

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
Wydział Matematyki i Informatyki

Maciej Kalkowski

**METODY ALGORYTMICZNE  
W BADANIACH  
SIŁY NIEREGULARNOŚCI  
GRAFÓW**

rozprawa doktorska

Promotor:

**prof. dr hab. Michał Karoński**

Poznań, 2010

# Spis treści

<b>Podziękowania</b>	<b>2</b>
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>3</b>
1.1 Cel rozprawy . . . . .	3
1.2 Podstawowe definicje . . . . .	4
<b>2 Lokalne rozróżnianie wierzchołków</b>	<b>9</b>
2.1 Rozróżnianie totalnymi sumami . . . . .	9
2.2 Rozróżnianie sumami . . . . .	17
<b>3 Globalne rozróżnianie wierzchołków</b>	<b>30</b>
3.1 Rozróżnianie sumami . . . . .	30
3.2 Rozróżnianie totalnymi sumami . . . . .	36
<b>4 Pokrewne problemy rozróżniania</b>	<b>41</b>
4.1 Lokalne rozróżnianie totalnymi iloczynami . . . . .	41
4.2 Konfiguracje żetonów . . . . .	44
<b>Bibliografia</b>	<b>46</b>

# Podziękowania

Chciałbym bardzo podziękować mojemu promotorowi prof. dr. hab. Michałowi Karońskiemu, za okazaną pomoc przez wszystkie lata studiów doktorskich oraz za olbrzymi wkład w powstawanie tej rozprawy doktorskiej. Jestem mu bardzo wdzięczny za inspirację do pracy naukowej i pokierowanie moim rozwojem w dziedzinie teorii grafów i algorytmów grafowych. Dziękuję mu również, za możliwości kontaktu z innymi matematykami, w szczególności za uczestnictwo w Poznań-Berlin Seminar 2008.

Z całego serca chciałbym podziękować rodzicom Bernadecie i Ludwikowi Kalkowskim, którzy wpoili we mnie ciekawość świata, nauczyli pokonywać przeszkody i dali skuteczne narzędzia do realizacji moich celów. Dziękuję również całej rodzinie Bartonezzów, za wsparcie i wiarę we mnie.

Chciałbym szczególnie podziękować Hani, która przez ostatnie lata ponosiła ze mną wspólne konsekwencje mojego zaangażowania w tworzenie prac naukowych, które często zakłócały moje myśli w trakcie odpoczynku. Dziękuję jej za wszystko co dla mnie zrobiła, co dla mnie poświęciła, za ciężką pracę dla nas obojga, za ciepło i miłość którymi mnie obdarza i za to jaką stara się być.

Załączam również podziękowania dla wszystkich moich współpracowników z Wydziału Matematyki i Informatyki, z którymi realizowałem wiele ciekawych projektów.

Dziękuję również wszystkim współpracownikom i partnerom w ramach firm Centuria sp. z o.o. i iStream.pl sp. z o.o., którzy przez wszystkie lata moich studiów musieli często dostosowywać się do mojego planu zajęć na uczelni.

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Cel rozprawy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowych metod rozwiązywania problemów globalnej i lokalnej siły nieregularności. Powyższe dwa zagadnienia rozpatrzemy zarówno dla grafów ważonych jak i totalnie ważonych. Tym samym powstają dwa problemy lokalnego rozróżniania wierzchołków i dwa problemy globalnego rozróżniania wierzchołków. Wszystkie przedstawione metody i dowody będą miały charakter algorytmów wyznaczających wartości funkcji ważących.

Dla każdego z omawianych problemów zostały sformułowane hipotezy dotyczące górnego ograniczenia na wartość siły. Najciekawszą i najszerzej omówioną jest hipoteza 1-2-3 dla problemu lokalnej siły nieregularności, dla której zaprezentujemy trzy wyniki, każdy poprawiający górne ograniczenie inną metodą.

Pomimo, że problem globalnej nieregularności grafu został sformułowany prawie 15 lat przed wersją lokalną, ze względu na kolejność i konsekwencje powstawania wyników przedstawionych w niniejszej pracy, rozpoczniemy od wprowadzenia lokalnej wersji dla totalnego ważenia.

Rozdział drugi dotyczy lokalnego rozróżniania wierzchołków i składa się z dwóch części. W pierwszej omówimy problem lokalnej siły nieregularności dla totalnego ważenia. Wprowadzimy podstawowe zagadnienia oraz przytoczymy dotychczasowe wyniki w tej dziedzinie, w tym najlepszy: 11-totalne-ważenie. Następnie udowodnimy dwa nowe twierdzenia poprawiające różnymi metodami wcześniejsze osiągnięcia w tej dziedzinie. Pierwsze z nich pokazuje konstrukcję lokalnie nieregularnego 5-totalnego-ważenia i wykorzystuje metodę podziału zbioru wierzchołków na trzy podzbiory w celu nadania odpowiednich wag modulo 4. Drugie zasługuje na szczególną uwagę, gdyż do-

wodzi faktu istnienia lokalnie nieregularnego 3-totalnego-ważenia, a metoda w nim wykorzystana, posiadająca pewną cechę zachłanną, otworzyła drogę do powstania serii wyników dla wszystkich czterech problemów nieregularności grafów.

W drugiej części rozdziału omówimy problem lokalnej siły nieregularności dla ważenia krawędzi grafu. Przytoczymy dotychczasowe rezultaty, z których najlepszy dowodzi, że istnieje lokalnie nieregularne 13-ważenie, oraz, jak już wspomnieliśmy, zaprezentujemy trzy twierdzenia, które dowodzą istnienia lokalnie nieregularnego 10-ważenia, 6-ważenia i 5-ważenia. Każde z tych twierdzeń korzysta z innej metody konstrukcji ważenia.

W rozdziale trzecim przejdziemy do globalnej siły nieregularności grafu. W pierwszej części rozpatrzemy to zagadnienie dla ważenia krawędzi. Omówimy najważniejsze wyniki, w tym twierdzenie, które rozróżnia wierzchołki wykorzystując wagi mniejsze od  $112\frac{n}{8} + 28$ . Poprawimy ten rezultat, dowodząc istnienia  $6\lceil\frac{n}{8}\rceil$ -ważenia, które rozróżnia wszystkie wierzchołki w grafie. W drugiej części rozpatrzemy zagadnienie globalnego rozróżniania wierzchołków, korzystając z totalnego ważenia grafu. Przedstawimy w niej dotychczasowe rezultaty. Najlepszy z nich pokazuje konstrukcję  $(32\frac{n}{8} + 8)$ -ważenia rozróżniającego wszystkie wierzchołki w grafie. Udowodnimy twierdzenie, które poprawi ten rezultat i ograniczy największą wagę krawędzi do  $3\lceil\frac{n}{8}\rceil + 1$ .

W ostatnim rozdziale zaprezentujemy dwie pokrewne dziedziny rozróżniania wierzchołków, w których stosując metody wprowadzone w niniejszej pracy udało się uzyskać nowe wyniki.

## 1.2 Podstawowe definicje

Przedmiotem naszych badań będą grafy proste, rozumiane jako uporządkowane pary  $G = (V, E)$ , dla których przez  $V$  lub  $V(G)$  oznaczamy zbiór wierzchołków, a przez  $E$  lub  $E(G)$  zbiór krawędzi  $e = \{u, v\}$ , takich, że  $u, v \in V$ . Dla uproszczenia krawędź  $e = \{v, u\}$  często oznaczamy przez  $uv$  lub  $vu$ . Moc zbioru wierzchołków zapisujemy jako  $|V(G)|$  lub  $|V|$ , a zbioru krawędzi  $|E(G)|$  lub  $||G||$ . Moc zbioru wierzchołków zazwyczaj oznaczamy literą  $n$ .

Mówimy, że wierzchołek  $u \in V$  jest incydentny z krawędzią  $e \in E$  w przypadku gdy  $v \in e$ . Dwa wierzchołki  $v_1, v_2 \in V$  są sąsiadujące, jeśli istnieje krawędź  $e \in E$ , taka, że  $e = uv$ . Dwie krawędzie  $e_1, e_2 \in E$  są sąsiadujące, jeśli istnieje taki wierzchołek  $v \in V$ , że  $v \in e_1$  i  $v \in e_2$ .

Zbiór sąsiadów wierzchołka  $v$  w grafie  $G$  oznaczamy przez  $N_G(v)$  lub po prostu  $N(v)$ , gdy kontekst nie wymaga wskazania grafu  $G$ . W kolejnych wprowadzanych definicjach stosujemy podobne uproszczenie, jeśli nie jest

konieczne wskazanie grafu, którego grafu dotyczy dane oznaczenie.

Stopniem wierzchołka  $v \in V$  w grafie  $G$  nazywamy liczbę krawędzi z nim incydujących. Jeśli wierzchołek zawiera pętlę, wówczas jego stopień wzrasta o 2. Stopień wierzchołka oznaczamy przez  $d_G(v)$  lub też  $d(v)$ . Minimalny stopień wierzchołka w grafie  $G$  oznaczamy przez  $\delta = \min \{d_G(v) : v \in V\}$ . Analogicznie maksymalny stopień wierzchołka w grafie  $G$ , definiujemy jako  $\Delta = \max \{d_G(v) : v \in V\}$ .

Graf  $G' = (V', E')$  nazywamy podgrafem grafu  $G$  i zapiszemy to jako  $G' \subseteq G$ , gdy  $V' \subseteq V$  oraz  $E' \subseteq E$ . W przypadku, gdy  $E'$  zawiera wszystkie krawędzie  $e = uv \in E$ , takie że  $u, v \in V'$ , mówimy że podgraf  $G'$  jest podgrafem indukowanym grafu  $G$  i oznaczamy to przez  $G[V']$ .

Mówimy, że graf jest  $k$ -regularny (lub też jest grafem regularnym stopnia  $k$ ), jeśli wszystkie jego wierzchołki są stopnia  $k$ . W przypadku gdy wszystkie wierzchołki grafu są ze sobą sąsiadujące, tzn.  $G$  jest  $(n-1)$ -regularny, wówczas mówimy, że jest grafem pełnym i oznaczamy przez  $K_n$ . Grafem dwudzielnym nazywamy graf którego, którego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa zbiory  $V_1$  i  $V_2$ , tak, że  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$  oraz nie istnieje krawędź  $e = (u, v)$ , taka, że  $u, v \in V_1$  lub  $u, v \in V_2$ . Grafem pełnym dwudzielnym nazywamy taki graf dwudzielny o podziale  $V = V_1 \cup V_2$ , że wszystkie wierzchołki  $u, v$ , takie że  $u \in V_1$  oraz  $v \in V_2$  są połączone krawędzią. Pełny graf dwudzielny oznaczamy  $K_{n_1, n_2}$ , gdzie  $n_1 = |V_1|$  oraz  $n_2 = |V_2|$ .

Ścieżką nazywamy graf  $G = (V, E)$  zawierający co najmniej trzy wierzchołki,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , o zbiorze krawędzi następującej postaci:  $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$ . Możemy zatem zauważyć, że ścieżka jest grafem zawierającym uporządkowane  $n$  wierzchołków, z czego pierwszy i ostatni są stopnia 1, a pozostałe stopnia 2. Taką ścieżkę oznaczamy przez  $P_n$ . Zbiór jej krawędzi ma  $n-1$  elementów. Jeśli do zbioru krawędzi ścieżki  $P_n$ , zdefiniowanej w sposób jak powyżej, dodamy jedną krawędź  $v_nv_0$ , wówczas uzyskamy graf o  $n$  krawędziach i  $n$  wierzchołkach stopnia 2. Taki graf nazywamy cyklem i oznaczamy  $C_n$ .

Grafem spójnym, nazywamy taki graf, w którym między każdą parą wierzchołków istnieje ścieżka. W przypadku gdy  $G$  nie posiada tej własności, wówczas możemy powiedzieć że ma co najmniej dwie składowe spójności. Przez składową spójności grafu  $G$  rozumiemy, taki podgraf indukowany  $G' = (V', E')$  grafu  $G = (V, E)$ , który jest spójny i nie istnieje wierzchołek należący do zbioru  $V \setminus V'$  połączony ścieżką w  $G$  z dowolnym wierzchołkiem należącym do  $V'$ .

Drzewem nazywamy graf  $G$ , w którym dowolne dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną ścieżką. Podgrafem rozpiętym grafu  $G = (V, E)$  nazywamy taki  $G' = (V, E')$ , gdzie  $E'$  jest podzbiorem  $E$ .

Grafem zawierającym izolowaną krawędź nazywamy niespójny graf  $G$ ,

który zawiera  $K_2$  jako jedną ze składowych spójności. Grafem zawierającym dwa wierzchołki izolowane nazywamy niespójny graf  $G$ , który zawiera co najmniej dwa wierzchołki stopnia 0.

*Grafem ważonym* nazywamy graf  $G$ , którego krawędzie mają dodatkowo przyporządkowane liczby naturalne większe od zera, zwane wagami. Funkcja  $\omega$ , zwana *ważeniem*, określa to przyporządkowanie:

$$\omega : E \rightarrow \{1, \dots, k\} \quad (1.1)$$

Przez  $\omega(e)$  oznaczamy wagę krawędzi  $e$ , a całe ważenie  $\omega$  nazywamy *k-ważeniem*.

*Stopniem ważonym* wierzchołka  $v$  w grafie ważonym nazywamy sumę wag krawędzi z nim incydujących, co zapisujemy w następujący sposób:

$$\psi(v) = \sum_{e=vu} \omega(e) \quad (1.2)$$

*Grafem totalnie ważonym* nazywamy graf ważony, którego wierzchołki mają dodatkowo przyporządkowaną liczbę naturalną większą od zera. Przyporządkowanie dla tego grafu określa funkcja  $\omega$  zwana *totalnym ważeniem*:

$$\omega : E \cup V \rightarrow \{1, \dots, k\} \quad (1.3)$$

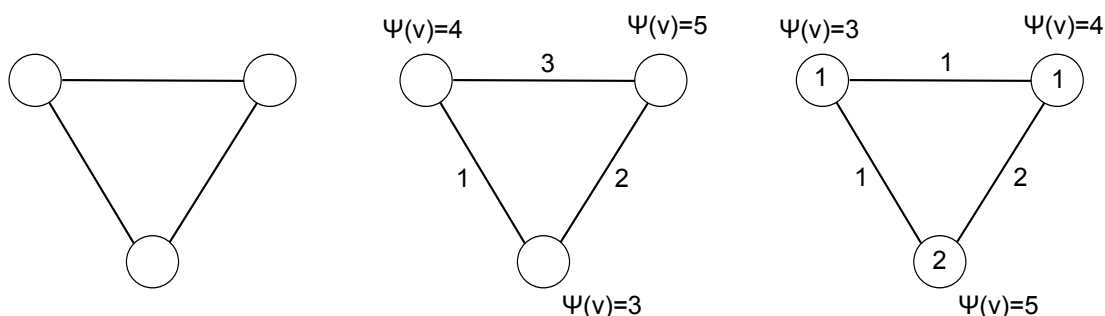
Takie totalne ważenie grafu  $G$ , nazywamy *k-totalnym-ważeniem*. *Stopniem totalnie ważonym* wierzchołka  $v$  nazywamy w tym przypadku sumę jego wagi i wag krawędzi z nim incydujących:

$$\psi(v) = \sum_{e=vu} \omega(e) + \omega(v). \quad (1.4)$$

W dalszej części pracy, omawiając algorytmy totalnego ważenia, dla uproszczenia często pomijamy słowo "totalne". Jednakże w przypadku, gdy w kontekście danego paragrafu lub dowodu mówimy zarówno o ważeniu zwykłym jak i totalnym, wówczas nie stosujemy tego uproszczenia. Ponadto, zamiast nazwy „stopień ważony” lub „stopień totalnie ważony”, często używamy nazwy „kolor” lub „totalny kolor”.

Mówimy, że graf  $G$  jest nieregularny w przypadku, gdy wszystkie lub tylko sąsiadujące wierzchołki są różnego stopnia (zależy to od rodzaju nieregularności, które omówimy poniżej). Zauważmy, że każdy graf zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia. Sytuacja zmienia się, kiedy rozpatrzemy grafy ważne i totalnie ważne (rys. 1.1) oraz uzyskane kolory wierzchołków.

W niniejszej pracy rozważamy dwa rodzaje nieregularności. Lokalną nieregularność, zwaną też w odniesieniu do klasycznej teorii grafów kolorowaniem



Rysunek 1.1: Graf prosty, graf ważony i graf totalnie ważony

właściwym, oraz globalną nieregularność, zwaną dalej po prostu nieregularnością.

Lokalna nieregularność grafu polega na takim ustaleniu kolorów w grafie  $G$ , by każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory. W odniesieniu do interpretacji stopnia ważonego jako koloru wierzchołka, znalezienie lokalnej nieregularności polega na znalezieniu takiego ważenia (totalnego ważenia) grafu, by stopnie ważone (totalne stopnie ważone) dowolnych dwóch połączonych wierzchołków były różne.

**Definicja 1.1.** *Mówimy, że graf  $G$  jest lokalnie nieregularny, gdy dla każdej krawędzi  $e = uv$  stopień ważony wierzchołków z nią incydentnych jest różny.*

$$\forall_{e=uv} \psi(u) \neq \psi(v) \quad (1.5)$$

Globalna nieregularność grafu polega na takim ustaleniu kolorów w grafie  $G$ , że dowolne dwa wierzchołki mają różne kolory. W przypadku koloru wierzchołka, rozumianego jako jego stopień ważony, znalezienie globalnej nieregularności grafu polega na wyznaczeniu takiego ważenia (totalnego ważenia) grafu, by kolory (totalne kolory) wszystkich wierzchołków były różne.

**Definicja 1.2.** *Mówimy, że graf  $G$  jest nieregularny, gdy dla każdej pary wierzchołków w  $G$  ich stopień ważony jest różny.*

$$\forall_{v,u \in V} \psi(u) \neq \psi(v) \quad (1.6)$$

Grafy ważone mają swoją prostą graficzną interpretację jako multigrafy, w których każda krawędź  $e$  jest reprezentowana przez jej  $\omega(e)$  kopii. Wówczas stopień wierzchołka w multigrafie równy jest stopniowi ważonemu w grafie ważonym. Reprezentacja graficzna grafów totalnie ważonych poprzez multigrafy jest niemożliwa ze względu na brak możliwości skonstruowania



krawędzi, która nada wierzchołkowi nieparzysty kolor (pętla zwiększa kolor o 2). Dlatego też w obu przypadkach w niniejszej pracy, w celu oznaczenia ważenia i totalnego ważenia korzystamy z liczb naturalnych umieszczonych wewnątrz wierzchołka lub obok jej krawędzi.

Przez *siłę grafu* ważonego  $G$  rozumiemy największą wagę spośród jego krawędzi. Tym samym *lokalną siłą nieregularności*,  $sl(G)$ , nazywamy najmniejszą możliwą siłą  $G$ , taką by graf był lokalnie nieregularny. *Globalną siłą nieregularności*,  $s(G)$ , nazywamy najmniejszą możliwą siłą  $G$ , taką by graf był globalnie nieregularny. Analogicznie dla ważeń totalnych, definiujemy *lokalną totalną siłę nieregularności*,  $sl_t(G)$ , oraz *globalną totalną siłę nieregularności*,  $s_t(G)$ .

Łatwo można wykazać, że w przypadku zwykłego ważenia, uzyskanie nieregularnego ważenia może być niemożliwe. Na przykład, gdy  $G$  zawiera izolowaną krawędź lub dwa izolowane wierzchołki. W takim przypadku przyjmujemy, że siła nieregularności wynosi  $\infty$ .

Algorytmem ważenia grafu  $G$  nazywamy ciąg operacji, które wyznaczają wartości funkcji  $\omega$ . Algorytm może posiadać informację o wartości siły nieregularności w  $G$ , jak również działać niezależnie od niej.

Złożonością obliczeniową algorytmu lub też jego złożonością czasową nazywamy liczbę wykonanych elementarnych operacji. Złożoność obliczeniowa jest najczęściej zależna od rozmiaru danych wejściowych. W niniejszej pracy przez rozmiar danych wejściowych rozumiemy liczbę wierzchołków grafu  $G$ . Określając szacowaną złożoność obliczeniową algorytmu korzystamy z zapisu mówiącego o asymptotycznym zachowaniu się funkcji. Pisząc, że algorytm  $P$  o złożoności obliczeniowej  $f(n)$  ma złożoność obliczeniową  $O(g(n))$ , rozumiemy, że istnieje taka stała  $C$  oraz taka wartość  $n_0$ , że:

$$\forall_{n > n_0} f(n) \leq Cg(n) \quad (1.7)$$

Algorytmem zachłannym nazywamy taki sposób działania algorytmu, który w każdym kroku dokonuje zachłannego wyboru, tzn. najlepszego w danej chwili wyboru rozwiązania częściowego.

W klasycznej teorii grafów, problem kolorowania właściwego sprowadza się do wykorzystania jak najmniejszej liczby kolorów nadanych wierzchołkom. W przypadku nieregularności grafów ważonych parametrem, który jest głównym przedmiotem badań, jest siła nieregularności grafu. Oczywiście liczba kolorów nadanych w grafie lokalnie nieregularnym jest co najmniej tak duża, jak liczba kolorów w rozumieniu klasycznym.

# Rozdział 2

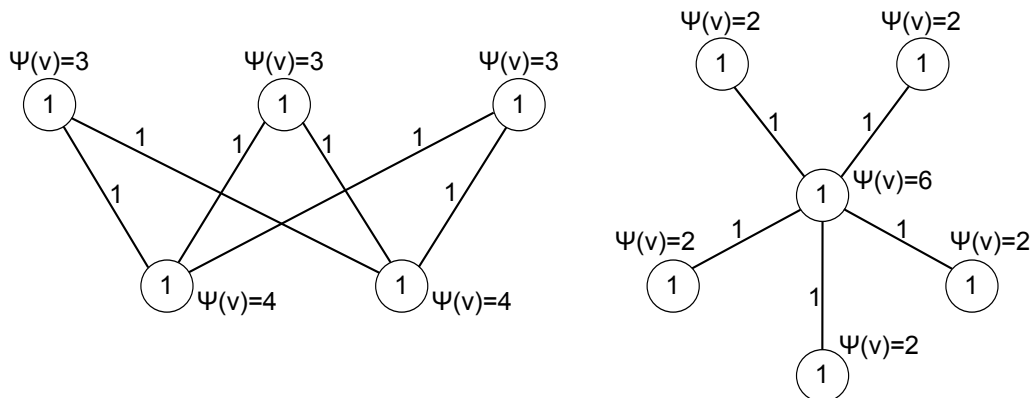
## Lokalne rozróżnianie wierzchołków

### 2.1 Rozróżnianie totalnymi sumami

Problem lokalnej siły nieregularności totalnego ważenia grafu został sformułowany przez Przybyło i Woźniaka w 2007 roku w pracy [36]. Pomimo, że został on sformułowany jako ostatni z czterech głównych zagadnień omawianych w niniejszej pracy, rozpoczynamy od niego, gdyż metodologia wykorzystana w przeprowadzonych dowodach, miała kluczowy wpływ na powstanie wyników zaprezentowanych w dalszej części pracy. Problem ten wywodzi się z dwóch rozpatrywanych wcześniej zagadnień: totalnego ważenia grafu, wprowadzonego przez Baćę, Jendrola, Millera i Ryana w 2002 roku w pracy [7] (rozdział 3.2) oraz lokalnego rozróżniania grafu sumami wag krawędzi, wprowadzonego w tym samym roku przez Karońskiego, Łuczaka i Thomasona w pracy [27] (rozdział 2.2).

Problem lokalnej siły nieregularności grafu dla totalnego ważenia polega na znalezieniu takiego totalnego ważenia grafu, którego stopnie ważone sąsiadujących wierzchołków są różne oraz siła grafu jest minimalna (tzn. maksymalna nadana waga jest możliwie najmniejsza). Kierunki badań będą zatem zmierzały do znalezienia ograniczeń na wartość  $sl_t(G)$  oraz algorytmów ważenia o jak najmniejszej sile.

Wskazanie ograniczenia dolnego dla dowolnego grafu sprowadza się do konstrukcji grafu, którego siła nie może być mniejsza niż zadana wartość. Oczywiście jest istnienie grafów, których stopnie (rozumiane w sposób zwykły) sąsiadujących wierzchołków są różne i tym samym  $sl_t(G) = 1$ . Należą do nich np. gwiazda lub pełne grafy dwudzielne  $K_{n_1, n_2}$ , takie, że  $n_1 \neq n_2$ . Konstrukcja tych grafów przedstawiona jest na rysunku 2.1. Dla formalności

Rysunek 2.1: Graf pełny dwudzielny  $K_{2,3}$ , gwiazda  $K_{1,5}$ 

możemy zatem powiedzieć, że totalna lokalna siła nieregularności dowolnego grafu prostego jest na pewno większa lub równa 1. Możliwe jest również wykazanie istnienia grafów o  $sl_t(G) = 2$ . Należą do nich zarówno znane grafy rzadkie o zadanej strukturze np. cykle, ścieżki, jak i grafy gęste - pełne. Zauważmy, że w przypadku grafu pełnego wartość totalnej lokalnej siły nieregularności jest równa wartości globalnej totalnej siły nieregularności, to znaczy,  $sl_t(G) = s_t(G)$ .

**Twierdzenie 2.1** (Przybyło, Woźniak [36]). *Totalna lokalna siła nieregularności grafu pełnego wynosi 2.*

Dowód tego twierdzenia ma konstrukcję indukcyjną i opiera się na dowodzie znanego wcześniej twierdzenia, mówiącego że lokalna siła nieregularności dla zwykłego ważenia wynosi 3 (patrz Twierdzenie 2.9).

W prosty sposób można wykazać prawdziwość poniższych dwóch oszacowań.

**Twierdzenie 2.2.** *Dla dowolnego grafu  $G$ :*

$$sl_t(G) \leq n < \infty \quad (2.1)$$

$$sl_t(G) \leq sl(G) \quad (2.2)$$

*Dowód.* Załóżmy że mamy dany graf  $G = (V, E)$ . Nadajemy wszystkim krawędziom grafu wagi 1, a wierzchołkom tymczasowo 0. Następnie ustawiamy wierzchołki w kolejności od najmniejszego do największego stopnia  $(v_1, \dots, v_n)$ , tak, że  $\psi(v_1) \leq \dots \leq \psi(v_n)$ . W ustalonej przed kolejności nadajemy wierzchołkom wagi kolejno z uporządkowanego zbioru  $(1, \dots, n)$ . Tym

samym uzyskujemy ostatecznie  $\psi(v_1) < \dots < \psi(v_n)$ . Maksymalna waga krawędzi w grafie wynosi 1, a maksymalna waga wierzchołka wynosi  $n$ , co dowodzi poprawność oszacowania (2.1).

W celu udowodnienia oszacowania (2.2), skorzystamy z założenia, że istnieje nieregularne zwykłe ważenie  $\omega : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  grafu  $G = (V, E)$  o sile  $sl(G)$ . Następnie, nadając wagi 1 wszystkim wierzchołkom, oraz pozostawiając wagi  $\omega$  bez zmian, uzyskujemy nieregularne ważenie  $\omega' : E \cup V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  o sile nieregularności  $sl_t(G) \leq sl(G)$ .  $\square$

Dotychczas nie udało się wykazać istnienia grafów, dla których  $sl_t(G) > 2$ . Pozwala to przypuszczać, że totalna lokalna siła nieregularność wynosi 2. W pracy [36], Przybyło i Woźniak sformułowali tak zwaną hipotezę 1-2:

**Hipoteza 2.3** (Przybyło, Woźniak, [36]). *Dla dowolnego grafu  $G$  istnieje 2-totalne-ważenie będące kolorowaniem właściwym.*

Hipoteza pozostała dotychczas nieudowodniona, a najlepszym znanym oszacowaniem wartości  $sl_t(G)$  jest wynik zaprezentowany w dalszej części rozdziału.

Autorami większości znanych ograniczeń na totalną lokalną siłę nieregularności są Przybyło i Woźniak. Uzyskali oni bardzo dobre ograniczenia, przekształcając metody, które powstały wcześniej dla lokalnej siły nieregularności.

**Twierdzenie 2.4** (Przybyło, Woźniak, [36]). *Dla dowolnego grafu  $G = (V, E)$  istnieje 11-totalne-ważenie będące kolorowaniem właściwym, podczas gdy dla grafów 3-kolorowalnych, 4-regularnych oraz dwudzielnych istnieje 2-totalne-ważenie będące kolorowaniem właściwym.*

Zauważmy, że dowód twierdzenia dla grafu dwudzielnego ma bardzo prostą konstrukcję. Załóżmy, że mamy dany dwudzielny graf  $G = (V, E)$  o podziale zbioru wierzchołków  $V = V_1 \cup V_2$ . Nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagi 1. Następnie każdemu wierzchołkowi ze zbioru  $V_1$  nadajemy wagę 1 w przypadku, gdy suma wag jego krawędzi jest nieparzysta, a 2 w przeciwnym przypadku. Analogicznie każdemu wierzchołkowi ze zbioru  $V_2$  nadajemy wagę 1 w przypadku, gdy suma wag jego krawędzi jest parzysta, a 2 w przeciwnym przypadku. Uzyskujemy tym samym parzyste kolory dla wierzchołków ze zbioru  $V_1$  oraz nieparzyste kolory dla wierzchołków ze zbioru  $V_2$ . Jednocześnie maksymalna waga wynosi 2.

Wkrótce po opublikowaniu pracy [36], Przybyło udowodnił w notce [32] następujące twierdzenie, które do czasu powstania wyników zaprezentowanych w niniejszej rozprawie, było najlepszym oszacowaniem dla grafów regu-

larnych:

**Twierdzenie 2.5** (Przybyło, [32]). *Dla dowolnego regularnego grafu  $G = (V, E)$  istnieje 7-totalne-ważenie będące kolorowaniem właściwym.*

W dalszej części rozdziału udowodnimy dwa twierdzenia dotyczące totalnej lokalnej siły nieregularności dla dowolnego grafu. Pierwsze, pokazuje konstrukcję 5-totalnego-ważenia będącego kolorowaniem właściwym. Wynik ten nie doczekał się publikacji, gdyż kilka tygodni po powstaniu został poprawiony. Jednakże ze względu na metodę, z której korzysta w dowodzie, jest użyteczny z punktu widzenia dalszych badań. W szczególności, idea dowodu może się okazać użyteczna przy poprawianiu ograniczeń dla pokrewnych problemów rozróżniania wierzchołków.

**Twierdzenie 2.6** (Kalkowski, [22]). *Dla dowolnego grafu  $G$  istnieje 5-totalne-ważenie będące kolorowaniem właściwym.*

W dowodzie tego twierdzenia skorzystamy z lematu udowodnionego w pracy [1] przez Addario-Berry'ego, Aldreda, Dalala i Reeda :

**Lemat 2.7** (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed, [1]). *Dla dowolnego spójnego grafu  $G = (V, E)$ , który nie jest 3-kolorowalny, istnieje taki podział zbioru wierzchołków na rozłączne zbiory  $V_0, V_1, V_2$ , że (dla  $i$  liczonego modulo 3):*

1.  $\forall v \in V_i |N(v) \cap V_{i+1}| \geq |N(v) \cap V_i|$ ,
2.  $\forall v \in V_i |N(v) \cap V_{i+1}| \geq 1$

*Dowód Twierdzenia 2.6.* Załóżmy, że  $G$  jest grafem spójnym. W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności. Dodatkowo załóżmy, że  $G$  nie jest 3-kolorowalny. W przeciwnym przypadku skorzystamy z Twierdzenia 2.4 udowodnionego w pracy [36].

Dzielimy zbiór wierzchołków tak, by spełniał założenia Lematu 2.7. Następnie nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagę 3, a wierzchołkom wagę 1. Tym samym, w celu uzyskania 5-totalnego-ważenia, mamy możliwość zwiększenia lub zmniejszenia wag krawędzi o wartości  $\{0, 1, 2\}$  oraz zwiększenia wag wierzchołków o wartość ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Naszym celem jest taka modyfikacja wag w grafie, by po zakończeniu działania procedury kolory sąsiadujących wierzchołków były różne oraz:

- dla każdego  $v \in V_0$ ,  $\psi(v) \equiv 1 \pmod{4}$ ,

- dla każdego  $v \in V_1$ ,  $\psi(v) \equiv 3 \pmod{4}$ ,
- dla każdego  $v \in V_2$ ,  $\psi(v) \equiv 0, 2 \pmod{4}$ .

Wierzchołki przetwarzamy w ustalonej kolejności, najpierw analizując zbiór  $V_0$ , następnie  $V_1$ , a jako ostatni  $V_2$ . W trakcie przetwarzania wierzchołka  $v$  wybieramy dla niego jego docelowy kolor, tj. taki, który otrzyma po zakończeniu działania całej procedury. Kolor ten oznaczamy przez  $\phi(v)$ . Kolor wierzchołka może się zmieniać w trakcie przetwarzania sąsiadów występujących w ustalonej kolejności po  $v$ . Tzn. może wystąpić taka sytuacja że  $\psi(v) \neq \phi(v)$ . Dbamy jednak o to, by  $v$  miał możliwość takiego zmodyfikowania swojej wagi, by w ostatnim kroku algorytmu uzyskał  $\psi(v) = \phi(v)$ .

Rozpoczynamy od wierzchołków ze zbioru  $V_0$ . Ustalamy ich kolejność  $\{v_1, \dots, v_k\}$  oraz przypisujemy wartość 1 do licznika  $i$ , który oznacza numer wierzchołka przetwarzanego w bieżącym kroku.

W trakcie przetwarzania wierzchołka  $v_i$  sprawdzamy czy jego obecny kolor przystaje do 1 mod 4, oraz czy jest różny od kolorów docelowych wierzchołków ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . Jeśli spełnia oba warunki, przechodzimy do następnego wierzchołka w kolejności, ustawiając  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$  oraz  $i = i + 1$ .

W przeciwnym przypadku kolor wierzchołka nie przystaje do 1 mod 4 lub powoduje konflikt z którymś ze swoich sąsiadów ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . W celu ustalenia koloru docelowego dla  $v_i$  modyfikujemy wagi krawędzi ze zbioru  $E_{v_i} = \{e = v_i v_j : v_j \in N(v_i) \cap V_1\}$ .

Do wagi każdej takiej krawędzi możemy dodać lub odjąć wartość ze zbioru  $\{0, 1, 2\}$ . Dzięki temu, kolor wierzchołka  $v_i$  może przyjąć jedną z wartości ze zbioru  $\{-2|E_{v_i}| + \psi(v_i), \dots, 2|E_{v_i}| + \psi(v_i)\}$ . W zbiorze tym jest  $4|E_{v_i}| + 1$  kolejnych wartości. Dodatkowo pozwolimy na dodanie do wagi wierzchołka wartości ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$ . W ten sposób uzyskaliśmy zbiór możliwych kolorów dla  $v_i$  zawierający  $4|E_{v_i}| + 4$  kolejnych wartości. Jest w nim co najmniej  $|E_{v_i}| + 1$  wartości przystających do 1 mod 4.

Opierając się na podziale zbioru  $V$ , wynikającym z Lematu 2.7, wiemy, że  $|E_{v_i}| \geq |N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}|$ . Zatem, modyfikując odpowiednio wagi krawędzi  $E_{v_i}$  i wagę wierzchołka  $v_i$ , możemy wybrać nowy kolor dla  $v_i$ , który przystaje do 1 mod 4 i nie powoduje konfliktów z kolorami wierzchołków ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . Dokonujemy odpowiednich modyfikacji i ustalamy wartość  $\phi(v_i)$ . Przechodzimy do kolejnego wierzchołka ustawiając  $i = i + 1$ .

W przypadku gdy wartość licznika  $i$  przekroczyła  $k$  przechodzimy do przetwarzania wierzchołków ze zbioru  $V_1$ . Ustalamy w nim kolejność wierzchołków  $\{v_{k+1}, \dots, v_l\}$  i postępujemy zgodnie z poniższym opisem.

W trakcie przetwarzania wierzchołka  $v_i$  sprawdzamy, czy jego obecny kolor przystaje do 3 mod 4 oraz czy jest różny od kolorów docelowych wierzchołków z  $N(v_i) \cap \{v_{k+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . Jeśli spełnia oba warunki, przechodzimy do następnego wierzchołka w kolejności, ustawiając  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$  oraz  $i = i + 1$ .

W przeciwnym przypadku kolor wierzchołka nie przystaje do 3 mod 4 lub powoduje konflikt z którymś ze swoich sąsiadów  $N(v_i) \cap \{v_{k+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . W celu ustalenia koloru docelowego dla  $v_i$  modyfikujemy wagi krawędzi ze zbioru  $E_{v_i} = \{e = v_i v_j : v_j \in N(v_i) \cap V_2\}$ .

Do wagi każdej takiej krawędzi możemy dodać lub odjąć wartość ze zbioru  $\{0, 1, 2\}$ . Tym samym, kolor wierzchołka  $v_i$  może przyjąć jedną z wartości ze zbioru  $\{-2|E_{v_i}| + \psi(v_i), \dots, 2|E_{v_i}| + \psi(v_i)\}$ . W zbiorze tym jest  $4|E_{v_i}| + 1$  kolejnych wartości. Dodatkowo pozwolimy na dodanie do wagi wierzchołka wartości ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$ . W ten sposób uzyskamy zbiór możliwych kolorów dla  $v_i$  zawierający  $4|E_{v_i}| + 4$  kolejnych wartości. Jest w nim co najmniej  $|E_{v_i}| + 1$  wartości przystających do 3 mod 4.

Zatem, na podstawie podziału zbioru  $V$ , wynikającym z Lematu 2.7, wiemy, że  $|E_{v_i}| \geq |N(v_i) \cap \{v_{k+1}, \dots, v_{i-1}\}|$ . Tym samym modyfikując odpowiednio wagi krawędzi  $E_{v_i}$  i wagę wierzchołka  $v_i$  wyznaczamy nowy kolor dla  $v_i$ , który przystaje do 3 mod 4 i nie powoduje konfliktów z kolorami wierzchołków ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_{k+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . Wartość tą oznaczamy przez  $\phi(v_i)$ . Przechodzimy do kolejnego wierzchołka ustawiając  $i = i + 1$ .

W przypadku gdy wartość licznika  $i$  przekroczyła  $l$  przechodzimy do przetwarzania wierzchołków ze zbioru  $V_2$ . Ustalamy kolejność wierzchołków  $\{v_{l+1}, \dots, v_n\}$ .

W trakcie przetwarzania wierzchołka  $v_i$  sprawdzamy czy jego obecny kolor przystaje do 0, 2 mod 4 oraz czy jest różny od kolorów docelowych wierzchołków ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_{l+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . Jeśli spełnia oba warunki, przechodzimy do sprawdzania następnego wierzchołka w kolejności, ustawiając  $i = i + 1$ .

W przeciwnym przypadku wiemy, że kolor wierzchołka nie przystaje do 0, 2 mod 4 lub powoduje konflikt z którymś ze swoich sąsiadów ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_{l+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . W celu ustalenia koloru docelowego dla  $v_i$  modyfikujemy wagi krawędzi ze zbioru  $E_{v_i} = \{e = v_i v_j : v_j \in N(v_i) \cap V_0\}$ . W tym przypadku rozpatrzemy każdą krawędź indywidualnie, gdyż musimy uważać, by kolory wierzchołków z  $V_0$  nie oddaliły się „za bardzo” od swojego docelowego koloru. Rozpatrujemy zatem krawędzie postaci  $e = v_i v_j$ , gdzie  $1 \leq j \leq k$ . Zauważmy, że wszystkie te krawędzie mają wagę 3, a wierzchołki  $v_j$  mogą mieć wagę ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Dodatkowo przed rozpoczęciem przetwarzania  $v_l$  wszystkie wierzchołki ze zbioru  $V_0$  mają  $\phi(v) = \psi(v)$ .

Rozpatrzmy zatem krawędź  $e = v_i v_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Jeśli  $\omega(v_j) \geq 3$ , wówczas

możemy dodać do  $\omega(e)$  wartości  $\{0, 1, 2\}$ , jednocześnie odpowiednio zmniejszając wartość  $\omega(v_j)$  i tym samym pozostawiając  $\psi(v_j)$  bez zmian. W przypadku gdy  $\omega(v_j) \leq 2$ , wówczas sprawdzamy wartość  $\psi(v_j)$ . Jeśli:

- $\psi(v_j) = \phi(v_j)$  wówczas możemy odjąć od wagi  $\omega(e)$  wartości  $\{0, 1, 2\}$ ,
- $\psi(v_j) = \phi(v_j) - 1$  wówczas możemy dodać lub odjąć od wagi  $\omega(e)$  wartości  $\{0, 1\}$ ,
- $\psi(v_j) = \phi(v_j) - 2$  wówczas możemy dodać do wagi  $\omega(e)$  wartości  $\{0, 1, 2\}$ .

Spowoduje to, że kolor  $\psi(v_j)$  będzie różny od koloru docelowego  $\phi(v_j)$ , który zapewniał nam poprawne kolorowanie. Jednakże łatwo możemy zauważyć, że taka sytuacja ma miejsce tylko w przypadku, gdy  $\omega(v_j) \leq 2$ . Ponadto bieżący koloru nie będzie się różnił o więcej niż 2 od koloru docelowego (tj.  $\phi(v_j) - \psi(v_j) \leq 2$ ).

Powyższy krok dla każdej krawędzi  $e = v_i v_j$  umożliwia nam modyfikację jej wagi o dwie wartości (uzyskując 3 kolejne potencjalne wartości dla  $\psi(v_j)$ ). Zatem kolor  $\psi(v_j)$  może przyjąć wartości ze zbioru  $\{-2m + \psi(v_i), \dots, 2p + \psi(v_i)\}$ , gdzie  $p+m = |E_{v_i}|$ . Fakt ten, w połączeniu z możliwością modyfikacji wagi wierzchołka  $v_i$  o  $\{0, +1, +2\}$ , pozwala na uzyskanie  $2|E_{v_i}| + 2$  kolejnych wartości dla koloru  $v_i$ . Jest wśród nich co najmniej  $|E_{v_i}| + 1$  różnych kolorów, przystających do  $0, 2 \pmod{4}$ .

Zatem na podstawie podziału zbioru  $V$ , wynikającym z Lematu 2.7, wiemy, że  $|E_{v_i}| \geq |N(v_i) \cap \{v_{l+1}, \dots, v_{i-1}\}|$ . Modyfikując odpowiednio wagi krawędzi  $E_{v_i}$  i wagę wierzchołka  $v_i$  wyznaczamy nowy kolor dla  $v_i$ , który przystaje do  $0, 2 \pmod{4}$  i nie powoduje konfliktów z kolorami docelowymi wierzchołków ze zbioru  $N(v_i) \cap \{v_{l+1}, \dots, v_{i-1}\}$ . Wartość taką oznaczymy przez  $\phi(v_i)$ .

W finalnym kroku, pozostaje ponowne przetworzenie wierzchołków ze zbioru  $V_0$ . Jeśli dla wierzchołka  $v_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) kolor docelowy różni się od koloru bieżącego  $\phi(v_i) \neq \psi(v_i)$ , wówczas dodajemy do  $\omega(v_i)$  wartość  $\phi(v_i) - \psi(v_i)$ , uzyskując tym samym  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ , co kończy dowód.  $\square$

Drugie twierdzenie, które udowodnimy, poprawia wynik zaprezentowany powyżej i jest obecnie najlepszym ograniczeniem górnym. Jednocześnie jest to możliwie najbliższe nieoptymalne ograniczenie górne w odniesieniu do Hipotezy 2.3.

**Twierdzenie 2.8** (Kalkowski, [20]). *Dla dowolnego grafu  $G = (V, E)$  istnieje 3-totalne-ważenie  $\omega$  będące kolorowaniem właściwym. Ważenie  $\omega$  nadaje krawędziom wagi ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ , a wierzchołkom wagi ze zbioru  $\{1, 2\}$ .*



*Dowód.* Załóżmy, że mamy dany spójny graf  $G = (V, E)$ . W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności.

Przez  $\psi(v)$  oznaczamy kolor wierzchołka, który za każdym razem jest obliczany w sposób zdefiniowany w równaniu (1.4). Dla każdego wierzchołka w trakcie działania algorytmu przypiszemy jego kolor docelowy, oznaczany przez  $\phi(v)$ . Kolor ten nie ulega późniejszej zmianie i chcemy, by po zakończeniu procedury każdy wierzchołek miał  $\psi(v) = \phi(v)$ . Niech  $|V(G)| = n$ . W przypadku, gdy  $n = 1$  nie ma nic do wykazania. Jeśli  $n = 2$ , wówczas nadajemy wagę 1 jedynej krawędzi w  $G$ , a dwóm wierzchołkom odpowiednio wagę 1 i 2. Załóżmy zatem, że  $n \geq 3$ .

W pierwszym kroku nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagę 2, a wszystkim wierzchołkom wagę 1. W ten sposób uzyskujemy możliwość co najwyżej jednokrotnego dodania albo odjęcia wartości 1 od wagi krawędzi oraz jednokrotnego zwiększenia wagi wierzchołka o wartość 1.

W dalszej części algorytmu przetwarzamy wierzchołki w ustalonej kolejności  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Rozpoczynając od wierzchołka  $v_1$ , ustalamy  $\phi(v_1) = \psi(v_1) = 2d(v_1)$ . Następnie, w trakcie przetwarzania każdego kolejnego wierzchołka  $v_i$ , gdzie  $2 \leq i \leq n$ , korzystamy z następujących założeń algorytmu:

- $\psi(v_j) = \phi(v_j)$  lub  $\psi(v_j) = \phi(v_j) - 1$ , dla każdego  $j < i$ .
- $\phi(v_j) \neq \phi(v_l)$ , jeśli istnieje krawędź  $v_j v_l \in E(G)$  oraz  $j, l < i$ .
- $\omega(e) = 2$ , dla każdej krawędzi  $e = v_i v_l$ .

Założmy, że  $v_i$  ma  $k$  wierzchołków sąsiadujących w zbiorze  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ ,  $k = |N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}|$ , które nazywamy sąsiadami poprzedzającymi  $v_i$ .

Wyznamy kolor docelowy dla  $v_i$ , różny od docelowych kolorów jego sąsiadów poprzedzających. W tym celu pozwalamy na modyfikację wag krawędzi do jego sąsiadów poprzedzających,  $e = v_j v_i, j < i$ , w taki sposób, że:

- możemy pozostawić wagę krawędzi bez zmiany, lub,
- albo dodajemy do wagi krawędzi 1, jeśli  $\psi(v_j) = \phi(v_j) - 1$ ,
- albo odejmujemy od wagi krawędzi 1, jeśli  $\psi(v_j) = \phi(v_j) + 1$ .

Zauważmy, że w ten sposób uzyskujemy możliwość zmiany koloru wierzchołka  $v_i$  na jedną z wartości z przedziału  $[2d(v_i) - s, 2d(v_i) + t]$ , gdzie  $s + t = k$ . W przedziale tym jest  $k + 1$  potencjalnych wartości dla  $\psi(v_i)$ . Wiedząc, że  $v_i$  ma dokładnie  $k$  sąsiadów poprzedzających, możemy wyznaczyć jego kolor w ten

sposób, by zachować założenia algorytmu oraz by nie powodował żadnego konfliktu z kolorami docelowymi jego sąsiadów poprzedzających. Wybieramy zatem właściwą wartość  $\psi(v_i)$ , dokonując jednocześnie odpowiednich zmian wag krawędzi  $e = v_j v_i, j < i$ . Ustalamy  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ .

W powyższy sposób przetwarzamy wszystkie pozostałe wierzchołki. Po przetworzeniu  $v_n$ , graf  $G$  posiada następujące własności:

- każdy wierzchołek  $v \in V$  ma albo  $\psi(v) = \phi(v)$  albo  $\psi(v) = \phi(v) - 1$ ,
- żadne dwa sąsiadujące wierzchołki nie mają tego samego koloru docelowego,
- wagi wszystkich krawędzi należą do zbioru  $\{1, 2, 3\}$ ,
- wagi wszystkich wierzchołków wynoszą 1.

W ostatnim kroku, w celu uzyskania kolorowania właściwego zgodnego z wyborem kolorów ostatecznych, dodajemy wagę 1 do wagi tych wierzchołków dla których  $\psi(v) = \phi(v) - 1$ , co kończy dowód.  $\square$

Powyższy algorytm ma wielomianowy czas działania ( $O(n^2)$ ) oraz wielomianową złożoność pamięciową ( $O(n^2)$ ). Z punktu widzenia konieczności nadania wag wszystkim krawędziom w grafie jest to minimalna możliwa złożoność obliczeniowa.

Zauważmy, że algorytm korzysta z pewnej cechy „zachłannej”, dokonując w trakcie przetwarzania  $v_i$  zachłannego wyboru koloru docelowego. Technika zastosowana w dowodzie zapoczątkowała powstanie nowych ograniczeń dla pozostałych wartości siły nieregularności grafów, które zostaną omówione w dalszej części pracy.

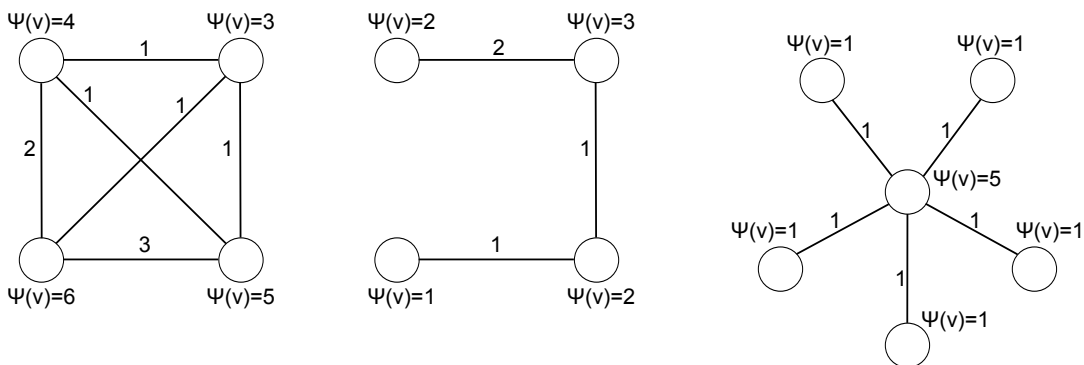
## 2.2 Rozróżnianie sumami

Problem lokalnej siły nieregularności dla zwykłego ważenia grafu ( $sl(G)$ ) został sformułowany przez Karońskiego, Łuczaka i Thomasona w 2002 roku w pracy [27]. Wywodzi się on z problemu klasycznego kolorowania grafu i polega na znalezieniu takiego ważenia krawędzi grafu, w którym stopnie ważone sąsiadujących wierzchołków są różne oraz siła grafu jest minimalna. Problemy siły nieregularności skupiają się na minimalizacji maksymalnej wagi krawędzi, dlatego będziemy szukali ograniczeń na wartość  $sl(G)$  oraz algorytmów ważenia o jak najmniejszej sile.

Opierając się na nierówności (2.2) udowodnionej w pierwszej części rozdziału, możemy powiedzieć, że problem lokalnej siły nieregularności jest problemem co najmniej tak trudnym, jak jego totalna wersja. Zauważmy jednak,

że w tym przypadku nie mamy możliwości lokalnej zmiany koloru wierzchołka.

Wyznaczając dolne ograniczenie dla dowolnego grafu posłużymy się, podobnie jak w rozdziale poprzednim, konstrukcją grafów o zadanej strukturze i ograniczonej z dołu wartości  $sl(G)$ . Zauważmy na rysunku 2.2, że możliwe jest pokolorowanie wierzchołków grafu będącego gwiazdą korzystając z maksymalnej wagi krawędzi 1, podczas gdy dla ścieżki na  $n$  wierzchołkach musimy skorzystać z wagi 2, a dla grafu pełnego 3. Konstrukcja dowodu



Rysunek 2.2: Graf pełny  $K_4$ , ścieżka  $P_4$  i gwiazda  $K_{1,5}$

następującego twierdzenia znalazła zastosowanie we wszystkich problemach rozróżniania wierzchołków omówionych w niniejszej pracy.

**Twierdzenie 2.9** (Chartrand, Jacobson, Lehel, Oellermann, Ruiz, Saba, [8]). *Sila nieregularności grafu pełnego  $K_n$  wynosi 3, dla  $n \geq 3$ .*

*Dowód.* Konstrukcję ważenia grafu  $K_n$  wagami  $\{1, 2, 3\}$  przeprowadzimy w sposób indukcyjny, budując najpierw ważenie dla  $K_{n-1}$ , a później rozszerzając je o jeden wierzchołek. Rozpoczynamy od lokalnie nieregularnego grafu  $K_3$ , nadając trzem pierwszym krawędziom odpowiednio wagi 1, 2, 3 (tym samym otrzymując kolory wierzchołków 3, 4, 5). Następnie, dodając każdy kolejny wierzchołek, łączymy go z powstałym wcześniej grafem krawędziami o wagach albo 1, jeśli powstały wcześniej graf miał nieparzystą liczbę wierzchołków, albo 3 jeśli powstały wcześniej graf miał parzystą liczbę wierzchołków. Postępujemy tak, aż do uzyskania grafu pełnego o zadanej liczbie wierzchołków. Zauważmy, że dodając wierzchołek połączony krawędziami o wagach 1, tworzymy „najlżejszy” (w sensie najmniejszego koloru) wierzchołek w grafie. Analogicznie, dodając wierzchołek połączony krawędziami o wagach 3, tworzymy „najcięższy” wierzchołek w grafie.

W celu wykazania, że dla nieregularnego pokolorowania grafu pełnego trzeba skorzystać z wag  $\{1, 2, 3\}$ , wykażemy, że wagi  $\{1, 2\}$  nie wystarczą.  $K_n$  to graf na  $n$  wierzchołkach, z których każdy jest stopnia  $n - 1$ . Zatem korzystając tylko z wag  $\{1, 2\}$  najmniejszy możliwy stopień ważony wynosi  $d(v) = n - 1$ , w przypadku gdy wszystkim krawędziom incydentnym do  $v$  nadamy wagę 1, a największy możliwy stopień ważony wierzchołka wynosi  $2d(v) = 2(n - 1)$ , w przypadku gdy wszystkim krawędziom incydentnym nadamy wagę 2. W zbiorze liczb  $\{n - 1, \dots, 2(n - 1)\}$  jest dokładnie  $n$  różnych wartości. Zatem, w celu pokolorowania grafu wagami  $\{1, 2\}$ , musielibyśmy skorzystać ze wszystkich tych wartości. Jednakże niemożliwe jest nadanie wagi 1 wszystkim krawędziom incydentnym do jednego wierzchołka oraz wagi 2 wszystkim krawędziom incydentnym do innego wierzchołka w tym samym grafie  $K_n$ . Zatem kolorowanie właściwe grafu pełnego wymaga skorzystania z wag  $\{1, 2, 3\}$ . □

Uzyskaliśmy pewność, że dla dowolnego grafu lokalna siła nieregularności wynosi co najmniej 3. Oczywiście jest, że dla grafu  $K_2$  nie istnieje nieregularne ważenie (zarówno lokalnie jak i globalnie). Podobna sytuacja ma miejsce, gdy graf zawiera  $K_2$  jako składową spójności. Wykluczając te szczególne przypadki, możemy postawić pytanie, jakie są ograniczenia wartości  $sl(G)$  dla grafu na  $n$ -wierzchołkach. Autorzy pracy [27] sformułowali tak zwaną hipotezę 1-2-3.

**Hipoteza 2.10** (Karoński, Łuczak, Thomason, [27]). *Dla dowolnego nietrywialnego grafu  $G$  istnieje 3-ważenie krawędzi będące kolorowaniem właściwym.*

Odniesienie do grafu nietrywialnego ma na celu wyeliminowanie grafów zawierających  $K_2$  jako składową spójności.

W pracy [27], oprócz sformułowania hipotezy, przedstawione zostało twierdzenie z dowodem jej poprawności dla grafów 3-kolorowalnych.

**Twierdzenie 2.11** (Karoński, Łuczak, Thomason, [27]). *Niech  $\Gamma$  będzie skończoną grupą abelową o nieparzystej liczbie elementów. Niech  $G$  będzie  $|\Gamma|$ -kolorowalnym grafem. Wówczas istnieje takie ważenie krawędzi grafu  $G$ , elementami zbioru  $\Gamma$ , które jest kolorowaniem właściwym.*

Ponadto, dla grafów o zadanej strukturze powstało wiele twierdzeń wykazujących istnienie lokalnie nieregularnego 3-ważenia. Jednakże dla dowolnego grafu nie udało się dotychczas wykazać prawdziwości hipotezy. Poniżej przytoczymy wyniki najważniejszych prac, które dotyczyły zagadnienia lokalnej

siły nieregularności dla dowolnego grafu. Pierwszym górnym ograniczeniem jest rezultat udowodniony w pracy [2].

**Twierdzenie 2.12** (Addario-Berry, Dalal, McDiarmid, Reed, Thomason, [2]). *Dla dowolnego grafu, który nie zawiera krawędzi izolowanej, istnieje 30-ważenie krawędzi, będące kolorowaniem właściwym.*

Dowód tego twierdzenia korzystał z dość skomplikowanych technik podziału zbioru wierzchołków na 8 podzbiorów oraz nadawania im kolorów modulo 12. Krótko potem udowodnione zostało twierdzenie poprawiające powyższy wynik, które korzystało z podobnych technik podziału zbioru wierzchołków (tym razem na 5 podzbiorów) oraz z bardziej skomplikowanej metody nadawania wag.

**Twierdzenie 2.13** (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed, [1]). *Dla dowolnego grafu, który nie zawiera krawędzi izolowanej, istnieje 16-ważenie krawędzi będące kolorowaniem właściwym.*

Korzystając z technik opisanych w [1], Wang i Yu, w 2008 roku, w pracy [39], poprawili oszacowanie i otrzymali następujący rezultat.

**Twierdzenie 2.14** (Wang, Yu, [39]). *Dla dowolnego grafu, który nie zawiera krawędzi izolowanej, istnieje 13-ważenie krawędzi będące kolorowaniem właściwym.*

Jak już wspomnieliśmy w poprzednim paragrafie, w 2007 roku została sformułowana wersja totalna problemu lokalnej siły nieregularności. Równocześnie rozpoczęły się badania nad transformacją zadanego  $k$ -totalnego ważenia w wynikające z niego ważenie zwykłe z siłą uzależnioną od  $k$ . Tym samym możemy sformułować pytanie, czy potwierdzenie prawdziwości hipotezy 1-2 implikuje potwierdzenie hipotezy 1-2-3. Badania te doprowadziły do następującego nieopublikowanego rezultatu wykazanego wspólnie z Krzysztofem Krzywdzińskim:

**Twierdzenie 2.15** (Kalkowski, Krzywdziński, [23]). *Dla dowolnego grafu, nie zawierającego krawędzi izolowanych, istnieje 10-ważenie, będące kolorowaniem właściwym.*

W celu wykazania prawdziwości tego twierdzenia, skorzystamy z Twierdzenia 2.8 oraz z następującego lematu.

**Lemat 2.16** (Kalkowski, Krzywdziński, [23]). *Dla dowolnego grafu  $G = (V, E)$ , nie zawierającego krawędzi izolowanych, jeśli istnieje lokalnie nieregularne totalne ważenie, takie, że  $\omega : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}, V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ , wówczas istnieje lokalnie nieregularne ważenie, takie, że  $\omega' : E(G) \rightarrow \{1, \dots, 3k+1\}$ .*

*Dowód.* Niech dany będzie spójny graf  $G = (V, E)$ , nie zawierający  $K_2$ . W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności.

Z założenia mamy dane ważenie  $\omega : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}, V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ . W pierwszym kroku redukujemy o 1 wagi wszystkich wierzchołków. Tym samym kolory wszystkich wierzchołków zmniejszyły się o 1 (nie powodując żadnych nowych konfliktów). Zatem funkcja  $\omega$  przyporządkuje wierzchołkom wagi  $\{0, 1\}$ . Oznaczmy zbiorem  $V_-$  wierzchołki posiadające wagę 1.

Jeśli  $V_-$  zawiera nieparzystą liczbę wierzchołków, wówczas szukamy w  $G$  wierzchołka, który ma najmniejszy stopień ważony w swoim otoczeniu i dodatkowo nie należy do  $V_-$ . Oznaczamy ten wierzchołek przez  $v_{min}$  i dodajmy go do zbioru  $V_-$ . Jeśli nie ma takiego wierzchołka, tzn. wszystkie takie wierzchołki należą do  $V_-$ , wówczas wybieramy spośród nich dowolny, który ma minimalny stopień ważony w swoim otoczeniu i zmieniamy jego wagę z 1 na 0, gdyż jego kolor zmniejszony o 1 nie spowoduje żadnego konfliktu. W ten sposób mamy pewność, że  $V_-$  ma parzystą liczbę wierzchołków.

W kolejnym kroku mnożymy wagi wszystkich krawędzi przez 3, uzyskując w ten sposób nowe ważenie  $\omega'$ . Nie spowoduje to żadnych konfliktów w kolorach wierzchołków, natomiast pozwoli je później w odpowiedni sposób zmienić. Możemy zauważyć, że w tak zmodyfikowanym ważeniu, nie istnieje wierzchołek o kolorze  $3k - 1$  dla dowolnego  $k = 1, 2, \dots$ . Zauważmy też, że kolory wierzchołków z  $V_-$  mają wartość  $3k + 1$  dla  $k = 1, 2, \dots$ , a kolory wierzchołków z  $V \setminus V_-$  mają wartość  $3k$  dla  $k = 1, 2, \dots$ .

Następnie szukamy spójnego drzewa  $T$  rozpinającego  $G$ . W dalszej części algorytmu drzewo to ograniczymy w ten sposób, by zawierało wszystkie wierzchołki z  $V_-$  oraz pozostałe wierzchołki z  $V \setminus V_-$  i krawędzie  $e \in E$ , niezbędne do zachowania spójności  $T$ . Mając tak wyznaczone drzewo  $T$ , dokonamy jego podziału na zbiór rozłącznych krawędziowo ścieżek  $\mathcal{P}$ , tak by pierwszy i ostatnio wierzchołek każdej ścieżki należał do  $V_-$ .

Wybermy dowolny wierzchołek  $v_r \in V_-$ . Rozważmy zbiór ścieżek  $\mathcal{S}$ , do którego należą wszystkie ścieżki w  $T$  o jednym końcu  $v_r$  a drugim należącym do zbioru  $V_- \setminus \{v_r\}$ . Dla wszystkich  $v \in T$  wyznaczmy wartość  $p(v)$ , która oznacza do ilu z tych ścieżek należy  $v$ . Usuwamy z  $T$  wszystkie wierzchołki, dla których  $p(v) = 0$ .

Jeśli dla wszystkich wierzchołków  $p(v) = 1$ , wówczas  $T$  jest ścieżką i

dodając ją do  $\mathcal{P}$ , osiągamy pożądaną cel. W przeciwnym przypadku istnieje co najmniej jeden wierzchołek  $v$ , taki, że  $p(v) \geq 2$ .

Niech  $u$  będzie wierzchołkiem najbardziej odległym od  $v_r$ , takim że  $p(u) \geq 2$ . Niech  $V_p$  oznacza zbiór, do którego należy  $u$  oraz wierzchołki  $v \in V_-$ , które są połączone z  $v_r$  ścieżką zawierającą  $u$ .

Jeśli wszystkie wierzchołki mają  $p(v) = 1$ , wówczas została nam w grafie jedna ścieżka. Dodajemy ją do  $\mathcal{P}$ , kończymy procedurę podziału  $T$  i przechodzimy do kolejnego kroku.

Jeśli  $u = v_r$ , wówczas  $p(u) = 2k + 1$  dla  $k \in \{1, 2, \dots\}$  oraz istnieje  $k$ , rozłącznych krawędziowo ścieżek postaci  $\{v_{p_1}, \dots, u, \dots, v_{p_2}\}$ , takich, że  $v_{p_1}, v_{p_2} \in V_p$  oraz jedna  $\{v_p, \dots, u\}$ ,  $v_p \in V_p$ . Dodajemy te ścieżki do  $\mathcal{P}$ , kończymy procedurę podziału  $T$  i przechodzimy do kolejnego kroku.

W przeciwnym przypadku, gdy  $u \neq v_r$ , mamy dwie możliwości.

Jeśli  $p(u) = 2k$ , dla  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , wówczas wiemy, że  $2k - 1$  lub  $2k$  ścieżek ma postać  $\{v_r, \dots, u, \dots, v_p\}$ ,  $v_p \in V_p$ , w zależności od tego czy  $u \in V_-$ . Jeśli  $u \in V_-$ , wówczas jedna ścieżka będzie miała postać  $\{v_r, \dots, u\}$ . Tworzymy zatem  $k - 1$  rozłącznych krawędziowo ścieżek postaci  $\{v_{p_1}, \dots, u, \dots, v_{p_2}\}$ , takich, że  $v_{p_1}, v_{p_2} \in V_p$ , oraz jedną dodatkową ścieżkę  $\{u, \dots, v_p\}$ ,  $v_p \in V_p$  gdy  $u \in V_-$ , lub jedną dodatkową ścieżkę  $\{v_{p_1}, \dots, u, \dots, v_{p_2}\}$ ,  $v_{p_1}, v_{p_2} \in V_p$ , gdy  $u \notin V_-$ . Tak utworzone ścieżki dodajemy do  $\mathcal{P}$ , a następnie usuwamy z  $T$  wierzchołki należące do tych ścieżek.

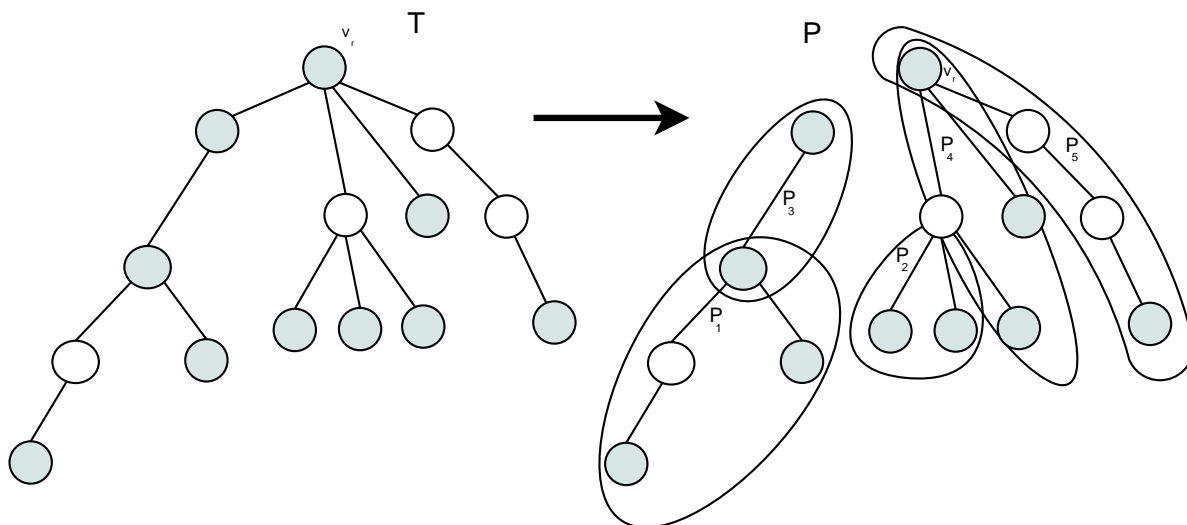
Jeśli  $p(u) = 2k + 1$ , dla  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , wówczas wiemy, że na pewno  $2k$  ścieżek ma postać  $\{v_r, \dots, u, \dots, v_p\}$ ,  $v_p \in V_p$ . Tworzymy  $k$  rozłącznych krawędziowo ścieżek postaci  $\{v_{p_1}, \dots, u, \dots, v_{p_2}\}$ , takich, że  $v_{p_1}, v_{p_2} \in V_p$ . Tak utworzone ścieżki dodajemy do  $\mathcal{P}$  i usuwamy z  $T$  wszystkie wierzchołki należące do tych ścieżek (z wyjątkiem  $u$ ).

Następnie obliczamy na nowo wartości  $p(v)$  i usuwamy z  $T$  wszystkie wierzchołki, dla których  $p(v) = 0$ . Powtarzamy powyższe postępowanie, aż do usunięcia ostatnich dwóch wierzchołków  $v \in V_-$  z  $T$ .

Mając wyznaczony zbiór ścieżek  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_l\}$ , zauważmy, że dla dowolnego wierzchołka  $v \in V_-$ , wiemy że znajduje się on na jednym z końców dokładnie jednej ścieżki  $P_m$ ,  $1 \leq m \leq l$  oraz może wystąpić w środku kilku innych ścieżek.

Następnie zmodyfikujemy wagi krawędzi każdej z wyznaczonych powyżej ścieżek na zmianę dodając lub odejmując 1.

Rozpatrzmy przykładową ścieżkę  $P_m = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Jeśli  $v_k = v_{min}$ , wówczas odwrócimy kolejność wierzchołków w  $P_m$  tak, by  $v_1 = v_{min}$ . Dokonujemy zmiany wag krawędzi  $P_m$  w następujący sposób:  $\omega'(v_1, v_2) = \omega(v_1, v_2) - 1$ ,  $\omega'(v_2, v_3) = \omega(v_2, v_3) + 1$ , itd. na zmianę odejmując i dodając 1. Zauważmy, że kolor wierzchołka  $v_1$  zmniejszy się o 1, a kolor  $v_k$  albo zmniejszy się o 1, jeśli  $k$  jest nieparzyste, albo wzrośnie o 1, gdy  $k$  jest parzyste. Jednocześnie



Rysunek 2.3: Rozbicie drzewa na krawędziowo rozłączne ścieżki

kolory wierzchołków  $v_2, \dots, v_{k-1}$  pozostaną niezmienione. Następnie nadamy wagom wierzchołków  $v_1$  i  $v_k$  wartość 0, tzn.  $\omega'(v_1) = 0$  i  $\omega'(v_k) = 0$ .

Założmy, że przed modyfikacją ścieżki  $P_m$ , kolor wierzchołka  $v_1$  wynosił  $3p+1$ ,  $p \in \mathbb{N}$  (w szczególnym przypadku, gdy był to  $v_{min}$  kolor mógł wynosić  $3p$ ). Po zmodyfikowaniu wag krawędzi należących do ścieżki  $P_m$  i nadaniu wadze wierzchołka  $v_1$  wartości 0, kolor wierzchołka  $v_1$  wynosi  $3p-1$ . Wierzchołek  $v_1$  nie może być połączony z żadnym innym wierzchołkiem o tym kolorze. Podobnie dla  $v_k$ , założmy że przed modyfikacją ścieżki  $P_m$ , jego kolor wynosił  $3p+1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Po zmodyfikowaniu wag krawędzi należących do ścieżki  $P_m$  i wagi  $v_k$ , kolor  $v_k$  wynosi albo  $3p+1$  albo  $3p-1$ . W obu tych przypadkach wierzchołek  $v_k$  również nie jest połączony z żadnym innym wierzchołkiem o takim kolorze. Tym samym nadaliśmy 0 wagom  $v_1$  i  $v_k$ , a ich kolory nie powodują żadnych konfliktów.

Powyższe działania przeprowadzamy dla wszystkich ścieżek z  $\mathcal{P}$ , uzyskując zerowe wagi dla wszystkich wierzchołków w grafie. Zauważmy, że w żadnym z tych kroków nie powstaną konflikty kolorów, co należało wykazać.  $\square$

Opierając się na Twierdzeniu 2.8 oraz korzystając z prawdziwości powyższego lematu możemy teraz udowodnić Twierdzenie 2.15.

*Dowód Twierdzenia 2.15.* W poprzednim rozdziale wykazaliśmy (w Twierdzeniu 2.8), że istnieje takie totalne lokalnie nieregularne ważenie dowolnego grafu  $G = (V, E)$ , które nadaje krawędziom wagi  $\{1, 2, 3\}$ , a wierzchołkom



wagi  $\{1, 2\}$ . Opierając się na tym fakcie oraz na Lemacie 2.16, udowodnionym powyżej, możemy stwierdzić, że dla dowolnego grafu  $G$ , nie zawierającego krawędzi izolowanych, istnieje 10-ważenie będące kolorowaniem właściwym.  $\square$

W dalszej części tego rozdziału omówimy jeszcze dwa twierdzenia. Pierwsze z nich pozwoli na konstrukcję 6-ważenia krawędzi, będącego kolorowaniem właściwym. Metoda w nim wykorzystana opiera się na lemacie będącym uogólnieniem metody wykorzystanej w dowodzie Twierdzenia 2.14.

**Twierdzenie 2.17** (Kalkowski, Karoński, Pfender, [25]). *Dla dowolnego grafu, nie zawierającego krawędzi izolowanych, istnieje 6-ważenie krawędzi będące kolorowaniem właściwym.*

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia, skorzystamy z następującego lematu:

**Lemat 2.18** (Kalkowski, Karoński, Pfender, [25]). *Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  oraz niech  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wówczas, dla dowolnego spójnego grafu  $G$ ,  $|G| \geq 3$ , i dla dowolnego drzewa rozpinającego  $T$ , istnieje totalne ważenie  $\omega : E(G) \rightarrow \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\} \cup V(G) \rightarrow \{0, \beta\}$ , takie że jego totalne wagi tworzą kolorowanie właściwe. Ponadto możliwe jest takie wybranie  $\omega$ , że dla wszystkich krawędzi  $e \in T$ ,  $\omega(e) = \alpha$ .*

*Dowód.* Ustalamy kolejność wierzchołków w grafie  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , taką, że dla  $k \geq 2$  każdy  $v_k$  ma w  $T$  dokładnie jednego sąsiada należącego do zbioru  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ . Rozpoczynamy od nadania wszystkim krawędziom w grafie wagę  $\alpha$ . W kolejnych krokach pozwolimy na jednokrotne zmodyfikowanie wagi każdej krawędzi, co umożliwi każdemu kolejnemu  $v_k$  wybór totalnego koloru. Przetwarzając  $v_k$  wybieramy dla niego kolor docelowy, który oznaczymy przez  $\phi(v_k)$ .

Wierzchołek  $v_1$  otrzymuje  $\phi(v_1) = \alpha d(v_1)$ . Załóżmy, że w każdym kolejnym kroku dla  $k \geq 2$  ustaliliśmy wagi krawędzi  $E(G[\{v_1, \dots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$  i wierzchołków  $\{v_1, \dots, v_k\}$  w ten sposób, że  $k - 1$  wierzchołków otrzymało swoje docelowe kolory  $\phi(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ .

Dla  $v_k$  modyfikujemy wagi jego krawędzi  $E(v_k, \{v_1, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$ , dodając lub odejmując  $\beta$ . Jeśli  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  oraz  $\omega(v_i) = 0$ , wówczas możemy wybrać między  $[\omega(v_k v_i) = \alpha, \omega(v_i) = 0]$  i  $[\omega(v_k v_i) = \alpha - \beta, \omega(v_i) = \beta]$ , pozostawiając jednocześnie  $\psi(v_i)$  bez zmian. Analogicznie, jeśli  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  oraz  $\omega(v_i) = \beta$ , wówczas możemy wybrać między  $[\omega(v_k v_i) = \alpha, \omega(v_i) = \beta]$  i  $[\omega(v_k v_i) = \alpha + \beta, \omega(v_i) = 0]$ , pozostawiając jednocześnie  $\psi(v_i)$  bez zmian. Dodatkowo mamy możliwość wybrania jednej z dwóch wag (0 lub

$\beta$ ) wierzchołka  $v_i$ .

Otrzymujemy w ten sposób  $|E(v_k, \{v_1, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2$  różnych możliwych kolorów dla  $\psi(v_k)$ . Zauważmy, że  $|E(v_k, \{v_1, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, \dots, v_{k-1}\})| + 1$ , zatem możliwe jest wybranie koloru różnego od koloru wierzchołków  $N(v_k) \cap \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ .

Powtarzając powyższe kroki dla kolejnych wartości  $k$ , uzyskujemy kolorowanie właściwe. □

*Dowód Twierdzenia 2.17.* Bez straty ogólności założmy, że  $G$  jest grafem spójnym. W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności.

Rozpoczynamy od zastosowania Lematu 2.18 dla dowolnego wybranego drzewa rozpinającego  $T$  oraz parametrów  $\alpha = 4$  i  $\beta = -2$ . Spowoduje to nadanie parzystych kolorów wszystkim wierzchołkom w grafie. W dalszej części modyfikujemy  $\omega$  tak, by kolory wierzchołków pozostały niezmienione.

Niech  $H = G[\{v \in V(G) : \omega(v) = -2\}]$  będzie podgrafem indukowanym grafu  $G$ , do którego należą wszystkie wierzchołki o wadze równej  $-2$ , oraz znajdziemy maksymalny rozpięty podgraf  $H_1 \in H$  o maksymalnym stopniu 2. Zmniejszamy o 1 wagę wszystkich krawędzi  $\omega(e)$ ,  $e \in H_1$ , zmieniając odpowiednio wagi wierzchołków tak, by ich kolory pozostały niezmienione. Po tym kroku uzyskujemy wagi wszystkich wierzchołków  $\omega(v) \in \{0, -1, -2\}$  oraz wagi wszystkich krawędzi  $e \in E(G)$ ,  $\omega(e) \in \{1, \dots, 6\}$ , przy czym dla  $e \in E(T)$  mamy  $\omega(e) \in \{3, 4\}$ .

Niech, dla  $i \in \{0, 1, 2\}$

$$S_i := \{v \in V(G) : \omega(v) = -i\} \quad (2.3)$$

oraz niech  $s_i = |S_i|$ .

Zauważmy, że dla wierzchołków  $v \in S_0 \cup S_2$  wartości  $\psi(v_i) - \omega(v_i)$  są parzyste, a dla  $v \in S_1$  są nieparzyste. Ponieważ  $H_1$  jest maksymalnym podgrafem  $H$ , to nie może istnieć krawędź łącząca wierzchołek  $u \in S_1$  z wierzchołkiem  $v \in S_2$ , gdyż taka krawędź znalazłaby się w  $H_1$ , a  $u$  należałby do  $S_0$  i  $v$  do  $S_1$ . Zatem wszystkie krawędzie łączące wierzchołki  $u, v \in S_1 \cup S_2$ , należą do  $E(H_1)$  oraz wierzchołki  $u, v$  znajdują się w  $S_1$ . W szczególności, dla każdej takiej krawędzi  $uv$ ,  $u, v \in S_1$ , mamy  $\psi(u) - \omega(u) \neq \psi(v) - \omega(v)$ , co wynika z faktu, że kolory  $u$  i  $v$  były różne przed zmniejszeniem wag krawędzi należących do  $H_1$ . Oznaczmy zbiór takich krawędzi przez  $E^*$ .

Jeśli zbiór  $S_2$  nie zawiera żadnych elementów, to znaczy  $s_2 = 0$ , wówczas ograniczamy ważenie  $\omega$  tylko do zbioru krawędzi (co oznaczamy  $\omega_{E(G)}$ ) i uzyskujemy kolorowanie właściwe. Zauważmy, że wierzchołki należące do  $S_0$  nie zmieniają koloru, a wierzchołki należące do  $S_1$  nie powodują konfliktu z

wierzchołkami należącymi do  $S_0$  (mają nieparzysty kolor) ani z wierzchołkami z  $S_1$  (co wykazaliśmy powyżej).

Jeśli  $s_2 = 1$  i  $s_1 = 0$ , wówczas istnieje dokładnie jeden wierzchołek  $u \in S_2$ . Możemy zauważyć, że wszystkie krawędzie incydentne do  $u$  mają wagi  $\{2, 4, 6\}$ . Rozpatrzmy dwa przypadki. W przypadku gdy  $u$  ma sąsiada  $v$ , takiego że  $\psi(u) + 2 \neq \psi(v)$ , wówczas odejmujemy 1 od wagi krawędzi  $uv$  i uzyskujemy ważenie  $\omega_{E(G)}$  będące kolorowaniem właściwym. Zauważmy, że tylko  $u$  i  $v$  mają w tej sytuacji kolor nieparzysty różny dla  $u$  i  $v$ . W przeciwnym przypadku, gdy wszyscy sąsiedzi  $v \in N(u)$  mają  $\psi(u) + 2 = \psi(v)$  i  $|N(u)| \geq 2$ , wówczas odejmujemy 1 od wag dwóch krawędzi incydentnych do  $u$ , co tworzy ważenie  $\omega_{E(G)}$  i kolorowanie właściwe. Zauważmy, że dokładnie trzy wierzchołki mają kolor nieparzysty nie powodujący konfliktu. Jeśli  $v$  ma tylko jednego sąsiada  $v \in N(u)$ , takiego że  $\psi(u) + 2 = \psi(v)$ , wówczas wybieramy wierzchołek  $x \in N_T(v) \setminus \{u\}$ , odejmujemy 1 od wagi krawędzi  $uv$  i dodajemy 1 do wagi krawędzi  $xv$ , co ostatecznie doprowadza do powstania ważenia  $\omega_{E(G)}$  i kolorowania właściwego. W tej sytuacji tylko  $u$  i  $x$  mają nieparzyste kolory, jednocześnie  $xu \notin E$ .

Jeśli  $s_2 = 1$  i  $s_1 \geq 1$ , wówczas wykorzystując ścieżkę w  $T$  między  $u \in S_2$  i  $v \in S_1$ , modyfikujemy wagi jej krawędzi na zmianę dodając i odejmując 1, upewniając się jednocześnie, że od  $v$  odjęliśmy 1. W ten sposób uzyskujemy ważenie  $\omega_{E(G)}$  będące kolorowaniem właściwym. W ważeniu  $\omega_{E(G)}$  kolor wierzchołka  $v$  pozostanie bez zmiany, a wierzchołek  $u$  otrzyma nieparzysty kolor, co nie stanowi problemu gdyż nie jest połączony z żadnym wierzchołkiem ze zbioru  $S_1$ .

Jeśli w zbiorze  $S_2$  znajdują się co najmniej dwa wierzchołki, to znaczy  $s_2 \geq 2$ , wówczas skorzystamy z kroku indukcyjnego, dzięki któremu znajdziemy w  $T$ ,  $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$  ścieżek, których końce znajdują się w zbiorze  $S_2$  i każda krawędź  $T$  należy do co najwyżej dwóch ścieżek. W przypadku gdy  $S_2$  zawiera dwa lub trzy wierzchołki, to znaczy  $2 \leq s_2 \leq 3$ , możemy skorzystać z jednej lub dwóch ścieżek w  $T$  łączących wierzchołki należące do  $S_2$ , wiedząc, że żadna krawędź nie będzie należała do więcej niż dwóch ścieżek. W przypadku gdy  $S_2$  zawiera co najmniej cztery elementy, to znaczy  $s_2 \geq 4$ , wówczas szukamy takiej krawędzi  $e \in E(T)$ , że składowe spójności, które powstaną w wyniku usunięcia krawędzi  $e$  z drzewa  $T$ , zawierają co najmniej dwa wierzchołki z  $S_2$  oraz jedna ze składowych zawiera parzystą liczbę wierzchołków. Następnie dla obu składowych stosujemy krok indukcyjny. W ten sposób znajdziemy  $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$  ścieżek w  $T$  i żadna krawędź nie należy do więcej niż dwóch ścieżek.

Dla każdej znalezionej ścieżki, modyfikujemy wagi jej krawędzi, na zmianę dodając i odejmując 1, w ten sposób zmieniamy tylko kolory końcowych wierzchołków. Jednocześnie uaktualniamy wagi wszystkich wierzchołków w

ten sposób, by w totalnym ważeniu ich kolory pozostały bez zmiany. W przypadku, gdy wierzchołek  $u$  był końcem dwóch ścieżek (ma to miejsce w przypadku gdy  $s_2$  było nieparzyste i może istnieć tylko jeden taki  $u$ ), musimy zapewnić, by obie krawędzie którymi był połączony w wyznaczonych ścieżkach zmodyfikowały swoją wagę o  $-1$  (tym samym uaktualniona waga wierzchołka  $u$  będzie równa 0, to znaczy  $\omega(u) = 0$ ). Zauważmy, że skorzystaliśmy tylko z krawędzi  $e \in T$ , których wagi należały początkowo do zbioru  $\{3, 4\}$ , zatem żadna z nich nie otrzyma wagi mniejszej od 1 i większej od 6.

Po wykonaniu powyższych kroków wszystkie wierzchołki, które należały do  $S_2$  mają wagi  $\omega(v) \in \{-3, -1, 0\}$ . Zatem ważenie  $\omega_{E(G)}$  pozostawi bez zmian parzyste kolory wierzchołków, a te wierzchołki, które miały kolor nieparzysty, mogą być co najwyżej połączone krawędziami ze zbioru  $E^*$ , a zatem nie spowodują konfliktu, co kończy dowód.  $\square$

Drugi wynik, który omówimy, przybliży nas o jeszcze jeden krok w kierunku udowodnienia hipotezy 1-2-3. Wynik ten jest jednocześnie najlepszym obecnie znanym ograniczeniem na wartość  $sl(G)$  i jest głównym wynikiem tej rozprawy.

**Twierdzenie 2.19** (Kalkowski, Karoński, Pfender, [24]). *Dla dowolnego grafu  $G$  nie zawierającego krawędzi izolowanych istnieje 5-ważenie, będące kolorowaniem właściwym.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $G$  jest spójny. W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności. Jeśli  $|V(G)| < 3$ , to dowód jest oczywisty. Załóżmy, że  $|V(G)| \geq 3$  oraz  $G$  zawiera co najmniej jeden wierzchołek stopnia większego od 2. Ustalmy kolejność wierzchołków,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , w taki sposób, by  $d(v_n) \geq 2$  oraz dla każdego  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $v_i$  miał sąsiada w  $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ . W pierwszym kroku nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagę 3.

W kolejnych krokach dowodu przetwarzamy wierzchołki w ustalonej powyżej kolejności i pozwolimy na co najwyżej dwukrotne zmodyfikowanie wagi każdej krawędzi. Każdemu wierzchołkowi  $v_i$ ,  $i < n$ , przypiszemy zbiór dwóch kolorów docelowych  $W(v_i) = \{\phi(v_i), \phi(v_i) + 2\}$ , gdzie  $\phi(v_i) \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Po ostatnim kroku algorytmu, każdy wierzchołek otrzyma jeden z tych przypisanych kolorów. Wyboru  $W(v_i)$  dokonamy tak, by dla każdej pary wierzchołków  $v_i, v_j$ , takich że  $v_i v_j \in E(G)$  oraz  $1 \leq j < i$ , zbiory  $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$  oraz  $\psi(v_i) \in W(v_i)$ . Na zakończenie dla wierzchołka  $v_n$  wybieramy kolor różny od kolorów wszystkich jego sąsiadów.

Przetwarzanie wierzchołków rozpoczynamy od  $v_1$ . Przypisujemy mu kolor  $\psi(v_1) = 3d(v_1)$ . Wybieramy dla niego  $W(v_1) = \{\phi(v_1), \phi(v_1) + 2\}$ , zachowując

przyjęte warunki:  $\psi(v_1) \in W(v_1)$  oraz  $\phi(v_1) \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Dla  $2 \leq k \leq n-1$ , zakładamy, że wybraliśmy wcześniej zbiory kolorów docelowych  $W(v_i)$ , dla wierzchołków  $v_i$ ,  $i < k$  tak, by spełnione były warunki:

- $\psi(v_i) \in W(v_i)$ , dla  $i < k$
- $\omega(v_k v_j) = 3$ , dla wszystkich krawędzi  $j > k$ , oraz
- jeśli istnieją krawędzie  $v_i v_k$ , takie że  $\omega(v_i v_k) \neq 3$ , dla  $i < k$ , to albo  $\omega(v_i v_k) = 2$  i  $\psi(v_i) = \phi(v_i)$  albo  $\omega(v_i v_k) = 4$  i  $\psi(v_i) = \phi(v_i) + 2$ .

Przy tych założeniach możemy zmodyfikować wagi wszystkich krawędzi  $v_i v_k \in E(G)$ ,  $i < k$ , dodając lub odejmując od nich 2, utrzymując jednocześnie  $\psi(v_i) \in W(v_i)$ . Jeśli  $v_k$  ma  $d$  sąsiadów w  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ , daje nam to  $d + 1$  potencjalnych kolorów wierzchołka  $v_k$  (wszystkie albo parzyste albo nieparzyste). Dodatkowo pozwolamy na dodanie lub odjęcie 1 od wagi jednej krawędzi  $v_k v_j$ ,  $v_k v_j \in E(G)$ , takiej że  $j > k$  oraz  $j$  jest możliwie najmniejsze. W ten sposób kolor wierzchołka  $\psi(v_k)$  może przyjąć wartości ze zbioru  $\{a, \dots, a + 2d + 2\}$ . Dokonamy modyfikacji wag jego krawędzi, tak by:

1.  $\psi(v_i) \in W(v_i)$ , dla  $1 \leq i \leq k$
2.  $\phi(v_i) \neq \phi(v_k)$ , dla wszystkich  $v_i v_k \in E(G)$ , takich, że  $i < k$ , oraz
3. albo  $\psi(v_k) = \phi(v_k)$  i  $\omega(v_k v_j) \in \{2, 3\}$ , albo  $\psi(v_k) = \phi(v_k) + 2$  i  $\omega(v_k v_j) \in \{3, 4\}$ .

Warunek (2) może zablokować nam co najwyżej  $2d$  wartości ze zbioru  $\{a, \dots, a + 2d + 2\}$ . Warunek (3) uniemożliwi wybór tylko wartości  $a$  oraz  $a + 2d + 2$ , zatem co najmniej jedna wartość pozostaje wolna do wykorzystania dla  $\psi(v_k)$ .

Powyższe kroki pozwoliły na przypisanie wszystkim wierzchołkom  $v_k$ ,  $k < n$ , zbiorów  $W(v_k)$ . Zauważmy, że krawędzie posiadające wagi 2 i 4 nie będą stanowiły problemu. Rozważmy taką przykładową krawędź  $v_i v_j$ . Jeśli przetwarzamy wierzchołek  $v_j$  i  $\omega(v_i v_j) = 2$  ( $\omega(v_i v_j) = 4$ ), wówczas zgodnie z warunkiem (3)  $\psi(v_i) = \phi(v_i)$  ( $\psi(v_i) = \phi(v_i) + 2$ ). Tym samym możemy pozostawić wagę krawędzi  $v_i v_j$  bez zmiany lub dodać (odjąć) do niej 2, utrzymując  $\psi(v_i) \in W(v_i)$ .

W ostatnim kroku wybieramy kolor dla  $v_n$ . Musimy tego dokonać wykorzystując jedynie  $d(v_n)$  krawędzi. Każda z tych krawędzi pozwala na wybranie jednej z dwóch wag - mniejszej lub większej. Rozpatrzmy przykładową krawędź  $v_i v_n$ . Jeśli  $\psi(v_i) = \phi(v_i)$ , wówczas możemy pozostawić wagę krawędzi  $v_i v_n$  bez zmiany (mniejsza wartość) lub dodać do niej 2 (większa wartość).

Jeśli  $\psi(v_i) = \phi(v_i) + 2$ , wówczas możemy pozostawić wagę krawędzi  $v_i v_n$  bez zmiany (większa wartość) lub odjąć od niej 2 (mniejsza wartość). Taki układ pozwala na wybranie jednej z  $d(v_n) + 1 \geq 3$  wartości  $\psi(v_n)$  (wszystkich tej samej parzystości). Rozważmy zatem najmniejszy możliwy kolor wierzchołka  $v_n$  i oznaczmy go przez  $a$ . Kolor ten uzyskamy poprzez wybranie mniejszej z dwóch możliwych wag na każdej krawędzi incydentnej do  $v_n$ .

Jeśli  $a \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , wówczas wybierając mniejszą z dwóch możliwych wag, dla każdej krawędzi incydentnych do  $v_n$  uzyskamy kolorowanie właściwe, gdyż dla każdego  $v_i \in N(v_n)$ ,  $\psi(v_i) = \phi(v_i) \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Jeśli  $a \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , wówczas rozpatrzmy dwa przypadki. W przypadku, gdy istnieje  $v_m \in N(v_n)$ , taki że  $\psi(v_m) \neq a$ , wówczas wybieramy większą wagę na krawędzi  $v_m v_n$  i mniejsze wagi na wszystkich pozostałych krawędziach. Otrzymujemy  $\psi(v_n) = a + 2$ , tym samym kolorowanie właściwe, gdyż dla każdego  $v_i \in N(v_n)$ ,  $\psi(v_i) = \phi(v_i) \equiv 0, 1 \pmod{4}$  (z wyjątkiem  $v_m$ , którego kolor jest różny od  $a + 2$ ). W przeciwnym przypadku, gdy dla każdego  $v_i \in N(v_n)$ ,  $\psi(v_i) = a$ , wówczas wybieramy większą wagę na dwóch krawędziach incydentnych do  $v_n$ . Kolor wierzchołka  $v_n$  będzie wynosił  $a + 4$ , a kolory jego sąsiadów  $a$  lub  $a + 2$ . Uzyskujemy tym samym kolorowanie właściwe, co kończy dowód.  $\square$

Udowodnione powyżej algorytmy mają wielomianowy czas działania ( $O(n^2)$ ) oraz wielomianową złożoność pamięciową ( $O(n^2)$ ). Podobnie jak w rozdziale poprzednim, możemy zauważyć, że jest to minimalna możliwa złożoność, która pozwala na przypisanie wag krawędziom.

# Rozdział 3

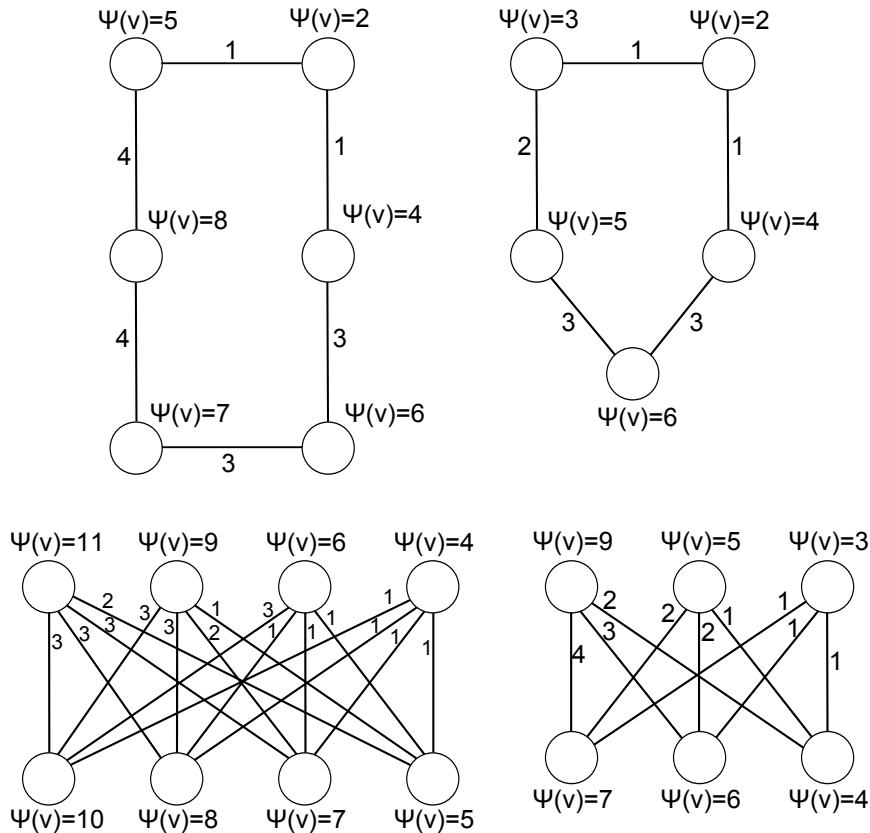
## Globalne rozróżnianie wierzchołków

### 3.1 Rozróżnianie sumami

Problem globalnej siły nieregularności grafu jest najstarszym problemem, który omówimy w niniejszej pracy. Został on sformułowany w 1986 roku w pracy [8] przez Chartranda, Jacobsona, Lehela, Oelleramanna, Ruiza i Sabę. Rozszerzyli oni zwykłą definicję grafu o funkcję nadającą etykiety wszystkim krawędziom (zwane również wagami). Jak już wspomnieliśmy, problem siły nieregularności grafu ( $s(G)$ ) dla ważenia krawędzi polega na znalezieniu takiego ważenia, w którym sumy wag incydentnych krawędzi dla każdego wierzchołka w grafie są różne oraz siła tego grafu jest minimalna. Będziemy zatem szukali przede wszystkim górnego ograniczenia na siłę ważenia. W szczególności nasze badania sprowadzimy do udowodnienia poprawności działania algorytmu ważenia o jak najmniejszej sile.

Dla pewnych klas grafów znane są dokładne wartości siły nieregularności. W pracy [8] podana została wartość siły nieregularności dla grafu pełnego,  $s(G) = sl(G) = 3$ , oraz dla pełnych grafów dwudzielnych,  $K_{n,n} = 3$  dla  $n$  parzystych i  $K_{n,n} = 4$  dla  $n$  nieparzystych,  $n \geq 4$ . W pracy [15] udowodniona została wartość siły nieregularności dla cykli:  $s(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  dla  $n \equiv 1 \pmod{4}$  oraz w przeciwnym przypadku  $s(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ . Możemy zatem przypuszczać, że im minimalny stopień grafu ( $\delta$ ) ma większą wartość, tym mniejsza jest wartość siły nieregularności. Konstrukcja ważenia dla tych przykładów przedstawiona jest na rysunku 3.1.

W pracy [8] autorzy wykazali, że  $s(G) < \infty$  dla dowolnego  $G$ , który nie zawiera dwóch izolowanych wierzchołków lub izolowanej krawędzi. Dowód ten polega na nadaniu kolejnym wagom krawędzi kolejnych potęg liczby 2, co

Rysunek 3.1: Cykle  $C_6$  i  $C_5$ , Grafy pełne dwudzielne  $K_{4,4}$  i  $K_{3,3}$ 

proceeds to non-repeatability of sums for vertices. In this work, the first linear upper bound depending on the number of vertices was proved. For any graph  $G$  without two isolated vertices or an isolated edge,  $s(G) \leq 2n - 3$ , for  $n \geq 3$ . The proof relied on the preliminary assignment of weight 1 to all edges in the graph, and then finding a spanning tree and re-assigning weights only to the edges of this tree. This bound was improved in the work [5], in which Aigner and Triesch proved that for a connected graph  $G$ ,  $s(G) \leq n - 1$ , and for any graph  $G$ ,  $s(G) \leq n + 1$ . Using their method, in the work [30], Nierhoff proved that for any graph  $G$ ,  $s(G) \leq n - 1$ .

The authors of the work [8] also proposed a lower bound, which results from the fact that at the maximum edge weight  $s(G)$  the largest color that a vertex can obtain is  $s(G)d(v)$  and the smallest is  $d(v)$ . Thus, knowing the number of vertices of the same degree, one can say, for example:



**Twierdzenie 3.1** (Chartrand, Jacobson, Lehel, Oellermann, Ruiz, Saba, [8]). *Niech  $G$  będzie spójnym grafem na  $n$  wierzchołkach ( $n \geq 3$ ), zawierającym  $p_i$  wierzchołków  $i$ -tego stopnia,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Wówczas*

$$s(G) \geq \frac{p_i - 1}{i} + 1 \quad (3.1)$$

Następnym Twierdzenia 3.1 jest oszacowanie  $s(G)$  dla grafów  $r$ -regularnych.

**Twierdzenie 3.2** (Chartrand, Jacobson, Lehel, Oellermann, Ruiz, Saba, [8]). *Niech  $G$  będzie grafem  $r$ -regularnym na  $n$  wierzchołkach ( $n \geq 3$ ). Wówczas*

$$s(G) > \frac{n-1}{r} + 1 \text{ dla } n \equiv 2, 3 \pmod{4}, \quad (3.2)$$

$$s(G) \geq \frac{n-1}{r} + 1 \text{ w przeciwnym przypadku.} \quad (3.3)$$

Powyższe dolne ograniczenia były podstawą do hipotezy zaproponowanej przez Jacobsona w pracy Lehela [29], dotyczącej wartości  $s(G)$  dla grafu  $r$ -regularnego.

**Hipoteza 3.3** (Jacobson, Lehel, [29]). *Istnieje stała  $c$ , taka że dla dowolnego grafu regularnego  $G$  na  $n$  wierzchołkach,*

$$s(G) \leq \frac{n}{r} + c \quad (3.4)$$

gdzie  $r \geq 2$  oznacza stopień wierzchołka w grafie  $G$ .

Pierwszym wynikiem, który nawiązywał do hipotezy Jacobsona i Lehela, był wynik Frieza, Goulda, Karońskiego i Pfendera udowodniony w 2002 roku w pracy [14].

**Twierdzenie 3.4** (Frieze, Gould, Karoński, Pfender, [14]). *Niech graf  $G$  nie zawiera wierzchołków i krawędzi izolowanych, wówczas*

(a) *Jeśli  $\Delta \leq \left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor$ , to  $s(G) \leq 7n \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\Delta}\right)$ ,*

(b) *Jeśli  $\left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor + 1 \leq \Delta \leq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} \right\rfloor$ , to  $s(G) \leq 60 \frac{n}{\delta}$ ,*

(c) *Jeśli  $\Delta \geq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1$ ,  $\delta \geq \lceil 6(\log n) \rceil$ , to  $s(G) \leq 336(\log n) \frac{n}{\delta}$ .*

Dla grafów regularnych Frieze, Gould, Karoński i Pfender udowodnili następujące ograniczenie.

**Twierdzenie 3.5** (Frieze, Gould, Karoński, Pfender, [14]). *Niech graf  $G$  będzie  $d$ -regularny i nie zawiera wierzchołków i krawędzi izolowanych, wówczas*

(a) *Jeśli  $d \leq \left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor$ , to  $s(G) \leq 10\frac{n}{d} + 1$ ,*

(b) *Jeśli  $\left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor + 1 \leq d \leq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} \right\rfloor$  to  $s(G) \leq 48\frac{n}{d} + 1$ ,*

(c) *Jeśli  $d \geq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1$ , to  $s(G) \leq 240(\log n)\frac{n}{d} + 1$ .*

Możemy zauważyć, że w pewnych przypadkach wyniki te nie dawały ograniczenia postaci  $k\frac{n}{d} + c$ , gdzie  $k$  jest stałą niezależną od  $n$ . Metody wykorzystane w dowodzie tych twierdzeń polegały na losowym nadawaniu wag  $\{1, 2\}$  lub  $\{1, 2, 3\}$  krawędziom w grafie, a następnie zmodyfikowaniu tego ważenia za pomocą następującego lematu.

**Lemat 3.6** (Frieze, Gould, Karoński, Pfender, [14]). *Niech  $G$  będzie grafem bez izolowanych wierzchołków lub krawędzi oraz niech  $g : E(G) \rightarrow \{1, \dots, w\}$  jest ważeniem grafu. Wówczas istnieje nieregularne ważenie  $f : E(G) \rightarrow \{2m_g, \dots, (3w + 1)m_g\}$ , gdzie*

$$m_g = \max_{X \subseteq V(G)} \{|X| : g(v) = g(u) \text{ dla wszystkich } v, u \in X\}$$

Dowód ograniczeń z Twierdzeń 3.4 i 3.5 polegał na wykazaniu za pomocą technik probabilistycznych, że istnieje takie losowo nadane 2-ważenie lub 3-ważenie, że parametr  $m_g$  nie wykroczy poza określoną wartość.

W 2008 roku, w pracach [34] oraz [35], Przybyło udowodnił twierdzenia, które poprawiły ograniczenie na wartość  $s(G)$  oraz nie były zależne od  $\Delta$ .

**Twierdzenie 3.7** (Przybyło [35]). *Niech  $G$  będzie grafem na  $n$  wierzchołkach bez izolowanych wierzchołków i krawędzi. Wówczas  $s(G) < 112\frac{n}{8} + 28$ .*

**Twierdzenie 3.8** (Przybyło [34]). *Niech  $G$  będzie  $d$ -regularnym grafem na  $n$  wierzchołkach bez izolowanych wierzchołków i krawędzi. Wówczas  $s(G) < 40\frac{n}{8} + 11$ .*

Dowody tych twierdzeń opierały się na wykorzystaniu Lematu 3.6 oraz wniosków z lematu udowodnionego przez Addario-Berry'ego, Dalala i Reeda w pracy [3], który dla danego grafu  $G$  wykazuje istnienie podgrafu rozpinającego o zadanych stopniach wierzchołków, które należą do jednej z czterech zależnych od siebie wartości. Przybyło nie wykorzystywał w swoich dowodach metod probabilistycznych, jednakże jego dowody nie pozwalały na proste konstruowanie funkcji ważenia.

W 2009 roku, Kalkowski, Karoński i Pfender udowodnili w pracy [26] ograniczenie, które jest obecnie najlepszym wynikiem dla dowolnego grafu jak i dla grafów regularnych.

**Twierdzenie 3.9** (Kalkowski, Karoński, Pfender, [26]). *Niech  $\delta$  będzie minimalnym stopniem w grafie  $G$  oraz niech  $n = |V|$ . Wówczas, jeśli  $s(G) < \infty$ , to  $s(G) \leq 6 \lceil \frac{n}{\delta} \rceil$ .*

*Dowód.* Jeśli  $\delta \leq 6$ , wówczas możemy skorzystać z twierdzenia Lehela, z pracy [29].

Założmy, że  $\delta \geq 7$ . Ustalmy kolejność wierzchołków,  $v_1, \dots, v_n$ , tak by dla  $1 \leq i \leq k \leq j \leq n$  zawsze, gdy  $v_i$  i  $v_j$  należą do tej samej składowej spójności  $G$ ,

- $v_k$  również należało do tej samej składowej, oraz
- $v_i$  miało sąsiada  $v_l$ ,  $l > i$ .

Wierzchołki przetwarzamy w kolejności. Każdej krawędzi nadamy wagę składającą się z dwóch składników  $\omega(v_i v_j) = \omega_1(v_i v_j) + \omega_2(v_i v_j)$ ,  $i < j$ . Pierwszy składnik  $\omega_1(v_i v_j) \in \{1, \dots, 2 \lceil \frac{n}{\delta} \rceil\}$  ustalimy w trakcie przetwarzania  $v_i$ . Drugiemu składnikowi nadajemy w pierwszym kroku wartość  $2 \lceil \frac{n}{\delta} \rceil$ . W kolejnych krokach, w trakcie przetwarzania  $v_j$ , umożliwimy zmianę wartości drugiego składnika na wartość należącą do zbioru  $\{0, 2 \lceil \frac{n}{\delta} \rceil, 4 \lceil \frac{n}{\delta} \rceil\}$ . Niech

$$\mathcal{W} := \left\{ \left\{ a + 4b \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil, a + (4b + 2) \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil \right\} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq 2 \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil - 1 \right\} \quad (3.5)$$

będzie zbiorem rozłącznych par liczb pokrywających zbiór liczb całkowitych. Zauważmy, że dowolna liczba całkowita należy do dokładnie jednej pary ze zbioru  $\mathcal{W}$ . Dla każdego wierzchołka  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $W(v_i) \in \mathcal{W}$  będzie unikalną parą zawierającą  $\psi(v_i)$ . Przetwarzając wierzchołek  $v_i$ ,  $i \leq n$  zakładamy, że przetworzyliśmy już wszystkie wierzchołki  $v_k$ ,  $k < i$ , oraz wybraliśmy już pary  $W(v_k)$ .

Niech  $X$  będzie zbiorem identyfikatorów  $i$ , takich, że  $v_i$  lub  $v_{i+1}$  są jednymi z dwóch ostatnich (w ustalonej kolejności) wierzchołków składowej spójności, do której należą. Przetwarzając wierzchołek  $v_i$  sprawdzamy czy należy do  $X$ . Jeśli  $i \notin X$ , wówczas wierzchołek  $v_i$  nie jest ostatnim elementem swojej składowej spójności i jest połączony z jednym wierzchołkiem  $v_j$ ,  $j > i$ . Zmodyfikujemy kolor wierzchołka  $v_i$ , przyporządkowując mu parę liczb  $W(v_i)$ , taką, że  $W(v_i) \cap W(v_k) = \emptyset$  dla wszystkich  $k < i$ . Raz ustalone  $W(v_i)$  nie będzie zmieniane w kolejnych etapach przetwarzania i pozwoli nam na późniejszą zmianę wartości drugiego składnika wagi krawędzi  $v_i v_j$ ,  $j > i$ , przy

jednoczesnym brak konfliktu koloru  $v_i$  z kolorami innych wierzchołków, gdyż składnik ten zmienimy tak, by  $\psi(v_i) \in W(v_i)$ .

Ustalając kolor wierzchołka  $v_i$ , dla każdej krawędzi  $v_i v_j$ ,  $i < j$ , umożliwiamy wybór dowolnej wartości składnika  $\omega_1(v_i v_j)$  należącej do zbioru  $\{1, \dots, 2\lceil \frac{n}{\delta} \rceil\}$ . Dla każdej krawędzi  $v_k v_i$ ,  $k < i$ , pozwalamy na wybór wartości składnika  $\omega_2(v_k v_i)$  w ten sposób, by  $\omega_2(v_k v_i) \in \{0, 2\lceil \frac{n}{\delta} \rceil, 4\lceil \frac{n}{\delta} \rceil\}$  oraz by kolory wierzchołków  $\psi(v_k) \in W(v_k)$ . Oznaczmy przez  $d^+$  liczbę sąsiadów występujących po wierzchołku  $v_i$  w ustalonej kolejności  $d^+ = |N(v_k) \cap \{v_{k+1}, \dots, v_n\}|$ , a przez  $d^-$  oznaczmy liczbę sąsiadów występujących przed nim  $d^- = |N(v_k) \cap \{v_1, \dots, v_{k-1}\}|$ .

Jeśli  $v_i$  ma  $d^+ \geq 1$  sąsiadów  $v_j$ ,  $j > i$ , oraz  $d^-$  sąsiadów  $v_k$ ,  $k < i$ , wówczas mamy

$$2 \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil (d^+ + d^-) - d^+ \geq 2n - d^+ \geq 2i \quad (3.6)$$

możliwych występujących po sobie potencjalnych wartości dla  $\psi(v_i)$ . Wśród nich jest co najmniej  $i$  różnych par w zbiorze  $\mathcal{W}$ . Co najwyżej  $i - 1$  z tych par jest już wybranych dla jakiegoś wierzchołka  $v_k$ ,  $k < i$ , zatem możemy znaleźć wolną parę  $W(v_i)$  i przyporządkować ją  $v_i$ . Wykonujemy odpowiednie modyfikacje składników wag krawędzi i przechodzimy do następnego wierzchołka w kolejności.

Jeśli  $\{i, i + 1\} \subseteq X$ , to znaczy, wierzchołki  $v_i$  i  $v_{i+1}$  są ostatnimi w swojej składowej spójności, wówczas wiemy że  $v_i v_{i+1}$  jest krawędzią. Wybieramy taką wartość  $\omega_1(v_i v_{i+1})$ , by co najwyżej dwa wierzchołki  $v_j$ ,  $i + 1 \geq j \in X$ , miały tą samą wartość  $a$  swoich par  $W$ . Jest to możliwe, gdyż w grafie jest mniej niż  $\lceil \frac{n}{\delta} \rceil$  składowych, więc  $|X| < 2\lceil \frac{n}{\delta} \rceil$ , a wartość  $a$  może przyjąć  $2\lceil \frac{n}{\delta} \rceil$  różnych wartości.

Niech  $j \in \{i, i + 1\}$ . Dla wierzchołków  $v_j$  naszym celem jest taki wybór składników  $\omega_2(v_k v_j)$ ,  $k < i$ , by kolory wszystkich dotychczas przetworzonych wierzchołków  $v_l$ ,  $l \leq j$  były różne. W tym przypadku pozwolimy jednak by istniały dwa wierzchołki  $u$  i  $v$ , takie że  $W(v) = W(u)$ , pod warunkiem, że nie spowodują konfliktu, to znaczy  $\psi(v) \neq \psi(u)$ . Nie będzie to później stanowiło problemu, gdyż po przetworzeniu wierzchołków  $v_j$ , kolory wierzchołków  $v_k$ ,  $k \leq i + 1$ , nie zmieniają się w dalszej części algorytmu, gdyż nie są połączone krawędzią z żadnym wierzchołkiem o indeksie większym od  $i + 1$ .

Składnik  $\omega_1(v_i v_{i+1})$  wybraliśmy tak, że istnieje co najwyżej jeden wierzchołek  $v_l$ ,  $l < j$ , taki, że  $W(v_j) = W(v_l)$ .

Wierzchołek  $v_j$  ma co najmniej  $\delta - 1$  sąsiadów  $v_k$ ,  $k < i$ . Wszyscy jego sąsiedzi  $v_k$  wystąpili w ustalonej kolejności po wierzchołkach  $v_m \in X$ ,  $m < i$ . Tym samym dla wszystkich  $v_k$  dokonaliśmy wyboru par  $W(v_k)$ , do których nie należą żadne inne kolory wierzchołków o indeksie mniejszym od  $i$ . Jednocześnie wybór  $\omega_1(v_i v_{i+1})$  mógł spowodować, że co najwyżej jedna para

$W(v_k)$  może zawierać wartość, do której został przyporządkowany kolor innego wierzchołka niż  $v_k$ . Jeśli taka sytuacja ma miejsce, wówczas wiemy, że przetwarzamy  $v_j$  przy  $j = i + 1$  oraz istnieje taki  $v_p$ ,  $\psi(v_i) \in W(v_p)$ .

Możemy zatem wybrać wartość składnika  $\omega_2(v_kv_j)$  wszystkich  $\delta - 1$  krawędzi  $v_kv_j$ ,  $k < i$ , z wyjątkiem co najwyżej jednej krawędzi  $v_pv_j$  (jeśli istnieje). Możemy też wartości składników  $\omega_2(v_kv_j)$  pozostawić bez zmian. Pamiętajmy, że wybór wartości  $\omega_2(v_kv_j)$  jest ograniczony warunkiem  $\psi(v_k) \in W(v_k)$ .

Taki układ pozwala nam na wybór dla  $\psi(v_j)$  jednego z  $\delta - 1$  kolorów, tworzących ciąg arytmetyczny o różnicy kolejnych elementów równej  $2\lceil \frac{n}{\delta} \rceil$ , który zawiera co najmniej  $\frac{\delta-3}{2} \geq 2$  różnych par w  $\mathcal{W}$ .

Wybór  $\omega_1(v_iv_{i+1})$ , zapewnił nam, że co najwyżej jedna taka para  $W$  zawiera kolor  $\psi(v_c)$ ,  $j > c \in X$ . Zatem istnieje co najmniej jedna wolna para, która nie zawiera koloru  $\psi(v_c)$ ,  $j > c \in X$ . Jednocześnie wiemy, że może ona zawierać co najwyżej jeden kolor wierzchołka  $v_l$ ,  $j > l \notin X$ . Wybieramy zatem wagi krawędzi  $\omega_2(v_kv_j)$  tak, by kolor wierzchołka  $v_j$  trafił do tej właśnie wolnej pary.

Jeśli doszło do sytuacji, że kolor wierzchołka  $v_j$  spowodował konflikt z kolorem pewnego  $v_l$ ,  $l \notin X$ , to znaczy  $\psi(v_l) = \psi(v_j)$ , wówczas rozpatrujemy dwa przypadki. Jeśli  $v_lv_j \notin E$ , wówczas zmodyfikujemy wagę  $\omega_2$  krawędzi  $v_kv_j$ ,  $k \neq l$ , tak by  $\psi(v_j)$  trafiło do drugiej wartości pary  $W(v_j)$ . Zauważmy, że kolor wierzchołka  $v_j$  mógł wybrać dowolną z dwóch wartości pary, do której go przypisaliśmy. W przypadku gdy  $v_lv_j \in E$  taka modyfikacja może się okazać niemożliwa. Wówczas zmodyfikujemy wagę dwóch krawędzi  $\omega_2(v_kv_j)$ ,  $k \neq l$  oraz  $\omega_2(v_lv_j)$ , zachowując kolor  $\psi(v_j)$  bez zmian, a zmieniając kolor  $\psi(v_l)$  na drugi z pary  $W(v_l)$ . W powyższy sposób przetwarzamy w kolejności wszystkie wierzchołki w grafie, co kończy dowód.  $\square$

Konstrukcja dowodu ma formę algorytmu, który ma wielomianowy czas działania ( $O(n^2)$ ) oraz wielomianową złożoność pamięciową ( $O(n^2)$ ).

## 3.2 Rozróżnianie totalnymi sumami

Problem globalnej siły nieregularności dla totalnego ważenia ( $s_t(G)$ ), został sformułowany w pracy [7], przez Baćę, Jendrola, Millera i Ryana. Polega on na znalezieniu takiego totalnego ważenia grafu, w którym stopnie wazone wszystkich wierzchołków w grafie są różne oraz siła grafu jest minimalna. Podobnie jak wcześniej, kierunkiem badań będzie szukanie ograniczeń na wartość  $s_t(G)$  oraz odpowiednich algorytmów ważenia.

Model ten wydaje się być łatwiejszy ze względu na możliwość lokalnego modyfikowania koloru wierzchołka. Jednakże, o ile w przypadku lokalnego

rozróżniania totalnymi sumami uzyskaliśmy wynik bliski ograniczeniu dolnemu, o tyle tutaj wynik jest bardziej odległy od ograniczenia dolnego.

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że  $s_t(G) > 1$ . Przykładem grafu, którego totalna siła nieregularności jest minimalna jest graf pełny.

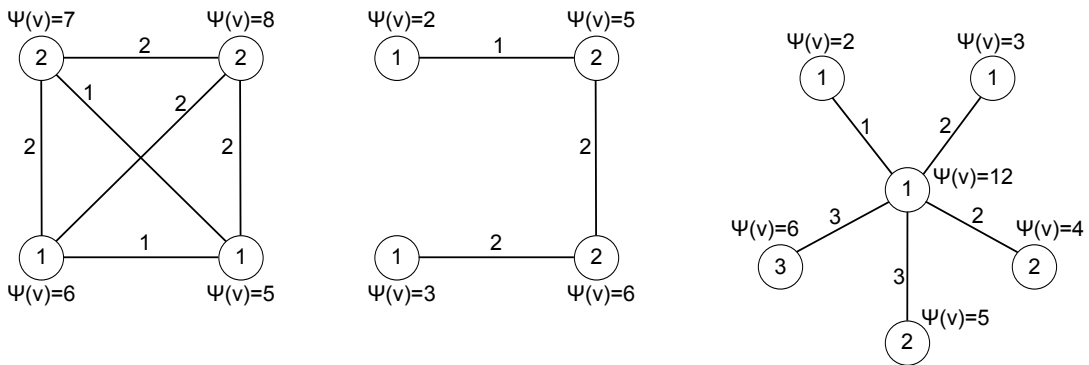
**Twierdzenie 3.10.** *Niech  $K_n$  będzie grafem pełnym na  $n$  wierzchołkach, wówczas*

$$s_t(G) = 2 \quad (3.7)$$

Dowód tego twierdzenia przebiega w analogiczny sposób, do dowodu Twierdzenia 2.9. Przykład grafu pełnego jest o tyle szczególnym przypadkiem, że jego kolorowanie zachowuje się tak samo dla wersji lokalnej, jak i globalnej. Innym przykładem grafu o zadanej strukturze, który w odróżnieniu od  $K_n$  wymaga wykorzystania większych wag, zależnych od rozmiaru grafu, jest gwiazda.

**Twierdzenie 3.11.** *Niech  $K_{1,n}$  będzie gwiazdą o  $n$  wiszących wierzchołkach, wówczas*

$$s_t(G) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad (3.8)$$



Rysunek 3.2: Grafy totalnie ważone:  $K_4$ ,  $P_4$ ,  $K_{1,5}$

W pracy [7] udowodniono następujące oszacowania:

**Twierdzenie 3.12** (Bača, Jendroř, Miller, Ryan, [7]). *Dla dowolnego grafu*

$$\left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq s_t(G) \leq n + \Delta - 2\delta + 1$$

**Twierdzenie 3.13** (Bača, Jendroř, Miller, Ryan, [7]). *Dla grafów bez izolowanych wierzchołków i krawędzi*

$$s_t(G) \leq n - 1 - \left\lfloor \frac{n-2}{\Delta+1} \right\rfloor$$

Ponadto autorzy powyższych twierdzeń zauważyli proste ograniczenie górne, uzależniające  $s_t(G)$  od  $s(G)$ . Wykazali, że dla dowolnego grafu  $G$ ,  $s_t(G) \leq s(G)$ . Dowód tego faktu jest oczywisty. Wystarczy uzupełnić ważenie o zadanej sile nieregularności  $s(G)$  o wagi wierzchołków 1 i otrzymujemy różne kolory wszystkich wierzchołków.

Twierdzenie to, w połączeniu z ograniczeniem  $s(G) \leq n - 1$  dla grafów bez izolowanych wierzchołków i krawędzi, prowadzi do wniosku, że przy tym samym założeniu,  $s_t(G) \leq n - 1$ .

Analizując powyższe przykłady możemy sformułować następującą hipotezę.

**Hipoteza 3.14.** *Dla dowolnego grafu regularnego  $G$  na  $n$  wierzchołkach, istnieje stała  $c$ , taka że*

$$s(G) \leq \frac{n}{\delta} + c \tag{3.9}$$

W pracy [34] Przybyło, opierając się na metodach wykorzystanych w pracy [14], udowodnił pierwsze ograniczenie górne na wartość totalnej siły nieregularności, które dla pewnych przypadków daje ograniczenie postaci  $k\frac{n}{\delta} + C$ , gdzie  $C$  jest stałą.

**Twierdzenie 3.15** (Przybyło, [34]). *Niech  $G$  będzie grafem na  $n$  wierzchołkach bez izolowanych wierzchołków.*

- *Jeśli  $\Delta \leq \left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor$ , to  $s_t(G) \leq 2n \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\Delta}\right)$ ,*
- *Jeśli  $\left\lfloor \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{4}} \right\rfloor + 1 \leq \Delta \leq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} \right\rfloor$ , to  $s_t(G) \leq 18\frac{n}{\delta}$ ,*
- *Jeśli  $\Delta \geq \left\lfloor n^{\frac{1}{2}} + 1 \right\rfloor$ ,  $\delta \geq \lceil 10 \log n \rceil$ , to  $s_t(G) \leq 96 (\log n) \frac{n}{\delta}$ ,*

W dowodzie tego twierdzenia, Przybyło dokonał modyfikacji Lematu 3.6 oraz skorzystał z tych samych technik, co w Twierdzeniu 3.4. Krótko po powstaniu powyższego dowodu, w pracy [35], Przybyło poprawił swoje ograniczenie, uzyskując następujący wynik.

**Twierdzenie 3.16** (Przybyło, [35]). *Niech  $G$  będzie grafem na  $n$  wierzchołkach, bez izolowanych wierzchołków. Wówczas:*

- $s_t(G) < 32\frac{n}{\delta} + 8$ , dla dowolnego grafu.
- Jeśli  $G$  jest  $d$ -regularny, to  $s_t(G) < 8\frac{n}{\delta} + 3$ .

Dowody zaproponowane przez Przybyło korzystały z analogicznych technik, które zaprezentował wcześniej w pracy [35]. Metody te nie pozwalały na łatwą konstrukcję totalnego ważenia.

W 2008 roku Anholcer, Kalkowski i Przybyło w pracy [4] uzyskali najlepsze obecnie ograniczenie górne na wartość totalnej siły nieregularności.

**Twierdzenie 3.17** (Anholcer, Kalkowski, Przybyło, [4]). *Niech  $G$  będzie grafem na  $n$  wierzchołkach o minimalnym stopniu  $\delta > 1$ . Wówczas*

$$s_t(G) \leq 3 \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil + 1 \quad (3.10)$$

*Dowód.* Ustalmy dowolną kolejność wierzchołków  $v_1, v_2, \dots, v_n$  w grafie  $G = (V, E)$ . Dla danego wierzchołka  $v_i$ , jego sąsiadami poprzedzającymi nazwywamy tych sąsiadów  $v_j$ , którzy mają mniejszą wartość indeksu,  $j < i$ , a krawędzie łączące  $v_i$  z tymi krawędziami nazywamy krawędziami poprzedzającymi. Analogicznie zdefiniujemy sąsiadów i krawędzie następujące, biorąc  $j > i$  zamiast  $j < i$ . Ustalmy też  $\lambda = \lceil \frac{n}{\delta} \rceil$ . Na początku nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagi  $\lambda + 1$ , a wierzchołkom wagę 1. Ostateczne ważenie uzyskamy w  $n$  krokach. W  $i$ -tym kroku ustalamy kolor wierzchołka  $v_i$ . Kolor ten oznaczamy przez  $\phi(v_i)$  i jest to tzw. ostateczny kolor, czyli taki, który wierzchołek ma otrzymać po zakończeniu działania algorytmu. W trakcie przetwarzania kolejnych wierzchołków mogą one zmieniać tymczasowo kolory swoich sąsiadów poprzedzających, poprzez zmianę wag krawędzi poprzedzających. Przez tymczasowy kolor, rozumiemy kolor, którego wartość jest obliczana w danej chwili poprzez zsumowanie bieżących wag krawędzi i wierzchołka. Kolor tymczasowy wierzchołka  $v_i$  oznaczamy przez  $\psi(v_i)$ .

Przed rozpoczęciem pierwszego kroku kolor każdego wierzchołka  $v_i$  wynosi  $(\lambda + 1)d(v_i) + 1$  oraz nie wybraliśmy żadnej wartości  $\phi(v_i)$ . W trakcie przetwarzania, umożliwimy co najwyżej dwukrotne zmodyfikowanie wagi każdej krawędzi tak, by jej waga po ostatnim kroku należała do zbioru  $\{1, \dots, 3\lambda + 1\}$ . Wagi wierzchołków zostaną ustalone dopiero w ostatnim kroku i będą należały do zbioru  $\{1, \dots, \lambda + 1\}$ . W trakcie  $i$ -tego kroku, zmieniamy wagi krawędzi następujących i poprzedzających, przy czym dbamy o to, by wagi krawędzi poprzedzających zapewniły dla sąsiadów poprzedzających warunek:

$$\phi(v_j) - \lambda \leq \psi(v_j) \leq \phi(v_j) \quad (3.11)$$



dla  $j = 1, \dots, i$ .

Założmy zatem, że przetwarzamy wierzchołek  $v_i$  oraz wybraliśmy zgodnie z powyższym opisem ostateczne kolory wierzchołków  $v_j$ ,  $j < i$ . Do każdej z wag krawędzi wierzchołka  $v_i$  do jego sąsiadów o indeksie większym od  $i$  pozwolimy na dodanie jednej wartości ze zbioru  $\{0, \dots, \lambda\}$ . Sąsiedzi o indeksie większym od  $i$  nie mają wybranego ostatecznego koloru, więc warunek (3.11) jest spełniony. Wagi każdej z krawędzi poprzedzających  $v_i$  modyfikujemy o takie wartości ze zbioru  $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$ , by każdy sąsiad poprzedzający spełniał warunek (3.11). Każda z modyfikacji krawędzi poprzedzających jak i następujących, umożliwi nam uzyskanie  $\lambda$  nowych kolejnych kolorów tymczasowych dla wierzchołka  $v_i$  lub pozostawienie jego koloru bez zmiany. Zatem łącznie możemy wybrać jeden z  $\lambda\delta + 1 > n$  kolejnych kolorów dla  $v_i$ . Wiedząc jednocześnie, że co najwyżej  $i - 1 < n$  wierzchołków ustaliło dotychczas swoje kolory ostateczne, mamy możliwość takiej modyfikacji wag krawędzi incydentnych z  $v_i$ , że kolor tymczasowy  $\psi(v_i) \neq \phi(v_j)$ , dla  $j < i$ . Dokonujemy tych modyfikacji, a następnie ustalamy wartość  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ .

Powyższe kroki zapewniają spełnianie warunku (3.11) oraz umożliwiają wyznaczenie ostatecznych kolorów dla wszystkich wierzchołków. Ponadto należy zauważyć, że wyjściowa waga  $\lambda + 1$  danej krawędzi  $v_i v_j$  została zmodyfikowana co najwyżej dwa razy. Najpierw podczas przetwarzania  $v_i$  umożliwiłmy dodanie do jej wagi jednej wartości ze zbioru  $\{0, \dots, \lambda\}$ , a następnie, podczas przetwarzania  $v_j$ , zależnie od sytuacji mogła zmienić swoją wartość o  $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$ . Tym samym mamy pewność, że waga każdej krawędzi należy do zbioru  $\{1, \dots, 3\lambda + 1\}$ .

W ostatnim kroku, mając spełniony warunek (3.11), dodamy do wagi każdego wierzchołka taką wartość ze zbioru  $\{0, \dots, \lambda\}$ , by dla każdego wierzchołka  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\psi(v_i) = \phi(v_i)$ . Jednocześnie wiemy, że ostateczne kolory wszystkich wierzchołków są różne dla dowolnych dwóch wierzchołków. Tym samym, uzyskaliśmy totalne ważenie grafu, o maksymalnej nadanej wadze  $3\lambda + 1$ , co kończy dowód.

□

Dowód tego twierdzenia zawiera konstrukcję algorytmu ważenia, którego implementacja nie wymaga budowania żadnych dodatkowych struktur, poza strukturą grafu umożliwiającą nadanie wag krawędziom i wierzchołkom. Algorytm ma wielomianowy czas działania ( $O(n^2)$ ) oraz wielomianową złożoność pamięciową ( $O(n^2)$ ).

# Rozdział 4

## Pokrewne problemy rozróżniania

Wyniki omówione w poprzednich rozdziałach znalazły swoje zastosowanie w pokrewnych dziedzinach rozróżniania wierzchołków. W szczególności dotyczy to algorytmu wykorzystanego w dowodzie Twierdzenia 2.8.

### 4.1 Lokalne rozróżnianie totalnymi iloczynami

Pierwszym problemem, który omówimy, jest lokalna siła nieregularności grafu dla totalnego ważenia, z wykorzystaniem iloczynów zamiast sum. W pracy [38], Skowronek-Kaziów zaproponowała modyfikację problemu lokalnej siły nieregularności, polegającą na interpretacji koloru wierzchołka jako iloczynu wag krawędzi z nim incydentnych. W pracy [37] rozszerzyła swój model kolorowania dla totalnego ważenia, interpretując kolor wierzchołka jako wynik iloczynu wag krawędzi z nim incydentnych oraz wagi samego wierzchołka.

$$\psi(v) = \omega(v) \prod_{v \in e} \omega(e) \quad (4.1)$$

Kolor taki nazywamy kolorem iloczynowym. Jednocześnie totalne ważenie  $\omega$  nazywamy kolorowaniem właściwym, jeśli dla dowolnych  $u$  i  $v$ , takich że  $uv \in E$ ,

$$\omega(v) \prod_{v \in e} \omega(e) \neq \omega(u) \prod_{u \in e} \omega(e) \quad (4.2)$$

Problem lokalnej iloczynowej totalnej siły nieregularności ( $slp_t(G)$ ) grafu dla totalnego ważenia, polega na znalezieniu takiego ważenia grafu, w którym kolory iloczynowe sąsiadujących wierzchołków są różne oraz siła grafu jest minimalna.

W pracy [37], Skowronek-Kaziów, korzystając z metody zaprezentowanej w dowodzie Twierdzenia 2.9, udowodniła następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.1** (Skowronek-Kaziow, [37]). *Dla grafu pełnego na  $n$  wierzchołkach, totalna iloczynowa siła nieregularności wynosi 2.*

Skowronek-Kaziow, w pracy [37], sformułowała ponadto następującą hipotezę.

**Hipoteza 4.2.** *Dla dowolnego prostego grafu istnieje 2-totalne ważenie, będące kolorowaniem iloczynowym.*

W pracy [37] udowodniła, że hipoteza jest prawdziwa dla grafów 3-kolorowalnych (w klasycznym sensie). Ponadto, opierając się na technikach, które zostały zaproponowane w [1], Skowronek-Kaziow wykazała konstrukcję następującego ważenia.

**Twierdzenie 4.3** (Skowronek-Kaziow, [37]). *Dla dowolnego grafu  $G$  istnieje 3-totalne-ważenie będące kolorowaniem iloczynowym.*

Dowód tego twierdzenia korzysta z Lematu 2.7 i nadaje wagi  $\{1, 2, 3\}$  zarówno wierzchołkom jak i krawędziom w grafie. Korzystając z technik zaprezentowanych w dowodzie Twierdzenia 2.8, wykażemy twierdzenie poprawiające powyższy wynik. Jego dowód ma prostszą budowę od dowodu Twierdzenia 4.3 i korzysta z wag  $\{1, 2\}$  na wierzchołkach.

**Twierdzenie 4.4** (Kalkowski, [21]). *Dla dowolnego grafu  $G$  istnieje ważenie  $\omega : V \rightarrow \{1, 2\} \cup E \rightarrow \{1, 2, 3\}$ , będące kolorowaniem iloczynowym.*

*Dowód.* Załóżmy, że mamy dany spójny graf  $G = (V, E)$ . W przypadku gdy  $G$  jest grafem niespójnym, możemy przeprowadzić dowód osobno niezależnie dla każdej składowej spójności.

Przez  $\psi(v)$  oznaczamy kolor wierzchołka, który za każdym razem jest obliczany zgodnie z równaniem (4.1). Dla każdego wierzchołka, w trakcie działania algorytmu, wybierzemy kolor docelowy, oznaczany przez  $\phi(v)$ . Kolory docelowe zostaną wybrane tak, by były różne dla każdego z sąsiadujących wierzchołków. Będziemy dążyć do tego, by po ostatnim kroku procedury ważenia każdy wierzchołek miał  $\psi(v) = \phi(v)$ .

Niech  $|V(G)| = n$ . W przypadku gdy  $n = 1$  nie ma nic do wykazania. Jeśli  $n = 2$ , wówczas nadajemy wagę 1 jedynej krawędzi w  $G$ , a dwóm wierzchołkom odpowiednio wagę 1 i 2.

Założmy zatem, że  $n \geq 3$ . W pierwszym kroku nadajemy wszystkim krawędziom w grafie wagę 2, a wszystkim wierzchołkom wagę 1. W ten sposób uzyskujemy możliwość co najwyżej jednokrotnej modyfikacji wagi krawędzi (mnożąc jej wartość lub dzieląc przez 2) oraz jednokrotnego przemnożenia wagi wierzchołka przez 2. W dalszej części algorytmu przetwarzamy wierz-

chołki w ustalonej kolejności  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Rozpoczynając od wierzchołka  $v_1$ , ustalamy  $\phi(v_1) = \psi(v_1) = 2^{d(v_1)}$ . Następnie, w trakcie przetwarzania każdego kolejnego wierzchołka  $v_i$ , gdzie  $2 \leq i \leq n$ , wymagamy aby:

- $\psi(v_j) = \phi(v_j)$  lub  $\psi(v_j) = \phi(v_j)/2$ , dla każdego  $j < i$ .
- $\phi(v_j) \neq \phi(v_l)$ , jeśli istnieje krawędź  $(v_i, v_j) \in E(G)$  oraz  $j, l < i$ .
- $\omega(e) = 2$ , dla każdej krawędzi  $e = (v_i, v_l)$ .

Założmy, że  $v_i$  ma  $k$  wierzchołków sąsiadujących w zbiorze  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ , których nazywamy sąsiadami poprzedzającymi  $v_i$ . Oznaczamy  $k = |N(v) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}|$ .

Następnie wyznaczamy kolor docelowy dla  $v_i$ , różny od kolorów docelowych jego sąsiadów występujących przed nim w ustalonej kolejności, modyfikując wagi krawędzi  $e = (v_i, v_j), j < i$ . Modyfikacja polega na wybraniu jednej możliwości:

- możemy pozostawić wagę krawędzi bez zmiany, lub,
- jeśli  $\psi(v_j) = \phi(v_j)/2$ , to zmieniamy wagę krawędzi na 4,
- jeśli  $\psi(v_j) = \phi(v_j)$ , to zmieniamy wagę krawędzi na 1.

Zauważmy, że dla każdej z krawędzi poprzedzających uzyskujemy możliwość pozostawienia koloru  $v_i$  bez zmiany lub zmiany koloru  $v_i$  na nową wartość. Tym samym możemy wybrać jeden z  $k$  nowych kolorów dla  $v_i$  lub pozostawić go bez zmiany. Daje nam to  $k + 1$  potencjalnych wartości dla  $\phi(v_i)$ . Wiedząc, że  $v_i$  ma dokładnie  $k$  sąsiadów poprzedzających, wyznaczamy jego kolor w ten sposób, by spełnił wymagania każdego kolejnego kroku oraz by nie powodował żadnego konfliktu z kolorami docelowymi jego sąsiadów poprzedzających. Modyfikujemy wagi krawędzi do jego sąsiadów poprzedzających, wybierając tym samym wartość  $\psi(v_i)$ , która spełnia oba wymagania. Ustalamy jednocześnie  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ .

W powyższy sposób przetwarzamy wszystkie pozostałe wierzchołki. Po wybraniu koloru dla  $v_n$  graf  $G$  ma następujące własności:

- każdy wierzchołek  $v \in V$ , ma albo  $\psi(v) = \phi(v)$ , albo  $\psi(v) = \phi(v)/2$ ,
- żadne dwa sąsiadujące wierzchołki nie mają tego samego koloru docelowego,
- wagi wszystkich krawędzi należą do zbioru  $\{1, 2, 4\}$ ,
- wagi wszystkich wierzchołków wynoszą 1.

Następnie, w celu uzyskania kolorowania właściwego, pozostaje nadanie ostatecznego koloru wierzchołkom, dla których  $\psi(v) = \phi(v)/2$ . Dokonujemy tego zmieniając ich wagę na 2, tym samym zapewniając  $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ , dla  $i = 1, \dots, n$ .

W ostatnim kroku, dla tych krawędzi które otrzymały wagę 4, zmieniamy ją na 3. Zauważmy, że przed tym krokiem wagi sąsiadujących wierzchołków były postaci  $2^l$ . Po zmianie wag krawędzi równych 4, kolory wierzchołków będą postaci  $2^m 3^p$ . Wiemy też, że kolory sąsiadujących wierzchołków były różne. Zatem po tym kroku ich kolory pozostaną różne, gdyż będą się różniły albo potęgą liczby 2 albo potęgą liczby 3, co kończy dowód.  $\square$

## 4.2 Konfiguracje żetonów

Problem kolorowania grafu poprzez konfiguracje żetonów polega na ułożeniu na krawędziach grafu skierowanego żetonów, w taki sposób, że kolor wierzchołka interpretowany jako wynik odejmowania liczby żetonów na krawędziach wchodzących od liczby żetonów na krawędziach wychodzących, daje różne wartości dla dowolnych dwóch połączonych wierzchołków (kolorowanie właściwe). Problem ten został wprowadzony przez Borowieckiego, Grytczuka i Piłśniak, w pracy [6].

W pracy [6] wprowadzili oni również modyfikację tego problemu, polegającą na wstępnym ułożeniu pewnej liczby żetonów na krawędziach grafu nieskierowanego oraz wykazaniu, że możliwe jest takie ich przekładanie, że uzyskamy kolorowanie właściwe. Przekładanie polega na przełożeniu jednego lub więcej żetonów z wierzchołka i umieszczeniu na dowolnej krawędzi incydentnej do tego wierzchołka lub na przełożeniu jednego lub więcej żetonów z krawędzi i przełożeniu na wierzchołek incydentny. Liczbę żetonów na danej krawędzi oznaczamy przez  $q(e)$ , a na wierzchołku  $q(v)$ . Kolor wierzchołka w tym przypadku rozumiany jest jako suma liczby żetonów na krawędziach incydentnych i na samym wierzchołku.

$$\psi(v) = q(v) + \sum_{e=(u,v), e \in E} q(e) \quad (4.3)$$

Zauważmy, że problem konfiguracji żetonów zakłada istnienie wyjściowego ułożenia zadanej liczby żetonów na krawędziach i wierzchołkach oraz uniemożliwia dokładanie kolejnych żetonów w razie potrzeby. Tym samym, problem sprowadza się również do sprawdzenia jaka łączna liczba żetonów będzie wystarczająca by utworzyć kolorowanie właściwe.

W pracy [6], Borowiecki, Grytczuk i Piłśniak wykazali, że możliwa jest konstrukcja kolorowania właściwego poprzez ułożenie  $|E|$  żetonów na krawę-

dziach grafu oraz takie ich przekładanie, że wierzchołki otrzymają 0 lub 1 żetonów, a krawędzie 0, 1 lub 2 żetonów. Twierdzenie to przytoczymy poniżej wraz z dowodem, który opiera się prawie w całości na dowodzie Twierdzenia 2.8.

Wprowadźmy najpierw parametr pomocniczy, tak zwaną „liczbę kolorującą” oznaczaną przez  $col(G)$ . Zakładamy, że mamy dany graf  $G$  oraz ustalone uporządkowanie wierzchołków  $v_1, \dots, v_n$ . Sąsiadami poprzedzającymi wierzchołka  $v_i$  nazywamy tych sąsiadów  $v_j \in N(v_i)$ , dla których  $j < i$ . Niech  $b(v_i)$  oznacza liczbę sąsiadów poprzedzających.

**Definicja 4.5.** *Liczbą kolorującą grafu  $G$ ,  $col(G)$ , nazywamy najmniejszą wartość  $k$ , taką że istnieje takie uporządkowanie wierzchołków, w którym dla dowolnego  $i = 1, \dots, n$ ,  $b(v_i) \leq k - 1$ .*

Liczba kolorująca może znaleźć zastosowanie jako ograniczenie dolne na łączną liczbę różnych kolorów w grafie, którą nada procedura . Autorzy pracy [6] zauważyli tą zależność interpretując kolory modulo  $m$ .

**Twierdzenie 4.6.** *Niech dany będzie graf  $G = (V, E)$  oraz niech  $m = col(G)$ . Wówczas istnieje taka konfiguracja żetonów  $c : V \cup E \rightarrow \mathbb{Z}_m$ , że  $c(v) \in \{0, 1\}$  oraz  $c(e) \in \{0, 1, 2\}$ .*

*Dowód.* Niech dany będzie graf  $G = (V, E)$ .

W pierwszym kroku układamy na wszystkich krawędziach w grafie jeden żeton. Następnie przetwarzamy wierzchołki w ustalonej kolejności. Dla przetwarzanego wierzchołka  $v_i$ , w celu odróżnienia jego koloru od kolorów jego sąsiadów poprzedzających, pozwolimy na przełożenie żetonów na jego krawędziach  $e_{ij} = v_i v_j$  do sąsiadów poprzedzających  $v_j$ . Jeśli sąsiad poprzedzający ma  $q(v_j) = 0$ , pozwolimy na przełożenie żetonu z krawędzi  $e_{ij}$  na wierzchołek  $v_j$ , a w przeciwnym przypadku, gdy  $q(v_j) = 1$ , na przełożenie żetonu z wierzchołka  $v_j$  na krawędź  $e_{ij}$ . Obie możliwości nie zmieniają koloru wierzchołka  $v_j$ , a pozwalają na wybranie jednego nowego koloru dla wierzchołka  $v_i$ . Jeśli  $v_i$  ma  $d$  sąsiadów poprzedzających, wówczas mamy  $d + 1$  możliwych kolorów dla wierzchołka  $v_i$ , poprzez przekładanie zgodne z opisem powyżej. Co najmniej jeden z tych kolorów będzie różny od kolorów sąsiadów poprzedzających wierzchołka  $v_i$ . Przekładamy żetony w ten sposób by  $v_i$  otrzymał kolor różny od kolorów sąsiadów poprzedzających wierzchołka  $v_i$ . Po przetworzeniu wierzchołka  $v_n$  uzyskujemy kolorowanie właściwe.  $\square$

# Bibliografia

- [1] L. Addario-Berry, R.E.L. Aldred, K. Dalal, B.A. Reed, *Vertex colouring edge partitions*, J. Comb. Theory Ser. B, 94 (2005), (2), 237-244.
- [2] L. Addario-Berry, K. Dalal, C. McDiarmid, B.A. Reed, A. Thomason *Vertex-colouring Edge-weightings*, Combinatorica 27 (2007), (1), 1-12.
- [3] L. Addario-Berry, K. Dalal, B.A. Reed, *Degree constrained subgraphs*, Discrete Appl. Math. 156 (2008), (7), 1168-1174.
- [4] M. Anholcer, M. Kalkowski, J. Przybyło, *A new upper bound for the total vertex irregularity strength of graphs*, Discrete Mathematics, 309 (2009) 6316-6317.
- [5] M. Aigner, E. Triesch, *Irregular assignments of trees and forests*, SIAM J. Discrete Math. 3 (1990),(4), 439-449.
- [6] M. Borowiecki, J. Grytczuk, M. Piłśniakm *Coloring chip configurations on graphs and digraphs*, Preprint Nr MD 043 (2009).
- [7] M. Bača, JS.endroľa, M. Miller i J. Ryan, *On irregular total labellings*, Discrete Mathematics 307 (2007), (11-12), 1378-1388.
- [8] G. Chartrand, M.S. Jacobson, J. Lehel, O.R. Oellermann, S. Ruiz, F. Saba: *Irregular networks*, Congressus Numerantium 64 (1988).
- [9] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L.Rivest, C. Stein : *Introduction to algorithms*.
- [10] J. Dinitz, D. Garnick, *Minimal Irregular Weightings of  $X_{m,n}$  for  $3 \leq m, n \leq 16$* , University Vermont, Burlington (1991).
- [11] J. Dinitz, D. Garnick, A. Gyarfás, *On the Irregularity Strength of the  $m \times n$  Grid*, Journal of Graph Theory Vol. 16 No. 4 (1992).

- 
- [12] G. Ebert, J. Hammeter, F. Lazebnik, A. Woldar, *Irregularity Strength of Certain Graphs*, Congressum Numerantium 71 (1990).
- [13] R.J.Faudree, J. Lehel, *Bound on the irregularity strength of regular graphs*, Colloq Math Soc Janos Bolyai, 52, Combinatorics, Eger North Holland, Amsterdam (1987) 247-256.
- [14] A. Frieze, R.J. Gould, M. Karoński, F. Pfender: *On graph irregularity strength*, Journal of Graph Theory 41 (2002).
- [15] R. Faudree, M. Jacobson, J. Lehel, R. Schelp, *Irregular networks, regular graphs and integer matrices with distinct row and column sums*, Discrete Mathematics 76 (1989).
- [16] A. Gyarfás : *The irregularity strength of  $K_{m,m}$  is 4 for odd  $m$* , Discrete Mathematics 71(1988).
- [17] D. Garnick, *The Irregularity Strength of  $m \times n$  Grids, for  $m, n \geq 18$* , Ars Combinatoria 40(1995).
- [18] D.K. Garnick, J.H. Dinitz: *Heuristic Algorithms for Finding Irregularity Strengths of Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 8 (1990).
- [19] S. Jendrol, V. Zoldak : *The irregularity strength of Generalized Petersen Graphs*, Mathematica Slovaca 45 (1995).
- [20] M. Kalkowski, *A note on 1,2-Conjecture*, Elect. Journ. of Comb., accepted.
- [21] M. Kalkowski, *A note on 1,2-Conjecture - the multiplicative version*, manuscript.
- [22] M. Kalkowski, *Kolorowanie właściwe 5-totalnym-ważeniem*, manuscript.
- [23] M. Kalkowski, K. Krzywdziński *Kolorowanie właściwe 10-ważeniem krawędzi*, manuscript.
- [24] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender, *Vertex-Coloring Edge Weightings: Towards the 1-2-3-Conjecture*, J. Combin. Theory (B), to appear.
- [25] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender, *Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6*, Rostocker Mathematisches Kolloquium, to appear



- 
- [26] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender, *A new upper bound for the irregularity strength of graphs*, SIAM J. Discrete Math., to appear
- [27] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B, 91 (2004) 151-157.
- [28] L. Kinch, J. Lehel, *The irregularity strength of  $tP_3$* , Discrete Mathematics 94 (1991).
- [29] J. Lehel, *Facts and Quests on Degree Irregular Assignments*, Hungarian Academy of Sciences (1988).
- [30] T. Nierhoff, *A tight bound on the irregularity strength of graphs*, SIAM J. Discrete Math. 13 (2000), (3), 313-323.
- [31] N. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity* Prentice Hall (1982).
- [32] J. Przybyło, *A note on neighbour-distinguishing regular graphs total-weighting*, Elect. Journ. of Comb. 15 (2008), (1), 35.
- [33] J. Przybyło, *A note on the neighbour-distinguishing total-weightings of graphs with low maximum degree*, manuskrypt.
- [34] J. Przybyło, *Irregularity strength of regular graphs*, Electr. Journ. of Comb. 15 (2008), (1), R38.
- [35] J. Przybyło, *Linear bound on the irregularity strength and the total vertex irregularity strength of graphs*, SIAM Journal of Discrete Mathematics,
- [36] J. Przybyło, M. Woźniak, *1,2 Conjecture, II*, Preprint MD 026 (2007), <http://www.ii.uj.edu.pl/preMD/index.php>
- [37] J. Skowronek-Kaziów, *1,2 Conjecture - the multiplicative version*, Inf. Process. Letters 107 (2008), (3-4), 93-95.
- [38] J. Skowronek-Kaziów, *Product vertex-colourings edge-weightings*, manuskrypt.
- [39] T. Wang, Q. Yu: *On vertex-coloring 13-edge-weighting*, Front. Math. China 2008, 3(4): 1-7