

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU  
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

TOMASZ STROIŃSKI

---

O PEWNYCH PÓLGRUPACH ZBIORÓW  
ZWARTYCH WYPUKŁYCH ORAZ O MINIMALNYCH  
REPREZENTACJACH ELEMENTÓW  
ICH PRZESTRZENI ILORAZOWYCH

---

ROZPRAWA DOKTORSKA  
Z DZIEDZINY NAUK MATEMATYCZNYCH  
W DYSCYPLINIE MATEMATYKA  
NAPISANA POD KIERUNKIEM  
DRA HAB. JERZEGO GRZYBOWSKIEGO

POZNAŃ 2019

---

# SPIS TREŚCI

---

<b>Wstęp</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Preliminaria</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1 Konwencje i oznaczenia . . . . .	8
1.2 Podstawowe definicje . . . . .	9
<b>2. Rodzina zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1 Półgrupa zbiorów wypukłych . . . . .	14
2.2 Relacja równoważności w rodzinie par zbiorów . . . . .	16
2.3 Metody redukcji par zbiorów wypukłych . . . . .	19
2.4 Kryteria minimalności par zbiorów wypukłych . . . . .	20
<b>3. Półgrupa wielościanów o ustalonych kierunkach ścian</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1 Motywacja badania wielościanów o ustalonych kierunkach ścian . . . . .	26
3.2 Rodzina $G$ -wielościanów i jej własności . . . . .	27
3.3 Reprezentacje wielokątów i $G$ -wielokątów . . . . .	31
3.4 Półgrupa $G$ -wielościanów . . . . .	38
3.5 Relacja równoważności par $G$ -wielościanów . . . . .	41
3.6 Metody redukcji i kryteria $G$ -minimalności par $G$ -wielokątów . . . . .	43
<b>4. Rodziny <math>G</math>-wielościanów w <math>\mathbb{R}^3</math> zamknięte ze względu na sumę Minkowskiego</b> . . . . .	<b>52</b>
4.1 Opis zagadnienia . . . . .	53
4.2 Zbiory płaskie z wewnątrznie przecinającym się szkieletem . . . . .	55
4.3 Zbiory sferyczne z wewnątrznie przecinającym się szkieletem . . . . .	60

4.4	Klasyfikacja zamkniętych rodzin $G$ -wielościaków . . . . .	67
<b>5.</b>	<b>Badanie <math>G</math>-minimalności <math>G</math>-wielościaków . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1	Metoda redukcji i kryterium $G$ -minimalności $G$ -wielościaków . . . . .	71
5.2	Algorytm uzyskiwania zbioru par $G$ -minimalnych . . . . .	76
5.3	Przykład zbioru par $G$ -minimalnych . . . . .	77
<b>6.</b>	<b>Zastosowania . . . . .</b>	<b>83</b>
6.1	Związek między parami minimalnymi i $G$ -minimalnymi . . . . .	83
6.2	Inne zastosowania . . . . .	85
	<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>Skorowidz symboli . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>Skorowidz . . . . .</b>	<b>94</b>

---

# WSTĘP

---

Rachunek różniczkowy jest dziedziną matematyki odpowiadającą na wiele pytań, które powstają przy praktycznych zastosowaniach matematyki. Jednak nie wszystkie funkcje spełniają założenia, jakie są konieczne, aby zastosować wobec nich aparat rachunku różniczkowego. Pierwsze próby uogólnienia tego rachunku dla funkcji nieróżniczkowalnych pochodzą od Pszenicznego (1971). Funkcje quasiróżniczkowalne są uogólnieniem funkcji różniczkowalnych w sensie Pszenicznego i zostały opublikowane przez Demianowa i Rubinowa piętnaście lat później (1986). Wartym odnotowania jest fakt, że klasa funkcji quasiróżniczkowalnych jest przestrzenią liniową zamkniętą nie tylko ze względu na wszystkie działania algebraiczne, ale także operację złożenia oraz maksimum i minimum. Quasiróżniczka, która charakteryzuje każdą funkcję quasiróżniczkowalną, jest parą zbiorów zwartych, wypukłych w przestrzeni dualnej czyli elementem przestrzeni Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera.

Problem postawiony przez Demianowa na konferencji w Oberwolfach w roku 1985 dotyczył minimalnej reprezentacji quasiróżniczki. Wiemy dzięki pracy Pallaschke, Scholtesa i Urbańskiego [29], że w każdej klasie przestrzeni MRH istnieje para minimalna. Dalej nie znamy jednak ogólnych odpowiedzi na następujące pytania w przestrzeniach wyższych wymiarów ( $n > 2$ ):

1. W jaki sposób ustalić czy para zbiorów zwartych, wypukłych jest parą minimalną?
2. W jaki sposób zredukować nieminimalną parę zbiorów do pary minimalnej?
3. W jaki sposób wyznaczyć wszystkie pary minimalne równoważne parze zbiorów?

Trudność w znalezieniu odpowiedzi na powyższe pytania w pełnej ogólności skłania do zmiany podejścia. Zamiast badać rodzinę  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  wszystkich zbiorów zwartych wypukłych spróbujmy rozstrzygnąć te kwestie w pewnych podrodzinach zbiorów

zwartych wypukłych. Ograniczmy się do rodziny  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  wielościanów, których wektory normalne do pełnowymiarowych ścian zawierają się w ustalonym skończonym zbiorze  $G$  zwanym siecią (ang. grid). Wielościany takie nazywać będziemy  $G$ -wielościanami.

W literaturze kwestia wielościanów o ustalonych kierunkach ścian była badana, na przykład przez Aleksandrowa [1]. Jednak wyniki uzyskane do roku 2015 nie dotyczą struktury półgrupy takich wielościanów. Powodem takiego stanu rzeczy jest fakt, że rodzina  $G$ -wielościanów z naturalnym działaniem sumy Minkowskiego nie jest półgrupą. W rodzinie  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ , dla pewnych sieci  $G$ , suma Minkowskiego jest działaniem wewnętrznym. Jednym z celów niniejszej rozprawy jest wskazanie takich sieci  $G$ . Jednak dla innych sieci  $G$  działanie sumy Minkowskiego nie jest działaniem wewnętrznym, co wymusza jej modyfikację w celu stworzenia struktury półgrupy. Grzybowski i Urbański, w 2009 roku, opublikowali pracę [19], w której opisali wzrost kryształu w terminach przestrzeni MRH. Monokryształy posiadają ściany równoległe do pewnego skończonego zbioru płaszczyzn zależnego od sieci krystalicznej tych kryształów. Dlatego też Grzybowski i Urbański w pracy [20] z 2015 roku, zdefiniowali pojęcie rodziny  $G$ -wielościanów i wprowadzili strukturę półgrupy w tej rodzinie za pomocą zmodyfikowanej sumy Minkowskiego. Wedle najlepszej wiedzy autora niniejszej rozprawy jest to, do tej pory, jedyna praca poruszająca tę tematykę.

Głównym celem niniejszej rozprawy jest zatem zbadanie półgrupy wielościanów o ustalonych kierunkach ścian oraz odpowiedź na pytania dotyczące minimalności par takich wielościanów wewnątrz klasy abstrakcji nazywanej wielościanem wirtualnym.

Jak zostało wspomniane, wskażemy również te rodziny  $G$ -wielościanów, które nie wymagają modyfikacji sumy Minkowskiego w celu wprowadzenia struktury półgrupy. Twierdzenie 4.4.1 wskazuje, że jedynymi wielościanami wyznaczającymi taką sieć  $G$ , dla której rodzina  $(\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3), +)$  jest półgrupą, są wielościany monotypiczne. Przekrój dwóch translacji wielościanu monotypicznego jest homotetyczną kopią składnika takiego wielościanu. Zjawisko to udowodnili i opisali McMullen, Schneider i Shephard w pracy [26]. Badanie  $G$ -wielościanów wykazało jednak dodatkową własność wielościanów monotypicznych.

W pozostałych rodzinach  $G$ -wielościanów wraz z modyfikacją sumy Minkowskiego, należy również zmodyfikować wiele pojęć dotyczących tej rodziny. Wprowadzimy zatem takie pojęcia jak macierz sieci  $G$ ,  $G$ -powłoka wypukła,  $G$ -równoważność par  $G$ -wielościanów, czy też  $G$ -minimalność par  $G$ -wielościanów. W związku z tym pytania dotyczące minimalności w rodzinie  $G$ -wielościanów przyjmują następującą

formę:

1. W jaki sposób ustalić czy para  $G$ -wielościanów  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną?
2. W jaki sposób zredukować parę  $G$ -wielościanów  $(A, B)$  do pary  $G$ -minimalnej?
3. W jaki sposób wyznaczyć wszystkie pary  $G$ -minimalne  $G$ -równoważne parze  $G$ -wielościanów  $(A, B)$ ?

W niniejszej rozprawie odpowiadamy na wszystkie te pytania. Twierdzenie 5.1.3 wskazuje kryterium  $G$ -minimalności par  $G$ -wielościanów. Twierdzenie 5.1.5 jest bazującą na metodach programowania liniowego metodą redukcji par  $G$ -wielościanów. Odpowiedź na ostatnie pytanie wymaga rozwiązania paru problemów, co zostało wykonane w Paragrafie 5.1. Twierdzenie 5.2.1 jest streszczeniem tych rozważań w formie gotowego do zastosowania algorytmu wyznaczającego wszystkie pary  $G$ -minimalne  $G$ -równoważne danej parze  $G$ -wielościanów.

Niniejsza rozprawa posiada następującą strukturę. Rozdział 1, który dotyczy podstawowych pojęć używanych w dalszych rozdziałach składa się z dwóch paragrafów. Pierwszy paragraf ma na celu ustalenie oznaczeń w przypadku, gdy te będą różniły się od formalnych oznaczeń stosowanych w literaturze. Paragraf 1.2 wprowadza podstawowe, powszechnie znane definicje w związku z niejednoznacznością niektórych z nich.

W Rozdziale 2 wprowadzamy definicje i twierdzenia analizy wypukłej odnoszące się do rodziny zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych. Rozdział ten składa się z czterech paragrafów. Celem Paragrafu 2.1 jest wprowadzenie w rodzinie zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych struktury półgrupy i abstrakcyjnego stożka wypukłego. Pokazujemy również, że w tej półgrupie spełnione jest porządkowe prawo skreśleń. W Paragrafie 2.2 wprowadzamy relację równoważności w iloczynie kartezjańskim powyższych półgrup. Konstruujemy przestrzeń Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera będącą przestrzenią ilorazową względem tej relacji. Pokazujemy, że przestrzeń ta jest przestrzenią wektorową i określamy na niej częściowy porządek. Rozważamy również elementy tej przestrzeni nazywane ciałami wirtualnymi. Te klasy abstrakcji znajdują zastosowanie w rachunku quasiróżniczkowym. Quasiróżniczka funkcji jest bowiem elementem przestrzeni MRH. Istotnym zagadnieniem rachunku quasiróżniczkowego jest znalezienie minimalnej reprezentacji quasiróżniczki, co równoważne jest wskazaniu elementu minimalnego względem częściowego porządku wewnątrz ciała wirtualnego zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. W Paragrafie 2.3 formułujemy metody redukcji par zbiorów. Następnie ilustrujemy te metody na przykładzie w dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Celem Paragrafu 2.4 jest omówienie znanych

kryteriów minimalności par zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. Formułujemy twierdzenia, które dla jednowymiarowej i dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej w pełni charakteryzują pary minimalne. Ze względu na fakt, że kryteria te nie mogą być zastosowane w wyższych wymiarach Paragraf 2.4 kończymy otwartymi pytaniami dotyczącymi minimalności, które stały się główną motywacją tej rozprawy.

Rozdział 3 ma na celu wprowadzenie do teorii wielościanów o ustalonych kierunkach ścian, czyli  $G$ -wielościanów oraz powtórzenie wyników z Rozdziału 2 dla rodziny  $G$ -wielościanów. Rozdział ten składa się z sześciu paragrafów. W Paragrafie 3.1 uzasadniamy motywacje stojące za badaniem tej rodziny. W Paragrafie 3.2 definiujemy podstawowe pojęcia związane z teorią  $G$ -wielościanów. Wskazujemy również powód, dla którego rodzina ta nie posiada, na ogół, struktury półgrupy z naturalnym działaniem sumy Minkowskiego. Paragraf 3.3 ma na celu omówienie reprezentacji wielokątów i wprowadzenie analogicznych reprezentacji dla  $G$ -wielokątów. Reprezentacje te znajdują szerokie zastosowanie w dalszej części tego rozdziału ze względu na sformułowane wzory służące do przekształcenia jednej reprezentacji w inną. W Paragrafie 3.4 definiujemy zmodyfikowaną sumę Minkowskiego pozwalającą wprowadzić strukturę półgrupy w rodzinie  $G$ -wielościanów. Również w tym paragrafie wprowadzamy tę strukturę. W Paragrafie 3.5 definiujemy relację równoważności, względem której przeprowadzamy analogiczny schemat konstrukcji jak w przypadku przestrzeni MRH. Możemy po wprowadzeniu częściowego porządku wewnątrz klas abstrakcji rozważać metody redukcji i kryteria minimalności podobnie jak w Rozdziale 2. Poświęcony temu zagadnieniu w przypadku dwuwymiarowym jest Paragraf 3.6.

W Rozdziale 4 rozstrzygamy kwestię założeń, jakie muszą zostać spełnione, aby rodzina  $G$ -wielościanów z sumą Minkowskiego była półgrupą. Rozdział ten składa się z czterech paragrafów. Paragraf 4.1 dotyczy omówienia zagadnienia i sprowadzenia go do problemu związanego z tzw. szkieletami. W Paragrafie 4.2 rozstrzygamy geometryczny problem wskazania zbiorów o wewnętrznie przecinającym się szkielecie na płaszczyźnie. Nie jest to bezpośrednio związane z rodzinami  $G$ -wielościanów, jednak wypracowane w tym paragrafie twierdzenia znajdują zastosowanie w kolejnym paragrafie. Paragraf 4.3 posiada strukturę analogiczną do poprzedniego paragrafu. Definiujemy problem i związane z jego rozwiązaniem pojęcia, a następnie dowodzimy twierdzenia o strukturach zbiorów o wewnętrznie przecinającym się sferycznym szkielecie. To twierdzenie ma już bezpośrednie przełożenie na problem wewnętrzności działania sumy Minkowskiego w rodzinie  $G$ -wielościanów. W Paragrafie 4.4 wskazujemy na konkretne rodziny  $G$ -wielościanów, dla których nie ma konieczności modyfikacji sumy Minkowskiego.

Rozdział 5 dotyczy badania par  $G$ -wielościanów pod kątem ich  $G$ -minimalności i posiada trzy paragrafy. Pojęcie to jest istotnie różne od minimalności, gdyż para  $G$ -wielościanów, jako para zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych, może posiadać parę minimalną, która nie jest parą  $G$ -wielościanów. W Paragrafie 5.1 stawiamy pytania analogiczne do pytań znajdujących się na końcu Rozdziału 2. Również w tym paragrafie wykorzystujemy metody programowania liniowego do zdefiniowania metod redukcji i kryterium  $G$ -minimalności, co jest odpowiedzią na dwa, wcześniej sformułowane, pytania. Paragraf 5.2 zawiera podsumowanie, w formie algorytmu, rozważań zawartych w poprzednim paragrafie. Algorytm ten jest odpowiedzią na ostatnie z postawionych pytań. W Paragrafie 5.3 przedstawiamy działanie algorytmu wskazującego zbiór wszystkich par  $G$ -minimalnych na wybranej parze  $G$ -wielościanów.

W Rozdziale 6 wskazujemy możliwe zastosowania wypracowanych wcześniej wyników. Na ten rozdział składają się dwa paragrafy. W Paragrafie 6.1 formułujemy twierdzenia pozwalające wykorzystać  $G$ -minimalność do określenia minimalności pary wielościanów. Paragraf 6.2 dotyczy innych zastosowań teorii  $G$ -wielościanów i wskazuje dalsze możliwe kierunki badań.

#### PODZIĘKOWANIA

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania promotorowi drowi hab. Jerzemu Grzybowskiemu za poświęcony czas, okazaną życzliwość i opiekę naukową w całym okresie studiów doktoranckich, a także cenne wskazówki i uwagi udzielone mi podczas pisania niniejszej rozprawy.



# ROZDZIAŁ 1

---

## PRELIMINARIA

---

W poniższym rozdziale ustalimy notację oraz przytoczymy podstawowe definicje, które zostaną użyte w dalszej części rozprawy. Nie jest to kompletny wykaz i pewne zagadnienia zostaną poruszone dopiero w rozdziałach, w których znajdują zastosowanie.

### 1.1. KONWENCJE I OZNACZENIA

Przez  $\mathbb{R}_+$  oznaczać będziemy zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

Symbolem  $\leq$  oznaczać będziemy nie tylko relację między liczbami rzeczywistymi, lecz również inne dwuargumentowe relacje będące częściowym porządkiem.

Przez  $A + B$  oznaczać będziemy sumę zbiorów nazywaną sumą Minkowskiego, która niezależnie od przestrzeni, z której pochodzą zbiory  $A$  i  $B$  będzie przyjmować intuicyjne znaczenie. W przypadku sumy Minkowskiego zbioru  $A$  ze zbiorem jednoelementowym  $\{x\}$  zamiast zapisywać  $A + \{x\}$  będziemy używali notacji  $A + x$ .

Gdy rodziny  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{K}$  będą się pokrywać, będziemy używali oznaczenia  $\mathcal{B}$  również na rodzinę zbiorów zwartych.

Przestrzeń liniowo-topologiczną  $(X, +, \cdot, \tau)$  oznaczać będziemy w skrócie przez  $X$ . Półgrupę wraz z elementem neutralnym formalnie nazywa się monoidem, lecz w rozprawie używać będziemy określenia półgrupy, zwracając uwagę, jeżeli będzie występować wraz z elementem neutralnym działania.

Mnożenie przez skalar zamiast formalnego zapisu  $\alpha \cdot x$  będziemy zapisywać jako  $\alpha x$ . Klasę abstrakcji  $[(A, B)]_{\sim}$  zapisywać będziemy w skróconej formie  $[A, B]$ .

Wszystkie wielościany występujące w niniejszej rozprawie są wielościanami wypukłymi, stąd będziemy pomijać przymiotnik wypukły.

## 1.2. PODSTAWOWE DEFINICJE

W poniższym paragrafie podamy definicje podstawowych, powszechnie znanych pojęć w celu uniknięcia nieporozumień związanych z niejednoznacznością nazw niektórych z nich.

**Definicja 1.2.1.** Zbiór  $S$  z określonym na nim łącznym działaniem  $+$  :  $X \times X \longrightarrow X$  nazywamy *półgrupą*. Półgrupę z elementem neutralnym nazywamy *monoidem*. Jeżeli działanie  $+$  jest przemienne, to półgrupa jest nazywana *abelową*.

**Definicja 1.2.2.** Niech  $K$  będzie ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  lub zespolonych  $\mathbb{C}$ . Zbiór  $X$  z określonymi na nim dwoma działaniami, tj. dodawaniem wektorów  $+$  :  $X \times X \longrightarrow X$  i mnożeniem przez skalar  $\cdot$  :  $K \times X \longrightarrow X$ , które spełniają następujące warunki

1.  $\forall_{x,y,z \in X} x + (y + z) = (x + y) + z,$
2.  $\forall_{x,y \in X} x + y = y + x,$
3.  $\forall_{x \in X} x + 0 = x,$
4.  $\forall_{x \in X} \exists y \in X x + y = 0,$
5.  $\forall_{x,y \in X} \forall_{\alpha \in K} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
6.  $\forall_{x \in X} \forall_{\alpha, \beta \in K} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
7.  $\forall_{x \in X} \forall_{\alpha, \beta \in K} \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x,$
8.  $\forall_{x \in X} 1 \cdot x = x$

nazywamy przestrzenią *liniową* lub *wektorową* nad ciałem  $K$ .

Wszystkie występujące w dalszej części rozprawy przestrzenie wektorowe są rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi, tj. nad ciałem liczb rzeczywistych.

**Definicja 1.2.3.** Niech  $(X, +, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$  liczb rzeczywistych lub zespolonych i niech  $\tau$  będzie topologią na zbiorze  $X$ . Przestrzeń  $(X, +, \cdot, \tau)$  nazywamy *przestrzenią liniowo-topologiczną*, gdy spełnione są następujące warunki:

1.  $\forall_{x \in X}$  zbiór  $\{x\}$  jest domknięty.
2. dodawanie  $+$  :  $X \times X \longrightarrow X$  i mnożenie przez skalar  $\cdot$  :  $K \times X \longrightarrow X$  są ciągle.

Powyższa definicja przestrzeni liniowo-topologicznej implikuje, że przestrzeń liniowo-topologiczna jest przestrzenią Hausdorffa. Wynika to z twierdzenia oznaczonego jako Theorem 1.12 w [32].

**Definicja 1.2.4.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową. Zbiór  $A \subset X$  nazywamy *wypukłym*, jeżeli dla dowolnych  $a, b \in A$  zachodzi  $\alpha a + (1 - \alpha)b \in A$ , gdzie  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Definicja 1.2.5.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową i niech  $A \subset X$ . *Powłoką wypukłą* zbioru  $A$  oznaczamy zbiór

$$\text{co } A := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid a_i \in A, 0 \leq \alpha_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Powłoka wypukła zbioru  $A$  jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym  $A$ , stąd też możemy zapisać również  $\text{co } A = \bigcap \{M \subset X \mid A \subset M, M \text{ jest wypukły}\}$ .

**Definicja 1.2.6.** Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór  $A \subset X$  nazywamy *domkniętym*, jeżeli dopełnienie  $X \setminus A$  zbioru  $A$  jest zbiorem otwartym, tj. należy do topologii  $\tau$ .

**Definicja 1.2.7.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową. Zbiór  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  nazywamy *sumą Minkowskiego*.

W literaturze suma ta występuje również jako suma algebraiczna czy suma wektorowa.

**Definicja 1.2.8.** Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór  $\text{cl } A := \bigcap \{F \subset X \mid A \subset F, X \setminus F \in \tau\}$  będący najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym  $A$  nazywamy *domknięciem zbioru  $A$* .

**Definicja 1.2.9.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową. Zbiór  $S \subset X$  nazywamy *stożkiem*, jeżeli dla dowolnych  $s \in S$  oraz  $\alpha \geq 0$  zachodzi  $\alpha s \in S$ . Zbiór  $S \subset X$  nazywamy *stożkiem wypukłym*, jeżeli dla dowolnych  $s, t \in S$  oraz  $\alpha, \beta \geq 0$  zachodzi  $\alpha s + \beta t \in S$ .

**Definicja 1.2.10.** Niech  $(S, +)$  będzie półgrupą abelową z elementem neutralnym  $0$  oraz niech  $\cdot : \mathbb{R}_+ \times S \rightarrow S$  będzie mnożeniem przez nieujemny skalar. Jeżeli spełnione są następujące własności:

1.  $\forall_{s,t \in S} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot (s + t) = \alpha \cdot s + \alpha \cdot t,$
2.  $\forall_{s \in S} \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+} (\alpha + \beta) \cdot s = \alpha \cdot s + \beta \cdot s,$
3.  $\forall_{s \in S} \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot (\beta \cdot s) = (\alpha\beta)s,$

$$4. \forall_{s \in S} 1 \cdot s = s,$$

$$5. \forall_{s \in S} 0 \cdot s = 0,$$

to  $(S, +, \cdot)$  nazywamy *abstrakcyjnym stożkiem wypukłym*.

**Definicja 1.2.11.** Dwuargumentową relację  $\leq$  na zbiorze  $X$ , która jest zwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia nazywamy *częściowym porządkiem*. Relacja ta spełnia zatem

$$1. \forall_{a \in X} a \leq a.$$

$$2. \forall_{a, b \in X} a \leq b, b \leq a \implies a = b.$$

$$3. \forall_{a, b, c \in X} a \leq b, b \leq c \implies a \leq c.$$

**Definicja 1.2.12.** Dwuargumentową relację  $\sim$  na zbiorze  $X$ , która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywamy *relacją równoważności*. Relacja ta spełnia zatem

$$1. \forall_{a \in X} a \sim a.$$

$$2. \forall_{a, b \in X} a \sim b \implies b \sim a.$$

$$3. \forall_{a, b, c \in A} a \sim b, b \sim c \implies a \sim c.$$

Zbiór  $[a]_{\sim}$  złożony z elementów  $x \in X$  będących w relacji z  $a$  nazywamy klasą abstrakcji lub klasą równoważności elementu  $a$ .

Dla poniższych czterech definicji niech  $X$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ . Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  oraz  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ .

**Definicja 1.2.13.** *Kombinacją liniową* zbioru wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  o współczynnikach  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  nazywamy wektor  $x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ .

**Definicja 1.2.14.** *Kombinacją afiniczną* zbioru wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  o współczynnikach  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  nazywamy wektor  $x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , gdzie  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .

**Definicja 1.2.15.** Mówimy, że zbiór wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  jest *liniowo niezależny*, jeżeli zachodzi  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ .

**Definicja 1.2.16.** Mówimy, że zbiór wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  jest *afinicznie niezależny*, jeżeli zbiór wektorów  $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$  jest liniowo niezależny.

**Definicja 1.2.17.** Niech wektory  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . *Iloczynem skalarnym*  $\langle x, y \rangle$  nazywamy sumę  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

**Definicja 1.2.18.** Podzbiór  $H \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy *hiperplaszczyną*, jeżeli  $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = b\}$  dla pewnego niezerowego elementu  $a \in \mathbb{R}^n$  oraz  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definicja 1.2.19.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$ . *Funkcją podparcia* nazywamy funkcję  $h_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  taką, że  $h_A(x) := \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle$ .

**Definicja 1.2.20.** Niech  $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  i  $x \in \mathbb{R}^n$  będzie niezerowe. *Zbiorem podpierającym* nazywamy zbiór  $A(x) \subset A$  taki, że  $A(x) := \{a \in A \mid \langle a, x \rangle = h_A(x)\}$ .

Jeżeli w powyższej definicji zamiast  $\mathbb{R}^n$  przyjmiemy przestrzeń nieskończenie wymiarową  $X$ , wówczas dla funkcji liniowej  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  określamy  $A(f) := \{a \in A \mid f(a) = \sup_{b \in A} f(b)\}$  jako zbiór podpierający.

**Definicja 1.2.21.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Jeżeli zbiór  $A$  możemy zapisać jako przekrój półprzestrzeni  $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x_i \rangle \leq h_A(x), i = 1, 2, \dots, k\}$  dla pewnego skończonego zbioru  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ , to zbiór  $A$  nazywamy *zbiorem wielościennym*.

**Definicja 1.2.22.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Jeżeli zbiór  $A$  możemy zapisać jako powłokę wypukłą skończonej liczby punktów  $\text{co}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , to zbiór  $A$  nazywamy *wielościannem wypukłym*.

Wielościann wypukły jest ograniczonym zbiorem wielościennym.

## ROZDZIAŁ 2

---

# RODZINA ZBIORÓW NIEPUSTYCH, OGRANICZONYCH, DOMKNIĘTYCH I WYPUKŁYCH

---

W poniższym rozdziale omówimy pewne znane własności rodziny zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych.

Paragraf 2.1 dotyczyć będzie wprowadzenia w tej rodzinie działań zapewniających strukturę półgrupy, a nawet abstrakcyjnego stożka wypukłego. Paragraf zakończymy twierdzeniem dotyczącym zachodzenia porządkowego prawa skreśleń w tej półgrupie.

W Paragrafie 2.2 wprowadzimy w iloczynnie kartezjańskim półgrup zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych relację równoważności. Następnie sformułujemy postać przestrzeni ilorazowej tej relacji wraz z działaniami oraz wprowadzimy na niej częściowy porządek. Przestrzeń taką nazywamy przestrzenią Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera. Rozważymy pojedynczą klasę równoważności tej przestrzeni nazywaną ciałem wirtualnym, wewnątrz której wprowadzimy częściowy porządek. Klasy te są ściśle związane z rachunkiem quasiróżniczkowym. Para złożona z subróżniczki i superróżniczki funkcji wyznacza quasiróżniczkę funkcji. Istotnym zagadnieniem jest wskazanie jej minimalnej reprezentacji, a problem ten równoważny jest znalezieniu elementu minimalnego względem wprowadzonego częściowego porządku wewnątrz ciała wirtualnego zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych.

W Paragrafie 2.3 sformułujemy i zilustrujemy na przykładach w dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej metody redukcji par zbiorów.

Paragraf 2.4 poświęcimy znanym kryteriom minimalności par zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. Kryteria te nie są jednak warunkami koniecznymi i dostatecznymi minimalności. Przytoczymy twierdzenia, które dla jednowymiarowej i dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej w pełni charakteryzują pary minimalne. Na koniec Paragrafu 2.4 sformułujemy otwarte pytania, które stały się główną motywacją tej rozprawy.

## 2.1. PÓLGRUPA ZBIORÓW WYPUKŁYCH

W tym paragrafie zdefiniujemy rodzinę zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych oraz wprowadzimy w tej rodzinie działanie sumy Minkowskiego oraz mnożenia zbiorów przez nieujemny skalar. Tak utworzona struktura jest półgrupą i abstrakcyjnym stożkiem wypukłym. Poruszone zostaną również niektóre z własności wynikających z tej struktury.

**Definicja 2.1.1.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Rodzina  $\mathcal{B}(X)$  jest rodziną wszystkich podzbiorów  $X$ , które są niepuste, ograniczone, domknięte i wypukłe.

**Definicja 2.1.2.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Rodzina  $\mathcal{K}(X)$  jest rodziną wszystkich podzbiorów  $X$ , które są niepuste, zwarte i wypukłe.

**Lemat 2.1.3.** *Zachodzi równość  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Dowód.* Jest to oczywisty wniosek z twierdzenia Heinego-Borela. □

**Uwaga 2.1.4.** Elementy rodziny  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  nazywane bywają *ciałami wypukłymi*, natomiast rodzinę  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  oznacza się  $\mathcal{K}^n$ .

Z uwagi na fakt, że suma dwóch domkniętych podzbiorów przestrzeni liniowo-topologicznej nie musi być zbiorem domkniętym, rodzinę  $\mathcal{B}(X)$  rozważamy wraz z działaniem sumy jako domknięcia sumy Minkowskiego. W celu uproszczenia notacji również tę sumę nazywać będziemy sumą Minkowskiego.

**Definicja 2.1.5.** Niech  $A, B \subset X$ . Działanie  $A \dot{+} B = \text{cl}\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  nazywamy *sumą Minkowskiego*.

**Stwierdzenie 2.1.6.** *Rodzina  $\mathcal{B}(X)$  z działaniem sumy Minkowskiego  $A \dot{+} B$  jest półgrupą abelową z elementem neutralnym  $\{0\}$ .*

**Stwierdzenie 2.1.7.** *Niech  $A, B \in \mathcal{K}(X)$ , wówczas zachodzi równość  $A \dot{+} B = A + B$ .*

**Wniosek 2.1.8.** Rodzina  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  z działaniem sumy Minkowskiego  $A + B$  jest półgrupą abelową z elementem neutralnym  $\{0\}$ .

Poniższe stwierdzenie pochodzi z [33] i jest wnioskiem z Twierdzenia 1.7.5.

**Stwierdzenie 2.1.9.** Półgrupa  $\mathcal{B}(X)$  z działaniem sumy Minkowskiego  $A \dot{+} B$  i mnożeniem przez nieujemny skalar  $\alpha A$  jest abstrakcyjnym stożkiem wypukłym.

W celu uproszczenia notacji powyższy abstrakcyjny stożek wypukły określać będziemy w dalszej części rozprawy stożkiem  $\mathcal{B}(X)$ .

Poniższy lemat wynika z Twierdzenia 4.5.11 z [30].

**Lemat 2.1.10.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i niech  $A, B \in \mathcal{B}(X)$ . Jeżeli suma  $A \cup B$  jest wypukła i przekrój  $A \cap B \neq \emptyset$ , to zachodzi  $A \dot{+} B = A \cup B \dot{+} A \cap B$ .

Istotną informacją dotyczącą zbioru z określonym na nim działaniem, a w szczególności przestrzeni liniowo-topologicznej, jest fakt, czy zachodzą wobec tego działania pewne prawa nazywane prawem skreśleń i porządkowym prawem skreśleń.

**Definicja 2.1.11.** Niech  $(S, +)$  będzie półgrupą. Wówczas własność

$$\forall_{a,b,c \in S} a + c = b + c \implies a = b$$

nazywamy *prawem skreśleń*.

**Definicja 2.1.12.** Niech  $(S, +)$  będzie półgrupą z określonym w niej częściowym porządkiem  $\leq$ . Wówczas własność

$$\forall_{a,b,c \in S} a + c \leq b + c \implies a \leq b$$

nazywamy *porządkowym prawem skreśleń*.

Dla dowolnej przestrzeni liniowo-topologicznej porządkowe prawo skreśleń nie zachodzi dla dowolnych podzbiorów. Poniższe stwierdzenie pochodzi z [38] i jest oznaczone jako Proposition 2.1.

**Stwierdzenie 2.1.13.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Niech  $A$  będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni  $X$ ,  $B$  dowolnym niepustym i ograniczonym podzbiorem  $X$ , natomiast niech  $C$  będzie niepustym domkniętym i wypukłym podzbiorem  $X$ . Wówczas zachodzi porządkowe prawo skreśleń

$$A + C \subset B \dot{+} C \implies A \subset B.$$

**Wniosek 2.1.14.** W stożku  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  zachodzi porządkowe prawo skreśleń, tj. dla dowolnych  $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  zachodzi

$$A + C \subset B + C \implies A \subset B.$$



## 2.2. RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI W RODZINIE PAR ZBIORÓW

W poniższym paragrafie opiszemy iloczyn kartezjański  $\mathcal{B}^2(X) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$  i wprowadzoną relację równoważności par zbiorów. Zdefiniujemy częściowy porządek wśród klas abstrakcji, jak i wewnątrz pojedynczej z klas abstrakcji, które nazywać będziemy ciałami wirtualnymi.

**Definicja 2.2.1.** Niech  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{B}^2(X)$ . Dwuargumentową relację  $\sim$  definiujemy następująco

$$(A, B) \sim (C, D) :\iff A \dot{+} D = B \dot{+} C \quad (2.1)$$

**Stwierdzenie 2.2.2.** Wskazana w powyższej definicji relacja  $\sim$  jest relacją równoważności.

*Dowód.* Aby udowodnić, że relacja  $\sim$  jest relacją równoważności musimy pokazać, że jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

1. Zwrotność.

$A \dot{+} B = B \dot{+} A$ , ponieważ suma Minkowskiego jest przemienne.

2. Symetryczność.

Jeżeli  $A \dot{+} D = B \dot{+} C$ , to również  $C \dot{+} B = D \dot{+} A$ , ponieważ suma Minkowskiego jest przemienne.

3. Przechodniość.

Jeżeli  $A \dot{+} D = B \dot{+} C$  oraz  $C \dot{+} F = D \dot{+} E$ , to dodając do siebie te równania stronami uzyskujemy  $(A \dot{+} D) \dot{+} (C \dot{+} F) = (B \dot{+} C) \dot{+} (D \dot{+} E)$ . Dzięki łączności i przemienności sumy Minkowskiego możemy zapisać to następująco  $(A \dot{+} F) \dot{+} (C \dot{+} D) = (B \dot{+} E) \dot{+} (C \dot{+} D)$ . Korzystając z porządkowego prawa skreśleń uzyskujemy  $A \dot{+} F = B \dot{+} E$ .

□

Jeżeli na zbiorze określimy relację równoważności, wówczas możemy również określić klasy równoważności poszczególnych elementów, a także przestrzeń ilorazową. Elementy tej przestrzeni oznaczать będziemy w skrócie  $[A, B]$  zamiast  $[(A, B)]_{\sim}$ .

**Definicja 2.2.3.** Przestrzeń ilorazową  $\widetilde{X} := \mathcal{B}^2(X)/_{\sim}$  nazywamy przestrzenią Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera.

Zauważmy, że na tej przestrzeni istnieją naturalne działania dodawania klas równoważności  $[A, B] + [C, D] = [A \dot{+} C, B \dot{+} D]$  i mnożenia przez skalar  $\alpha[A, B] = [\alpha A, \alpha B]$  dla  $\alpha \geq 0$  oraz  $\alpha[A, B] = [-\alpha B, -\alpha A]$  dla  $\alpha < 0$ .

**Wniosek 2.2.4.** *Przestrzeń ilorazowa  $\widetilde{X} := \mathcal{B}^2(X)/\sim$  z powyższymi działaniami jest przestrzenią wektorową.*

**Definicja 2.2.5.** Element  $[A, B]$  przestrzeni ilorazowej  $\mathcal{K}^2(X)/\sim$  nazywamy ciałem wirtualnym. Jeżeli zbiory  $A$  i  $B$  są wielościanami, wówczas taki element nazywamy wielościanem wirtualnym.

**Definicja 2.2.6.** Niech  $[A, B], [C, D]$  będą klasami równoważności należącymi do przestrzeni ilorazowej  $\mathcal{B}^2(X)/\sim$ . Dwuargumentową relację  $\leq$  definiujemy następująco

$$[A, B] \leq [C, D] :\iff A \dot{+} D \subset B \dot{+} C.$$

**Stwierdzenie 2.2.7.** *Zbiór  $\mathcal{B}^2(X)/\sim$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym z częściowym porządkiem  $\leq$ .*

*Dowód.* Aby udowodnić, że relacja  $\leq$  jest częściowym porządkiem musimy pokazać, że jest relacją zwrotną, słabo antysymetryczną i przechodnią.

1. Zwrotność.

Oczywiście  $A \dot{+} B \subset B \dot{+} A$  ze względu na przemienność sumy Minkowskiego.

2. Słaba antysymetryczność.

Jeżeli  $A \dot{+} D \subset B \dot{+} C$  oraz  $C \dot{+} B \subset D \dot{+} A$ , to z przemienności sumy Minkowskiego wynika, że  $A \dot{+} D = B \dot{+} C$ . Zatem  $(A, B) \sim (C, D)$ , czyli  $[A, B] = [C, D]$ .

3. Przechodniość.

Jeżeli  $A \dot{+} D \subset B \dot{+} C$  oraz  $C \dot{+} F \subset D \dot{+} E$ , to sumując stronami otrzymujemy  $(A \dot{+} D) \dot{+} (C \dot{+} F) \subset (B \dot{+} C) \dot{+} (D \dot{+} E)$ . Korzystając z prawa skreśleń, łączności i przemienności sumy Minkowskiego uzyskujemy, że  $A \dot{+} F \subset B \dot{+} E$ .

□

**Stwierdzenie 2.2.8.** *Częściowy porządek  $[A, B] \leq [C, D]$  nie zależy od wyboru reprezentantów klas  $[A, B]$  i  $[C, D]$ .*

*Dowód.* Niech  $[A, B] \leq [C, D]$  i niech  $(A, B) \sim (A', B'), (C, D) \sim (C', D')$ . Zauważmy, że z inkluzji  $A \dot{+} D \subset B \dot{+} C$  po obustronnym dodaniu  $C'$  wynika  $A \dot{+} D \dot{+} C' \subset B \dot{+} C \dot{+} C'$ . Ze względu na  $(C, D) \sim (C', D')$  mamy  $A \dot{+} D' \dot{+} C \subset B \dot{+} C \dot{+} C'$ . Korzystając z prawa skreśleń uzyskujemy  $A \dot{+} D' \subset B \dot{+} C'$ . Dodając obustronnie  $B'$  mamy  $A \dot{+} D' \dot{+} B' \subset B \dot{+} C' \dot{+} B'$ , więc po uporządkowaniu otrzymamy  $D' \dot{+} A \dot{+} B' \subset B \dot{+} C' \dot{+} B'$ . Na mocy  $(A, B) \sim (A', B')$  daje nam to  $D' \dot{+} A' \dot{+} B \subset B \dot{+} C' \dot{+} B'$ . Ponownie stosując prawo skreśleń uzyskamy  $D' \dot{+} A' \subset C' \dot{+} B'$ , co możemy zapisać jako  $A' \dot{+} D' \subset B' \dot{+} C'$ .

Ostatecznie zatem  $A \dot{+} D \subset B \dot{+} C$  implikuje  $A' \dot{+} D' \subset B' \dot{+} C'$ .

□

Wewnątrz klasy równoważności  $[A, B]$  możemy wprowadzić następujący częściowy porządek.

**Definicja 2.2.9.** Niech  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{B}^2(X)$ . Definiujemy dwuargumentową relację  $\prec$  następująco

$$(A, B) \prec (C, D) : \iff A \subset C, B \subset D, (A, B) \sim (C, D)$$

**Stwierdzenie 2.2.10.** Klasa abstrakcji  $[(A, B)]_{\sim}$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym z częściowym porządkiem  $\prec$ .

*Dowód.* Zauważmy, że wewnątrz klasy abstrakcji  $[(A, B)]_{\sim}$  spełnione jest  $(A, B) \sim (C, D)$  dla każdej pary  $(C, D)$ . Pozostają zatem warunki inkluzji. Aby udowodnić, że relacja  $\prec$  jest częściowym porządkiem musimy pokazać, że jest relacją zwrotną, słabo antysymetryczną i przechodnią.

1. Zwrotność.

Oczywiście  $A \subset A$  i  $B \subset B$ .

2. Słaba antysymetryczność.

Jeżeli  $A \subset C$  i jednocześnie  $C \subset A$ , wówczas  $A = C$ . Analogicznie zachodzi  $B \subset D$  i  $D \subset B$ , stąd  $B = D$ . Ostatecznie zatem  $(A, B) = (C, D)$ .

3. Przechodniość.

Jeżeli  $A \subset C$  i  $C \subset E$ , to również  $A \subset E$ . Podobnie z  $B \subset D$  i  $D \subset F$  wynika  $B \subset F$ .

□

Jeżeli zatem uzyskamy za pomocą pewnych przekształceń pary  $(A, B)$  parę  $(C, D)$  spełniającą warunek  $(C, D) \prec (A, B)$  możemy mówić o redukcji pary  $(A, B)$  do pary równoważnej  $(C, D)$ . W następnym paragrafie poznamy metody takich redukcji.

Poniższe stwierdzenie pochodzi z [30] i jest oznaczone jako Twierdzenie 4.1.2.

**Stwierdzenie 2.2.11.** Niech  $[A, B]$  będzie elementem przestrzeni ilorazowej  $\mathcal{K}^2(X)/\sim$ . Wówczas istnieje element minimalny  $(C, D) \in [A, B]$  względem relacji częściowego porządku  $\prec$ .

Zauważmy, że w powyższym stwierdzeniu klasa  $[A, B]$  należy do przestrzeni ilorazowej  $\mathcal{K}^2(X)/\sim$ . Jest to uzasadnione, ponieważ przestrzenie  $c_0$ ,  $c$  i  $l^\infty$  są przestrzeniami, w których istnieją takie pary zbiorów wypukłych, domkniętych i ograniczonych, że nie istnieje równoważna do nich para minimalna. Przykłady takich par znaleźć można w [17]. Nie możemy zatem sformułować tego stwierdzenia w większej ogólności.

Poniższe twierdzenie pozwala za pomocą minimalności jednej pary dowieść minimalności innych par. W ogólności nie są one jednak parami równoważnymi. Pochodzi ono z [30] i jest oznaczone jako Proposition 4.1.4.

**Twierdzenie 2.2.12.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{K}^2(X)$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Para  $(A, B)$  jest minimalna.*
- (ii) *Para  $(B, A)$  jest minimalna.*
- (iii) *Dla dowolnych elementów  $x, y \in X$  para  $(A + x, B + y)$  jest minimalna.*
- (iv) *Dla dowolnych skalarów  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  takich, że  $\alpha\beta > 0$  para  $(\alpha A, \beta B)$  jest minimalna.*

### 2.3. METODY REDUKCJI PAR ZBIORÓW WYPUKŁYCH

Paragraf ten przybliży, wraz z przykładami, niektóre metody redukcji par zbiorów, których można użyć w celu poszukiwań pary minimalnej wewnątrz ciała wirtualnego. Metody te są jedynie niektórymi z wielu znanych metod redukcji, a wybór przedstawionych metod związany jest z ich użytecznością w dalszej części rozprawy.

Poniższe dwie metody są dwiema głównymi metodami redukcji stosowanymi w przypadku par zbiorów ograniczonych, domkniętych i wypukłych.

**Twierdzenie 2.3.1** (Redukcja poprzez odjęcie wspólnego składnika). *Niech  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{B}^2(X)$ . Jeżeli istnieje zbiór  $E \in \mathcal{B}(X)$  taki, że  $(A, B) = (C \dot{+} E, D \dot{+} E)$ , wówczas pary  $(A, B)$  i  $(C, D)$  są równoważne.*

*Dowód.* Pary  $(A, B)$  i  $(C, D)$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \dot{+} D = B \dot{+} C$ . W przypadku, gdy  $(A, B) = (C \dot{+} E, D \dot{+} E)$  otrzymujemy  $(C \dot{+} E) \dot{+} D = (D \dot{+} E) \dot{+} C$ , co jest prawdą na mocy przemienności i łączności sumy Minkowskiego.  $\square$

**Twierdzenie 2.3.2** (Redukcja poprzez odcięcie hiperpłaszczyzną). *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$  i niech  $H$  będzie domkniętą hiperpłaszczyzną dzielącą  $\mathbb{R}^n$  na dwie domknięte półprzestrzenie  $H^+$  i  $H^-$ . Jeżeli  $A \cap H^- = B \cap H^-$ , to pary  $(A, B)$  i  $(A \cap H^+, B \cap H^+)$  są równoważne.*

*Dowód.* Oznaczmy przez  $A^- = A \cap H^- = B^-$ ,  $B \cap H^-$ ,  $A^+ = A \cap H^+$ ,  $B^+ = B \cap H^+$  oraz  $C = A \cap H = B \cap H$ . Korzystając z Lematu 2.1.10 możemy pokazać, że  $A^- + A^+ = A + C$  oraz analogicznie  $B^- + B^+ = B + C$ . Jeżeli  $A^- = B^-$ , to  $(A, A^+) \sim (A^-, C) = (B^-, C) \sim (B, B^+)$ . Z przechodniości relacji równoważności  $\sim$

wiemy, że  $(A, A^+) \sim (B, B^+)$ . To oznacza, że  $A+B^+ = A^++B$ , co jest równoznaczne z  $(A, B) \sim (A^+, B^+)$ .  $\square$

Zauważmy, że metody te mogą być wykorzystywane razem w celu osiągnięcia pary minimalnej, co przestawia przykład 2.3.3.

**Przykład 2.3.3.** Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  będzie parą zbiorów przedstawioną na Rysunku 2.1a. Zbiór  $A$  jest czerwonym pięciokątem, natomiast zbiór  $B$  niebieskim sześciokątem. Oba zbiory zawierają wspólny składnik, jakim jest czarny odcinek  $I$  zaznaczony na Rysunku 2.1b. Zastosowanie metody odjęcia wspólnego składnika przedstawić można następująco  $(A, B) = (C + I, D + I) \sim (C, D)$ . Parę  $(C, D)$  można zredukować poprzez odcięcie hiperpłaszczyzną zaznaczoną na Rysunku 2.1c. Po zastosowaniu tej metody otrzymujemy parę  $(E, F)$  z Rysunku 2.1d, która jest parą minimalną. Para  $(E, F) \sim (A, B)$  na mocy przechodniości relacji  $\sim$ .

Powyższe dwie metody redukcji mogą być uogólnione i połączone w jedną metodę, która pochodzi z [15] i oznaczona jest jako Theorem 4.3. Jednak w praktyce, jeżeli chcemy uzyskać parę minimalną, to częściej wykorzystuje się kilkakrotnie powyższe metody.

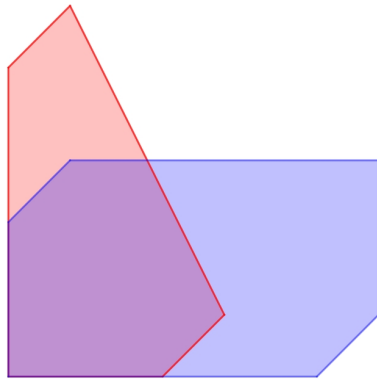
**Twierdzenie 2.3.4.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i niech  $A, B, C, D, F \in \mathcal{B}(X)$ . Niech  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie niezerowym funkcjonałem liniowym takim, że  $0 \in f(A) \cap f(B)$ . Wprowadźmy oznaczenia  $H^+ := f^{-1}([0, \infty))$  i  $H^- := f^{-1}((-\infty, 0])$ . Jeżeli  $F \dot{+} C = A \cap H^+$  i  $F \dot{+} D = B \cap H^+$ , wówczas pary  $(A, B)$  i  $((A \cap H^-) \cup (C \dot{+} F(-f)), (B \cap H^-) \cup (D \dot{+} F(-f)))$  są równoważne.

## 2.4. KRYTERIA MINIMALNOŚCI PAR ZBIORÓW WYPUKŁYCH

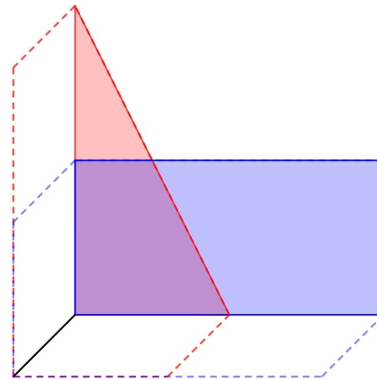
W tym paragrafie podsumujemy znane do tej pory kryteria minimalności, których możemy użyć w celu określania minimalności pary zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych. Twierdzenia te w większości odnoszą się do warunków dostatecznych minimalności pary, lecz nie określają one jednak warunków koniecznych. Kryteria te zostały szczegółowo opisane w [18] i oznaczone jako Twierdzenia 1, 2 i 3.

Pierwsze kryterium jest nazywane kryterium fasadowym. Przed jego sformułowaniem zapiszemy definicję fasady.

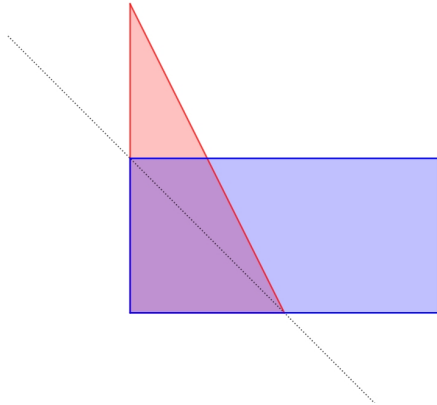
**Definicja 2.4.1.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną oraz niech  $A \subset X$  będzie wielościanem. *Fasadą* nazywamy każdą ścianę wielościanu, której wymiar wynosi  $\dim X - 1$ .



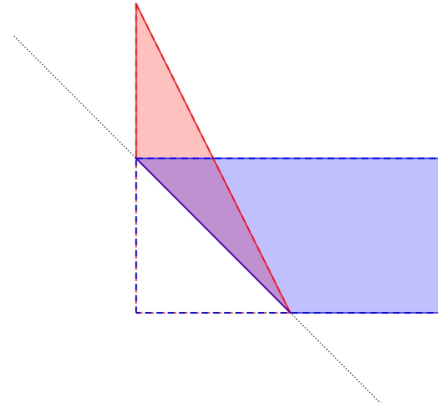
(a) Para  $(A, B)$



(b) Para  $(C, D)$  zredukowana odjęciem wspólnego składnika  $I$



(c) Para  $(C, D)$  z zaznaczoną hiperpłaszczyzną, tj. linią



(d) Para minimalna  $(E, F)$  zredukowana odcięciem hiperpłaszczyzną

Rysunek 2.1: Para  $(A, B)$  zredukowana do pary minimalnej  $(E, F)$  przy użyciu obu metod redukcji - odjęcia wspólnego składnika i odjęcia hiperpłaszczyzną

**Twierdzenie 2.4.2** (Kryterium fasadowe). *Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Jeżeli  $A$  jest wielościanem o fasadach  $S_i = A(f_i)$  dla  $i = 1, \dots, k$ , a  $B \in \mathcal{K}(X)$  spełnia warunek  $(S_i, B(f_i))$  jest parą minimalną i posiada własność translacji dla  $i = 1, \dots, k$ , wówczas para  $(A, B)$  jest minimalna.*

Drugie kryterium opiera się na porównywaniu takich zbiorów podpierających, że jeden z nich jest krawędzią wielościanu. Stąd nazywane bywa kryterium krawędziowym.

**Twierdzenie 2.4.3** (Kryterium krawędziowe). *Niech  $A$  będzie wielościanem w  $\mathbb{R}^n$ . Jeżeli  $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  spełnia warunek, że  $(A(f_i), B(f_i))$  jest parą minimalną dla wszystkich funkcjonałów liniowych  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że  $A(f_i)$  jest krawędzią  $A$ , to para  $(A, B)$  jest minimalna.*

Trzecie kryterium nazywane bywa kryterium krokowym i korzysta ze zbiorów punktów ekstremalnych i eksponowanych, dlatego zdefiniujemy je przed sformułowaniem kryterium.

**Definicja 2.4.4.** Niech  $A \in \mathcal{K}(X)$ . Wówczas, gdy istnieje niezerowy funkcjonal liniowy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  taki, że  $A(f) = \{x\}$ , to  $x \in A$  nazywamy *punktem eksponowanym* zbioru  $A$ .

Przez  $\exp(A)$  oznaczamy zbiór wszystkich punktów eksponowanych zbioru  $A$ .

**Definicja 2.4.5.** Niech  $A, B \in \mathcal{K}(X)$ . Podzbiór  $B \subset A$  nazywamy *ekstremalnym*, jeżeli spełniona jest implikacja

$$\forall_{a,b \in A} \exists_{t \in (0,1)} ta + (1-t)b \in B \implies a, b \in B.$$

Punkt  $x \in A$  nazywamy *punktem ekstremalnym*, jeżeli  $\{x\}$  jest podzbiorem ekstremalnym.

Przez  $\text{ext}(A)$  oznaczamy zbiór wszystkich punktów ekstremalnych zbioru  $A$ .

**Twierdzenie 2.4.6** (Kryterium krokowe). *Niech  $X$  będzie przestrzenią unormowaną i  $A, B \in \mathcal{K}(X)$ . Jeżeli dla dowolnego elementu  $a_0 + b_0 \in \exp(A + B)$  istnieje taki ciąg  $(a_i + b_i)_{i=1, \dots, k} \subset \exp(A + B)$ , że  $a_i = a_{i-1}$  lub  $b_i = b_{i-1}$  oraz  $a_k - b_k \in \text{ext}(A - B)$ , to para  $(A, B)$  jest minimalna.*

Powyższe kryteria nakładają różne założenia dotyczące zbiorów  $A$  i  $B$ . Jeżeli jednak ograniczymy się w rozważaniach do par  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ , wówczas prawdziwe jest następujące twierdzenie pochodzące z [30] i oznaczone jako Twierdzenie 4.3.5.

**Twierdzenie 2.4.7.** *Para  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$  jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- (i) *dla dowolnego niepustego podzbioru zwarteo i wypukłego  $A' \subset A$ , istnieje taki element  $x \in \mathbb{R}^n$ , że  $A + x \not\subset A' + B$  oraz*

$$\{y \in A + x \mid d(y, A' + B) = \sup_{z \in A+x} d(z, A' + B)\}$$

*nie jest ścianą  $A + x$ ,*

- (ii) *dla dowolnego niepustego podzbioru zwarteo i wypukłego  $B' \subset B$ , istnieje taki element  $x \in \mathbb{R}^n$ , że  $B + x \not\subset B' + A$  oraz*

$$\{y \in B + x \mid d(y, B' + A) = \sup_{z \in B+x} d(z, B' + A)\}$$

*nie jest ścianą  $B + x$ .*

Powyższe kryterium minimalności opiera się o definicję składnika sumy Minkowskiego zaproponowaną przez Weila w [40]. Twierdzenie to oznacza zatem, że  $A + x$  nie jest składnikiem sumy  $A' + B$ . Na mocy definicji, gdyby  $A + x$  był składnikiem tej sumy, wówczas dla pewnego  $E$  zachodziłoby  $A + x + E = A' + B$ , a to z kolei implikowałoby  $(A, B) \sim (A' + x, E)$ . Na mocy Twierdzenia 2.2.12 wiemy, że  $(A' + x, E) \sim (A', E + x)$  co przeczy minimalności  $(A, B)$ . Zatem powyższe twierdzenie jest sformułowaniem definicji pary minimalnej w innej terminologii i nie zawiera żadnej metody, która pozwalałaby dla danej pary  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ , stwierdzić czy jest ona parą minimalną w efektywny sposób. Jednak w przypadku jednowymiarowej i dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej możemy sformułować następujące równoważności.

**Wniosek 2.4.8.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R})$ . Para  $(A, B)$  jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  lub  $B$  jest singletonem.*

**Wniosek 2.4.9.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  będzie parą wielokątów. Para  $(A, B)$  jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (a) *dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^2$  para  $(A(x), B(x))$  jest minimalna,*
- (b) *dla pewnego  $x \in S^1$  para  $(A(x), B(x))$  nie jest minimalna oraz dla każdego  $x \neq y \in S^1$  para  $(A(y), B(y))$  jest minimalna.*

Korzystając z Wniosku 2.4.8 wiemy, że minimalność pary  $(A(x), B(x))$  oznacza, że zbiór podpierający  $A(x)$  jest singletonem lub  $B(x)$  jest singletonem. Wynika z tego, że para minimalna wielokątów nie może posiadać więcej niż jednej pary krawędzi o tym samym kącie nachylenia.

Pary minimalne w dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej posiadają własność translacji. Poniższe twierdzenie pochodzi z [12] i oznaczone jest jako Theorem 5.2. W tej samej pracy znajdziemy również przykład par minimalnych w trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej, które nie są swoimi translacjami.

**Twierdzenie 2.4.10.** *Jeżeli  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  są równoważnymi parami minimalnymi, wówczas istnieje  $x \in \mathbb{R}^2$  taki, że  $C = A + x$  oraz  $D = B + x$ .*

## Pytania dotyczące minimalności par

Powyższe twierdzenia w większości są warunkami dostatecznymi. Chociaż wiemy, że dla dowolnej pary  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ , gdy  $n > 2$  pary minimalne istnieją, to poniższe kwestie pozostają w tych przestrzeniach bez pełnej odpowiedzi:

1. W jaki sposób ustalić czy  $(A, B)$  jest parą minimalną?
2. W jaki sposób zredukować nieminimalną parę  $(A, B)$  do pary minimalnej?
3. W jaki sposób wyznaczyć wszystkie pary minimalne równoważne parze  $(A, B)$ ?



## ROZDZIAŁ 3

---

# PÓŁGRUPA WIEŁOŚCIANÓW O USTALONYCH KIERUNKACH ŚCIAN

---

Poniższy rozdział dotyczyć będzie wprowadzenia do teorii  $G$ -wielościanów, czyli wielościanów o ustalonych kierunkach ścian. Wielościany takie były badane np. przez Aleksandrowa [1], lecz nie pod kątem struktury półgrupy. Wynika to z faktu, że rodzina  $G$ -wielościanów z sumą Minkowskiego nie posiada, na ogół, takiej struktury. Konieczne jest zmodyfikowanie sumy Minkowskiego. Dlatego Grzybowski i Urbański zmodyfikowali sumę Minkowskiego w [19, 20]. W dalszej części rozdziału dla półgrupy  $G$ -wielościanów  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  zostaną sformułowane analogiczne twierdzenia do twierdzeń, jakie w Rozdziale 2 zostały sformułowane dla rodziny  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Rozumowanie przedstawione w poprzednim rozdziale również dla  $G$ -wielościanów prowadzi do pytań analogicznych do tych postawionych na końcu Rozdziału 2. Autor niniejszej rozprawy w dalszych rozdziałach udziela odpowiedzi na te pytania. Wskazuje również metodę ich wykorzystania, w specjalnych przypadkach, do odpowiedzi na pytania z Rozdziału 2.

W Paragrafie 3.1 przedstawimy motywacje badania wielościanów o ustalonych kierunkach ścian jako półgrupy  $G$ -wielościanów. Motywacje te są jednocześnie powodem poświęcenia niniejszej rozprawy temu zagadnieniu.

Paragraf 3.2 poświęcimy opisaniu rodziny  $G$ -wielościanów. Zaczniemy od zdefiniowania podstawowych dla tej rodziny pojęć, takich jak sieć  $G$ ,  $G$ -wielościan,  $G$ -powłoka wypukła czy macierz sieci  $G$ . Następnie omówimy pewne własności wektorów reprezentujących  $G$ -wielościany. Paragraf zakończymy Przykładem 3.2.12 ilustrującym problem powstający przy próbie wprowadzenia struktury półgrupy w rodzinie  $G$ -wielościanów.

Celem Paragrafu 3.3 jest omówienie trzech reprezentacji wielokątów i dwuwymiarowych  $G$ -wielościanów nazywanych  $G$ -wielokątami. Reprezentacje te pozwalają na rozpatrywanie  $G$ -wielokątów w różny sposób, co znacznie skraca niektóre rozumowania dowodowe stwierdzeń formułowanych w dalszych paragrafach. Następnie przedstawimy metody przekształceń jednej reprezentacji w pozostałe, co pozwoli dowolnie wybierać jedną z trzech reprezentacji  $G$ -wielokąta w zależności od okoliczności. Paragraf zakończymy sformułowaniem i udowodnieniem wniosków wynikających z tych przekształceń.

Pozostałe paragrafy posiadają strukturę ustaloną w Rozdziale 2. Ich celem jest sformułowanie analogicznych twierdzeń, do tych przedstawionych w Rozdziale 2., w języku  $G$ -wielościanów.

W Paragrafie 3.4 zdefiniujemy  $G$ -sumę Minkowskiego, wraz z którą rodzina  $G$ -wielościanów posiada strukturę półgrupy. Omówimy własności  $G$ -sumy oraz zilustrujemy jej działanie na przykładach. Udowodnimy, że półgrupa  $G$ -wielościanów spełnia porządkowe prawo skreśleń.

W Paragrafie 3.5, podobnie jak w Paragrafie 2.2, wprowadzimy relację równoważności par zbiorów z półgrupy omówionej w poprzednim paragrafie. Zdefiniujemy również częściowy porządek wewnątrz  $G$ -wielościanu wirtualnego. Paragraf ten zakończymy twierdzeniem dotyczącym równości relacji równoważności określonych w tym Paragrafie, jak i Paragrafie 2.2.

Paragraf 3.6 poświęcimy jednocześnie metodom redukcji i kryteriom  $G$ -minimalności  $G$ -wielokątów. Na początku Paragrafu 3.6 wskażemy przykład ilustrujący konieczność wprowadzenia pojęcia  $G$ -minimalności. Następnie sformułujemy pewne twierdzenia, które określają możliwe działania na wprowadzonych wcześniej reprezentacjach  $G$ -wielokątów, które są metodami redukcji par  $G$ -wielokątów. Metody te doprowadzą nas do ustalenia kryteriów  $G$ -minimalności  $G$ -wielokątów w języku tych trzech reprezentacji. Paragraf 3.6 zakończymy wnioskiem wskazującym na związek między minimalnością i  $G$ -minimalnością  $G$ -wielokątów.

Rezultaty z Paragrafu 3.6 są oryginalnymi wynikami autora rozprawy i zawierają wyniki z pracy [36].

### 3.1. MOTYWACJA BADANIA WIEŁOŚCIANÓW O USTALONYCH KIERUNKACH ŚCIAN

Dwa pierwsze pytania znajdujące się na końcu poprzedniego rozdziału sformułowane zostały przez V. F. Demyanova na konferencji w Oberwolfach w roku 1984. Pozostają one zatem bez pełnej odpowiedzi od wielu lat. Pomimo tego, że pary o specyficznej strukturze pozwalają stwierdzić ich minimalność, czy też dokonać ich redukcji do pary minimalnej, to do tej pory nie sformułowano ogólnych metod odpowiedzi na zadane pytania dla dowolnej pary zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych.

Pomysł zastosowany w poniższym rozdziale polega na wybraniu takiej podrodziny w  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ , aby uzyskane dla niej wyniki mogły zostać uogólnione na całą rodzinę. Oczywiście metod wyboru takiej podrodziny jest wiele, lecz w pracach [19, 20] opisujących model wzrostu kryształów wykorzystana została podrodzina zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych będąca rodziną wielościanów o ustalonych kierunkach ścian w trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Zatem rozważania dotyczące takiej podrodziny mogłyby przynieść korzyści również dla teorii wzrostu kryształów. Ponadto, jeżeli rozważymy w przestrzeni rzeczywistej dowolny punkt  $x$  na sferze jednostkowej, a następnie funkcję podparcia  $h_A(x) = \max_{b \in A} \langle b, x \rangle$ , wówczas dowolny zbiór  $A$  możemy opisać jako przekrój półprzestrzeni  $A = \bigcap_{x \in S^{n-1}} \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq h_A(x)\}$ . Wiemy, że wielościany są przekrojem skończonej liczby takich półprzestrzeni, w związku z czym do ich opisu wystarczy skończony podzbiór sfery jednostkowej. Ten skończony podzbiór, o ile spełnia dodatkowy warunek gwarantujący nam ograniczoność wspomnianego przekroju półprzestrzeni, tj. wykluczający możliwość opisu nieograniczonych zbiorów wielościennych, nazywać będziemy siecią (ang. grid). Zatem każdy wielościan może być opisany jako zbiór niepusty, zwarty i wypukły o ustalonych kierunkach ścian, które opisywać będziemy za pomocą sieci. Niestety, wewnątrz tej rodziny suma Minkowskiego nie jest działaniem wewnętrznym, jeżeli rozpatrzymy dowolny zbiór kierunków ścian. Należy zatem sprawdzić, dla jakich sieci ta własność zachodzi, a dla pozostałych zmodyfikować tę sumę. Następnie wykonamy konstrukcję analogiczną do konstrukcji przestrzeni Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera  $\tilde{X}$ , rozważymy pary znajdujące się wewnątrz klasy abstrakcji i minimalność tych par. Wówczas będziemy w stanie sformułować pytania analogiczne do tych znajdujących się na końcu poprzedniego rozdziału. Twierdzenia służące odpowiedzi na takie pytania można zastosować do pewnych metod działających również w  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ .

Warto zwrócić uwagę na aspekt zastosowania rachunku quasiróżniczkowego, a zatem również kwestii znajdowania par minimalnych. W praktyce teoretyczne rozwiązania, ze względu na ograniczoność rzeczywistości, do której je aplikujemy, przyjmują

ograniczoną formę. Zatem pary, które przyjdzie nam minimalizować w praktycznych zastosowaniach będą parami wielościanów, o ograniczonej liczbie kierunków ścian. Jest to kolejny powód, dla którego ta rodzina wymaga dokładnego zbadania i opracowania.

## 3.2. RODZINA $G$ -WIEŁOŚCIANÓW I JEJ WŁASNOŚCI

W tym paragrafie zdefiniujemy pojęcia związane z rodziną wielościanów o ustalonych kierunkach ścian nazywanych  $G$ -wielościanami. Wskażemy również parę zbiorów, których suma Minkowskiego nie posiada wektorów normalnych do ścian zawartych w zbiorze wektorów normalnych do ścian swoich składników.

**Definicja 3.2.1.** Niech  $G := \{g_1, \dots, g_k\}$  będzie skończonym podzbiorem sfery  $S^{n-1}$ . Zbiór  $G$  nazywamy *siecią* (ang. *grid*), jeżeli  $0 \in \text{int co}\{g_1, \dots, g_k\}$ .

**Definicja 3.2.2.** Niech  $G$  będzie siecią. Wektory  $g_1, \dots, g_k \in G$  nazywamy  $G$ -wektorami.

Działania na indeksach wykonywane są modulo  $k$  w zbiorze  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definicja 3.2.3.** Podzbiór  $A \subset \mathbb{R}^n$  zdefiniowany jako

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, g_i \rangle \leq h_A(g_i), i = 1, 2, \dots, k\},$$

gdzie  $h_A(g_i)$  są wartościami funkcji podparcia nazywamy  $G$ -wielościanem.

Rodzina wszystkich niepustych przekrojów półprzestrzeni, których wektory normalne zawierają się w sieci  $G$  będzie rodziną  $G$ -wielościanów.

**Definicja 3.2.4.** Rodzinę  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n) := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ jest } G\text{-wielościanem}\}$  nazywamy *rodziną  $G$ -wielościanów*.

Rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  zawiera wypukłe wielościany, takie, że zbiór wektorów normalnych do ich ścian jest podzbiorem  $G$ . Rodzina ta może zawierać również zbiory płaskie i odcinki.

Możemy oznaczyć wartości funkcji podparcia  $h_A$  na  $g_i$  jako  $h_i^A = h_A(g_i)$ . Możemy wówczas opisać jednoznacznie  $G$ -wielościan  $A$  używając sieci  $G$  oraz wektora  $h^A = (h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A)$ . Taki opis  $G$ -wielościanu nazywamy  $H_G$ -reprezentacją. O reprezentacjach  $G$ -wielościanów traktuje Paragraf 3.3.

**Definicja 3.2.5.** Dla  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  przez

$$\text{co}_G A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, g_i \rangle \leq h_A(g_i), i = 1, \dots, k\}$$

oznaczamy najmniejszy  $G$ -wielościan zawierający zbiór  $A$ . Zbiór  $\text{co}_G A$  nazywamy  $G$ -powłoką wypukłą.

Dla  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$   $G$ -powłoką wypukłą  $A$  nazywamy najmniejszy  $G$ -wielościan  $\text{co}_G A$  taki, że  $A \subset \text{co}_G A$ . Zbiór  $A$  jest  $G$ -wielościanem wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \text{co}_G A$ .

**Definicja 3.2.6.** Zbiór podpierający

$$A(g_i) := \{a \in A \mid \langle a, g_i \rangle = h_A(g_i)\}$$

nazywamy *ścianą*  $G$ -wielościanu.

Zwróćmy uwagę na to, że ściana  $G$ -wielościanu nie musi być ścianą pełnowymiarową. Również krawędzie czy wierzchołki mogą być ścianami  $G$ -wielościanu. Oznacza to, że  $G$ -wielościan nie może posiadać pełnowymiarowych ścian w kierunkach innych niż te z sieci  $G$ , jednak nie musi posiadać pełnowymiarowych ścian we wszystkich kierunkach z sieci  $G$ .

**Definicja 3.2.7.** Jeżeli  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  jest wielościanem z niepustym wnętrzem, wówczas zbiór  $G(A)$  wektorów normalnych do ścian  $A$  nazywamy *siecią generowaną przez  $A$* .

Zbiór  $G = G(A)$  jest najmniejszą siecią taką, że  $A$  jest  $G$ -wielościanem. Jeżeli  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$  jest parą wielościanów z niepustym wnętrzem, wówczas zbiór  $G(A, B) := G(A) \cup G(B)$  jest najmniejszym zbiorem  $G$  takim, że  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^n)$  jest parą  $G$ -wielościanów.

**Definicja 3.2.8.** Wektor  $h \in \mathbb{R}^k$  nazywamy *właściwym* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A_h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, g_i \rangle \leq h_i\}$  jest niepusty i dla każdego innego wektora  $h' \leq h$  takiego, że  $h' \neq h$  mamy  $A_{h'} \subsetneq A_h$ .

Fakt, że wektor  $h$  jest właściwy oznacza, że wyznacza on jednoznacznie pewien  $G$ -wielościan  $A_h$ . Wektor  $h$  może nie być właściwy z dwóch powodów. Zbiór  $A_h$  może być zbiorem pustym, albo też  $h$  może generować pewien  $G$ -wielościan, ale w taki sposób, że zmniejszenie wartości  $h_i$  dla pewnego  $i$  powoduje generowanie takiego samego  $G$ -wielościanu. Zatem to, że wektor  $h$  jest właściwy oznacza, że  $h = h^{A_h}$ .

Zdefiniowana poniżej macierz sieci jest istotną częścią Twierdzenia 3.2.11 dotyczącego metody sprawdzania, czy wektor  $h \in \mathbb{R}^k$  jest właściwy.

**Definicja 3.2.9.** Macierz  $M_G := [\alpha_{ji}]_{m \times k}$  nazywamy *macierzą sieci*  $G$ , jeżeli jest największą macierzą z parami różnymi wierszami  $(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jk})$ ,  $j = 1, \dots, m$  spełniającą poniższe warunki dla ustalonego  $j$ :

- (a) wiersz  $(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jk})$  nie ma więcej niż  $n + 1$  niezerowych elementów,
- (b) wiersz  $(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jk})$  nie ma więcej niż jednego ujemnego elementu,
- (c) równości  $\sum_{i=1}^k \alpha_{ji} g_i = 0$  i  $\sum_{i=1}^k \alpha_{ji} = 1$  są spełnione,
- (d) wektory ze zbioru  $\{g_i \mid \alpha_{ji} \neq 0\}$  są afinicznie niezależne.

Poniższy lemat zostanie wykorzystany w dowodzie Twierdzenia 3.2.11.

**Lemat 3.2.10.** Niech  $\{g_1, \dots, g_l\} \subset \mathbb{R}^n$  będzie afinicznie niezależnym zbiorem wektorów i  $\alpha_i$  będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $\sum_{i=1}^l \alpha_i g_i = 0$  i  $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$ . Wówczas dla każdego  $h = (h_1, \dots, h_l) \in \mathbb{R}^l$  mamy  $\sum_{i=1}^l \alpha_i h_i \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy układ nierówności  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i$  ma rozwiązanie.

*Dowód.* Załóżmy, że system nierówności  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i$  ma rozwiązanie. Wtedy  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i \implies \sum_{i=1}^l \alpha_i \langle x, g_i \rangle \leq \sum_{i=1}^l \alpha_i h_i \implies \langle x, \sum_{i=1}^l \alpha_i g_i \rangle \leq \sum_{i=1}^l \alpha_i h_i \implies \langle x, 0 \rangle \leq \sum_{i=1}^l \alpha_i h_i \implies 0 \leq \sum_{i=1}^l \alpha_i h_i$ .

Załóżmy, że zachodzi  $\sum_{i=1}^l \alpha_i h_i \geq 0$ . Istnieje wówczas liczba rzeczywista  $\varepsilon \geq 0$  taka, że  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i + \varepsilon$  dla pewnego  $x \in \mathbb{R}^n$ . Możemy zminimalizować  $\varepsilon$  do  $\varepsilon_0 \geq 0$  takiego, że  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i + \varepsilon_0$  i dla pewnego  $i \in \{1, \dots, k\}$  mamy wówczas  $\langle x, g_i \rangle = h_i + \varepsilon_0$ . Stąd  $0 \in \text{co}\{g_i \mid \langle x, g_i \rangle = h_i + \varepsilon_0\}$ . Mamy zatem  $\alpha_i \neq 0$  dla  $i \in \{1, \dots, k\}$  takich, że  $\langle x, g_i \rangle = h_i + \varepsilon_0$  i  $\sum_{i=1}^k \alpha_i g_i = 0$ .

$0 = \langle x, 0 \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x, g_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i (h_i + \varepsilon_0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i + \varepsilon_0 \sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i + \varepsilon_0$ . Ale  $\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i \geq 0$  z naszych założeń, co implikuje, że  $\varepsilon_0 = 0$  zatem układ nierówności  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i$  ma rozwiązanie.  $\square$

Poniższe twierdzenie jest metodą na sprawdzenie, czy wektor  $h \in \mathbb{R}^k$  dla danej  $k$ -elementowej sieci jest właściwy.

**Twierdzenie 3.2.11.** Niech  $h \in \mathbb{R}^k$  oraz  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^{n-1}$ . Następujące warunki są równoważne:

- (a)  $h = h^A$  dla pewnego zbioru  $A \in \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ ,
- (b)  $M_G h \geq 0$ .

*Dowód.* (a)  $\implies$  (b) Niech  $h = h^A$  dla pewnego zbioru  $A \in \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ . Zatem  $\langle x, g_i \rangle \leq h_i$  dla wszystkich  $x \in A$ . Macierz  $M_G$  spełnia równość  $\sum_{i=1}^k \alpha_i g_i = 0$ .

Jeżeli  $\alpha_j < 0$  dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$ , to istnieje  $x_0 \in A$  takie, że  $\langle x_0, g_j \rangle = h_j$ . Wówczas  $0 = \langle x_0, 0 \rangle = \langle x_0, \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_0, g_i \rangle \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i$ .

(b)  $\implies$  (a) Niech  $M_G h \geq 0$  i  $A_h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, g_i \rangle \leq h_i\}$ . Rozważmy sytuację, gdy  $\alpha_i \geq 0$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, k$ . Korzystając z Lematu 3.2.10 otrzymujemy, że  $A_h$  jest niepusty.

Założmy, że  $h$  nie jest właściwy. Wówczas istnieje  $j \in \{1, \dots, k\}$  takie, że  $A_{h'}$  jest równe  $A_h$ , gdzie  $h'_j = h_j - \varepsilon$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$ . Niech  $h'' \in \mathbb{R}^k$  będzie wektorem takim, że  $h''_j = -h_j$  dla  $j \in \{1, \dots, k\}$  i  $h''_i = h_i$  dla  $j \neq i \in \{1, \dots, k\}$ . Niech  $G''$  będzie siecią, w której  $g''_j = -g_j$  i  $g''_i = g_i$ .

Z faktu, że  $A_{h'} = A_h$  mamy  $A_{h''} = \emptyset$ . Skoro  $A''_h$  jest pustym przekrojem  $k$  półprzestrzeni w  $\mathbb{R}^n$ , to przekrój co najwyżej  $n + 1$  z tych półprzestrzeni również jest pusty. Z Lematu 3.2.10 wiemy, że w macierzy  $M_G$  jest wiersz taki, że  $\alpha_j < 0$  oraz  $\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i = \sum_{i \neq j} \alpha_i h_i + (-\alpha_j) h''_j < 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $M_G h \geq 0$ .  $\square$

Omówiliśmy pewne własności  $G$ -wielościanów niezależne od działania między nimi. Niestety, nie możemy wykorzystać sumy Minkowskiego, tak jak w przypadku wielościanów. W przypadku  $G$ -wielościanów możemy uzyskać sumę, która nie jest  $G$ -wielościanem, mimo tego, że składniki tej sumy były  $G$ -wielościanami. Poniższy przykład ilustruje taką sytuację.

**Przykład 3.2.12.** Zauważmy, że w zależności od sieci  $G$  suma Minkowskiego dwóch trójwymiarowych  $G$ -wielościanów może nie być  $G$ -wielościanem. Jeżeli rozpatrzemy

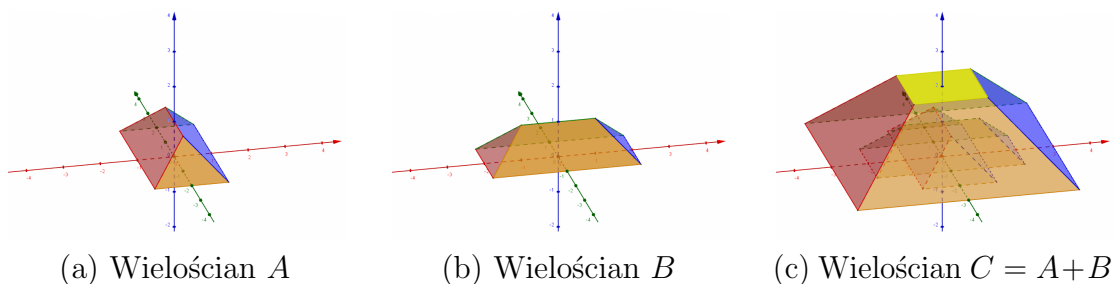
$$G = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$$

wówczas suma dwóch  $G$ -wielościanów będzie również  $G$ -wielościanem. Natomiast, gdy

$$G = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 0, -1) \right\},$$

możemy dobrać takie  $G$ -wielościany  $A$  i  $B$ , że  $A + B$  nie jest  $G$ -wielościanem. Przykład takich wielościanów widzimy na Rysunku 3.1. Wielościan  $A$  jest wydłużoną piramidą, natomiast wielościan  $B$  jest tą samą piramidą, lecz obróconą wokół osi  $OZ$  o kąt  $\frac{\pi}{2}$ . Wówczas suma Minkowskiego posiada ścianę o wektorze normalnym  $(0, 0, 1)$ , podczas gdy żaden ze składników nie posiadał ściany o takim wektorze normalnym.

W Rozdziale 4 omówimy takie rodziny  $G$ -wielościanów, których suma Minkowskiego należy do tej rodziny. W następnych paragrafach zajmiemy się rodzinami wymagającymi zmodyfikowania działania, aby były one względem niego zamknięte. Pokażemy również, że problem ten nie dotyczy  $G$ -wielokątów, czyli  $G$ -wielościanów w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ .



Rysunek 3.1: Dwa wielościany i ich suma Minkowskiego

### 3.3. REPREZENTACJE WIEŁOKĄTÓW I $G$ -WIEŁOKĄTÓW

W tym paragrafie rozważamy dwuwymiarowe  $G$ -wielościany, jako podzbiory przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ . Takie  $G$ -wielościany nazywamy  $G$ -wielokątami, a ich ściany nazywamy bokami. V-reprezentacja i H-reprezentacja wielościanów są w literaturze obszernie opisane [11, 34]. Istnieją również pewne ich uogólnienia [6]. W przypadku wielokątów wprowadzamy również jednoznaczny reprezentację wielokąta  $A$  używającą jednego ustalonego punktu z  $A$  oraz długości jego boków. Tę reprezentację nazywać będziemy  $S$ -reprezentacją. Następnie sformułujemy te reprezentacje dla  $G$ -wielokątów, wprowadzimy wzory służące do zmiany jednej reprezentacji w inną oraz zapiszemy wnioski wynikające z tych przekształceń.

#### Reprezentacje wielokątów

Wyróżniamy trzy reprezentacje wielokątów:

(a) reprezentacja wierzchołkowa (V-reprezentacja, ang. *vertex representation*) - wielokąt  $A$  jest reprezentowany przez macierz współrzędnych jego wierzchołków

$$\begin{bmatrix} x(v_1) & y(v_1) \\ \vdots & \vdots \\ x(v_n) & y(v_n) \end{bmatrix}.$$

Macierz ta zawiera  $n$  wierszy  $v_1, \dots, v_n$ , gdzie  $v_i = (x(v_i), y(v_i))$  oraz  $n$  jest liczbą wierzchołków  $v_i$ , co jest równe liczbie boków. Wielokąt  $A$  zapisujemy jako  $A = \text{co}(v_1, \dots, v_n)$ .

(b) reprezentacja półprzestrzeni (H-reprezentacja, ang. *half-space representation*) - wielokąt  $A$  jest reprezentowany przez  $n \times 2$ -wymiarową macierz  $M$  oraz wektor  $b$

$$\left( \begin{bmatrix} x(m_1) & y(m_1) \\ \vdots & \vdots \\ x(m_n) & y(m_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right),$$



spełniająca nierówność macierzową  $Mx \leq b$ , gdzie każdy wiersz jest nierównością odpowiadającą pewnej półpłaszczyźnie zawierającej w swoim brzegu jeden z boków wielokąta. Wówczas  $n$  jest zarówno liczbą wierszy jak i boków wielokąta. Wielokąt  $A$  zapisujemy jako  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Mx \leq b\}$ .

(c) reprezentacja boków (S-reprezentacja, ang. *side representation*) - wielokąt  $A$  jest reprezentowany przez  $n \times 2$ -wymiarową macierz i jeden ustalony punkt

$$\left( \begin{bmatrix} l_1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ l_n & \alpha_n \end{bmatrix}, (x_0, y_0) \right),$$

gdzie  $i$ -ty wiersz macierzy zawiera długość  $l_i > 0$   $i$ -tego boku oraz kąt  $\alpha_i \in [0, 2\pi)$  pomiędzy wektorem  $[1, 0]$  i wektorem normalnym do  $i$ -tego boku określonym w taki sposób, że  $\alpha_i < \alpha_{i+1}$  oraz punkt  $(x_0, y_0)$  jest wierzchołkiem  $A$  takim, że  $x \leq x_0$  dla wszystkich  $(x, y) \in A$  i  $y \geq y_0$  dla wszystkich  $(x, y) \in A$ . Wielokąt  $A$  zapisujemy jako  $A = \{(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n c_i l_i (\cos(\alpha_i + \pi), \sin(\alpha_i + \pi)) \mid 0 \leq c_n \leq c_{n-1} \leq \dots \leq c_2 \leq c_1 \leq 1\}$ .

Rozważmy przykład tych reprezentacji opisujących kwadrat jednostkowy  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) V-reprezentacja } A &: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(b) H-reprezentacja } A &: \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \text{(c) S-reprezentacja } A &: \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} \\ 1 & \pi \\ 1 & \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}, (1, 0) \right) \end{aligned}$$

## Reprezentacje $G$ -wielokątów

Jeżeli rozważamy  $G$ -wielokąty, wówczas znamy sieć  $G$ . W takim razie powinniśmy używać zmodyfikowanych reprezentacji dla  $G$ -wielokątów. Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ , gdzie  $g_i = (x(g_i), y(g_i))$ , będzie siecią. Dla  $G$ -wielokąta  $A$  wyróżniamy trzy typy reprezentacji:

(a) reprezentacja wierzchołkowa ( $V_G$ -reprezentacja)  $G$ -wielokąta  $A$  jest macierzą

$$V^A := \begin{bmatrix} x(a_1) & y(a_1) \\ \vdots & \vdots \\ x(a_k) & y(a_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times 2}$$

ze współrzędnymi  $x(a_i), y(a_i)$  w każdym wierszu takimi, że odcinek  $[a_i, a_{i+1}]$  jest bokiem  $A(g_i)$  dla  $G$ -wielokąta  $A$ . Jeżeli bok  $A(g_i)$   $G$ -wielokąta jest punktem, wówczas  $a_i = a_{i+1}$  oraz wiersze o indeksach  $i$  oraz  $i + 1$  w macierzy  $A$  są równe.  $G$ -wielokąt  $A$  zapisujemy jako  $A = \text{co}(a_1, \dots, a_k)$ .

(b) reprezentacja półprzestrzeni ( $H_G$ -reprezentacja)  $G$ -wielokąta  $A$  jest wektorem

$$h^A := \begin{bmatrix} h_1^A \\ \vdots \\ h_k^A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

$G$ -wielokąt  $A$  zapisujemy jako  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle g_i, x_i \rangle \leq h_i^A, i = 1, \dots, k\}$ .

(c) reprezentacja boków ( $S_G$ -reprezentacja)  $G$ -wielokąta  $A$  jest wektorem i punktem

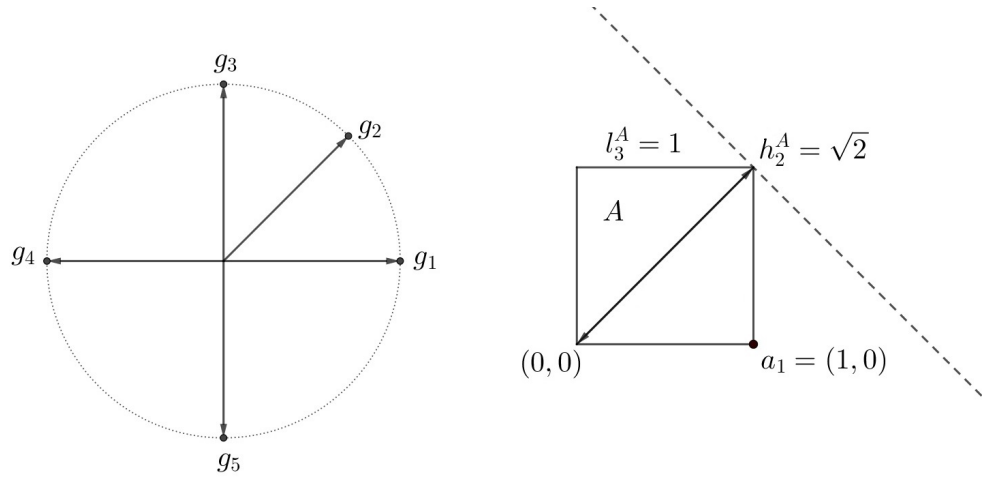
$$(l^A, l_0^A) := \left( \begin{bmatrix} l_1^A \\ \vdots \\ l_k^A \end{bmatrix}, (x(l_0^A), y(l_0^A)) \right) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2,$$

gdzie  $l_i^A$  jest długością boku  $A(g_i)$   $G$ -wielokąta (wartość 0, jeżeli jest to punkt) i  $l_0^A = (x(l_0^A), y(l_0^A))$  jest ustalonym punktem takim, że  $x \leq x(l_0^A)$  dla wszystkich  $(x, y) \in A$  i  $y \geq y(l_0^A)$  dla wszystkich  $(x, y) \in A$ .  $G$ -wielokąt zapisujemy jako  $A = \{(x(l_0^A), y(l_0^A)) + \sum_{i=1}^k c_i l_i (\cos(\alpha_i + \pi), \sin(\alpha_i + \pi)) \mid 0 \leq c_n \leq c_{n-1} \leq \dots \leq c_2 \leq c_1 \leq 1\}$ , gdzie  $\alpha_i$  jest wartością kąta pomiędzy wektorem  $[(0, 0), (1, 0)]$  oraz  $g_i$ .

Zauważmy, że nie wszystkie wektory  $h, l$  i nie każda macierz  $V$  reprezentuje wypukły  $G$ -wielokąt. W dalszej części tej rozprawy, każde sformułowanie “reprezentacja  $G$ -wielokąta” odnosi się do powyższych reprezentacji. Ze względu na częstotliwość występowania wektorów kolumnowych  $h^A$ , w celu zwiększenia czytelności, będziemy również zapisywać je w postaci wierszowej używając wówczas notacji  $h^A = (h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A)$ .

Rozważmy przykład powyższych reprezentacji dla kwadratu jednostkowego  $A$  jako  $G$ -wielokąta przy czym sieć  $G = \{(1, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$  posiada jeden dodatkowy  $G$ -wektor (Rysunek 3.2). Dzięki temu przykład wskazuje jak zachowują się w takim przypadku reprezentacje  $G$ -wielokąta.

- (a)  $V_G$ -reprezentacja  $A$  : 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- (b)  $H_G$ -reprezentacja  $A$  : 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- (c)  $S_G$ -reprezentacja  $A$  : 
$$\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, (1, 0) \right)$$



Rysunek 3.2: Sieć  $G$  i kwadrat  $A$  jako  $G$ -wielokąt

Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ , gdzie  $g_i = (x(g_i), y(g_i))$ , będzie siecią. Dla  $H_G$ -reprezentacji  $G$ -wielokąta  $A$  definiujemy funkcje wyznaczników

$$W_x^A(i, j) = \begin{vmatrix} h_i^A & y(g_i) \\ h_j^A & y(g_j) \end{vmatrix}, \quad W_y^A(i, j) = \begin{vmatrix} x(g_i) & h_i^A \\ x(g_j) & h_j^A \end{vmatrix}, \quad W^A(i, j, k) = \begin{vmatrix} x(g_i) & y(g_i) & h_i^A \\ x(g_j) & y(g_j) & h_j^A \\ x(g_k) & y(g_k) & h_k^A \end{vmatrix}$$

i dwie funkcje niezależne od  $H_G$ -reprezentacji

$$W(i, j) = \begin{vmatrix} x(g_i) & y(g_i) \\ x(g_j) & y(g_j) \end{vmatrix}, \quad W(i, j, k) = \begin{vmatrix} x(g_i) & y(g_i) & 1 \\ x(g_j) & y(g_j) & 1 \\ x(g_k) & y(g_k) & 1 \end{vmatrix}.$$

Funkcja  $W(i, j)$  może być zapisana jako sinus kąta pomiędzy wektorami  $g_i$  i  $g_j$ . Wówczas mamy  $W(i, j) = 0$  dla  $g_i = -g_j$  oraz  $W(i, i+1) \neq 0$  dla dowolnych  $g_i$  oraz  $g_{i+1}$  z sieci  $G$ .

## Przekształcenia $G$ -reprezentacji

Poniżej przedstawiono metody przekształcenia podanej reprezentacji  $G$ -wielokąta na pozostałe dwie reprezentacje  $G$ -wielokąta. Korzystając z tych metod możemy przeformułować każde twierdzenie dotyczące  $G$ -wielokątów zapisanych w jednej z tych reprezentacji na język innej z tych reprezentacji. Nie będziemy jednak tego wykonywali dla wszystkich twierdzeń.

1. Niech dana będzie  $V_G$ -reprezentacja  $G$ -wielokąta  $A$ : 
$$\begin{bmatrix} x(a_1) & y(a_1) \\ \vdots & \vdots \\ x(a_k) & y(a_k) \end{bmatrix}.$$

( $V_G \rightarrow H_G$ ) Wierzchołki  $G$ -wielokąta leżą na bokach  $G$ -wielokąta. Oznacza to, że

$$\begin{bmatrix} h_1^A \\ \vdots \\ h_k^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle g_k, a_k \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(g_1)x(a_1) + y(g_1)y(a_1) \\ \vdots \\ x(g_k)x(a_k) + y(g_k)y(a_k) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

( $V_G \rightarrow S_G$ ) Długość boku  $A(g_i)$   $G$ -wielokąta jest długością odcinka  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Zatem

$$\begin{bmatrix} l_1^A \\ l_2^A \\ \vdots \\ l_k^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|a_2 - a_1\|_2 \\ \|a_3 - a_2\|_2 \\ \vdots \\ \|a_1 - a_k\|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x(a_2) - x(a_1))^2 + (y(a_2) - y(a_1))^2} \\ \sqrt{(x(a_3) - x(a_2))^2 + (y(a_3) - y(a_2))^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x(a_1) - x(a_k))^2 + (y(a_1) - y(a_k))^2} \end{bmatrix} \quad \text{oraz } l_0^A = a_1. \quad (3.2)$$

2. Niech dana będzie  $H_G$ -reprezentacja  $G$ -wielokąta  $A$ : 
$$\begin{bmatrix} h_1^A \\ \vdots \\ h_k^A \end{bmatrix}.$$

( $H_G \rightarrow V_G$ ) Używając funkcji wyznaczników widzimy, że wierzchołki  $G$ -wielokąta

możemy zapisać jako

$$\begin{bmatrix} x(a_1) & y(a_1) \\ x(a_2) & y(a_2) \\ \vdots & \vdots \\ x(a_k) & y(a_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_x^A(k, 1)}{W(k, 1)} & \frac{W_y^A(k, 1)}{W(k, 1)} \\ \frac{W_x^A(1, 2)}{W(1, 2)} & \frac{W_y^A(1, 2)}{W(1, 2)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{W_x^A(k-1, k)}{W(k-1, k)} & \frac{W_y^A(k-1, k)}{W(k-1, k)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

( $H_G \rightarrow S_G$ ) Używając funkcji wyznaczników widzimy, że długość boku  $A(g_i)$   $G$ -wielokąta możemy zapisać jako

$$\begin{bmatrix} l_1^A \\ l_2^A \\ \vdots \\ l_k^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W^A(k, 1, 2)}{W(k, 1)W(1, 2)} \\ \frac{W^A(1, 2, 3)}{W(1, 2)W(2, 3)} \\ \vdots \\ \frac{W^A(k-1, k, 1)}{W(k-1, k)W(k, 1)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

oraz

$$l_0^A = \left( \frac{W_x^A(k, 1)}{W(k, 1)}, \frac{W_y^A(k, 1)}{W(k, 1)} \right) \quad (3.5)$$

3. Niech dana będzie  $S_G$ -reprezentacja  $G$ -wielokąta  $A : \left( \begin{bmatrix} l_1^A \\ \vdots \\ l_k^A \end{bmatrix}, (x(l_0^A), y(l_0^A)) \right)$

( $S_G \rightarrow V_G$ ) Współrzędne kolejnych wierzchołków  $G$ -wielokątów możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (x(a_1), y(a_1)) &= (x(l_0^A), y(l_0^A)) \\ (x(a_2), y(a_2)) &= (x(a_1), y(a_1)) + (-y(g_1) \cdot l_1^A, x(g_1) \cdot l_1^A) \\ &= (x(l_0^A), y(l_0^A)) + (-y(g_1) \cdot l_1^A, x(g_1) \cdot l_1^A) \\ (x(a_3), y(a_3)) &= (x(a_2), y(a_2)) + (-y(g_2) \cdot l_2^A, x(g_2) \cdot l_2^A) \\ &= (x(l_0^A), y(l_0^A)) + (-y(g_1) \cdot l_1^A, x(g_1) \cdot l_1^A) + (-y(g_2) \cdot l_2^A, x(g_2) \cdot l_2^A) \\ &\vdots \\ (x(a_i), y(a_i)) &= (x(l_0^A), y(l_0^A)) + \sum_{j=1}^{i-1} (-y(g_j) \cdot l_j^A, x(g_j) \cdot l_j^A) \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{bmatrix} x(a_1) & y(a_1) \\ x(a_2) & y(a_2) \\ \vdots & \vdots \\ x(a_k) & y(a_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(l_0^A) & y(l_0^A) \\ x(l_0^A) - y(g_1) \cdot l_1^A & y(l_0^A) + x(g_1) \cdot l_1^A \\ \vdots & \vdots \\ x(l_0^A) - \sum_{j=1}^{k-1} y(g_j) \cdot l_j^A & y(l_0^A) + \sum_{j=1}^{k-1} x(g_j) \cdot l_j^A \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

( $S_G \rightarrow H_G$ ) Skoro  $l_0^A$  jest przekrojem boków  $A(g_k)$  i  $A(g_1)$ , łatwo zauważyć, że  $h_k = \langle g_k, l_0^A \rangle$  oraz  $h_1 = \langle g_1, l_0^A \rangle$ . Dla pozostałych indeksów możemy zastosować następujący wzór

$$h_i = \frac{W(k, i)}{W(k, 1)} \langle g_1, l_0^A \rangle - \frac{W(1, i)}{W(k, 1)} \langle g_k, l_0^A \rangle + \sum_{j=1}^{i-1} W(j, i) l_j \quad (3.7)$$

## Wnioski

Opierając się na powyższych przekształceniach, możemy sformułować następujące wnioski dotyczące  $G$ -wielokątów.

**Wniosek 3.3.1.** *Bok  $G$ -wielokąta  $A$  w kierunku  $g_i$  jest zredukowany do punktu, tj. ma długość równą zero, wtedy i tylko wtedy, gdy  $W^A(i-1, i, i+1) = 0$ .*

*Dowód.* Wiemy, że  $l_i^A = \frac{W^A(i-1, i, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)}$  i  $W(i, j) \neq 0$  dla  $g_i \neq \pm g_j$ . Wówczas  $l_i^A = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $W^A(i-1, i, i+1) = 0$ .  $\square$

**Wniosek 3.3.2.** *Niech  $A$  będzie  $G$ -wielokątem i niech  $A'$  będzie również  $G$ -wielokątem takim, że  $h_i^{A'} = h_i^A - c$  dla pewnego  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $c \geq 0$  i  $h_j^{A'} = h_j^A$ ,  $j \neq i$ . Wówczas zachodzi*

$$l_{i-1}^{A'} = l_{i-1}^A - \frac{c}{W(i-1, i)}, l_{i+1}^{A'} = l_{i+1}^A - \frac{c}{W(i, i+1)}, l_i^{A'} = l_i^A + \frac{cW(i-1, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)}.$$

*Dowód.* Możemy opisać  $W^A(i-1, i, i+1)$  jako  $h_{i-1}^A W(i, i+1) - h_i^A W(i-1, i+1) + h_{i+1}^A W(i-1, i)$ . Wówczas z przekształcenia (3.4) mamy

$$\begin{aligned} l_i^A &= \frac{h_{i-1}^A}{W(i-1, i)} - \frac{h_i^A W(i-1, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)} + \frac{h_{i+1}^A}{W(i, i+1)}, \\ l_{i-1}^A &= \frac{h_{i-2}^A}{W(i-2, i-1)} - \frac{h_{i-1}^A W(i-2, i)}{W(i-2, i-1)W(i-1, i)} + \frac{h_i^A}{W(i-1, i)}, \\ l_{i+1}^A &= \frac{h_i^A}{W(i, i+1)} - \frac{h_{i+1}^A W(i, i+2)}{W(i, i+1)W(i+1, i+2)} + \frac{h_{i+2}^A}{W(i+1, i+2)}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że zmiana  $h_i^{A'} = h_i^A - c$  powoduje oczekiwane zmiany w długościach boków.  $\square$

### 3.4. PÓŁGRUPA $G$ -WIEŁOŚCIANÓW

W poniższym paragrafie definiujemy  $G$ -sumę Minkowskiego, a także kilka własności i przykładów związanych z tą modyfikacją. Następnie opiszemy strukturę półgrupy wprowadzoną w rodzinie  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  przez to działanie.

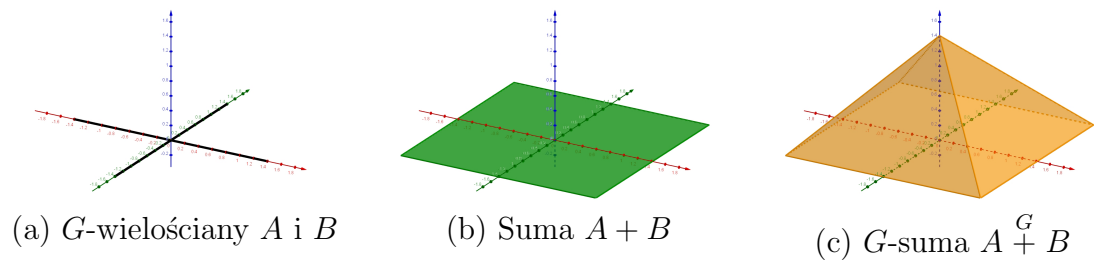
**Definicja 3.4.1.** Niech  $A, B$  będą  $G$ -wielościanami. Sumę

$$A \overset{G}{+} B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, g_i \rangle \leq h_i^A + h_i^B\},$$

gdzie  $h^A, h^B$  są H-reprezentacjami  $G$ -wielościanów  $A, B$  nazywamy  $G$ -sumą Minkowskiego.

Zmodyfikowana suma Minkowskiego dwóch  $G$ -wielościanów  $A \overset{G}{+} B = \text{co}_G(A + B)$  jest również  $G$ -wielościanem jako  $G$ -powłoka wypukła zwykłej sumy Minkowskiego. Zachodzi również  $h^{A \overset{G}{+} B} = h^A + h^B$ . Dla zbiorów  $A, B \subset \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ , gdy  $n = 2$  zachodzi  $A \overset{G}{+} B = A + B$ . Nie jest to prawdą dla  $n = 3$ , co obrazuje Przykład 3.4.2.

**Przykład 3.4.2.** Niech zbiór  $G = \{(0, 0, -1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\} \subset S^2$  będzie siecią. Niech H $_G$ -reprezentacje  $G$ -wielościanów  $A$  i  $B$  będą następujące  $h^A = (0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $h^B = (0, 1, 0, 1, 0)$ . Wówczas zarówno  $A$ , jak i  $B$ , są odcinkami. Wiemy, że suma Minkowskiego  $A + B$  takich odcinków jest kwadratem. Jednak ten kwadrat nie jest  $G$ -wielościanem ze względu na brak wektora  $(0, 0, 1)$  w sieci  $G$ . Zmodyfikowana suma  $A \overset{G}{+} B$  będąca  $G$ -powłoką wypukłą tego kwadratu jest piramidą, ponieważ  $h^{A \overset{G}{+} B} = h^A + h^B = (0, 0, 1, 0, 1) + (0, 1, 0, 1, 0) = (0, 1, 1, 1, 1)$ . Wszystkie cztery zbiory widzimy na Rysunku 3.3.

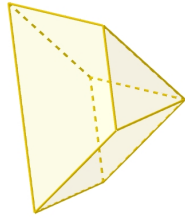


Rysunek 3.3: Różnica między sumą i  $G$ -sumą Minkowskiego

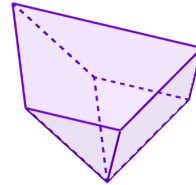
Jeżeli suma Minkowskiego dwóch  $G$ -wielościanów jest  $G$ -wielościanem, wówczas  $G$ -suma pokrywa się z nią, jako najmniejszy  $G$ -wielościan zawierający sumę Minkowskiego. Poniższy przykład ilustruje taką sytuację.

**Przykład 3.4.3.** Niech  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$  i niech  $G = \{(t, t, t), (-t, t, t), (t, -t, t), (t, t, -t), (-t, -t, t), (-t, t, -t), (t, -t, -t), (-t, -t, -t)\} \subset S^2$ . Wówczas dla  $G$ -wielościanów

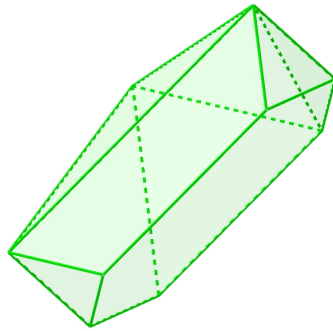
$A$  i  $B$  o  $H_G$  reprezentacjach  $h^A = (-1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2)$ ,  $h^B = (-1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 2)$  sumy  $A+B$  oraz  $A \overset{G}{+} B$  pokrywają się.  $H_G$ -reprezentacja tego  $G$ -wielościanu wynosi  $h^{A+B} = h^A + h^B = (-2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 4)$ . Te trzy zbiory widzimy na Rysunku 3.4.



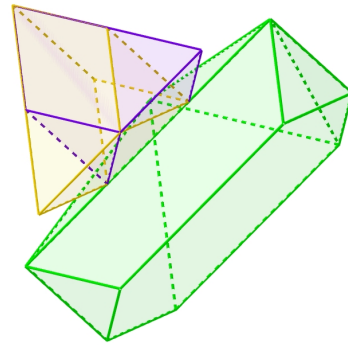
(a)  $G$ -wielościan  $A$



(b)  $G$ -wielościan  $B$



(c)  $G$ -wielościan  $A + B$



(d) Wszystkie  $G$ -wielościany

Rysunek 3.4: Dwa  $G$ -wielościany i suma  $A + B$  będąca  $G$ -wielościanem

**Stwierdzenie 3.4.4.** *Mnożenie przez skalar oraz  $G$ -suma Minkowskiego mają następujące własności:*

(i)  $(A \overset{G}{+} B) \overset{G}{+} C = A \overset{G}{+} (B \overset{G}{+} C),$

(ii)  $A \overset{G}{+} B = B \overset{G}{+} A,$

(iii)  $A \overset{G}{+} \{0\} = A,$

(iv)  $1A = A,$

(v)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$

(vi)  $\alpha(A \overset{G}{+} B) = \alpha A \overset{G}{+} \alpha B,$



$$(vii) (\alpha + \beta)A = \alpha A \overset{G}{+} \beta A$$

dla dowolnych  $A, B, C \in \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  i  $\alpha, \beta \geq 0$ .

*Dowód.* Niech  $h^A, h^B, h^C$  będą  $H_G$ -reprezentacjami  $G$ -wielościanów  $A, B, C$  i  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Korzystając z tego, że  $A \overset{G}{+} B = C \iff h^A + h^B = h^C$  oraz  $h^{\alpha A} = \alpha h^A$  możemy przeformułować własności z twierdzenia na działania na  $H_G$ -reprezentacjach, które spełnia wszystkie te własności jako dodawanie i mnożenie przez skalar w  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

**Wniosek 3.4.5.** Rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  z działaniem  $\overset{G}{+}$  i elementem neutralnym  $\{0\}$  jest półgrupą abelową. Rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  z dodawaniem  $\overset{G}{+}$  i mnożeniem przez nieujemny skalar jest abstrakcyjnym stożkiem wypukłym.

**Twierdzenie 3.4.6.** Półgrupa  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$  spełnia porządkowe prawo skreśleń względem działania  $\overset{G}{+}$ .

*Dowód.* Niech  $h^A, h^B$  i  $h^C$  będą  $H_G$ -reprezentacjami  $G$ -wielościanów  $A, B$  i  $C$ . Porządkowe prawo skreśleń w tym wypadku zapisujemy jako

$$A \overset{G}{+} C \subset B \overset{G}{+} C \implies A \subset B.$$

Możemy jednak zapisać to równoważnie

$$h_i^A + h_i^C \leq h_i^B + h_i^C \implies h_i^A \leq h_i^B.$$

Działaniem między  $H_G$ -reprezentacjami jest dodawanie elementów  $\mathbb{R}^k$ , zatem spełnia ono porządkowe prawo skreśleń.  $\square$

**Stwierdzenie 3.4.7.** Niech  $A, B$  będą  $G$ -wielokątami. Wówczas  $A \overset{G}{+} B = A + B$ .

*Dowód.* Skoro  $(A + B)(g_i) = A(g_i) + B(g_i)$ , wiemy, że zbiór  $A + B$  spełnia  $l_i^{A+B} = l_i^A + l_i^B$ . Z definicji zbiór  $A \overset{G}{+} B$  spełnia  $h_i^{A+B} = h_i^A + h_i^B$ .

Z przekształcenia (3.4) mamy

$$l_i^A = \frac{W^A(i-1, i, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)} \text{ oraz } l_i^B = \frac{W^B(i-1, i, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)},$$

więc

$$l_i^A + l_i^B = \frac{W^A(i-1, i, i+1) + W^B(i-1, i, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)} = \frac{W^{A+B}(i-1, i, i+1)}{W(i-1, i)W(i, i+1)} = l_i^{A+B}.$$

$\square$

Na podstawie powyższego stwierdzenia przestrzeń dwuwymiarowa nie wymaga wprowadzania zmodyfikowanej sumy Minkowskiego. Niemniej, twierdzenia wypracowane dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  uogólnione zostaną w dalszej części rozprawy na przestrzeń  $n$ -wymiarową.

### 3.5. RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI PAR $G$ -WIEŁOŚCIANÓW

Poniższy paragraf poświęcony jest wprowadzeniu w przestrzeni par  $G$ -wielościanów relacji równoważności w taki sposób, aby możliwe było rozważanie częściowego porządku wśród klas abstrakcji tej relacji.

**Definicja 3.5.1.** Niech  $G$  będzie siecią i niech  $(A, B), (C, D) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^n)$  będą dwiema parami  $G$ -wielościanów. Definiujemy relację

$$(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D) : \iff A \stackrel{G}{+} D = B \stackrel{G}{+} C.$$

**Stwierdzenie 3.5.2.** Relacja  $(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$  jest relacją równoważności.

*Dowód.* Aby udowodnić, że relacja  $\stackrel{G}{\sim}$  jest relacją równoważności musimy pokazać, że jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

1. Zwrotność.

$A \stackrel{G}{+} B = B \stackrel{G}{+} A$ , ponieważ  $G$ -suma Minkowskiego jest przemienna.

2. Symetryczność.

Jeżeli  $A \stackrel{G}{+} D = B \stackrel{G}{+} C$ , to również  $C \stackrel{G}{+} B = D \stackrel{G}{+} A$ , ponieważ  $G$ -suma Minkowskiego jest przemienna.

3. Przechodniość.

Jeżeli  $A \stackrel{G}{+} D = B \stackrel{G}{+} C$  oraz  $C \stackrel{G}{+} F = D \stackrel{G}{+} E$ , to dodając do siebie te równania stronami jako  $G$ -wielościany uzyskujemy  $(A \stackrel{G}{+} D) \stackrel{G}{+} (C \stackrel{G}{+} F) = (B \stackrel{G}{+} C) \stackrel{G}{+} (D \stackrel{G}{+} E)$ . Dzięki łączności i przemienności  $G$ -sumy Minkowskiego możemy zapisać to następująco  $(A \stackrel{G}{+} F) \stackrel{G}{+} (C \stackrel{G}{+} D) = (B \stackrel{G}{+} E) \stackrel{G}{+} (C \stackrel{G}{+} D)$ . Korzystając z porządkowego prawa skreśleń uzyskujemy  $A \stackrel{G}{+} F = B \stackrel{G}{+} E$ .

□

**Definicja 3.5.3.** Klasy abstrakcji  $[(A, B)]_G := \{(C, D) \mid A \stackrel{G}{+} D = B \stackrel{G}{+} C\}$  nazywamy  $G$ -wielościanami wirtualnymi.

**Definicja 3.5.4.** Niech  $(A, B), (C, D)$  będą parami  $G$ -wielościanów. Dwuargumentową relację  $\stackrel{G}{\prec}$  na  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^n)$  definiujemy następująco

$$(A, B) \stackrel{G}{\prec} (C, D) : \iff A \subset C, B \subset D, (A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$$

Zauważmy, że dowolne dwie pary, które nie należą do jednego  $G$ -wielościanu wirtualnego nie są ze sobą w relacji  $\stackrel{G}{\prec}$ , co pozwala nam określić tę relację wewnątrz  $G$ -wielościanu wirtualnego.

**Stwierdzenie 3.5.5.** *Zbiór  $[(A, B)]_{\mathcal{G}}$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym z częściowym porządkiem  $\overset{G}{\prec}$ .*

*Dowód.* Aby udowodnić, że relacja  $\prec$  jest częściowym porządkiem musimy pokazać, że jest relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną. Wszystkie pary wewnątrz jednej klasy abstrakcji relacji  $\overset{G}{\sim}$  spełniają  $(A, B) \overset{G}{\sim} (C, D)$ . Pozostaje zatem udowodnić te własności dla warunku  $A \subset C, B \subset D$ .

1. Zwrotność.

Oczywiście  $A \subset A, B \subset B$ .

2. Słaba antysymetryczność.

Jeżeli  $A \subset C$  i jednocześnie  $C \subset A$ , wówczas  $A = C$ . Analogicznie zachodzi  $B \subset D$  i  $D \subset B$ , stąd  $B = D$ . Ostatecznie zatem  $(A, B) = (C, D)$ .

3. Przechodniość.

Jeżeli  $A \subset C$  i  $C \subset E$ , to również  $A \subset E$ . Podobnie z  $B \subset D$  i  $D \subset F$  wynika  $B \subset F$ .

□

Poniższe stwierdzenie wskazuje warunki, które muszą zostać spełnione, aby pary równoważne były również  $G$ -równoważne.

**Twierdzenie 3.5.6.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^{n-1}$  będzie siecią i niech  $(A, B)$ ,  $(C, D)$ ,  $(A + D, B + C)$  będą parami  $G$ -wielościaków. Wówczas zachodzi*

$$(A, B) \sim (C, D) \iff (A, B) \overset{G}{\sim} (C, D).$$

*Dowód.* Relacja  $(A, B) \sim (C, D)$  oznacza, że  $A + D = B + C$ . Jednak zarówno  $A + D$ , jak i  $B + C$  są również  $G$ -wielościakami. Mamy zatem  $\text{co}_G(A + D) = A + D = B + C = \text{co}_G(B + C)$ , czyli  $(A, B) \overset{G}{\sim} (C, D)$ . □

Naszym celem jest sformułowanie kryterium minimalności elementu  $(C, D)$  w klasie równoważności  $[(A, B)]_{\mathcal{G}}$ , tj. takiego warunku koniecznego i dostatecznego, aby dla każdej pary  $G$ -wielościaków  $(C', D')$  warunek  $(C', D') \overset{G}{\prec} (C, D)$  implikował  $C' = C$  oraz  $D' = D$ . Dla dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej wirtualny  $G$ -wielościak związany jest z wielościakiem wirtualnym w następujący sposób  $[(A, B)]_{\mathcal{G}} = [(A, B)]_{\sim} \cap \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Wynika to ze Stwierdzenia 3.4.7 i Twierdzenia 3.5.6.

### 3.6. METODY REDUKCJI I KRYTERIA $G$ -MINIMALNOŚCI PAR $G$ -WIEŁOKĄTÓW

W tym paragrafie omówimy potrzebę sformułowania terminu  $G$ -minimalności, istotnie różnego od minimalności  $G$ -wielokątów. Następnie przedstawimy działania na reprezentacjach  $G$ -wielokątów będące metodami redukcji par  $G$ -wielokątów. Paragraf zakończymy sformułowaniem kryterium minimalności w języku wszystkich trzech reprezentacji  $G$ -wielokątów.

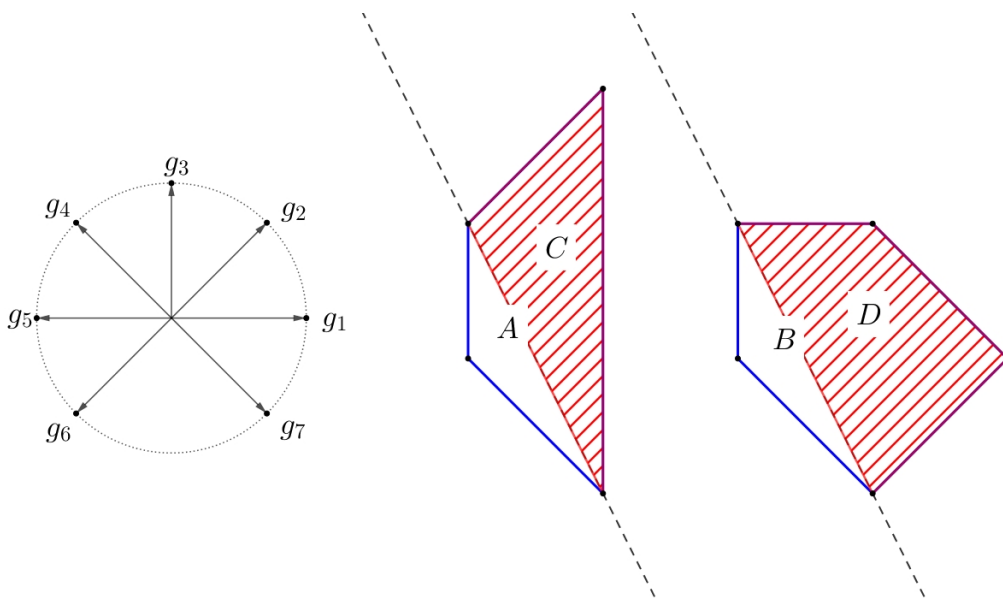
#### $G$ -minimalność a minimalność

Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  będzie parą dwóch wielokątów. Wiemy, że para jest minimalna, tj. nie istnieje para  $(C, D)$  taka, że  $C \subsetneq A$  i  $D \subsetneq B$  w  $[(A, B)]_{\sim}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy wielokąty nie mają więcej niż jednej pary współrównoległych boków, tj. nie istnieją takie dwa różne kierunki  $x, y$ , dla których różne ściany podpierające  $A(x), B(x)$  oraz  $A(y), B(y)$  są jednocześnie bokami. Jednak dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  to stwierdzenie nie jest prawdziwe. Poniższy przykład opisuje parę  $G$ -wielokątów, która jest kontrprzykładem dla tego stwierdzenia.

**Przykład 3.6.1.** Niech  $A$  i  $B$  będą wielokątami z Rysunku 3.5 i  $G = G(A) \cup G(B)$ . W  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  możemy zredukować tę parę przez cięcie hiperpłaszczyzną  $l$ , tj. linią prostą  $l$ . W ten sposób otrzymujemy parę minimalną  $(C, D)$  z Rysunku 3.5. Lecz w tej sytuacji para zbiorów  $(C, D)$  nie należy do  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Łatwo zauważyć, że jedynymi hiperpłaszczyznami, którymi można dokonać redukcji, aby otrzymana para pozostała parą  $G$ -wielokątów, są hiperpłaszczyzny, których wektory normalne należą do sieci  $G$ . W istocie, para  $(\text{co}_G C, \text{co}_G D) = (A, B)$  jest minimalna w klasie  $[(A, B)]_G$ , podczas gdy para  $(C, D)$  jest minimalna w klasie  $[(A, B)]_{\sim}$ . Aby rozróżnić te dwa rodzaje minimalności będziemy mówić o minimalności dla  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  oraz o  $G$ -minimalności dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Kryteria minimalności dla  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  nie działają dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  tak długo jak para minimalna nie należy do  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Oczywiście, jeżeli para  $(C, D)$  jest parą minimalną w  $[(A, B)]_{\sim}$  oraz  $C, D$  są  $G$ -wielokątami, wówczas ze Stwierdzenia 3.4.7 mamy, że  $A \overset{G}{+} D = A + D = B + C = B \overset{G}{+} C$  oraz  $(C, D)$  jest parą  $G$ -minimalną.

#### Metody redukcji $G$ -wielokątów

Przed sformułowaniem kryteriów  $G$ -minimalności dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  udowodnimy kilka lematów.



Rysunek 3.5: Para  $(A, B)$  i para minimalna  $(C, D)$  z Przykładu 3.6.1

**Lemat 3.6.2.** *Jeżeli punkty  $(x_i, y_i)$  oraz  $(x_j, y_j)$  leżą na okręgu jednostkowym, a  $\alpha_i$  oraz  $\alpha_j$  są kątami między tymi punktami, a punktem  $(1, 0)$ , to zachodzi*

$$\sin(\alpha_i - \alpha_j) = x_j y_i - x_i y_j.$$

*Dowód.* Zauważmy, że  $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ , zatem możemy założyć, że  $\alpha_i \geq \alpha_j \geq \alpha_i - \pi$ . Korzystając ze współrzędnych biegunowych i wiedzy, że punkty  $(x_i, y_i)$  oraz  $(x_j, y_j)$  leżą na okręgu jednostkowym wiemy, że  $x_i = \cos(\alpha_i)$ ,  $y_i = \sin(\alpha_i)$  oraz  $x_j = \cos(\alpha_j)$ ,  $y_j = \sin(\alpha_j)$ . Korzystając ze wzoru  $\sin(\alpha_i - \alpha_j) = \sin(\alpha_i) \cos(\alpha_j) - \sin(\alpha_j) \cos(\alpha_i)$ . Podstawiając uzyskujemy  $\sin(\alpha_i - \alpha_j) = y_i x_j - y_j x_i$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.6.3.** *Dla wektora  $h$  istnieje zbiór  $A \in \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^2)$  taki, że  $h = h^A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $i = 1, \dots, k$  zachodzi nierówność  $\sin(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})h_i \leq \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)h_{i-1} + \sin(\alpha_i - \alpha_{i-1})h_{i+1}$*

*Dowód.* Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  będzie siecią, gdzie  $g_i = (x_i, y_i)$ . Zauważmy, że prosta podpierająca zbiór  $A$  w kierunku  $g_{i-1}$ , jako prosta przechodząca przez punkt  $(h_{i-1}x_{i-1}, h_{i-1}y_{i-1})$  i prostopadła do prostej  $y = \frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}x$ , zapisuje się równaniem  $y = \frac{-x_{i-1}}{y_{i-1}}x + \frac{h_{i-1}}{y_{i-1}}$ . Odpowiednio dla kierunku  $g_{i+1}$  mamy prostą  $y = \frac{-x_{i+1}}{y_{i+1}}x + \frac{h_{i+1}}{y_{i+1}}$ . Wiemy również, że największą wartością jaką może przyjąć  $h_i$  jest wartość funkcji podparcia zbioru  $A_{h'}$  w kierunku  $g_i$ , gdzie  $h'$  uzyskujemy poprzez usunięcie  $i$ -tej współrzędnej w wektorze  $h$ . Dla sieci takiej, że poprzez usunięcie  $i$ -tego  $G$ -wektora uzyskujemy zbiór nie będący siecią wartość  $h_i$  jest dowolnie duża, gdyż  $g_i$  jest to jedyny wektor w pewnym półokręgu. Załóżmy zatem, że zbiór  $A_{h'}$  jest wielokątem, zatem na przecięciu wyżej wymienionych prostych znajduje się wierzchołek tego

wielokąta, który wydobywa wartość funkcji podparcia. Współrzędne tego punktu to

$$\left( \frac{h_{i+1}y_{i-1} - h_{i-1}y_{i+1}}{x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}}, \frac{x_{i+1}h_{i-1} - x_{i-1}h_{i+1}}{x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}} \right).$$

Zatem rozpatrując iloczyn skalarny uzyskujemy

$$h_i \leq x_i \frac{h_{i+1}y_{i-1} - h_{i-1}y_{i+1}}{x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}} + y_i \frac{x_{i+1}h_{i-1} - x_{i-1}h_{i+1}}{x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}}.$$

Po wymnożeniu i przegrupowaniu daje nam to

$$h_i \leq \frac{h_{i+1}(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) + h_{i-1}(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})}{x_{i+1} y_{i-1} - x_{i-1} y_{i+1}}.$$

Mianownik mógłby być zerem tylko wtedy, gdyby  $g_{i-1} = \pm g_{i+1}$ , co oznaczałoby, że  $h_i$  nie ma ograniczenia górnego. Możemy zatem pomnożyć obustronnie przez mianownik, aby uzyskać

$$(x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1})h_i \leq h_{i+1}(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) + h_{i-1}(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}).$$

Korzystając z Lematu 3.6.2 możemy zapisać to w postaci

$$\sin(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})h_i \leq \sin(\alpha_i - \alpha_{i-1})h_{i+1} + \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)h_{i-1}.$$

□

**Lemat 3.6.4.** Niech  $h \in \mathbb{R}^k$  i  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^1$ . Następujące warunki są równoważne:

- (a)  $h = h^A$  dla pewnego zbioru  $A \in \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^2)$ ,
- (b)  $h_{i-1}W(i, i+1) - W(i-1, i+1)h_i + h_{i+1}W(i-1, i) \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, k$ .

*Dowód.* (a)  $\implies$  (b) Niech  $G$  będzie siecią i  $A$  będzie  $G$ -wielokątem. Wektory  $g_i$  z sieci  $G$  mają długość równą jeden. To implikuje, że  $x(g_i) = \cos(\alpha_i)$  i  $y(g_i) = \sin(\alpha_i)$ , gdzie  $\alpha_i$  jest kątem wektora  $g_i$ . Korzystając z Lematu 3.6.3 możemy zobaczyć, że

$$h_i^A \leq \frac{h_{i-1}^A W(i, i+1) + h_{i+1}^A W(i-1, i)}{W(i-1, i+1)},$$

gdzie  $\alpha_{i-1} \neq \alpha_{i+1} \pm \pi$ . Po uporządkowaniu mamy  $0 \leq W^A(i-1, i, i+1)$ .

(b)  $\implies$  (a) Z Wniosku 3.3.1 mamy  $h_{i-1}W(i, i+1) - W(i-1, i+1)h_i + h_{i+1}W(i-1, i) = 0$ , z czego wynika, że  $l_i = 0$ . Skoro  $W(i-1, i), W(i, i+1) > 0$ , dodatnia wartość  $h_{i-1}W(i, i+1) - W(i-1, i+1)h_i + h_{i+1}W(i-1, i) \geq 0$  implikuje, że  $l_i > 0$ . Zatem wartość  $h$  jest właściwa i jest to  $H_G$ -reprezentacja jakiegoś  $G$ -wielokąta  $A$ . □

**Wniosek 3.6.5.** Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^1$  będzie siecią i niech  $h^A$  będzie  $H_G$ -reprezentacją  $G$ -wielokąta  $A$ . Następujące warunki są równoważne:

- (a)  $M_G h^A \geq 0$ ,
- (b)  $W^A(i-1, i, i+1) \geq 0$  for  $i = 1, \dots, k$ .

Z powyższego wniosku wiemy, że dopóki  $W^A(i-1, i, i+1) = h_{i-1}^A W(i, i+1) - h_i^A W(i-1, i+1) + h_{i+1}^A W(i-1, i)$ , każdy wiersz w macierzy  $M_G$  jest opisany jako afiniczna kombinacja wierszy zawierających współczynniki  $\frac{W(i, i+1)}{W(i-1, i, i+1)}, \frac{W(i-1, i+1)}{W(i-1, i, i+1)}$  oraz  $\frac{W(i-1, i)}{W(i-1, i, i+1)}$  w kolumnach o indeksach  $i-1, i$  oraz  $i+1$ .

Powyższy wniosek jest prostą metodą aby sprawdzić czy wektor  $h$  jest właściwy (tj. istnieje  $G$ -wielokąt  $A$  taki że  $h = h^A$ ). Określimy teraz jakie działania mogą być wykonywane na  $H_G$ -reprezentacjach, aby uzyskany wektor nadal był właściwy.

**Lemat 3.6.6.** Niech  $A$  będzie  $G$ -wielokątem i niech  $h^A = (h_1^A, \dots, h_k^A)$  będzie jego  $H_G$ -reprezentacją. Niech  $h_{\varepsilon i}^A = (h_1^A, \dots, h_{i-1}^A, h_i^A - \varepsilon, h_{i+1}^A, \dots, h_k^A)$ ,  $0 < \varepsilon$ .

Jeżeli

$$\varepsilon \leq \min \left( \frac{W^A(i-2, i-1, i)}{W(i-2, i-1)}, \frac{W^A(i, i+1, i+2)}{W(i+1, i+2)} \right),$$

to  $h_{\varepsilon i}^A$  jest właściwy.

*Dowód.* Każdy bok  $G$ -wielokąta musi mieć nieujemną długość. Z Wniosku 3.3.2 wiemy, że  $\varepsilon$  musi być mniejszy od  $l_{i-1}^A W(i-1, i) = \frac{W^A(i-2, i-1, i)}{W(i-2, i-1)}$  oraz

$$l_{i+1}^A W(i, i+1) = \frac{W^A(i, i+1, i+2)}{W(i+1, i+2)}. \quad \square$$

Niech  $h^A = (h_1^A, \dots, h_k^A)$  i  $h^B = (h_1^B, \dots, h_k^B)$  będą  $H_G$ -reprezentacjami  $G$ -wielokątów  $A$  i  $B$ . Wiemy, że  $(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$  oznacza, że  $h^A + h^D = h^B + h^C$  i  $h_i^C \leq h_i^A$ ,  $h_i^D \leq h_i^B$ . Wówczas istnieje  $x \in \mathbb{R}^k$  taki, że  $h^C = h^A - x$  oraz  $h^D = h^B - x$  są  $H_G$ -reprezentacjami pewnych  $G$ -wielokątów  $C$  i  $D$ .

Lemat 5.1.1 występujący w dalszej części rozprawy jest metodą uzyskania pary  $G$ -minimalnej  $G$ -wielościannów w sytuacji  $\mathbb{R}^n$ . Niestety, aby użyć tego sposobu w praktyce musimy znać dokładną formę macierzy sieci  $M_G$  aby określić czy wektor jest właściwy oraz wybrać sposób na maksymalizację wektora  $x$ .

Jednak w dwuwymiarowej sytuacji korzystając z Wniosku 3.6.5 możemy używać prostszej metody sprawdzenia czy  $h$  jest wektorem właściwym bez używania macierzy sieci. Możemy również sformułować konkretne warunki, które musi spełniać wektor  $x$  bez używania jego maksymalizacji. Poniższe rozważania będą zatem

wykorzystywały podobny schemat rozumowania, jak w Lemacie 5.1.1 jednak w sytuacji  $G$ -wielokątów możemy sformułować bezpośrednie metody redukcji i kryteria  $G$ -minimalności.

**Lemat 3.6.7.** *Niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielokątów. Możemy zredukować tę parę do równoważnej pary  $(A', B')$  poprzez redukcję  $h_i^A$  oraz  $h_i^B$  do  $h_i^{A'} = h_i^A - x_i$  oraz  $h_i^{B'} = h_i^B - x_i$  przy pomocy  $x_i \geq 0$  dla pewnego  $i \in \{1, \dots, k\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości  $l_{i-1}^A, l_{i-1}^B, l_{i+1}^A, l_{i+1}^B > 0$ .*

*Dowód.* Wartość  $x_i$  musi być mniejsza niż  $\varepsilon$  z Lematu 3.6.6. Jeżeli długość któregoś boku  $l_{i-1}^A, l_{i-1}^B, l_{i+1}^A$  lub  $l_{i+1}^B$  jest równa zero, czyli bok jest punktem, wtedy  $\varepsilon = 0$  oraz  $x_i = 0$ .  $\square$

**Lemat 3.6.8.** *Niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielokątów. Jeżeli istnieją indeksy  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  takie, że  $i \neq j - 1, j, j + 1$  oraz  $l_i^A, l_i^B, l_j^A, l_j^B > 0$ , to możemy zredukować parę  $(A, B)$  do równoważnej pary  $(A', B')$  przez redukcję  $h^A$  oraz  $h^B$  do  $h^{A'} = h^A - x$  i  $h^{B'} = h^B - x$  za pomocą pewnego wektora  $x \geq 0$ .*

Przykładowa ilustracja do tego lematu jest ukazana na Rysunku 3.6.

*Dowód.* Niech  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  będą indeksami takimi, że  $i \neq j - 1, j, j + 1$  i  $l_i^A, l_i^B, l_j^A, l_j^B > 0$ . Niech  $\gamma$  będzie kątem pomiędzy  $g_i$  i  $g_j$  takim, że  $\gamma \leq \pi$ . Wówczas  $v = \frac{g_j + g_i}{|g_j + g_i|}$  jest wektorem takim, że  $g_i \leq v \leq g_j$ . Niech  $z \in \mathbb{R}^2$  będzie punktem takim, że  $[0, z] = \varepsilon(-v)$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$ . Mamy wówczas  $H_G$ -reprezentację  $h^z$  dla  $\{z\}$  jako  $G$ -wielokąta.

Mamy

$$\begin{aligned} a_i &= \left( \frac{W_x^A(i-1, i)}{W(i-1, i)}, \frac{W_y^A(i-1, i)}{W(i-1, i)} \right) = \\ &= \left( \frac{h_{i-1}^A y(g_i) - h_i^A y(g_{i-1})}{W(i-1, i)}, \frac{x(g_{i-1}) h_i^A - x(g_i) h_{i-1}^A}{W(i-1, i)} \right). \end{aligned}$$

Jeżeli dodamy  $h_i^z$  do  $h_i^A$ , wówczas wartość  $a_i'$  wyniesie

$$\left( \frac{(h_{i-1}^A + h_{i-1}^z) y(g_i) - (h_i^A + h_i^z) y(g_{i-1})}{W(i-1, i)}, \frac{x(g_{i-1}) (h_i^A + h_i^z) - x(g_i) (h_{i-1}^A + h_{i-1}^z)}{W(i-1, i)} \right),$$

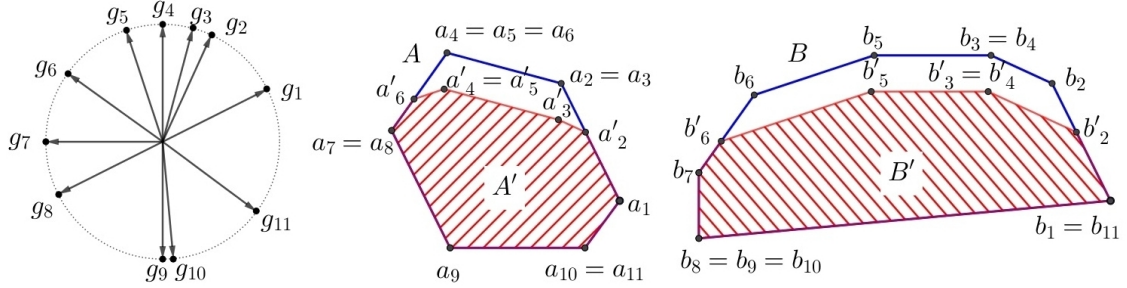
co jest równe  $a_i + (x(z), y(z))$  dla takich indeksów  $i$  dla których dodajemy  $h_i^z$  do  $h_i^A$  oraz  $h_{i-1}^z$  do  $h_{i-1}^A$ .

Jeżeli rozważymy  $a_{i+1}$  gdzie dodajemy  $h_{i+1}^z$  do  $h_{i+1}^A$  i  $h_i^A$  nie ulega zmianie, to  $a_{i+1}' = a_{i+1} + \left( \frac{-h_{i+1}^z y(g_i)}{W(i+1, i)}, \frac{h_{i+1}^z x(g_i)}{W(i+1, i)} \right)$ . Jeżeli dodamy wartości  $-h_m^y$  dla  $m = i + 1, \dots, j - 1$  do  $h^A$  i  $h^B$ , wówczas uzyskamy zbiory  $A'$  i  $B'$ . Te zbiory posiadają wierzchołki  $a'_m = a_m - y$ ,  $b'_m = b_m - y$  dla  $m = i + 2, \dots, j - 2$ , zmienione o  $h_m^y$  w kierunku normalnym dla  $m = i + 1, j$  oraz  $a'_m = a_m$ ,  $b'_m = b_m$  dla



$m = 1, \dots, i, j + 1, \dots, k$ . Zatem dopóki  $l_i^A, l_i^B, l_j^A, l_j^B > 0$  istnieje  $\varepsilon > 0$  taki, że  $l_i^{A'}, l_i^{B'}, l_j^{A'}, l_j^{B'} \geq 0$ .

□



Rysunek 3.6: Przykładowa ilustracja do Lematu 3.6.8

Poniższy lemat zostanie wykorzystany w dowodzie kryterium  $G$ -minimalności, tj. Twierdzenia 3.6.10.

**Lemat 3.6.9.** Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  będzie siecią,  $A, C$  będą  $G$ -wielokątami spełniającymi następujące warunki:

- (a)  $C \subset A$ ,
  - (b)  $l_i^A \leq l_i^C$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, m$ ,
  - (c) istnieje otwarty półokrąg w  $S^1$  zawierający wektory  $g_1, \dots, g_m$  taki, że wektory  $g_{m+1}, \dots, g_k$  należą do dopełnienia tego półokręgu w  $S^1$ .
- Wówczas  $l_i^A = l_i^C$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, m$ .

Przykładowa ilustracja do tego lematu jest ukazana na Rysunku 3.7.

*Dowód.* Z przekształcenia (3.6) wiemy, że

$$b_1 = (x(l_0^B), y(l_0^B)) \text{ i } b_{m+1} = (x(l_0^B), y(l_0^B)) + \sum_{i=1}^m (-y(g_i) \cdot l_i^B, x(g_i) \cdot l_i^B)$$

dla dowolnego  $G$ -wielokąta  $B$ . Zatem

$$[x(b_{m+1}), x(b_1)] = [x(l_0^B) - \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^B, x(l_0^B)]$$

oraz długości odcinków

$$|[x(b_{m+1}), x(b_1)]| = x(b_1) - x(b_{m+1}) = \left| \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^B \right|.$$

Możemy dokonać obrotu układu współrzędnych w taki sposób, że  $y(g_i) > 0$  dla wszystkich  $i \in \{1, \dots, m\}$  oraz  $y(g_j) < 0$  dla wszystkich  $j \in \{m + 1, \dots, k\}$ .

Wówczas odcinek  $[x(b_{m+1}), x(b_1)]$  jest rzutem  $G$ -wielokąta  $B$  na oś  $OX$ . Stąd  $[x(c_{m+1}), x(c_1)] \subset [x(a_{m+1}), x(a_1)]$  ponieważ  $C \subset A$ . To implikuje, że

$$\left| \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^C \right| = x(c_1) - x(c_{m+1}) \leq x(a_1) - x(a_{m+1}) = \left| \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^A \right|.$$

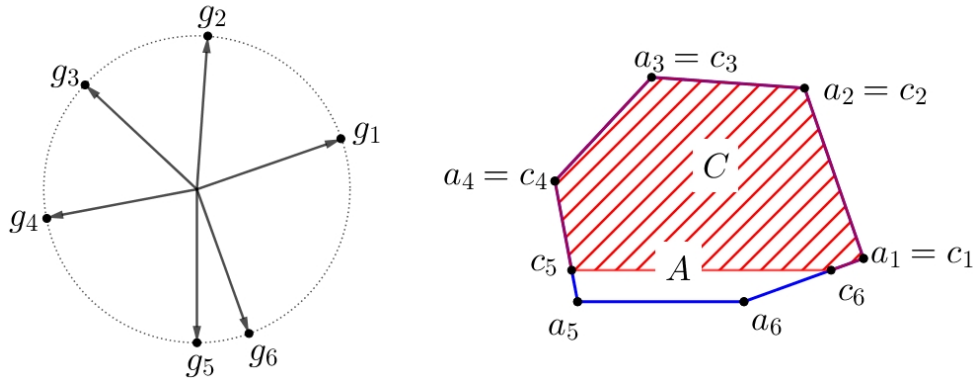
Dopóki  $y(g_i) \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, m$ , wtedy

$$\sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^C \leq \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^A.$$

Z nierówności  $l_i^C \geq l_i^A$  mamy że  $l_i^C = l_i^A + \varepsilon_i$  dla pewnego  $\varepsilon_i \geq 0$  oraz  $i = 1, \dots, m$ .  
Zatem

$$\sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot (l_i^A + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^A + \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot \varepsilon_i \leq \sum_{i=1}^m y(g_i) \cdot l_i^A.$$

Podsumowując  $\varepsilon_i = 0$  oraz  $l_i^A = l_i^C$ ,  $i = 1, \dots, m$ . □



Rysunek 3.7: Przykładowa ilustracja do Lematu 3.6.9

## Kryteria $G$ -minimalności

**Twierdzenie 3.6.10.** Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^1$  będzie siecią. Następujące warunki są równoważne:

- (a) Para  $G$ -wielokątów  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna.
- (b) Jeżeli  $l_i^A l_i^B l_j^A l_j^B > 0$ , to  $j = i \pm 1$ .

*Dowód.* (a)  $\implies$  (b) Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^1$  będzie siecią i niech  $(A, B)$  będzie  $G$ -minimalną parą  $G$ -wielokątów. Jeżeli istnieje  $0 \leq x \in \mathbb{R}^k$  taki, że

$x_i > 0$  dla pewnego  $i = 1, \dots, k$  oraz  $(h^A - x, h^B - x)$  jest właściwą parą  $H_G$ -reprezentacji dla pary  $G$ -wielokątów  $(A', B')$ , wówczas  $(A, B)$  nie jest  $G$ -minimalna. Z Wniosku 3.3.2 wiemy, że długości boków  $l_{i-1}$  oraz  $l_{i+1}$  są mniejsze w  $A'$  i  $B'$  niż długości odpowiednich boków w  $A$  i  $B$ . Załóżmy, że  $l_i^A, l_i^B, l_j^A, l_j^B > 0$  oraz  $j \neq i \pm 1$ , wówczas tworzymy parę  $(A', B')$  w taki sposób, że  $h^{A'} = h^A - x$  i  $h^{B'} = h^B - x$  dla  $x \geq 0$ . Z Lematu 3.6.8 wiemy, że możemy dobrać wartości  $x_i$  tak, że  $h^{A'}$  i  $h^{B'}$  będą właściwe. To przeczy założeniu, że  $j \neq i \pm 1$ .

(b)  $\implies$  (a) Niech  $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset S^1$  będzie siecią i niech  $(A, B)$  i  $(C, D)$  będą parą  $G$ -wielokątów. Jeżeli  $(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$ , to  $h^A + h^D = h^B + h^C$ . Z tego wynika, że  $l^A + l^D = l^B + l^C$  na podstawie Wniosku 3. Mamy zatem  $l^A - l^C = l^B - l^D$ . Skoro  $h^C = h^A - x$ ,  $h^D = h^B - x$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, k$  oraz  $l_m^A = 0$  lub  $l_m^B = 0$  dla pewnego  $m \in \{1, \dots, k\}$ , to  $l_m^D \geq l_m^B$  oraz  $l_m^C \geq l_m^A$ . Z faktu, że  $l_{k-1}^A, l_{k-1}^B, l_k^A, l_k^B > 0$  mamy wszystkie długości  $l_m^D \geq l_m^B$  oraz  $l_m^C \geq l_m^A$  dla  $m = 1, \dots, k-2$ . Z Lematu 3.6.9 wynika zatem, że  $l_m^D = l_m^B$  oraz  $l_m^C = l_m^A$  dla  $m = 1, \dots, k-2$  ponieważ  $C \subset A$  i  $D \subset B$ . Mamy  $x_m = 0$  dla  $m = 1, \dots, k-2$  oraz  $a_1 = c_1$ ,  $b_1 = d_1$ ,  $a_{k-1} = c_{k-1}$ ,  $b_{k-1} = d_{k-1}$ . Stąd  $h_k^c = \langle g_k, c_1 \rangle = \langle g_k, a_1 \rangle = h_k^a$  oraz  $h_k^d = h_k^b$ ,  $h_{k-1}^c = h_{k-1}^a$ ,  $h_{k-1}^d = h_{k-1}^b$  analogicznie. Mamy zatem  $x = 0$ ,  $(C, D) = (A, B)$  oraz  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną.  $\square$

Możemy teraz sformułować kryterium  $G$ -minimalności dla  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  w formie prostego wniosku.

**Wniosek 3.6.11.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Para  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $S_G$ -reprezentacje  $A$  i  $B$  spełniają jeden z następujących warunków:*

- (a) dla każdego  $i = 1, \dots, k$  mamy  $l_i^A = 0$  lub  $l_i^B = 0$ ,
- (b) dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $l_j^A \neq 0$ ,  $l_j^B \neq 0$  oraz dla każdego  $i \neq j$  mamy  $l_i^A = 0$  lub  $l_i^B = 0$ ,
- (c) dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $l_j^A \neq 0$ ,  $l_j^B \neq 0$ ,  $l_{j+1}^A \neq 0$ ,  $l_{j+1}^B \neq 0$  oraz dla każdego  $i \notin \{j, j+1\}$  mamy  $l_i^A = 0$  lub  $l_i^B = 0$ .

Powyższy wniosek możemy zapisać w języku pozostałych reprezentacji  $G$ -wielokątów używając Wniosku 3.3.1 i Równania (3.2).

**Wniosek 3.6.12.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Para  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $V_G$ -reprezentacje  $A$  i  $B$  spełniają jeden z poniższych warunków:*

- (a) dla każdego  $i = 1, \dots, k$  mamy  $a_i = a_{i+1}$  lub  $b_i = b_{i+1}$ ,
- (b) dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $a_j \neq a_{j+1}$ ,  $b_j \neq b_{j+1}$  oraz dla każdego  $i \neq j$  mamy  $a_i = a_{i+1}$  lub  $b_i = b_{i+1}$ ,
- (c) dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $a_j \neq a_{j+1} \neq a_{j+2}$ ,  $b_j \neq b_{j+1} \neq b_{j+2}$  oraz dla każdego  $i \notin \{j, j+1\}$  mamy  $a_i = a_{i+1}$  lub  $b_i = b_{i+1}$ .

Dla ułatwienia notacji w poniższym wniosku oznaczymy  $T_i^A = W^A(i-1, i, i+1) = h_{i-1}^A W(i, i+1) - h_i^A W(i-1, i+1) + h_{i+1}^A W(i-1, i)$ .

**Wniosek 3.6.13.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$ . Para  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $H_G$ -reprezentacje  $A$  i  $B$  spełniają jeden z poniższych warunków:*

- (a) *dla każdego  $i = 1, \dots, k$  mamy  $T_i^A = 0$  lub  $T_i^B = 0$ ,*
- (b) *dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $T_j^A > 0$ ,  $T_j^B > 0$  oraz dla każdego  $i \neq j$  mamy  $T_i^A = 0$  lub  $T_i^B = 0$ ,*
- (c) *dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $T_j^A > 0$ ,  $T_j^B > 0$ ,  $T_{j+1}^A > 0$ ,  $T_{j+1}^B > 0$  oraz dla każdego  $i \notin \{j, j+1\}$  mamy  $T_i^A = 0$  lub  $T_i^B = 0$ .*

Możemy zauważyć, że Wniosek 3.6.11 jest kryterium minimalności  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  opisanym w 2.4.9 z jednym dodatkowym warunkiem (c). Jeżeli rozważymy parę  $G$ -wielokątów spełniających ten warunek zauważymy, że taką parę możemy zredukować do pary minimalnej używając odcięcia za pomocą hiperpłaszczyzny (w tym wypadku linii), której wektor normalny znajduje się pomiędzy  $g_j$  i  $g_{j+1}$  oraz nie należy do sieci  $G$ . Jest to jedyna możliwość zredukowania tej pary do pary minimalnej. Jeżeli określimy  $G$ -uwypuklenie takiej pary minimalnej, uzyskamy parę  $G$ -minimalną spełniającą warunek (c). Sformułujmy wniosek z powyższego rozumowania.

**Wniosek 3.6.14.** *Niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielokątów. Jeżeli  $(C, D) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$  jest parą minimalną wielokątów w klasie równoważności  $[(A, B)]_{\sim}$ , wówczas para  $(\text{co}_G C, \text{co}_G D) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^2)$  jest parą  $G$ -minimalną w klasie równoważności  $[(A, B)]_{\mathcal{G}}$ . Co więcej, dla każdej pary  $G$ -minimalnej  $(C', D') \in [(A, B)]_{\mathcal{G}}$  istnieje para minimalna  $(C, D) \in [(A, B)]_{\sim}$  taka że  $(C', D') = (\text{co}_G C, \text{co}_G D)$ .*

Ten wniosek nie jest prawdziwy w przypadku przestrzeni trójwymiarowej  $\mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^3)$ . Istnieje para minimalna  $G$ -wielokątów, która nie jest parą  $G$ -minimalną. Wynika to z faktu, że w ogólności zachodzi  $[(A, B)]_{\mathcal{G}} \not\subset [(A, B)]_{\sim}$ .

Na mocy powyższego wniosku dla  $G$ -wielokątów istnienie pary  $G$ -minimalnej w klasie równoważności  $[(A, B)]_{\mathcal{G}}$  wynika z istnienia pary minimalnej w klasie równoważności  $[(A, B)]_{\sim}$ . Również fakt, że pary minimalne w  $[(A, B)]_{\sim}$  są jedyne co do translacji wraz z własnością  $\text{co}_G(A+x) = \text{co}_G A + x$  prowadzi nas do stwierdzenia, że pary  $G$ -minimalne  $(\text{co}_G C, \text{co}_G D)$  są jedyne co do translacji.

## ROZDZIAŁ 4

---

# RODZINY $G$ -WIEŁOŚCIANÓW W $\mathbb{R}^3$ ZAMKNIĘTE ZE WZGLĘDU NA SUMĘ MINKOWSKIEGO

---

Przykład 3.2.12 wykazał, że suma Minkowskiego dwóch  $G$ -wielościanów nie musi być  $G$ -wielościanem. W tym rozdziale skupimy się na takich rodzinach  $G$ -wielościanów, dla których suma Minkowskiego jest działaniem wewnętrznym. Opisana w poprzednim rozdziale modyfikacja sumy Minkowskiego jest dla tych rodzin równoważna zwykłej sumie Minkowskiego. Dlatego, ze względów praktycznego zastosowania, rozważymy ten problem dla sytuacji  $\mathbb{R}^n$ , gdzie  $n = 3$ . Pomimo tego, że takie sieci w  $\mathbb{R}^3$  są nieliczne, to nie powinniśmy ich pomijać. Wzrost kryształów, których kształt odpowiada takim  $G$ -wielościanom, możemy, wykorzystując model opisany w [19], łatwo opisać za pomocą sumy Minkowskiego.

Wyniki zawarte w tym rozdziale są oryginalnymi wynikami autora rozprawy i zawierają wyniki opublikowane w pracy [35].

Paragraf 4.1 poświęcimy na dokładny opis problemu wskazania sieci  $G$ , dla której rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  jest zamknięta ze względu na sumę Minkowskiego. Paragraf 4.1 zakończymy twierdzeniem, dzięki któremu odpowiednie sieci  $G$  możemy znaleźć rozwiązując geometryczny problem na sferze  $S^2$  dotyczący przekrojów odcinków sferycznych.

W Paragrafie 4.2 rozwiążemy na płaszczyźnie analogiczny problem dotyczący przekrojów odcinków, aby uzyskane wyniki wykorzystać w rozwiązaniu problemu dotyczącego przekrojów odcinków sferycznych. Zdefiniujemy szkielet zbioru i własność posiadania wewnątrznie przecinającego się szkieletu. Następnie wskażemy

skończone zbiory na płaszczyźnie posiadające tę własność i udowodnimy, że są to wszystkie możliwe zbiory tego typu.

Paragraf 4.3 posiada strukturę podobną do poprzedniego paragrafu. Również zdefiniujemy szkielet sferyczny i własność posiadania wewnątrznie przecinającego się szkieletu. Następnie wykorzystując wyniki z poprzedniego paragrafu wskażemy zbiory posiadające tę własność i udowodnimy, że są to wszystkie możliwe zbiory tego typu.

W Paragrafie 4.4 skorzystamy z wyników zawartych w poprzednim paragrafie i wskażemy rodziny  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  zamknięte ze względu na sumę Minkowskiego.

## 4.1. OPIS ZAGADNIENIA

Na przykładzie 3.2.12 zauważyć można, że problemem jest fakt, że suma Minkowskiego dwóch wypukłych wielościanów o ustalonych kierunkach ścian nie musi posiadać ścian wyłącznie o tych kierunkach. Oznacza to, że rodzina wielościanów o ustalonych kierunkach ścian nie jest zamknięta ze względu na sumę Minkowskiego.

Z własności sumy Minkowskiego wiemy, że suma mnogościowa zbiorów wektorów normalnych do ścian  $A$  i ścian  $B$  zawiera się w zbiorze wszystkich wektorów normalnych do ścian sumy tych wielościanów. Spróbujmy ustalić, w jaki sposób powstaje ściana sumy Minkowskiego, której wektor normalny nie należy do żadnego składnika tej sumy.

Wiemy, że każda ściana, krawędź i wierzchołek  $G$ -wielościanu  $A$  jest ścianą podparcia  $A(z)$  w pewnym kierunku  $z$ . Oczywiście ściany  $A$  wyznaczone są przez kierunki  $z \in G$ . Dla sumy Minkowskiego  $A + B$  zachodzi własność jej ścian podpierających  $(A + B)(z) = A(z) + B(z)$ . Jeżeli zatem ściana podpierająca  $(A + B)(z)$  jest ścianą  $A + B$ , tzn. dwuwymiarową figurą, wówczas albo  $A(z)$  jest ścianą  $A$ , albo  $B(z)$  jest ścianą  $B$  albo jednocześnie  $A(z)$  i  $B(z)$  są nierównoległymi krawędziami  $A$  i  $B$ . Oczywiście skoro rozpatrujemy te kierunki, które nie należą do sieci  $G$ , to możliwa jest tylko sytuacja trzecia. Każda krawędź wielościanu o niepustym wnętrzu jest przekrojem dwóch ścian. Zatem chcemy wykluczyć takie kierunki, których ściana podpierająca jest krawędzią w obu  $G$ -wielościanach  $A$  i  $B$ .

Naszym celem jest znaleźć wszystkie takie zbiory  $G$  że dla dowolnych dwóch  $G$ -wielościanów  $A$  i  $B$  jeżeli zbiór podpierający  $(A + B)(z)$  jest dwuwymiarowy, to  $z \in G$ . Innymi słowy, chcemy określić dla jakich  $G$  rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  jest zamknięta

względem dodawania Minkowskiego. Aby sformułować odpowiednie twierdzenia przypomnimy kilka pojęć dotyczących sfery jednostkowej.

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej rozważamy sferę jednostkową o promieniu 1 i środku 0.

**Definicja 4.1.1.** *Sfera jednostkowa* opisana jest równaniem kwadratowym  $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ .

**Definicja 4.1.2.** Niech  $\pi$  będzie płaszczyzną przechodzącą przez środek 0 sfery  $S^2$ . Przekrój  $\pi \cap S^2$  nazywamy *kołem wielkim*.

**Definicja 4.1.3.** Dwa punkty  $x, y \in S^2$  na sferze nazywamy *antypodycznymi*, jeżeli  $y = -x$ .

**Definicja 4.1.4.** Najkrótsza ścieżka  $[x, y]_S$  pomiędzy dwoma nieantypodycznymi punktami  $x, y$  na sferze jest krótszym łukiem koła wielkiego przechodzącego przez  $x$  oraz  $y$  i nazywamy ją *odcinkiem sferycznym* łączącym  $x$  i  $y$ .

Jeżeli krawędź wielościanu jest przekrojem dwóch ścian  $A(x)$  i  $A(y)$ , wówczas ta krawędź to  $A(z)$ , gdzie  $z$  jest punktem na odcinku sferycznym  $[x, y]_S$  łączącym  $x$  i  $y$ . Zatem w przypadku wielościanów o niepustym wnętrzu każda krawędź jest związana z odcinkiem sferycznym łączącym punkty związane ze ścianami wielościanu, które zawierają tę krawędź.

Jeżeli zatem istnieje ściana  $(A + B)(z)$  o wektorze normalnym  $z$  który nie jest wektorem normalnym do żadnej ze ścian  $A$  lub  $B$ , to ta ściana jest równa sumie  $A(z) + B(z)$  dwóch krawędzi, gdzie  $z$  leży na przecięciu dwóch odcinków sferycznych  $[x, y]_S$  i  $[u, w]_S$  takich, że  $A(x)$  i  $A(y)$  są ścianami wielościanu  $A$  zawierającymi krawędź  $A(z)$ , natomiast  $B(u)$  i  $B(w)$  są ścianami wielościanu  $B$  zawierającymi krawędź  $B(z)$ .

Poniższe twierdzenie redukuje nasz problem do problemu geometrycznego dla trójwymiarowej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

**Twierdzenie 4.1.5.** *Rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  wszystkich  $G$ -wielościanów jest zamknięta względem dodawania Minkowskiego wtedy i tylko wtedy, gdy każdy przekrój dwóch odcinków sferycznych o końcach w  $G$  należy do  $G$ .*

*Dowód.* Warunek dostateczny wynika bezpośrednio z powyższych rozważań.

Warunek konieczny. Niech  $x, y, u, w \in G$  i  $[x, y]_S \cap [u, w]_S = \{z\}$ . Oznaczmy  $A = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, v \rangle \leq 1 \text{ dla dowolnego } v \in G, \langle a, x \rangle \leq \varepsilon, \langle a, y \rangle \leq \varepsilon\}$ . Zbiór  $A$  jest wielościanem i jeżeli  $\varepsilon$  jest dostatecznie mały, wówczas ściany  $A(x)$  i  $A(y)$  przecinają się wzdłuż krawędzi  $A(z)$ . Analogicznie jeżeli  $B = \{b \in \mathbb{R}^3 \mid \langle b, v \rangle \leq 1 \text{ dla dowolnego } v \in G, \langle b, u \rangle \leq \varepsilon, \langle b, w \rangle \leq \varepsilon\}$ , to zbiór  $B$  jest wielościanem i jeżeli  $\varepsilon$  jest dostatecznie mały, to ściany  $B(u)$  i  $B(w)$  przecinają się wzdłuż krawędzi  $B(z)$ . Krawędzie  $A(z)$  i  $B(z)$  są nierównoległe, a ściana  $(A+B)(z)$  jest równoległobokiem. Dopóki  $A+B$  należy do  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$ , wektor normalny  $z$  do ściany  $(A+B)(z)$  należy do  $G$ .  $\square$

## 4.2. ZBIORY PŁASKIE Z WEWNĘTRZNIE PRZECINAJĄCYM SIĘ SZKIELETEM

Zanim opiszemy skończone podzbiory sfery jednostkowej w sytuacji trójwymiarowej, opracujemy analogiczne zagadnienie dla płaszczyzny. Rozwiązanie te uogólnimy później na przypadek trójwymiarowy posługując się przejrzystszymi przykładami dwuwymiarowymi.

**Definicja 4.2.1.** Niech  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^2$ . Zbiór  $A \vee A := \bigcup_{a,b \in A} [a, b]$ , tj. suma mnogościowa odcinków o końcach zawartych w zbiorze  $A$  nazywamy *szkieletem*  $A$ .

**Definicja 4.2.2.** Zbiór  $A$  ma *wewnętrznie przecinający się szkielet*, jeżeli każdy punkt przecięcia dwóch odcinków ze szkieletu  $A \vee A$  należy do  $A$ .

W tym rozdziale odpowiemy na następujące pytanie: Jaki jest warunek konieczny i dostateczny, aby zbiór  $A$  miał wewnętrznie przecinający się szkielet?

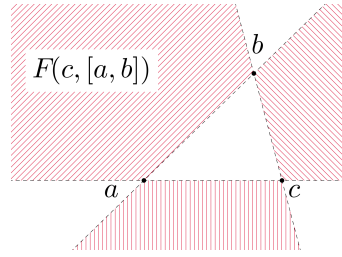
Zdefiniujemy obszar zakazany trójkąta, który będzie potrzebny w dalszych dowodach.

**Definicja 4.2.3.** Niech  $a, b, c$  będą wierzchołkami trójkąta. Otwarty nieograniczony zbiór  $F(c, [a, b]) := \{\gamma(\alpha a + (1 - \alpha)b) + (1 - \gamma)c \mid 0 < \alpha < 1 < \gamma\}$  nazywamy *obszarem zakazanym ze względu na punkt  $c$  i odcinek  $[a, b]$* .

Powyższą definicję dobrze ilustruje Rysunek 4.1. Wierzchołki i boki każdego trójkąta generują trzy obszary zakazane ze względu na wierzchołek i przeciwległy bok. Sumę mnogościową tych trzech rozłącznych obszarów nazywać będziemy *obszarem zakazanym trójkąta*.

Poniższe twierdzenie rozwiązuje nasz problem w przypadku dwuwymiarowym.





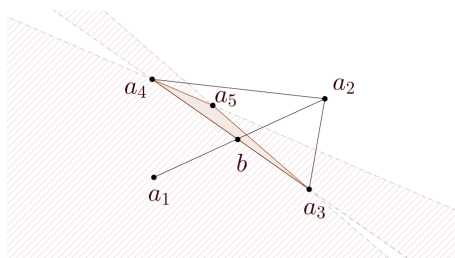
Rysunek 4.1: Obszar zakazany trójkąta  $\Delta(a, b, c)$

**Twierdzenie 4.2.4.** Niech  $A$  będzie skończonym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ . Następujące warunki są równoważne:

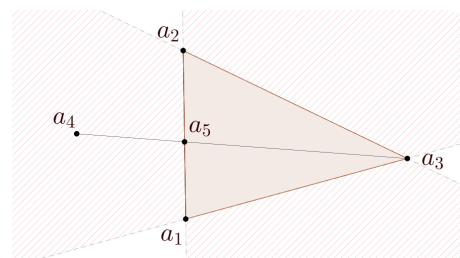
- (i) Zbiór  $A$  ma wewnątrznie przecinający się szkielet.
- (ii) Dla dowolnych  $a, b, c \in A$ , jeżeli trójkąt  $\Delta(a, b, c)$  nie zawiera innych punktów z  $A$ , to obszar zakazany tego trójkąta również nie zawiera żadnych punktów z  $A$ .

*Dowód.* (ii)  $\implies$  (i) Dowód nie wprost. Załóżmy, że zbiór  $A$  nie ma wewnątrznie przecinającego się szkieletu. Oznacza to, że istnieją cztery punkty  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$  takie, że przecięcie dwóch odcinków  $[a_1, a_2]$  i  $[a_3, a_4]$  jest singletonem  $\{b\}$  i że punkt  $b$  nie należy do  $A$ . Możemy założyć, że między  $a_1$  i  $a_2$  nie ma innych punktów należących do  $A$ . W podobny sposób możemy założyć, że nie ma innych punktów z  $A$  pomiędzy  $a_3$  i  $a_4$ .

Niech  $a_5 \in A$  będzie punktem w trójkącie  $\Delta(a_2, a_3, a_4)$  innym niż  $a_3$  i  $a_4$  takim, że odległość  $a_5$  od linii prostej  $a_3a_4$  jest najkrótsza. Zauważmy, że trójkąt  $\Delta(a_5, a_3, a_4)$  nie zawiera innych punktów z  $A$  poza swoimi wierzchołkami. Może zajść, że  $a_5 = a_2$ . Ale  $a_1$  należy wówczas do  $F(a_2, [a_3, a_4]) \subset F(a_5, [a_3, a_4])$ , gdzie  $F(a_5, [a_3, a_4])$  jest obszarem zakazanym wyznaczonym przez trójkąt  $\Delta(a_5, a_3, a_4)$ , sprzeczność.



Rysunek 4.2: Punkt  $a_1$  leżący w obszarze zakazanym  $F(a_5, [a_3, a_4])$



Rysunek 4.3: Punkt  $a_5 \notin A$  jest przecięciem odcinków  $[a_1, a_2]$  i  $[a_3, a_4]$

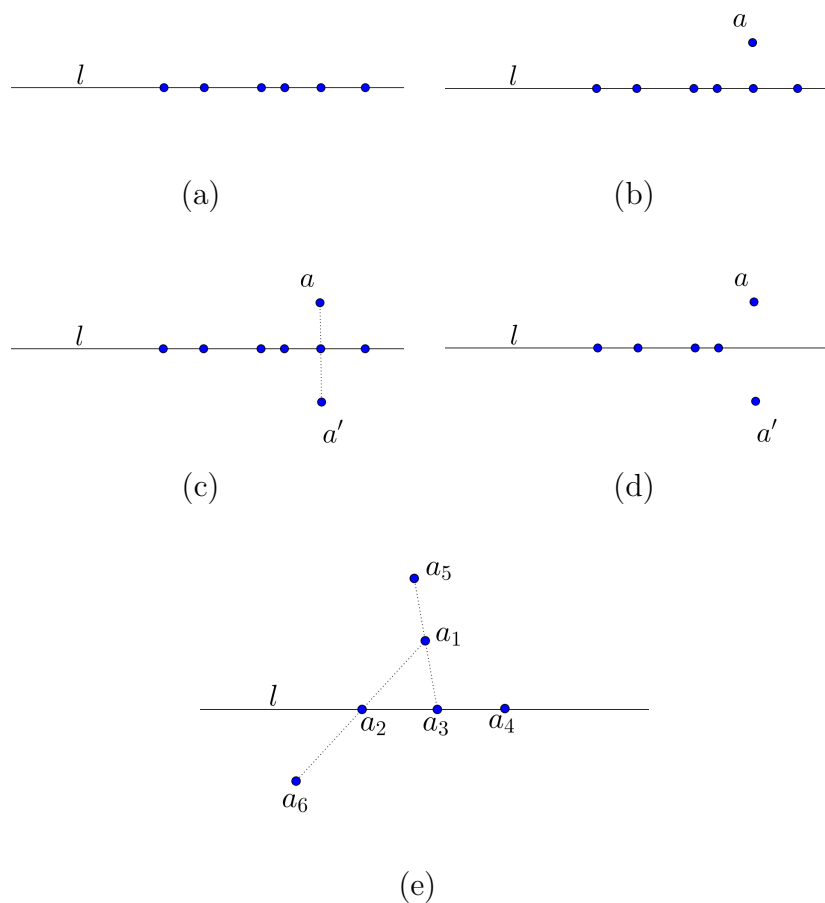
(i)  $\implies$  (ii) Dowód nie wprost. Niech trójkąt  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ ,  $a_1, a_2, a_3 \in A$  nie zawiera innym punktów z  $A$  poza wierzchołkami i niech  $a_4 \in A$  leży w obszarze zakazanym wyznaczonym przez ten trójkąt. Bez utraty ogólności możemy założyć, że  $a_4 \in F(a_3, [a_1, a_2])$  (Rysunek 4.3). Wówczas dwa odcinki  $[a_1, a_2]$  i  $[a_3, a_4]$  przecinają

się w jakimś punkcie  $a_5$ , który nie należy do  $A$ . Zatem zbiór  $A$  nie ma wewnątrznie przecinającego się szkieletu.  $\square$

Następujące twierdzenie opisuje wszystkie możliwe struktury zbiorów z wewnątrznie przecinającym się szkieletem.

**Twierdzenie 4.2.5.** *Skończony zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  ma wewnątrznie przecinający się szkielet wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka linia prosta  $l$ , że jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- (a) Zbiór  $A$  jest zawarty w  $l$ .
- (b) Zbiór  $A \setminus l$  jest singletonem.
- (c) Zachodzi  $A \setminus l = \{a, a'\}$  oraz punkty  $a, a'$  leżą po przeciwnych stronach linii  $l$  i punkt przecięcia  $l$  z linią  $aa'$  należy do  $A$ .
- (d) Zachodzi  $A \setminus l = \{a, a'\}$  oraz punkty  $a, a'$  leżą po przeciwnych stronach linii  $l$  oraz zbiór  $A$  leży po jednej stronie linii  $aa'$ .
- (e) Zachodzi  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ ,  $a_2, a_3, a_4 \in l$ ,  $a_3 \in [a_2, a_4]$ ,  $a_1 \in [a_3, a_5]$  oraz  $a_2 \in [a_1, a_6]$ .



Rysunek 4.4: Pięć możliwych typów zbiorów  $A$

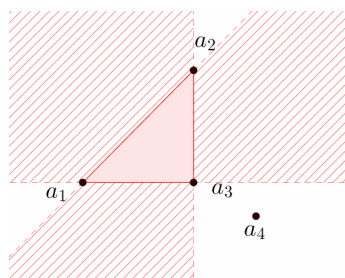
Twierdzenie mówi o tym, że zbiór  $A$  ma wewnątrznie przecinający się szkielet wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z pięciu możliwych sytuacji (Rysunek 4.4).

- (a) Zbiór  $A$  jest zbiorem współliniowych punktów. W szczególności singleton, jak i para punktów są zbiorami współliniowych punktów.
- (b) Zbiór  $A$  z wyjątkiem jednego punktu jest zbiorem współliniowych punktów.
- (c) Zbiór  $A$  za wyjątkiem dwóch punktów, nazwijmy je  $a$  i  $a'$ , jest podzbiorem linii prostej  $l$  i pewien punkt z  $A$  leży pomiędzy  $a$  i  $a'$ . Oczywiście ten punkt leży również na prostej  $l$ .
- (d) Ta sytuacja jest analogiczna do (c). Różnica polega na tym, że nie ma punktu z  $A$  leżącego między  $a$  i  $a'$ , ale zamiast tego zbiór  $A$  leży po jednej stronie linii prostej  $aa'$ .
- (e) Zbiór  $A$  ma sześć punktów  $a_1, \dots, a_6$ . Punkty  $a_1, a_2$  i  $a_3$  są wierzchołkami trójkąta  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$  który nie zawiera innych punktów z  $A$ . Punkt  $a_4$  leży na półprostej  $a_2a_3$ ,  $a_5$  leży na półprostej  $a_3a_1$  i  $a_6$  leży na półprostej  $a_1a_2$ .

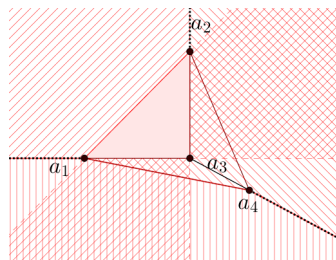
*Dowód.*  $\Leftarrow$ ) Łatwo stwierdzić, że zbiory opisane w twierdzeniu posiadają wewnątrznie przecinający się szkielet.

$\Rightarrow$ ) Możemy założyć, że zbiór  $A$  ma wewnątrznie przecinający się szkielet. Możemy również założyć, że nie wszystkie punkty z  $A$  są współliniowe. Niech  $a_1, a_2, a_3 \in A$  będą wierzchołkami trójkąta  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$  o minimalnej powierzchni spośród wszystkich trójkątów o wierzchołkach należących do  $A$ . Stąd wynika, że w trójkącie  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ , wewnątrz, ani na bokach, nie ma innych punktów z  $A$ . W innym przypadku moglibyśmy wybrać trójkąt o mniejszej powierzchni. Z Twierdzenia 4.2.4 wiemy, że nie ma również punktów z  $A$  należących do obszaru zakazanego trójkąta  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ .

Rozważmy sytuację, w której żaden inny punkt z  $A$  nie leży na prostych  $a_1a_2$ ,  $a_2a_3$  czy  $a_1a_3$ . Jeżeli zbiór  $A$  zawiera tylko punkty  $a_1, a_2$  i  $a_3$ , wówczas mamy sytuację z Rysunku 4.4b. W przeciwnym razie, niech  $a_4 \in A$  należy do jednego z kątów zewnętrznych trójkąta  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$  (Rysunek 4.5a). Bez utraty ogólności możemy założyć, że  $a_4$  leży w kącie zewnętrznym naprzeciw kąta  $\angle a_1a_3a_2$  i że żaden inny punkt z  $A$  leżący w tym kącie nie leży bliżej linii  $a_1a_2$ . Zauważmy, że żaden z trójkątów  $\Delta(a_1, a_3, a_4)$  czy  $\Delta(a_2, a_3, a_4)$  nie zawiera innych punktów z  $A$ . Analizując sumę mnogościową wszystkich obszarów zakazanych trójkątów  $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\Delta(a_1, a_3, a_4)$  i  $\Delta(a_2, a_3, a_4)$  możemy zauważyć, że pozostałe punkty z  $A$  mogą leżeć tylko na trzech półprostych przeciwnych do  $a_1a_3$ ,  $a_2a_3$  i  $a_4a_3$  (Rysunek 4.5b). Niemniej, przez założenie początkowe tylko półprosta przeciwna do  $a_4a_3$  może zawierać punkty z  $A$ . Ten przypadek prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.4d.



(a) Punkt  $a_4 \in A$  należy do kąta zewnętrznego przeciwnego do kąta  $\angle a_1 a_3 a_2$



(b) Trzy półproste (linia przerywana) z początkowymi punktami  $a_1, a_2, a_4$

Rysunek 4.5: Żadna z prostych  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_1 a_3$  nie zawiera innych punktów z  $A$

Rozważmy teraz sytuację, w której przynajmniej na jednej z linii  $a_1 a_2, a_2 a_3$  lub  $a_1 a_3$  zawiera jakiś punkt z  $A$ . Bez utraty ogólności możemy założyć, że punkt  $a_4$  leży na linii  $a_2 a_3$ . Następnie mamy dwie możliwości.

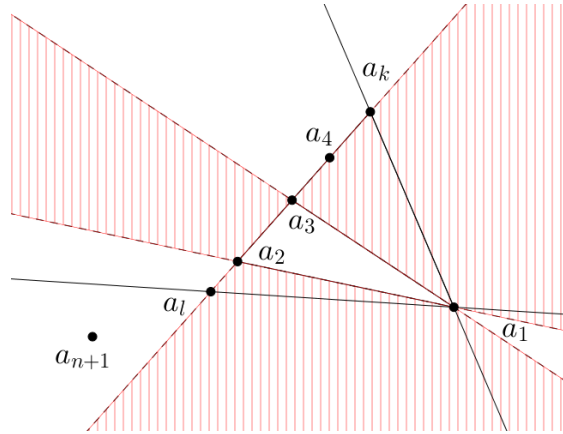
Pierwsza, linia  $a_2 a_3$  zawierają więcej niż trzy punkty z  $A$ .

Niech  $a_2, \dots, a_n \in A, n \geq 5$  będą wszystkimi punktami z  $A$  leżącymi na linii  $a_2 a_3$ . Niech  $a_k, a_l \in A$  będą takie, że  $a_2, \dots, a_n$  leżą pomiędzy  $a_k$  i  $a_l$ . Jeżeli  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , to otrzymamy sytuację z Rysunku 4.4b. W przeciwnym razie, niech  $a_{n+1} \in A$  będzie punktem, który nie należy do linii  $a_2 a_3$ . Punkt  $a_{n+1}$  nie należy również do sumy obszarów zakazanych wszystkich trójkątów  $\Delta(a_1, a_i, a_j)$ , takich, że pomiędzy punktami  $a_i$  i  $a_j$  nie ma żadnych punktów z  $A$ . Jeżeli punkt  $a_{n+1}$  leży na którejś z linii  $a_1 a_i, i = 2, \dots, n$ , wówczas otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.4c. W przeciwnym razie, punkt  $a_{n+1}$  leży w jednym z kątów zewnętrznych przeciwnych do jednego z kątów  $\angle a_1 a_l a_k$  lub  $\angle a_1 a_k a_l$  (Rysunek 4.6). Ta sytuacja odpowiada sytuacji z Rysunku 4.4d.

Druga z możliwości zakłada, że linia  $a_2 a_3$  zawiera dokładnie trzy punkty z  $A$ .

Bez utraty ogólności możemy założyć, że  $a_3 \in [a_2, a_4]$ . Jeżeli zbiór  $A$  nie zawiera innych punktów, wtedy otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.4b. W przeciwnym razie, mamy cztery możliwości:

- (1) Punkty  $a_5$  i  $a_6$  należą do półprostych  $a_3 a_1$  i  $a_1 a_2$ . To jest sytuacja z Rysunku 4.4e.
- (2) Punkt  $a_5$  należy do linii  $a_1 a_3$  i punkt  $a_6$  nie należy do półprostej  $a_1 a_2$ . To prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.4c, gdzie linia  $a_1 a_3$  jest naszą linią  $l$ . Wówczas wszystkie pozostałe punkty  $A$  należą do  $l$ .
- (3) Zachodzi  $A = \{a_1, \dots, a_5\}$  oraz punkt  $a_5$  leży na prostej  $a_1 a_2$  lub  $a_1 a_4$ . Wówczas



Rysunek 4.6: Punkt  $a_{n+1}$  leży w jednym z kątów zewnętrznych, w tym przypadku przeciwległym do kąta  $\angle a_1 a_1 a_k$

również prowadzi nas to do sytuacji z Rysunku 4.4c, gdzie tym razem linia  $a_2 a_3$  jest naszą linią  $l$ .

(4) Zachodzi  $A = \{a_1, \dots, a_5\}$  oraz punkt  $a_5$  leży w kącie zewnętrznym leżącym naprzeciw kąta  $\angle a_1 a_2 a_3$  lub kąta  $\angle a_1 a_4 a_3$ . To z kolei prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.4d.  $\square$

Po rozwiązaniu dwuwymiarowej wersji naszego problemu możemy rozwiązać analogiczny problem w sytuacji sferycznej.

### 4.3. ZBIORY SFERYCZNE Z WEWNĘTRZNIE PRZECINAJĄCYM SIĘ SZKIELETEM

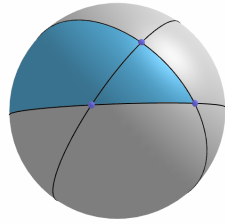
W tym paragrafie nasze rozważania będą przebiegały w podobny sposób jak w przypadku dwuwymiarowym. Zdefiniujemy szkielet sferyczny i zbiór z wewnątrznie przecinającym się szkieletem na sferze oraz wskażemy strukturę takich zbiorów.

Niech  $G$  będzie skończonym podzbiorem sfery jednostkowej  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Niech wektory  $g_1, g_2, g_3 \in G$  będą liniowo niezależne i niech  $[g_1, g_2]_S, [g_1, g_3]_S, [g_2, g_3]_S$  będą odcinkami sferycznymi. Suma tych odcinków jest brzegiem dokładnie dwóch domkniętych i jednorodnych podzbiorów sfery jednostkowej. Mniejszy z tych zbiorów nazywamy *trójkątem sferycznym*  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ . Trójkąt sferyczny  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  jest przekrojem trzech sferycznych dwukątów  $C_1, C_2, C_3$ . Niech dwukąt  $C_1$  (Rysunek 4.7) posiada wierzchołki  $g_1$  i  $-g_1$ , gdzie  $-g_1$  jest punktem antypodycznym do  $g_1$  oraz niech  $g_2, g_3$  należą do boków tego dwukąta  $C_1$ . Niech dwukąty  $C_2, C_3$  posiadają odpowiednio wierzchołki  $g_2, -g_2$  oraz  $g_3, -g_3$ . Przekrój

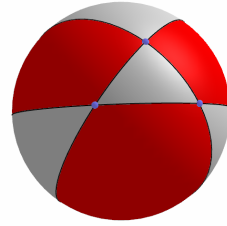
zbiorów  $(C_1 \cup C_2 \cup C_3) \setminus (C_1 \cap C_2 \cap C_3)$  (Rysunek 4.8) nazywamy *obszarem zakazanym trójkąta*  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ . W rzeczywistości, ten obszar zakazany jest sumą przekrojów trzech trójkątów sferycznych  $\Delta(-g_1, g_2, g_3)_S$ ,  $\Delta(g_1, -g_2, g_3)_S$  oraz  $\Delta(g_1, g_2, -g_3)_S$ .

**Definicja 4.3.1.** Niech  $G \subset S^2$ . Zbiór  $G \vee G := \bigcup_{\substack{g, g' \in G \\ g \neq -g'}} [g, g']_S$  nazywamy *szkieletem sferycznym zbioru  $G$* .

Możemy teraz powiedzieć, że zbiór  $G$  *ma wewnątrz przecinający się szkielet*, jeżeli każdy punkt będący przekrojem dwóch odcinków sferycznych z szkieletu sferycznego  $G \vee G$  jest zawarty w zbiorze  $G$ .



Rysunek 4.7: Dwukąt  $C_1$



Rysunek 4.8: Obszar zakazany  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$

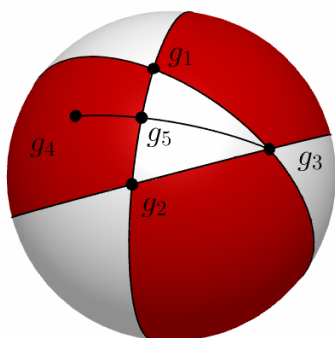
Możemy sformułować twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 4.2.4.

**Twierdzenie 4.3.2.** Niech  $G$  będzie skończonym podzbiorem  $S^2$ . Następujące warunki są równoważne:

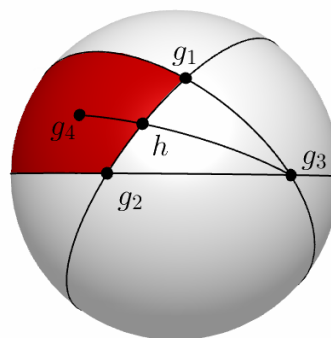
- (i) Zbiór  $G$  ma wewnątrz przecinający się szkielet.
- (ii) Dla dowolnych  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , jeżeli trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  nie zawiera innych punktów z  $G$ , wówczas obszar zakazany tego trójkąta nie zawiera innych punktów z  $G$ .

*Dowód.* (i)  $\implies$  (ii) Niech  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ ,  $g_1, g_2, g_3 \in G$  będzie trójkątem sferycznym i niech żaden inny punkt z  $G$  nie należy do tego trójkąta. Jeżeli punkt  $g_4 \in G$  leży w obszarze zakazanym tego trójkąta możemy bez utraty ogólności założyć, że  $g_4 \in \text{int } \Delta(g_1, g_2, -g_3)_S$  (Rysunek 4.9). Zatem, z warunku (i), singleton  $\{g_5\} = [g_1, g_2]_S \cap [g_3, g_4]_S$  jest podzbiorem  $G$ . Więc  $g_5 \in [g_1, g_2]_S \subset \Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ , co przeczy warunkowi (ii).

(ii)  $\implies$  (i) Załóżmy, że zbiór  $G$  nie posiada wewnątrz przecinającego się szkieletu sferycznego. Oznacza to, że istnieją takie cztery punkty  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$  że zachodzi  $\{h\} = [g_1, g_2]_S \cap [g_3, g_4]_S$ ,  $h \notin G$  (Rysunek 4.10). Ponieważ  $G$  jest skończony, możemy



Rysunek 4.9: Przekrój jednopunktowy  
 $\{g_5\} = [g_1, g_2]_S \cap [g_3, g_4]_S$



Rysunek 4.10: Punkt  $g_4$  należy do obszaru zakazanego trójkąta  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$

dobrać te punkty tak, aby trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  nie zawierał innych punktów z  $G$  innych niż jego wierzchołki. Wówczas punkt  $g_4$  należy do obszaru zakazanego trójkąta  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ , sprzeczność.  $\square$

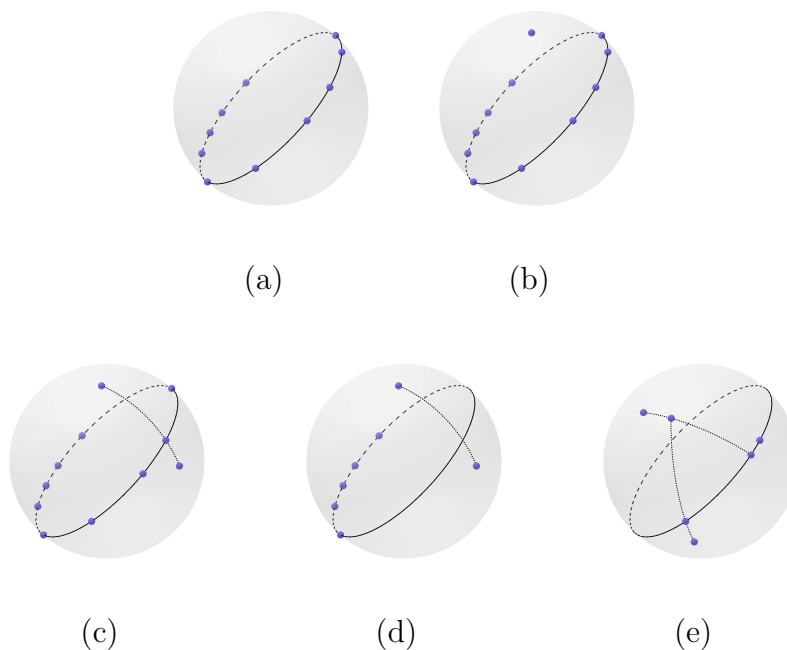
Następne twierdzenie jest sferyczną wersją Twierdzenia 4.2.5.

**Twierdzenie 4.3.3.** *Skończony zbiór  $G \subset S^2$  ma wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje koło wielkie  $l$  takie, że jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- (a) *Zbiór  $G$  jest zawarty w  $l$ .*
- (b) *Zbiór  $G \setminus l$  jest singletonem.*
- (c) *Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g, g'$  leżą na przeciwnych półsferych wyznaczonych przez koło wielkie  $l$  i punkt przecięcia  $l$  i odcinka sferycznego  $[g, g']_S$  należy do  $G$ .*
- (c') *Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g$  i  $g'$  są antypodyczne.*
- (d) *Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g$  i  $g'$  leżą na przeciwnych półsferych wyznaczonych przez koło wielkie  $l$  i  $G \cap l$  jest zawarty w półokręgu, który jest rozłączny z odcinkiem sferycznym  $[g, g']_S$ .*
- (e) *Zachodzi  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_6\}$ , gdzie  $g_2, g_3, g_4 \in l$ ,  $g_3 \in [g_2, g_4]_S$ ,  $g_1 \in [g_3, g_5]_S$  oraz  $g_2 \in [g_1, g_6]_S$ .*

Twierdzenie określa, że zbiór  $G$  ma wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z czterech następujących warunków.

- (a) Zbiór  $G$  jest zawarty w pewnym kole wielkim ( Rysunek 4.11a). W szczególności, singleton i para punktów są również zbiorami zawartymi w pewnym kole wielkim.

Rysunek 4.11: Pięć możliwych układów zbioru  $G$ 

(b) Zbiór  $G$ , poza jednym punktem, jest zawarty w pewnym kole wielkim (Rysunek 4.11b). (c) Wszystkie punkty zbioru  $G$  z wyjątkiem dwóch punktów zawarte są w kole wielkim  $l$  i pewien punkt  $h$  z  $G$  leży pomiędzy  $g$  i  $g'$  (Rysunek 4.11c). (c') Jeżeli  $g = -g'$ , wówczas odcinek sferyczny  $[g, g']_S$  nie istnieje, ale Rysunek 4.11c trafnie odzwierciedla tę sytuację. (d) Nie ma punktów z  $G$  leżących między  $g$  i  $g'$ , natomiast wszystkie pozostałe punkty z  $G$  są zawarte w półokręgu zawartym w  $l$  i ten półokrąg nie zawiera punktu  $h$  będącego przecięciem  $[g, g']_S$  i  $l$  (Rysunek 4.11d). (e) Zbiór  $G$  składa się z sześciu punktów  $g_1, \dots, g_6$ . Punkty  $g_1, g_2$  i  $g_3$  są wierzchołkami trójkąta sferycznego  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ , który nie zawiera innych punktów z  $G$ . Punkt  $g_4$  leży na odcinku sferycznym  $[g_3, -g_2]_S$ ,  $g_5$  leży na odcinku sferycznym  $[g_1, -g_3]_S$  i ostatni punkt  $g_6$  leży na odcinku sferycznym  $[g_2, -g_1]_S$  (Rysunek 4.11e).

Poniższy dowód jest bardzo szczegółowy i rozbudowany, gdyż rozważa wszystkie możliwe przypadki położenia punktów na sferze.

*Dowód.*  $\Leftarrow$ ) Oczywistym jest, że szkielet zbioru zawartego w kole wielkim jest również zawarty w tym kole. Jeżeli dodamy do takiego zbioru jeden lub dwa punkty w sposób opisany w twierdzeniu, wówczas taki zbiór będzie posiadać wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny. Również w sytuacji, gdy poza kołem wielkim znajdują się dokładnie trzy punkty w takim położeniu jak w podpunkcie (e), taki zbiór posiada wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny.



$\implies$ ) Załóżmy, że zbiór  $G$  ma wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny. Możemy również założyć, że nie wszystkie punkty z  $G$  zawarte są w kole wielkim. Niech zatem  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ ,  $g_1, g_2, g_3 \in G$  będzie trójkątem sferycznym o minimalnej powierzchni spośród wszystkich trójkątów sferycznych posiadających wierzchołki ze zbioru  $G$ . To oznacza, że trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  nie zawiera żadnego innego punktu z  $G$  poza swoimi wierzchołkami. Z Twierdzenia 4.3.2 wiemy, że żaden inny punkt z  $G$  nie należy do obszaru zakazanego trójkąta  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ . Rozpatrzmy teraz wszystkie możliwe przypadki położenia pozostałych punktów ze zbioru  $G$ .

(I) Rozważmy sytuację, gdy żadne z kół wielkich  $g_1g_2$ ,  $g_2g_3$ ,  $g_1g_3$  nie zawiera innych punktów z  $G$ . Jeżeli zbiór  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ , wówczas otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.11b. W przeciwnym razie punkt  $g_4 \in \text{int } \Delta(g_3, -g_1, -g_2)_S \cup \text{int } \Delta(g_2, -g_1, -g_3)_S \cup \text{int } \Delta(g_1, -g_2, -g_3)_S \cup \text{int } \Delta(-g_1, -g_2, -g_3)_S$ .

(IA) Niech  $g_4 \in \text{int } \Delta(g_3, -g_1, -g_2)_S$ . Możemy wybrać  $g_4$  w taki sposób, że trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_4)_S$ , który zawiera trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ , nie zawiera innych punktów z  $G$  poza  $g_1, g_2, g_3, g_4$ . Zauważmy, że żaden z trójkątów  $\Delta(g_1, g_2, g_4)_S$ ,  $\Delta(g_1, g_3, g_4)_S$  oraz  $\Delta(g_2, g_3, g_4)_S$  nie zawiera punktów z  $G$  innych niż wierzchołki. Suma wszystkich obszarów zakazanych trójkątów  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ ,  $\Delta(g_1, g_3, g_4)_S$  oraz  $\Delta(g_2, g_3, g_4)_S$  zawiera zewnątrz trójkąta  $\Delta(g_1, g_2, g_4)_S$  z wyjątkiem odcinków sferycznych  $[g_1, -g_3]_S$ ,  $[g_2, -g_3]_S$  i  $[g_4, -g_3]_S$ . Odcinki sferyczne  $[g_1, -g_3]_S$  i  $[g_2, -g_3]_S$  zawierają się w kołach wielkich  $g_1g_3$  i  $g_2g_3$  odpowiednio, dlatego też nie mogą zawierać punktów z  $G$ . Wyłącznie odcinek sferyczny  $[g_4, -g_3]_S$  może zawierać inne punkty z  $G$ . To prowadzi nas do przypadku z Rysunku 4.11d. Jeżeli  $g_4 \in \Delta(g_1, -g_2, -g_3)_S$  lub  $\Delta(g_2, -g_1, -g_3)_S$  otrzymujemy analogiczne sytuacje prowadzące do tego samego przypadku.

(IB) Żaden z punktów z  $G$  nie należy do  $\text{int } \Delta(g_3, -g_1, -g_2)_S \cup \text{int } \Delta(g_2, -g_1, -g_3)_S \cup \text{int } \Delta(g_1, -g_2, -g_3)_S$  oraz  $g_4 \in \Delta(-g_1, -g_2, -g_3)_S$ . Żaden z trójkątów o wierzchołkach z  $G$  nie jest zawarty w antypodycznym trójkącie  $\Delta(-g_1, -g_2, -g_3)_S$ , gdyż miałby on mniejsze pole powierzchni niż trójkąt  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$ . Zatem wszystkie punkty  $g_4, \dots, g_n$  z  $G$  należą do jednego z półkół wielkich  $[g_1, g_4]_S \cup [g_4, -g_1]_S$ ,  $[g_2, g_4]_S \cup [g_4, -g_2]_S$  lub  $[g_3, g_4]_S \cup [g_4, -g_3]_S$ . To prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.11d.

(II) Jedno z kół wielkich  $g_1g_2$ ,  $g_2g_3$  lub  $g_1g_3$  zawiera dokładnie trzy punkty z  $G$ . Bez utraty ogólności możemy założyć, że  $g_4$  zawiera się w kole wielkim  $g_2g_3$ . Koło wielkie  $g_2g_3$  jest podzielone przez punkty  $g_2, -g_2, g_3$  i  $-g_3$  na cztery odcinki sferyczne  $[g_2, g_3]_S$ ,  $[-g_2, g_3]_S$ ,  $[g_2, -g_3]_S$  i  $[-g_2, -g_3]_S$ , poniższe przypadki zależne są od umieszczenia punktu  $g_4$ .

(IIA) Niech  $g_4 = -g_2$ . Jeżeli zbiór  $G$  ma tylko cztery punkty wtedy uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11b. W przeciwnym razie punkt  $g_5 \in G$  może należeć do jednego z następujących podzbiorów sfery.

(IIA1) Niech  $g_5 \in \text{int } \Delta(g_1, -g_3, g_4)_S$ . Punkt przecięcia  $[g_3, g_5]_S \cap [g_1, g_4]_S$  jest zawarty w zbiorze  $G$ . To prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.11c, gdzie koło wielkie  $g_1g_2$  jest kołem wielkim  $l$ .

(IIA2) Niech  $g_5 \in \Delta(-g_1, g_2, g_3)_S \cup \Delta(-g_1, -g_2, -g_3)_S$  (dwukąt z wierzchołkami  $g_2$  i  $-g_2 = g_4$ ). Koło wielkie  $g_1g_2$  jest kołem wielkim  $l$ . Jeżeli  $[g_3, g_5]_S \cap l \in G$ , wówczas uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11c. W przeciwnym wypadku prowadzi to do sytuacji z Rysunku 4.11d.

(IIA3) Niech  $g_5$  będzie zawarte w kole wielkim  $g_1g_3$ . To prowadzi do sytuacji z Rysunku 4.11c. Jeżeli koło wielkie  $g_1g_3$  nie zawiera innych punktów z  $G$ , wówczas jedno z kół wielkich  $g_1g_2$  lub  $g_2g_3$  jest naszym kołem  $l$ . W przeciwnym razie, to koło wielkie  $g_1g_3$  jest naszym kołem  $l$ .

Przypadek, gdy  $g_4 = -g_3$  jest analogiczny do przypadku  $g_4 = -g_2$ .

(IIB) Niech  $g_4 \in \text{relint } [-g_2, g_3]_S$ . Trójkąt  $\Delta(g_1, g_3, g_4)_S$  nie zawiera innych punktów z  $G$  poza wierzchołkami. Jeżeli zbiór  $G$  nie zawiera innych punktów, uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11b. W przeciwnym razie, rozważamy jeden z czterech przypadków.

(IIB1) Punkty  $g_5$  i  $g_6$  należą do odcinków sferycznych  $[g_1, -g_3]_S$  i  $[g_2, -g_1]_S$ . Wówczas moc zbioru  $|G|$  jest równa sześć i otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.11e.

(IIB2) Punkt  $g_5 \in G$  leży na kole wielkim  $g_1g_3$ . To prowadzi do sytuacji z Rysunku 4.11c, gdzie koło wielkie  $g_1g_3$  jest kołem wielkim  $l$ .

(IIB3) Punkt  $g_5$  leży na kole wielkim  $g_1g_2$  lub  $g_1g_4$ , wówczas otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.11c gdzie koło wielkie  $g_2g_3$  jest kołem wielkim  $l$ . W tym przypadku zbiór  $G$  ma dokładnie pięć punktów.

(IIB4) Punkt  $g_5$  jest położony w trójkącie  $\Delta(g_4, -g_1, -g_3)_S$  lub trójkącie  $\Delta(g_2, -g_1, -g_3)_S$ , ale nie na kole wielkim  $g_1g_3$ . To prowadzi do sytuacji z Rysunku 4.11d. Również w tym przypadku zbiór  $G$  jest pięcioelementowy.

Przypadek, gdy punkt  $g_4 \in \text{relint } [g_2, -g_3]_S$  jest analogiczny do przypadku, gdy  $g_4 \in \text{relint } [-g_2, g_3]_S$ .

(IIC) Niech  $g_4 \in \text{relint}[-g_2, -g_3]_S$ . Jeżeli zbiór  $G$  nie zawiera innych punktów, wówczas otrzymujemy sytuację z Rysunku 4.11b. W przeciwnym razie, z faktu, że  $G$  ma wewnątrz przecinający się szkielet sferyczny, punkty  $g_5, \dots, g_n, n = |G|$  należą do jednego ze zbiorów  $[g_2, -g_1]_S, [g_3, -g_1]_S$  lub  $[g_1, g_4]_S \cup [g_4, -g_1]_S$ . Przypadki te są reprezentowane przez Rysunek 4.11d, gdzie koło wielkie  $l$  jest, odpowiednio, kołami wielkimi  $g_1g_2, g_1g_3$  lub  $g_1g_4$ .

(III) Koło wielkie  $g_2g_3$  zawiera dokładnie cztery punkty  $g_2, g_3, g_4, g_5$  w takiej kolejności i żadne z kół wielkich  $g_1g_2$  czy  $g_1g_3$  nie zawiera dokładnie trzech punktów z  $G$ . Te koła wielkie mogą zawierać dwa, cztery lub więcej punktów z  $G$ .

(IIIA) Szkielet sferyczny zbioru  $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$  jest równy kołu wielkiemu  $g_2g_3$ .

(IIIA1) Jeżeli  $g_4 = -g_2$  i  $g_5 = -g_3$ , wówczas punkt  $g_6 = -g_1$  należy do  $G$ . Inne punkty  $G$  mogą należeć do jednego z kół wielkich  $g_1g_2$  lub  $g_1g_3$ . Uzyskujemy zatem sytuację z Rysunku 4.11c, gdzie kołem wielkim  $l$  jest koło wielkie  $g_1g_2$  lub  $g_1g_3$ .

(IIIA2) Jeżeli  $g_4 = -g_2$  i  $g_5 \neq -g_3$ , wówczas koło wielkie  $g_1g_2$  zawiera pewien punkt  $g_6$  z  $G$  inny niż  $g_1, g_2$  lub  $g_4$ . Uzyskujemy wówczas sytuację z Rysunku 4.11c, gdzie koło wielkie  $g_1g_2$  jest kołem wielkim  $l$ .

(IIIA3) Jeżeli  $g_4 \neq -g_2$  i  $g_5 = -g_3$ , wówczas uzyskujemy sytuację analogiczną do powyższej.

(IIIA4) Niech  $g_4 \neq -g_2$  i  $g_5 \neq -g_3$ . Przez  $H(l, g)$  oznaczmy półsferę która zawiera punkt  $g$  i posiada brzeg opisany jako koło wielkie  $l$ . Analizując obszary zakazane uzyskujemy, że  $H(\text{koło wielkie } g_2g_3, g_1)$  nie posiada innych punktów z  $G$ . Zbiór  $G$  może nie posiadać więcej punktów (sytuacja z Rysunku 4.11b) lub posiadać jeszcze jeden punkt  $g_6$ , który leży na odcinku  $[g_4, -g_1]_S$  lub  $[g_5, -g_1]_S$  (sytuacja z Rysunku 4.11c).

(IIIB) Szkielet sferyczny zbioru  $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$  jest podzbiorem właściwym koła wielkiego  $g_2g_3$ .

(IIIB1) Jeżeli zbiór  $G$  jest pięcioelementowy, wówczas uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11b.

(IIIB2) Niech punkt  $g_6$  leży na jednym z odcinków  $[g_2, -g_1]_S, [g_3, -g_1]_S, [g_4, -g_1]_S$  lub  $[g_5, -g_1]_S$ . Jeżeli  $g_6 \in [g_2, -g_1]_S$  lub  $g_6 \in [g_3, -g_1]_S$ , wówczas punkt  $g_4$  lub  $g_5$  musi być równy, odpowiednio,  $-g_3$  lub  $-g_2$ . Niezależnie, uzyskujemy sytuację

z Rysunku 4.11c.

(IIIB3) Jeżeli punkt  $g_6$  nie należy do żadnego z odcinków wymienionych powyżej przecięcie szkieletu sferycznego  $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$  i odcinka sferycznego  $[g_1, g_6]_S$  jest pusty. To daje nam sytuację z Rysunku 4.11d.

(IV) Koło wielkie  $g_2g_3$  zawiera kolejne punkty  $g_2, g_3, g_4, \dots, g_n$ ,  $n > 5$  z  $G$  i żadne z kół wielkich  $g_1g_2$  czy  $g_1g_3$  nie zawiera dokładnie trzech lub czterech punktów z  $G$ . Wówczas koło wielkie  $g_2g_3$  jest naszym kołem wielkim  $l$ . Jeżeli zachodzi  $|G| = n$  mamy sytuację z Rysunku 4.11b. W przeciwnym razie,  $|G| > n$  i mamy jeden z następujących przypadków.

(IVA) Szkielet sferyczny  $\{g_2, g_3, g_4, \dots, g_n\}$  jest równy kołu wielkiemu  $g_2g_3$ . Wówczas punkt  $g_{n+1}$  należy do jednego z odcinków sferycznych  $[g_i, -g_1]_S$ ,  $i = 4, \dots, n$ . To prowadzi nas do sytuacji z Rysunku 4.11c.

(IVB) Szkielet sferyczny  $\{g_2, g_3, g_4, \dots, g_n\}$  jest właściwym podzbiorem koła wielkiego  $g_2g_3$ .

(IVB1) Jeżeli punkt  $g_{n+1}$  należy do jednego z odcinków  $[g_i, -g_1]_S$ ,  $i = 4, \dots, n$ , to uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11c.

(IVB2) Jeżeli  $g_{n+1}$  nie należy do żadnego z odcinków wymienionych powyżej, wówczas przekrój szkieletu sferycznego  $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$  i odcinka sferycznego  $[g_1, g_{n+1}]_S$  jest pusty. Uzyskujemy sytuację z Rysunku 4.11d.  $\square$

#### 4.4. KLASYFIKACJA ZAMKNIĘTYCH RODZIN $G$ -WIEŁOŚCIANÓW

Twierdzenie 4.3.3 w pełni charakteryzuje skończone podzbiory  $G$  sfery jednostkowej takie, że rodzina zbiorów wielościennych z wektorami normalnymi należącymi do  $G$  jest zamknięta ze względu na sumę Minkowskiego. Jednak nieograniczone zbiory wielościenne nie są  $G$ -wielościanami. Określimy zatem w tym paragrafie, precyzyjniej niż w Twierdzeniu 4.1.5, zbiory  $G$  takie, że rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  wszystkich ograniczonych przekrojów półprzestrzeni z wektorami normalnymi należącymi do  $G$  jest zamknięta ze względu na sumę Minkowskiego.

**Twierdzenie 4.4.1.** *Rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  wszystkich ograniczonych przekrojów półprzestrzeni z wektorami normalnymi należącymi do  $G$  jest zamknięta ze względu na*

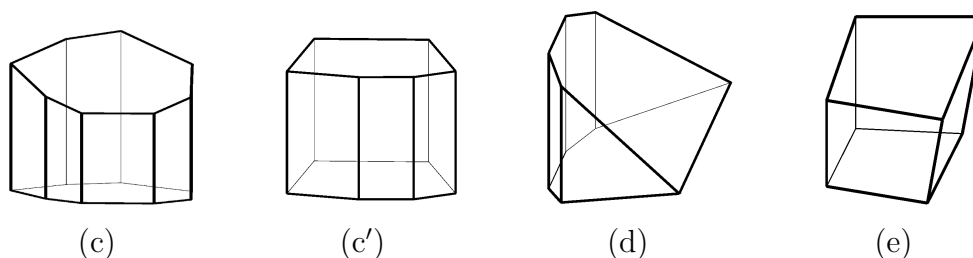
sumę Minkowskiego wtedy i tylko wtedy, gdy dla skończonego zbioru  $G$  i pewnego koła wielkiego  $l$  jeden z poniższych warunków (porównując z Twierdzeniem 4.3.3) jest spełniony:

(c) Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g, g'$  leżą na przeciwległych półsferach wyznaczonych przez koło wielkie  $l$  i punkt przecięcia  $l$  z odcinkiem sferycznym  $[g, g']_S$  należy do  $G$ . Co więcej,  $G \cap l$  nie zawiera się w żadnym półokręgu.

(c') Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g$  i  $g'$  są antypodyczne. Co więcej,  $G \cap l$  nie zawiera się w żadnym półokręgu.

(d) Zachodzi  $G \setminus l = \{g, g'\}$ , gdzie punkty  $g$  i  $g'$  leżą na przeciwległych półsferach wyznaczonych przez koło wielkie  $l$  i  $G \cap l$  zawiera się w pewnym półokręgu, który jest rozłączny z odcinkiem sferycznym  $[g, g']_S$ . Co więcej, żaden półokrąg zawierający  $G \cap l$  nie zawiera punktu przecięcia  $l \cap [g, g']_S$ .

(e) Zachodzi  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_6\}$ , gdzie  $g_2, g_3, g_4 \in l$ ,  $g_3 \in [g_2, g_4]_S$ ,  $g_1 \in [g_3, g_5]_S$  oraz  $g_2 \in [g_1, g_6]_S$ . Co więcej, trójkąt sferyczny  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  nie zawiera się w trójkącie sferycznym  $\Delta(g_4, g_5, g_6)_S$ .



Rysunek 4.12: Cztery rodzaje wielościanów z Twierdzenia 4.4.1

W przypadku (c) punkty  $g, g'$  nie są antypodyczne. Wielościan ze zbiorem wektorów normalnych do ścian równym  $G$  jest graniastosłupem ściętym (Rysunek 4.12c), tj. graniastosłupem o nierównoległych podstawach. Powierzchnia boczna odpowiadająca najkrótszemu z boków w podstawach musi być równoległobokiem. W przypadku (c') punkty  $g, g'$  są antypodyczne. Odpowiadający wielościan jest graniastosłupem (Rysunek 4.12c'), tj. sumą prostą wypukłego wielokąta i odcinka. W przypadku (d) podzbiór  $G \cap l$  jest zawarty w pewnym półokręgu. Odpowiadający wielościan jest klinem (Rysunek 4.12d), tj. ściętym wielościanem z nierównoległymi podstawami posiadającymi wspólną krawędź. Co więcej, żaden odcinek równoległy do tej krawędzi i zawarty w tym wielościanie nie jest dłuższy niż ta krawędź. W przypadku (e) zbiór  $G$  jest zawarty w trzech półokręgach. Odpowiadający wielościan jest sześcianiem skośnym (Rysunek 4.12e), tj. wielościanem z sześcioma czworokątnymi ścianami, gdzie dokładnie trzy z nich są trapezoidami.

*Dowód.* Z Twierdzenia 4.1.5 rodzina  $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3)$  jest zamknięta ze względu na dodawanie Minkowskiego wtedy i tylko wtedy, gdy  $G$  jest zbiorem opisanym w Twierdzeniu

4.3.3 i przekrój rodziny półprzestrzeni wyznaczonych przez wszystkie wektory normalne z  $G$  jest ograniczony. Dowolny wielościan o wektorach normalnych z  $G$  jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy  $G$  nie zawiera się w żadnej domkniętej półsferze. Zatem przypadki z Rysunków 4.11a i 4.11b nie są odpowiednie. Co więcej, przypadki (c), (c') i (d) z Twierdzenia 4.3.3 posiadają zbiór  $G$ , który nie jest zawarty w domkniętej półsferze wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $(G \cap l) \cup ([g, g']_S \cap l)$  nie jest zawarty w domkniętym półokręgu. W przypadku (e) zbiór  $G$  nie jest zawarty w domkniętej półsferze wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt sferyczny  $\Delta(g_1, g_2, g_3)_S$  nie jest zawarty w trójkącie sferycznym  $\Delta(g_4, g_5, g_6)_S$ .  $\square$

Wszystkie powyższe wielościany są wielościanami monotypicznymi. Przekrój dwóch translacji wielościanu monotypicznego jest homotetyczną kopią składnika takiego wielościanu. Własność tą udowodnili i opisali McMullen, Schneider i Shephard w [26]. Okazuje się zatem, że dodatkową własnością wielościanów monotypicznych jest to, że są one jedynymi wielościanami wyznaczającymi taką sieć  $G$ , dla której rodzina  $(\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^3), +)$  jest półgrupą.

## ROZDZIAŁ 5

---

# BADANIE $G$ -MINIMALNOŚCI $G$ -WIELOŚCIANÓW

---

Wyniki zawarte w Paragrafie 3.6 dotyczyły wyłącznie  $G$ -minimalności  $G$ -wielokątów. W poniższym rozdziale poruszona zostanie kwestia  $G$ -minimalności  $G$ -wielościanów.

Wyniki zawarte w tym rozdziale są nieopublikowanymi wcześniej, oryginalnymi wynikami autora rozprawy.

W Paragrafie 5.1 skonstruujemy metodę redukcji dowolnej pary  $G$ -wielościanów wykorzystującą metody programowania liniowego. Za jej pomocą zdefiniujemy kryterium  $G$ -minimalności  $G$ -wielościanów. Twierdzenia te są odpowiedzią na pierwsze dwa pytania analogiczne do pytań postawionych na końcu Rozdziału 2. W tym Paragrafie wyprowadzimy również algorytm uzyskiwania zbioru wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych danej parze  $G$ -wielościanów.

Celem Paragrafu 5.2 jest sformułowanie algorytmu wyprowadzonego w poprzednim paragrafie. Jest on odpowiedzią na ostatnie z trzech pytań, gdyż generuje on zbiór wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych danej parze  $G$ -wielościanów.

W Paragrafie 5.3 przedstawimy przykład zastosowania algorytmu z poprzedniego paragrafu na parze minimalnej wielościanów. Okazuje się, że para ta nie jest parą  $G$ -minimalną dla pewnej sieci  $G$ .

## 5.1. METODA REDUKCJI I KRYTERIUM $G$ -MINIMALNOŚCI $G$ -WIEŁOŚCIANÓW

W Paragrafie 3.6 omówiliśmy sytuację dwuwymiarową. W tym paragrafie sformułujemy twierdzenia dotyczące  $G$ -minimalności  $G$ -wielokątów będących podzbiorami przestrzeni  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Wprowadzimy metodę redukcji par  $G$ -wielościanów oraz wynikające z niej kryterium  $G$ -minimalności  $G$ -wielościanów.

**Lemat 5.1.1.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^n)$  będzie parą  $G$ -wielościanów. Możemy zredukować tę parę do pary równoważnej  $(C, D)$  takiej, że  $h^C = h^A - x$  i  $h^D = h^B - x$  dla pewnego  $x \in \mathbb{R}^k, x \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $M_G h^A \geq M_G x$  i  $M_G h^B \geq M_G x$  gdzie  $M_G$  jest macierzą sieci  $G$ .*

*Dowód.* Możemy zredukować  $(A, B)$  do  $(C, D)$ , jeżeli wartości  $h^C$  i  $h^D$  są właściwe. Wiemy z Twierdzenia 3.2.11, że oznacza to, że  $M_G h^C \geq 0$  i  $M_G h^D \geq 0$ . Jeżeli  $h^C = h^A - x$  i  $h^D = h^B - x$ , to warunki te przyjmują postać  $M_G(h^A - x) \geq 0$  oraz  $M_G(h^B - x) \geq 0$ , czyli  $M_G h^A \geq M_G x$  oraz  $M_G h^B \geq M_G x$ .  $\square$

Powyższy lemat jest metodą redukcji  $G$ -wielościanów. Metoda ta prowadzi do pary  $G$ -minimalnej, jeżeli tylko wektor  $x$  zostanie zmaksymalizowany. Mówi o tym poniższy lemat.

**Lemat 5.1.2.** *Niech  $(A, B) \in \mathcal{B}_G^2(\mathbb{R}^n)$  będzie parą  $G$ -minimalną  $G$ -wielościanów, a  $x \in \mathbb{R}^k$  będzie wektorem takim, że  $x \geq 0$ . Para  $G$ -wielościanów  $(C, D)$ , gdzie  $h^C = h^A - x, h^D = h^B - x$  jest  $G$ -równoważna parze  $(A, B)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 0$ .*

*Dowód.*  $\Leftarrow$ ) Oczywiście jest, że gdy  $x = 0$ , wówczas para  $(C, D) = (A, B)$ , zatem również  $(C, D) \stackrel{G}{\sim} (A, B)$ .

$\Rightarrow$ ) Załóżmy, że para  $G$ -wielościanów  $(C, D) \stackrel{G}{\sim} (A, B)$ , gdzie  $h^C = h^A - x, h^D = h^B - x$ . Jeżeli  $x_i > 0$  dla pewnego  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , wówczas  $C \subset A, D \subset B$ . Para  $G$ -wielościanów  $(C, D)$  byłaby wówczas parą zawierającą się i  $G$ -równoważną parze  $G$ -wielościanów  $(A, B)$ , co przeczyłoby  $G$ -minimalności tej pary. Zatem  $x_i \leq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Co wraz z założeniem  $x \geq 0$  prowadzi do  $x = 0$ .  $\square$

Z powyższych lematów możemy wyciągnąć pewien wniosek będący kryterium  $G$ -minimalności.

**Twierdzenie 5.1.3** (Kryterium  $G$ -minimalności). *Para  $G$ -wielościanów  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalny wektor  $x \in \mathbb{R}_+^k$ , taki, że para  $G$ -wielościanów  $(C, D) \stackrel{G}{\sim} (A, B)$ , gdzie  $h^C = h^A - x, h^D = h^B - x$ , jest wektorem zerowym.*



Powyższy wniosek pozwala zamienić nam zagadnienie poszukiwania pary  $G$ -minimalnej do zagadnienia maksymalizacji wektora  $x \in \mathbb{R}_+^k$  pod pewnymi warunkami. Jest to zatem problem optymalizacyjny. Zdefiniujemy teraz ten problem w języku programowania matematycznego.

**Stwierdzenie 5.1.4.** *Niech  $x \in \mathbb{R}_+^k$ . Wektor  $x$  jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy suma  $\sum_{i=1}^k c_i x_i$ , gdzie  $c_i > 0$  są ustalone, jest maksymalna.*

*Dowód.* Przy stałych wartościach  $c_i > 0$  zwiększenie sumy  $\sum_{i=1}^k c_i x_i$  jest równoznaczne ze zwiększeniem wektora  $x$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.1.5** (Metoda redukcji pary  $G$ -wielościńców). *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^{n-1}$  będzie siecią,  $M_G$  macierzą tej sieci,  $A, B$   $G$ -wielościńcami, współczynniki  $c_i > 0$  będą ustalone. Jeżeli wektor  $x \in \mathbb{R}^k$  jest rozwiązaniem problemu*

$$\begin{aligned} & \text{zmaksymalizować } \sum c_i x_i \\ & \text{przy ograniczeniach } Mx \leq b \text{ oraz } x \geq 0 \end{aligned}$$

*gdzie  $M$  jest macierzą złożoną wierszowo z dwóch kopii macierzy sieci  $M_G$ , wektor  $b$  jest złożony wierszowo z wektora  $M_G h^A$  i wektora  $M_G h^B$ , to para  $G$ -wielościńców  $(C, D)$  taka że  $h^C = h^A - x$  i  $h^D = h^B - x$  jest parą  $G$ -minimalną równoważną i zawartą w parze  $(A, B)$ .*

*Dowód.* Twierdzenie wynika bezpośrednio z Lematów 5.1.1 i 5.1.2, Twierdzenia 5.1.3 oraz Stwierdzenia 5.1.4.  $\square$

Po sformułowaniu metody redukcji możemy zapewnić o istnieniu pary  $G$ -minimalnej.

**Twierdzenie 5.1.6.** *Niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościńców. Wówczas istnieje para  $G$ -minimalna  $(C, D) \in [(A, B)]_{\mathcal{G}}$ .*

*Dowód.* Niech para  $(C, D)$  spełnia założenie  $h^C = h^A - x$  i  $h^D = h^B - x$ , gdzie  $0 \leq x$ . Zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu optymalizacyjnego z Twierdzenia 5.1.5 nie jest pusty. Wynika to z faktu, że dla  $x = 0$  spełnione są nierówności  $0 \leq M_G h^C$  i  $0 \leq M_G h^D$ . Ponadto tak długo jak  $0 \leq x$ , na każdej współrzędnej wartość  $x_i$  jest ograniczona przez  $x_i \leq \min(A(-g_i), B(-g_i))$ . Jest tak dlatego, że gdyby  $x_i$  przekroczył tę wartość, wówczas przekrój półprzestrzeni odpowiadający  $G$ -wielościńcowi  $C$  lub  $D$  byłby pusty. Wiemy zatem, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest ograniczony, zawarty w dodatnim ortancie i niepusty. Oznacza to, że istnieje skończone rozwiązanie optymalne tego zagadnienia.  $\square$

## Pytania dotyczące $G$ -minimalności par

Rodział 2. został zakończony pytaniami dotyczącymi minimalności par. Sformułujemy teraz analogiczne pytania dla rodziny  $G$ -wielościaków i udzielimy na nie odpowiedzi.

1. W jaki sposób ustalić czy para  $G$ -wielościaków  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną?
2. W jaki sposób zredukować parę  $G$ -wielościaków  $(A, B)$  do pary  $G$ -minimalnej?
3. W jaki sposób wyznaczyć wszystkie pary  $G$ -minimalne  $G$ -równoważne parze  $G$ -wielościaków  $(A, B)$ ?

Wniosek 5.1.3 oraz Twierdzenie 5.1.5 są efektywną metodą odpowiedzi na pierwsze dwa pytania. Po rozwiązaniu problemu optymalizacyjnego i uzyskaniu wyniku innego niż wektor zerowy, wiemy że para nie jest parą  $G$ -minimalną. Co więcej, wiemy że rozwiązanie tego problemu optymalizacyjnego pozwala skonstruować parę  $G$ -minimalną równoważną danej. Niemniej aby dla danej pary  $G$ -wielościaków  $(A, B)$  uzyskać pełną metodę redukcji tej pary do pary  $G$ -minimalnej  $G$ -wielościaków musimy poznać sposób na uzyskanie macierzy sieci  $M_G$  oraz na maksymalizację wektora  $x$ .

### Macierz sieci $M_G$

Macierz sieci  $G$  dla  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^{n-1}$  możemy wygenerować w następujący sposób. Rozważamy wszystkie, co najwyżej  $n + 1$ -elementowe, podzbiory sieci składające się z afinicznie niezależnych  $G$ -wektorów. Następnie dla takiego  $l$ -elementowego podzbioru, gdzie  $l \leq n + 1$  wyznaczamy takie współczynniki  $\alpha_j$ , że  $\sum_{j=1}^l \alpha_j g_j = 0$ , gdzie  $\sum_{i=j}^l \alpha_j = 1$ . Uzyskujemy zatem układ równości posiadający co najwyżej jedno rozwiązanie. Współczynniki  $\alpha_j$  wpisujemy do jednego wiersza macierzy  $M_G$  w taki sposób, aby  $\alpha_j$  było w kolumnie o indeksie  $i$ , gdzie  $i$  jest indeksem  $g_j$  w sieci  $G$ . Pozostałe kolumny uzupełniamy zerami. Postępując tak dla wszystkich co najwyżej  $(n + 1)$ -elementowych kombinacji afinicznie niezależnych  $G$ -wektorów uzyskujemy macierz  $M$ . Aby macierz  $M$  była  $G$ -macierzą musimy usunąć z niej wszystkie powtarzające się wiersze oraz te wiersze, w których znajduje się więcej niż jeden ujemny współczynnik. W ten sposób uzyskujemy macierz  $M_G$ , która jest jedyna z dokładnością do kolejności wierszy. Pozostaje zatem kwestia maksymalizacji wektora  $x \in \mathbb{R}^k$ .

### Maksymalizacja wektora $x$

Ze względu na postać naszego problemu możemy wykorzystać szeroko opisywaną w literaturze [7, 24, 39] metodę algorytmu sympleksowego, zwaną też metodą sym-

pleks. Metoda ta sprawdza się dla problemów optymalizacyjnych takiej postaci jak w Twierdzeniu 5.1.5, czyli maksymalizacja funkcji celu  $\sum c_i x_i$  przy ograniczeniach  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ . Wówczas w wyniku działania takiego algorytmu otrzymujemy zmaksymalizowany wektor  $x$  będący wierzchołkiem zbioru rozwiązań dopuszczalnych, a dla  $c_i > 0$  wierzchołkiem zbioru rozwiązań optymalnych będących podzbiorem zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Jest to jednak tylko jedno z rozwiązań, zatem nie odpowiada to na ostatnie pytanie.

## Zbiór wszystkich par $G$ -minimalnych

W celu sformułowania metody znalezienia wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych danej parze  $(A, B)$  rozważymy pewne modyfikacje postawionego problemu. Zauważmy, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest wielościanem wypukłym. Jako wielościan wypukły jest przekrojem skończonej liczby półprzestrzeni. Półprzestrzenie te generowane są poprzez macierz  $M_G$  ze względu na to, że ograniczenia w problemie optymalizacyjnym są postaci  $M_G x \leq M_G h$  dla odpowiedniego wektora  $h$ . Oznacza to, że każda półprzestrzeń opisana jest wzorem  $\sum_{i=1}^k \alpha_{ji} x_i \leq \alpha_{ji} h_i$ . Metoda simpleks zwraca nam zawsze jeden z wierzchołków zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Co więcej jest to ten wierzchołek, który jest podpierany przez funkcję podparcia wektora wag. Wiedząc, że zbiór rozwiązań jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ , wiemy że każdy wierzchołek jest przekrojem co najmniej  $k$  półprzestrzeni. Co więcej, jeżeli wierzchołek jest przekrojem więcej niż  $k$  półprzestrzeni, to da się z nich wybrać dokładnie  $k$  półprzestrzeni tak, aby ten wierzchołek był przekrojem hiperpłaszczyzn będących brzegiem tych półprzestrzeni. Jeżeli rozważymy teraz współczynniki tych półprzestrzeni  $\alpha_{ji}$  i ich średnią po współrzędnej  $j$ , to uzyskamy hiperpłaszczyznę, której współczynniki możemy użyć jako wektora wag. Wówczas funkcja podparcia wektora będącego tymi współczynnikami będzie podpierać zbiór rozwiązań dopuszczalnych dokładnie w tym wierzchołku. Oznacza to, że rozpatrując wszystkie takie wektory wag w metodzie simpleks wygenerujemy wszystkie rozwiązania będące wierzchołkami zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Istnieją jednak dwa problemy takiego podejścia. Po pierwsze, w praktycznym zastosowaniu musielibyśmy wiedzieć, które dokładnie hiperpłaszczyzny tworzą wierzchołki zbioru dopuszczalnych rozwiązań. Wyjściem z tej sytuacji jest rozważenie wszystkich możliwych  $k$ -elementowych zbiorów półprzestrzeni wybranych ze wszystkich półprzestrzeni. Nie otrzymamy wówczas wyłącznie wierzchołków jako przekrojów hiperpłaszczyzn, gdyż dla niektórych z tych zbiorów hiperpłaszczyzny zawarte w nim  $k$  półprzestrzeni nie przecinają się w jednym punkcie. Jednak metoda simpleks zwróci nam wyłącznie wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Niestety generuje to drugi problem. Otrzymane w ten sposób wierzchołki, ze względu na

brak warunków na  $c_i$ , nie muszą być wierzchołkami zbioru rozwiązań optymalnych, czyli pary uzyskane przy pomocy tych rozwiązań nie muszą być wcale parami  $G$ -minimalnymi. Wystarczy jednak dla otrzymanego rozwiązania  $x$  rozważyć parę  $(C, D)$ , taką że  $h^C = h^A - x$  i  $h^D = h^B - x$  i zredukować ją. Dla wektora wag złożonego z samych jedynek uzyskamy za pomocą metody simpleks pewne rozwiązanie maksymalne  $x'$ . Jeżeli będzie to wektor zerowy, wówczas para  $(C, D)$  jest parą  $G$ -minimalną równoważną parze  $(A, B)$ , w jakimkolwiek innym przypadku para ta nie jest parą  $G$ -minimalną.

### **Pary $G$ -minimalne nie zawierające się w $(A, B)$**

W opisany powyżej sposób uzyskamy wszystkie pary  $G$ -minimalne równoważne danej parze  $G$ -wielościanów  $(A, B)$  spełniające dwa warunki. Pierwszym z nich jest zawieranie się tych par w parze  $(A, B)$ . Naszym celem jest jednak znalezienie wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych do  $(A, B)$ , również tych, które nie zawierają się w parze  $(A, B)$ . Aby znaleźć również te pary możemy skorzystać z faktu, że zbiór rozwiązań optymalnych jest zbiorem spójnym. Rozważmy zatem zbiór par  $G$ -minimalnych równoważnych i zawierających się w parze  $(A', B') = (A \overset{G}{+} J, B \overset{G}{+} J)$ , gdzie  $J$  jest zbiorem, którego  $H_G$ -reprezentacja jest wektorem jedynek. Para  $(A, B)$  jest równoważna parze  $(A', B')$  i zawarta w niej. Dlatego też, jeżeli istniałaby para  $G$ -minimalna równoważna i nie zawierająca się w parze  $(A, B)$ , to zbiór rozwiązań dla  $(A', B')$  powinien różnić się znacząco od zbioru rozwiązań dla pary  $(A, B)$ . Wiemy, że każde rozwiązanie powinno być powiększone o wektor jedynek w stosunku do rozwiązania dla pary  $(A, B)$ . Wartości liczbowe będą zatem istotnie różne, jednak otrzymane pary  $(C, D)$  dla rozwiązania  $x$  pary  $(A, B)$  i  $(C', D')$  dla rozwiązania  $x'$  dla pary  $(A, B)$  powinny być porównywalne. Reprezentacje tych par mogą różnić się jednak ze względu na fakt, że pary otrzymane z dwóch rozwiązań mogą być swoimi translacjami. Aby sprawdzić czy dwie  $H_G$ -reprezentacje par  $(h^C, h^D)$  i  $(h^{C'}, h^{D'})$  są swoimi translacjami należy rozważyć wektory  $h^C - h^{C'}$  oraz  $h^D - h^{D'}$ , a następnie sprawdzić czy takie wektory są taką samą kombinacją wektorów  $h^{e_i}$ , gdzie  $\{e_i\}$  jest zbiorem jednopunktowym takim, że na  $i$ -tej współrzędnej tego punktu występuje 1, a na pozostałych współrzędnych występuje 0. Jeżeli dwie otrzymane pary za pomocą różnych rozwiązań są swoimi translacjami, to takie rozwiązania będziemy ze sobą utożsamiać. Jeżeli zbiory rozwiązań nie różnią się dla  $(A, B)$  i  $(A', B')$  po takim utożsamieniu, oznacza to, że nie istnieje para  $G$ -minimalna równoważna parze  $(A, B)$ , ale nie zawarta w niej. Gdyby jednak zbiory różniły się, należy dodawać wektor jedynek tak długo, aż dla dwóch kolejnych takich par zbiór rozwiązań nie będzie się różnił w znaczący sposób.

## Pary $G$ -minimalne nie uzyskane za pomocą metody simpleks

Drugim warunkiem, który spełniają pary otrzymane za pomocą algorytmu simpleksowego jest fakt, że są one jedynie wierzchołkami zbioru rozwiązań optymalnych, czyli par  $G$ -minimalnych. Aby ustalić wszystkie pary  $G$ -minimalne należy sprawdzić wszystkie podzbiory par uzyskanych za pomocą metody simpleks. Jeżeli średnia arytmetyczna par z takiego podzbioru jest również parą  $G$ -minimalną, co sprawdzamy poprzez sprawdzenie jej  $G$ -minimalności dla wektora wag złożonego z samych jedynek, wówczas wszystkie kombinacje liniowe par z tego podzbioru również są parami  $G$ -minimalnymi. Postępując tak dla wszystkich podzbiorów otrzymanych wierzchołków jesteśmy w stanie ustalić wszystkie pary  $G$ -minimalne należące do zbioru rozwiązań optymalnych. Metoda ta pozwala za pomocą zbioru wierzchołków zbioru rozwiązań optymalnych ustalić cały zbiór rozwiązań optymalnych, czyli w naszym przypadku zbiór par  $G$ -minimalnych równoważnych parze  $(A, B)$ , który oznaczamy przez  $\text{Min}_G(A, B)$ . Jest to metoda odpowiadająca na trzecie z postawionych pytań.

## 5.2. ALGORYTM UZYSKIWANIA ZBIORU PAR $G$ -MINIMALNYCH

Poniższy algorytm jest streszczeniem rozumowania z poprzedniego paragrafu i jest efektywną metodą ustalenia zbioru  $\text{Min}_G(A, B)$  wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych do danej pary  $G$ -wielościanów  $(A, B)$ .

**Twierdzenie 5.2.1.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  będzie siecią oraz niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów o  $H_G$ -reprezentacjach  $h^A$  i  $h^B$ . Poniższy algorytm generuje zbiór  $\text{Min}_G(A, B)$  wszystkich par  $G$ -minimalnych w klasie  $[(A, B)]_{\mathcal{G}}$ .*

1. Wyliczenie macierzy  $M_G$ .
2. Wyznaczenie zbioru wag  $\{c^1, c^2, \dots, c^k\}$ , gdzie  $c^j = (c_1^j, c_2^j, \dots, c_k^j)$ .
3. Redukcja pary  $(A, B)$  za pomocą metody simpleksowej do pary  $(C^j, D^j)$  dla każdej z wag  $c^j$ .
4. Sprawdzenie czy para  $(C^j, D^j)$  jest  $G$ -minimalna za pomocą metody simpleksowej z jedynekowym wektorem wag.
5. Dołączenie pary  $(C^j, D^j)$  do zbioru rozwiązań  $\text{Min}_G(A, B)$ , jeżeli jest parą  $G$ -minimalną i nie jest translacją którejkolwiek z par należących już do zbioru  $\text{Min}_G(A, B)$ .

6. Powiększenie pary z punktu 3. poprzez dodanie  $G$ -wielościanu  $J$  uzyskując parę  $(A', B') = (A \overset{G}{+} J, B \overset{G}{+} J)$ .
7. Powtórzenie punktów 3. - 5. tworząc nowy zbiór rozwiązań  $\text{Min}_G(A', B')$  dla pary z punktu 6.
8. Powtórzenie punktów 6. - 7. aż do uzyskania równości, co do translacji par, zbiorów  $\text{Min}_G(A', B')$  i  $\text{Min}_G(A' \overset{G}{+} J, B' \overset{G}{+} J)$  oraz przyjęcie  $\text{Min}_G(A, B) = \text{Min}_G(A', B')$ .
9. Uzupelnienie zbioru  $\text{Min}_G(A, B)$  o pary  $G$ -minimalne będące kombinacjami liniowymi par znajdujących się już w  $\text{Min}_G(A, B)$ .

Zbiór wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych danej parze  $G$ -wielościanów  $(A, B)$  może być rozważany jako zbiór w przestrzeni  $k$ -wymiarowej ze względu na utożsamienie każdej pary  $G$ -minimalnej  $(C, D)$  z wektorem  $x \in \mathbb{R}^k$ , gdzie  $h^C = h^A - x$  oraz  $h^D = h^B - x$ . Zbiór ten może nie być zbiorem wypukłym, co obrazuje przykład 5.3.1 będący przedstawieniem pełnego algorytmu uzyskiwania zbioru par  $G$ -minimalnych zaczynając od sieci  $G$  i pary  $(A, B)$ .

### 5.3. PRZYKŁAD ZBIORU PAR $G$ -MINIMALNYCH

W tym paragrafie przedstawimy przykład zastosowania algorytmu z poprzedniego paragrafu na parze minimalnej, która nie jest parą  $G$ -minimalną.

**Przykład 5.3.1.** Niech  $G = \{(t, t, t), (-t, t, t), (t, -t, t), (t, t, -t), (-t, -t, t), (-t, t, -t), (t, -t, -t), (-t, -t, -t)\} \subset S^2$ , gdzie  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , będzie siecią. Niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów z  $H_G$ -reprezentacjami  $h^A = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  oraz  $h^B = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$ . Zbiory te są widoczne na Rysunku 5.1. Para ta jest parą minimalną, co wynika z własności równoważności par zbiorów podparcia  $(A(x), B(x)) \sim (C(x), D(x))$  dla równoważnych par  $(A, B) \sim (C, D)$  i odpowiedniej struktury tych zbiorów. Jednak mimo minimalności tej pary, dla tak ustalonej sieci  $G$ , nie jest to para  $G$ -minimalna. Prześledźmy algorytm znalezienia wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych parze  $(A, B)$ .

1. Każda czwórka  $G$ -wektorów z sieci  $G$  będąca kombinacją afiniczną wektora zerowego dostarcza nam wiersz do macierzy sieci złożony ze współczynników tej kombinacji, o ile posiada co najwyżej jeden ujemny współczynnik. Uzyskujemy w ten sposób macierz sieci  $G$ .

$$M_G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Sumujemy każdy 8-elementowy podzbiór zbioru złożonego z wierszy macierzy  $M_G$  uzyskując w ten sposób wektory wagowe  $c^j$ . Otrzymujemy w ten sposób  $\binom{14}{8}$  wektorów, czyli 3003 wektory, z czego 851 z nich jest unikalnych. Przedstawimy pierwsze cztery z nich.

$$\begin{aligned} c^1 &= [ 1.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 1.5 \quad 1.5 \quad 0.5 ]^T \\ c^2 &= [ 1.25 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.75 \quad 1.25 \quad 1.25 \quad 0.5 ]^T \\ c^3 &= [ 1 \quad 0.75 \quad 0.75 \quad 1.25 \quad 1.5 \quad 1 \quad 1 \quad 0.75 ]^T \\ c^4 &= [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 ]^T \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. Dokonujemy dla każdej z 851 wag  $c^j$  redukcji metodą simpleksową uzyskując rozwiązania  $x^j$ . Maksymalizujemy funkcję  $\sum_{i=1}^k c_i^j x_i^j$  przy ograniczeniach  $M_G x^j \leq M_G h^A$ ,  $M_G x^j \leq M_G h^B$ ,  $x^j \geq 0$ . Oto rozwiązania dla pierwszych czterech wektorów wagowych.

$$\begin{aligned} x^1 &= [ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]^T \\ x^2 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 ]^T \\ x^3 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 ]^T \\ x^4 &= [ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]^T \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uzyskujemy w ten sposób tylko 15 unikalnych rozwiązań  $x^j$ . Przeindeksujemy je zatem zaczynając od jedynki.

$$\begin{aligned}
x^1 &= [ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T \\
x^2 &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 ]^T \\
x^3 &= [ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 ]^T \\
x^4 &= [ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T \\
x^5 &= [ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T \\
x^6 &= [ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 ]^T \\
x^7 &= [ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 ]^T \\
x^8 &= [ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T \\
x^9 &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 ]^T \\
x^{10} &= [ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 ]^T \\
x^{11} &= [ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 ]^T \\
x^{12} &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 ]^T \\
x^{13} &= [ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 ]^T \\
x^{14} &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 ]^T \\
x^{15} &= [ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 ]^T
\end{aligned}$$

4. Metoda simpleksowa przeprowadzona dla par  $(C^j, D^j)$  takich, że  $h^{C^j} = h^A - x^j$  oraz  $h^{D^j} = h^B - x^j$  przy wektorze wag złożonym z samych jedynek wskazała, że wszystkie powyższe rozwiązania generują pary  $G$ -minimalne.

5. Odrzucenie tych rozwiązań, dla których para  $(C^j, D^j)$  była translacją pewnej pary ze zbioru  $\{(C^1, D^1), (C^2, D^2), \dots, (C^{j-1}, D^{j-1})\}$  sprawiło, że  $\text{Min}_G(A, B) = \{(C^1, D^1), (C^4, D^4), (C^5, D^5), (C^8, D^8), (C^{15}, D^{15})\}$ .

6. Powiększamy parę  $(A, B)$ , do pary  $(A', B')$ , których  $H_G$ -reprezentacje to  $h^{A'} = (4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$  oraz  $h^{B'} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4)$ .

7. Powtórzenie punktów 3.-5. dla pary  $(A', B')$  generuje dokładnie ten sam zbiór  $\text{Min}_G(A', B') = \{(C^1, D^1), (C^4, D^4), (C^5, D^5), (C^8, D^8), (C^{15}, D^{15})\}$ .

8. Ze względu na równość zbiorów  $\text{Min}_G(A', B') = \text{Min}_G(A, B)$  nie musimy powtarzać żadnego punktu.

9. Zbadanie  $G$ -minimalności par będących średnią par z podzbiorów zbioru  $\{(C^1, D^1), (C^4, D^4), (C^5, D^5), (C^8, D^8), (C^{15}, D^{15})\}$  wykazało, że następujące pary są  $G$ -minimalne:  $(\alpha C^1 + (1-\alpha)C^4, \alpha D^1 + (1-\alpha)D^4)$ ,  $(\alpha C^1 + (1-\alpha)C^5, \alpha D^1 + (1-\alpha)D^5)$ ,  $(\alpha C^1 + (1-\alpha)C^8, \alpha D^1 + (1-\alpha)D^8)$ ,  $(\alpha C^1 + (1-\alpha)C^{15}, \alpha D^1 + (1-\alpha)D^{15})$ , gdzie  $\alpha \in [0, 1]$ . Stąd odcinki łączące parę  $(C^1, D^1)$  z parami  $(C^4, D^4)$ ,  $(C^5, D^5)$ ,  $(C^8, D^8)$  i  $(C^{15}, D^{15})$  są odcinkami zawierającymi pary  $G$ -minimalne. Zbiór wszystkich par  $G$ -minimalnych równoważnych parze  $(A, B)$  jest zatem sumą mnogościową czterech



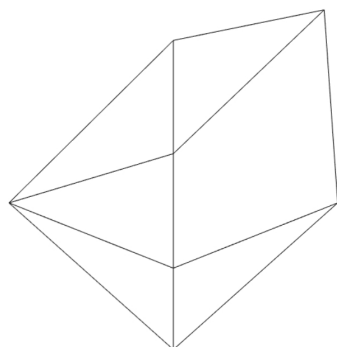
odcinków o jednym wspólnym końcu będącym parą  $(C^1, D^1)$ .

Wektory wagowe, dla których uzyskano rozwiązania  $x^1, x^4, x^5, x^8$  oraz  $x^{15}$ , to

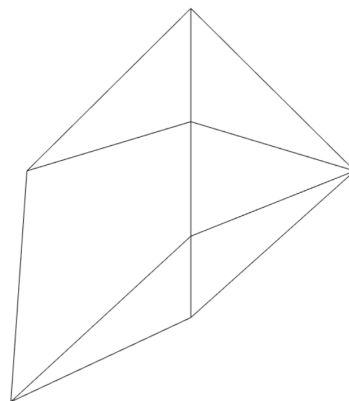
$$\begin{aligned} c^1 &= [ 1.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 1.5 \quad 1.5 \quad 0.5 ]^T \\ c^{260} &= [ 0.5 \quad 1 \quad 2 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5 ]^T \\ c^{275} &= [ 0.5 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad 2 \quad 0.5 ]^T \\ c^{414} &= [ 0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.5 ]^T \\ c^{846} &= [ 2.25 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 0.75 \quad 0.75 \quad 2 ]^T \end{aligned}$$

Zbiór wszystkich par  $G$ -minimalnych nie musi być sumą mnogościową odcinków. Autor zastosował powyższy algorytm dla innych par  $G$ -wielościanów, przy tej samej sieci  $G$ , uzyskując zbiór par  $G$ -minimalnych będący sześciokątem, jak również zbiór będący sumą mnogościową trójkąta i odcinka. Ze względu na niemal identyczny schemat działania w tych przypadkach, nie będziemy przedstawiać ich jako osobne przykłady.

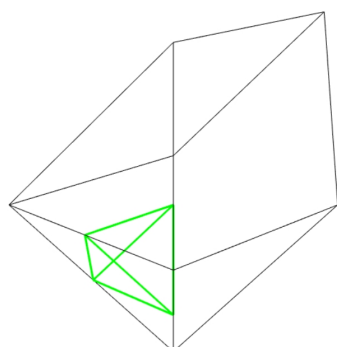
Na Rysunku 5.1 przedstawiono kolorem czarnym  $G$ -wielościany  $A$  i  $B$ , natomiast kolorem zielonym zawierające się w nich zbiory z par  $G$ -minimalnych, odpowiednio  $C^i \subset A$  oraz  $D^i \subset B$ .



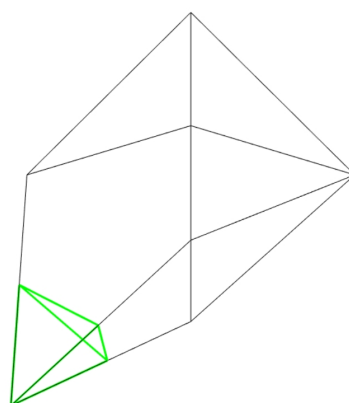
$$h^A = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



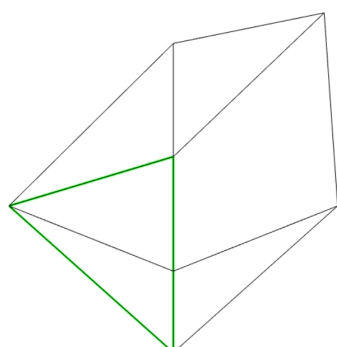
$$h^B = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$$



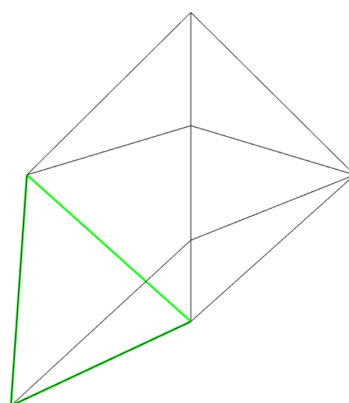
$$h^{C^1} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$



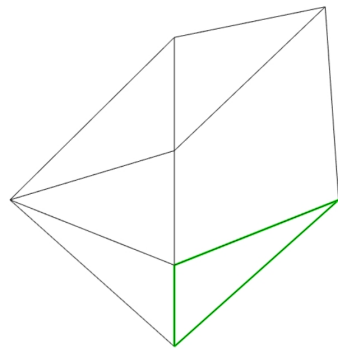
$$h^{D^1} = (-2, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3)$$



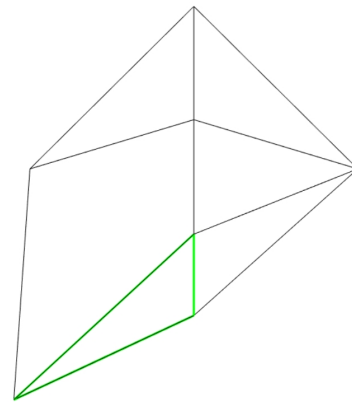
$$h^{C^4} = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



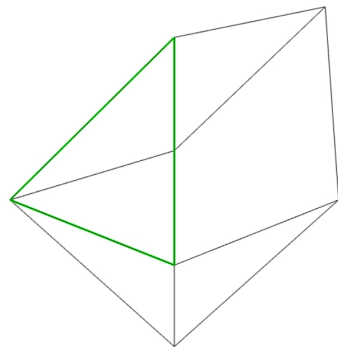
$$h^{D^4} = (-1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 3)$$



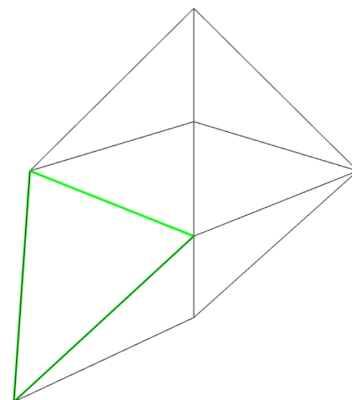
$$h^{C^5} = (1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



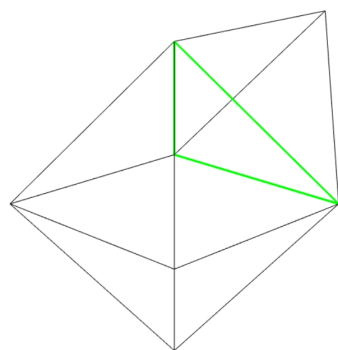
$$h^{D^5} = (-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$$



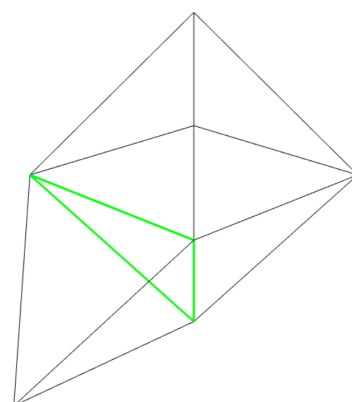
$$h^{C^8} = (1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)$$



$$h^{D^8} = (-1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 3)$$



$$h^{C^{15}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)$$



$$h^{D^{15}} = (-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

Rysunek 5.1: Para  $G$ -wielościannów  $(A, B)$  i równoważne jej pary  $G$ -minimalne

## ROZDZIAŁ 6

---

# ZASTOSOWANIA

---

W niniejszym krótkim rozdziale wskażemy, jak możemy wykorzystać  $G$ -minimalność  $G$ -wielościanów w kontekście ich minimalności. W dalszej części rozdziału przedstawione zostaną zastosowania przestrzeni Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera, jak również zagadnienia poszukiwania par minimalnych. Następnie opiszemy związek pomiędzy tymi zagadnieniami a rodziną  $G$ -wielościanów oraz wskażemy dalsze możliwe kierunki badań w tematyce  $G$ -wielościanów.

Paragraf 6.1 poświęcimy udowodnionym do tej pory przez autora rozprawy związkom między  $G$ -minimalnością  $G$ -wielościanów i ich minimalnością.

W Paragrafie 6.2 wskażemy możliwe zastosowania  $G$ -wielościanów, jak również zagadnienia, które warto poddać dalszym badaniom.

### 6.1. ZWIĄZEK MIĘDZY PARAMI MINIMALNYMI I $G$ -MINIMALNYMI

W poniższym paragrafie opiszemy metody wykorzystywania par wielościanów jako  $G$ -wielościanów do ustalenia minimalności tychże par. Ogólne warunki konieczne i dostateczne wydają się być nietrywialne i będą przedmiotem dalszych badań. Jesteśmy jednak w stanie już na tym etapie wskazać twierdzenia, które dla odpowiedniej struktury sieci  $G$  wskazują jak  $G$ -minimalność wpływa na minimalność pary  $(A, B)$ . Wszystkie  $G$ -wielościany  $A$  i  $B$  w tym paragrafie są  $G$ -wielościanami o niepustym wnętrzu.

**Definicja 6.1.1.** Wektor  $w(a) \in S^2$  nazywamy *wektorem wierzchołka  $a$  wielościanu  $A$* , jeżeli  $\{a\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, w(a) \rangle = \max_{y \in A} \langle y, w(a) \rangle\}$ .

Poniższy lemat wskazuje na związek między równoważnością par, a  $G$ -równoważnością ich  $G$ -powłok wypukłych, gdy jedna z par jest parą  $G$ -wielościanów.

**Lemat 6.1.2.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^2$  będzie siecią oraz niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów. Jeżeli para wielościanów  $(C, D)$  spełnia  $(C, D) \sim (A, B)$ , to  $(co_G(C), co_G(D)) \stackrel{G}{\sim} (A, B)$ .*

*Dowód.* Załóżmy, na potrzeby dowodu nie wprost, że  $(A, B) \sim (C, D)$ , ale  $(A, B) \not\stackrel{G}{\sim} (co_G(C), co_G(D))$ . Zachodzi zatem  $A + D = B + C$  i  $A \stackrel{G}{+} co_G(D) \neq B \stackrel{G}{+} co_G(C)$ . Istotną obserwacją jest fakt, że dowolny wielościan  $X$  możemy zapisać jako  $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle \leq h_X(y), y \in S^2\}$ . Wówczas  $co_G(X) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle \leq h_X(y), y \in G\}$ . Jeżeli  $A + D = B + C$ , to  $h_{A+D}(y) = h_{B+C}(y)$  dla  $y \in S^2$ . Z własności funkcji podparcia mamy zatem  $h_A(y) + h_D(y) = h_B(y) + h_C(y)$  dla  $y \in S^2$ . Jednak  $G \subset S^2$  zatem  $h_A(y) + h_D(y) = h_B(y) + h_C(y)$  dla  $y \in G$ . Jednak skoro  $A \stackrel{G}{+} co_G(D) \neq B \stackrel{G}{+} co_G(C)$ , to istnieje przynajmniej jeden kierunek  $g \in G$  taki, że  $h_A(g) + h_D(g) \neq h_B(g) + h_C(g)$ . Sprzeczność.  $\square$

W poniższym twierdzeniu formułujemy warunek, jaki musi spełniać sieć  $G$ , aby para  $G$ -minimalna była parą minimalną.

**Twierdzenie 6.1.3.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^2$  będzie siecią oraz niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów. Jeżeli sieć  $G$  zawiera  $w(a)$  dla każdego wierzchołka  $a$   $G$ -wielościanu  $A$  i para  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna, to para  $(A, B)$  jest parą minimalną.*

*Dowód.* Załóżmy, że sieć  $G$  zawiera  $w(a)$  dla każdego wierzchołka  $a$   $G$ -wielościanu  $A$ , para  $(A, B)$  jest  $G$ -minimalna, ale nie jest minimalna. Oznacza to, że istnieje para  $(C, D) \sim (A, B)$  taka że  $C \subset A$  i  $D \subset B$ . Wiemy z Lematu 6.1.2, że wówczas para  $(co_G(C), co_G(D)) \stackrel{G}{\sim} (A, B)$ . Para  $(A, B)$  jest jednak  $G$ -minimalna, a jednocześnie jest parą  $G$ -wielościanów, stąd  $co_G(C) = A$  i  $co_G(D) = B$ . Stąd  $h_C(g) = h_A(g)$  i  $h_D(g) = h_B(g)$  dla każdego  $g \in G$ . Wiemy jednak, że  $w(a) \in G$  dla każdego wierzchołka  $a$ . Dlatego  $h_C(w(a)) = h_A(w(a))$ , czyli zbiór  $C$  musi zawierać wszystkie wierzchołki zbioru  $A$ . Zatem  $C = A$  i  $A + D = B + C$ , czyli  $D = B$ . A to z dowolności pary  $(C, D)$  oznacza, że  $(A, B)$  jest parą minimalną. Sprzeczność.  $\square$

Nie jest prawdą, że para minimalna będzie  $G$ -minimalna dla każdej sieci  $G$  zawierającej wektor każdego wierzchołka wielościanu  $A$ . Poniższe twierdzenie gwarantuje nam jednak, że powiększanie sieci  $G$  w powyższym twierdzeniu nie zmienia jego prawdziwości.

**Twierdzenie 6.1.4.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  będzie siecią i niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów. Jeżeli  $G$  zawiera wektory  $w(a)$  dla każdego wierzchołka  $a$   $G$ -wielościanu  $A$  oraz para  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną, to jest również parą  $G'$ -minimalną, gdzie  $G' = G \cup \{g_0\}$ .*

*Dowód.* Załóżmy na potrzeby dowodu nie wprost, że para  $(A, B)$  jest parą  $G$ -minimalną i nie jest parą  $G'$ -minimalną. Skoro para  $(A, B)$  nie jest  $G'$ -minimalna, to istnieje para  $(C, D)$   $G'$ -minimalna i  $G'$ -równoważna parze  $(A, B)$ . Wiemy, że skoro  $A \stackrel{G'}{+} D = B \stackrel{G'}{+} C$ , to  $\text{co}_{G'}(A + D) = \text{co}_{G'}(A + D)$ . Oznacza to, że  $H_{G'}$ -reprezentacje spełniają  $h^A + h^D = h^B + h^C$ . Jednak równość tych reprezentacji implikuje również równość  $H_G$ -reprezentacji. Zatem  $(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$ , co wraz z  $G$ -minimalnością pary  $(A, B)$  oznacza, że  $(A, B) = (C, D)$ .  $\square$

Za pomocą powyższych twierdzeń można udowodnić minimalność pary  $(A, B)$  z Przykładu 5.3.1. Gdy do sieci  $G$  z tego przykładu dodamy zbiór sześciu wektorów odpowiadający ścianom sześcianu tworząc sieć  $G'$ , wówczas spełnione są założenia Twierdzenia 6.1.3 i para  $(A, B)$  jest  $G'$ -minimalna.

Poniższe stwierdzenie pozwala za pomocą niektórych par  $G$ -minimalnych zaprzeczyć minimalności równoważnych im par.

**Stwierdzenie 6.1.5.** *Niech  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset S^2$  będzie siecią oraz niech  $(A, B)$  będzie parą  $G$ -wielościanów. Jeżeli  $(A, B)$  posiada równoważną parę  $G$ -minimalną  $(C, D) \subset (A, B)$  taką, że  $A + D$  i  $B + C$  są  $G$ -wielościanami, to para  $(A, B)$  nie jest minimalna.*

*Dowód.* Jeżeli  $A + D$  i  $B + C$  są  $G$ -wielościanami, to  $\text{co}_G(A + D) = A + D$  oraz  $\text{co}_G(B + C) = B + C$ . Jednak skoro  $(A, B) \stackrel{G}{\sim} (C, D)$ , to  $A + D = \text{co}_G(A + D) = \text{co}_G(B + C) = B + C$ , czyli  $(A, B) \sim (C, D)$ , czyli para  $(A, B)$  nie jest minimalna.  $\square$

**Uwaga 6.1.6.** Para  $G$ -minimalna  $(C, D)$  z powyższego stwierdzenia nie musi być parą minimalną. Jest jednak parą równoważną i zawartą w parze  $(A, B)$ , co przeczy minimalności  $(A, B)$ .

## 6.2. INNE ZASTOSOWANIA

Celem poniższego paragrafu jest wskazanie możliwych zastosowań  $G$ -wielościanów i wskazanie dalszych możliwych kierunków badań.

Pary zbiorów niepustych, zwartych i wypukłych, jak i przestrzeń Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera zyskały na popularności po opublikowaniu prac [8, 9] przez Demyanova i Rubinova dotyczących rachunku quasiróżniczkowego, który jest uogólnieniem klasycznego rachunku różniczkowego. Wiele występujących w praktycznych zagadnieniach funkcji nieróżniczkowalnych jest funkcjami quasiróżniczkowalnymi. Funkcje te możemy opisać za pomocą quasiróżniczki  $Df = (\underline{\partial}f, \overline{\partial}f)$ , czyli pary zbiorów zwartych i wypukłych w przestrzeni dualnej. Jednak każda para

jej równoważna jest quasiróżniczką tej samej funkcji. Możemy zatem powiedzieć, że quasiróżniczka funkcji  $f$  jest klasą  $[(\partial f, \overline{\partial f})]_{\sim}$ . Istotnym zagadnieniem jest wówczas wskazanie minimalnego reprezentanta wewnątrz takiej klasy. Chociaż otrzymano już wiele wyników, na przykład [12–14, 17, 29], nadal w tej kwestii pozostają pewne otwarte pytania, m.in. takie jak zawarte na końcu Rozdziału 2.

W wielu zagadnieniach praktycznych istotną rolę odgrywają takie funkcje, które da się reprezentować jako różnicę dwóch funkcji o określonych własnościach. Klasę funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na przestrzeni lokalnie wypukłej  $X$  będących różnicą dwóch funkcji wypukłych oznaczamy symbolem  $DC(X)$ , natomiast funkcje należące do tej klasy nazywamy dc-funkcjami. Funkcje te opisywane były przez wielu autorów, m. in. [2, 3, 10, 42]. Jeżeli funkcję  $f = p - q$  należącą do klasy  $DC$  uzupełnimy o subliniowość funkcji  $p$  i  $q$ , wówczas taką funkcję nazywamy ds-funkcją, a klasę tych funkcji oznaczamy symbolem  $DCH(X)$ . Wskazanie dla danej ds-funkcji  $f$  funkcji  $p$  i  $q$  nie jest problemem z jednoznaczną odpowiedzią, ponieważ  $f = p - q = (p + r) - (q + r)$ . Zatem sformułować można problem znalezienia minimalnych funkcji subliniowych  $p$  i  $q$  takich, że ds-funkcja  $f$  jest ich różnicą. Problem ten jest równoważny znalezieniu minimalnej quasiróżniczki ds-funkcji  $f$ , czego dotyczy praca [16]

W praktycznym zastosowaniu znajdowanie pary minimalnej jest jednak skomplikowanym zagadnieniem. Wskazanie metody pozwalającej obliczyć parę minimalną równoważną dowolnej parze  $(A, B)$  dla sytuacji innych niż  $A, B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  wciąż jest problemem otwartym. Obliczenia numeryczne, które pozwalają wyznaczyć parę minimalną zbiorów dwuwymiarowych używane w algorytmach opisanych np. w [37, 41] korzystają z obliczeń na wielokątach. W związku z tym możemy rozpatrywać je również jako  $G$ -wielokąty. Pozwala to sądzić, że algorytmy pozwalające na wskazanie par minimalnych w wyższych wymiarach najpewniej również będą korzystać z obliczeń numerycznych wymuszających skończoną liczbę ścian, zatem korzystających z teorii  $G$ -wielościanów.

Bezpośrednim zastosowaniem  $G$ -wielościanów, jako wielościanów o ustalonych kierunkach ścian, jest krystalografia. Wynika to z faktu, że ściany monokryształów są równoległe do pewnego skończonego zbioru płaszczyzn zależnego od sieci krystalicznej tych kryształów. W pracach [19–21] został wprowadzony i opisany model wzrostu kryształów wykorzystujący m.in. sumę Minkowskiego wielościanów o ustalonych kierunkach ścian. Rozwój teorii  $G$ -wielościanów może być zatem użyteczny w poszerzeniu ich zastosowań w krystalografii.

Korzystając z powyższego modelu możemy opisać monokryształ mieszaniny 95% siarczanu glinowo-potasowego  $KAl(SO_4)_2$  oraz 5% siarczanu chromowo-potasowego  $KCr(SO_4)_2$ . Monokryształ ten posiada ośmiościenną teoretyczną strukturę kryształiczną, zatem będącą  $G$ -wielościannem dla ośmioelementowej sieci  $G$  opisanej w Przykładzie 5.3.1. Nie jest to jednak sieć rozważana w Twierdzeniu 4.4.1 dlatego potencjalnie możliwe przy wzroście tego kryształu są nowe kierunki ścian. Na załączonym zdjęciu (Rysunek 6.1) zauważyć możemy, że otrzymany w ten sposób kryształ rzeczywiście podczas wzrostu nie jest idealnym ośmiościanem i zauważyć można niewielkie nowe ściany.



Rysunek 6.1: Monokryształ będący wynikiem trzymiesięcznego wzrostu w mieszaninie 95%  $KAl(SO_4)_2$  oraz 5%  $KCr(SO_4)_2$ .

Autor: Maxim Bilovitskiy [CC BY-SA 4.0]

Źródło: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Purple\\_crystal.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Purple_crystal.JPG)

Teoria  $G$ -wielościannów nie jest tylko narzędziem pozwalającym odpowiedzieć na problemy wynikające z innych rozważań, lecz również pozwala zastanowić się nad wynikającymi z niej nowymi kwestiami. Warunek posiadania ustalonych kierunków ścian i własności z tego wynikające były już opisane chociażby przez Aleksandrowa w książce [1]. Istotnym zagadnieniem jest zatem rozważanie  $G$ -wielościannów wraz z działaniem  $G$ -sumy Minkowskiego, jak również relacji równoważności  $\mathcal{G}$  wraz z otrzymanymi dzięki niej klasami równoważności. Te kwestie nie zostały jeszcze gruntownie przebadane poza niniejszą rozprawą i rodzą wiele dalszych tematów badań. Warte rozważenia są chociażby takie podrodziny funkcji, które powiązane są z  $G$ -wielościannami dla ustalonej sieci  $G$ . Możemy w ten sposób stworzyć podrodzinę funkcji quasiróżniczkowalnych  $f$  takich, że quasiróżniczka tych funkcji  $[(\partial f, \overline{\partial f})]_{\mathcal{G}}$  jest klasą równoważności relacji  $\mathcal{G}$ . Ze względu na związek quasiróżniczki z ds-funkcjami można również rozważyć analogiczną podrodzinę ds-funkcji, dla których subróżniczka i superróżniczka są  $G$ -wielościannami. Pojęcia  $G$ -minimalności



---

czy  $G$ -powłoki wypukłej, choć opisane w niniejszej rozprawie, także pozostają materiałem do dalszych badań. Istnieje wiele własności i twierdzeń dotyczących minimalności i powłoki wypukłej, których prawdziwość lub analogiczna wersja dla ich  $G$ -odpowiedników jest nadal kwestią nierozstrzygniętą.

---

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] A.D. Alexandrov, *Convex Polyhedra*, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.
- [2] L. T. H. An i P. D. Tao, *Convex analysis approach to dc programming: Theory, algorithms and applications*, Acta Mathematica Vietnamica **22** (1997), 289–3556.
- [3] L. T. H. An i P. D. Tao, *The DC (Difference of Convex Functions) Programming and DCA Revisited with DC Models of Real World Nonconvex Optimization Problems*, Ann Oper Res **133** (2005), 23–46.
- [4] R. J. Aumann, *Integral of Set-Valued Functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **12** (1965), 1–12.
- [5] D. Bertsekas, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, 2003.
- [6] D. Ciripoi, A. Löhne i B. Weißing, *Calculus of convex polyhedra and polyhedral convex functions by utilizing a multiple objective linear programming solver*, Optimization (2018), 1–16.
- [7] G. B. Dantzig i M. N. Thapa, *Linear programming 2: theory and extensions*, Springer Science & Business Media, New York, 2006.
- [8] V. F. Demyanov i A. M. Rubinov, *Quasidifferential Calculus*, Optimization Software, New York, 1986.
- [9] V. F. Demyanov i A. M. Rubinov, *Quasidifferentiability and Related Topics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.
- [10] N. Dinh, B. Mordukhovich i T. T. A. Nghia, *Subdifferentials of value functions and optimality conditions for DC and bilevel infinite and semi-infinite programs*, Math. Program. (2010), 101–138.
- [11] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.
- [12] J. Grzybowski, *Minimal pairs of convex compact sets*, Archiv der Mathematik **63** (1994), 173–181.
- [13] J. Grzybowski, *Minimal Quasidifferential of a Piecewise Linear Function in  $\mathbb{R}^3$* , Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **24(1)** (2005), 189–202.
- [14] J. Grzybowski, D. Pallaschke i R. Urbański, *Minimal pairs of bounded closed convex sets as minimal representations of elements of the Minkowski–Rådström–Hörmander spaces*, Convex and Fractal Geometry, 2009, pp. 31–55.

- [15] J. Grzybowski, D. Pallaschke i R. Urbański, *On the reduction of pairs of bounded closed convex sets*, *Studia Mathematica* **189(1)** (2008), 1–12.
- [16] J. Grzybowski, D. Pallaschke i R. Urbański, *The formulas for the representation of functions of two variables as a difference of sublinear functions*, *Optimization* (2018), 1–16.
- [17] J. Grzybowski i R. Urbański, *Minimal pairs of bounded closed convex sets*, *Studia Mathematica* **126(1)** (1997), 95–99.
- [18] J. Grzybowski, D. Pallaschke i R. Urbański, *Three criteria of minimality for pairs of compact convex sets*, *Optimization* **55(5-6)** (2006), 569–576.
- [19] J. Grzybowski i R. Urbański, *Crystal growth in terms of Minkowski–Rådström–Hörmander space*, *Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform.* **59** (2009), 91–101.
- [20] J. Grzybowski i R. Urbański, *Modeling crystal growth: Polyhedra with faces parallel to planes from a fixed finite set*, *Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform.* **65** (2015), 21–36.
- [21] J. Grzybowski i R. Urbański, *Modeling crystal growth: Polyhedra with faces parallel to the planes  $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$* , *Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform.* **68** (2018).
- [22] J. Grzybowski i R. Urbański, *On reduced pairs of bounded closed convex sets*, *Revista Matemática Complutense* **16(2)** (2003), 555–560.
- [23] Ph. Hartman, *On functions representable as a difference of convex functions.*, *Pacific Journal of Mathematics* **9(3)** (1959), 707–713.
- [24] D. G. Luenberger i Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, Vol. 2, Springer, New York, 1984.
- [25] P. McMullen, *Representations of polytopes and polyhedral sets*, *Geometriae Dedicata* **2(1)** (1973), 83–99.
- [26] P. McMullen, R. Schneider i G.C. Shephard, *Monotypic polytopes and their intersection properties*, *Geometriae Dedicata* **3(1)** (1974), 99–129.
- [27] W. Meyer, *Indecomposable Polytopes*, *Transactions of the American Mathematical Society* **190** (1974), 77–86.
- [28] B. Mordukhovich, *Variational analysis and generalized differentiation I: Basic theory*, Vol. 330, Springer Science & Business Media, 2006.
- [29] D. Pallaschke, S. Scholtes i R. Urbański, *On Minimal Pairs of Convex Compact Sets*, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.* **39** (1991), 105–109.
- [30] D. Pallaschke i R. Urbański, *Pairs of Compact Convex Sets. Fractional Arithmetic with Convex Sets*, *Math. Appl.*, Kluwer, 2002.
- [31] B. N. Pshenichnyi, *Necessary conditions for an extremum*, Marcel Dekker (1971).
- [32] W. Rudin, *Functional Analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [33] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, New York, 2014.
- [34] C. Schrage i A. Löhne, *An algorithm to solve polyhedral convex set optimization problems*, *Optimization* **62(1)** (2013), 131–141.

- 
- [35] T. Stroiński, *Classes of Convex Polyhedra Closed Under Minkowski Addition*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. **67** (2017), 43–60.
- [36] T. Stroiński, *G-minimal pairs of G-polyhedra*, przedstawiona do publikacji.
- [37] T. Stroiński, *Reprezentacja elementów przestrzeni ciał wirtualnych* (2015), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza.
- [38] R. Urbański, *A generalization of the Minkowski-Rådström-Hörmander theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **24** (1976), 709–715.
- [39] R. J. Vanderbei, *Linear programming*, Springer, New York, 2015.
- [40] W. Weil, *Eine Charakterisierung von Summanden konvexer Körper*, Archiv der Mathematik **34(1)** (1980), 283–288.
- [41] M. Wiernowolski, *Twierdzenia o minimalności w wybranych klasach zbiorów zwartych i wypukłych* (1996), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza.
- [42] V. A. Zalgaller, *A representation of functions of several variables as the difference of convex functions*, J. Math. Sci. **100(3)** (2000), 2209–2227.

---

## SKOROWIDZ SYMBOLI

---

$A \dot{+} B$ , 14 $A(\cdot)$ , 12 $A_h$ , 28 $F(c, [a, b])$ , 55 $G(\cdot)$ , 28 $G(\cdot, \cdot)$ , 28 $M_G$ , 28 $V^A$ , 32 $W(i, j)$ , 35 $W(i, j, k)$ , 35 $W^A(i, j, k)$ , 34 $W_x^A(i, j)$ , 34 $W_y^A(i, j)$ , 34 $[(A, B)]_{\sim}$ , 11 $[A, B]$ , 8 $[a, b]_S$ , 54 $\text{Min}_G(A, B)$ , 76 $\text{cl } A$ , 10 $\text{co } A$ , 10 $\text{co}_G(\cdot)$ , 27 $\text{exp}(\cdot)$ , 22 $\text{ext}(\cdot)$ , 22 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 12 $\leq$ , 11, 17	$\mathbb{R}_+$ , 8 $\mathcal{B}(X)$ , 14 $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ , 27 $\mathcal{K}(X)$ , 14 $\mathcal{K}^n$ , 14 $\overset{G}{+}$ , 38 $\prec$ , 18 $\sim$ , 11, 16 $\overset{G}{\prec}$ , 41 $\overset{G}{\sim}$ , 41 $\underset{G}{\prec}$ , 55 $\underset{G}{\sim}$ , 61 $\widetilde{X}$ , 16 $h^A$ , 33 $h_A$ , 12 $l^A$ , 33 $l_0^A$ , 33 $w(a)$ , 83  $H_G$ , 33  $S_G$ , 33  $V_G$ , 32
--	---

---

# SKOROWIDZ

---

- G*-
  - powłoka wypukła, 28
  - suma Minkowskiego, 38
  - wektor, 27
  - wielościan, 27
  - wielościanu ściana, 28
- ciało
  - wirtualne, 17
  - wypukłe, 14
- fasada, 21
- funkcja podparcia, 12
- hiperpłaszczyzna, 12
- iloczyn skalarny, 12
- klasa
  - abstrakcji, 11
  - równoważności, 11
- koło wielkie, 54
- kombinacja
  - afiniczna, 11
  - liniowa, 11
- macierz sieci, 29
- monoid, 9
- odcinek sferyczny, 54
- półgrupa, 9
  - abelowa, 9
- porządkowe prawo skreśleń, 15
- powłoka wypukła, 10
- prawo skreśleń, 15
- przestrzeń
  - liniowa, 9
  - liniowo-topologiczna, 10
  - MRH, 16
  - wektorowa, 9
- punkt
  - eksponowany, 22
  - ekstremalny, 22
- punkty antypodyczne, 54
- relacja
  - częściowego porządku, 11
  - równoważności, 11
- sieć, 27
- sieć generowana, 28
- stożek, 10
  - abstrakcyjny, wypukły, 11
  - wypukły, 10
- suma
  - algebraiczna, 10
  - Minkowskiego, 10

wektorowa, 10

wektor właściwy, 28

wieloscian, 12

wirtualny, 17

zbiór

domknięty, 10

podpierający, 12

wielościenny, 12

wypukły, 10