normę w X będziemy oznaczać odpowiednio d_X i $\|\cdot\|_X$ lub po prostu d i $\|\cdot\|$.

Podzbiory przestrzeni topologicznych będziemy zawsze (o ile nie zaznaczono inaczej) rozważać z topologią podprzestrzeni.

Domknięcie zbioru A będziemy oznaczać przez $\overline{A}$.

Przez $B(A)$, gdzie A jest dowolnym niepustym zbiorem, będziemy rozumieć przestrzeń Banacha funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych określonych na A, z normą supremalną $\|\cdot\|_\infty$. Symbolem $BC(X)$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, będziemy oznaczać podprzestrzeń unormowaną przestrzeni $B(X)$ składającą się z funkcji ciągłych; w przypadku, gdy X jest przestrzenią zwartą, zgodnie z tradycją zamiast $BC(X)$ będziemy pisać $C(X)$. Zamiast $C([a,b])$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, będziemy pisać $C[a,b]$. Dodajmy, iż symbolu $\|\cdot\|_\infty$ będziemy również używać, niekoniecznie w kontekście przestrzeni unormowanych, w odniesieniu do pojedynczych funkcji (także nieograniczonych) w jego standardowym znaczeniu, tj. $\|f\|_\infty := \sup_{t\in A}|f(t)|$ dla $f\colon A \to \mathbb{R}$; w przypadku funkcji nieograniczonej przyjmujemy $\|f\|_\infty := +\infty$.

Jeżeli $X \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a oraz $0 < p < +\infty$, to przez $L^p(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń liniową (klas) funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na X i całkowalnych w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą. Oczywiście, gdy $1 \leqslant p < +\infty$, $L^p(X)$ jest przestrzenią Banacha z p-tą normą całkową $\|\cdot\|_p$. Zamiast $L^p([a,b])$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$, będziemy pisać $L^p[a,b]$.

Niezależnie od wymiaru przestrzeni, miarę Lebesgue'a zbioru mierzalnego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać $\operatorname{meas}\Omega$.

Kulę domkniętą w przestrzeni metrycznej lub unormowanej X o środku w punkcie x oraz promieniu $r > 0$ (z wyjątkiem przestrzeni $BV_\phi[0,1]$) będziemy oznaczać $B_X(x,r)$; w przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Younga będziemy pisać $B_\phi(x,r)$. Dla prostoty zamiast $B_\mathbb{R}(x,r)$ będziemy również pisać $[x-r, x+r]$. Ponadto dla $r = +\infty$ przyjmujemy $B_X(0,r) := X$.

W rzeczywistej częściowo uporządkowanej przestrzeni unormowanej X przekrój stożka C_X z kulą $B_X(0,r)$ będziemy oznaczać $C_X(0,r)$.

Jeżeli X jest zbiorem odwzorowań $x\colon A \to B$, gdzie A, B są pewnymi niepustymi zbiorami, to *nieautonomicznym operatorem superpozycji* F, generowanym przez $f\colon A \times B \to B$, nazywamy przekształcenie, które każdemu $x \in X$ przyporządkowuje odwzorowanie $F(x)$ dane wzorem $F(x)(t) := f(t, x(t))$ dla $t \in A$. Operator superpozycji F nazywamy *autonomicznym*, gdy jest generowany przez odwzorowanie $f\colon B \to B$.

Symbolem f^n, gdzie $n \in \mathbb{N}$, zależnie od kontekstu, będziemy oznaczać n-tą iterację odwzorowania $f\colon X \to X$, jak również funkcję zdefiniowaną wzorem $f^n(t) := [f(t)]^n$ dla $t \in X$, gdzie $f\colon X \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f\colon X \to Y_f$ i $g\colon X \to Y_g$ są odwzorowaniami, to będziemy pisać $f = g$, gdy $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in X$. W przypadku, gdy $Y_f := \mathbb{R}$, będziemy pisać $f \equiv 0$, by podkreślić, iż $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Często dla prostoty będziemy opuszczać niektóre nawiasy w zapisie wzorów funkcji (odwzorowań); i tak na przykład zamiast $f((x,y))$ będziemy pisać $f(x,y)$.

Literą α oznaczać będziemy *miarę niezwartości Kuratowskiego*, tj. funkcję określoną na rodzinie ograniczonych podzbiorów przestrzeni metrycznej wzorem

$$\alpha(A) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \begin{array}{r} \text{istnieje skończone pokrycie zbioru } A \\ \text{zbiorami o średnicy mniejszej niż } \varepsilon \end{array} \right\}.$$

W przypadku, gdy A jest zbiorem nieograniczonym przyjmujemy $\alpha(A) := +\infty$. (Podstawowe fakty dotyczące miary niezwartości Kuratowskiego, wykorzystywane w niniejszej rozprawie można znaleźć w pracy [19].) W analogiczny sposób wykorzystując pojęcie ε-sieci można zdefiniować *miarę niezwartości Hausdorffa* χ.

1.2. Odwzorowania górnie półciągłe z dołu

W niniejszym paragrafie podamy definicję oraz podstawowe własności funkcji górnie półciągłych z dołu. Warto w tym miejscu wspomnieć, iż funkcje górnie półciągłe z dołu zostały wprowadzone w roku 2006 w pracy [30] w związku z badaniami dotyczącymi twierdzeń typu „minimax”.

Definicja 1.1 ([30, Definition 4.3])**.** Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ nazywamy *górnie półciągłą z dołu w punkcie* $x \in X$, jeżeli dla dowolnego zbieżnego do x ciągu uogólnionego $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ elementów przestrzeni X takiego, że $f(x_{\lambda_1}) \leqslant f(x_{\lambda_2})$ dla $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_1$, zachodzi $f(x) \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$.

Uwaga 1.1. Zauważmy, iż granica $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$ występująca w Definicji 1.1 zawsze istnieje (w sensie właściwym lub niewłaściwym) (por. [52, Problem F (b), s. 77]).

Definicja 1.2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ nazywamy *górnie półciągłą z dołu*, jeżeli jest ona górnie półciągła z dołu w każdym punkcie przestrzeni X.

Stwierdzenie 1.1. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Każda funkcja półciągła z dołu jest górnie półciągła z dołu.*

Dowód. Niech $x \in X$ oraz niech $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ będzie zbieżnym do x ciągiem uogólnionym elementów przestrzeni X takim, że $f(x_{\lambda_1}) \leqslant f(x_{\lambda_2})$ dla $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_1$. Z Uwagi 1.1 wynika, iż granica $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$ istnieje. Pokażemy, że granica ta jest właściwa.

Przypuśćmy nie wprost, że $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda) = -\infty$. Istnieje wtedy taki indeks $\lambda_0 \in \Lambda$, że $f(x_\lambda) \leqslant f(x) - 1$ dla $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$. Stąd

$$x_\lambda \in A := \{y \in X : f(y) \leqslant f(x) - 1\} \qquad \text{dla } \lambda_0 \preccurlyeq \lambda.$$

Z półciągłości z dołu funkcji f wynika, iż A jest zbiorem domkniętym (por. [38, s. 152]), a zatem $x \in A$, gdyż $\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda) > -\infty$.

Obierzmy $\varepsilon > 0$. Rozumując analogicznie jak w pierwszej części dowodu, można pokazać, że

$$x \in \Big\{y \in X : f(y) \leqslant \varepsilon + \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)\Big\},$$

co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ dowodzi, że $f(x) \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$. □

Uwaga 1.2 ([30, Example 4.4])**.** Twierdzenie odwrotne do Stwierdzenia 1.1 nie jest prawdziwe. Można bowiem wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \geqslant 0, \\ x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest górnie półciągła z dołu, lecz nie jest półciągła z dołu.

Wykażemy teraz dwa lematy charakteryzujące pewne własności funkcji górnie półciągłych z dołu. Pierwszy ze wspomnianych lematów jest odpowiednikiem twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów, natomiast drugi lemat dotyczy złożenia funkcji górnie półciągłej z dołu z odwzorowaniem ciągłym.

Lemat 1.1 ([30, Lemma 4.5])**.** *Jeżeli X jest zwartą przestrzenią topologiczną, natomiast $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją górnie półciągłą z dołu, to istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$.*

Dowód. Z definicji kresu dolnego wynika, że w zbiorze X istnieje ciąg uogólniony $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ taki, że

$$f(x_{\lambda_1}) \leqslant f(x_{\lambda_2}) \text{ dla } \lambda_2 \preccurlyeq \lambda_1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda) = \inf_{x\in X} f(x). \tag{1.1}$$

Ponieważ X jest przestrzenią zwartą, więc bez straty ogólności, możemy założyć, że ciąg uogólniony $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ jest zbieżny do pewnego elementu $x_0 \in X$. (W przeciwnym przypadku $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ma podciąg uogólniony spełniający (1.1) – por. [84, Section 11 oraz Theorem 17.4].) Zatem wobec górnej półciągłości z dołu funkcji f, otrzymujemy $f(x_0) \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$. Stąd $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$. □

Lemat 1.2 ([26, Lemma 2])**.** *Niech X oraz Y będą przestrzeniami topologicznymi. Jeżeli odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest ciągłe, a funkcja $g\colon Y \to \mathbb{R}$ jest górnie półciągła z dołu, to złożenie $h{:=}g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ jest funkcją górnie półciągłą z dołu.*

Dowód. Niech $x \in X$ oraz niech $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ będzie dowolnym zbieżnym do x ciągiem uogólnionym w X takim, że $h(x_{\lambda_1}) \leqslant h(x_{\lambda_2})$ dla $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_1$. Wtedy kładąc $y_\lambda{:=}f(x_\lambda)$ oraz $y{:=}f(x)$ mamy $\lim_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda = y$ oraz $g(y_{\lambda_1}) \leqslant g(y_{\lambda_2})$ dla $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_1$. Stąd, na mocy założeń, otrzymujemy $h(x) = g(y) \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} g(y_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda} h(x_\lambda)$, co kończy dowód. □

Uwaga 1.3 ([26, Remark 2])**.** Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym, a $F\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcją górnie półciągłą z dołu. Na mocy Lematu 1.2 funkcja $x \mapsto F(x, f(x))$ jest górnie półciągła z dołu.

1.3. Przestrzenie unormowane częściowo uporządkowane

W tym paragrafie przypomnimy pewne pojęcia z teorii przestrzeni unormowanych częściowo uporządkowanych. W szczególności sformułujemy oraz udowodnimy abstrakcyjny lemat Gronwalla (zob. Twierdzenie 1.1), który następnie wykorzystamy w Paragrafie 4.3.1 do dowodu istnienia rozwiązania nieliniowego równania całkowego Hammersteina.

Definicja 1.3. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Niepusty, domknięty i wypukły zbiór $C_X \subset X$ nazywamy *stożkiem*, gdy spełnione są następujące warunki:

(a) jeżeli $x \in C_X$, to $ax \in C_X$ dla dowolnego $a \geqslant 0$;

(b) jeżeli $x \in C_X$ oraz $-x \in C_X$, to $x = 0$.

Uwaga 1.4. Każdy stożek w rzeczywistej przestrzeni unormowanej X wyznacza relację częściowego porządku $\preccurlyeq$ zdefiniowaną w następujący sposób

$$x \preccurlyeq y \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad y - x \in C_X. \tag{1.2}$$

Oczywiście, relacja $\preccurlyeq$ zdefiniowana powyżej jest zgodna ze strukturą liniową przestrzeni X, tzn. jeżeli $x, y \in X$ są takie, że $x \preccurlyeq y$, to $x + z \preccurlyeq y + z$ dla dowolnego $z \in X$ oraz $ax \preccurlyeq ay$ dla dowolnej liczby nieujemnej a.

W dalszej części niniejszej rozprawy, ilekroć będzie mowa o relacji częściowego porządku w związku z pewnym stożkiem, będziemy zakładać, że została ona określona wzorem (1.2).

Definicja 1.4. Rzeczywistą przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$, w której określono relację częściowego porządku $\preccurlyeq$, nazywamy *kratą Banacha*, jeżeli:

(a) $(X, \preccurlyeq)$ jest *kratą*, tzn. dowolne dwa elementy $x, y \in X$ posiadają najmniejsze ograniczenie górne $\sup\{x, y\}$ oraz największe ograniczenie dolne $\inf\{x, y\}$;

(b) relacja $\preccurlyeq$ jest zgodna ze strukturą liniową przestrzeni X;

(c) norma $\|\cdot\|$ jest *monotoniczna*, tzn. dla dowolnych punktów $x, y \in X$ z warunku $|x| \preccurlyeq |y|$ wynika, że $\|x\| \leqslant \|y\|$, gdzie $|x| := \sup\{x, -x\}$.

Przypomnijmy dobrze znany

Lemat 1.3. *Przestrzeń $BC(\mathbb{R})$ jest kratą Banacha ze stożkiem*

$$C_{BC}:=\{x \in BC(\mathbb{R}) : x(t) \geqslant 0 \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dowód. Zauważmy, iż zbiór C_{BC} jest stożkiem w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R})$, który wyznacza relację częściowego porządku $\preccurlyeq$ zdefiniowaną następująco

$$x \preccurlyeq y \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad x(t) \leqslant y(t) \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Z Uwagi 1.4 wynika, iż porządek $\preccurlyeq$ jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $BC(\mathbb{R})$, a ponadto dla dowolnych elementów $x, y \in BC(\mathbb{R})$ funkcje

$$t \mapsto \min\{x(t), y(t)\} \qquad \text{oraz} \qquad t \mapsto \max\{x(t), y(t)\}$$

są odpowiednio największym ograniczeniem dolnym i najmniejszym ograniczeniem górnym elementów x, y. Pozostaje więc wykazać, iż norma $\|\cdot\|_\infty$ jest monotoniczna. Ponieważ dla $x \in BC(\mathbb{R})$ mamy $|x|(t) = \max\{x(t), -x(t)\} = |x(t)|$, więc z warunku $|x| \preccurlyeq |y|$ wynika, że $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Stąd $\|x\|_\infty \leqslant \|y\|_\infty$. □

Definicja 1.5. Operator liniowy S w przestrzeni unormowanej X ze stożkiem C_X nazywamy dodatnim, jeżeli $Sx \in C_X$ dla $x \in C_X$.

Twierdzenie 1.1 (Abstrakcyjny lemat Gronwalla, [46, Lemma 1.9.1])**.** *Niech $(X, \preccurlyeq)$ będzie kratą Banacha ze stożkiem C_X oraz niech $x, y \in C_X$. Załóżmy ponadto, że S jest takim dodatnim oraz ograniczonym operatorem liniowym działającym w przestrzeni X, że $r_s(S) < 1$, gdzie r_s oznacza promień spektralny operatora S. Jeżeli $x \preccurlyeq y + Sx$, to $x \preccurlyeq z$, gdzie z jest rozwiązaniem równania $z = y + Sz$.*

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $T\colon C_X \to C_X$ wzorem $T(\xi) = y + S\xi$. Ponieważ $x \preccurlyeq T(x)$, więc $T^n(x) \preccurlyeq T^{n+1}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}_0$, gdzie $T^0(x):=x$. Istotnie, jeżeli $T^n(x) \preccurlyeq T^{n+1}(x)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$, to $ST^n(x) \preccurlyeq ST^{n+1}(x)$, a zatem

$$T^{n+1}(x) = y + ST^n(x) \preccurlyeq y + ST^{n+1}(x) = T^{n+2}(x).$$

Tym samym

$$x \preccurlyeq T^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} S^k y + S^n x \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Wobec domkniętości zbioru C_X oraz faktu, że $r_s(S) < 1$, otrzymujemy (por. [1, Twierdzenie 2.9, s. 466])

$$x \preccurlyeq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} S^k y + S^n x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} S^k y = (I - S)^{-1} y = z,$$

co kończy dowód. □

1.4. Przestrzenie funkcji o ograniczonej wariacji

Celem tego krótkiego paragrafu jest ustalenie terminologii oraz oznaczeń związanych z funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana oraz w sensie Younga.

Ze względu na późniejsze zastosowania ograniczymy się do przedziału $[0,1]$.

Definicja 1.6. Niech x będzie funkcją o wartościach rzeczywistych zdefiniowaną na przedziale $[0,1]$. Liczbę

$$\bigvee_0^1(x) := \sup \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|,$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$, nazywamy *wahaniem* lub *wariacją* (*w sensie Jordana*) funkcji x na przedziale $[0,1]$.

Uwaga 1.5. Przestrzeń liniowa

$$BV[0,1] = \left\{ x\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \bigvee_0^1(x) < +\infty \right\}$$

wraz z normą $\|x\|_{BV} := |x(0)| + \bigvee_0^1(x)$ jest przestrzenią Banacha (zob [1, Twierdzenie 6.14, s. 133]). Elementy tej przestrzeni nazywamy funkcjami o ograniczonej wariacji lub BV-funkcjami, a rozwiązania równań całkowych należące do tej przestrzeni BV-rozwiązaniami.

Uwaga 1.6. Każda funkcja o ograniczonej wariacji jest funkcją ograniczoną. Ponadto jest jasne, że $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_{BV}$ dla każdego $x \in BV[0,1]$.

Lemat 1.4 (por. [3, Section 6.5])**.** *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lokalnie lipschitzowska, tzn. spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale zwartym. Wtedy autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję f, działa w przestrzeni $BV[0,1]$.*

Dowód. Niech $x \in BV[0,1]$. Z założenia oraz Uwagi 1.6 wynika, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[-\|x\|_{BV}, \|x\|_{BV}]$ z pewną stałą L. Niech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[0,1]$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Big|F(x)(t_i) - F(x)(t_{i-1})\Big| &= \sum_{i=1}^{n}\Big|f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))\Big| \\ &\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|x(t_i) - x(t_{i-1})| \leqslant L\bigvee_0^1(x),\end{aligned}$$

a zatem $\bigvee_0^1(F(x)) < +\infty$, co kończy dowód lematu. □

Uwaga 1.7. M. Josephy pokazał, że lokalna lipschitzowskość funkcji f jest również warunkiem koniecznym, by autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, działał w przestrzeni $BV[0,1]$ (zob. [3, Theorem 6.13; 51]). W przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji (zob. Definicja 1.8 poniżej) analogiczny wynik uzyskali J. Ciemnoczołowski oraz W. Orlicz (zob. [31]). Dodajmy, iż twierdzenie Ciemnoczołowskiego-Orlicza w przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonej uogólnionej ϕ-wariacji udowodniono w pracy [18].

Przejdziemy teraz do funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Younga.

Definicja 1.7. Funkcję $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nazwiemy *ϕ-funkcją*, jeżeli jest ona ciągła, nieograniczona, niemalejąca oraz taka, że $\phi(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$.

Definicja 1.8. Niech x będzie taką funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na przedziale $[0,1]$, że $x(0) = 0$. Ponadto niech ϕ będzie ϕ-funkcją. Liczbę

$$\operatorname{var}_\phi(x) := \sup \sum_{i=1}^{n} \phi(|x(t_i) - x(t_{i-1})|),$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$, nazywamy *ϕ-wariacją* (lub *wariacją w sensie Younga*) funkcji x na przedziale $[0,1]$.

Uwaga 1.8. Jeżeli ϕ jest wypukłą ϕ-funkcją (a tylko takie będziemy rozważać w niniejszej rozprawie), to przestrzeń

$$BV_\phi[0,1] = \{x\colon [0,1] \to \mathbb{R} : x(0) = 0 \text{ oraz } \operatorname{var}_\phi(\lambda x) < +\infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

wyposażona w normę

$$\|x\|_\phi := \inf\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi(x/\lambda) \leqslant 1\}$$

jest przestrzenią Banacha (zob. [66, Theorem 3.21]). Elementy tej przestrzeni nazywamy BV_ϕ-funkcjami.

Uwaga 1.9. Każda BV_ϕ-funkcja jest ograniczona oraz mierzalna w sensie Lebesgue'a (por. [64, Properties 10.7 (a) oraz Theorem 10.9]). Ponadto, istnieje taka liczba $c_\phi > 0$, że $\|x\|_\infty \leqslant c_\phi \|x\|_\phi$ dla każdego $x \in BV_\phi[0,1]$. Istotnie, ponieważ

$$\phi(\|x\|_\infty) = \sup_{t\in[0,1]} \phi(|x(t)|) \leqslant \operatorname{var}_\phi(x) \quad \text{dla } x \in BV_\phi[0,1],$$

więc

$$\|x\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi(\lambda^{-1}x) \leqslant 1\Big\} \geqslant \inf\Big\{\lambda > 0 : \phi(\lambda^{-1}\|x\|_\infty) \leqslant 1\Big\} = c_\phi^{-1}\|x\|_\infty,$$

gdzie

$$0 < c_\phi^{-1} := \inf\Big\{\lambda > 0 : \phi(\lambda^{-1}) \leqslant 1\Big\} < +\infty. \tag{1.3}$$

1.5. Przestrzenie funkcji prawie okresowych

Niniejszy paragraf poświęcimy omówieniu różnych przestrzeni funkcji prawie okresowych. W pierwszej części podamy definicję podstawowych klas funkcji prawie okresowych wraz z pewnymi ich własnościami. W szczególności opiszemy związki zachodzące pomiędzy różnymi typami funkcji prawie okresowych oraz ich uogólnieniami. W części drugiej paragrafu przedstawimy nowe wyniki dotyczące funkcji prawie okresowych. Szczególną uwagę poświęcimy operatorom splotu oraz operatorom superpozycji w przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Levitana, a także omówimy zagadnienie dotyczące istnienia funkcji prawie okresowych całkowalnych w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą.

1.5.1. Definicje oraz podstawowe fakty. Zaczniemy od sformułowania, pochodzącej od Bohra, definicji funkcji prawie okresowej.

Definicja 1.9. Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *prawie okresową*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba dodatnia l_ε, że każdy przedział otwarty o długości l_ε zawiera co najmniej jeden punkt τ taki, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Zbiór funkcji prawie okresowych będziemy oznaczać symbolem $AP(\mathbb{R})$.

Uwaga 1.10. Funkcje prawie okresowe są ograniczone oraz jednostajnie ciągłe (zob. [68, Theorem 3.1.4 i) oraz Theorem 3.1.5; 81, Twierdzenie 1.1]).

Twierdzenie 1.2 (Kryterium Bochnera, [81, Twierdzenie 1.4])**.** *Funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest prawie okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu liczb rzeczywistych $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wyrwać podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $(f(t+\tau_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie względem t na $\mathbb{R}$.*

Uogólnieniem funkcji prawie okresowych są, wprowadzone przez Bochnera na początku lat 60. ubiegłego wieku, funkcje prawie automorficzne (dziś zwane funkcjami prawie automorficznymi w sensie Bochnera). Co ciekawe, Bochner, jak sam pisze w pracy [10], już na kilka lat przed swoimi studiami nad prawie okresowością, zajmował się funkcjami prawie automorficznymi (mimo, iż tak ich wtedy nie nazywał) w związku z badaniami dotyczącymi geometrii różniczkowej (por. [9]).

Definicja 1.10 ([11, Definition 2])**.** Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *prawie automorficzną w sensie Bochnera* (w skrócie BAA), jeżeli z każdego ciągu liczb rzeczywistych $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wyrwać podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że granica punktowa

$$g(t) := \lim_{k\to\infty} f(t+\tau_{n_k})$$

istnieje dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} g(t-\tau_{n_k}) = f(t) \qquad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Przez $BAA(\mathbb{R})$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji prawie automorficznych w sensie Bochnera.

Uwaga 1.11. Funkcje prawie automorficzne w sensie Bochnera są ograniczone (zob. [68, Theorem 2.1.3 iv)]). Ponadto każda funkcja prawie okresowa jest prawie automorficzna w sensie Bochnera (zob. [68, Remark 2.1.2]). Dodajmy, iż odwrotna implikacja nie zachodzi. Można bowiem wykazać, iż funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\cos t + \cos\sqrt{2}t}\right) \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

jest prawie automorficzna w sensie Bochnera, ale nie jest prawie okresowa (zob. [6, Example 3.1]). Okazuje się bowiem, iż funkcja f nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Uwaga 1.12. Funkcje ciągłe spełniające warunek z Definicji 1.10 wyrażony w terminach ciągów uogólnionych nazywamy *prawie automorficznymi w sensie Veecha* (zob. [85]). Nadmieńmy, że funkcje prawie automorficzne w sensie Veecha są również ograniczone (por. [5, s. 430]).

Uwaga 1.13. Każda funkcja prawie automorficzna w sensie Bochnera jest prawie automorficzna w sensie Veecha (zob. [82, Proposition 4.3]). Milnes [63, s. 243] pokazał jednak, że implikacja odwrotna nie zachodzi. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(t) = \sin(2^k\pi t) \qquad \text{dla } t \in V_k,\ k \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k, \qquad V_k := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Big([0,1) + s_k + 2^k m\Big), \qquad s_k := \frac{(-2)^{k-1}-1}{3}$$

jest prawie automorficzna w sensie Veecha, lecz nie jest prawie automorficzna w sensie Bochnera.

Zdefiniujemy teraz najogólniejszą klasę funkcji prawie okresowych, które będziemy rozważać w niniejszej rozprawie, tj. klasę funkcji prawie okresowych w sensie Levitana.

Definicja 1.11 ([74, s. 220])**.** Zbiór $E \subset \mathbb{R}$ nazywamy *relatywnie gęstym*, jeżeli istnieje taki zbiór skończony $F \subset \mathbb{R}$, że $F + E = \mathbb{R}$.

Definicja 1.12 (por. [74, Definition 2])**.** Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *prawie okresową w sensie Levitana* (w skrócie *LAP*), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnego skończonego zbioru $M \subset \mathbb{R}$ istnieje relatywnie gęsty zbiór E w $\mathbb{R}$ taki, że

$$E - E \subset E(f, \varepsilon, M) := \{\tau \in \mathbb{R} : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \in M\}\,.$$

Definicja 1.13 (zob. [5, s. 429])**.** *Topologią Bohra* na $\mathbb{R}$ nazywamy najsilniejszą topologię, słabszą od topologii euklidesowej, w której $\mathbb{R}$ jest całkowicie ograniczoną grupą topologiczną.

Równoważne określenia funkcji *LAP* podaje następujące

Twierdzenie 1.3 ([74, Satz 3 oraz Satz 9; 75, Satz 1.2])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest funkcją prawie okresową w sensie Levitana;*

(ii) *f jest funkcją ciągłą w topologii Bohra, tzn. funkcja f jest ciągła jako funkcja z $\mathbb{R}_B$ do $\mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R}_B$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych rozważany z topologią Bohra;*

(iii) *z każdego ciągu liczb rzeczywistych $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wyrwać podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$\lim_{\min\{l,k\}\to\infty} f(t + \tau_{n_k} - \tau_{n_l}) = f(t) \qquad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R},$$

to znaczy dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(t + \tau_{n_k} - \tau_{n_l}) - f(t)| < \varepsilon$ dla wszystkich $k, l \geqslant m$.

Uwaga 1.14. M. Alfsen i P. Holm dowiedli, że klasa funkcji prawie okresowych o wartościach liczbowych pokrywa się z klasą funkcji jednostajnie ciągłych względem pewnej jednostajności na $\mathbb{R}$, która indukuje topologię Bohra (por. [2, Theorem 2]). Tym samym każda funkcja prawie okresowa jest prawie okresowa w sensie Levitana.

Przykład 1.1. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną poniższym wzorem

$$f(t) = \frac{1}{2 + \cos t + \cos\sqrt{2}t} \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

Można udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona oraz prawie okresowa w sensie Levitana (zob. np. [56, s. 144; 81, Przykład 5.1]).

Przez $LAP(\mathbb{R})$ oznaczać będziemy zbiór funkcji prawie okresowych w sensie Levitana, a przez $LAP_b(\mathbb{R})$ jego podzbiór składający się z funkcji ograniczonych.

Uwaga 1.15. Okazuje się, że $LAP_b(\mathbb{R}) = AA(\mathbb{R})$, gdzie $AA(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji prawie automorficznych w sensie Veecha (szczegóły zob. [5, s. 430; 42, Satz 3; 63, Theorem 13]).

Szczególnie interesujące z punktu widzenia teorii równań nieliniowych, wydają się być zburzenia funkcji prawie okresowych funkcjami ciągłymi o pewnych dodatkowych własnościach. Poniżej definiujemy dwie klasy takich funkcji.

Definicja 1.14 ([44])**.** Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *asymptotycznie prawie okresową*, jeżeli można ją przedstawić w postaci $f = \varphi + \psi$, gdzie funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest prawie okresowa, a funkcja $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia poniższy warunek

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = 0.$$

Funkcje φ oraz ψ nazywamy odpowiednio *częścią główną* oraz *częścią korygującą* funkcji f.

Uwaga 1.16. Rozkład funkcji asymptotycznie prawie okresowej na część główną oraz korygującą jest jednoznaczny (zob. [24, Theorem 2.6] oraz por. [28, Theorem 5.3]). Ponadto, przestrzeń liniowa $AAP(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji asymptotycznie prawie okresowych jest przestrzenią Banacha z normą $\|f\|_{AAP} := \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$, gdzie φ oraz ψ są odpowiednio częścią główną oraz korygującą funkcji f.

Definicja 1.15 ([89, Definition 2])**.** Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *pseudo prawie okresową*, jeżeli można ją przedstawić w postaci $f = \varphi + \psi$, gdzie funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest prawie okresowa, a funkcja $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona oraz spełnia poniższy warunek

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\psi(s)| \mathrm{d}s = 0.$$

Funkcje φ oraz ψ nazywamy odpowiednio *częścią główną* oraz *częścią ergodyczną* funkcji f.

Zbiór funkcji pseudo prawie okresowych będziemy oznaczać symbolem $PAP(\mathbb{R})$.

Twierdzenie 1.4 ([90, Lemma 1.3])**.** *Jeżeli funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest częścią główną funkcji $f \in PAP(\mathbb{R})$, to $\varphi(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$.*

Uwaga 1.17. Korzystając z Twierdzenia 1.4 można wykazać, że rozkład funkcji pseudo prawie okresowej na część główną oraz ergodyczną jest jednoznaczny (zob. również [91, Theorem 1.5]).

Uwaga 1.18. Niech $X \in \{AP(\mathbb{R}),\ BAA(\mathbb{R}),\ LAP_b(\mathbb{R}),\ PAP(\mathbb{R})\}$. Przestrzeń liniowa X z normą supremalną oraz mnożeniem funkcji określonym punktowo jest przemienną algebrą Banacha z jedynką (por. [41, Theorem 1.9; 69, Section 1.6; 74, Corollar, s. 227; 81, Twierdzenie 1.5; 90, Theorem 1.4]).

Na zakończenie tego paragrafu sformułujemy dwa twierdzenia, które odgrywają istotną rolę w teorii funkcji prawie okresowych.

Twierdzenie 1.5. *Niech X oznacza jedną z przestrzeni: $AP(\mathbb{R})$, $BAA(\mathbb{R})$, $LAP_b(\mathbb{R})$, $LAP(\mathbb{R})$, $AAP(\mathbb{R})$, $PAP(\mathbb{R})$ oraz niech $f \in X$. Jeżeli funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f \in X$.*

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [11, Theorem 2; 28, Theorem 5.6; 58, Theorem 2.1; 68, Theorem 2.1.5; 74, Corollar (vi); 81, Twierdzenie 1.2].

Stwierdzenie 1.2 (por. [5, Proposition 6.D.1; 81, Twierdzenie 1.7])**.** *Niech X oznacza jedną z przestrzeni: $AP(\mathbb{R})$, $BAA(\mathbb{R})$, $LAP_b(\mathbb{R})$ oraz niech $f \in X$. Wtedy funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ dla $t \in \mathbb{R}$ należy do X, o ile $F \in BC(\mathbb{R})$.*

1.5.2. PRZESTRZENIE FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH, ASYMPTOTYCZNIE PRAWIE OKRESOWYCH ORAZ PSEUDO PRAWIE OKRESOWYCH. Celem niniejszego paragrafu jest zbadanie pewnych własności funkcji prawie okresowych oraz szczegółowe omówienie związków zachodzących pomiędzy funkcjami będącymi pewnymi zaburzeniami funkcji prawie okresowych. W szczególności udowodnimy, że klasa funkcji asymptotycznie prawie okresowych jest podklasą klasy funkcji pseudo prawie okresowych. W paragrafie tym wykażemy również prawdziwość wysuniętego w roku 2007 przez T. Diaganę przypuszczenia, dotyczącego nieistnienia niezerowych funkcji prawie okresowych całkowalnych w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą ($1 < p < +\infty$) (zob. [35, s. 46]).

Twierdzenie 1.6 ([25, Theorem 9])**.** *Każda funkcja asymptotycznie prawie okresowa jest pseudo prawie okresowa. Odwrotna implikacja nie zachodzi.*

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją asymptotycznie prawie okresową z częścią główną $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz częścią korygującą $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ponieważ funkcja ψ jest ciągła oraz ograniczona, by udowodnić pierwszą część twierdzenia, wystarczy wykazać, że

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\psi(s)|\mathrm{d}s = 0.$$

Wobec faktu, iż ψ jest częścią korygującą funkcji f, dla ustalonej liczby dodatniej ε, istnieje taka liczba $T_1 > 0$, że $|\psi(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dla wszystkich $t \notin [-T_1, T_1]$, a zatem dla $T > \max\{T_1, 2\varepsilon^{-1}T_1 \|\psi\|_\infty\}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}|\psi(s)|\mathrm{d}s &= \int_{-T}^{-T_1}|\psi(s)|\mathrm{d}s + \int_{-T_1}^{T_1}|\psi(s)|\mathrm{d}s + \int_{T_1}^{T}|\psi(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(T - T_1) + 2T_1\|\psi\|_\infty + \frac{1}{2}\varepsilon(T - T_1) \\ &= \varepsilon(T - T_1) + 2T_1\|\psi\|_\infty .\end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon(T - T_1)}{2T} + \frac{T_1\|\psi\|_\infty}{T} \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad T > \max\{T_1, 2\varepsilon^{-1}T_1\|\psi\|_\infty\},$$

co kończy pierwszą część dowodu.

Udowodnimy teraz, że istnieje funkcja pseudo prawie okresowa, która nie jest asymptotycznie prawie okresowa.

Niech funkcja $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana poniższym wzorem

$$g(t) = \begin{cases} 4t & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ -4t + 4 & \text{dla } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną następująco

$$f(t) = \begin{cases} g(t - 10^n) & \text{dla } t \in [10^n, 10^n + 1] \text{ oraz } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście funkcja f jest ciągła oraz ograniczona, a ponadto, dla $T > 1$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2T}\int_{0}^{10^{[\log_{10}T]+1}} f(s)\mathrm{d}s = \frac{[\log_{10}T]}{2T}.$$

Stąd $f \in PAP(\mathbb{R})$. Gdyby $f \in AAP(\mathbb{R})$, to istniałby rozkład funkcji f na część główną $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz część korygującą $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ponieważ $f = \varphi + \psi$, więc $f - \psi \in AP(\mathbb{R})$, a zatem na mocy Twierdzenia 1.2 istnieje podciąg $(-n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|f(t - n_k) - \psi(t - n_k) - g(t)\Big| \to 0, \qquad \text{gdy } k \to \infty, \tag{1.4}$$

gdzie $g \in BC(\mathbb{R})$ jest pewną funkcją. Zauważmy, że funkcja g jest tożsamościowo równa 0. Rzeczywiście, ponieważ

$$\lim_{s\to-\infty} f(s) = \lim_{s\to-\infty} \psi(s) = 0,$$

więc, dla każdego $t \in \mathbb{R}$, otrzymujemy

$$g(t) = \lim_{k\to\infty}\Big[f(t-n_k) - \psi(t-n_k)\Big] = 0.$$

W konsekwencji, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, mamy

$$|f(t)-\psi(t)| = |f[(t+n_k)-n_k] - \psi[(t+n_k)-n_k]| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s-n_k)-\psi(s-n_k)|,$$

co wobec (1.4) dowodzi, że $f = \psi$. Jednakże, $\lim_{s\to+\infty} f(s)$ nie istnieje, a zatem funkcja ψ nie może być częścią korygującą żadnej funkcji asymptotycznie prawie okresowej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $f \notin AAP(\mathbb{R})$ i kończy dowód twierdzenia. □

Z Twierdzenia 1.4 oraz Twierdzenia 1.6 otrzymujemy następujący

Wniosek 1.1 ([25, Corollary 1])**.** *Jeżeli funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest częścią główną funkcji $f \in AAP(\mathbb{R})$, to $\varphi(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$.*

Uwaga 1.19 ([25, Remark 12])**.** Zauważmy, że norma $\|\cdot\|_{AAP}$ na przestrzeni $AAP(\mathbb{R})$ jest równoważna z normą supremalną $\|\cdot\|_\infty$. Istotnie, jeżeli funkcja f jest asymptotycznie prawie okresowa o części głównej $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz części korygującej $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, to na mocy Wniosku 1.1 wnosimy, że $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, a zatem

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{AAP} = \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f-\varphi\|_\infty \leqslant 3\,\|f\|_\infty\,.$$

Ponadto, przestrzeń liniowa $AAP(\mathbb{R})$ z normą supremalną jest przemienną algebrą Banacha z jedynką.

Zanim przejdziemy do sformułowania oraz udowodnienia twierdzenia, które potwierdza przypuszczenie T. Diagany, przypomnimy następującą definicję wartości średniej funkcji.

Definicja 1.16 ([88, s. 85])**.** *Wartością średnią* funkcji lokalnie całkowalnej (w sensie Lebesgue'a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazywamy wielkość

$$M(f) := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\mathrm{d}s,$$

przy założeniu, że granica ta istnieje w sensie właściwym lub niewłaściwym.

Uwaga 1.20 (por. [25, Remark 13])**.** Niech $f \in AP(\mathbb{R})$. Wtedy wartość średnia $M(f)$ istnieje i jest skończona. Jeżeli ponadto $M(|f|) = 0$, to $f \equiv 0$ (zob. [81, s. 34; 88, s. 85 oraz s. 111]).

Twierdzenie 1.7 ([25, Theorem 10])**.** *Nie istnieje niezerowa funkcja prawie okresowa, która byłaby całkowalna w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą $(0 < p < +\infty)$.*

Przedstawimy teraz trzy różne dowody powyższego twierdzenia.

Pierwszy dowód Twierdzenia 1.7. Przypuśćmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową całkowalną w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $0 < p < +\infty$. Wobec Twierdzenia 1.5 $|f|^p \in AP(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, a zatem

$$M(|f|^p) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^p \,\mathrm{d}s \leqslant \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p \,\mathrm{d}s = 0.$$

Stąd, na mocy Uwagi 1.20, $|f(t)|^p = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, czyli $f \equiv 0$. $\square$

Drugi dowód Twierdzenia 1.7. Przypuśćmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową całkowalną w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $0 < p < +\infty$. Wobec Twierdzenia 1.5 $|f|^p \in AP(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, a zatem funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$F(t) = \int_0^t |f(s)|^p \mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}$$

jest ograniczona. Ze Stwierdzenia 1.2 wynika, iż funkcja F jest prawie okresowa, a więc w szczególności prawie okresowa w sensie Levitana (por. Uwaga 1.14). Na mocy Twierdzenia 1.3 z ciągu $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wyrwać taki podciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, że

$$\lim_{\min\{l,k\}\to\infty} F(t + n_k - n_l) = F(t) \qquad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R},$$

tzn. dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że

$$|F(t + n_k - n_l) - F(t)| < \varepsilon \qquad \text{dla } k, l \geqslant N.$$

Ponieważ ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, więc $n_k - n_N > 0$ dla $k > N$, a zatem

$$\begin{aligned}\int_t^{t+n_k-n_N} |f(s)|^p \mathrm{d}s &= \left| \int_0^{t+n_k-n_N} |f(s)|^p \mathrm{d}s - \int_0^t |f(s)|^p \mathrm{d}s \right| \\ &= |F(t + n_k - n_N) - F(t)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi, że

$$0 \leqslant \int_t^{+\infty} |f(s)|^p \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon.$$

Wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ stwierdzamy, że $|f(s)|^p = 0$ dla $s \in [t, +\infty)$ i w konsekwencji $f \equiv 0$. $\square$

Podamy teraz trzeci dowód Twierdzenia 1.7, który bazował będzie na pewnych wynikach dotyczących operatora splotu, dlatego też zakładamy, że $1 < p < +\infty$.

Trzeci dowód Twierdzenia 1.7. Przypuśćmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową całkowalną w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $1 < p < +\infty$. Na mocy Twierdzenia 1.5, bez straty ogólności, możemy założyć, że funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Zauważmy, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona następującym wzorem

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } |t| \leqslant 1, \\ t^{-2}, & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

należy do przestrzeni $L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$, gdzie q jest wykładnikiem sprzężonym z p, tzn. $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Splot $f * g$, zdefiniowany wzorem

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

jest funkcją prawie okresową (zob. [35, Proposition 4.1.1]), a ponadto z [49, Theorem 21.33] wynika, że

$$\lim_{|t|\to+\infty} (f * g)(t) = 0.$$

Rozumując podobnie jak w drugiej części dowodu Twierdzenia 1.6 można pokazać, że $(f * g)(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ (por. również [68, Theorem 2.1.8]).

Gdyby funkcja f nie była tożsamościowo równa 0, to istniałyby liczby $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,1)$ oraz $c > 0$ takie, że $f(t) \geqslant c$ dla $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ i tym samym

$$(f * g)(t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t_0 - s)g(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t_0 - s)g(s)\mathrm{d}s = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t_0 - s)\mathrm{d}s \geqslant 2c\varepsilon > 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $f \equiv 0$. □

Uwaga 1.21 ([25, Remark 14])**.** Niech $1 < p < +\infty$. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *p-prawie okresową*, jeżeli można ją przedstawić w postaci $f = \varphi + \psi$, gdzie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową, natomiast $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą (por. [35, s. 46]). Z Twierdzenia 1.7 wynika, że rozkład funkcji p-prawie okresowej na część prawie okresową oraz całkowalną z p-tą potęgą jest jednoznaczny. Istotnie, gdyby funkcja p-prawie okresowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiadała przedstawienia $f = \varphi_1 + \psi_1 = \varphi_2 + \psi_2$, gdzie $\varphi_i \in AP(\mathbb{R})$ oraz $\psi_i \in L^p(\mathbb{R})$ dla $i = 1, 2$, to funkcja $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2 \in AP(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ i na mocy Twierdzenia 1.7 musiałaby być tożsamościowo równa zero. Tym samym $\varphi_1 = \varphi_2$ i w konsekwencji $\psi_1 = \psi_2$.

1.5.3. PRZESTRZEŃ FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH W SENSIE LEVITANA. Główny problem, jaki poruszymy w tym paragrafie, dotyczy naturalnej topologii, którą można określić w klasie $LAP(\mathbb{R})$. Wobec wyniku Reicha (zob. [74, Corollar (v)]) naturalną topologią wydaje się być topologia zbieżności jednostajnej na $\mathbb{R}$. Z drugiej strony, ponieważ klasa $LAP(\mathbb{R})$ zawiera funkcje nieograniczone, topologia ta nie może być wyznaczona przez normę supremalną, jak ma to miejsce w przypadku innych klas funkcji prawie okresowych. Niemniej jednak, jak pokazuje poniższe twierdzenie, w klasie $LAP(\mathbb{R})$ można zdefiniować zupełną metrykę, która wyznacza topologię zbieżności jednostajnej (por. [39, Twierdzenie 9, s. 182]).

Twierdzenie 1.8 ([25, Theorem 11]). *$(LAP(\mathbb{R}), d_L)$ jest zupełną przestrzenią metryczną z metryką d_L określoną wzorem*

$$d_L(f,g) := \min\{1, \|f-g\|_\infty\} \qquad \text{dla } f,g \in LAP(\mathbb{R}).$$

Dowód. Niech $f, g, h \in LAP(\mathbb{R})$. Oczywiście $d_L(f,g) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ oraz $d_L(f,g) = d_L(g,f)$. Ponadto,

$$\begin{aligned} d_L(f,h) + d_L(h,g) &= \min\{1, \|f-h\|_\infty\} + \min\{1, \|h-g\|_\infty\} \\ &= \min\{2, 1 + \|f-h\|_\infty, 1 + \|h-g\|_\infty, \|f-h\|_\infty + \|h-g\|_\infty\} \\ &\geqslant \min\{1, \|f-g\|_\infty\} = d_L(f,g), \end{aligned}$$

co dowodzi, iż odwzorowanie d_L jest metryką na zbiorze $LAP(\mathbb{R})$ (por. również [39, Twierdzenie 3, s. 170]).

By udowodnić twierdzenie, wystarczy zatem wykazać, że przestrzeń $LAP(\mathbb{R})$ jest zupełna w metryce d_L. Jeżeli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(LAP(\mathbb{R}), d_L)$, to dla dowolnego $\varepsilon \in (0,1)$ znajdziemy taką liczbę naturalną N, że

$$\|f_n - f_m\|_\infty = d_L(f_n, f_m) < \varepsilon \qquad \text{dla } n, m \geqslant N.$$

Istnieje więc funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, gdy $n \to \infty$ (zob. [76, Twierdzenie 7.8, s. 129]). Ponieważ wszystkie funkcje f_n są ciągłe w topologii Bohra (zob. Twierdzenie 1.3), więc również i funkcja f jest ciągła w topologii Bohra (por. [39, Twierdzenie 2, s. 40]), a zatem $f \in LAP(\mathbb{R})$. Ponadto $d_L(f_n, f) \to 0$, gdy $n \to \infty$, toteż przestrzeń $(LAP(\mathbb{R}), d_L)$ jest zupełna. □

Uwaga 1.22 (por. [25, Remark 20]). Topologia zbieżności jednostajnej na przestrzeni $LAP(\mathbb{R})$ niestety nie jest topologią liniową, gdyż operacja mnożenia przez skalar nie jest odwzorowaniem ciągłym. Istotnie, rozważmy dowolny ciąg niezerowych liczb rzeczywistych $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do 0, a także ciąg stały $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, którego wszystkie wyrazy są równe nieograniczonej funkcji prawie okresowej w sensie Levitana f zdefiniowanej w Przykładzie 1.1. Wtedy

$$d_L(c_n f_n, 0) = \min\{1, \|c_n f_n\|_\infty\} = \min\{1, |c_n| \cdot \|f\|_\infty\} = 1 \nrightarrow 0, \qquad \text{gdy } n \to \infty.$$

Okazuje się, iż problem określenia naturalnej topologii w klasie $LAP(\mathbb{R})$ jest w szczególności ściśle związany z rozważaniami dotyczącymi nieautonomicznego operatora superpozycji, bowiem zachodzi następujące

Twierdzenie 1.9 ([25, Theorem 12]). *Nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, działa w przestrzeni $(LAP(\mathbb{R}), d_L)$ i jest jednostajnie ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:*

(i) *dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $s \mapsto f(s,u)$ jest prawie okresowa w sensie Levitana;*

(ii) *funkcja $u \mapsto f(t,u)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$ jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}$, tj. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta{:=}\delta(\varepsilon) > 0$ takie, że $\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t,u) - f(t,v)| < \varepsilon$, o ile $|u - v| < \delta$ dla $u, v \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia warunki (i) oraz (ii). Pokażemy, że $F(x) \in LAP(\mathbb{R})$ dla $x \in LAP(\mathbb{R})$.

Niech $x \in LAP(\mathbb{R})$ oraz niech $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ będzie ciągiem uogólnionym liczb rzeczywistych zbieżnym w topologii Bohra do $t \in \mathbb{R}$. Wobec założenia (i) funkcja $s \mapsto f(s, x(t))$ jest prawie okresowa w sensie Levitana, a zatem na mocy Twierdzenia 1.3 dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\lambda_1 \in \Lambda$ takie, że

$$|f(t_\lambda, x(t)) - f(t, x(t))| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{dla } \lambda \succcurlyeq \lambda_1.$$

Ponadto, znajdziemy takie $\lambda_2 \in \Lambda$, że $|x(t_\lambda) - x(t)| < \delta$ dla $\lambda \succcurlyeq \lambda_2$, gdzie $\delta{:=}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ jest liczbą wybraną zgodnie z warunkiem (ii). Stąd

$$|f(t_\lambda, x(t_\lambda)) - f(t_\lambda, x(t))| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s, x(t_\lambda)) - f(s, x(t))| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{dla } \lambda \succcurlyeq \lambda_2,$$

a zatem dla $\lambda \succcurlyeq \lambda_3$, gdzie $\lambda_3 \succcurlyeq \lambda_1$ oraz $\lambda_3 \succcurlyeq \lambda_2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}|F(x)(t_\lambda) - F(x)(t)| &= |f(t_\lambda, x(t_\lambda)) - f(t, x(t))| \\ &\leqslant |f(t_\lambda, x(t_\lambda)) - f(t_\lambda, x(t))| + |f(t_\lambda, x(t)) - f(t, x(t))| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi ciągłości funkcji $F(x)$ w topologii Bohra. W konsekwencji $F(x)$ jest funkcją prawie okresową w sensie Levitana.

Wykażemy teraz, że $F\colon LAP(\mathbb{R}) \to LAP(\mathbb{R})$ jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym. Dla $\varepsilon \in (0,1)$ niech $\delta{:=}\delta(\varepsilon)$ będzie liczbą wybraną zgodnie z warunkiem (ii). Zauważmy, że bez straty ogólności, możemy przyjąć, iż $\delta \in (0,1)$. Wtedy

$$\begin{aligned}d_L(F(x), F(y)) &= \min\{1, \|F(x) - F(y)\|_\infty\} \\ &\leqslant \|F(x) - F(y)\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s, x(s)) - f(s, y(s))| < \varepsilon\end{aligned}$$

dla wszystkich $x, y \in LAP(\mathbb{R})$ takich, że $\|x - y\|_\infty = d_L(x,y) < \delta$, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Załóżmy teraz, że nieautonomiczny operator superpozycji F działający w przestrzeni metrycznej $(LAP(\mathbb{R}), d_L)$ jest jednostajnie ciągły. Dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$ funkcja stała $x_u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określona wzorem $x_u(t) = u$ dla $t \in \mathbb{R}$, jest prawie okresowa w sensie Levitana, a zatem $F(x_u) \in LAP(\mathbb{R})$. Ponieważ $F(x_u)(t) = f(t,u)$ dla $t \in \mathbb{R}$, więc funkcja f spełnia warunek (i).

Ustalmy $\varepsilon \in (0,1)$. Wobec jednostajnej ciągłości nieautonomicznego operatora superpozycji F, znajdziemy taką liczbę $\delta{:=}\delta(\varepsilon) \in (0,1)$, że

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty < \varepsilon, \text{ o ile } \|x-y\|_\infty < \delta \text{ dla } x, y \in LAP(\mathbb{R}).$$

W szczególności

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s,u) - f(s,v)| < \varepsilon, \text{ o ile } |u-v| = \|x_u - x_v\|_\infty < \delta \text{ dla } u, v \in \mathbb{R},$$

gdzie funkcje $x_u, x_v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowane są wzorami $x_u(t) = u$ oraz $x_v(t) = v$ dla $t \in \mathbb{R}$. Tym samym pokazaliśmy, iż funkcja f spełnia warunek (ii). □

Uwaga 1.23. Wyniki dotyczące nieautonomicznego operatora superpozycji w przestrzeniach $AP(\mathbb{R})$ oraz $BAA(\mathbb{R})$ można znaleźć odpowiednio w monografiach [32, Theorem 2.8; 35, Proposition 4.2.8; 41, Theorem 2.11] oraz [68, Theorem 2.2.6]. W pracy [58] oraz książce [35, Theorem 5.4.1] podano natomiast warunki, by nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał przestrzeń $PAP(\mathbb{R})$ w siebie.

Dodajmy, że w przeciwieństwie do dowodu Twierdzenia 1.9, dowody wspomnianych powyżej wyników nie korzystały z odpowiedniości pomiędzy prawie okresowością czy prawie automorficznością a (jednostajną) ciągłością w topologii Bohra (por. Twierdzenie 1.3, Uwaga 1.14 oraz Uwaga 1.15).

Na zakończenie rozważań dotyczących określenia topologii w zbiorze funkcji prawie okresowych w sensie Levitana wykażemy następujące

Stwierdzenie 1.3. *Dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje ciąg funkcji prawie okresowych w sensie Levitana zbieżny do funkcji f niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Dowód. Dla ustalonej liczby naturalnej n takiej, że $n \geqslant 2$ niech $f_n\colon [-n,n] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną następującym wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1-n)x + nf(1-n) & \text{dla } x \in [-n, 1-n), \\ f(x) & \text{dla } x \in [1-n, n-1], \\ -f(n-1)x + nf(n-1) & \text{dla } x \in (n-1, n]. \end{cases}$$

Ponieważ funkcja f_n jest ciągła oraz $f(-n) = f(n)$, więc na mocy twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji (zob. np. [65, Twierdzenie 9.6]), istnieje taki wielomian trygonometryczny $T_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$|f_n(x) - T_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{dla wszystkich } x \in [-n, n].$$

Oczywiście $T_n \in LAP_b(\mathbb{R})$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$. Zauważmy ponadto, iż ciąg $(T_n)_{n\geqslant 2}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f na $\mathbb{R}$. Istotnie, dla dowolnego przedziału zwartego $[a,b] \subset \mathbb{R}$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna $n_0 \geqslant 2$ taka, że $n_0^{-1} < \varepsilon$ oraz $[a,b] \subset [1-n_0, n_0-1]$. Wtedy dla dowolnego $x \in [a,b]$ oraz $n \geqslant n_0$ mamy

$$|f(x) - T_n(x)| = |f_n(x) - T_n(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Uwaga 1.24. Ze Stwierdzenia 1.3 wynika w szczególności, iż granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji prawie okresowych w sensie Levitana nie musi być funkcją prawie okresową w sensie Levitana. Oczywiście Stwierdzenie 1.3 jest również prawdziwe, jeżeli ciąg funkcji prawie okresowych w sensie Levitana zastąpimy ciągiem funkcji prawie okresowych lub prawie automorficznych w sensie Bochnera.

W drugiej części niniejszego paragrafu zajmiemy się operatorem splotu działającym w przestrzeni $LAP_b(\mathbb{R})$.

Stwierdzenie 1.4 ([25, Proposition 5]). *Niech $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą oraz niech $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podwójnym takich funkcji mierzalnych o wartościach rzeczywistych, że*

$$\lim_{\min\{n,m\}\to\infty} f_{n,m}(x) = f(x) \qquad \text{dla każdego } x \in X.$$

Jeżeli istnieje taka funkcja całkowalna $g\colon X \to \mathbb{R}_+$, że

$$|f_{n,m}(x)| \leqslant g(x) \qquad \text{dla wszystkich } x \in X \text{ oraz } n, m \in \mathbb{N},$$

to

$$\lim_{\min\{n,m\}\to\infty} \int_X f_{n,m}\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

Powyższe twierdzenie uzasadnia się podobnie jak klasyczne twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (zob. np. [77, Twierdzenie 1.34, s. 35]), dlatego też jego dowód zostanie pominięty.

Twierdzenie 1.10 ([25, Theorem 13]). *Niech $f \in LAP_b(\mathbb{R})$ oraz niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wtedy splot $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określony następującym wzorem*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

jest ograniczoną funkcją LAP.

Dowód. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika, że splot $f*g$ jest funkcją ciągłą. Istotnie, jeżeli $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnym do $t\in\mathbb{R}$, to

$$\lim_{n\to\infty}(f*g)(t_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(t_n-s)g(s)\mathrm{d}s=\int_{\mathbb{R}}f(t-s)g(s)\mathrm{d}s=(f*g)(t),$$

gdyż $|f(\tau-s)g(s)|\leqslant\|f\|_\infty|g(s)|$ dla wszystkich $\tau,s\in\mathbb{R}$. Oczywiście, $f*g$ jest również funkcją ograniczoną i $\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|g\|_1$. By udowodnić twierdzenie, pozostaje wykazać więc, że $f*g\in LAP(\mathbb{R})$.

Niech $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Ponieważ f jest funkcją prawie okresową w sensie Levitana, z ciągu $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wyrwać taki podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, że

$$\lim_{\min\{k,l\}\to\infty}f(t+\tau_{n_k}-\tau_{n_l})=f(t)\qquad\text{dla każdego } t\in\mathbb{R}.$$

Ponadto, wobec ograniczoności f, dla $t,s\in\mathbb{R}$, mamy

$$|f(t-s+\tau_{n_k}-\tau_{n_l})g(s)|\leqslant\|f\|_\infty|g(s)|.$$

Stąd, na mocy Stwierdzenia 1.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{\min\{k,l\}\to\infty}(f*g)(t+\tau_{n_k}-\tau_{n_l})&=\int_{\mathbb{R}}\lim_{\min\{k,l\}\to\infty}f(t-s+\tau_{n_k}-\tau_{n_l})g(s)\mathrm{d}s\\&=\int_{\mathbb{R}}f(t-s)g(s)\mathrm{d}s=(f*g)(t)\end{aligned}$$

dla każego $t\in\mathbb{R}$, czyli $f*g\in LAP(\mathbb{R})$. □

Uwaga 1.25. Odpowiednik Twierdzenia 1.10 w przypadku przestrzeni $AP(\mathbb{R})$ został wykazany w pracy [15], natomiast w przypadku przestrzeni $BAA(\mathbb{R})$ w pracy [23]. Dodajmy, iż pseudo oraz asymptotyczna prawie okresowość operatora splotu wraz z zastosowaniami do zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego rzędu (liniowych i semi-liniowych) oraz równania Volterry jest tematem pracy [24].

Przykład 1.2 ([25, Example 4])**.** Rozumując analogicznie jak w trzecim dowodzie Twierdzenia 1.7, w oparciu o Twierdzenie 1.10, można stwierdzić, że nie istnieje niezerowa oraz ograniczona funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą ($1<p<+\infty$), która byłaby prawie okresowa w sensie Levitana.

Uwaga 1.26. Okazuje się, że korzystając z teorii szeregów Fouriera (por. [81, ss. 135-136]) Twierdzenie 1.7 oraz Przykład 1.2 można uogólnić na przypadek funkcji LAP. Dodajmy, iż B. Basit i H. Günzler, bazując na pewnych ideach pochodzących od C. Zhanga (por. [90, Lemma 1.3]) oraz wykorzystując tzw. nierówność Porady, udowodnili podobny wynik dla tzw. funkcji rekurencyjnych (zob. [5, s. 427]) w przypadku rozkładu na sumę dwóch funkcji będących elementami jednostajnie domkniętych grup addytywnych, spełniających pewne dodatkowe warunki (zob. [5, Proposition 1.2]).

1.6. PRZESTRZENIE NIEARCHIMEDESOWE

W niniejszym paragrafie przypomnimy pewne pojęcia dotyczące przestrzeni niearchimedesowych.

Definicja 1.17. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Funkcję $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *waluacją*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in \mathbb{K}$ spełnia ona następujące warunki:

(a) $|a| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$;

(b) $|ab| = |a||b|$;

(c) $|a + b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$.

W niniejszej rozprawie rozważać będziemy jedynie *waluacje nietrywialne*, tzn. takie, które w pewnym punkcie $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ przyjmują wartość różną od 1. Ponadto zakładać będziemy, że wszystkie ciała z waluacją $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ są zupełne w metryce zdefiniowanej wzorem $(a, b) \mapsto |a - b|$.

Definicja 1.18. Niearchimedesową przestrzenią unormowaną nazywamy przestrzeń liniową X nad ciałem $\mathbb{K}$ z waluacją $|\cdot|$, w której określono odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$, które dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $a \in \mathbb{K}$ spełnia warunki:

(a) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$;

(b) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$;

(c) $\|x + y\| \leqslant \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Kule domknięte i otwarte w niearchimedesowych przestrzeniach unormowanych definiuje się analogicznie jak w przypadku zwykłych przestrzeni unormowanych. Należy jednak pamiętać, iż wyrażenia „domknięty” oraz „otwarty” w przypadku przestrzenie niearchimedesowych nie odnoszą się do własności topologicznych wspomnianych zbiorów (por. [78, Proposition 18.4]).

Definicja 1.19. Mówimy, że niearchimedesowa przestrzeń unormowana jest *sferycznie zupełna*, jeżeli każdy zstępujący ciąg kul domkniętych ma niepusty przekrój.

Prostą konsekwencją sferycznej zupełności jest następujący prosty fakt, którego dowód w przypadku ciała z waluacją można znaleźć w [79, s. 5].

Stwierdzenie 1.5. *Jeżeli $(B_X(x_\lambda, r_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną kul domkniętych w sferycznie zupełnej niearchimedesowej przestrzeni unormowanej X taką, że $B_X(x_\lambda, r_\lambda) \cap B_X(x_\mu, r_\mu) \neq \emptyset$ dla każdych $\lambda, \mu \in \Lambda$, to $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_X(x_\lambda, r_\lambda) \neq \emptyset$.*

Rozdział 2

Twierdzenia o punktach stałych

Niniejszy rozdział ma na celu wykazanie kilku twierdzeń o punktach stałych.

Paragraf 2.1 dotyczyć będzie twierdzeń o punktach stałych dla odwzorowań słabo F-kontrakcyjnych oraz silnie F-rozszerzających działających w przestrzeniach topologicznych. Dodajmy, iż istnienie oraz jedyność punktów stałych badanych odwzorowań w tym przypadku wynikać będzie z dwóch typów założeń: kontrakcyjnego oraz „zwartościowego.” Na zakończenie Paragrafu 2.1 wykażemy także twierdzenie Petalasa-Vidalisa dla odwzorowań słabo kontrakcyjnych w sferycznie zupełnych niearchimedesowych przestrzeniach unormowanych.

W Paragrafie 2.2 udowodnimy twierdzenie o punkcie stałym typu Möncha, pochodzące z pracy [20].

Paragraf 2.3 poświęcimy rozważaniom dotyczącym odwzorowań zdefiniowanych w rzeczywistych częściowo uporządkowanych przestrzeniach Banacha. Przytoczymy oryginalny wynik Leggetta-Williamsa, a także wykażemy użyteczne z punktu widzenia zastosowań pewne jego rozszerzenie, które nie tylko pozwala na udowodnienie istnienia rozwiązania dodatniego badanego równania nieliniowego, ale także daje pewne dodatkowe informacje o liczbie rozwiązań.

W ostatnim paragrafie zajmiemy się twierdzeniami typu Lovelady'ego dla odwzorowań, które powstają jako złożenie odwzorowań spełniających warunek Lipschitza z tzw. odwzorowaniami wyższego rzędu. Pokażemy również, iż twierdzenie Lovelady'ego, choć związane z twierdzeniem Banacha, możne w pewnych przypadkach prowadzić do ogólniejszych wyników niż zasada kontrakcji. Na zakończenie Paragrafu 2.4, bazując na wspomnianym wcześniej wyniku Petalasa-Vidalisa, udowodnimy twierdzenie typu Lovelady'ego dla odwzorowań określonych w przestrzeniach niearchimedesowych.

2.1. TWIERDZENIA DLA ODWZOROWAŃ SILNIE F-ROZSZERZAJĄCYCH ORAZ SŁABO F-KONTRAKCYJNYCH

Nasze rozważania zaczniemy od następującej definicji odwzorowania słabo F-kontrakcyjnego oraz silnie F-rozszerzającego. Dodajmy, że odwzorowania słabo F-kontrakcyjne zostały wprowadzone w roku 1969 przez M. Furiego oraz A. Vignolego w [45].

Definicja 2.1 ([26, Definition 2]). Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $F\colon X \times X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją górnie półciągłą z dołu. Odwzorowanie $f\colon X \to X$ nazywamy:

(a) *słabo F-kontrakcyjnym*, jeżeli $F(f(x), f(y)) < F(x, y)$ dla dowolnych punktów $x, y \in X$ takich, że $x \neq y$;

(b) *silnie F-rozszerzającym*, jeżeli $F(f(x), f(y)) > F(x, y)$ dla dowolnych punktów $x, y \in X$ takich, że $x \neq y$.

W przypadku, gdy (X, d) jest przestrzenią metryczną i $F(x, y) = d(x, y)$, odwzorowanie f nazywamy odpowiednio *słabo kontrakcyjnym* oraz *silnie rozszerzającym*.

Uwaga 2.1. Wprost z definicji wynika, że odwzorowania słabo F-kontrakcyjne oraz silnie F-rozszerzające posiadają co najwyżej jeden punkt stały. Istotnie, gdyby przykładowo odwzorowanie słabo F-kontrakcyjne f posiadało dwa różne punkty stałe $x, y \in X$, to zachodziłaby następująca nierówność

$$F(x, y) = F(f(x), f(y)) < F(x, y),$$

co jest niemożliwe.

Wiadomo, że twierdzenie Banacha o punkcie stałym jest nieprawdziwe, gdy założenie kontrakcyjności odwzorowania zastąpimy słabą kontrakcyjnością (zob. [38, (6.1), s. 17]). Jednakże, jak wykazał Edelstein (por. [47, Twierdzenie 2.2, s. 21]) w przypadku przestrzeni metrycznych zwartych, odwzorowania słabo kontrakcyjne posiadają dokładnie jeden punkt stały. W roku 1969 M. Furi i A. Vignoli uogólnili wynik Edelsteina, dowodząc następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1 ([45]). *Niech X będzie ograniczoną oraz zupełną przestrzenią metryczną oraz niech odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to X$ będzie słabo F-kontrakcyjne. Jeżeli dodatkowo odwzorowanie f jest α-zgęszczające, tzn.*

$$\alpha(f(V)) < \alpha(V) \text{ dla każdego ograniczonego zbioru } V \subset X \text{ takiego, że } \alpha(V) > 0,$$

to posiada ono dokładnie jeden punkt stały.

Twierdzenie Furiego-Vignolego jest szczególnym przypadkiem poniższego wyniku, dlatego też jego dowód zostanie pominięty.

Twierdzenie 2.2 ([26, Theorem 1])**.** *Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $x_0 \in X$. Załóżmy ponadto, że odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to X$ jest słabo F-kontrakcyjne. Jeżeli następująca implikacja*

$$V = f(V) \cup \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad V \text{ jest warunkowo zwarty} \tag{2.1}$$

jest prawdziwa dla każdego przeliczalnego zbioru $V \subset X$, to odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Zdefiniujmy ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ następującymi wzorami

$$y_1 := x_0, \qquad y_{n+1} := f(y_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

i połóżmy $A := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście $A = f(A) \cup \{x_0\}$, więc na mocy założenia, zbiór A jest warunkowo zwarty w przestrzeni topologicznej X. Przez φ oznaczmy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze $\overline{A}$ wzorem $\varphi(x) = F(x, f(x))$ dla $x \in \overline{A}$. Wobec Uwagi 1.3, funkcja φ jest górnie półciągła z dołu, a zatem na mocy Lematu 1.1 osiąga wartość najmniejszą w pewnym punkcie $y \in \overline{A}$. Ponieważ odwzorowanie f jest ciągłe oraz $f(A) \subset A$, więc $f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{A}$.

Przypuśćmy, że $f(y) \neq y$. Wtedy jednak

$$\varphi(f(y)) = F(f(y), f^2(y)) < F(y, f(y)) = \varphi(y),$$

co byłoby sprzeczne z wyborem elementu y jako punktu, w którym funkcja φ przyjmuje wartość najmniejszą. Stąd $f(y) = y$. Jedyność punktu stałego wynika z Uwagi 2.1. □

Uwaga 2.2. Niech X będzie ograniczoną oraz zupełną przestrzenią metryczną. Jeżeli odwzorowanie $f\colon X \to X$ jest α-zgęszczające, to warunek (2.1) jest spełniony przy dowolnym $x_0 \in X$. Przypuśćmy bowiem, iż istnieje taki przeliczalny podzbiór V przestrzeni X, że $V = f(V) \cup \{x_0\}$, lecz $\alpha(V) > 0$. Wtedy, na mocy własności maksimum miary α, otrzymujemy

$$\alpha(V) = \alpha(f(V) \cup \{x_0\}) = \alpha(f(V)) < \alpha(V).$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, iż $\alpha(V) = 0$, a zatem zbiór V jest warunkowo zwarty.

Następujący przykład pokazuje, iż w przypadku, gdy X jest zupełną i ograniczoną przestrzenią metryczną, Twierdzenie 2.2 jest istotnym uogólnieniem Twierdzenia 2.1.

Przykład 2.1 ([22, Example 1])**.** Przez c_0 oznaczmy przestrzeń Banacha wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych zbieżnych do zera z normą supremalną. Niech

$$X:=\{x:=(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0:\xi_n\in[0,1] \text{ dla wszystkich } n\in\mathbb{N}\}$$

oraz niech $(q_n)_{n>l}$, gdzie l jest ustaloną liczbą naturalną, będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $q_n\in(0,1)$ dla $n>l$ oraz $\lim_{n\to\infty}q_n=1$. Odwzorowanie $f\colon X\to X$ zdefiniujmy wzorem $f(x)=\big(f_n(\xi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie funkcje $f_n\colon[0,1]\to[0,1]$ spełniają następujące warunki:

- $|f_n(u)-f_n(v)|\leqslant\frac{1}{2}|u-v|$ dla $u,v\in[0,1]$ oraz $n=1,2,\ldots,l$;
- $f_n(u)=q_nu$ dla $u\in[0,1]$ oraz $n>l$.

Wykażemy, że odwzorowanie f jest słabo kontrakcyjne. Zauważmy, że dla ustalonych $x,y\in X$ istnieje takie $N\in\mathbb{N}$, że $\|f(x)-f(y)\|_\infty=|f_N(\xi_N)-f_N(\eta_N)|$, a zatem jeżeli $x\neq y$, to

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty=|f_N(\xi_N)-f_N(\eta_N)|<|\xi_N-\eta_N|\leqslant\|x-y\|_\infty .$$

Załóżmy teraz, że V jest takim podzbiorem X, że $V=f(V)\cup\{0\}$, gdzie 0 oznacza element zerowy przestrzeni c_0. W oparciu o metodę indukcji matematycznej pokażemy, że dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$ mamy

$$V=f^k(V)\cup\{f^{k-1}(0),f^{k-2}(0),\ldots,f(0),0\}. \tag{2.2}$$

Zauważmy, iż (2.2) dla $k=1$ zachodzi na mocy założenia. Ponadto, jeżeli (2.2) zachodzi dla pewnego $k\in\mathbb{N}$, to

$$f(V)=f^{k+1}(V)\cup\{f^k(0),f^{k-1}(0),\ldots,f^2(0),f(0)\},$$

więc

$$V=f^{k+1}(V)\cup\{f^k(0),f^{k-1}(0),\ldots,f(0),0\}.$$

Z (2.2) wynika, że $V\subset\{x\in X:\xi_n=0 \text{ dla } n>l\}$. Gdyby bowiem dla pewnego elementu $x\in V$ istniała taka liczba naturalna $n>l$, że $\xi_n>0$, to dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$ znaleźlibyśmy element $y\in V$ (zależny od k) taki, że $\xi_n=q_n^k\eta_n$. Ale wtedy

$$0<\xi_n\leqslant\lim_{k\to\infty}q_n^k\eta_n\leqslant\lim_{k\to\infty}q_n^k=0,$$

co prowadziłoby do sprzeczności. Zbiór V jest więc warunkowo zwarty w przestrzeni topologicznej X, a zatem na mocy Twierdzenia 2.2 odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały $x^*\in X$.

Pokażemy teraz, że odwzorowanie f nie spełnia założeń twierdzenia Furiego-Vignolego. Niech $V:=\Big\{e^k:=(\varepsilon_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\in X:k\in\mathbb{N}\Big\}$, gdzie $\varepsilon_k^k=1$ i $\varepsilon_n^k=0$ dla $n\neq k$.

Z [4, Theorem 6.1.1] wynika, że $\chi(V) = 1$, gdzie χ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa, a zatem z następującego oszacowania

$$\chi(V) \leqslant \alpha(V) \leqslant \operatorname{diam} V = 1,$$

otrzymujemy, że $\alpha(V) = 1$. Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że $\alpha(f(V)) = 1$, gdyż

$$f(V) = \Big\{\sum_{i=1}^{l} f_i(0)e^i + q_k e^k \in X : k > l\Big\} \cup \Big\{f(e^k) \in X : k = 1, 2, \ldots, l\Big\}.$$

Odwzorowanie f nie może więc być α-zgęszczające i tym samym nie spełnia ono założeń twierdzenia Furiego-Vignolego o punkcie stałym.

Okazuje się, że z Twierdzenia 2.2 wynika również istnienie oraz jedyność wspólnego punktu stałego dla pary odwzorowań komutujących. Prawdziwy bowiem jest następujący

Wniosek 2.1 (por. [80, Theorem 3.1])**.** *Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $x_0 \in X$. Załóżmy ponadto, że odwzorowania $f, g\colon X \to X$ spełniają następujące warunki:*

(i) $f \circ g = g \circ f$*;*

(ii) *odwzorowanie f jest ciągłe oraz słabo F-kontrakcyjne.*

Jeżeli następująca implikacja

$$V = f(V) \cup \{g(x_0)\} \qquad \Longrightarrow \qquad V \textit{ jest warunkowo zwarty}$$

jest prawdziwa dla każdego przeliczalnego zbioru $V \subset X$, to istnieje dokładnie jeden wspólny punkt stały odwzorowań f i g, tzn. istnieje taki punkt $x^* \in X$, że $f(x^*) = g(x^*) = x^*$.

Dowód. Przez x^* oznaczmy jedyny punkt stały odwzorowania f, którego istnienie wynika z Twierdzenia 2.2. Ponieważ $g(x^*) = (g \circ f)(x^*) = (f \circ g)(x^*) = f(g(x^*))$, więc $g(x^*) = x^*$, co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 2.3. Zaznaczmy, iż zaprezentowany powyżej dowód Wniosku 2.1 różni się istotnie od dowodu oryginalnego zawartego w pracy [80], który wzorowany był na dowodzie [26, Theorem 1] (por. dowód Twierdzenia 2.2).

Następujące dwa wyniki stanowią kontynuację rozważań na temat istnienia i jedyności punktów stałych dla odwzorowań słabo F-kontrakcyjnych. W szczególności Stwierdzenie 2.2 uogólnia twierdzenie o punkcie stałym z pracy [92] dla odwzorowań określonych w przestrzeni Banacha z quasimodułem oraz dwuargumetnową relacją przechodnią.

Stwierdzenie 2.1 ([26, Theorem 2]). *Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to X$ będzie takie, że k-ta iteracja f^k jest słabo F-kontrakcyjna dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, iż spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

(i) *istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że implikacja*

$$V = f(V) \cup \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad V \text{ jest warunkowo zwarty}$$

zachodzi dla dowolnego przeliczalnego zbioru $V \subset X$;

(ii) *istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że implikacja*

$$V = f^k(V) \cup \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad V \text{ jest warunkowo zwarty}$$

zachodzi dla dowolnego przeliczalnego zbioru $V \subset X$.

Wtedy odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Zdefiniujmy funkcję φ następującym wzorem $\varphi(x) = F(x, f^k(x))$ dla $x \in X$. Rozumując analogiczne jak w dowodzie Twierdzenia 2.2 otrzymujemy, że odwzorowanie f^k posiada dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$. Punkt ten jest zarazem jedynym punktem stałym odwzorowania f, bowiem równość $f(x^*) = f(f^k(x^*)) = f^k(f(x^*))$ wobec faktu, że zbiór punktów stałych odwzorowania f^k pokrywa się ze zbiorem jednoelementowym $\{x^*\}$, implikuje, iż $f(x^*) = x^*$.

Część (ii) wynika z Twierdzenia 2.2 zastosowanego do odwzorowania f^k oraz powyższego rozumowania. □

Stwierdzenie 2.2 ([26, Theorem 3]). *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha, w której określono taką dwuargumentową relację przechodnią $\preccurlyeq$, iż*

(i) *dla wszystkich $x, y \in X$ z warunku $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ wynika, że $\|x\| \leqslant \|y\|$.*

Załóżmy ponadto, że odwzorowania $f, m, A\colon X \to X$ spełniają następujące warunki:

(ii) $0 \preccurlyeq m(x)$ *oraz* $\|m(x)\| = \|x\|$ *dla wszystkich* $x \in X$;

(iii) *A jest ciągłym operatorem liniowym oraz $\|A^k x\| < \|x\|$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x \in X \setminus \{0\}$ takich, że $0 \preccurlyeq x$;*

(iv) *jeżeli $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$, to $Ax \preccurlyeq Ay$;*

(v) *$m(f(x) - f(y)) \preccurlyeq Am(x - y)$ dla wszystkich $x, y \in X$.*

Jeżeli ponadto jeden z warunków ze Stwierdzenia 2.1 zachodzi (przy czym warunek (ii) *z tym samym k co założenie* (iii) *niniejszego twierdzenia), to odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Pokażemy, że odwzorowanie f spełnia założenia Stwierdzenia 2.1. Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$m(f^k(x) - f^k(y)) \preccurlyeq Am(f^{k-1}(x) - f^{k-1}(y)) \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq A^k m(x-y),$$

a zatem z założeń (ii) oraz (iii) dla $x \neq y$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f^k(x) - f^k(y)\| &= \|m(f^k(x) - f^k(y))\| \leqslant \|A^k m(x-y)\| \\ &< \|m(x-y)\| = \|x-y\|. \end{aligned}$$

Tym samym wykazaliśmy, że k-ta iteracja odwzorowania f jest słabo kontrakcyjna. Zauważmy ponadto, że wobec ciągłości operatora liniowego A oraz założeń (ii) i (v), odwzorowanie f jest ciągłe. Na mocy Stwierdzenia 2.1 odwzorowanie f posiada więc dokładnie jeden punkt stały. □

Przykład 2.2 ([26, Example 1]). Rozważmy przestrzeń c_0 wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych zbieżnych do zera z normą supremalną. Zdefiniujmy operator $A\colon c_0 \to c_0$ następującym wzorem

$$Ax = \left(\xi_2, \xi_3, \frac{1}{2}\xi_4, \frac{1}{2}\xi_5, \ldots\right) \qquad \text{dla } x{:=}(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Wtedy $\|Ax\| \leqslant \|x\|$ dla wszystkich $x \in c_0$ oraz $\|A^3x\| < \|x\|$ dla wszystkich $x \in c_0$ takich, że $x \neq 0$, gdyż

$$A^3x = \left(\frac{1}{2}\xi_4, \frac{1}{4}\xi_5, \frac{1}{8}\xi_6, \frac{1}{8}\xi_7, \ldots\right) \qquad \text{dla } x{:=}(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zajmiemy się teraz odwzorowaniami silnie F-rozszerzającymi. Na wstępie udowodnimy fakt, będący prostą modyfikacją twierdzenia o punkcie stałym z [38, (6.8), s. 18]. Dodajmy, iż Twierdzenie 2.3 zostanie wykorzystane w Rozdziale 4 do badania istnienia oraz jedyności rozwiązań uogólnionego równania Fredholma drugiego rodzaju w klasie funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem.

Twierdzenie 2.3 ([26, Theorem 4]). *Niech A oraz B będą takimi niepustymi podzbiorami przestrzeni metrycznej (X, d), że $A \subset B$ i zbiór B jest zupełny. Jeżeli odwzorowanie $f\colon A \to B$ jest suriekcją oraz istnieje liczba $\beta > 1$ taka, że $d(f(x), f(y)) \geqslant \beta d(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in A$, to f posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Zauważmy, że f jest odwzorowaniem różnowartościowym. Istotnie, jeżeli $f(x) = f(y)$, to $d(f(x), f(y)) = 0$, a zatem $d(x, y) = 0$ oraz $x = y$. Pokażemy, że odwzorowanie odwrotne $f^{-1}\colon B \to A \subset B$ jest kontrakcją. Dla dowolnych $z, w \in B$ istnieją takie punkty $x, y \in A$, że $z = f(x)$ oraz $w = f(y)$. Wtedy

$$d(z, w) = d(f(x), f(y)) \geqslant \beta d(x, y) = \beta d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)),$$

czyli

$$d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \leqslant \frac{1}{\beta} d(z, w).$$

Na mocy twierdzenia Banacha odwzorowanie f^{-1} posiada dokładnie jeden punkt stały $x^* \in A$, który jest zarazem jedynym punktem stałym odwzorowania f. $\square$

Następujący wynik stanowi z jednej strony rozszerzenie Twierdzenia 2.3, z drugiej natomiast odpowiednik Twierdzenia 2.2 dla odwzorowań silnie F-rozszerzających.

Twierdzenie 2.4 ([26, Theorem 5])**.** *Niech A, B będą takimi niepustymi podzbiorami przestrzeni topologicznej X, że $A \subset B$ oraz niech $f \colon A \to B$ będzie silnie F-rozszerzającym homeomorfizmem. Jeżeli istnieje punkt $x_0 \in A$ taki, że następująca implikacja*

$$f(C) = C \cup \{f(x_0)\} \quad \Longrightarrow \quad C \text{ jest warunkowo zwarty w } A \tag{2.3}$$

jest prawdziwa dla dowolnego przeliczalnego zbioru $C \subset A$, to odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Na wstępie dowodu wykażemy, że odwzorowanie $f^{-1} \colon B \to A \subset B$ jest słabo F-kontrakcyjne. Dla dowolnych punktów $z, w \in B$ takich, że $z \neq w$, mamy

$$F(z, w) = F(f(x), f(y)) > F(x, y) = F(f^{-1}(z), f^{-1}(w)),$$

gdzie $z = f(x)$ oraz $w = f(y)$, a zatem $F(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) < F(z, w)$.

Załóżmy teraz, że V jest dowolnym przeliczalnym podzbiorem B takim, że $V = f^{-1}(V) \cup \{f(x_0)\}$. Wtedy $V = f(C)$ dla pewnego przeliczalnego zbioru $C \subset A$ oraz

$$f(C) = f^{-1}(f(C)) \cup \{f(x_0)\} = C \cup \{f(x_0)\}.$$

Wobec (2.3) zbiór $\overline{C}$ jest zwarty w A, a zatem z ciągłości odwzorowania f wynika, że $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym w B. Na mocy Twierdzenia 2.2, odwzorowanie f^{-1} ma dokładnie jeden punkt stały, który jest zarazem jedynym punktem stałym odwzorowania f. $\square$

Zaprezentujemy teraz dwa przykłady ilustrujące Twierdzenie 2.4. Dodajmy, iż interesującym wydaje się być Przykład 2.4, który pokazuje, że założenie silniej F-rozszerzalności odwzorowania f jest istotne, tzn. nie może zostać ono zastąpione założeniem silniej rozszerzalności.

Przykład 2.3 ([26, Example 3])**.** Niech X będzie przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $x \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ z normą

$$\|x\|_2 := \Big(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Rozważmy odwzorowanie $f\colon A \to B$ określone wzorem $f(x) = 2x$ dla $x \in A$, gdzie

$$A{:=}\{x \in X : \|x\|_2 \leqslant 1\} \quad \text{oraz} \quad B{:=}\{x \in X : \|x\|_2 \leqslant 2\}.$$

Zauważmy, że zbiór B nie jest zupełny w normie $\|\cdot\|_2$. Oczywiście

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = 2\,\|x - y\|_2 \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in X,$$

co pokazuje, że odwzorowanie f jest silnie rozszerzające.

Pokażemy teraz, że odwzorowanie f spełnia warunek (2.3) z $x_0 = 0$, gdzie 0 oznacza funkcję tożsamościowo równą zero. Załóżmy, że C jest takim niepustym przeliczalnym podzbiorem zbioru A, że $f(C) = C \cup \{0\}$. Gdyby punkt $x \neq 0$ należał do zbioru C, to $f^n(x) \in C \subset A$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, z czego wynikałoby, że $2^n \cdot \|x\|_2 \in [0, 1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, wobec niepustości zbioru C, że $C = \{0\}$. W szczególności zbiór C jest więc warunkowo zwarty w A.

Ponieważ zarówno f jak i f^{-1} są odwzorowaniami ciągłymi, więc na mocy Twierdzenia 2.4 odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Przykład 2.4 ([26, Example 4])**.** W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką promienistą d_p rozważmy następujące zbiory

$$A{:=}\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [9, 10],\ y = 20 - 2x\Big\}$$

oraz

$$B{:=}\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [8, 10],\ y = 20 - 2x\Big\}.$$

Odwzorowanie $f\colon A \to B$ określone wzorem $f(x, y) = (2x - 10, 2y)$ jest homeomorfizmem, gdyż zbiory A i B składają się wyłącznie z punktów izolowanych. Pokażemy teraz, że odwzorowanie f jest silnie d_r-rozszerzające, gdzie d_r oznacza metrykę „rzeka". Niech $(x_i, y_i) \in A$ dla $i = 1, 2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x_1 < x_2$. Wtedy

$$d_r(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) = 2y_1 + 2x_2 - 2x_1 + 2y_2 = 2d_r((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Ponadto można wykazać, że metryka „rzeka" rozpatrywana jako funkcja zdefiniowana na przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_p) \times (\mathbb{R}^2, d_p)$ jest półciągła z dołu, a więc także górnie półciągła z dołu. Tym samym odwzorowanie f jest silnie d_r-rozszerzające.

Z rozumowania analogicznego jak w Przykładzie 2.3 wynika, że f spełnia warunek (2.3) dla $x_0 = (10, 0)$, a zatem na mocy Twierdzenia 2.4 odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Zauważmy jednak, iż f nie jest silnie d_p-rozszerzające. Istotnie,

$$d_p(f(10, 0), f(9, 2)) = 10 + \sqrt{80} \quad \text{oraz} \quad d_p((10, 0), (9, 2)) = 10 + \sqrt{85},$$

a zatem wprowadzenie funkcji F w Twierdzeniu 2.4 jest istotne.

2.1.1. Twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań słabo kontrakcyjnych w przestrzeniach niearchimedesowych. W roku 1993 C. Petalas i T. Vidalis ([72]) uzyskali twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań słabo kontrakcyjnych w sferycznie zupełnych niearchimedesowych przestrzeniach unormowanych. W tej samej pracy autorzy pokazali również, że założenie sferycznej zupełności rozważanej przestrzeni jest istotne i nie może zostać opuszczone, a także, że omawiane twierdzenie nie zachodzi dla odwzorowań nierozszerzających (zob. [72, Example 1 oraz Example 2]).

Poniżej prezentujemy pewne rozszerzenie wyniku Petalasa i Vidalisa dla odwzorowań słabo kontrakcyjnych określonych na kulach.

Twierdzenie 2.5 ([27, Theorem 5.1])**.** *Niech X będzie sferycznie zupełną unormowaną przestrzenią niearchimedesową. Jeżeli odwzorowanie $f\colon B_X(0,r) \to B_X(0,r)$ jest słabo kontrakcyjne, to posiada ono dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Dla prostoty przez B_a oznaczmy kulę $B_X(a, \|a - f(a)\|)$. Zauważmy, że $B_a \subset B_X(0,r)$ dla każdego $a \in B_X(0,r)$. Istotnie, dla $x \in B_a$ mamy

$$\|x\| \leqslant \max\Big\{\|x-a\|, \|a\|\Big\} \leqslant \max\Big\{\|a-f(a)\|, \|a\|\Big\} \leqslant \max\Big\{\|a\|, \|f(a)\|\Big\} \leqslant r.$$

Wykażemy teraz, że w rodzinie $\mathcal{A} := \{B_a : a \in B_X(0,r)\}$, częściowo uporządkowanej przez relację inkluzji, istnieje element minimalny. Niech $\mathcal{C}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{A}$. Wobec Stwierdzenia 1.5 istnieje taki punkt $b \in X$, że

$$b \in B := \bigcap_{B_a \in \mathcal{C}} B_a.$$

Okazuje się, że $B_b \subset B_a$ dla każdego $B_a \in \mathcal{C}$. Istotnie, niech $x \in B_b$. Wtedy

$$\|x-a\| \leqslant \max\Big\{\|x-b\|, \|b-a\|\Big\} \leqslant \|a-f(a)\|,$$

ponieważ $\|b-a\| \leqslant \|a-f(a)\|$ oraz

$$\begin{aligned}\|x-b\| &\leqslant \|b-f(b)\| \\ &\leqslant \max\Big\{\|b-a\|, \|a-f(a)\|, \|f(a)-f(b)\|\Big\} \\ &\leqslant \max\Big\{\|b-a\|, \|a-f(a)\|\Big\} = \|a-f(a)\|.\end{aligned}$$

Dowolny łańcuch w rodzinie $\mathcal{A}$ posiada więc ograniczenie dolne, a zatem na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w $\mathcal{A}$ istnieje element minimalny B_z, gdzie $z \in B_X(0,r)$.

Przypuśćmy, że $z \neq f(z)$. Ponieważ $\|f(z) - f^2(z)\| < \|z - f(z)\|$ oraz $f(z) \in B_{f(z)} \cap B_z$, więc $B_{f(z)} \subset B_z$. Z drugiej jednak strony $z \notin B_{f(z)}$, a zatem $B_{f(z)} \neq B_z$, co przeczy minimalności kuli B_z. Tym samym $f(z) = z$. Jedyność punktu stałego odwzorowania f wynika z Uwagi 2.1. $\square$

2.2. Twierdzenie typu Möncha

W niniejszym krótkim paragrafie wykażemy twierdzenie typu Möncha, udowodnione w pracy [20], w której zostało ono zastosowane do badania istnienia słabo ciągłych rozwiązań nieliniowego całkowego równania Hammersteina w przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 2.6 ([20, Theorem 1])**.** *Niech A będzie takim domkniętym oraz wypukłym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej Hausdorffa X, że $0 \in A$. Załóżmy ponadto, że odwzorowanie $F\colon A \to A$ jest ciągłe. Jeżeli następująca implikacja*

$$V = \operatorname{conv} F(V) \text{ lub } V = F(V) \cup \{0\} \quad \Longrightarrow \quad V \text{ jest warunkowo zwarty} \tag{2.4}$$

zachodzi dla każdego podzbioru $V \subset A$, to odwzorowanie F posiada punkt stały.

Dowód. Zdefiniujmy ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ następującymi wzorami

$$y_0{:=}0, \qquad y_{n+1}{:=}F(y_n) \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0$$

i połóżmy $Y{:=}\{y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Ponieważ $Y = F(Y) \cup \{0\}$, więc z (2.4) wynika, że zbiór Y jest warunkowo zwarty w A. W szczególności zbiór

$$Z{:=}\{x \in A : x \text{ jest punktem skupienia ciągu } (y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\}$$

jest niepusty (por. [84, Section 11 oraz Theorem 17.4]).

Pokażemy teraz, że $Z = F(Z)$. Niech $y \in F(Z)$, tzn. $y = F(x)$ dla pewnego $x \in Z$. Na mocy [84, Theorem 11.5] ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ posiada podciąg uogólniony $(\eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ zbieżny do punktu x. Zauważmy że $(F(\eta_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ jest podciągiem uogólnionym ciągu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oraz $\lim_{\lambda\in\Lambda} F(\eta_\lambda) = F(x)$, co dowodzi, że $y = F(x) \in Z$. Tym samym $F(Z) \subset Z$.

Niech teraz $x \in Z$ oraz niech $(\eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ będzie zbieżnym do x podciągiem uogólnionym ciągu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Stosując definicję podciągu uogólnionego (zob. [84, Definition 11.2]) oraz fakt, że $Y = F(Y) \cup \{0\}$ można wykazać, iż istnieją ciągi uogólnione $(\xi_\mu)_{\mu\in M}$ oraz $(\zeta_\mu)_{\mu\in M}$ takie, że:

- $(\xi_\mu)_{\mu\in M}$ jest podciągiem uogólnionym $(\eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$;
- $(\zeta_\mu)_{\mu\in M}$ jest podciągiem uogólnionym $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zbieżnym do pewnego $y \in A$;
- $\xi_\mu = F(\zeta_\mu)$ dla $\mu \in M$.

Stąd, wobec hausdorffowości przestrzeni X, otrzymujemy

$$x = \lim_{\mu\in M} \xi_\mu = \lim_{\mu\in M} F(\zeta_\mu) = F(y),$$

co dowodzi, iż $x \in F(Z)$. W konsekwencji $Z \subset F(Z)$.

Rozważmy teraz następującą rodzinę podzbiorów zbioru A

$$\Omega := \{W \subset A : Z \subset W \text{ oraz } \operatorname{conv} F(W) \subset W\}\,.$$

Rodzina Ω jest niepusta, gdyż $A \in \Omega$. Niech V oznacza przekrój wszystkich zbiorów należących do Ω. Zbiór V jest niepusty, bowiem $Z \subset V$.

Wykażemy, że $V = \operatorname{conv} F(V)$. Ponieważ $\operatorname{conv} F(V) \subset \operatorname{conv} F(W) \subset W$ dla każdego $W \in \Omega$, więc $\operatorname{conv} F(V) \subset V$, a zatem

$$\operatorname{conv} F\Big[\operatorname{conv} F(V)\Big] \subset \operatorname{conv} F(V).$$

Ponadto $Z = F(Z) \subset \operatorname{conv} F(Z) \subset \operatorname{conv} F(V)$, co dowodzi, że $\operatorname{conv} F(V) \in \Omega$. Stąd $V = \operatorname{conv} F(V)$.

Z (2.4) wynika, że $\overline{V}$ jest zwartym podzbiorem zbioru A. Ponieważ $F(\overline{V}) \subset \overline{V}$, więc na mocy twierdzenia Schaudera (zob. [38, Theorem 2.3, s. 74]) obcięcie odwzorowania F do zbioru $\overline{V}$ posiada punkt stały, co kończy dowód. □

Uwaga 2.4. Zauważmy, iż Twierdzenie 2.6 pozostanie prawdziwe, jeżeli punkt 0 zastąpimy dowolnym innym punktem $x_0 \in A$.

2.3. Twierdzenia typu Leggetta-Williamsa

Paragraf ten rozpoczniemy od przedstawienia wyniku udowodnionego przez L. W. Leggetta i R. W. Williamsa w związku z badaniami dotyczącymi istnienia dodatnich wartości własnych nieliniowych operatorów całkowych Hammersteina.

Definicja 2.2 ([38, Definition 1.1, s. 51])**.** Ciągłe odwzorowanie F przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y nazywamy *zwartym*, jeżeli obraz $F(X)$ zawarty jest w zwartym podzbiorze przestrzeni Y.

Twierdzenie 2.7 ([55, Theorem 1])**.** *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą częściowo uporządkowaną przestrzenią Banacha ze stożkiem C_X i niech $F\colon C_X(0,r) \to C_X$, gdzie $r > 0$, będzie odwzorowaniem zwartym. Załóżmy ponadto, że istnieją ciągły, addytywny i dodatnio jednorodny funkcjonał $\xi\colon C_X \to \mathbb{R}_+$ oraz liczby $m, M, \delta > 0$ spełniające następujące warunki:*

(i) $\|F(x)\| \leqslant M\xi F(x)$ *dla* $x \in C_X(0,r)$;

(ii) $m \leqslant rM^{-1}$ *oraz* $\xi x = m$ *dla pewnego* $x \in C_X(0,r)$;

(iii) $\xi F(x) \geqslant \delta$, *jeżeli* $x \in C_X(0,r)$ *oraz* $\xi x = m$.

Wtedy istnieją $\lambda_0 > 0$ *oraz* $x_0 \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ *takie, że* $\lambda_0 x_0 = F(x_0)$ *oraz* $\xi x_0 = m$.

Zanim przejdziemy do sformułowania i udowodnienia pewnego rozszerzenia Twierdzenia 2.7, przypomnimy kilka faktów dotyczących retraktów absolutnych.

Definicja 2.3 ([38, Definition 10.1, s. 92])**.** Przestrzeń topologiczną Y nazywamy *retraktem absolutnym*, jeżeli:

(a) przestrzeń Y jest metryzowalna;

(b) dla dowolnej przestrzeni metryzowalnej X oraz dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ każde ciągłe odwzorowanie $f\colon A \to Y$ posiada ciągłe rozszerzenie $F\colon X \to Y$.

Twierdzenie 2.8 (por. [38, Theorem 10.5, s. 93])**.** *Każdy niepusty oraz wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej jest retraktem absolutnym.*

Twierdzenie 2.9 ([38, Proposition 10.2, s. 92])**.** *Niech B będzie podzbiorem retraktu absolutnego Y. Jeżeli istnieje retrakcja przestrzeni Y na B, to B jest retraktem absolutnym.*

Twierdzenie 2.10. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą częściowo uporządkowaną przestrzenią Banacha ze stożkiem C_X oraz niech $F\colon C_X(0,r) \to C_X$, gdzie $r > 0$, będzie odwzorowaniem zwartym. Załóżmy ponadto, że istnieją ciągła seminorma $|\cdot|\colon X \to \mathbb{R}_+$ oraz liczby $m, M, \delta > 0$ spełniające warunki:*

(i) *$C_X(0,r) \cap \ker|\cdot| = \{0\}$;*

(ii) *$\|x\| \leqslant M|x|$ dla $x \in C_X$;*

(iii) *$m \leqslant rM^{-1}$ oraz $|x| = m$ dla pewnego $x \in C_X(0,r)$;*

(iv) *$|F(x)| \geqslant \delta$, jeżeli $x \in C_X(0,r)$ oraz $|x| = m$.*

Wtedy istnieją $\lambda_0 > 0$ oraz $x_0 \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ takie, że $\lambda_0 x_0 = F(x_0)$ oraz $|x_0| = m$.

Dowód. Wykażemy, że zbiór

$$S := \{x \in X : |x| = m\} \cap [C_X(0,r) \setminus \{0\}],$$

który wobec założenia (iii) jest niepusty, jest retraktem zbioru $C_X(0,r) \setminus \{0\}$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\rho\colon C_X(0,r) \setminus \{0\} \to X$ wzorem $\rho(x) = mx|x|^{-1}$. Dla każdego $x \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ mamy

$$\rho(x) \in C_X, \qquad |\rho(x)| = m, \qquad \|\rho(x)\| = m\,\|x\||x|^{-1} \leqslant mM \leqslant r,$$

a zatem $\rho(x) \in S$ dla $x \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$.

Pokażemy teraz, iż odwzorowanie ρ jest ciągłe. Ponieważ seminorma $|\cdot|$ jest ciągła względem normy $\|\cdot\|$, istnieje więc taka stała dodatnia c, że $|x| \leqslant c\,\|x\|$ dla każdego $x \in X$ (por. [1, Twierdzenie 4.1, s. 119]). Dla $x \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ oraz $\varepsilon > 0$ niech

$$0 < \delta < \min\Big\{(2c)^{-1}|x|,\ (2m)^{-1}\varepsilon|x|,\ (4rcm)^{-1}|x|^2\Big\}.$$

Wtedy, jeżeli $y \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ oraz $\|x-y\| \leqslant \delta$, to

$$|y| \geqslant |x| - |x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x|$$

oraz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\,\|\rho(x)-\rho(y)\| &= \frac{\big\|x|y| - y|x|\big\|}{|x||y|} \leqslant \frac{\big\|x|y| - y|y|\big\| + \big\|y|y| - y|x|\big\|}{|x||y|} \\
&\leqslant \frac{\|x-y\|}{|x|} + \frac{\|y\||x-y|}{|x||y|} \leqslant \frac{\|x-y\|}{|x|} + \frac{\|y\||x-y|}{|x|\big(|x| - |y-x|\big)} \\
&\leqslant \frac{\|x-y\|}{|x|} + \frac{\|y\||x-y|}{2^{-1}|x|^2} \leqslant \frac{\|x-y\|}{|x|} + \frac{2rc\,\|x-y\|}{|x|^2} \\
&\leqslant \frac{1}{2m}\varepsilon + \frac{1}{2m}\varepsilon = \frac{1}{m}\varepsilon,
\end{aligned}$$

co pokazuje, iż odwzorowanie ρ jest retrakcją.

Stąd, wobec wypukłości zbioru $C_X(0,r) \setminus \{0\}$, na mocy Twierdzenia 2.8 oraz Twierdzenia 2.9 wnosimy, że S jest retraktem absolutnym. Zdefiniujmy odwzorowanie $T\colon S \to X$ wzorem

$$T(x) = \frac{mF(x)}{|F(x)|}.$$

Ponieważ dla $x \in S$ mamy

$$|T(x)| = m \qquad \text{oraz} \qquad \|T(x)\| = \frac{m}{|F(x)|}\,\|F(x)\| \leqslant mM \leqslant r,$$

więc T odwzorowuje S w siebie. Z uwagi na założenie (iv), rozumując podobnie jak w przypadku ciągłości retrakcji ρ można wykazać, że odwzorowania T jest zwarte, a zatem na mocy uogólnionego twierdzenia Schaudera (zob. [38, Theorem 10.8, s. 94]) T posiada punkt stały $x_0 \in S$. Stąd $\lambda_0 x_0 = F(x_0)$ dla $\lambda_0 = |F(x_0)|m^{-1}$. □

Uwaga 2.5. W teorii punktu stałego problem istnienia rozwiązania (λ, x) równania $\lambda x = F(x)$ nazywany jest zagadnieniem istnienia *kierunku niezmienniczego* (ang. *invariant direction*) dla odwzorowania F. Twierdzenie 2.7 oraz Twierdzenie 2.10 orzekają zatem, iż przy pewnych założeniach odwzorowanie zwarte F posiada „dodatni" kierunek niezmienniczy o pewnych dodatkowych własnościach. Dodajmy, iż klasycznymi wynikami dotyczącymi zagadnienia istnienia kierunku niezmienniczego dla odwzorowań zwartych są m.in. twierdzenie Birkhoffa-Kellogga oraz alternatywa nieliniowa (zob. [38, ss. 61-62]).

Założenie zwartości odwzorowania F w Twierdzeniu 2.7 można osłabić. Prawdziwe bowiem jest następujące

Twierdzenie 2.11. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą częściowo uporządkowaną przestrzenią Banacha ze stożkiem C_X oraz niech $F\colon C_X(0,r) \to C_X$, gdzie $r > 0$, będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy ponadto, że istnieją ciągły, addytywny i dodatnio jednorodny funkcjonał $\xi\colon C_X \to \mathbb{R}_+$ oraz liczby $m, M, \delta > 0$ spełniające warunki:*

(i) $\|F(x)\| \leqslant M\xi F(x)$ *dla* $x \in C_X(0,r)$;

(ii) $m \leqslant rM^{-1}$ *oraz* $\xi x = m$ *dla pewnego* $x \in C_X(0,r)$;

(iii) $\xi F(x) \geqslant \delta$, *jeżeli* $x \in C_X(0,r)$ *oraz* $\xi x = m$.

Jeżeli istnieje $y \in C_X(0,r)$ takie, że $\xi y = m$, dla którego następująca implikacja

$$\Big[V \subset \operatorname{conv} \bigcup_{0<\lambda\leqslant \frac{m}{\delta}} \lambda F(V) \quad \textit{lub} \quad V \subset \bigcup_{0<\lambda\leqslant \frac{m}{\delta}} \lambda F(V) \cup \{y\}\Big] \quad \Longrightarrow \quad \overline{V} \textit{ jest zwarty}$$

jest prawdziwa dla każdego zbioru $V \subset C_X(0,r)$, to istnieją: liczba dodatnia λ_0 oraz punkt $x_0 \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ takie, że $\lambda_0 x_0 = F(x_0)$ oraz $\xi x_0 = m$.

Dowód. Niech $S{:=}\xi^{-1}(\{m\}) \cap C_X(0,r)$. Oczywiście zbiór S jest niepusty, domknięty oraz wypukły. Podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 2.10 zdefiniujmy odwzorowanie $T\colon S \to X$ wzorem

$$T(x) = \frac{mF(x)}{\xi F(x)}.$$

Zauważmy, iż odwzorowanie T jest ciągłe oraz odwzorowuje zbiór S w siebie. Pokażemy, że spełnia ono założenia Twierdzenia 2.6. Niech V będzie dowolnym podzbiorem zbioru S. Ponieważ dla każdego $x \in V$ mamy

$$T(x) = \frac{m}{\xi F(x)} F(x) \in \bigcup_{0<\lambda\leqslant \frac{m}{\delta}} \lambda F(V),$$

więc

$$\operatorname{conv} T(V) \subset \operatorname{conv} \bigcup_{0<\lambda\leqslant \frac{m}{\delta}} \lambda F(V) \quad \text{oraz} \quad T(V) \cup \{y\} \subset \bigcup_{0<\lambda\leqslant \frac{m}{\delta}} \lambda F(V) \cup \{y\}.$$

Tym samym, jeżeli $V = \operatorname{conv} T(V)$ lub $V = T(V) \cup \{y\}$, to na mocy założenia zbiór V jest warunkowo zwarty w S. Z Twierdzenia 2.6 (por. Uwaga 2.4) odwzorowanie T posiada więc punkt stały $x_0 \in S$, a zatem $\lambda_0 x_0 = F(x_0)$, gdzie $\lambda_0 = m^{-1}\xi F(x_0)$. $\square$

Na zakończenie tego paragrafu przedstawimy pochodzący od V. C. Borkara i S. T. Patila wynik, który może być zastosowany do badania istnienia dodatnich rozwiązań układów równań nieliniowych postaci

$$\lambda x = F(x,y), \qquad \lambda y = F(y,x).$$

Wniosek 2.2 ([12, Theorem 2.1]). *Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie rzeczywistą częściowo uporządkowaną przestrzenią Banacha ze stożkiem* C_X *i niech* $F\colon C_X(0,r) \times C_X(0,r) \to C_X$*, gdzie* $r > 0$*, będzie odwzorowaniem zwartym. Załóżmy ponadto, że istnieją ciągły, addytywny i dodatnio jednorodny funkcjonał* $\xi\colon C_X \times C_X \to \mathbb{R}_+$ *oraz liczby* $m, M, \delta > 0$ *spełniające warunki:*

(i) $\xi[F(x,y), F(y,x)] = \xi[F(y,x), F(x,y)]$ *dla* $x, y \in C_X(0,r)$*;*

(ii) $\|F(x,y)\| \leqslant M\xi[F(x,y), F(y,x)]$ *dla* $x, y \in C_X(0,r)$*;*

(iii) $m \leqslant rM^{-1}$ *oraz* $\xi(x,y) = m$ *dla pewnych* $x, y \in C_X(0,r)$*;*

(iv) $\xi[F(x,y), F(y,x)] \geqslant \delta$*, jeżeli* $x, y \in C_X(0,r)$ *oraz* $\xi(x,y) = m$*.*

Wtedy istnieją $\lambda_0 > 0$ *oraz* $x_0, y_0 \in C_X(0,r) \setminus \{0\}$ *takie, że* $\xi(x_0, y_0) = m$ *oraz*

$$\lambda_0 x_0 = F(x_0, y_0), \qquad \lambda_0 y_0 = F(y_0, x_0).$$

Dowód. Rozważmy rzeczywistą przestrzeń Banacha $X \times X$ z normą maksimum oraz stożkiem $\Gamma := C_X \times C_X$. Zauważmy, że $\Gamma(0,r) = C_X(0,r) \times C_X(0,r)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi\colon \Gamma(0,r) \to \Gamma$ wzorem

$$\Phi(x,y) = (F(x,y), F(y,x)) \qquad \text{dla } (x,y) \in \Gamma(0,r).$$

Odwzorowanie Φ wraz z funkcjonałem ξ oraz liczbami m, M, δ spełnia założenia Twierdzenia 2.7, a zatem istnieją $\lambda_0 > 0$ oraz $(x_0, y_0) \in \Gamma(0,r) \setminus \{(0,0)\}$ takie, że $\xi(x_0, y_0) = m$ oraz $\lambda_0(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0)$, co wobec określenia odwzorowania Φ daje $\lambda_0 x_0 = F(x_0, y_0)$ i $\lambda_0 y_0 = F(y_0, x_0)$. □

Uwaga 2.6. Zaznaczmy, iż zaprezentowany dowód Wniosku 2.2 różni się od dowodu zaprezentowanego przez V. C. Borkara i S. T. Patila, który z kolei inspirowany był dowodem twierdzenia Leggetta-Williamsa (zob. [55, Theorem 1] oraz por. dowód Twierdzenia 2.10).

Uwaga 2.7. Wynik Borkara-Patila na przypadek odwzorowań L-α-zgęszczających (tzn. spełniających warunek z Twierdzenia 2.1 ze stałą $L > 0$ po prawej stronie nierówności) uogólnili B. C. Dhage oraz M. Kumpulainen w [34].

Uwaga 2.8. W ostatnich latach ukazało się wiele prac poświęconych tzw. podwójnym punktom stałym (zob. np. [8, 29, 33, 70]). Przypomnijmy, iż $(x,y) \in X \times X$ nazywamy *podwójnym punktem stałym* (ang. *coupled fixed point*) odwzorowania $F\colon X \times X \to X$, jeżeli $x = F(x,y)$ oraz $y = F(y,x)$. Okazuje się jednak, iż w niektórych przypadkach, rozumując analogicznie jak w dowodzie Wniosku 2.2, twierdzenia dotyczące podwójnych punktów stałych można sprowadzić do znanych wyników z teorii punktu stałego.

2.4. Twierdzenia typu Lovelady'ego

W roku 1973 D. L. Lovelady ([59]) wykazał twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań powstających jako złożenie odwzorowania lipschitzowskiego z odwzorowaniem wyższego rzędu, które okazało się szczególnie użyteczne przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych z zaburzeniem. W niniejszym paragrafie wykażemy kilka twierdzeń typu Lovelady'ego, zarówno w przypadku archimedesowym, jak i niearchimedesowym. Pokażemy również, iż metoda oparta na twierdzeniach typu Lovelady'ego w pewnych przypadkach może prowadzić do ogólniejszych wyników niż np. metoda oparta na twierdzeniu Banacha.

Nasze rozważania rozpoczniemy od definicji odwzorowania wyższego rzędu, wprowadzonej przez S. I. Grossmana i R. K. Millera.

Definicja 2.4 ([48])**.** Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Odwzorowanie $G\colon B_X(0,r) \to X$ nazywamy *odwzorowaniem wyższego rzędu*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $0 < \delta \leqslant r$ takie, że

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in B_X(0,\delta). \tag{2.5}$$

2.4.1. Twierdzenia typu Lovelady'ego w przestrzeniach archimedesowych. W następującym twierdzeniu, w porównaniu z oryginalnym wynikiem Lovelady'ego ([59, Theorem 1]) zakładamy, że rozważane odwzorowania zamiast na całych przestrzeniach określone są na pewnych ich podzbiorach.

Twierdzenie 2.12 ([27, Proposition 5])**.** *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami Banacha oraz niech odwzorowanie $T\colon X \times B_Y(0,r) \to Y$ spełnia następujące warunki:*

(i) $T(0,0) = 0$;

(ii) $\|T(a,x) - T(b,y)\|_Y \leqslant \beta \|a-b\|_X + \beta \|x-y\|_Y$ *dla wszystkich* $a, b \in X$ *oraz wszystkich* $x, y \in B_Y(0,r)$, *gdzie* $\beta \geqslant 0$.

Załóżmy ponadto, że $G\colon B_Y(0,r) \to Y$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu oraz $G(0) = 0$. Istnieją wtedy takie liczby $\eta, \sigma \in (0,r]$, że dla każdego $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $x^* \in B_Y(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(a_0, x_0 + G(x^*))$.

Dowód. Z definicji odwzorowania wyższego rzędu dla

$$\varepsilon := \frac{1}{4\max\{1,\beta\}}$$

istnieje taka liczba $\sigma \in (0,r]$, że $\|G(x) - G(y)\|_Y \leqslant \varepsilon \|x-y\|_Y$ dla wszystkich $x, y \in B_Y(0,\sigma)$. Niech $\eta := \varepsilon \cdot \sigma$ oraz niech $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $K\colon B_Y(0,\sigma) \to Y$ następującym wzorem

$$K(x) = T(a_0, x_0 + G(x)).$$

Zauważmy, że odwzorowanie K jest dobrze określone, gdyż

$$\begin{aligned}\|x_0 + G(x)\|_Y &\leqslant \|x_0\|_Y + \|G(x)\|_Y \leqslant \|x_0\|_Y + \varepsilon \|x\|_Y \\ &\leqslant \eta + \varepsilon \cdot \sigma = \frac{2\sigma}{4\max\{1,\beta\}} \leqslant r.\end{aligned}$$

Ponadto, dla $x \in B_Y(0,\sigma)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|K(x)\|_Y &\leqslant \beta \|a_0\|_X + \beta \|x_0\|_Y + \beta \|G(x)\|_Y \leqslant \beta \|a_0\|_X + \beta \|x_0\|_Y + \beta\varepsilon \|x\|_Y \\ &\leqslant 3\beta\varepsilon\sigma = \frac{3\beta\sigma}{4\max\{1,\beta\}} \leqslant \sigma,\end{aligned}$$

a zatem K odwzorowuje kulę $B_Y(0,\sigma)$ w siebie. Ponieważ dla $x, y \in B_Y(0,\sigma)$ mamy

$$\begin{aligned}\|K(x) - K(y)\|_Y &\leqslant \beta \|G(x) - G(y)\|_Y \leqslant \varepsilon\beta \|x - y\|_Y \\ &= \frac{\beta}{4\max\{1,\beta\}} \|x - y\|_Y \leqslant \frac{1}{4} \|x - y\|_Y \,,\end{aligned}$$

więc odwzorowanie K jest kontrakcją. Na mocy twierdzenia Banacha istnieje zatem dokładnie jeden punkt stały odwzorowania K należący do kuli $B_Y(0,\sigma)$. $\square$

Uwaga 2.9. Zauważmy, że Twierdzenie 2.12 może być również zastosowane dla odwzorowań $T\colon B_Y(0,r) \to Y$ spełniających warunek Lipschitza ze stałą $\beta \geqslant 0$ oraz takich, że $T(0) = 0$. Istotnie, w takim przypadku wystarczy rozważyć odwzorowanie $\overline{T}\colon X \times B_Y(0,r) \to Y$ określone wzorem $\overline{T}(a,x) = T(x)$ dla $(a,x) \in X \times B_Y(0,r)$.

Udowodnimy teraz następujące rozszerzenie twierdzenia Lovelady'ego dla przestrzeni Banacha z quasimodułem.

Wniosek 2.3 ([27, Proposition 6]). *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami Banacha oraz niech $\preccurlyeq$ będzie taką dwuargumentową relacją przechodnią określoną w przestrzeni Y, że dla wszystkich $x, y \in Y$ z warunku $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ wynika, iż $\|x\|_Y \leqslant c\|y\|_Y$, gdzie $c > 0$. Załóżmy ponadto, że odwzorowania $A, B, m\colon Y \to Y$ oraz $n\colon X \to Y$ są takie, że:*

(i) *$0 \preccurlyeq m(x)$ oraz $\|m(x)\|_Y = \|x\|_Y$ dla każdego $x \in Y$;*

(ii) *istnieje taka stała $d > 0$, że $\|n(a)\|_Y \leqslant d\|a\|_X$ dla każdego $a \in X$;*

(iii) *A, B są ciągłymi operatorami liniowymi.*

Niech odwzorowanie $T\colon X \times Y \to Y$ spełnia następujące warunki:

(iv) *$T(0,0)=0$;*

(v) *$m(T(a,x)-T(b,y)) \preccurlyeq Am(x-y)+Bn(a-b)$ dla wszystkich $a,b\in X$ oraz $x,y\in Y$*

oraz niech $G\colon Y\to Y$ będzie odwzorowaniem wyższego rzędu i $G(0)=0$.

Istnieją wtedy takie liczby dodatnie σ,η, że dla każdego $(a_0,x_0)\in B_X(0,\eta)\times B_Y(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $x^*\in B_Y(0,\sigma)$ taki, że $x^*=T(a_0,x_0+G(x^*))$.

Dowód. Dla punktów $a,b\in X$ oraz $x,y\in Y$ mamy

$$\begin{aligned}\|T(a,x)-T(b,y)\|_Y &= \|m(T(a,x)-T(b,y))\|_Y\\ &\leqslant c\,\|A\|\,\|m(x-y)\|_Y + c\,\|B\|\,\|n(a-b)\|_Y\\ &\leqslant c\,\|A\|\,\|x-y\|_Y + cd\,\|B\|\,\|a-b\|_X\,,\end{aligned}$$

a zatem na mocy Twierdzenia 2.12 istnieją takie liczby dodatnie η oraz σ, że dla każdego $(a_0,x_0)\in B_X(0,\eta)\times B_Y(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $x^*\in B_Y(0,\sigma)$ taki, że $x^*=T(a_0,x_0+G(x^*))$. □

W wielu przypadkach zamiast Twierdzenia 2.12 można stosować twierdzenie Banacha o kontrakcji, jednak jak pokazuje poniższy przykład, zastosowanie metody opartej na twierdzeniu Lovelady'ego może prowadzić do „lepszych" oszacowań stałej η, która związana jest z zakresem zmienności warunków początkowych rozważanych problemów (por. też Uwaga 4.6).

Przykład 2.5. Rozważmy następujące liniowe równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju z zaburzeniem

$$x(t)=g(t)+G(x)(t)+\int_0^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1] \tag{2.6}$$

i załóżmy, że $G\colon C[0,1]\to C[0,1]$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu, a funkcje $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ i $k\colon\Delta\to\mathbb{R}$, gdzie

$$\Delta := \{(t,s)\in[0,1]\times[0,1] : 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\}\,,$$

są ciągłe. Przypuśćmy ponadto, że $G(0)=0$ oraz $\|k\|_\infty<1$.

Wobec przyjętych założeń, operator $F_g\colon C[0,1]\to C[0,1]$ zdefiniowany wzorem

$$F_g(x)(t)=g(t)+\int_0^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1]$$

jest kontrakcją. Stąd odwzorowanie $T\colon C[0,1]\to C[0,1]$, które funkcji $g\in C[0,1]$ przyporządkowuje jedyne ciągłe rozwiązanie równania $x=F_g(x)$, jest dobrze określone. Oczywiście $T(0)=0$, a ponadto z lematu Gronwalla (zob. np. [67, Lemat

Belmana, s. 118]) wynika, że T spełnia warunek Lipschitza ze stałą $e^{\|k\|_\infty}$. Wybierając liczbę $\varepsilon > 0$ tak, by $\varepsilon \cdot e^{\|k\|_\infty} < 1$ i przyjmując

$$\sigma{:=}\delta(a\varepsilon) \qquad \text{oraz} \qquad \eta{:=}(1-a)\sigma\varepsilon, \tag{2.7}$$

gdzie $a \in (0,1)$, a $\delta(\varepsilon)$ jest stałą wybraną zgodnie z definicją odwzorowania wyższego rzędu dla $\varepsilon > 0$, analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.12 można wykazać, iż odwzorowanie $K\colon B_C(0,\sigma) \to B_C(0,\sigma)$, zdefiniowane wzorem $K(x) = T(g + G(x))$ dla $x \in B_C(0,\sigma)$ oraz ustalonego $g \in B_C(0,\eta)$, jest kontrakcją. W konsekwencji K posiada dokładnie jeden punkt stały $x^* \in B_C(0,\sigma)$, który oczywiście jest rozwiązaniem równania (2.6).

Istnienie ciągłych rozwiązań równania (2.6) wynika również z twierdzenia Banacha. Można łatwo pokazać, iż dla danego $\varepsilon > 0$ takiego, że $\varepsilon + \|k\|_\infty < 1$ oraz liczb η i σ określonych wzorami (2.7), a także ustalonego $g \in B_C(0,\eta)$, odwzorowanie $G + F_g$ jest kontrakcją oraz przekształca kulę $B_C(0,\sigma)$ w siebie. Zatem, na mocy zasady kontrakcji Banacha, w kuli $B_C(0,\sigma)$ istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania $G + F_g$, który jest zarazem ciągłym rozwiązaniem równania (2.6).

Zauważmy, że z porównania dopuszczalnych wartości stałej $\varepsilon > 0$ dla odpowiednich metod wynika, iż zakres stosowalności metody związanej z twierdzeniem Banacha w przypadku równania (2.6) jest mniejszy niż metody opartej na twierdzeniu Lovelady'ego. Bezpośrednie zastosowanie zasady kontrakcji, w przeciwieństwie do metody bazującej na twierdzeniu Lovelady'ego, pozwala bowiem na wykazanie istnienia ciągłego rozwiązania równania (2.6) dla funkcji „początkowych" g należących do kuli o mniejszym promieniu η. Przykładowo zakładając, iż odwzorowanie wyższego rzędu G jest takie, że $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon$ (por. Przykład 3.5 oraz Przykład 3.8) oraz przyjmując $\|k\|_\infty{:=}0{,}9$, $a{:=}0{,}5$, w przypadku metody opartej na twierdzeniu Banacha otrzymujemy

$$\varepsilon < 0{,}1, \qquad \sigma < 0{,}025, \qquad \eta < 0{,}00125,$$

natomiast w przypadku metody związanej z twierdzeniem Lovelady'ego

$$\varepsilon < 0{,}4066, \qquad \sigma < 0{,}1016, \qquad \eta < 0{,}0207.$$

Na zakończenie nadmieńmy, że stałe ε, σ oraz η, które występują w dowodzie Twierdzenia 2.12 są określone nieco inaczej niż te występujące w niniejszym przykładzie. Wynika to z dwóch powodów: po pierwsze w Twierdzeniu 2.12 rozważa się odwzorowanie T zdefiniowane na iloczynie kartezjańskim podzbiorów przestrzeni unormowanych, a po drugie stałe $\varepsilon, \sigma, \eta$ określone w dowodzie wspomnianego twierdzenia dla ogólnego przypadku, mogą nie być optymalne, gdy rozpatruje się konkretny problem.

2.4.2. TWIERDZENIA TYPU LOVELADY'EGO W PRZESTRZENIACH NIEARCHIMEDESOWYCH. W oparciu o rozszerzenie wyniku C. Petalasa i T. Vidalisa udowodnione w Paragrafie 2.1.1, wykażemy teraz twierdzenie Lovelady'ego dla odwzorowań określonych w przestrzeniach niearchimedesowych.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, iż w przypadku niearchimedesowym można podać przykłady różnowartościowych funkcji o wartościach liczbowych, które spełniają warunek Höldera z wykładnikiem większym niż 1 (zob. [78, Example 26.4 i Exercise 26.B, s. 74] oraz por. [78, Theorem 4.4, s. 11]). W szczególności istnieją przykłady nietrywialnych odwzorowań wyższego rzędu działających w przestrzeniach niearchimedesowych.

Twierdzenie 2.13 ([27, Theorem 5.2])**.** *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą niearchimedesowymi przestrzeniami unormowanymi, przy czym załóżmy, że przestrzeń Y jest sferycznie zupełna. Niech $T\colon X \times Y \to Y$ będzie odwzorowaniem spełniającym następujące warunki:*

(i) $T(0,0) = 0$;

(ii) $\|T(a,x) - T(b,y)\|_Y \leqslant \beta \max\Big\{\|a-b\|_X, \|x-y\|_Y\Big\}$ *dla wszystkich* $a, b \in X$ *oraz* $x, y \in Y$, *gdzie* $\beta \geqslant 0$.

Załóżmy ponadto, że $G\colon Y \to Y$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu oraz $G(0) = 0$. Wtedy istnieją takie liczby dodatnie σ, η, że dla każdego $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $x^* \in B_Y(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(a_0, x_0 + G(x^*))$.

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1.: $\beta = 0$. Niech $\eta{:=}r$ i $\sigma{:=}r$, gdzie $r \in (0, +\infty)$, oraz niech $x^* = 0$. Wtedy dla każdego $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$ otrzymujemy

$$0 = T(0,0) = T(a_0, x_0) = T(a_0, x_0 + G(0)).$$

Przypadek 2.: $\beta > 0$. Z definicji odwzorowania wyższego rzędu dla $\varepsilon < \beta^{-1}$ istnieje liczba $\sigma > 0$ taka, że $\|G(x) - G(y)\|_Y \leqslant \varepsilon \|x - y\|_Y$ dla $x, y \in B_Y(0,\sigma)$. Niech $\eta{:=}\varepsilon\sigma$. Dla ustalonego punktu $(a_0, x_0) \in B_X(0,\eta) \times B_Y(0,\eta)$ zdefiniujmy odwzorowanie $K\colon B_Y(0,\sigma) \to Y$ następującym wzorem

$$K(x) = T(a_0, x_0 + G(x)).$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in B_Y(0,\sigma)$ mamy

$$\begin{aligned}\|K(x)\|_Y &\leqslant \beta \max\Big\{\|a_0\|_X, \|x_0 + G(x)\|_Y\Big\} \leqslant \beta \max\Big\{\|a_0\|_X, \|x_0\|_Y, \varepsilon\|x\|_Y\Big\} \\ &\leqslant \beta \max\{\varepsilon\sigma, \varepsilon\sigma, \varepsilon\sigma\} < \sigma,\end{aligned}$$

a zatem odwzorowanie K przekształca kulę $B_Y(0,\sigma)$ w siebie. Ponadto, dla różnych punktów $x, y \in B_Y(0,\sigma)$, otrzymujemy

$$\|K(x) - K(y)\|_Y \leqslant \beta \, \|G(x) - G(y)\|_Y \leqslant \varepsilon\beta \, \|x - y\|_Y < \|x - y\|_Y \,,$$

co dowodzi słabej kontrakcyjności odwzorowania K. Na mocy Twierdzenia 2.5, odwzorowanie K posiada więc dokładnie jeden punkt stały należący do kuli $B_Y(0,\sigma)$. □

Na zakończenie tego paragrafu przedstawimy przykład zastosowania Twierdzenia 2.13 do dowodu istnienia rozwiązania pewnego równania liniowego z zaburzeniem.

Przykład 2.6 ([27, Example 9])**.** Niech X będzie sferycznie zupełną niearchimedesową przestrzenią unormowaną oraz niech $A\colon X \to X$ będzie takim operatorem liniowym, że operator odwrotny A^{-1} istnieje oraz jest ciągły. Udowodnimy, że jeżeli $G\colon X \to X$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu i $G(0) = 0$, to istnieją liczby dodatnie η oraz σ takie, że dla każdego $z \in B_X(0,\eta)$ równanie

$$Ax - G(x) = z \tag{2.8}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie leżące w kuli $B_X(0,\sigma)$.

Zdefinujmy odwzorowanie $T\colon X \to X$ wzorem $T(x) = A^{-1}x$. Ponieważ operator liniowy A^{-1} jest ciągły, więc $\|A^{-1}x\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|x\|$ dla każdego $x \in X$ (zob. [78, Proposition 13.5]), a zatem odwzorowanie T spełnia warunek Lipschitza. Stąd, na mocy Twierdzenia 2.13 (por. Uwaga 2.9), istnieją liczby $\sigma, \eta > 0$ takie, że dla każdego $z \in B_X(0,\eta)$ znajdziemy dokładnie jeden punkt $x^* \in B_X(0,\sigma)$ taki, że

$$x^* = T(z + G(x^*)) = A^{-1}(z + G(x^*)),$$

który oczywiście jest rozwiązaniem równania (2.8).

Uwaga 2.10. Równanie postaci (2.8) było rozważne m.in. w pracy [13]. W artykule tym autorzy wykazali, że przy pewnych założeniach dotyczących ograniczonych oraz odwracalnych operatorów liniowych A, B działających w sferycznie zupełniej niearchimedesowej przestrzeni unormowanej, równanie $Ax + Bx = z$ posiada rozwiązanie dla każdego $z \in X$ (zob. [13, Proposition 7.5]).

Rozdział 3

Odwzorowania wyższego rzędu

Niniejszy rozdział w całości poświęcony jest badaniu odwzorowań wyższego rzędu, które zdefiniowaliśmy w Paragrafie 2.4 w związku z rozważaniami dotyczącymi twierdzeń typu Lovelady'ego.

Zaczniemy od wykazania pewnych ogólnych własności takich odwzorowań. W szczególności przedyskutujemy związek odwzorowań wyższego rzędu z odwzorowaniami różniczkowalnymi (w sensie Frécheta) w pewnym otoczeniu zera, a także podamy warunki, przy których granica punktowo zbieżnego ciągu odwzorowań wyższego rzędu jest odwzorowaniem wyższego rzędu. W drugiej części Paragrafu 3.1 udowodnimy dwa twierdzenia charakteryzujące autonomiczne operatory superpozycji wyższego rzędu.

Badania dotyczące operatorów superpozycji wyższego rzędu w przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji (w sensie Jordana i Younga) oraz przestrzeni funkcji prawie okresowych różnych typów kontynuować będziemy odpowiednio w Paragrafie 3.2 oraz Paragrafie 3.3.

W Paragrafie 3.2 podamy również warunki dostateczne na to, by nieliniowy operator całkowy Hammersteina był odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji.

3.1. Ogólne własności odwzorowań wyższego rzędu

Rozważania dotyczące odwzorowań wyższego rzędu rozpoczniemy od wykazania dwóch prostych lematów, z których na uwagę zasługuje Lemat 3.2, podający warunek konieczny, by dane odwzorowanie było odwzorowaniem wyższego rzędu.

Lemat 3.1 ([27, Lemma 3.2])**.** *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Odwzorowanie $G\colon X \to X$ jest wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy jest wyższego rzędu względem każdej normy na X równoważnej z $\|\cdot\|$.*

Dowód. Niech $|\cdot|$ będzie normą na X równoważną z $\|\cdot\|$. Istnieją wtedy takie liczby $a, b > 0$, że $a|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|$ dla wszystkich $x \in X$ (zob. [1, Twierdzenie 4.5, s. 119]). Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią oraz niech liczba dodatnia δ będzie wybrana tak, by

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant \frac{a\varepsilon}{b} \|x - y\| \qquad \text{dla } x, y \in X \text{ takich, że } \|x\| \leqslant \delta \text{ oraz } \|y\| \leqslant \delta.$$

Wtedy dla $x, y \in X$ takich, że $|x| \leqslant b^{-1}\delta$ oraz $|y| \leqslant b^{-1}\delta$, otrzymujemy

$$|G(x) - G(y)| \leqslant \frac{1}{a} \|G(x) - G(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{b} \|x - y\| \leqslant \varepsilon|x - y|,$$

co kończy dowód. □

Lemat 3.2 ([27, Lemma 3.3])**.** *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Jeżeli $G\colon B_X(0, r) \to X$, gdzie $r \in (0, +\infty]$, jest odwzorowaniem wyższego rzędu, to pochodna G' w punkcie 0 istnieje oraz $G'(0) = 0$.*

Dowód. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$, z definicji odwzorowania wyższego rzędu, istnieje $0 < \delta \leqslant r$ takie, że

$$\frac{\|G(h) - G(0)\|}{\|h\|} \leqslant \varepsilon \qquad \text{dla } 0 < \|h\| \leqslant \delta,$$

a zatem odwzorowanie G posiada pochodną w punkcie 0 oraz $G'(0) = 0$. □

Uwaga 3.1. Jeżeli $G\colon B_X(0, r) \to X$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym na pewnym otoczeniu zera takim, że pochodna G' jest ciągła w punkcie 0 i $G'(0) = 0$, to w oparciu o twierdzenie Lagrange'a (zob. [53, Twierdzenie 7, s. 222]) można łatwo wykazać, że G jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Z twierdzenia Rademachera (zob. [54, Theorem 3.8.10]) wynika, że odwzorowania wyższego rzędu określone na podzbiorach $\mathbb{R}^n$, jako funkcje spełniające lokalny warunek Lispchitza w punkcie 0, są różniczkowalne prawie wszędzie (względem odpowiedniej miary Lebesgue'a) w pewnym otoczeniu zera. Poniższy przykład pokazuje, że warunek „prawie wszędzie" nie może zostać zastąpiony warunkiem „wszędzie". Istnieją bowiem odwzorowania wyższego rzędu, posiadające pochodną w otoczeniu zera poza pewnym zbiorem przeliczalnym, którego punktem skupienia jest punkt 0.

Przykład 3.1 ([25, Example 3])**.** Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną następującym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n}t - \frac{1}{2n^2} & \text{dla } t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{4n-1}{4n(2n-1)}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ -\frac{1}{n}t + \frac{1}{n(2n-1)} & \text{dla } t \in \left[\frac{4n-1}{4n(2n-1)}, \frac{1}{2n-1}\right],\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Oczywiście pochodna f' istnieje poza pewnym zbiorem przeliczalnym A oraz

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{dla } x \in \left[-\tfrac{1}{2n-1}, \tfrac{1}{2n-1}\right] \setminus A.$$

Stąd, na mocy uogólnionego twierdzenia Lagrange'a (zob. [37, Theorem 8.5.2]), otrzymujemy

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{n}|x-y| \qquad \text{dla } x, y \in \left[-\tfrac{1}{2n-1}, \tfrac{1}{2n-1}\right],$$

co dowodzi, iż funkcja f jest wyższego rzędu.

Okazuje się, iż Przykład 3.1 można wzmocnić. Inspirowani wynikami pochodzącymi z pracy [43], a także klasycznymi wynikami z pracy [87], pokażemy, że dla dowolnego zbioru $A \subset (0,1)$ typu $G_{\delta\sigma}$ o mierze Lebesgue'a zero istnieje funkcja wyższego rzędu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalna wszędzie na zbiorze $\mathbb{R} \setminus A$, a zarazem nie posiadająca pochodnej w żadnym punkcie zbioru A.

Przykład 3.2. Niech $A \subset (0,1)$ będzie zbiorem miary Lebesgue'a zero typu $G_{\delta\sigma}$, tzn. załóżmy, że istnieje taki ciąg podwójny zbiorów otwartych $A_{nk} \subset (0,1)$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, że

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{nk}.$$

Rozważmy zbiór $A^2 := \{u^2 : u \in A\} \subset (0,1)$. Ponieważ funkcja kwadratowa jest homeomorfizmem przedziału $(0,1)$ na $(0,1)$, więc zbiór A^2 jest typu $G_{\delta\sigma}$, a ponadto ma on miarę Lebesgue'a zero, jako obraz zbioru miary zero poprzez funkcję lipschitzowską (zob. [60, Lemat 4, s. 112]). Na mocy twierdzenia Zahorskiego (zob. [43, Theorem 2]) istnieje funkcja lipschitzowska $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna wszędzie na zbiorze $\mathbb{R} \setminus A^2$, i która nie posiada pochodnej w żadnym punkcie zbioru A^2. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(u) = \begin{cases} l(u^2) & \text{dla } u \geqslant 0, \\ l(0) & \text{dla } u < 0. \end{cases}$$

Oczywiście $f'(u)$ istnieje dla $u \in \mathbb{R} \setminus A$ oraz nie istnieje dla $u \in A$. Ponadto, f jest odwzorowaniem wyższego rzędu. Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ niech $\delta := \varepsilon(2L)^{-1}$, gdzie L jest stałą Lipschitza funkcji l. Wtedy, dla $u, v \in [-\delta, \delta]$, otrzymujemy

$$|f(u) - f(v)| = |l(u^2) - l(v^2)| \leqslant L|u^2 - v^2| \leqslant 2\delta L|u - v| = \varepsilon|u - v|,$$

jeżeli $u, v \geqslant 0$ oraz

$$|f(u) - f(v)| = |l(u^2) - l(0)| \leqslant L|u^2| \leqslant \delta L u \leqslant \varepsilon|u - v|,$$

jeżeli $u \geqslant 0$ i $v < 0$.

Zanim przejdziemy do wyniku, który podaje warunki dostateczne na to, by granica punktowo zbieżnego ciągu odwzorowań wyższego rzędu była również odwzorowaniem wyższego rzędu, wprowadźmy następującą definicję jednakowego warunku wyższego rzędu.

Definicja 3.1 ([25, Definition 9])**.** Niech X będzie przestrzenią unormowaną oraz niech $r \in (0, +\infty]$. Mówimy, że rodzina odwzorowań $\{G_\lambda\colon B_X(0,r) \to X : \lambda \in \Lambda\}$ jest *jednakowo wyższego rzędu* (ang. *equi-higher-order*), gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $0 < \delta \leqslant r$ takie, że

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|G_\lambda(x) - G_\lambda(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in B_X(0, \delta).$$

Stwierdzenie 3.1 ([27, Proposition 3])**.** *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Jeżeli $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $G_n\colon B_X(0,r) \to X$ oraz $r \in (0, +\infty]$, jest ciągiem odwzorowań jednakowo wyższego rzędu zbieżnym punktowo do odwzorowania $G\colon B_X(0,r) \to X$, to odwzorowanie G jest wyższego rzędu.*

Dowód. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ wybierzmy taką liczbę $0 < \delta \leqslant r$, że

$$\|G_n(x) - G_n(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in B_X(0, \delta) \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy, dla $x, y \in B_X(0, \delta)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, mamy

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &\leqslant \|G(x) - G_n(x)\| + \|G_n(x) - G_n(y)\| + \|G_n(y) - G(y)\| \\ &\leqslant \|G(x) - G_n(x)\| + \varepsilon \|x - y\| + \|G_n(y) - G(y)\|, \end{aligned}$$

a zatem przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| \qquad \text{dla } x, y \in B_X(0, \delta),$$

co kończy dowód. □

Następujący przykład pokazuje, że założenie dotyczące jednakowego warunku wyższego rzędu nie może zostać opuszczone nawet w przypadku, gdy ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji granicznej jednostajnie.

Przykład 3.3. Rozważmy ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji $G_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, które dane są następującymi wzorami $G_n(x) = x^{1+\frac{1}{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [-1, 1]$. Z Uwagi 3.1 wynika, że wszystkie odwzorowania G_n są wyższego rzędu, jednakże, jak pokażemy poniżej, ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest jednakowo wyższego rzędu. Gdyby bowiem był, to dla $\varepsilon{:=}\frac{1}{2}$ istniałaby liczba $0 < \delta < 1$ taka, że

$$|G_n(x) - G_n(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y| \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } x, y \in [-\delta, \delta].$$

W szczególności, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodziłaby nierówność $\delta^{1+\frac{1}{2n+1}} \leqslant \frac{1}{2}\delta$. Z drugiej jednak strony $\lim_{n\to\infty} \delta^{\frac{1}{2n+1}} = 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest jednakowo wyższego rzędu.

Korzystając z metod rachunku różniczkowego można wykazać, że ciąg funkcyjny $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $G\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ danej wzorem $G(x) = |x|$, która nie jest odwzorowaniem wyższego rzędu (por. Lemat 3.2).

Okazuje się, że w przypadku, gdy X jest przemienną algebrą unormowaną, a odwzorowania G_n są generowane przez sumy częściowe pewnego rzeczywistego szeregu potęgowego, można podać prostą charakteryzację jednakowego warunku wyższego rzędu.

Stwierdzenie 3.2 (por. [25, Proposition 4])**.** *Załóżmy, że $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ jest rzeczywistym szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $\rho \in (0,+\infty]$. Ponadto, niech x_0 będzie ustalonym elementem przemiennej algebry unormowanej X. Ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie dla ustalonego $r \in (0,+\infty]$ odwzorowania $G_n\colon B_X(0,r) \to X$ dane są wzorami*

$$G_n(x) = a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k,$$

jest jednakowo wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0) = 0$, tzn. gdy $a_1 = 0$.

Dowód. Jeżeli ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednakowo wyższego rzędu, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $0 < \delta \leqslant r$ taka, że

$$\|G_1(x) - G_1(y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\| \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in B_X(0,\delta).$$

Stąd $\|a_1(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|$, co dowodzi, że $a_1 = 0$.

Załóżmy teraz, że $f'(0) = 0$. Przez φ oznaczmy funkcję o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną jako suma zbieżnego szeregu potęgowego $\sum_{i=2}^{\infty} |a_i| t^i$ na przedziale $(-r', r')$, gdzie $r' < \min\{\rho, r\}$. Ponieważ φ posiada pochodne dowolnego rzędu na przedziale $(-r', r')$ oraz $\varphi'(0) = f'(0) = 0$, więc dla danego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $0 < \delta < r'$ takie, że $\varphi'(\delta) \leqslant \varepsilon$.

Wtedy dla $n \geqslant 2$ oraz $x, y \in B_X(0,\delta)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|x^n - y^n\| &= \left\|(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})\right\| \\ &\leqslant \|x-y\| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \|x\|^{n-1-i} \|y\|^i \leqslant \|x-y\| \cdot n\delta^{n-1},\end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned}\|G_n(x) - G_n(y)\| &\leqslant \sum_{i=2}^{n} |a_i| \|x^i - y^i\| \leqslant \|x-y\| \cdot \sum_{i=2}^{n} i|a_i|\delta^{i-1} \\ &\leqslant \varphi'(\delta)\|x-y\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|,\end{aligned}$$

co pokazuje, że ciąg $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednakowo wyższego rzędu. $\square$

Uwaga 3.2. Stwierdzenie 3.2 jest również prawdziwe w przypadku zespolonych szeregów potęgowych, jeżeli zawęzimy się do rozważania przemiennych algebr unormowanych nad ciałem liczb zespolonych.

Następujące dwa twierdzenia omawiają związek pomiędzy autonomicznymi operatorami superpozycji a funkcjami, które operatory te generują, w aspekcie odwzorowań wyższego rzędu.

Twierdzenie 3.1. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, która spełnia następujące warunki:*

(i) *X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $B(A)$, gdzie A jest niepustym zbiorem;*

(ii) *funkcje stałe należą do X.*

Jeżeli autonomiczny operator superpozycji $F\colon X \to X$, generowany przez funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jest odwzorowaniem wyższego rzędu, to funkcja f jest również odwzorowaniem wyższego rzędu.

Uwaga 3.3. Założenie (i) powyższego twierdzenia można osłabić zakładając, że X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na niepustym zbiorze A, rozważanej z działaniami dodawania i mnożenia przez liczbę rzeczywistą określonymi w sposób naturalny. Ponieważ jednak w dalszej części niniejszej rozprawy będziemy rozważać jedynie przestrzenie unormowane, będące podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni Banacha funkcji ograniczonych, dlatego też Twierdzenie 3.1 wykażemy w podanej postaci.

Dowód. Zauważmy, że $u \cdot x_1 = x_u$ dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$, gdzie x_v oznacza funkcję stałą, przyjmującą wartość $v \in \mathbb{R}$ dla wszystkich elementów zbioru A. Ponadto, $\|x_1\| \neq 0$. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$, z definicji odwzorowania wyższego rzędu, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| \qquad \text{dla } x, y \in B_X(0, \delta).$$

Wtedy dla $u, v \in [-\delta', \delta']$, gdzie $\delta' = \delta \|x_1\|^{-1}$, otrzymujemy

$$|f(u) - f(v)| = \frac{1}{\|x_1\|} \|F(x_u) - F(x_v)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|x_1\|} \|x_u - x_v\| = \varepsilon |u - v|. \qquad \square$$

Nadmieńmy, że Twierdzenie 3.1 uogólnia Proposition 2 z pracy [27].

Twierdzenie 3.2 (por. [25, Theorem 8])**.** *Niech $(X, \|\cdot\|_\infty)$ będzie przestrzenią unormowaną, która spełnia następujące warunki:*

(i) *X jest podprzestrzenią unormowaną przestrzeni $B(A)$, gdzie A jest niepustym zbiorem;*

(ii) *funkcje stałe należą do X.*

Autonomiczny operator superpozycji $F\colon X \to X$, generowany przez funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wyższego rzędu.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że twierdzenie zostanie udowodnione, gdy wykażemy dostateczność postulowanego warunku, albowiem implikacja odwrotna wynika z Twierdzenia 3.1.

Jeżeli zatem funkcja f jest wyższego rzędu, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon|u - v| \qquad \text{dla } u, v \in [-\delta, \delta].$$

Stąd, dla $x, y \in B_X(0, \delta)$ oraz $t \in A$, otrzymujemy

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| = |f(x(t)) - f(y(t))| \leqslant \varepsilon|x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon \|x - y\|_\infty .$$

W konsekwencji $\|F(x) - F(y)\|_\infty \leqslant \varepsilon \|x - y\|_\infty$, co kończy dowód. □

Uwaga 3.4. Z uwagi na Lemat 3.1 w Twierdzeniu 3.2 zamiast zakładać, że w przestrzeni X rozważamy normę $\|\cdot\|$ równoważną z normą supremalną, bez straty ogólności, mogliśmy przyjąć, iż $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

Na zakończenie niniejszego paragrafu podamy przykład nieliniowych operatorów całkowych wyższego rzędu w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Stwierdzenie 3.3 ([59, Theorem 3])**.** *Niech $k\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:*

(i) *dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \mapsto k(t, s)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a na zbiorze $\mathbb{R}_+$;*

(ii) $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} |k(t, s)|\, \mathrm{d}s =: d < +\infty$;

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |k(t_n, s) - k(t_0, s)|\, \mathrm{d}s = 0$ *dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych nieujemnych $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do t_0.*

Załóżmy ponadto, że funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na pewnym otoczeniu zera oraz $f'(0) = 0$. Wtedy nieliniowy operator całkowy Hammersteina $G\colon BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$, zdefiniowany wzorem

$$G(x)(t) = \int_0^{+\infty} k(t, s) f(x(s))\, \mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Dowód. Niech $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ oraz niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych zbieżnym do t_0. Ponieważ $x \in BC(\mathbb{R}_+)$, istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że $|f(x(s))| \leqslant M$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}_+$, a zatem

$$\begin{aligned}|G(x)(t_n) - G(x)(t_0)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |k(t_n, s) - k(t_0, s)||f(x(s))| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant M \int_0^{+\infty} |k(t_n, s) - k(t_0, s)| \, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Stąd, na mocy założenia (iii), $G(x)$ jest funkcją ciągłą. Ponadto, z założenia (ii) wynika, że funkcja $G(x)$ jest również ograniczona.

Wykażemy teraz, że G jest odwzorowaniem wyższego rzędu. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wybierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, aby pochodna f' istniała na przedziale $[-\delta, \delta]$ oraz by $f'(s) \in [-\varepsilon d^{-1}, \varepsilon d^{-1}]$ dla $|s| \leqslant \delta$. Wtedy, z twierdzenia Lagrange'a, mamy $|f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon d^{-1}|t - s|$, o ile $s, t \in [-\delta, \delta]$. W konsekwencji, dla $x, y \in BC(\mathbb{R}_+)$ takich, że $\|x\|_\infty \leqslant \delta$ i $\|y\|_\infty \leqslant \delta$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}|G(x)(t) - G(y)(t)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |k(t, s)||f(x(s)) - f(y(s))| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant \varepsilon d^{-1} \|x - y\|_\infty \int_0^{+\infty} |k(t, s)| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant \varepsilon \|x - y\|_\infty ,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Przykład 3.4 ([27, Example 1])**.** Rozważmy funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $k\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, określone następującymi wzorami

$$f(s) = \begin{cases} e^{\frac{1}{s}}, & \text{jeżeli } s < 0, \\ 0, & \text{jeżeli } s \geqslant 0 \end{cases}$$

oraz

$$k(t, s) = \frac{1 - r\cos(ts)}{(1 + s^2)(1 - 2r\cos(ts) + r^2)},$$

gdzie $r \in (0, 1)$ jest ustalone. Ponieważ

$$1 - 2r\cos(ts) + r^2 \geqslant (1 - r)^2 > 0 \qquad \text{dla } t, s \in \mathbb{R}_+,$$

więc funkcja k jest poprawnie zdefiniowana oraz ciągła. Ponadto, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\int_0^{+\infty} |k(t, s)| \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \frac{1 - r\cos(ts)}{(1 + s^2)(1 - 2r\cos(ts) + r^2)} \mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^t}{e^t - r}$$

(zob. [40, Paragraf 519]). Stąd

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_0^{+\infty}|k(t,s)|\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-r}.$$

Zauważmy, że

$$|k(t,s)| = \frac{1-r\cos(ts)}{(1+s^2)(1-2r\cos(ts)+r^2)} \leqslant \frac{2}{(1-r)^2}\cdot\frac{1}{1+s^2}$$

dla dowolnego $t\in\mathbb{R}_+$ oraz, że funkcja $s\mapsto\dfrac{1}{1+s^2}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}_+$. A zatem, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}|k(t_n,s)-k(t_0,s)|\mathrm{d}s = 0$$

dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych nieujemnych $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do t_0.

Łatwo sprawdzić, że funkcja f jest gładka na $\mathbb{R}$ oraz $f'(0)=0$ (por. [83, Example 1.3, s. 5]), a zatem na mocy Stwierdzenia 3.3 operator całkowy G określony wzorem (3.1) jest odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

3.2. Odwzorowania wyższego rzędu w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji

W niniejszym paragrafie omówimy odwzorowania wyższego rzędu, działające w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana oraz w sensie Younga; w szczególności zainteresowani będziemy operatorami superpozycji, jak również nieliniowymi operatorami całkowymi.

Na wstępie rozważmy następujące dwa przykłady.

Przykład 3.5 ([27, Example 2])**.** Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(u)=u^2$. Ponieważ $BV[0,1]$ jest algebrą, więc autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję f, działa w przestrzeni $BV[0,1]$. Pokażemy, że jest on odwzorowaniem wyższego rzędu. Niech $\varepsilon>0$ i połóżmy $\delta{:=}\frac{1}{4}\varepsilon$. Wtedy, dla $x,y\in B_{BV}(0,\delta)$, mamy

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\|_{BV} &= \|x^2-y^2\|_{BV} = \|(x-y)(x+y)\|_{BV}\\ &\leqslant 2\|x+y\|_{BV}\|x-y\|_{BV} \leqslant \varepsilon\|x-y\|_{BV},\end{aligned}$$

gdyż $\|xy\|_{BV}\leqslant 2\|x\|_{BV}\|y\|_{BV}$ dla $x,y\in BV[0,1]$ (zob. [3, s. 173]).

Przykład 3.6 ([27, Example 3])**.** Z Twierdzenia 3.1 oraz Lematu 3.2 wynika, że funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem $f(u)=\sin u$ dla $u\in\mathbb{R}$, nie generuje autonomicznego operatora superpozycji będącego odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni $BV[0,1]$. Zauważmy bowiem, że przestrzeń $BV[0,1]$ z normą $\|\cdot\|_{BV}$ spełnia założenia Twierdzenia 3.1. Gdyby zatem autonomiczny operator superpozycji $F\colon BV[0,1] \to BV[0,1]$ był odwzorowaniem wyższego rzędu, wtedy funkcja f byłaby wyższego rzędu, a więc $f'(0) = 0$. Oczywiście w naszym przypadku $f'(0) = 1$.

Okazuje się, iż Przykład 3.6 jest szczególnym przypadkiem następującego ogólnego twierdzenia.

Twierdzenie 3.3 ([27, Theorem 4.1])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie sumą szeregu potęgowego o środku w zerze oraz promieniu zbieżności $\rho = +\infty$, tzn. załóżmy, że istnieją liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots$ takie, że*

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i \qquad \text{dla } u \in \mathbb{R}.$$

Wtedy autonomiczny operator superpozycji $F\colon BV[0,1] \to BV[0,1]$, generowany przez funkcję f, jest wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$.

Dowód. Zauważmy, że operator superpozycji F jest dobrze zdefiniowany, gdyż funkcja f jest lokalnie lipschitzowska (zob. Lemat 1.4).

W celu wykazania dostateczności warunku $a_1 = 0$, skorzystamy ze Stwierdzenia 3.1. Przestrzeń $BV[0,1]$ z normą $|\cdot|_{BV} := \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{BV}$ (równoważną $\|\cdot\|_{BV}$) jest przemienną algebrą Banacha z jedynką, a zatem na mocy Stwierdzenia 3.2 ciąg $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odwzorowań działających w przestrzeni $(BV[0,1], |\cdot|_{BV})$, określonych wzorami $F_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, gdzie $x^0 \equiv 1$ dla $x \in BV[0,1]$, jest jednakowo wyższego rzędu.

Wykażemy teraz, że ciąg $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo do operatora F w normie $|\cdot|_{BV}$. Niech $f_n(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ dla $u \in \mathbb{R}$, gdzie $u^0 = 1$. Ponieważ funkcja $u \mapsto (f_n - f)(u)$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $J(a) := [-a, a]$ ze stałą $L_n(a) := \sup_{u\in J(a)} |f'(u) - f_n'(u)|$, więc

$$\bigvee_0^1 (F_n(x) - F(x)) \leqslant L_n(b) \bigvee_0^1 (x),$$

gdzie $b = \|x\|_{BV}$ (por. dowód Lematu 1.4). Stąd

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)|_{BV} &\leqslant 2\,\|F_n(x) - F(x)\|_{BV} \\ &= 2|f_n(x(0)) - f(x(0))| + 2\bigvee_0^1 (F_n(x) - F(x)) \\ &\leqslant 2|f_n(x(0)) - f(x(0))| + 2L_n(b)\bigvee_0^1 (x), \end{aligned}$$

co dowodzi, że $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ w normie $|\cdot|_{BV}$ dla każdego $x \in BV[0,1]$.

Ze Stwierdzenia 3.1 oraz Lematu 3.1 wynika więc, że autonomiczny operator superpozycji F jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Implikacja odwrotna jest konsekwencją Twierdzenia 3.1 oraz Lematu 3.2 . □

Przykład 3.7 ([27, Example 4]). Ponieważ

$$\cos u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} u^{2i} \qquad \text{dla } u \in \mathbb{R},$$

więc na mocy Twierdzenia 3.3, w odróżnieniu od Przykładu 3.6, funkcja $f(u) = \cos u$ generuje autonomiczny operator superpozycji $F\colon BV[0,1] \to BV[0,1]$, który jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Wykażemy jeszcze następujący prosty fakt dotyczący nieautonomicznych operatorów superpozycji wyższego rzędu, które działają w przestrzeni $BV[0,1]$.

Stwierdzenie 3.4 ([27, Proposition 4]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona za pomocą wzoru $f(t,u) = g(t)u + h(t)$, gdzie $g, h \in BV[0,1]$. Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji $F\colon BV[0,1] \to BV[0,1]$, generowany przez funkcję f, jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $g \equiv 0$.*

Dowód. Ponieważ $BV[0,1]$ jest algebrą, iloczyn dwóch funkcji o ograniczonej wariacji jest funkcją o ograniczonej wariacji (zob. [3, s. 173]). Stąd $F(x) \in BV[0,1]$ dla każdego $x \in BV[0,1]$.

Załóżmy, że nieautonomiczny operator superpozycji F jest odwzorowaniem wyższego rzędu. Wtedy dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\|F(x) - F(y)\|_{BV} \leqslant \varepsilon \|x - y\|_{BV} \qquad \text{dla } x, y \in B_{BV}(0, \delta). \tag{3.2}$$

Oczywiście, funkcje $x_\delta, x_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dane wzorami $x_\delta(t) = \delta$ oraz $x_0(t) = 0$ dla $t \in [0,1]$, należą do kuli $B_{BV}(0,\delta)$, a zatem, dla dowolnego $t \in [0,1]$, otrzymujemy

$$\delta \cdot |g(t)| = |g(t)x_\delta(t)| \leqslant \|g \cdot x_\delta\|_{BV} = \|F(x_\delta) - F(x_0)\|_{BV} \leqslant \varepsilon \|x_\delta\|_{BV} = \delta \cdot \varepsilon.$$

Stąd $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ dla każdego $t \in [0,1]$. Ponieważ liczba dodatnia ε była dowolna, więc $g \equiv 0$.

Implikacja odwrotna jest oczywista. □

W drugiej części tego paragrafu zajmiemy się odwzorowaniami wyższego rzędu w przestrzeni funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji. Zaczniemy od przedstawienia następującego przykładu, który uogólnia Przykład 3.5.

Przykład 3.8 ([27, Example 5]). Z Uwagi 1.9 wynika, że normy $|\cdot|_\phi := \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\phi$ i $\|\cdot\|_\phi$ określone na przestrzeni liniowej $BV_\phi[0,1]$ są równoważne. Ponadto, $BV_\phi[0,1]$ z normą $|\cdot|_\phi$ jest algebrą Banacha, gdyż

$$\|xy\|_\phi \leqslant \|x\|_\infty \|y\|_\phi + \|x\|_\phi \|y\|_\infty \qquad \text{dla } x, y \in BV_\phi[0,1]$$

(zob. [61, Theorem 2]). A zatem, autonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(u) = u^2$, działa w przestrzeni $(BV_\phi[0,1], |\cdot|_\phi)$. Zauważmy, że jest on odwzorowaniem wyższego rzędu. Istotnie, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ niech $\delta{:=}\frac{1}{2}\varepsilon$. Wtedy dla $x, y \in BV_\phi[0,1]$ takich, że $|x|_\phi \leqslant \delta$ oraz $|y|_\phi \leqslant \delta$, otrzymujemy

$$|F(x) - F(y)|_\phi = |x^2 - y^2|_\phi = |(x-y)(x+y)|_\phi \leqslant |x+y|_\phi |x-y|_\phi \leqslant \varepsilon |x-y|_\phi.$$

Na mocy Lematu 3.1 również operator superpozycji F działający w przestrzeni $(BV_\phi[0,1], \|\cdot\|_\phi)$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Poniższy przykład nietrywialnego nieautonomicznego operatora superpozycji działającego w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$, który jest odwzorowaniem wyższego rzędu, inspirowany jest wynikami pochodzącymi z pracy [62] (por. również [3, ss. 176-177]).

Przykład 3.9 ([27, Example 6])**.** Niech $\{r_0, r_1, \ldots\} \subset [0,1]$ będzie nieskończonym ciągiem liczb wymiernych takim, że $r_0 = 0$. Załóżmy, że $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

(i) $\omega(0) = 0$;

(ii) ω jest różniczkowalne w sposób ciągły na pewnym otoczeniu zera i $\omega'(0) = 0$;

(iii) ω przekształca zbiory ograniczone na zbiory ograniczone.

Dla ciągu liczb rzeczywistych $\xi{:=}(\xi_i)_{i\geqslant 0}$ takiego, że $\Phi(\xi){:=}\sum_{i=0}^{\infty}\phi(|\xi_i|) < +\infty$, gdzie ϕ jest wypukłą ϕ-funkcją, określimy funkcję $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ następującym wzorem

$$f(t,u) = \begin{cases} \xi_i \omega(u), & \text{jeżeli } t = r_i \text{ oraz } u \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Pokażemy, że nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez funkcję f, działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$ oraz jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Niech $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ będzie dowolnym skończonym podziałem przedziału $[0,1]$ oraz niech $x \in BV_\phi[0,1]$. Wtedy $\|x\|_\infty \leqslant c_\phi \|x\|_\phi =: M < +\infty$ (zob. Uwaga 1.9), a zatem na mocy założenia (iii), $|\omega(u)| \leqslant N$ dla $|u| \leqslant M$. Stąd, dla $\lambda > 0$ takiego, że $\lambda N < 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \phi\Big(\frac{1}{2}\lambda|F(x)(t_i) - F(x)(t_{i-1})|\Big) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \phi\Big(\frac{1}{2}\lambda|F(x)(t_i)| + \frac{1}{2}\lambda|F(x)(t_{i-1})|\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda|F(x)(t_i)|\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda|F(x)(t_{i-1})|\Big) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\phi\Big(\lambda|F(x)(t_i)|\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\phi\Big(\lambda|f(t_i, x(t_i))|\Big) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\phi\Big(\lambda|\xi_i||\omega(x(r_i))|\Big) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\phi\Big(\lambda|\xi_i|N\Big) \leqslant \lambda N \Phi(\xi) < +\infty.
\end{aligned}$$

Tym samym $\operatorname{var}_\phi(\frac{1}{2}\lambda F(x)) < +\infty$. Ponieważ $F(x)(0) = f(0, x(0)) = \xi_0\omega(0) = 0$, więc operator F działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$.

Niech ε będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wybierzmy $\delta > 0$ tak, by

$$|\omega'(u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2c_\phi \max\{1, \Phi(\xi)\}} \qquad \text{dla } |u| \leqslant c_\phi\delta.$$

Wtedy dla $x, y \in BV_\phi[0,1]$ i $\lambda > 0$ takich, że $\|x\|_\phi \leqslant \delta$, $\|y\|_\phi \leqslant \delta$ i $\|x - y\|_\phi \leqslant \lambda\varepsilon^{-1}$ oraz dowolnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$ mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \phi\Big(\lambda^{-1}\Big|[F(x) - F(y)](t_i) - [F(x) - F(y)](t_{i-1})\Big|\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{n} \phi\Big(2\lambda^{-1}|F(x)(t_i) - F(y)(t_i)|\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \phi\Big(2\lambda^{-1}|\xi_i||\omega(x(r_i)) - \omega(y(r_i))|\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \phi\Big(\varepsilon(\lambda c_\phi \max\{1, \Phi(\xi)\})^{-1}|\xi_i||x(r_i) - y(r_i)|\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \phi\Big(\varepsilon(\lambda \max\{1, \Phi(\xi)\})^{-1}\,\|x - y\|_\phi\,|\xi_i|\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \phi\Big((\max\{1, \Phi(\xi)\})^{-1}|\xi_i|\Big)\\
&\quad \leqslant \frac{1}{\max\{1, \Phi(\xi)\}} \sum_{i=0}^{\infty} \phi(|\xi_i|)\\
&\quad \leqslant \frac{\Phi(\xi)}{\max\{1, \Phi(\xi)\}} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Stąd, dla $x, y \in B_\phi(0, \delta)$, otrzymujemy

$$\|F(x) - F(y)\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi\Big(\lambda^{-1}[F(x) - F(y)]\Big) \leqslant 1\Big\} \leqslant \varepsilon\,\|x - y\|_\phi\,,$$

co dowodzi, że F jest odwzorowaniem wyższego rzędu.

Na zakończenie niniejszego paragrafu udowodnimy twierdzenie, podające warunki dostateczne na to, by nieliniowy operator całkowy typu Hammersteina działający w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$ był odwzorowaniem wyższego rzędu.

Twierdzenie 3.4 ([27, Theorem 4.2])**.** *Załóżmy, że* $k\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją taką, że:*

(i) *dla każdego* $t \in [0,1]$ *funkcja* $s \mapsto k(t,s)$ *jest mierzalna w sensie Lebesgue'a na przedziale* $[0,1]$*;*

(ii) $k(0,s) = 0$ *dla p.w.* $s \in [0,1]$*;*

(iii) *istnieje liczba* $\vartheta > 0$ *taka, że* $\mathrm{var}_\phi\Big(\vartheta^{-1}k(\cdot,s)\Big) \leqslant m(s)$ *dla p.w.* $s \in [0,1]$, *gdzie* $m\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.*

Ponadto załóżmy, że funkcja borelowska $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia następujące warunki:*

(iv) f *odwzorowuje zbiory ograniczone na zbiory ograniczone;*

(v) *istnieje otoczenie zera, na którym funkcja* f *jest różniczkowalna w sposób ciągły i* $f'(0) = 0$.

Wtedy nieliniowy operator całkowy Hammersteina G *określony wzorem*

$$G(x)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s \qquad \text{dla } x \in BV_\phi[0,1] \text{ oraz } t \in [0,1],$$

działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$ *i jest odwzorowaniem wyższego rzędu.*

Uwaga 3.5. Zauważmy, że w (iii) nie wymagamy, by funkcja $s \mapsto \mathrm{var}_\phi\Big(\vartheta^{-1}k(\cdot,s)\Big)$ była mierzalna w sensie Lebesgue'a. Ponadto, warto dodać, iż w dowodzie Twierdzenia 3.4 nie musimy wiedzieć, czy złożenie funkcji f z BV_ϕ-funkcją x należy do przestrzeni $BV_\phi[0,1]$ czy też nie.

Uwaga 3.6. Okazuje się, że w przypadku, gdy funkcja f nie jest tożsamościowo równa zero, tzn. gdy istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) \neq 0$, to założenie (i) jest konieczne, by operator G działał w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$. Jeżeli bowiem założymy, iż $G\colon BV_\phi[0,1] \to BV_\phi[0,1]$, to w szczególności funkcja $G(x)$, gdzie $x(t) = a$ dla $t \in (0,1]$ i $x(0) = 0$, będzie określona dla wszystkich wartości $t \in [0,1]$. Ale $G(x)(t) = \displaystyle\int_0^1 k(t,s)f(a)\mathrm{d}s$, co dowodzi m.in., że dla każdego $t \in [0,1]$ funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

Ponadto, jeżeli oprócz warunku $f \not\equiv 0$ założymy, że istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $f(b) = 0$, to warunek (ii) okazuje się również konieczny. By wykazać ten fakt, zauważmy, że dla dowolnego przedziału $I{:=}(c,d) \subset [0,1]$ funkcja $x_I\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$x_I(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, \\ a & \text{dla } t \in (c,d), \\ b & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest funkcją o ograniczonej ϕ-wariacji, a zatem $G(x_I) \in BV_\phi[0,1]$. W szczególności

$$0 = G(x_I)(0) = \int_0^1 k(0,s)f(x_I(s))\mathrm{d}s = f(a)\int_c^d k(0,s)\mathrm{d}s.$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu (zob. [60, Twierdzenie 6, s. 159]), dla p.w. $s \in [0,1]$ otrzymujemy

$$k(0,s) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} k(0,\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Dowód Twierdzenia 3.4. Zaczniemy od pokazania, że całka występująca w definicji operatora G istnieje i jest skończona dla każdego $x \in BV_\phi[0,1]$. Niech $x \in BV_\phi[0,1]$. Funkcja $f(x(\cdot))$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, jako złożenie funkcji mierzalnych (por. Uwaga 1.9). Ponadto, z założenia (iv), istnieje taka stała $N > 0$, że $\sup_{s\in[0,1]}|f(x(s))| \leqslant N$, a zatem w celu wykazania istnienia oraz skończoności rozważanej całki, wystarczy dowieść, że dla każdego $t \in [0,1]$ funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $[0,1]$. Ustalmy więc $t \in [0,1]$. Wtedy, z (ii) oraz (iii) dla p.w. $s \in [0,1]$ mamy

$$\begin{aligned}\phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t,s)|\Big) &= \phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t,s)-k(0,s)|\Big)\\ &\leqslant \phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t,s)-k(0,s)|\Big)+\phi\Big(\vartheta^{-1}|k(1,s)-k(t,s)|\Big)\\ &\leqslant \operatorname{var}_\phi\Big(\vartheta^{-1}k(\cdot,s)\Big)\leqslant m(s).\end{aligned}$$

Ponieważ ϕ jest wypukłą ϕ-funkcją, więc

$$u \leqslant \frac{\phi(u)}{\phi(1)} \qquad \text{dla } u \geqslant 1.$$

Oznaczając $A{:=}\{s\in[0,1] : |k(t,s)| \geqslant \vartheta\}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^1|k(t,s)|\mathrm{d}s &= \int_A|k(t,s)|\mathrm{d}s+\int_{[0,1]\setminus A}|k(t,s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{\vartheta}{\phi(1)}\int_A\phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t,s)|\Big)\mathrm{d}s+\vartheta\\ &\leqslant \frac{\vartheta}{\phi(1)}\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s+\vartheta<+\infty.\end{aligned}$$

Tym samym udowodniliśmy, że operator G jest dobrze określony.

Pokażemy teraz, że operator G działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$. Niech x będzie BV_ϕ-funkcją. Wtedy $\|x\|_\infty \leqslant c_\phi \|x\|_\phi =: M < +\infty$ (zob. Uwaga 1.9), a zatem na mocy założenia (iv), $|f(u)| \leqslant N$ dla $|u| \leqslant M$, gdzie $N > 0$. Stąd dla $\lambda > 0$ takiego, że $\vartheta\lambda N < 1$ oraz dowolnego skończonego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big) \leqslant \operatorname{var}_\phi\Big(\vartheta^{-1}k(\cdot,s)\Big) \leqslant m(s) \qquad \text{dla p.w. } s\in[0,1]$$

oraz

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda|G(x)(t_i)-G(x)(t_{i-1})|\Big) &\leqslant \sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda\int_0^1|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)||f(x(s))|\mathrm{d}s\Big)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda N\int_0^1|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\mathrm{d}s\Big)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_0^1 \phi\Big(\lambda N|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ &\leqslant \vartheta\lambda N\int_0^1\sum_{i=1}^n \phi\Big(\vartheta^{-1}|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ &\leqslant \vartheta\lambda N\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s<+\infty,\end{aligned}$$

a zatem $\operatorname{var}_\phi(\lambda G(x)) < +\infty$. Ponieważ $G(x)(0) = \int_0^1 k(0,s)f(x(s))\mathrm{d}s = 0$, więc operator G działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$.

Na zakończenie wykażemy, że G jest odwzorowaniem wyższego rzędu. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Wybierzmy liczbę dodatnią δ w taki sposób, by

$$|f'(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\vartheta c_\phi \max\{1, c_m\}} \qquad \text{dla } |s| \leqslant c_\phi \delta,$$

gdzie $c_m := \int_0^1 m(s)\mathrm{d}s$. Wtedy dla dowolnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$ oraz ustalonego $\lambda > 0$ takiego, że $\varepsilon \|x-y\|_\phi \leqslant \lambda$ mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda^{-1}|G(x)(t_i) - G(y)(t_i) - G(x)(t_{i-1}) + G(y)(t_{i-1})|\Big) \\
&\quad\leqslant \sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda^{-1}\int_0^1 |k(t_i,s) - k(t_{i-1},s)||f(x(s)) - f(y(s))|\mathrm{d}s\Big) \\
&\quad\quad\leqslant \sum_{i=1}^n \int_0^1 \phi\Big((\lambda c_\phi \max\{1,c_m\})^{-1}\varepsilon \|x-y\|_\infty \vartheta^{-1}|k(t_i,s) - k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad\quad\quad\leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^n \phi\Big((\max\{1,c_m\})^{-1}\vartheta^{-1}|k(t_i,s) - k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad\quad\quad\quad\leqslant \frac{1}{\max\{1,c_m\}}\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s = \frac{c_m}{\max\{1,c_m\}} \leqslant 1,
\end{aligned}$$

o ile $x, y \in B_\phi(0,\delta)$. A zatem dla $x, y \in B_\phi(0,\delta)$, otrzymujemy

$$\|G(x) - G(y)\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi\Big(\lambda^{-1}[G(x) - G(y)]\Big) \leqslant 1\Big\} \leqslant \varepsilon \|x-y\|_\phi,$$

co pokazuje, że G jest odwzorowaniem wyższego rzędu i tym samym kończy dowód twierdzenia. □

3.3. Odwzorowania wyższego rzędu w przestrzeniach funkcji prawie okresowych

Celem tego krótkiego paragrafu jest scharakteryzowanie autonomicznych operatorów superpozycji, będących odwzorowaniami wyższego rzędu, które działają w przestrzeniach funkcji prawie okresowych różnych typów.

Wniosek 3.1 ([25, Corollary 2 oraz Corollary 3])**.** *Niech X będzie jedną z poniższych przestrzeni $AP(\mathbb{R})$, $BAA(\mathbb{R})$, $LAP_b(\mathbb{R})$, $AAP(\mathbb{R})$, $PAP(\mathbb{R})$ oraz niech $F\colon X \to X$ będzie autonomicznym operatorem superpozycji, generowanym przez funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operator F jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wyższego rzędu.*

Dowód. Zauważmy, że przestrzeń X rozważana z normą supremalną spełnia założenia Twierdzenia 3.2 (por. Paragraf 1.5). Ponadto, na mocy Twierdzenia 1.5, autonomiczny operator superpozycji F jest dobrze zdefiniowany, tzn. działa w przestrzeni X. Tym samym, na mocy Twierdzenia 3.2, F jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wyższego rzędu. By zakończyć dowód w przypadku przestrzeni $(AAP(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{AAP})$ wystarczy powołać się na Lemat 3.1 oraz Uwagę 1.19. $\square$

Zwróćmy uwagę, że z Wniosku 3.1 wynika, iż w klasie autonomicznych operatorów superpozycji, działających w przestrzeniach funkcji prawie okresowych i generowanych przez funkcje ciągłe, podklasa odwzorowań wyższego rzędu jest całkowicie wyznaczona przez klasę funkcji ciągłych wyższego rzędu o wartościach rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}$.

Rozdział 4

Zastosowania do teorii równań różniczkowych oraz całkowych

Głównym celem tego rozdziału jest zaprezentowanie przykładowych zastosowań omówionych w niniejszej rozprawie twierdzeń o punktach stałych do badania istnienia oraz jedyności rozwiązań liniowych oraz nieliniowych równań różniczkowych i całkowych.

W Paragrafie 4.1 zajmiemy się tzw. uogólnionym równaniem Fredholma drugiego rodzaju, które będziemy rozważać w przestrzeni Hilberta funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem.

W Paragrafie 4.2 wykażemy, iż przy pewnych założeniach, nieliniowe równanie całkowe Hammersteina posiada ciągłe rozwiązania dodatnie.

Paragraf 4.3 poświęcimy badaniu kilku równań różniczkowych i całkowych w przestrzeniach funkcji prawie okresowych różnych typów. W szczególności zajmiemy się nieliniowym równaniem całkowym Hammersteina z zaburzeniem, a także liniowym oraz semi-liniowym równaniem różniczkowym.

Celem ostatniego paragrafu będzie omówienie zagadnienia istnienia oraz jedyności rozwiązań, będących funkcjami o ograniczonej ϕ-wariacji, dla mieszanego równania Volterry-Fredholma oraz nieliniowego równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem.

4.1. Uogólnione równanie Fredholma

W niniejszym paragrafie zajmiemy się badaniem istnienia oraz jedyności rozwiązań dla tzw. uogólnionego równania Fredholma drugiego rodzaju

$$f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} k_n\Big(\langle \varphi, \varphi_n \rangle\Big)\varphi_n = \varphi, \tag{4.1}$$

które rozważać będziemy w rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L^2[a,b]$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$. Dodajmy, że w równaniu (4.1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz $k_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) są danymi funkcjami, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zupełnym układem ortonormalnym w przestrzeni $L^2[a,b]$, a zbieżność szeregu rozumiana jest w sensie normy $\|\cdot\|_2$. (W dalszej części tego paragrafu będziemy rozważać zarówno szeregi liczbowe, jak również szeregi funkcji będących elementami przestrzeni $L^2[a,b]$. Nie będziemy jednak za każdym razem zaznaczać w jakim sensie należy rozumieć zbieżność danego szeregu, gdyż będzie to zawsze wynikać z kontekstu.)

Motywacje do rozpatrywania równania (4.1) płyną z teorii liniowych równań Fredholma, tj. równań całkowych postaci

$$f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \varphi(t) \qquad \text{dla p.w. } t \in [a,b], \tag{4.2}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $f \in L^2[a,b]$. Przypomnijmy bowiem, że jeżeli jądro $k\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalne w sensie Lebesgue'a z kwadratem oraz hermitowskie, tzn. $k(t,s) = k(s,t)$ dla p.w. $t,s \in [a,b]$, to liniowy operator całkowy $K\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ wyznaczony przez jądro k jest samosprzężony oraz zwarty, a zatem na mocy twierdzenia spektralnego (zob. [73, Theorem 4.15, s. 109]) można go przedstawić w postaci

$$K\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \varphi, \psi_n \rangle \psi_n \qquad \text{dla } \varphi \in L^2[a,b],$$

gdzie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezerowych wartości własnych operatora K, a $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem funkcji własnych odpowiadających wartościom μ_n. (Oczywiście, powyższa suma może być skończona, jeżeli operator całkowy K posiada jedynie skończenie wiele wartości własnych.) Równanie (4.2) można zatem przepisać w następującej postaci

$$f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n\big(\langle \varphi, \psi_n \rangle\big)\psi_n = \varphi,$$

gdzie funkcje $u_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone są wzorami $u_n(t) = \mu_n t$ dla $t \in \mathbb{R}$. Stąd (4.2) można traktować jako szczególny przypadek równania (4.1). Dodajmy, iż o ile w przypadku liniowych równań Fredholma zawsze zachodzi równość $\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\mathbb{R}} |u_n'(t)| = 0$, gdyż $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ (zob. [73, Theorem 4.19, s. 120]), o tyle w dalszych rozważaniach zainteresowani będziemy sytuacją przeciwną, tzn. będziemy zakładać, że $\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\mathbb{R}} |k_n'(t)| \geqslant \kappa > 0$.

Twierdzenie 4.1 ([26, ss. 131–133]). *Załóżmy, że $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $k_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jest ciągiem funkcji spełniających następujące warunki:*

(i) *dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja k_n jest różniczkowalna w sposób ciągły na $\mathbb{R}$ oraz $k_n(0) = 0$;*

(ii) $\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\mathbb{R}} \big|k_n'(t)\big| \geqslant \kappa > 0.$

Jeżeli $|\lambda\kappa| > 1$, *to dla każdego* $f \in L^2[a,b]$ *równanie* (4.1) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie w klasie funkcji całkowalnych* (*w sensie Lebesgue'a*) *z kwadratem na przedziale* $[a,b]$.

Dowód. Na wstępie wykażemy, że funkcje k_n są suriekcjami na $\mathbb{R}$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że bez straty ogólności, możemy założyć, iż $k_n'(t) \geqslant \kappa$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Stąd dla $t \geqslant 0$ otrzymujemy

$$k_n(t) = \int_0^t k_n'(s)\mathrm{d}s \geqslant \kappa t$$

oraz, rozumując analogicznie, $k_n(t) \leqslant \kappa t$ dla $t < 0$, co dowodzi suriektywności funkcji k_n. Wtedy oczywiście funkcja odwrotna $k_n^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Pokażemy teraz, że dowolna funkcja $g \in L^2[a,b]$ spełnia następujący warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| k_n^{-1}\big(\langle g, \varphi_n\rangle\big)\Big|^2 < +\infty.$$

Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned}
\kappa\Big|k_n^{-1}\big(\langle g,\varphi_n\rangle\big)\Big| &= \kappa\Big|k_n^{-1}\big(\langle g,\varphi_n\rangle\big) - k_n^{-1}\big(\langle \varphi_1,\varphi_n\rangle\big)\Big| \\
&\leqslant \Big|k_n'(\theta_n)\Big|\Big|k_n^{-1}\big(\langle g,\varphi_n\rangle\big) - k_n^{-1}\big(\langle \varphi_1,\varphi_n\rangle\big)\Big| \\
&= \Big|k_n \circ k_n^{-1}\big(\langle g,\varphi_n\rangle\big) - k_n \circ k_n^{-1}\big(\langle \varphi_1,\varphi_n\rangle\big)\Big| \\
&= \Big|\langle g,\varphi_n\rangle - \langle \varphi_1,\varphi_n\rangle\Big| = \Big|\langle g,\varphi_n\rangle\Big|,
\end{aligned}$$

gdzie $\theta_n \in \mathbb{R}$ jest liczbą wybraną zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej, a zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|k_n^{-1}\big(\langle g,\varphi_n\rangle\big)\Big|^2 \leqslant \frac{1}{\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\langle g,\varphi_n\rangle\Big|^2 < +\infty.$$

Zdefiniujmy następujące zbiory

$$A{:=}\Big\{\varphi \in L_2[a,b] : \sum_{n=1}^{\infty}\Big|k_n\big(\langle \varphi,\varphi_n\rangle\big)\Big|^2 < +\infty\Big\}$$

oraz

$$B{:=}\Big\{\varphi \in L_2[a,b] : \sum_{n=1}^{\infty}\Big|k_n^{-1}\big(\lambda^{-1}\langle \varphi - f,\varphi_n\rangle\big)\Big|^2 < +\infty\Big\}.$$

Zauważmy, że $A \neq \emptyset$, gdyż na przykład $\varphi_1 \in A$. Ponadto, z powyższego rozumowania wynika, że $B = L^2[a,b]$. W szczególności, zbiór B jest zupełny w normie $\|\cdot\|_2$ oraz $A \subset B$.

Rozważmy odwzorowanie $K_\lambda\colon A \to B$ dane wzorem

$$K_\lambda(\varphi) = f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} k_n\Big(\langle \varphi, \varphi_n\rangle\Big)\varphi_n.$$

Wykażemy, że odwzorowanie K_λ jest suriekcją. Dla $g \in B$ niech

$$\gamma := \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{-1}\Big(\lambda^{-1}\langle g - f, \varphi_n\rangle\Big)\varphi_n.$$

Ponieważ

$$\Big|k_n \circ k_n^{-1}\Big(\lambda^{-1}\langle g - f, \varphi_n\rangle\Big)\Big| = \Big|\lambda^{-1}\langle g - f, \varphi_n\rangle\Big| \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

więc $\gamma \in A$. Ponadto

$$\begin{aligned} K_\lambda(\gamma) &= f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} k_n\Big(\langle \sum_{m=1}^{\infty} k_m^{-1}\Big(\lambda^{-1}\langle g - f, \varphi_m\rangle\Big)\varphi_m, \varphi_n\rangle\Big)\varphi_n \\ &= f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} k_n \circ k_n^{-1}\Big(\lambda^{-1}\langle g - f, \varphi_n\rangle\Big)\varphi_n \\ &= f + g - f = g. \end{aligned}$$

Dla dowolnego $\varphi, \psi \in A$, na mocy równości Parsevala (zob. [86, s. 86]) oraz założenia (ii), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|K_\lambda(\varphi) - K_\lambda(\psi)\|_2^2 &= |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\Big|k_n\Big(\langle \varphi, \varphi_n\rangle\Big) - k_n\Big(\langle \psi, \varphi_n\rangle\Big)\Big|^2 \\ &= |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\Big|k_n'(\theta_n)\Big|^2\Big|\langle \varphi, \varphi_n\rangle - \langle \psi, \varphi_n\rangle\Big|^2 \\ &\geqslant |\lambda\kappa|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\langle \varphi, \varphi_n\rangle - \langle \psi, \varphi_n\rangle\Big|^2 = |\lambda\kappa|^2\, \|\varphi - \psi\|_2^2\,, \end{aligned}$$

gdzie $\theta_n \in \mathbb{R}$ jest liczbą wybraną zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej. Stąd

$$\|K_\lambda(\varphi) - K_\lambda(\psi)\|_2 \geqslant |\lambda\kappa|\, \|\varphi - \psi\|_2\,,$$

czyli odwzorowanie K_λ jest silnie rozszerzające. Na mocy Twierdzenia 2.3 odwzorowanie K_λ posiada dokładnie jeden punkt stały w przestrzeni $L^2[a, b]$, a zatem równanie (4.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowalne z kwadratem na przedziale $[a, b]$. □

Uwaga 4.1. Jeżeli przez $\varphi^* \in L^2[a, b]$ oznaczymy jedyny punkt stały odwzorowania K_λ, to wobec dowodu Twierdzenia 2.3 mamy $\varphi^* = \lim_{n\to\infty} K_\lambda^{-n}(f)$ w normie $\|\cdot\|_2$, gdzie K_λ^{-n} oznacza n-tą iterację odwzorowania K_λ^{-1}.

Uwaga 4.2. W ogólności $A \neq L_2(a,b)$. Istotnie, niech $\xi_n{:=}n^{-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ oraz oczywiście $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n \in L_2[a,b]$, jednakże jeżeli położymy $k_n(t) = nt$ dla $t \in \mathbb{R}$, to $\big(k_n(\xi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \notin l_2$ mimo, iż ciąg $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia założenia Twierdzenia 4.1.

Przykład 4.1. Rozważmy ciąg $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji $k_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danych wzorami $k_n(t) = \kappa_n t + e^t - 1$ dla $t \in \mathbb{R}$, gdzie $\inf_{n\in\mathbb{N}} \kappa_n \geqslant \kappa > 0$. Łatwo sprawdzić, iż ciąg ten spełnia założenia Twierdzenia 4.1.

4.2. Nieliniowe równanie całkowe Hammersteina w przestrzeni funkcji ciągłych

Niech Ω będzie ograniczonym oraz otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy następujące nieliniowe równanie całkowe Hammersteina

$$\lambda x(t) = \int_{\overline{\Omega}} k(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s, \qquad t \in \overline{\Omega}, \tag{4.3}$$

gdzie $k\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ i $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ są funkcjami ciągłymi, natomiast λ jest niezerową liczbą rzeczywistą. Dodatnim rozwiązaniem równania (4.3) nazywamy parę (λ, x), gdzie λ jest liczbą dodatnią, a $x\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą (4.3) taką, że $x(t) \geqslant 0$ dla każdego $t \in \overline{\Omega}$.

Inspirowani wynikami R. W. Leggetta i L. R. Williamsa pochodzącymi z pracy [55], wykażemy teraz następujące

Twierdzenie 4.2. *Niech Ω będzie ograniczonym oraz otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}$ będzie zbiorem domkniętym dodatniej miary Lebesgue'a. Załóżmy ponadto, że funkcje $k\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ i $f\colon \overline{\Omega} \times [0,r] \to \mathbb{R}_+$, gdzie $r > 0$, są ciągłe. Jeżeli istnieją liczby dodatnie δ_1, δ_2, m takie, że*

(i) $\int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t \geqslant \delta_1$ *dla każdego* $s \in \Omega_0$*;*

(ii) $\int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t \geqslant \delta_2 k(u,s)$ *dla wszystkich* $(u,s) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$*;*

(iii) $f(t,x) > 0$, *jeżeli* $m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p} \leqslant x \leqslant r$ *oraz* $t \in \Omega_0$, *gdzie* $p > 1$*;*

(iv) $0 < m \leqslant r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}$, *gdzie* $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

to równanie (4.3) *posiada takie dodatnie rozwiązanie* (λ, x), *że*

$$\left(\int_{\Omega_0} [x(t)]^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} = m.$$

W dowodzie Twierdzenia 4.2 skorzystamy z poniższego faktu, będącego prostą konsekwencją nierówności Höldera.

Stwierdzenie 4.1 (por. [65, Twierdzenie 6.10, s. 54]). *Niech* $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą skończoną. Jeżeli* $1 \leqslant p_1 < p_2 < +\infty$, *to*

$$\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |x(t)|^{p_1}\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_1} \leqslant \left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_2} \quad \textit{dla} \quad x \in L^{p_2}(X, \mathfrak{X}, \mu),$$

gdzie $L^{p_2}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ *oznacza przestrzeń Banacha (klas) funkcji o wartościach rzeczywistych całkowalnych z potęgą* p_2 *względem miary* μ *na* X.

Dowód Twierdzenia 4.2. Niech

$$C{:=}\left\{x \in C(\overline{\Omega}) : x(t) \geqslant 0 \text{ dla każdego } t \in \overline{\Omega} \text{ oraz } \int_{\Omega_0} x(t)\mathrm{d}t \geqslant \delta_2 \|x\|_\infty\right\}$$

oraz niech ciągła seminorma $|\!\cdot\!| \colon C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_+$ będzie zdefiniowana następującym wzorem

$$|x| = \left(\int_{\Omega_0} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \qquad \text{dla } x \in C(\overline{\Omega}).$$

Zauważmy, iż zbiór C jest stożkiem w przestrzeni $C(\overline{\Omega})$, a ponadto $C \cap \ker|\!\cdot\!| = \{0\}$. Istotnie, jeżeli $|x| = 0$ dla $x \in C$, to $x(t) = 0$ dla p.w. $t \in \Omega_0$, a zatem z definicji zbioru C wynika, że $\|x\|_\infty = 0$. W konsekwencji $x(t) = 0$ dla $t \in \overline{\Omega}$.

Załóżmy teraz, że $x \in C$. Wtedy ze Stwierdzenia 4.1 otrzymujemy

$$|x| = \left(\int_{\Omega_0} [x(t)]^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant (\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}\int_{\Omega_0} x(t)\mathrm{d}t \geqslant (\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}\delta_2 \|x\|_\infty,$$

co pokazuje, iż założenie (ii) Twierdzenia 2.10 jest spełnione, jeżeli przyjmiemy $M{:=}(\operatorname{meas}\Omega_0)^{1/q}\delta_2^{-1}$.

Niech odwzorowanie $F \colon C(0, r) \to C(\overline{\Omega})$ będzie dane wzorem

$$F(x)(t) = \int_{\Omega} k(t,s) f(s, x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in \overline{\Omega}.$$

Oczywiście odwzorowanie F jest poprawnie określone, tzn. $F(x) \in C(\overline{\Omega})$ dla każdego $x \in C(\overline{\Omega})$. Pokażemy teraz, że F jest odwzorowaniem zwartym (zob. Definicja 2.2). Ponieważ odwzorowanie F jest ciągłe, więc wobec twierdzenia Arzeli-Ascolego (zob. [65, Twierdzenie 9.15]) wystarczy wykazać, iż dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów zbioru $C(0, r)$ ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $y_n{:=}F(x_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest ograniczony oraz jednakowo ciągły.

Ponieważ funkcje f, k są ciągłe, więc

$$\|y_n\|_\infty = \sup_{t\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} k(t,s) f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \leqslant \operatorname{meas}\overline{\Omega}\; \|k\|_\infty \|f\|_\infty \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto, wobec jednostajnej ciągłości funkcji k, dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $|k(t,s) - k(\tau,s)| < \varepsilon$ dla wszystkich $s,t,\tau \in \overline{\Omega}$, o ile $\|t-\tau\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$. Zatem

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| \leqslant \int_{\overline{\Omega}} |k(t,s) - k(\tau,s)| f(s, x_n(s))\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon \operatorname{meas}\overline{\Omega}\ \|f\|_\infty$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $t,\tau \in \overline{\Omega}$ takich, że $\|t-\tau\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, co dowodzi jednakowej ciągłości ciągu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

By wykazać, iż F jest odwzorowaniem dodatnim, tzn. odwzorowaniem przekształcającym zbiór $C(0,r)$ w stożek C, ustalmy $x \in C(0,r)$. Ponieważ funkcje f,k przyjmują wartości nieujemne, więc $F(x)(t) \geqslant 0$ dla każdego $t \in \overline{\Omega}$. Co więcej, na mocy założenia (ii), dla dowolnego $u \in \overline{\Omega}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} F(x)(t)\mathrm{d}t &= \int_{\Omega_0}\int_{\overline{\Omega}} k(t,s) f(s,x(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_{\overline{\Omega}}\left[\int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t\right] f(s,x(s))\mathrm{d}s \\ &\geqslant \delta_2 \int_{\overline{\Omega}} k(u,s) f(s,x(s))\mathrm{d}s = \delta_2 F(x)(u), \end{aligned} \tag{4.4}$$

co dowodzi, iż F odwzorowuje $C(0,r)$ w C.

Dla ustalonego $s \in \Omega_0$ niech $u \in \Omega_0$ będzie takie, że $k(u,s) = \max_{t\in\Omega_0} k(t,s)$. Wtedy, na mocy założenia (ii), otrzymujemy

$$\operatorname{meas}\Omega_0 \cdot k(u,s) \geqslant \int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t \geqslant \delta_2 k(u,s),$$

co dowodzi, że $\delta_2 \leqslant \operatorname{meas}\Omega_0$. (Zauważmy, że wobec założenia (i), dla każdego $s \in \Omega_0$ funkcja $t \mapsto k(t,s)$ nie jest tożsamościowo równa zero na zbiorze Ω_0.) Zatem definiując funkcję $x\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ wzorem $x(t) = m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p}$ dla $t \in \overline{\Omega}$ mamy $x(t) \leqslant r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p-1/q} \leqslant r$ oraz

$$\delta_2\|x\|_\infty = \delta_2 \frac{m}{(\operatorname{meas}\Omega_0)^{1/p}} \leqslant \int_{\Omega_0} x(t)\mathrm{d}t.$$

Tym samym $x \in C(0,r)$ oraz $|x| = m$.

Na zakończenie wykażemy, że odwzorowanie F oraz seminorma $|\cdot|$ spełniają założenie (iv) Twierdzenia 2.10. Przypuśćmy, że $x \in C(0,r)$ oraz $|x| = m$. Ponieważ $\delta_2 \leqslant \operatorname{meas}\Omega_0$, więc przedział $\left[m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p}, r\right]$ jest niepusty. Z ciągłości funkcji f i założenia (iii) wynika więc, iż istnieją takie stałe $0 < \vartheta < 1$ oraz $\eta > 0$, że$f(t,x) \geqslant \eta$ jeżeli $t \in \Omega_0$ oraz $\vartheta m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p} \leqslant x \leqslant r$. Niech

$$\Omega_1 := \left\{t \in \Omega_0 : x(t) \geqslant \vartheta m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p}\right\}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} m^p &= \int_{\Omega_0} [x(t)]^p\mathrm{d}t = \int_{\Omega_1} [x(t)]^p\mathrm{d}t + \int_{\Omega_0\setminus\Omega_1} [x(t)]^p\mathrm{d}t \\ &\leqslant r^p \operatorname{meas}\Omega_1 + \frac{\vartheta^p m^p}{\operatorname{meas}\Omega_0}\Big(\operatorname{meas}\Omega_0 - \operatorname{meas}\Omega_1\Big) \leqslant r^p \operatorname{meas}\Omega_1 + \vartheta^p m^p, \end{aligned}$$

a zatem $m^p(1-\vartheta^p) \leqslant r^p \operatorname{meas}\Omega_1$ i w konsekwencji $\operatorname{meas}\Omega_1 > 0$. Stąd

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left(\int_{\Omega_0}[F(x)(t)]^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant (\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}\int_{\Omega_0}F(x)(t)\mathrm{d}t\\ &= (\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}\int_{\overline{\Omega}}\left[\int_{\Omega_0}k(t,s)\mathrm{d}t\right]f(s,x(s))\mathrm{d}s\\ &\geqslant \delta_1(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}\int_{\Omega_1}f(s,x(s))\mathrm{d}s \geqslant \delta_1\eta\operatorname{meas}\Omega_1(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}=:\delta > 0.\end{aligned}$$

By zakończyć dowód wystarczy zastosować Twierdzenie 2.10. □

Uwaga 4.3. Zauważmy, iż dla $p=1$ oraz $q=+\infty$ Twierdzenie 4.2 jest także prawdziwe (przyjmujemy wtedy $(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}:=1$), a zatem jest ono uogólnieniem wyniku R. W. Leggetta oraz L. R. Williamsa (zob. [55, Theorem 2]).

Uwaga 4.4. Twierdzenie 4.2 uogólnia również, na przypadek odwzorowań nieliniowych, klasyczny wynik R. Jentzscha (zob. [50]) mówiący, iż liniowy operator całkowy

$$Kx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \qquad t\in[0,1],\ x\in C[0,1],$$

generowany przez funkcję ciągłą $k\colon [0,1]\times[0,1]\to(0,+\infty)$ posiada dodatnią wartość własną, która odpowiada pewnej dodatniej funkcji własnej $y\in C[0,1]$.

Okazuje się, iż w przypadku, gdy funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, a miara zbioru Ω_0 jest odpowiednio mała, można nie tylko wykazać istnienie rozwiązań dodatnich równania (4.3), ale także otrzymać pewne dodatkowe informacje dotyczące liczebności zbioru rozwiązań.

Twierdzenie 4.3. *Niech Ω będzie ograniczonym oraz otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\Omega_0\subset\overline{\Omega}$ będzie takim zbiorem domkniętym, że $\operatorname{meas}\Omega_0\in(0,1)$. Załóżmy ponadto, że funkcje $k\colon\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}_+$, $f\colon\overline{\Omega}\times[0,r]\to(0,+\infty)$, gdzie $r>0$, są ciągłe. Jeżeli istnieją liczby dodatnie δ_1,δ_2,m spełniające następujące warunki:*

(i) $\displaystyle\int_{\Omega_0}k(t,s)\mathrm{d}t\geqslant\delta_1$ *dla każdego* $s\in\Omega_0$*;*

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_0}k(t,s)\mathrm{d}t\geqslant\delta_2 k(u,s)$ *dla wszystkich* $(u,s)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$*;*

(iii) $0<m\leqslant r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q}$, *gdzie* $q>1$,

to równanie (4.3) *posiada nieskończenie wiele rozwiązań dodatnich* (λ_a,x_a), *gdzie* $a\in(p,+\infty)$ *oraz* $p^{-1}+q^{-1}=1$ *takich, że*

$$\left(\int_{\Omega_0}[x_a(t)]^a\mathrm{d}t\right)^{1/a} = m.$$

Dowód. Niech $a \in (p, +\infty)$ oraz niech b będzie wykładnikiem sprzężonym z a, tzn. $a^{-1} + b^{-1} = 1$. Wtedy $b \in (1, q)$ oraz

$$0 < m \leqslant r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q} \leqslant r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/b}.$$

Stąd, na mocy Twierdzenia 4.2, istnieje takie dodatnie rozwiązanie (λ_a, x_a) równania (4.3), że

$$\left(\int_{\Omega_0} [x_a(t)]^a \mathrm{d}t\right)^{1/a} = m.$$

Zauważmy ponadto, iż $x_{a_1} \neq x_{a_2}$, o ile $a_1 \neq a_2$. Gdyby bowiem $x_{a_1} = x_{a_2} = x$ dla $a_1 < a_2$, to na podstawie Stwierdzenia 4.1 otrzymalibyśmy

$$\left(\int_{\Omega_0} [x(t)]^{a_2} \mathrm{d}t\right)^{1/a_2} = \left(\int_{\Omega_0} [x(t)]^{a_1} \mathrm{d}t\right)^{1/a_1} \leqslant (\operatorname{meas}\Omega_0)^{1/a_1 - 1/a_2}\left(\int_{\Omega_0} [x(t)]^{a_2} \mathrm{d}t\right)^{1/a_2}$$

i w konsekwencji

$$1 \leqslant (\operatorname{meas}\Omega_0)^{1/a_1 - 1/a_2},$$

co przeczyłoby założeniu, że $\operatorname{meas}\Omega_0 < 1$. $\square$

Następujący wynik pokazuje, iż założenia (i) oraz (ii) Twierdzenia 4.2 i Twierdzenia 4.3 spełnione są dla szerokiej klasy jąder.

Stwierdzenie 4.2 (por. [55, Corollary 1]). *Niech Ω będzie ograniczonym oraz otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}$ będzie zbiorem domkniętym dodatniej miary Lebesgue'a. Załóżmy ponadto, że funkcja $k\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ jest ciągła. Jeżeli istnieją funkcje ciągłe $h_1, h_2, h_3\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ takie, że*

(i) *$h_1(t) > 0$ oraz $h_3(t) > 0$ dla $t \in \Omega_0$;*

(ii) *$h_1(t)h_3(s) \leqslant k(t,s) \leqslant h_2(t)h_3(s)$ dla $(t,s) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$,*

to jądro k spełnia założenia (i) *oraz* (ii) *Twierdzenia 4.2 i Twierdzenia 4.3.*

Dowód. Dla $s \in \Omega_0$ mamy

$$\int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t \geqslant \int_{\Omega_0} h_1(t)h_3(s)\mathrm{d}t = h_3(s)\int_{\Omega_0} h_1(t)\mathrm{d}t \geqslant \min_{s\in\Omega_0} h_3(s)\int_{\Omega_0} h_1(t)\mathrm{d}t > 0,$$

a zatem warunek (i) zachodzi z $\delta_1 := \min\limits_{s\in\Omega_0} h_3(s)\int_{\Omega_0} h_1(t)\mathrm{d}t$. Ponadto, dla dowolnych $u, s \in \overline{\Omega}$ oraz

$$\delta_2 := \frac{\int_{\Omega_0} h_1(t)\mathrm{d}t}{\|h_2\|_\infty + 1}$$

otrzymujemy

$$\int_{\Omega_0} k(t,s)\mathrm{d}t \geqslant h_3(s)\int_{\Omega_0} h_1(t)\mathrm{d}t \geqslant \delta_2 \|h_2\|_\infty h_3(s) \geqslant \delta_2 h_2(u)h_3(s) \geqslant \delta_2 k(u,s),$$

co kończy dowód. $\square$

Przykład 4.2 ([55, Remark 1]). Niech $\overline{\Omega}$:=$[0,1]$ i Ω_0:=$[0,1]$ oraz rozważmy jądro $k\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}_+$ dane wzorem $k(t,s)=|t-s|$. Zauważmy, że funkcja k nie spełnia założeń Stwierdzenia 4.2, gdyż $k(t,t)=0$ dla $t\in[0,1]$, a więc funkcje h_1,h_3 o żądanych własnościach nie mogą istnieć. Ponieważ jednak dla dowolnego $s\in[0,1]$ mamy

$$\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}t=\int_0^1|t-s|\mathrm{d}t=\int_0^s(s-t)\mathrm{d}t+\int_s^1(t-s)\mathrm{d}t=s^2-s+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4},$$

więc funkcja k spełnia założenia (i) oraz (ii) Twierdzenia 4.2.

Na zakończenie niniejszego paragrafu zaprezentujemy przykład ilustrujący Twierdzenie 4.2, dotyczący pewnego zagadnienia brzegowego. Przykład ten rozszerza wynik Leggetta i Williamsa (zob. [55, ss. 253–254]), który otrzymujemy przyjmując $p=1$ oraz $q=+\infty$.

Przykład 4.3. Niech r będzie liczbą dodatnią. Rozważmy nieliniowe równanie różniczkowe

$$-x''(t)=\lambda f(t,x(t)),\qquad t\in[0,1] \tag{4.5}$$

z warunkami brzegowymi

$$x(0)=x'(1)=0, \tag{4.6}$$

gdzie $\lambda\in\mathbb{R}$ oraz $f\colon[0,1]\times[0,r]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Można łatwo sprawdzić, iż równanie (4.5)-(4.6) jest równoważne z następującym równaniem całkowym

$$x(t)=\lambda\int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1], \tag{4.7}$$

gdzie $k\colon[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}_+$ oraz

$$k(t,s)=\begin{cases} t & \text{dla } t\leqslant s,\\ s & \text{dla } t>s.\end{cases}$$

Innymi słowy każde rozwiązanie zagadnienia (4.5)-(4.6), tj. funkcja $x\colon[0,1]\to[0,r]$ dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły, która spełnia (4.5)-(4.6), jest ciągłym rozwiązaniem równania (4.7) i odwrotnie.

Załóżmy, że funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne i $f(1,r)>0$. Istnieje zatem taka stała $0<c<1$, że $f(t,x)>0$ dla $c\leqslant t\leqslant 1$ oraz $cr\leqslant x\leqslant r$. Udowodnimy, że równanie (4.7) posiada dodatnie rozwiązanie (λ^{-1},x) spełniające warunek

$$\left(\frac{1}{1-c}\int_c^1[x(t)]^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}=rc, \tag{4.8}$$

gdzie $p \geqslant 1$. Połóżmy

$$\overline{\Omega}{:=}[0,1], \qquad \Omega_0{:=}[c,1], \qquad \delta_1 = \delta_2{:=}c(1-c), \qquad m{:=}rc(1-c)^{1/p}.$$

Jeżeli $s \in [c,1]$, to

$$\int_c^1 k(t,s)\mathrm{d}t = \int_c^s t\mathrm{d}t + \int_s^1 s\mathrm{d}t = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}c^2 \geqslant c(1-c) = \delta_1 \geqslant \delta_2 k(u,s) \quad (4.9)$$

dla $u \in [0,1]$, a zatem jądro k spełnia założenie (i) Twierdzenia 4.2. Ponadto, jeżeli $s \in [0,c]$, to

$$\int_c^1 k(t,s)\mathrm{d}t = \int_c^1 s\mathrm{d}t = (1-c)s \geqslant c(1-c)s \geqslant \delta_2 k(u,s), \quad u \in [0,1]. \qquad (4.10)$$

Wobec tego z (4.9) oraz (4.10) wynika, że k spełnia również założenie (ii) Twierdzenia 4.2. Zauważmy, iż

$$m = r\delta_2(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/q} \qquad \text{oraz} \qquad m(\operatorname{meas}\Omega_0)^{-1/p} = rc,$$

gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$, co dowodzi, że funkcja f spełnia założenia (iii)-(iv) Twierdzenia 4.2. Tym samym równanie (4.7) posiada dodatnie rozwiązanie, które dodatkowo spełnia warunek (4.8).

4.3. Nieliniowe równania różniczkowe oraz całkowe w przestrzeniach funkcji prawie okresowych

Niniejszy paragraf poświęcimy omówieniu zagadnienia istnienia rozwiązań liniowych oraz nieliniowych równań różniczkowych i całkowych w przestrzeniach funkcji prawie okresowych takich jak: $BAA(\mathbb{R})$, $LAP_b(\mathbb{R})$ oraz $PAP(\mathbb{R})$. W tym miejscu warto wspomnieć, iż dodatkowe informacje dotyczące zastosowań funkcji prawie okresowych w teorii równań różniczkowych oraz całkowych można znaleźć w monografiach [35, 41, 56, 57, 68, 69, 71].

4.3.1. Nieliniowe równanie całkowe Hammersteina z zaburzeniem w przestrzeni $PAP(\mathbb{R})$. Rozważmy nieliniowe równanie całkowe Hammersteina z zaburzeniem

$$x(t) = g(t) + G(x)(t) + \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (4.11)$$

oraz przyjmijmy następujące założenia:

1° $g \in PAP(\mathbb{R})$;

2° $G\colon PAP(\mathbb{R}) \to PAP(\mathbb{R})$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu i $G(0) = 0$;

3° jądro $k\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}$ można przedstawić w postaci $k=\varphi+\psi$, gdzie funkcje $\varphi,\ \psi\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}$ są ciągłe oraz spełniają warunki:

(i) każdy ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych posiada podciąg $(t_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ taki, że granica $\lim_{m\to\infty}\varphi(t+t_{n_m},s)$ istnieje jednostajnie względem $(t,s)\in\mathbb{R}\times[0,1]$;

(ii) $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi(t,s)|\mathrm{d}t=0$ dla każdego ustalonego $s\in[0,1]$;

4° funkcja k jest ograniczona na $\mathbb{R}\times[0,1]$;

5° funkcja $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienna jednostajnie względem pierwszej zmiennej, tj. istnieje taka liczba dodatnia L, że

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leqslant L|u-v|\quad \text{dla wszystkich } u,v\in\mathbb{R},\ t\in[0,1];$$

6° $f(t,0)=0$ dla każdego $t\in[0,1]$;

7° $L\cdot\|k\|_\infty<1$.

W dowodzie głównego wyniku niniejszego paragrafu – Twierdzenia 4.4 – skorzystamy z abstrakcyjnego lematu Gronwalla (zob. Twierdzenie 1.1), a także z serii następujących lematów.

Lemat 4.1 ([25, Lemma 5]). *Funkcje $\varphi,\ \psi\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}$ są ograniczone.*

Dowód. Niech $(t,s)\in\mathbb{R}\times[0,1]$. Z założenia 3° (i) oraz Twierdzenia 1.2 wynika, że funkcja $\tau\mapsto\varphi(\tau,s)$ dla $\tau\in\mathbb{R}$ jest prawie okresowa, a więc w szczególności ograniczona (zob. Uwaga 1.10). Tym samym, wobec 4°, również funkcja $\tau\mapsto\psi(\tau,s)$ jest ograniczona, a zatem funkcja $\tau\mapsto k(\tau,s)$ jest pseudo prawie okresowa. Z Twierdzenia 1.4 otrzymujemy

$$|\varphi(t,s)|\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}|k(t,s)|\leqslant\|k\|_\infty$$

oraz

$$\|\varphi\|_\infty=\sup\Big\{|\varphi(t,s)|:(t,s)\in\mathbb{R}\times[0,1]\Big\}\leqslant\|k\|_\infty.$$

Stąd

$$\|\psi\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_\infty+\|k\|_\infty\leqslant 2\,\|k\|_\infty.$$

□

Lemat 4.2 ([25, Lemma 6]). *Odwzorowanie F zdefiniowane wzorem*

$$F(x)(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad x\in PAP(\mathbb{R}),\ t\in\mathbb{R},\tag{4.12}$$

działa w przestrzeni $PAP(\mathbb{R})$.

Dowód. Niech $x \in PAP(\mathbb{R})$. Pokażemy, że funkcje

$$\Phi(t) := \int_0^1 \varphi(t,s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \quad \text{oraz} \quad \Psi(t) := \int_0^1 \psi(t,s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}$$

są odpowiednio częścią główną oraz częścią ergodyczną funkcji $F(x)$.

Z ograniczoności funkcji pseudo prawie okresowej wynika, że

$$N(x) := \sup\left\{ \left| f(s,x(s)) \right| : s \in [0,1] \right\} < +\infty,$$

a zatem na mocy Lematu 4.1, funkcje Φ oraz Ψ są ograniczone. Oczywiście, funkcje te są również ciągłe, więc $\Phi, \Psi \in BC(\mathbb{R})$.

Jeżeli $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich rozbieżnym do nieskończoności, to oznaczając

$$\Psi_n(s) := \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \left| \psi(t,s) \right| \mathrm{d}t, \qquad \text{dla } s \in [0,1],$$

dla każdego $s \in [0,1]$ mamy: $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(s) = 0$ oraz $\left|\Psi_n(s)\right| \leqslant 2\left\|k\right\|_\infty$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd, na mocy twierdzenia Fubiniego oraz twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \left|\Psi(t)\right| \mathrm{d}t &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \int_0^1 \left| \psi(t,s) f(s,x(s)) \right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leqslant N(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \left|\psi(t,s)\right| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\
&= N(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Psi_n(s)\mathrm{d}s \\
&= N(x) \cdot \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \Psi_n(s)\mathrm{d}s = 0,
\end{aligned}$$

co dowodzi, że funkcja Ψ jest ergodyczna.

Pokażemy teraz, że funkcja Φ jest prawie okresowa. Niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Na mocy założenia 3° (i) istnieje podciąg $(t_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ o następującej własności: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left| \varphi(t + t_{n_l}, s) - \varphi(t + t_{n_m}, s) \right| \leqslant \varepsilon \text{ dla wszystkich } l, m \geqslant n(\varepsilon) \text{ i } (t,s) \in \mathbb{R} \times [0,1].$$

Stąd, dla $l, m \geqslant n(N(x)^{-1}\varepsilon)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \Phi(t + t_{n_l}) - \Phi(t + t_{n_m}) \right| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_0^1 \left[\varphi(t + t_{n_l}, s) - \varphi(t + t_{n_m}, s) \right] f(s,x(s))\mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant N(x) \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left| \varphi(t + t_{n_l}, s) - \varphi(t + t_{n_m}, s) \right| \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

co, w połączeniu z Twierdzeniem 1.2, dowodzi prawie okresowości funkcji Φ i zarazem kończy dowód. $\square$

Lemat 4.3 ([25]). *Dla dowolnego $g \in PAP(\mathbb{R})$ nieliniowe równanie całkowe Hammersteina*

$$x(t) = g(t) + \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

posiada dokładnie jedno pseudo prawie okresowe rozwiązanie x_g.

Dowód. Wobec Lematu 4.2 odwzorowanie F zdefiniowane wzorem (4.12) przekształca przestrzeń $PAP(\mathbb{R})$ w siebie. Ponadto, na mocy założeń 5º oraz 7º, odwzorowanie to jest kontrakcją, a zatem dla dowolnego $g \in PAP(\mathbb{R})$ równanie (4.13) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x_g \in PAP(\mathbb{R})$. □

Lemat 4.4 ([25, Lemma 7]). *Odwzorowanie $T\colon PAP(\mathbb{R}) \to PAP(\mathbb{R})$, zdefiniowane wzorem $T(g) = x_g$, spełnia warunek Lipschitza oraz $T(0) = 0$.*

Dowód. Ponieważ równanie (4.13) dla dowolnego $g \in PAP(\mathbb{R})$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie, z założenia 6º otrzymujemy

$$0 = \int_0^1 k(t,s)f(s,0)\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Stąd $T(0) = 0$.

By udowodnić, że odwzorowanie T spełnia warunek Lipschitza skorzystamy z Twierdzenia 1.1. Przez S oznaczmy operator liniowy określony wzorem

$$Sx(t) = L \cdot \int_0^1 |k(t,s)|x(s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R} \text{ oraz } x \in BC(\mathbb{R}).$$

Można łatwo pokazać, że operator S jest dodatni oraz działa w przestrzeni $BC(\mathbb{R})$. Ponieważ $\|S\| \leqslant L \cdot \|k\|_\infty$, więc z 7º wynika, że $r_s(S) \leqslant \|S\| < 1$. Ponadto, jeżeli c jest nieujemną liczbą rzeczywistą, to rozwiązanie równania

$$y(t) = c + Sy(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

dane jest wzorem

$$y(t) := c \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 k_n(t,s)\mathrm{d}s\right),$$

gdzie

$$k_1(t,s) := L|k(t,s)| \qquad \text{oraz} \qquad k_{n+1}(t,s) := \int_0^1 k_1(t,\tau)k_n(\tau,s)\mathrm{d}\tau \ \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Istotnie, ponieważ operator liniowy S jest kontrakcją, więc rozwiązanie równania (4.14) wyraża się szeregiem Neumanna

$$y(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} S^n c(t),$$

przy czym szereg ten jest zbieżny jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}$, a ponadto

$$S^n c(t) = c\int_0^1 k_n(t,s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd, jeżeli $g, h \in PAP(\mathbb{R})$, to

$$\begin{aligned}|x_g - x_h|(t) = |x_g(t) - x_h(t)| &\leqslant |g(t) - h(t)| + L \cdot \int_0^1 |k(t,s)||x_g(s) - x_h(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \|g-h\|_\infty + L \cdot \int_0^1 |k(t,s)||x_g(s) - x_h(s)|\mathrm{d}s \\ &= \|g-h\|_\infty + S|x_g - x_h|(t),\end{aligned}$$

a zatem na mocy Lematu 1.3 oraz Twierdzenia 1.1 otrzymujemy

$$|x_g(t) - x_h(t)| \leqslant \|g-h\|_\infty \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 k_n(t,s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \beta \|g-h\|_\infty\,,$$

gdzie

$$\beta := \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 k_n(t,s)\mathrm{d}s\right).$$

Tym samym

$$\|T(g) - T(h)\|_\infty \leqslant \beta \|g-h\|_\infty\,. \qquad \square$$

Twierdzenie 4.4 ([25, Theorem 15]). *Przy założeniach* 1°-7° *istnieją takie liczby dodatnie η i σ, że dla każdego $g \in B_{PAP}(0,\eta)$ równanie* (4.11) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie pseudo prawie okresowe w kuli $B_{PAP}(0,\sigma)$.*

Dowód. Odwzorowanie $T\colon PAP(\mathbb{R}) \to PAP(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem $T(g) = x_g$, gdzie x_g jest jedynym rozwiązaniem pseudo prawie okresowym równania (4.13), spełnia założenia Twierdzenia 2.12 (por. Uwaga 2.9). Stąd, wobec założenia 2°, na mocy Twierdzenia 2.12 istnieją takie liczby dodatnie η oraz σ, że dla dowolnego $g \in B_{PAP}(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden element $x^* \in B_{PAP}(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(g + G(x^*))$, czyli spełniający równanie

$$x^*(t) = g(t) + G(x^*)(t) + \int_0^1 k(t,s)f(s,x^*(s))\mathrm{d}s \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Uwaga 4.5 ([25, Remark 24]). Zauważmy, że rozwiązanie zerowe równania

$$x(t) = G(x)(t) + \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

jest stabilne w następującym sensie: dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli $g \in PAP(\mathbb{R})$ oraz $\|g\|_\infty < \delta$, to równanie (4.11) posiada dokładnie jedno pseudo prawie okresowe rozwiązanie x^* takie, że $\|x^*\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Powyższy fakt jest bezpośrednią konsekwencją dowodu Twierdzenia 2.12.

Uwaga 4.6 ([25, Example 5])**.** Dowód Lematu 4.4 oparty był na Twierdzeniu 1.1, czyli na tzw. abstrakcyjnym lemacie Gronwalla. W rozważanym dowodzie mogliśmy skorzystać również z kontrakcyjności odwzorowania F, gdyż oszacowanie

$$\|T(g) - T(h)\|_\infty \leqslant \frac{1}{1 - L \cdot \|k\|_\infty} \|g - h\|_\infty$$

jest prostą konsekwencją poniższego ciągu nierówności

$$\|x_g - x_h\|_\infty \leqslant \|g - h\|_\infty + \|F(x_g) - F(x_h)\|_\infty \leqslant \|g - h\|_\infty + L \cdot \|k\|_\infty \|x_g - x_h\|_\infty .$$

Okazuje się jednak, że zastosowanie Twierdzeniu 1.1 prowadzi do lepszej stałej Lipschitza dla odwzorowania T. Istotnie

$$\beta := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 k_n(t,s)\mathrm{d}s\right) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \|k\|_\infty^n = \frac{1}{1 - L \cdot \|k\|_\infty}.$$

Tym samym stała η, występująca w Twierdzeniu 4.4, może przyjmować większe wartości.

Przykładowo, jeżeli rozpatrzymy funkcje $\varphi(t,s) = s\sin t$, $\psi(t,s) = 0$ oraz $f(t,u) = Lu$ dla $L \in (0,1)$, które oczywiście spełniają założenia 3°-7°, otrzymamy $k_{n+1}(t,s) = k_1(t,s) \cdot L^n(\sin 1 - \cos 1)^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\beta = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(1 + \frac{L|\sin t|}{2 - 2L(\sin 1 - \cos 1)}\right) = 1 + \frac{L}{2 - 2L(\sin 1 - \cos 1)}.$$

4.3.2. Rozwiązania prawie okresowe w sensie Levitana dla liniowych równań różniczkowych. Rozważmy równanie liniowe pierwszego rzędu następującej postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest prawie okresowa w sensie Levitana, a $\lambda \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.5 ([25, Theorem 16])**.** *Jeżeli* $f \in LAP_b(\mathbb{R})$ *oraz* $\lambda < 0$, *to równanie* (4.15) *posiada rozwiązanie* $x \in LAP_b(\mathbb{R})$, *które wyraża się następującym wzorem*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Dowód. Funkcja $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem (4.16) jest oczywiście rozwiązaniem równania (4.15). Zauważmy, że $x = g * f$, gdzie funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$g(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{dla } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Ponieważ g jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, więc z Twierdzenia 1.10 wynika, że $x \in LAP_b(\mathbb{R})$, co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 4.7 ([25, Remark 25])**.** Okazuje się, że jednostajnie ciągłe oraz ograniczone funkcje LAP są prawie automorficzne w sensie Bochnera (por. [5, s. 430]). Ponieważ splot funkcji całkowalnej w sensie Lebesgue'a z funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a i ograniczoną jest jednostajnie ciągły oraz ograniczony (zob. [49, Theorem 21.33]), więc rozwiązanie równania (4.15) dane wzorem (4.16) należy do przestrzeni $BAA(\mathbb{R})$.

Zanim pokażemy przykład równania (4.15), którego rozwiązanie jest prawie automorficzne w sensie Bochnera, ale nie jest prawie okresowe, udowodnimy następujący fakt.

Stwierdzenie 4.3 ([25, Proposition 6])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz ograniczoną oraz niech funkcja $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana następującym wzorem*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $\lambda < 0$. Wtedy wartość średnia $M(f)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartość średnia $M(u)$. Ponadto $M(f) = -\lambda M(u)$.

Dowód. Zauważmy, że funkcja u jest lokalnie całkowalna (w sensie Lebesgue'a), a zatem na mocy twierdzenia Fubiniego, dla dowolnego $T > 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} u(t)\mathrm{d}t &= \int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-T}\int_{-T}^{T} e^{\lambda(t-s)} f(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \int_{-T}^{T}\int_{s}^{T} e^{\lambda(t-s)} f(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{T} e^{\lambda(T-s)} f(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{-T} e^{-\lambda(T+s)} f(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\lambda}\int_{-T}^{T} f(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda}u(T) - \frac{1}{\lambda}u(-T) - \frac{1}{\lambda}\int_{-T}^{T} f(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ponieważ funkcja u jest ograniczona, więc istnienie wartości średniej $M(f)$ jest równoważne istnieniu wartości średniej $M(u)$. Ponadto $M(u) = -\frac{1}{\lambda}M(f)$. □

Przykład 4.4 ([25, Remark 26])**.** Niech $l \in LAP_b(\mathbb{R})$ będzie funkcją skonstruowaną przez Levitana (por. [56, s. 151]), której wartość średnia $M(l)$ nie istnieje. Wtedy, na mocy Twierdzenia 4.5 oraz Uwagi 4.7, funkcja

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} l(s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

będąca rozwiązaniem równania (4.15) przy $\lambda = -1$ oraz $f = l$, jest jednostajnie ciągła oraz prawie automorficzna w sensie Bochnera. Funkcja u nie jest jednak prawie okresowa, gdyż na mocy Stwierdzenia 4.3 jej wartość średnia $M(u)$ nie istnieje (por. Uwaga 1.20).

Powyższy przykład jest ściśle związany z pytaniem postawionym przez B. Basita i H. Günzlera (zob. [5, Open question 4., s. 436]), które dotyczy podania w sposób jawny wzoru funkcji jednostajnie ciągłej f takiej, że $f \in BAA(\mathbb{R})$, ale $f \notin AP(\mathbb{R})$.

4.3.3. Rozwiązania prawie automorficzne w sensie Bochnera dla semiliniowych równań różniczkowych. Rozważmy następujące równanie semiliniowe pierwszego rzędu

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

gdzie $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że ograniczona funkcja $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

(i) *dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t,u)$ jest prawie okresowa w sensie Levitana;*

(ii) *istnieje taka stała $L > 0$, że $|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant L|u-v|$ dla wszystkich $t, u, v \in \mathbb{R}$.*

Jeżeli $\lambda < 0$ oraz $L < |\lambda|$, to równanie (4.17) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie prawie automorficzne w sensie Bochnera.*

Dowód. Z Twierdzenia 1.9 wynika, że funkcja $t \mapsto f(t, x(t))$, dla $t \in \mathbb{R}$, należy do przestrzeni $LAP_b(\mathbb{R})$ dla każdej ograniczonej funkcji prawie okresowej w sensie Levitana $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zatem, wobec Twierdzenia 1.10, odwzorowanie $F\colon LAP_b(\mathbb{R}) \to LAP_b(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem

$$F(x)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s, x(s)) \mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

jest dobrze określone (por. dowód Twierdzenia 4.5).

Pokażemy, że odwzorowanie F jest kontrakcją. Dla $x, y \in LAP_b(\mathbb{R})$ oraz $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \mathrm{d}s \\ &\leqslant L \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} |x(s) - y(s)| \mathrm{d}s \leqslant L \left\| x - y \right\|_{\infty} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} \mathrm{d}s \\ &= \frac{L}{|\lambda|} \cdot \left\| x - y \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Stąd $\left\| F(x) - F(y) \right\|_{\infty} \leqslant L|\lambda|^{-1} \cdot \left\| x - y \right\|_{\infty}$. Na mocy twierdzenia Banacha o kontrakcji, istnieje więc dokładnie jedna funkcja $x_* \in LAP_b(\mathbb{R})$ taka, że

$$x_*(t) = F(x_*)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s, x_*(s)) \mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wtedy oczywiście $x_*'(t) = \lambda x_*(t) + f(t, x_*(t))$ dla $t \in \mathbb{R}$. By zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że $x_* \in BAA(\mathbb{R})$ (por. Uwaga 4.7). □

Uwaga 4.8. Równania postaci (4.15) oraz (4.17) rozważane były przez wielu autorów; wymienimy tylko kilku z nich. A. M. Fink [41] zajmował się zagadnieniem istnienia rozwiązań prawie okresowych, natomiast C. Zhang [90, 91] rozwiązań pseudo prawie okresowych dla wspomnianych równań. Z kolei w pracy [24], wykorzystując wyniki dotyczące operatora splotu autorzy wykazali, że przy pewnych założeniach równania (4.15) i (4.17) posiadają rozwiązania asymptotycznie oraz pseudo prawie okresowe. B. Basit i A. J. Pryde [7] do badania istnienia i jedyności słabych rozwiązań (ang. *mild solutions*) abstrakcyjnych równań liniowych oraz semiliniowych w przestrzeniach funkcji prawie okresowych różnych typów o wartościach wektorowych stosowali metody eksponencjalnie stabilnych C_0-półgrup.

4.4. Nieliniowe równania całkowe w przestrzeni funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji

Ostatni paragraf niniejszego rozdziału poświęcimy badaniu istnienia rozwiązań nieliniowych równań całkowych w klasie funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji. Dodajmy, iż zagadnienie to (również w przypadku innych klas funkcji o ograniczonej wariacji) było rozważane m.in. w pracach [16–18, 21].

4.4.1. Mieszane równanie Volterry-Fredholma. Rozważmy następujące mieszane równanie Volterry-Fredholma

$$x(t) = g(t) + \int_0^t \int_0^1 k(\tau, s) f(x(s)) \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau, \qquad \text{dla } t \in [0,1], \tag{4.18}$$

gdzie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ są pewnymi funkcjami. Warto w tym miejscu zaznaczyć, iż równania tego typu (choć w innej klasie funkcji niż $BV_\phi[0,1]$ oraz przy trochę innych założeniach) zostały wykorzystane przez Diekmanna do opisu rozprzestrzeniania się epidemii (zob. [36], por. również [14]).

Twierdzenie 4.7 ([27, Example 7])**.** *Niech funkcje $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ oraz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie f jest funkcją borelowską, spełniają założenia* (i)-(v) *Twierdzenia 3.4. Ponadto niech $f(0) = 0$. Wtedy istnieją takie liczby dodatnie η i σ, że dla dowolnego $g \in B_\phi(0, \eta)$ równanie* (4.18) *posiada dokładnie jedno BV_ϕ-rozwiązanie w kuli $B_\phi(0, \sigma)$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 3.4, odwzorowanie $G\colon BV_\phi[0,1] \to BV_\phi[0,1]$ dane wzorem

$$G(x)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(x(s)) \mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in [0,1]$$

jest odwzorowaniem wyższego rzędu oraz $G(0) = 0$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $T\colon BV_\phi[0,1] \times BV_\phi[0,1] \to BV_\phi[0,1]$ następującym wzorem

$$T(g,x)(t) = g(t) + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in [0,1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie T jest dobrze określone. Z Uwagi 1.9 wynika, że całka $\displaystyle\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$, dla $t \in [0,1]$, istnieje i jest skończona dla każdego $x \in BV_\phi[0,1]$. Ponadto, dla dowolnego skończonego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$ oraz $x \in BV_\phi[0,1]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \phi\Big(\Big|\int_0^{t_i} x(s)\mathrm{d}s - \int_0^{t_{i-1}} x(s)\mathrm{d}s\Big|\Big) &\leqslant \sum_{i=1}^n \phi\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(s)|\mathrm{d}s\Big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \phi(\|x\|_\infty (t_i - t_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\phi(\|x\|_\infty) = \phi(\|x\|_\infty).\end{aligned}$$

Stąd dla każdego $x \in BV_\phi[0,1]$

$$\operatorname{var}_\phi\Big(\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\Big) \leqslant \phi(\|x\|_\infty) < +\infty,$$

przy czym ϕ-wariacja występująca w powyższej linii liczona jest ze względu na zmienną t. Ponieważ $T(g,x)(0) = 0$, więc $T(g,x) \in BV_\phi[0,1]$ dla wszystkich $g, x \in BV_\phi[0,1]$.

Wykażemy teraz, że odwzorowanie T spełnia warunek Lipschitza. Niech $x, y \in BV_\phi[0,1]$ oraz niech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ będzie skończonym podziałem przedziału $[0,1]$. Wtedy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda^{-1}\Big|\int_0^{t_i} \big[x(s) - y(s)\big]\mathrm{d}s - \int_0^{t_{i-1}} \big[x(s) - y(s)\big]\mathrm{d}s\Big|\Big) \\ &\qquad\leqslant \sum_{i=1}^n \phi\Big(\lambda^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(s) - y(s)|\mathrm{d}s\Big) \leqslant \operatorname{var}_\phi(\lambda^{-1} \|x - y\|_\infty \operatorname{id}),\end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{id}\colon [0,1] \to [0,1]$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Stąd dla punktów $x, y, g, h \in BV_\phi[0,1]$ mamy

$$\begin{aligned}\|T(g,x) - T(h,y)\|_\phi &\leqslant \|g - h\|_\phi + \Big\|\int_0^{\cdot} \big[x(s) - y(s)\big]\mathrm{d}s\Big\|_\phi \\ &\leqslant \|g - h\|_\phi + \inf\Big\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi(\lambda^{-1} \|x - y\|_\infty \operatorname{id}) \leqslant 1\Big\} \\ &= \|g - h\|_\phi + \|x - y\|_\infty \inf\Big\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi(\lambda^{-1} \operatorname{id}) \leqslant 1\Big\} \\ &= \|g - h\|_\phi + \|x - y\|_\infty \|\operatorname{id}\|_\phi \\ &\leqslant \|g - h\|_\phi + c_\phi \|\operatorname{id}\|_\phi \|x - y\|_\phi.\end{aligned}$$

Ponadto $T(0,0) = 0$, a zatem na mocy Twierdzenia 2.12, istnieją takie liczby dodatnie η i σ, że dla dowolnego $g \in B_\phi(0,\eta)$ znajdziemy dokładnie jeden element $x^* \in B_\phi(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(g, G(x^*))$, tj. dla każdego $t \in [0,1]$ spełniający równość

$$x^*(t) = T(g, G(x^*))(t) = g(t) + \int_0^t G(x^*)(\tau)\mathrm{d}\tau = g(t) + \int_0^t \int_0^1 k(\tau,s)f(x^*(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

□

4.4.2. Nieliniowe równanie całkowe Hammersteina z zaburzeniem. Rozważmy nieliniowe równanie całkowe Hammersteina z zaburzeniem postaci

$$x(t) = g(t) + F(x)(t) + \nu \int_0^1 k(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in [0,1], \tag{4.19}$$

gdzie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $F\colon BV_\phi[0,1] \to BV_\phi[0,1]$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu i $\nu \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.8 (por. [27, Example 8])**.** *Załóżmy, że funkcja $k\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia założenia* (i)-(iii) *Twierdzenia 3.4. Niech ponadto $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją lokalnie lipschitzowską, że $f(0) = 0$ oraz niech $F\colon BV_\phi[0,1] \to BV_\phi[0,1]$ będzie odwzorowaniem wyższego rzędu i $F(0) = 0$. Istnieje wtedy liczba dodatnia ρ taka, że dla każdego $|\nu| \leqslant \rho$ znajdziemy takie liczby dodatnie η oraz σ, że dla każdego $g \in B_\phi(0,\eta)$ równanie* (4.19) *posiada dokładnie jedno BV_ϕ-rozwiązanie w kuli $B_\phi(0,\sigma)$.*

Dowód. Niech r będzie dowolną liczbą dodatnią oraz niech $q \in (0,r)$. Wybierzmy liczbę $\rho > 0$ tak, by

$$q + \vartheta\rho\max\{1, c_m\} \sup_{t\in J(c_\phi r)} |f(t)| < r \quad \text{oraz} \quad \vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r) < 1, \tag{4.20}$$

gdzie $L(r)$ oznacza stałą Lipschitza funkcji f na przedziale $J(c_\phi r):=[-c_\phi r, c_\phi r]$, c_ϕ jest najmniejszą liczbą spełniającą nierówność $\|x\|_\infty \leqslant c_\phi \|x\|_\phi$ dla $x \in BV_\phi[0,1]$ (por. Uwaga 1.9) oraz $c_m := \int_0^1 m(s)\mathrm{d}s$.

Dla ustalonego $\nu \in \mathbb{R}$ takiego, że $|\nu| \leqslant \rho$ oraz $g \in B_\phi(0,q)$ zdefiniujmy operator H następującym wzorem

$$H(x)(t) = g(t) + \nu \int_0^1 k(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s \qquad \text{dla } x \in B_\phi(0,r) \text{ oraz } t \in [0,1].$$

Rozumując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.4 można pokazać, że operator H jest dobrze określony oraz działa w przestrzeni $BV_\phi[0,1]$.

Wykażemy teraz, że $H(B_\phi(0,r)) \subset B_\phi(0,r)$. Dla dowolnego skończonego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0,1]$ oraz liczby dodatniej λ takiej, że

$$\vartheta\rho\max\{1,c_m\} \sup_{t\in J(c_\phi r)} |f(t)| \leqslant \lambda$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda^{-1}\Big|\nu\int_0^1 k(t_i,s)f(x(s))\mathrm{d}s-\nu\int_0^1 k(t_{i-1},s)f(x(s))\mathrm{d}s\Big|\Big)\\ \leqslant\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda^{-1}|\nu|\int_0^1|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)||f(x(s))|\mathrm{d}s\Big)\\ \leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\phi\Big(\lambda^{-1}|\nu|\sup_{t\in J(c_\phi r)}|f(t)||k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ \leqslant\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\phi\Big((\max\{1,c_m\})^{-1}\vartheta^{-1}|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ \leqslant\frac{1}{\max\{1,c_m\}}\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s=\frac{c_m}{\max\{1,c_m\}}\leqslant 1.\end{aligned}$$

Stąd, wobec (4.20), dla każdego $x\in B_\phi(0,r)$, mamy

$$\|H(x)\|_\phi\leqslant\|g\|_\phi+\Big\|\nu\int_0^1 k(\cdot,s)f(x(s))\mathrm{d}s\Big\|_\phi\leqslant q+\vartheta\rho\max\{1,c_m\}\sup_{t\in J(c_\phi r)}|f(t)|<r.$$

By pokazać, że operator H jest kontrakcją, ustalmy $x,y\in B_\phi(0,r)$. Wtedy dla dowolnego skończonego podziału $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ przedziału $[0,1]$ oraz takiej liczby dodatniej λ, że $\vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r)\,\|x-y\|_\phi\leqslant\lambda$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda^{-1}|H(x)(t_i)-H(y)(t_i)-H(x)(t_{i-1})+H(y)(t_{i-1})|\Big)\\ \leqslant\sum_{i=1}^{n}\phi\Big(\lambda^{-1}|\nu|\int_0^1|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)||f(x(s))-f(y(s))|\mathrm{d}s\Big)\\ \leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\phi\Big(\lambda^{-1}|\nu|L(r)\,\|x-y\|_\infty\,|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ \leqslant\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\phi\Big((\max\{1,c_m\})^{-1}\vartheta^{-1}|k(t_i,s)-k(t_{i-1},s)|\Big)\mathrm{d}s\\ \leqslant\frac{1}{\max\{1,c_m\}}\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s=\frac{c_m}{\max\{1,c_m\}}\leqslant 1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\|H(x)-H(y)\|_\phi&=\inf\Big\{\lambda>0:\mathrm{var}_\phi\Big(\lambda^{-1}[H(x)-H(y)]\Big)\leqslant 1\Big\}\\ &\leqslant\vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r)\,\|x-y\|_\phi,\end{aligned}$$

co w połączeniu z (4.20) dowodzi kontrakcyjności operatora H.

Na mocy twierdzenia Banacha operator H posiada dokładnie jeden punkt stały w $B_\phi(0,r)$, który oznaczymy przez $x_{g,\nu}$. Dla ustalonego $\nu\in\mathbb{R}$ takiego, że $|\nu|\leqslant\rho$ możemy zatem zdefiniować odwzorowanie $T\colon B_\phi(0,q)\to B_\phi(0,r)$ wzorem

$T(g) = x_{g,\nu}$. Odwzorowanie T spełnia warunek Lipschitza. Istotnie,

$$\begin{aligned}\|T(g)-T(h)\|_\phi &= \|x_{g,\nu}-x_{h,\nu}\|_\phi \\ &\leqslant \|g-h\|_\phi + \left\|\nu\int_0^1 k(\cdot,s)f(x_{g,\nu}(s))\mathrm{d}s - \nu\int_0^1 k(\cdot,s)f(x_{h,\nu}(s))\mathrm{d}s\right\|_\phi \\ &\leqslant \|g-h\|_\phi + \vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r)\,\|x_{g,\nu}-x_{h,\nu}\|_\phi \\ &= \|g-h\|_\phi + \vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r)\,\|T(g)-T(h)\|_\phi\,,\end{aligned}$$

a zatem $\|T(g)-T(h)\|_\phi \leqslant \beta\,\|g-h\|_\phi$ dla wszystkich $g,h \in B_\phi(0,q)$, gdzie

$$\beta := \frac{1}{1-\vartheta\rho\max\{1,c_m\}c_\phi L(r)}.$$

Ponieważ $T(0) = 0$, więc z Twierdzenia 2.12 wynika istnienie takich liczb dodatnich η oraz σ, że dla każdego $g \in B_\phi(0,\eta)$ istnieje dokładnie jeden element $x^* \in B_\phi(0,\sigma)$ taki, że $x^* = T(g + F(x^*))$, tj. spełniający następującą równość

$$x^*(t) = g(t) + F(x^*)(t) + \nu\int_0^1 k(t,s)f(x^*(s))\mathrm{d}s \qquad \text{dla } t \in [0,1]. \qquad \square$$

Uwaga 4.9. Twierdzenie 4.8 jest rozszerzeniem wyniku z pracy [17, Theorem 1] na przypadek nieliniowych równań całkowych Hammersteina z zaburzeniem w klasie funkcji o ograniczonej ϕ-wariacji.

Bibliografia

[1] A. Alexiewicz, *Analiza Funkcjonalna*, Monografie Matematyczne, Tom 49, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1969.

[2] M. Alfsen i P. Holm, *A note on compact representations and almost periodicity in topological groups*, Math. Scand. **10** (1962), 127-136.

[3] J. Appell i P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[4] J. Banaś i K. Goebel, *Measures of Noncompactnes in Banach Spaces*, Institute of Mathematics Polish Academy of Science, Warsaw, 1979, Preprint nr 7 seria B.

[5] B. Basit i H. Günzler, *Difference property for perturbations of vector-valued Levitan almost periodic functions and their analogs*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 424-438.

[6] B. Basit i H. Günzler, *Spectral criteria for solutions of evolution equations and comments on reduced spectra* (2010), arXiv:1006.2169v1.

[7] B. Basit i A. J. Pryde, *Asymptotic behavior of orbits of C_0-semigroups and solutions of linear and semilinear abstract differential equations*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 1, 13-30.

[8] T. G. Bhaskar i V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65** (2006), no. 7, 1379–1393.

[9] S. Bochner, *Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles*, Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. **15** (1955), 225–253.

[10] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48** (1962), 2039–2043.

[11] S. Bochner, *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52** (1964), 907–910.

[12] V. C. Borkar i S. T. Patil, *Existence of solutions of operator equations with applications to Hammerstein integral operators*, Differential Equations Dynam. Systems **14** (2006), no. 1-2, 81–89.

[13] M. Borkowski, D. Bugajewski i M. Zima, *On some fixed point theorems for generalized contractions and their perturbations*, J. Math. Anal. Appl. **367** (2010), no. 2, 464–475.

[14] H. Brunner, *On the numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations by collocation methods*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), no. 4, 987-1000.

[15] G. Bruno i A. A. Pankov, *On convolution operators in the spaces of almost periodic functions and L^p spaces*, Z. Anal. Anwendungen **19** (2000), no. 2, 359–367.

[16] D. Bugajewska i D. O'Regan, *On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation*, Acta Math. Hungar. **107** (2005), no. 4, 295–306.

[17] D. Bugajewska, D. Bugajewski i H. Hudzik, *BV_ϕ-solutions of nonlinear integral equations*, J. Math. Anal. Appl. **287** (2003), no. 1, 265-278.

[18] D. Bugajewska, D. Bugajewski i G. Lewicki, *On nonlinear integral equations in the space of functions of bounded generalized ϕ-variation*, J. Integral Equations Appl. **21** (2009), no. 1, 1-20.

[19] D. Bugajewski, *Some remarks on Kuratowski's measure of noncompactness in vector spaces with a metric*, Comment. Math. Prace Mat. **32** (1992), 5-9.

[20] D. Bugajewski, *On the existence of weak solutions of integral equations in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **35** (1994), no. 1, 35–41.

[21] D. Bugajewski, *On BV-solutions of some nonlinear integral equations*, Integral Equations Operator Theory **46** (2003), no. 4, 387-398.

[22] D. Bugajewski, *Fixed point theorems in locally convex spaces*, Acta Math. Hungar. **98** (2003), no. 4, 345–355.

[23] D. Bugajewski i T. Diagana, *Almost automorphy of the convolution operator and applications to differential and functional differential equations*, Nonlinear Stud. **13** (2006), no. 2, 129–140.

[24] D. Bugajewski, T. Diagana i C. M. Mahop, *Asymptotic and pseudo almost periodicity of the convolution operator and applications to differential and integral equations*, Z. Anal. Anwend. **25** (2006), no. 3, 327–340.

[25] D. Bugajewski, X.-X. Gan i P. Kasprzak, *Mappings of higher order and nonlinear equations in some spaces of almost periodic functions*, praca przedłożona do druku.

[26] D. Bugajewski i P. Kasprzak, *Fixed point theorems for weakly F-contractive and strongly F-expansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), no. 1, 126–134.

[27] D. Bugajewski i P. Kasprzak, *On mappings of higher order and their applications to nonlinear equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), no. 2, 627–647.

[28] D. Bugajewski i G. M. N'Guérékata, *Almost periodicity in Fréchet spaces*, J. Math. Anal. Appl. **299** (2004), no. 2, 534–549.

[29] S. S. Chang, Y. J. Cho i N. J. Huang, *Coupled fixed point theorems with applications*, J. Korean Math. Soc. **33** (1996), no. 3, 575–585.

[30] Y. Q. Chen, Y. J. Cho, J. K. Kim i B. S. Lee, *Note on KKM maps and applications*, Fixed Point Theory Appl. **2006** (2006), Article ID 53286, 9 pp.

[31] J. Ciemnoczołowski i W. Orlicz, *Composing functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 3, 431–436.

[32] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, AMS/Chelsea Publication Series, Chelsea Publishing Company, New York, 1989.

[33] L. Ćirić i V. Lakshmikantham, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 12, 4341–4349.

[34] B. C. Dhage i M. Kumpulainen, *On existence of weak positive solution of coupled Hammerstein integral equations*, Dynam. Systems Appl. **11** (2002), no. 1, 1–12.

[35] T. Diagana, *Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2007.

[36] O. Diekmann, *Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic*, J. Differential Equations **33** (1979), no. 1, 58-73.

[37] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*: *Enlarged and Corrected Printing*, Pure and Applied Mathematics, vol. 10-I, Academic Press, New York and London, 1969.

[38] J. Dugundji i A. Granas, *Fixed point theory I*, Monografie Matematyczne, Tom 61, PWN, Warsaw, 1982.

[39] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, Biblioteka Matematyczna, Tom 25, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1968.

[40] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Tom 2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.

[41] A. M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 377, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[42] P. Flor, *Rhytmische Abbildungen abelscher Gruppen II*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **7** (1967), 17–28.

[43] T. Fowler i D. Preiss, *A simple proof of Zahorski's description of non-differentiability sets of Lipschitz functions*, Real Anal. Exchange **34** (2009), no. 1, 127–138.

[44] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Revue Sci. (Rev. Rose Illus.) **79** (1941), 341–354.

[45] M. Furi i A. Vignoli, *A fixed point theorem in complete metric spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. **Serie IV** (1969), 505–509.

[46] M. I. Gil', *Difference Equations in Normed Spaces*: *Stability and Oscillations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 206, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2007.

[47] K. Goebel i W. A. Kirk, *Zagadnienia metrycznej teorii punktów stałych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 1999.

[48] S. I. Grossman i R. K. Miller, *Perturbation theory for Volterra integrodifferential systems*, J. Differential Equations **8** (1970), 457-474.

[49] E. Hewitt i K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*: *A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 25, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[50] R. Jentzsch, *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, J. Reine Angew. Math. **141** (1912), 235–244.

[51] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 354–356.

[52] J. L. Kelley, *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1975.

[53] W. Kołodziej, *Analiza Matematyczna*, Matematyka dla Politechnik, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1978.

[54] S. G. Krantz i H. R. Parks, *The Geometry of Domains in Space*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 1999.

[55] R. W. Leggett i L. R. Williams, *An extension of Jentzsch's theorem to nonlinear Hammerstein operators*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), no. 1, 248–254.

[56] B. M. Levitan, *Pochti-periodicheskie Funkcii*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1953.

[57] B. M. Levitan i V. V. Zhikov, *Pochti-periodicheskie Funkcii i Differencial'nye Uravnenya*, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1978.

[58] H.-X. Li, F.-L. Huang i J.-Y. Li, *Composition of pseudo almost-periodic functions and semilinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), no. 2, 436–446.

[59] D. L. Lovelady, *A fixed point theorem, a perturbed differential equation, and a multivariable Volterra integral equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **182** (1973), 71-83.

[60] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Matematyczna, Tom 46, PWN, Warszawa, 1973.

[61] L. Maligranda i W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Monatsh. Math. **104** (1987), no. 1, 53-65.

[62] J. Matkowski i J. Miś, *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space* $BV\langle a, b\rangle$, Math. Nachr. **117** (1984), 155-159.

[63] P. Milnes, *Almost automorphic functions and totally bounded groups*, Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), no. 2, 231–250.

[64] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[65] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989.

[66] J. Musielak i W. Orlicz, *On generalized variations (I)*, Studia Math. **18** (1959), 11-41.

[67] J. Muszyński i A. D. Myszkis, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Matematyka dla Politechnik, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1984.

[68] G. M. N'Guérékata, *Almost Automorphic Functions and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.

[69] G. M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automoprhy*, Springer, New York Boston Dordrecht London Moscow, 2005.

[70] Nguyen Van Luong i Nguyen Xuan Thuan, *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 3, 983–992.

[71] A. A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Eequations*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[72] C. Petalas i T. Vidalis, *A fixed point theorem in non-Archimedean vector spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 3, 819-821.

[73] D. Porter i D. S. G. Stirling, *Integral Equations: A Pratical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[74] A. Reich, *Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität*, Math. Z. **116** (1970), 218–234.

[75] A. Reich, *Kriterien für Fastperiodizität*, Math. Ann. **227** (1977), no. 2, 97–115.

[76] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1976.

[77] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.

[78] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[79] P. Schneider, *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[80] M. H. Shah, N. Hussain i A. R. Khan, *Common fiexed points of weakly contractive and strongly expansive mappings in topological spaces*, J. Inequal. Appl. **2010**, Art. ID 746045, 15 pp., doi:10.1155/2010/746045.

[81] S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.

[82] R. Terras, *Almost automorphic functions on topological groups*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 759–773.

[83] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Universitext, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[84] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.–London–Don Mills, Ont., 1970.

[85] W. A. Veech, *Almost automorphic functions on groups*, Amer. J. Math. **87** (1965), no. 3, 719–751.

[86] K. Yosida, *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[87] Z. Zahorski, *Sur l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction continue*, Bull. Soc. Math. France **74** (1946), 147–178.

[88] S. Zaidman, *Almost-periodic Functions in Abstract Spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 126, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melbourne, 1985.

[89] C. Zhang, *Integration of vector-valued pseudo-almost periodic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 1, 167–174.

[90] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **181** (1994), no. 1, 62–76.

[91] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations, II*, J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), no. 2, 543–561.

[92] M. Zima, *A certain fixed point theorem and its applications to integral-functional equations*, Bull. Austral. Math. Soc. **46** (1992), no. 2, 179-186.

Skorowidz symboli

Skorowidz