Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Jakub Tomaszewski

Mnożniki punktowe i ich własności

Rozprawa doktorska z matematyki
Promotor pracy
prof. dr hab. Ryszard Płuciennik
Promotor pomocniczy
dr hab. Karol Leśnik

Poznań 2023

Podziękowania

Mojemu Promotorowi Profesorowi Ryszardowi Płuciennikowi dziękuję za wieloletnią opiekę oraz pomoc przy tworzeniu tej pracy oraz w czasie studiów. Promotorowi pomocniczemu Doktorowi Habilitowanemu Karolowi Leśnikowi pragnę serdecznie podziękować za okazaną cierpliwość oraz bezcenne porady, bez których nie powstała by ta rozprawa.

Wyrazy wdzięczności kieruję również do mojego Przyjaciela Tomasza Kiwerskiego za wszystkie inspirujące rozmowy o matematyce, i nie tylko, jak również sugestie językowe i redakcyjne.

Profesorowi Lechowi Maligrandzie dziękuję za gościnę podczas pobytu w Luleå oraz dzielenie się cenną wiedzą.

Na koniec bardzo dziękuję Rodzicom i Asi za wsparcie i zrozumienie.

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest opis przestrzeni mnożników punktowych działających pomiędzy pewnymi klasami krat Banacha, w tym przestrzeniami Orlicza, oraz sformułowanie pewnych warunków gwarantujących słabą zwartość operatorów mnożenia punktowego.

Przypomnijmy, że dla dwóch krat Banacha X i Y zdefiniowanych nad tą samą przestrzenią miary przez przestrzeń mnożników punktowych $M(X,Y)$ rozumieć będziemy przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych f takich, że $fg \in Y$ dla każdego $g \in X$, wyposażoną w normę operatorową. Oczywiście, każdy element $f \in M(X,Y)$ wyznacza operator mnożenia punktowego $M_f\colon X \to Y$ w następujący sposób

$$M_f g = fg \text{ dla } g \in X.$$

Mnożniki punktowe, obok operatorów kompozycji, pojawiają się w teorii funkcyjnych krat Banacha jako jeden z najważniejszych przykładów operatorów liniowych. Początku systematycznych badań nad nimi upatrywać można już w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku (patrz np. [3,16,21,39,63,64]). W najprostszym przypadku, gdy rozważamy mnożnik M_f działający z kraty Banacha w siebie w przypadku, gdy funkcją f jest ograniczona. Z drugiej strony, przestrzeń mnożników punktowych $M(X,L^1)$ pokrywa się z dualem Köthego X', czyli przestrzenią wszystkich ciągłych funkcjonałów całkowych na X. W ogólności jednak wyznaczenie przestrzeni mnożników pomiędzy dwiema przestrzeniami funkcyjnymi bywa bardzo trudnym zagadnieniem, rozwiązanym tylko w niektórych szczególnych klasach przestrzeni funkcyjnych.

Operatory mnożenia punktowego rozważane są także w szerszym kontekście, tzn. niekoniecznie jako operatory działające na kratach Banacha. W analizie harmonicznej istotną klasą operatorów są tzw. mnożniki Fouriera. Przypomnijmy, że mnożnik Fouriera pomiędzy dwiema przestrzeniami funkcyjnymi X oraz Y zdefiniować można jako operator mnożenia $M_a\colon \mathcal{F}X \to \mathcal{F}Y$, gdzie symbol $\mathcal{F}\mathfrak{X}$ oznacza przestrzeń transformat Fouriera funkcji z przestrzeni $\mathfrak{X}$. Problematyka opisu mnożników Fouriera jest wysoce nietrywialna, o czym może świadczyć fakt, że nie jest znana satysfakcjonująca charakteryzacja tych operatorów działających nawet na L^p dla $p \neq 2$. Historię badań dotyczących mnożników Fouriera, jak i współczesne wyniki, można znaleźć, np. w pracy [32]. Innymi przykładami operatorów pojawiających się w analizie harmonicznej związanych z mnożnikami punktowymi są operatory Toeplitza oraz Hankela (patrz [12,47,70]). Zauważmy ponadto, że operatory mnożenia *per se* badane są, np. na przestrzeniach Sobolewa (zagadnieniu temu poświęcona jest monografia [60]).

Warto nadmienić, że mnożniki punktowe służą także badaniu ideałów operatorowych. Przykładem takiego zastosowania może być twierdzenie Maureya–Rosenthala, które mówi, że każdy r–wypukły operator $T\colon X \to L^p$ faktoryzuje się silnie przez L^r, tj. istnieje operator $R\colon X \to L^r(\Omega)$ i $f \in M(L^r, Y)$ taki, że $T = M_f R$. Twierdzenie to, wraz z jego uogólnieniami, używane jest m.in. przy badaniu operatorów p–sumujących (patrz [22, 69]).

Tematyką blisko związana z pojęciem mnożnika punktowego, której również poświęcimy uwagę w tej rozprawie, jest tzw. faktoryzacja krat Banacha. Mówimy, że krata X faktoryzuje kratę Y, gdy zachodzi równość

$$X \odot M(X, Y) = Y.$$

Źródła problemu faktoryzacji krat Banacha dopatrywać się można już w klasycznym twierdzeniu Łozanowskiego, które orzeka, że dla kraty Banacha X zachodzi równość $X \odot X' = L^1$, co oznacza, że X faktoryzuje L^1 (patrz [54]). Faktoryzacja w różnych klasach krat Banacha była badana przez wielu autorów (zobacz, np. [40, 74, 76]).

Głównym wynikiem niniejszej rozprawy jest opis przestrzeni

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}),$$

gdzie φ, φ_1 są funkcjami Younga. Zagadnienie opisu przestrzeni mnożników pomiędzy różnymi przestrzeniami Orlicza postawił O'Neil w roku 1965 (patrz [67]). Wielu autorów uzyskało częściowe wyniki, dowodząc, że pod pewnymi założeniami, przestrzeń $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest przestrzenią Orlicza (por. [57–59] czy [39]). W przeciwieństwie do nich udowodnimy, że bez dodatkowych założeń na funkcje Younga φ, φ_1, zachodzi równość

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1},$$

gdzie $\varphi \ominus \varphi_1$ jest funkcją Younga generowaną przez φ oraz φ_1. Ponadto uogólnimy powyższy rezultat na przypadek przestrzeni Musielaka–Orlicza oraz Calderóna–Łozanowskiego. Twierdzenia te pozwolą uzyskać warunki na faktoryzację przestrzeni ze wspomnianych klas krat Banacha.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. W pierwszym z nich wprowadzimy podstawowe pojęcia oraz twierdzenia, z których będziemy korzystać w dalszej jej części.

W drugim rozdziale zajmiemy się opisem przestrzeni mnożników mnożników pomiędzy dwiema przestrzeniami Orlicza. Zaczniemy od przypomnienia historii tego problemu oraz omówienia wcześniejszych wyników. Głównym rezultatem tego rozdziału jest, wspomniane wcześniej twierdzenie, które mówi, że dla dowolnych funkcji Younga φ, φ_1 mamy równość $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$ (twierdzenie 2.1.7). Rezultat ten w pełni rozwiązuje problem opisu przestrzeni mnożników pomiędzy przestrzeniami Orlicza. Następnie wykorzystamy tę równość, aby wykazać równoważny warunek na faktoryzację dwóch przestrzeni Orlicza. Zademonstrujemy także nowe przykłady przestrzeni Orlicza dla których twierdzenie 2.1.7 jest kluczowe, aby wyznaczyć przestrzeń mnożników. Rozdział ten powstał na bazie artykułu [50]

Rozdział trzeci poświęcimy uogólnieniu wyników z rozdziału drugiego na przestrzenie Musielaka–Orlicza oraz przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego. Przedstawimy konstrukcję uogólnionej funkcji dopełniającej $\varphi \ominus \varphi_1$ dla pary funkcji Musielaka–Orlicza oraz zbadamy jej podstawowe własności. Następnie udowodnimy szereg lematów, które pozwolą nam dowieść równości $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$ dla dowolnej pary funkcji Musielaka–Orlicza φ i φ_1. Rozważymy również mnożniki punktowe pomiędzy przestrzeniami Calderóna–Łozanowskiego. Na koniec przyjrzymy się faktoryzacji przestrzeni Musielaka–Orlicza oraz przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Podamy warunek dostateczny na faktoryzację przestrzeni Musielaka–Orlicza oraz wykażemy, że otrzymany warunek nie jest konieczny, co zilustrujemy odpowiednim przykładem. W przypadku przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego podamy warunek równoważny faktoryzacji. Część rozdziału dotycząca przestrzeni Musielaka–Orlicza bazuje na wynikach z publikacji [51], natomiast wyniki dotyczące przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego pochodzą z przygotowywanego manuskryptu [49].

W ostatnim, czwartym rozdziale, zbadamy słabą zwartość mnożników punktowych. W tym celu scharakteryzujemy zbiory słabo zwarte w przestrzeniach funkcyjnych. Dowiedziemy, że przestrzeń symetryczna X spełnia kryterium Dunfforda–Pettisa, tj. każdy zbiór słabo zwarty jest X–jednostajnie całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest 1–rozłącznie jednorodny. Zaprezentujemy także nowe przykłady przestrzeni 1–rozłącznie jednorodnych. Rozdział ten oparty jest o rezultaty z pracy [48].

Spis treści

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Kraty Banacha

Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą σ–skończoną i zupełną. Dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset \Omega$ oznaczmy przez A^c jego część bezatomową oraz przez A^a jego część atomową. Bez straty ogólności przyjmiemy, że atomy w Ω (o ile istnieją) są singletonami. Z założenia σ–skończoności miary μ wynika, że przestrzeń (Ω, Σ, μ) może zawierać co najwyżej przeliczalną liczbę atomów. Frazy „μ–prawie wszędzie w Ω" i „dla μ–prawie wszystkich $t \in \Omega$" będziemy w skrócie zapisywali μ–p.w. w Ω oraz odpowiednio: dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Przez $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ oznaczmy przestrzeń wszystkich klas abstrakcji (ze względu na relację równości μ–prawie wszędzie) mierzalnych i μ–prawie wszędzie skończonych funkcji określonych na Ω o wartościach rzeczywistych. Wprowadźmy na przestrzeni L^0 relację częściowego porządku $\leqslant$ zdefiniowaną dla dowolnych $f, g \in L^0$ zależnością

$$f \leqslant g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f(t) \leqslant g(t) \text{ dla } \mu\text{–p.w. } t \in \Omega.$$

Funkcję $f \in L^0$ nazywamy **elementem dodatnim**, gdy $f \geqslant 0$, tj. gdy $f(t) \geqslant 0$ dla μ-prawie wszystkich $t \in \Omega$. Przez **stożek dodatni przestrzeni L^0** rozumiemy zbiór $L^0_+ = \{f \in L^0 : f \geqslant 0\}$. Dla dowolnego $A \subset L^0$ definiujemy $A_+ = A \cap L^0_+$.

Definicja 1.1.1. Przestrzeń Banacha $X \subset L^0$ nazywamy **kratą Banacha**, gdy spełnia następujące warunki:

(i) jeżeli $f \in L^0$, $g \in X$ oraz $|f| \leqslant |g|$, to $f \in X$ i zachodzi nierówność $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$ (**własność ideału**).

(ii) jeżeli $f \in L^0$, $(f_n) \subset X_+$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_X < \infty$ i $f_n \uparrow |f|$, to $f \in X$ i $\|f\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_X$ (**własność Fatou**).

Mówimy, że $X \subset L^0$ jest **kratą quasi-Banacha**, gdy X jest zupełną przestrzenią quasi–unormowaną spełniającą warunki (i) oraz (ii).

Kratę Banacha X nad (Ω, Σ, μ) nazywamy **funkcyjną kratą Banacha**, gdy miara μ jest bezatomowa. Analogicznie, jeżeli miara μ jest miarą liczącą, to mówimy o **ciągowej kracie Banacha**.

Kraty Banacha definiuje się także w szerszym kontekście przestrzeni Banacha nie będących podprzestrzeniami przestrzeni L^0. O takich kratach traktuje między innymi monografia [61]. W literaturze nie ma jednak ustalonego nazewnictwa dla kategorii krat, które będą przedmiotem rozważań w tej pracy. By zobrazować tę kwestię przyjrzyjmy się kilku definicjom.

- W [53] autorzy stosują określenie *przestrzeń Köthego* na podprzestrzenie Banacha przestrzeni L^0 posiadające własność ideału oraz *słabą jedynkę*, tj. element dodatni μ–p.w. w Ω;
- W [61] przestrzeniami Köthego autor nazywa unormowane, niekoniecznie zupełne, podprzestrzenie L^0 spełniające warunek ideału. Jeżeli dodatkowo przestrzeń taka jest zupełna, to używa określenia *funkcyjna przestrzeń Banacha*;
- W [43] funkcyjną przestrzenią Banacha autorzy nazywają dowolną domkniętą i niepustą podprzestrzeń Banacha przestrzeni L^0. Jeżeli taka przestrzeń posiada własność ideału to nazywają ją *idealną kratą Banacha.*

Z powodu braku jednoznacznego nazewnictwa w literaturze oraz konieczności rozróżnienia krat funkcyjnych i ciągowych, stosować będziemy termin krata Banacha w rozumieniu definicji 1.1.1. Przyjęcie w tej definicji własności Fatou jest motywowane dążeniem do uproszczenia sformułowań twierdzeń, gdyż rozważamy wyłącznie przestrzenie posiadające tę własność. Z drugiej strony, w przytoczonych wcześniej monografiach, często wymaga się aby krata posiadała *słabą jedynkę*. W niniejszej rozprawie rezygnujemy z tego założenia w celu zagwarantowania żeby w ogólności przestrzeń mnożników $M(X, Y)$ zawsze była kratą, nawet wtedy, gdy jest trywialna.

Fakt 1.1.2 (Theorem 1.8, [13])**.** Niech X, Y będą kratami Banacha nad tą samą przestrzenią miary. Wówczas zawieranie $X \subset Y$ jest ciągłe, tj. istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|f\|_Y \leqslant C\|f\|_X \tag{1.1.1}$$

dla wszystkich $f \in X$.

Najmniejszą stałą $C > 0$, dla której spełniona jest nierówność (1.1.1) nazywamy **stałą zawierania**. Jeżeli kraty Banacha X, Y są równe jako zbiory (co będziemy oznaczać $X = Y$), to z nierówności (1.1.1) wynika, że ich normy są równoważne.

Definicja 1.1.3. Niech X będzie kratą Banacha. Mówimy, że element $f \in X$ jest **porządkowo ciągły**, gdy dla dowolnego ciągu $(f_n) \subset X$ takiego, że $0 \leqslant f_n \leqslant |f|$ oraz $f_n(t) \to 0$ dla μ–p.w. na $t \in \Omega$ zachodzi

$$\|f_n\|_X \to 0 \text{ przy } n \to \infty.$$

Podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych przestrzeni X będziemy oznaczać X_a. Mówimy, że przestrzeń X jest **porządkowo ciągła**, gdy $X_a = X$.

Istnieje wiele warunków równoważnych porządkowej ciągłości elementu $f \in X$ (patrz np. [13, Proposition 3.2]). W niniejszej rozprawie będziemy korzystali z następującej charakteryzacji elementów porządkowo ciągłych.

Fakt 1.1.4. Niech X będzie kratą Banacha. Element $f \in X$ jest porządkowo ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych (A_n) takiego, że $A_n \downarrow \emptyset$ (tj. $\chi_{A_n} \downarrow 0$ μ–p.w. w Ω przy $n \to \infty$) mamy

$$\|f\chi_{A_n}\|_X \to 0 \text{ przy } n \to \infty.$$

Podprzestrzeń X_a spełnia warunek ideału. Jednak w przypadku, gdy X nie jest porządkowo ciągła i X_a jest nietrywialna, to podprzestrzeń X_a nie jest kratą Banacha w sensie definicji 1.1.1, ponieważ nie posiada własności Fatou.

Definicja 1.1.5. Niech X będzie kratą Banacha nad Ω. Przestrzeń

$$X' := \left\{ g \in L^0 \colon \int_\Omega f(t)g(t)\mathrm{d}\mu(t) < \infty \text{ dla każdego } f \in X \right\}$$

wyposażoną w normę

$$\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \int_\Omega |f(t)g(t)|\, \mathrm{d}\mu(t)$$

nazywamy **przestrzenią dualną w sensie Köthego** (lub w skrócie **dualem Köthego**).

Przestrzeń X' jest izometryczna z podprzestrzenią przestrzeni dualnej X^*. Izometrię tę wyraża przyporządkowanie każdej funkcji $g \in X'$ ciągłego funkcjonału x_g^* określonego

$$\langle f, x_g^* \rangle := \int_\Omega f(t)g(t)\mathrm{d}\mu(t) \text{ dla } f \in X,$$

przy czym $\|g\|_{X'} = \left\|x_g^*\right\|_{X^*}$.

Fakt 1.1.6 (Corollary 4.3, [13])**.** Krata Banacha X jest porządkowo ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $X' = X^*$.

Definicja 1.1.7. Nośnikiem funkcji $f \in L^0$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{supp}(f) := \{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}.$$

Nośnikiem kraty Banacha X nazywamy mierzalny podzbiór $\mathrm{supp}\, X$ przestrzeni Ω spełniający warunki:

(i) dla dowolnego $f \in X$ istnieje mierzalny zbiór A miary zero taki, że

$$\mathrm{supp}(f) \subset A \cup \mathrm{supp}\, X,$$

(ii) istnieje $f \in X$ taki, że $\mu(\mathrm{supp}\, X \setminus \mathrm{supp}(f)) = 0$.

Łatwo zauważyć, że zbiory $\operatorname{supp}(f)$ oraz $\operatorname{supp} X$ są wyznaczone z dokładnością do zbioru miary zero.

Definicja 1.1.8. Niech X będzie kratą Banacha nad Ω. Dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ miary dodatniej podprzestrzeń

$$X[A] \coloneqq \{f \in X : \mu(\operatorname{supp}(f) \setminus A) = 0\}$$

z normą

$$\|f\|_{X[A]} = \|f\chi_A\|_X\,, \ f \in X[A]$$

nazywamy **obcięciem przestrzeni** X **do zbioru** A. Podobnie, dla dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej v **przestrzeń wagową** $X(v)$ definiujemy jako

$$X(v) \coloneqq \{f \in L^0 : fv \in X\}$$

z normą

$$\|f\|_{X(v)} = \|fv\|_X\,,$$

dla $f \in X(v)$.

Przypomnijmy dwie istotne konstrukcje interpolacyjne. Niech X, Y będą kratami Banacha nad tą samą przestrzenią miary. Przez przekrój krat Banacha X, Y rozumiemy przestrzeń

$$X \cap Y = \{f \in L^0 \colon f \in X, \ f \in Y\}$$

wyposażoną w normę

$$\|f\|_{X\cap Y} = \max\{\|f\|_X\,, \|f\|_Y\}.$$

Przez sumę algebraiczną krat Banacha X, Y rozumiemy przestrzeń

$$X + Y \coloneqq \{f \in L^0 \colon f = g + h \text{ dla pewnych } g \in X, \ h \in Y\}$$

z normą

$$\|f\|_{X+Y} = \inf\{\|g\|_X + \|h\|_Y : f = g + h, \ g \in X, \ h \in Y\}.$$

Zarówno przekrój jak i suma algebraiczna krat Banacha jest kratą Banacha (patrz [13, Theorem 1.3]).

1.2 Przestrzenie symetryczne

Klasycznymi przykładami ciągowych i funkcyjnych krat Banacha są przestrzenie Lebesgue'a ℓ^p oraz L^p. Ważną klasą krat Banacha, będącą uogólnieniem przestrzeni Lebesgue'a są przestrzenie symetryczne, czyli takie w których norma jest niezmiennicza ze względu na operatory złożenia z odwzorowaniami zachowującymi miarę (patrz [13, 43]).

W niniejszej rozprawie przez I będziemy oznaczali przedział $[0, 1]$ lub $[0, \infty)$ z miarą Lebesgue'a m,. Dla dowolnej funkcji $f \in L^0(I)$ definiujemy jej **funkcję dystrybucji** $d_f : [0, \infty) \to I$ wzorem

$$d_f(\lambda) = m(\{t \in I : |f(t)| > \lambda\}) \text{ dla } \lambda \geqslant 0.$$

Mówimy, że funkcje $f, g \in L^0(I)$ są **równomierzalne**, gdy ich funkcje dystrybucji są identyczne.

Definicja 1.2.1. Kratę Banacha X nad I nazwiemy **przestrzenią symetryczną** (lub **symetryczną kratą Banacha**), gdy dla każdej pary równomierzalnych funkcji $f, g \in L^0(I)$ warunek $f \in X$, implikuje, że $g \in X$ i $\|f\|_X = \|g\|_X$.

Definiowanie funkcyjnych przestrzeni symetrycznych nad przedziałem I nie ogranicza ogólności rozważań, gdyż na mocy twierdzenia reprezentacyjnego Luxemburga (patrz [13, Theorem 4.10, p. 62]) każdą funkcyjną przestrzeń symetryczną nad abstrakcyjną przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) (przy pewnych dodatkowych założeniach na (Ω, Σ, μ)) można wyreprezentować jako przestrzeń symetryczną nad I. Analogicznie jak w definicji 1.2.1 wprowadza się pojęcie symetrycznych krat ciągowych zastępując przedział I zbiorem $\mathbb{N}$ z miarą liczącą. Ponieważ symetryczne ciągowe kraty Banacha nie są przedmiotem rozważań niniejszej rozprawy, więc w dalszym ciągu wątek ten nie będzie rozwijany.

Definicja 1.2.2. Dla dowolnej funkcji $f \in L^0$ funkcję $f^* : I \to [0, \infty)$ definiowaną wzorem

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : d_f(\lambda) \leqslant t\} \text{ dla } t \in I$$

nazywamy **nierosnącym przestawieniem funkcji** f.

Funkcje f^* oraz f są równomierzalne. W szczególności, jeżeli krata X jest symetryczna, to $\|f\|_X = \|f^*\|_X$ dla każdego $f \in X$.

Definicja 1.2.3. Niech X będzie przestrzenią symetryczną. Funkcję

$$f_X(t) := \left\|\chi_{[0,t)}\right\|_X .$$

nazywamy **funkcją fundamentalną** przestrzeni X.

Funkcja fundamentalna jest quasi-wklęsła tj. $f_X(0) = 0$, f_X jest niemalejąca oraz funkcja $\frac{f_X(t)}{t}$ jest nierosnąca (patrz [13, Corollary 5.3]). Ponadto, z uwagi na symetrię,

$$\|\chi_A\|_X = f_X(t)$$

dla każdego $A \subset I$ takiego, że $m(A) = t$.

Związek między porządkową ciągłością przestrzeni symetrycznej X a zachowaniem się jej funkcji fundamentalnej wyraża następujący

Fakt 1.2.4. Niech X będzie przestrzenią symetryczną. X posiada nietrywialne porządkowo ciągłe elementy (tj. $X_a \neq \{0\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \to 0^+} f_X(t) = 0.$$

Przykład 1.2.5. Niech $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wówczas przestrzeń Lebesgue'a L^p jest przestrzenią symetryczną, której funkcja fundamentalna wyraża się wzorem

$$f_{L^p}(t) = t^{1/p}, \quad t \geqslant 0$$

dla $1 \leqslant p < \infty$ oraz

$$f_{L^\infty}(t) = 1, \quad t \geqslant 0.$$

Innym, ważnym przykładem przestrzeni symetrycznych są przestrzenie Lorentza.

Przykład 1.2.6. Niech $0 \leqslant p < \infty$ oraz $0 < q < \infty$. **Przestrzenią Lorentza** $L^{p,q}$ nazywamy zbiór

$$L^{p,q} := \left\{ f \in L^0 \colon \int_I (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty \right\},$$

z quasi–normą (normą, gdy $q \geqslant 1$) wyrażoną wzorem

$$\|f\|_{p,q} := \left(\int_I (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q}.$$

Jeżeli $q = \infty$, to

$$L^{p,\infty} := \left\{ f \in L^0 \colon \sup_{t \in I} t^{1/p} f^*(t) < \infty \right\}$$

z quasi–normą

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{t \in I} t^{1/p} f^*(t).$$

Jeżeli $p > 1$, to quasi–norma $\|\cdot\|_{p,\infty}$ jest równoważna normie danej wzorem

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{t \in I} t^{1/p} f^{**}(t),$$

gdzie f^{**} jest **funkcją maksymalną**, tj.

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \mathrm{d}s.$$

1.3 Przestrzenie Orlicza

Jedną z najważniejszych klas przestrzeni symetrycznych, której poświęcimy uwagę w niniejszej rozprawie jest klasa przestrzeni Orlicza. Przestrzenie te są intensywnie badane od czasu ich wprowadzenia przez Orlicza w [68] (patrz np. [1, 3, 14, 18, 33, 42, 45, 46, 56, 62, 65, 73]).

Definicja 1.3.1. Funkcję $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ nazywamy **funkcją Younga**, gdy $\varphi(0) = 0$, $\lim_{u \to \infty} \varphi(u) = \infty$ i φ jest wypukła na $[0, b_\varphi)$ (lub $[0, b_\varphi]$, gdy $\varphi(b_\varphi) < \infty$), gdzie

$$b_\varphi := \sup\{u \geqslant 0 : \varphi(u) < \infty\}.$$

Funkcję Younga φ, której wartości są skończone (tj. gdy $b_\varphi = \infty$) nazywamy **funkcją Orlicza**. Funkcję Orlicza φ nazywamy **N–funkcją**, gdy spełnia dodatkowo warunki

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{\varphi(u)}{u} = 0 \text{ i } \lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty.$$

Zwróćmy uwagę, że w powyższej definicji dopuszczamy funkcję φ taką, że $\varphi(u) = \infty$ dla każdego $u > 0$. Dla funkcji Younga φ oznaczmy

$$a_\varphi := \sup\{u \geqslant 0 : \varphi(u) = 0\}.$$

Definicja 1.3.2. Niech φ będzie funkcją Younga. Zbiór

$$L^\varphi := \{f \in L^0(I) : I_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

wyposażony w tzw. **normę Luxemburga–Nakano** wyrażoną dla dowolnego $f \in L^\varphi$ wzorem

$$\|f\|_\varphi := \inf\left\{\lambda > 0 : I_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\},$$

gdzie I_φ jest **wypukłym modularem** określonym na $L^0(I)$ zależnością

$$I_\varphi(f) := \int_I \varphi(|f(t)|)\mathrm{d}t \text{ dla } f \in L^0(I),$$

nazywamy **(funkcyjną) przestrzenią Orlicza**.

Podobnie zdefiniujemy **ciągową przestrzeń Orlicza** tj. dla funkcji Younga φ definiujmy modular

$$I_\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|x_n|) \text{ dla } x = (x_n),$$

następnie zbiór

$$\ell^\varphi := \{x \in \ell^\infty : I_\varphi(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

wyposażamy w normę Luxemburga–Nakano zdefiniowaną identycznie jak w przypadku funkcyjnym.

Przestrzenie Orlicza są symetrycznymi kratami Banacha, których funkcja fundamentalna wyraża się wzorem

$$f_{L^\varphi}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/t)},$$

gdzie φ^{-1} jest prawostronnie ciągłą odwrotnością funkcji φ, tj.

$$\varphi^{-1}(u) := \inf\{v \geqslant 0 : \varphi(v) > u\} \text{ dla każdego } u \geqslant 0.$$

Ponieważ funkcja Younga nie musi być bijekcją, zatem w ogólności nie możemy mówić o jej odwrotności. Własności prawostronnie ciągłej odwrotności zostały zebrane w [39, Lemma 3.1].

Definicja 1.3.3. Niech φ będzie funkcją Younga. Funkcję $\varphi^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ zdefiniowaną wzorem

$$\varphi^*(u) := \sup_{v \geqslant 0} \{uv - \varphi(v)\} \text{ dla } u \geqslant 0$$

nazywamy **funkcją dopełniającą w sensie Younga do φ**.

Twierdzenie 1.3.4 (Theorem 9.1, [56]). Niech φ będzie funkcją Younga. Dualem Köthego przestrzeni Orlicza L^{φ} jest przestrzeń Orlicza generowana przez funkcję dopełniającą φ^*, tj.

$$(L^{\varphi})' = L^{\varphi^*}.$$

Twierdzenie 1.3.5 (Theorem 3.4, [56]). Niech φ_0, φ_1 będą funkcjami Younga. $L^{\varphi_0} = L^{\varphi_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $A, B, K > 0$ takie, że zachodzą nierówności

$$A\varphi_0(u) \leqslant \varphi_1(Ku) \leqslant B\varphi_0(u) \tag{1.3.1}$$

dla

(i) **dużych argumentów** tj. istnieje $u_0 > 0$ takie, że nierówność (1.3.1) jest spełniona dla $u \geqslant u_0$, gdy $I = [0, 1]$;

(ii) **wszystkich argumentów** tj. nierówność (1.3.1) jest spełniona dla $u \geqslant 0$, gdy $I = [0, \infty)$.

Analogicznie, w przypadku ciągowych przestrzeni Orlicza, mamy $\ell^{\varphi_0} = \ell^{\varphi_1}$, gdy nierówności (1.3.1) są spełnione dla **małych argumentów** tj. istnieje $u_0 > 0$ takie, że nierówność (1.3.1) jest spełniona dla $u \leqslant u_0$.

Podobnie jak w powyższym twierdzeniu, szereg warunków na funkcję Younga φ definiującą przestrzeń Orlicza L^{φ} formułujemy dla dużych lub wszystkich argumentów w zależności od postaci przedziału I (lub małych argumentów w przypadku ciągowym). Przykładem zależności definiowanej w ten sposób jest warunek Δ_2, który implikuje porządkową ciągłość przestrzeni L^{φ}. Dokładniej mówimy, że funkcja Orlicza φ spełnia **warunek Δ_2 dla dużych argumentów** (co zapisujemy $\varphi \in \Delta_2^{\infty}$), gdy

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < \infty.$$

Równoważnie, $\varphi \in \Delta_2^{\infty}$, gdy istnieją stałe $C > 1$ oraz $u_0 \geqslant 0$ takie, że

$$\varphi(2u) \leqslant C\varphi(u) \quad \text{dla } u \geqslant u_0. \tag{1.3.2}$$

Jeżeli nierówność (1.3.2) jest spełniona przy $u_0 = 0$, to mówimy, że funkcja Orlicza spełnia **warunek Δ_2 dla wszystkich argumentów**, co zapisujemy $\varphi \in \Delta_2$. Jeżeli $\varphi \in \Delta_2^{\infty}$, gdy $I = [0, 1)$, lub $\varphi \in \Delta_2$, gdy $I = [0, \infty)$, to przestrzeń Orlicza L^{φ} jest porządkowo ciągła (patrz [56, Corollary p. 21]).

Mając na uwadze powyższe twierdzenia będziemy mówić, że warunek na funkcję Younga jest spełniony dla **odpowiednich argumentów**, gdy jest spełniony

(i) dla małych argumentów w przypadku ciągowym,

(ii) dla dużych argumentów w przypadku przestrzeni Orlicza nad $[0, 1]$,

(iii) dla małych argumentów w przypadku przestrzeni Orlicza nad $[0, \infty)$.

1.4 Przestrzenie Musielaka–Orlicza i przestrzenie Carlderóna–Łozanowskiego

Przedstawimy teraz dwa uogólnienia przestrzeni Orlicza. Pierwszym z nich są przestrzenie Musielaka–Orlicza, które powstają przez zastąpienie funkcji Younga funkcją Musielaka–Orlicza. W ostatnich latach przestrzenie te są intensywnie badane, zwłaszcza w kontekście analizy harmonicznej oraz przestrzeni Sobolewa (patrz [19, 33, 34]).

Definicja 1.4.1. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z σ–skończoną i zupełną miarą μ. Funkcję $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ nazywamy **funkcją Musielaka–Orlicza**, gdy spełnia następujące warunki:

(i) $\varphi(t, \cdot)$ jest funkcją Younga dla μ–p.w. $t \in \Omega$,

(ii) $\varphi(\cdot, u)$ jest funkcją mierzalną dla każdego $u \in [0, \infty)$.

Nadużywając delikatnie notacji, będziemy mówić, że powyższa funkcja Musielaka–Orlicza φ jest zdefiniowana nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). Podobnie jak dla funkcji Younga definiujemy parametry a_φ, b_φ, które w tym przypadku są mierzalnymi funkcjami zmiennej $t \in \Omega$ (patrz [18, Proposition 5.1]), tj.

$$a_\varphi(t) := \sup\{u \geqslant 0 : \varphi(t, u) = 0\}, \quad b_\varphi(t) = \sup\{u \geqslant 0 : \varphi(t, u) < \infty\}$$

dla $t \in \Omega$.

Definicja 1.4.2. Niech φ będzie funkcją Musielaka–Orlicza. Zbiór

$$L^\varphi := \{f \in L^0 : I_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

wyposażony w **normę Luxemburga–Nakano**

$$\|f\|_\varphi := \inf\left\{\lambda > 0 : I_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\},$$

gdzie I_φ jest **wypukłym modularem** określonym na $L^0(I)$ wzorem

$$I_\varphi(f) := \int_\Omega \varphi(t, |f(t)|) d\mu(t),$$

nazywamy **przestrzenią Musielaka-Orlicza**.

Przestrzenie Musielaka–Orlicza są kratami Banacha. Z definicji 1.4.2 wynika, że

$$\operatorname{supp} L^\varphi = \{t \in \Omega : b_\varphi(t) > 0\}.$$

Jeżeli funkcja Musielaka–Orlicza φ zależy w sposób istotny od parametru $t \in \Omega$, tj. nie istnieje funkcja Younga φ_1 taka, że $\varphi(t, u) = \varphi_1(u)$ dla $u > 0$ i μ–p.w. $t \in \Omega$, to przestrzeń Musielaka–Orlicza L^φ nie jest symetryczna.

Będziemy często korzystać z następującej zależności normowo–modularnej, prawdziwej zarówno w przestrzeniach Orlicza, jak i przestrzeniach Musielaka–Orlicza

$$\text{Jeżeli } \|f\|_\varphi \leqslant 1 \text{ to } I_\varphi(f) \leqslant \|f\|_\varphi, \tag{1.4.1}$$

dla $f \in L^\varphi$ (patrz [56, Theorem 1.1]).

Dla funkcji Musielaka–Orlicza φ symbolem φ^{-1} oznaczamy funkcję dwóch zmiennych taką, że funkcja $\varphi^{-1}(t,\cdot)$ jest prawostronnie ciągłą odwrotnością funkcji Younga $\varphi(t,\cdot)$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Dokładniej

$$\varphi^{-1}(t,u) := \inf\{v \geqslant 0 : \varphi(t,v) > u\}$$

dla $u \geqslant 0$ oraz μ–p.w. $t \in \Omega$.

Dla dowolnych funkcji Musielaka-Orlicza φ, φ_1, φ_2 będziemy używać notacji:

$$\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1},$$

gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$C\varphi_1^{-1}(t,u)\varphi_2^{-1}(t,u) \leqslant \varphi^{-1}(t,u)$$

dla prawie wszystkich $t \in \Omega$ oraz $u \geqslant 0$. Analogicznie, piszemy

$$\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1},$$

gdy istnieje stała $D > 0$ taka, że

$$D\varphi_1^{-1}(t,u)\varphi_2^{-1}(t,u) \geqslant \varphi^{-1}(t,u)$$

dla prawie wszystkich $t \in \Omega$ oraz $u \geqslant 0$. Jeżeli równocześnie

$$\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1} \quad \text{i} \quad \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1},$$

to piszemy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$.

Analogiczną notację będziemy stosować w przypadku funkcji Younga.

Innym uogólnieniem przestrzeni Orlicza są przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego X_φ. W przeciwieństwie do przestrzeni Musielaka–Orlicza nie dokonuje się modyfikacji funkcji Younga lecz inaczej definiuje się modular. Dokładniej, całkę, czyli normę w L^1, w definicji modularu 1.3.2 zastępuje się normą w ustalonej kracie Banacha X. W literaturze mianem przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego określa się często przestrzenie powstałe z ogólniejszej konstrukcji, określonej dla dwóch krat Banacha X, Y. Wówczas przestrzeń Calderóna–Łozanowskiego w rozumieniu poniższej definicji jest jej szczególnym przypadkiem gdy jedną z przestrzeni jest L^∞. Konstrukcja X_φ była badana przez wielu autorów, patrz np. [17, 26, 35, 39, 40, 44].

Definicja 1.4.3. Niech X będzie kratą Banacha oraz φ funkcją Younga. **Przestrzenią Calderóna–Łozanowskiego** X_φ nazywamy zbiór

$$X_\varphi := \{f \in L^0 : \|\varphi(\lambda\,|f|)\|_X < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$$

wyposażony w normę

$$\|f\|_{X_\varphi} := \inf\left\{\lambda > 0 : I_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\},$$

gdzie

$$I_\varphi(f) := \begin{cases} \|\varphi(|f|)\|_X & \text{dla } \varphi(f) \in X, \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Fakt 1.4.4. Niech E będzie symetryczną kratą Banacha oraz φ funkcją Younga. Wówczas przestrzeń Calderóna–Łozanowskiego E_φ również jest symetryczna oraz jej funkcja fundamentalna wyraża się wzorem

$$f_{E_\varphi}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}\left(1/f_E(t)\right)}$$

dla każdego $t \in I$.

1.5 Przestrzeń mnożników punktowych

Opiszemy teraz konstrukcję przestrzeni mnożników punktowych, która będzie centralnym obiektem rozważań w niniejszej rozprawie.

Definicja 1.5.1. Niech X, Y będą dwoma kratami Banacha nad tą samą przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) i niech $\operatorname{supp} X = \Omega$. **Przestrzenią mnożników punktowych** nazywamy zbiór

$$M(X,Y) := \{f \in L^0 : fg \in Y \ \text{ dla każdego } g \in X\}$$

wyposażony w normę operatorową

$$\|f\|_{M(X,Y)} := \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} \|fg\|_Y .$$

Jeżeli z kontekstu będzie jednoznacznie wynikało z jakimi przestrzeniami X, Y mamy do czynienia, to normę $\|\cdot\|_{M(X,Y)}$ będziemy skrótowo oznaczać $\|\cdot\|_M$.

Z definicji 1.5.1 wynika, że przestrzeń mnożników punktowych $M(X,Y)$ jest kratą Banacha. Ponadto, jeżeli obie przestrzenie X, Y są symetryczne, to również przestrzeń $M(X,Y)$ jest symetryczna (patrz [39,40,58]). Dla krat funkcyjnych może się zdarzyć, że przestrzeń mnożników punktowych jest trywialna. Istotnie, biorąc $p > q$ mamy równość $M(L^p, L^q) = \{0\}$. Z drugiej strony dla krat ciągowych X, Y przestrzeń $M(X,Y)$ jest nietrywialna, gdy $Y \neq \{0\}$. Ważnym zagadnieniem dotyczącym przestrzeni mnożników punktowych jest jej opis dla konkretnych klas przestrzeni. Np. dla dwóch przestrzeni Lorentza przestrzeń mnożników (o ile jest nietrywialna) jest przestrzenią Lorentza.

Przykład 1.5.2 (Theorem 4, [41])**.** Niech $1 \leqslant p_1 \leqslant p_0 \leqslant \infty$ oraz $1 \leqslant q_1, q_0 \leqslant \infty$. Zdefiniujmy $p_2 = \frac{p_0 p_1}{p_0 - p_1}$. Wtedy

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}.$$

Przyjmijmy

$$q_2 = \begin{cases} \frac{q_0 q_1}{q_0 - q_1}, & \text{gdy } q_0 > q_1 \\ \infty, & \text{gdy } q_0 \leqslant q_1. \end{cases}$$

Jeżeli $p_0 > p_1$ lub $p_0 = p_1$ i $q_0 \leqslant q_1$, to zachodzi równość

$$M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_2,q_2}.$$

Jeżeli $p_0 < p_1$ lub $p_0 = p_1$ i $q_0 > q_1$, to

$$M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = \{0\}.$$

Szczególnym przypadkiem przestrzeni mnożników punktowych jest dual Köthego przestrzeni X gdyż

$$X' = M(X, L^1).$$

Na mocy [13, Theorem 2.7] drugi dual Köthego pokrywa się z wyjściową przestrzenią, tj. $X'' = X$. W terminach mnożników punktowych twierdzenie to przyjmuje postać

$$M(M(X, L^1), L^1) = X.$$

Powstaje zatem naturalne pytanie o zastąpienie przestrzeni L^1 inną kratą Banacha. Dokładniej, dla jakich krat X, Y spełniona jest równość

$$M(M(X, Y), Y) = X? \tag{1.5.1}$$

Jeżeli warunek (1.5.1) jest spełniony, to mówimy, że X **jest Y–doskonała**. Problem ten był rozważany między innymi w [16, 58, 76].

1.6 Iloczyny punktowe i faktoryzacja

Inną konstrukcją, którą będziemy rozważać dla krat Banacha jest iloczyn punktowy. Jest on blisko powiązany z mnożnikami punktowymi.

Definicja 1.6.1. Niech X, Y będą kratami Banacha nad tą samą przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). **Iloczynem punktowym przestrzeni** $X \odot Y$ nazywamy zbiór

$$X \odot Y \coloneqq \{f \cdot g \in L^0 : f \in X, g \in Y\},$$

wyposażony w quasi–normę

$$\|f\|_{X \odot Y} \coloneqq \inf\{\|g\|_X \, \|h\|_Y : f = gh\}.$$

Liniowość $X \odot Y$ wynika z własności ideału przestrzeni X, Y. Iloczyn punktowy $X \odot Y$ nietrywialnych krat Banacha X, Y jest nietrywialną kratą quasi–Banacha, o ile zbiór $\mathrm{supp}(X) \cap \mathrm{supp}(Y)$ ma miarę dodatnią. Jeżeli X, Y są symetrycznymi kratami Banacha, to również przestrzeń $X \odot Y$ jest symetryczna. W kontekście iloczynu $X \odot Y$ przestrzeń mnożników punktowych $M(X, Y)$ może być traktowana intuicyjnie jako dzielenie przestrzeni Y przez X. Można zatem postawić pytanie o **faktoryzację** przestrzeni Y przez X, czyli kiedy zachodzi równość

$$X \odot M(X, Y) = Y?$$

Pierwszym rezultatem tego typu było twierdzenie Łozanowskiego, które orzeka, że dla dowolnej funkcyjnej kraty Banacha X mamy

$$X \odot M(X, L^1) = L^1.$$

Twierdzenie to znalazło nietrywialne zastosowania w teorii sum skręconych (patrz [37]). Ponadto stało się ono źródłem inspiracji do badań nad faktoryzacją w szerszym zakresie. Twierdzenie Łozanowskiego doczekało się szeregu alternatywnych dowodów przeprowadzonych zupełnie odmiennymi metodami (patrz Gillespie [31], Jamison i Ruckle [36]). Twierdzenie Łozanowskiego zostało uogólnione przez Reisnera, który w [74, Theorem 1] wykazał, że p–wypukłość kraty X ze stałą 1 jest równoważna faktoryzacji L^p przez X. Problem ten był także badany niezależnie przez Nilssona w [66]. W [76] Schep udowodnił, że X faktoryzuje L^p wtedy i tylko wtedy, gdy X jest L^p-doskonała. W ogólnym przypadku, jeżeli X faktoryzuje Y, to łatwo wykazać, że X jest Y-doskonała. Pytanie o prawdziwość implikacji przeciwnej jest nadal otwarte. Wiadomo jedynie, że jeżeli X jest Y-doskonała, to równość $X \odot M(X, Y) = Y$ nie musi być izometryczna, co pokazuje przykład Bollobása oraz Brightwella z pracy [11] (por. [76, Example 3.6]). Kolejnym twierdzeniem Schepa dotyczącym faktoryzacji jest uogólnienie wspomnianego wcześniej wyniku dotyczącego faktoryzacji L^p. Wykazał on, że jeżeli X jest p–wypukła ze stałą 1 i Y jest p–wklęsła ze stałą 1, to X faktoryzuje Y.

Warunki na faktoryzację dwóch przestrzeni z pewnej klasy można otrzymać znając opis przestrzeni mnożników punktowych oraz iloczynów punktowych. Zaprezentujemy taki przypadek na przykładzie przestrzeni Lorentza.

Przykład 1.6.2 (porównaj [15, 40])**.** Niech $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ oraz niech $p, q \geqslant 0$ będą takie, że

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_0}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0}.$$

Wówczas zachodzi równość

$$L^{p_0,q_0} \odot L^{p_1,q_1} = L^{p,q}. \tag{1.6.1}$$

Korzystając z przykładu 1.5.2, na mocy równości (1.6.1), można wyznaczyć wykładniki p_0, p_1, q_0, q_1 przy których przestrzeń L^{p_0,q_0} faktoryzuje L^{p_1,q_1}.

Jeżeli $p_0 > p_1$ i $q_0 > q_1$, to otrzymujemy

$$L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_0,q_0} \odot L^{p_2,q_2} = L^{p,q},$$

gdzie $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}$ i $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}$. Na mocy definicji p, q mamy

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1},$$

skąd $p = p_1$. Podobnie dostajemy $q = q_1$. Zatem $L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_1,q_1}$, czyli przestrzeń L^{p_0,q_0} faktoryzuje L^{p_1,q_1}.

Jeżeli $p_0 > p_1$ oraz $q_0 = q_1$, to

$$L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_0,q_0} \odot L^{p_2,\infty} = L^{p_1,q_0} = L^{p_1,q_1},$$

zatem w tym przypadku również otrzymujemy faktoryzację.

Jeżeli $p_0 < p_1$ lub $p_0 = p_1$ i $q_0 > q_1$, to

$$M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = \{0\},$$

skąd

$$L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_0,q_0} \odot \{0\} = \{0\}.$$

W ostatnim przypadku faktoryzacja nie zachodzi, mimo, że przestrzeń mnożników jest nietrywialna. Pierwsza z takich możliwości pojawia się, gdy $p_0 > p_1$ oraz $q_0 < q_1$. Mamy wówczas

$$L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_0,q_0} \odot L^{p_2,\infty} = L^{p_1,q_0} \neq L^{p_1,q_1}.$$

Podobnie, jeżeli $p_0 = p_1$ i $q_0 < q_1$, to

$$L^{p_0,q_0} \odot M(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p_0,q_0} \odot L^{\infty} = L^{p_0,q_0} \neq L^{p_1,q_1}.$$

Ostatecznie otrzymujemy, że L^{p_0,q_0} faktoryzuje L^{p_1,q_1} wtedy i tylko wtedy, gdy $p_0 > p_1$ i $q_0 \geqslant q_1$ lub $p_0 = p_1$ i $q_0 = q_1$.

Rozdział 2

Mnożniki punktowe pomiędzy przestrzeniami Orlicza i faktoryzacja

W tym rozdziale wykażemy, że przestrzeń mnożników punktowych pomiędzy dwoma przestrzeniami Orlicza jest również przestrzenią Orlicza. Co więcej, podamy wzór funkcji Younga generującej tę przestrzeń. W rezultacie otrzymamy także warunek równoważny na to by jedna przestrzeń Orlicza faktoryzowała drugą.

Problem charakteryzacji przestrzeni mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza pojawił się po raz pierwszy w pracy Ando [3]. Dokładniej, Ando postawił pytanie o to, czy przestrzeń mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza jest również przestrzenią Orlicza. Jednocześnie sam udzielił częściowej odpowiedzi wykazując, że dla trzech przestrzeni Orlicza $L^{\varphi_0}, L^{\varphi_1}, L^{\varphi}$ nad $[0,1]$ włożenie

$$L^{\varphi_1} \odot L^{\varphi_0} \subset L^{\varphi} \tag{2.0.1}$$

jest równoważne istnieniu stałej $C > 0$ takiej, że nierówność

$$\varphi(Cuv) \leqslant \varphi_0(u) + \varphi_1(v)$$

zachodzi dla dużych argumentów, tj. dla wszystkich $u, v > u_0$ przy pewnym $u_0 > 0$. Zauważmy, że inkluzja (2.0.1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$L^{\varphi_0} \subset M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}). \tag{2.0.2}$$

W 1965 O'Neil [67] wykazał, że nierówność

$$\varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u) \leqslant \varphi^{-1}(u)$$

spełniona dla dużych argumentów implikuje uogólnioną nierówność Younga

$$\varphi(uv) \leqslant \varphi_0(u) + \varphi_1(v) \tag{2.0.3}$$

dla dużych argumentów, a zatem także inkluzję (2.0.2). W pracy tej zostało postawione pytanie o warunki, przy których zachodzi inkluzja odwrotna. Dokładniej, dla jakich funkcji Younga $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ mamy

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \subset L^{\varphi_0}?$$

Maligranda i Persson w [58] podali częściową odpowiedź na pytanie O'Neila, wykazując, że jeżeli nierówności (2.0.3) i

$$\varphi^{-1}(u) \leqslant \varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u)$$

są spełnione dla odpowiednich argumentów (tj. dla dużych argumentów, gdy $I = [0,1]$ lub wszystkich argumentów, gdy $I = [0,\infty)$), to

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi_0}.$$

W [57] Maligranda oraz Nakai wzmocnili powyższe twierdzenie dowodząc, że jeżeli istnieje stała $C \geqslant 1$ taka, że

$$\varphi^{-1}(u) \leqslant C\varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u)$$

dla odpowiednich argumentów, to

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \hookrightarrow L^{\varphi_0}.$$

Zestawiając ten wynik z twierdzeniem O'Neila otrzymujemy, że

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi_0},$$

gdy spełniona jest równoważność

$$\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1} \tag{2.0.4}$$

dla odpowiednich argumentów.

Powyższe twierdzenia nie prowadzą do uzyskania wzoru na funkcję φ_0 generującą przestrzeń mnożników. Można z nich jedynie wywnioskować, że jeżeli funkcja $\frac{\varphi^{-1}}{\varphi_1^{-1}}$ jest równoważna odwrotności pewnej funkcji Younga φ_0, to przestrzeń mnożników punktowych $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest przestrzenią Orlicza L^{φ_0}. Istnieją jednak pary funkcji Younga φ_1, φ, dla których nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca równoważność (2.0.4) mimo, że przestrzeń mnożników $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest nietrywialną przestrzenią Orlicza (patrz [39, Example 7.8] lub przykłady 2.2.2 oraz 2.2.3).

Ustalmy funkcje Younga φ_1, φ oraz, że rozważamy przestrzenie Orlicza $L^{\varphi_1}, L^{\varphi}$ zdefiniowane nad $[0,\infty)$. Żeby wskazać funkcję Younga generującą przestrzeń $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ przyjrzyjmy się uogólnionej nierówności Younga (2.0.3) będącej warunkiem koniecznym na włożenie $L^{\varphi_0} \subset M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ (patrz [67]). Możemy ją równoważnie zapisać jako

$$\varphi_0(u) \geqslant \varphi(uv) - \varphi_1(v) \text{ dla } u, v > 0. \tag{2.0.5}$$

Najmniejszą funkcją Younga spełniającą nierówność (2.0.5) (czyli generującą największą przestrzeń Orlicza w sensie inkluzji) jest **uogólniona funkcja dopełniająca w sensie Younga** funkcji φ względem φ_1 oznaczana symbolem $\varphi \ominus \varphi_1$ i definiowana wzorem

$$\varphi \ominus \varphi_1(u) := \sup_{0 \leqslant v < b_{\varphi_1}} \{\varphi(uv) - \varphi_1(v)\}. \tag{2.0.6}$$

Jest ona zatem naturalnym kandydatem na funkcję generującą przestrzeń mnożników punktowych $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$. Co więcej, jej konstrukcja jest uogólnieniem konstrukcji funkcji dopełniającej w sensie Younga powiązanej z najprostszym przypadkiem przestrzeni mnożników punktowych, tj. przestrzeni dualnej w sensie Köthego. Przypomnijmy, że w przypadku przestrzeni mnożników z przestrzeni Orlicza L^{φ_1} do L^1 zachodzi równość $M(L^{\varphi_1}, L^1) = L^{\varphi_1^*}$, gdzie φ_1^* jest funkcją dopełniającą w sensie Younga (patrz [56, Theorem 9.1]). Przestrzeń L^1 jest przestrzenią Orlicza generowaną przez funkcję Younga $\varphi(u) := u$ dla $u \geqslant 0$. Zatem, ponieważ $\varphi_1^* = \varphi \ominus \varphi_1$, mamy

$$M(L^{\varphi_1}, L^1) = L^{\varphi_1^*} = L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Uogólniona dopełniająca funkcja Younga była rozważana w kontekście mnożników przez Maureya [59], który wykazał, że jeżeli dla N–funkcji φ_1, φ funkcja $\varphi \ominus \varphi_1$ jest gładka, to zachodzi równość

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_0}.$$

W praktyce trudno określić w jaki sposób własności φ_1, φ wpływają na gładkość $\varphi \ominus \varphi_1$, zatem możliwości wykorzystania powyższego twierdzenia są ograniczone.

Gdyby było wiadomo, że dla funkcji Younga φ_1, φ spełniona jest równoważność

$$(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}, \tag{2.0.7}$$

to otrzymałoby się równość $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$. Tym tokiem rozumowania poszli Kolwicz, Leśnik i Maligranda w [39] wykazując szereg warunków dostatecznych na to aby zachodziła równość $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$. Między innymi udowodnili, że (2.0.7) zachodzi, gdy $\limsup_{u \to \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} = 0$ dla dowolnego $v > 0$ oraz spełniony jest co najmniej jeden z następujących warunków:

- funkcja $\frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)}$ jest nierosnąca dla każdego $v > 0$,
- funkcja $\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$ jest niemalejąca,
- $\varphi \ominus \varphi_1$ warunek spełnia Δ_2 dla dużych argumentów.

Jednocześnie skonstruowali parę funkcji Younga φ_1, φ, dla których (2.0.7) nie jest spełniona mimo, że

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Należy podkreślić, że problem opisu przestrzeni mnożników punktowych pomiędzy ciągowymi przestrzeniami Orlicza został rozwiązany przez Djakova i Ramanujana w [23]. Udowodnili oni, że dla dowolnych funkcji Orlicza φ, φ_1 zachodzi równość

$$M(\ell^{\varphi_1}, \ell^{\varphi}) = \ell^{\varphi \ominus_1 \varphi_1},$$

gdzie $\varphi \ominus_1 \varphi_1$ jest modyfikacją konstrukcji $\varphi \ominus \varphi_1$ wyrażoną wzorem

$$\varphi \ominus_1 \varphi_1(t) := \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} \{\varphi(st) - \varphi_1(s)\}.$$

2.1 Mnożniki punktowe pomiędzy przestrzeniami Orlicza

Nasze rozważania ograniczymy do funkcyjnych przestrzeni Orlicza z uwagi na rezultat Djakova i Ramanujana dający pełen opis przestrzeni mnożników pomiędzy ciągowymi przestrzeniami Orlicza. Dowód głównego twierdzenia tego rozdziału będzie wymagał wykazania kilku lematów.

Lemat 2.1.1. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga takimi, że $b_\varphi < \infty$ oraz $b_{\varphi_1} = \infty$. Wówczas

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = \{0\}.$$

Dowód. Przyjmijmy, że $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest niezerowa oraz nieujemna. Ponieważ $b_\varphi < \infty$, więc $L^\varphi \subset L^\infty$. Niech $c > 0$ będzie stałą tego zanurzenia, tj.

$$\|g\|_\infty \leqslant c\,\|g\|_\varphi$$

dla każdego $g \in L^\varphi$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $m(\{t \in I : f(t) \geqslant \frac{1}{n}\}) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Założenie $b_{\varphi_1} = \infty$ implikuje porządkową ciągłość w przestrzeni L^{φ_1} funkcji charakterystycznych zbiorów miary skończonej. Istotnie, mamy

$$\left\|\chi_{[0,t)}\right\|_{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi_1^{-1}(1/t)} \to 0 \text{ przy } t \to \infty.$$

Możemy zatem wybrać ciąg zbiorów (A_n) tak aby:

(i) $A_n \subset \{t \in I : f(t) \geqslant \frac{1}{n}\}$ oraz $m(A_n) > 0$;

(ii) $\|\chi_{A_n}\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Wówczas $\left\|n^2\chi_{A_n}\right\|_{\varphi_1} \leqslant 1$, skąd

$$n \leqslant \left\|n^2 f\chi_{A_n}\right\|_\infty \leqslant c\left\|n^2 f\chi_{A_n}\right\|_\varphi \leqslant c\,\|f\|_M$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. □

Uwaga 2.1.2. Tezę lematu 2.1.1 można wywnioskować także z [39, Proposition 3.2].

Lemat 2.1.3. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga, przy czym $b_\varphi < \infty$. Wówczas

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \subset L^\infty.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \not\subset L^\infty$. Wówczas istnieje funkcja $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ taka, że $\|f\|_M = 1$ oraz

$$m(\{t \in I : |f(t)| \geqslant n\}) > 0,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $A_n \coloneqq \{t \in I : |f(t)| \geqslant n\}$. Na mocy własności ideału mamy

$$\|n\chi_{A_n}\|_M \leqslant \|f\|_M \leqslant 1.$$

Niech n_0 będzie takie, że $m(A_{n_0}) < \infty$. Wtedy dla każdego $n \geqslant n_0$

$$\|f\|_M \geqslant \|n\chi_{A_n}\|_M \geqslant \frac{n}{\|\chi_{A_{n_0}}\|_{\varphi_1}} \|\chi_{A_n}\chi_{A_{n_0}}\|_\varphi = \frac{n}{\|\chi_{A_{n_0}}\|_{\varphi_1}} \|\chi_{A_n}\|_\varphi \geqslant \frac{nb_\varphi^{-1}}{\|\chi_{A_{n_0}}\|_{\varphi_1}} \to \infty.$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \subset L^\infty$. □

Dla dalszych rozważań użyteczną będzie następująca modyfikacja uogólnionej funkcji dopełniającej w sensie Younga $\varphi \ominus \varphi_1$ definiowanej wzorem (2.0.6).

Definicja 2.1.4. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga oraz niech $0 < a < b_{\varphi_1}$. Definiujemy **obciętą uogólnioną funkcją dopełniającą w sensie Younga** funkcji φ względem φ_1 wzorem

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t) \coloneqq \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \{\varphi(st) - \varphi_1(s)\}.$$

Lemat 2.1.5. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga oraz $0 < a < b_{\varphi_1}$. Wówczas funkcje $\varphi \ominus \varphi_1$ i $\varphi \ominus_a \varphi_1$ także są funkcjami Younga.

Dowód. Tezę lematu wykażemy jedynie dla $\varphi \ominus_a \varphi_1$. Dowód dla $\varphi \ominus \varphi_1$ jest analogiczny. Ustalmy $0 < a < b_{\varphi_1}$. Łatwo zauważyć, że $\varphi \ominus_a \varphi_1(0) = 0$ oraz $\varphi \ominus_a \varphi_1(\infty) = \infty$. Wobec tego wystarczy wykazać, że $\varphi \ominus_a \varphi_1$ jest wypukła. Niech $u_1, u_2 \geqslant 0$ oraz $\lambda \in (0, 1)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\varphi \ominus_a \varphi_1(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) &= \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \{\varphi(s(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)) - \varphi_1(s)\} \\
&\leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \{\lambda\varphi(su_1) + (1-\lambda)\varphi(su_2) - \lambda\varphi_1(s) - (1-\lambda)\varphi_1(s)\} \\
&\leqslant \lambda \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \{\varphi(su_1) - \varphi_1(s)\} + (1-\lambda) \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \{\varphi(su_2) - \varphi_1(s)\} \\
&= \lambda\varphi \ominus_a \varphi_1(u_1) + (1-\lambda)\varphi \ominus_a \varphi_1(u_1).
\end{aligned}$$

Zatem $\varphi \ominus_a \varphi_1$ jest funkcją Younga. □

Uwaga 2.1.6. Fakt, że dla dwóch funkcji Younga φ, φ_1 funkcja $\varphi \ominus \varphi_1$ jest również funkcją Younga był dowiedziony w [3, Theorem 4].

Twierdzenie 2.1.7. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga. Wówczas

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Dowód. Jeżeli $b_\varphi < \infty$ oraz $b_{\varphi_1} = \infty$, to $\varphi \ominus \varphi_1(u) = \infty$ dla każdego $u > 0$. Wtedy, na mocy lematu 2.1.1, zarówno $L^{\varphi \ominus \varphi_1} = \{0\}$, jak i $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = \{0\}$. Zatem teza twierdzenia jest spełniona w sposób trywialny. Możemy więc założyć, że $\varphi \ominus \varphi_1(u) < \infty$ dla pewnego $u > 0$. Zaczniemy od wykazania, że

$$L^{\varphi \ominus \varphi_1} \subset M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}). \tag{2.1.1}$$

Niech $f \in L^{\varphi \ominus \varphi_1}$ oraz $g \in L^{\varphi_1}$ będą takie, że

$$\|f\|_{\varphi \ominus \varphi_1} \leqslant \frac{1}{2} \text{ oraz } \|g\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Chcemy wykazać, że $fg \in L^{\varphi}$ oraz $\|fg\|_{\varphi} \leqslant 1$. Na mocy definicji funkcji $\varphi \ominus \varphi_1$ zachodzi uogólniona nierówność Younga, tj.

$$\varphi(us) \leqslant \varphi_1(s) + \varphi \ominus \varphi_1(u) \quad \text{dla } u, s \geqslant 0.$$

Stąd, na mocy zależności normowo-modularnej (1.4.1), mamy

$$I_\varphi(fg) = \int_I \varphi(|f(t)g(t)|)\mathrm{d}t \leqslant \int_I \varphi \ominus \varphi_1(|f(t)|)\mathrm{d}t + \int_I \varphi_1(|g(t)|)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Zatem $fg \in L^{\varphi}$ oraz

$$\|fg\|_{\varphi} \leqslant 1.$$

Wobec tego

$$\|fg\|_{\varphi} \leqslant 4 \|f\|_{\varphi \ominus \varphi_1} \|g\|_{\varphi}$$

dla dowolnych $f \in L^{\varphi \ominus \varphi_1}$ i $g \in L^{\varphi_1}$. Zatem $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ oraz $\|f\|_M \leqslant 4 \|f\|_{\varphi \ominus \varphi_1}$, co kończy dowód inkluzji (2.1.1).

Wykażemy teraz inkluzję odwrotną, tj.

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \subset L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Najpierw udowodnimy istnienie stałej $c > 0$ takiej, że dla dowolnej funkcji prostej $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{\varphi \ominus \varphi_1} \leqslant c\|f\|_M. \tag{2.1.2}$$

Niech $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ będzie funkcją prostą nieujemną postaci $f = \sum_k a_k \chi_{B_k}$ taką, że

$$\|f\|_M \leqslant \frac{1}{2b},$$

gdzie $b = 1$, gdy $b_{\varphi_1} = \infty$ lub $b = b_{\varphi_1}$, gdy $b_{\varphi_1} < \infty$. Wykażemy, że dla każdego $1 < a < b_{\varphi_1}$ zachodzi

$$I_{\varphi \ominus_a \varphi_1}(f) \leqslant 1.$$

Ustalmy dowolne $1 < a < b_{\varphi_1}$. Z definicji $\varphi \ominus_a \varphi_1$ wynika, że dla każdego k istnieje b_k takie, że

$$\varphi(a_k b_k) = \varphi \ominus_a \varphi_1(a_k) + \varphi_1(b_k).$$

Zdefiniujmy $g \coloneqq \sum_k b_k \chi_{B_k}$. Mamy

$$\varphi(fg) = \varphi \ominus_a \varphi_1(f) + \varphi_1(g) \tag{2.1.3}$$

oraz $g(t) \leqslant a$ dla $t \in I$. Z równości (2.1.3) wynika w szczególności, że

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(f) \leqslant \varphi(fg), \tag{2.1.4}$$

oraz

$$\varphi_1(g) \leqslant \varphi(fg). \tag{2.1.5}$$

Wykażemy, że

$$\|g\|_{\varphi_1} \leqslant 1. \tag{2.1.6}$$

W zależności od b_{φ_1} definiujemy ciąg zbiorów (A_n) następująco:

- Jeżeli $b_{\varphi_1} = \infty$, to $f_{L^{\varphi_1}}(0^+) = 0$. Wówczas istnieje $t_a > 0$ takie, że dla dowolnego $A \subset I$ spełniającego $m(A) \leqslant t_a$ zachodzi $\|\chi_A\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{a}$. Jako (A_n) wybieramy ciąg parami rozłącznych zbiorów takich, że $m(A_n) \leqslant t_a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $I = \bigcup A_n$.
- W przypadku, gdy $b_{\varphi_1} < \infty$ możemy bez straty ogólności przyjąć, że $b_{\varphi_1} \geqslant 1$. Wtedy $f_{L^{\varphi_1}}(0^+) = \frac{1}{b_{\varphi_1}} \leqslant 1$, skąd istnieje $t_a > 0$ takie, że dla każdego $A \subset I$ spełniającego $m(A) \leqslant t_a$ zachodzi $\|\chi_A\|_{\varphi_1} \leqslant 1$. Ponownie dobieramy ciąg (A_n) parami rozłącznych zbiorów takich, że $m(A_n) \leqslant t_a$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $I = \bigcup A_n$.

Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\|fg\chi_{A_n}\|_\varphi \leqslant \|g\|_M \|f\chi_{A_n}\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{a}{2b}\|\chi_{A_n}\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2},$$

gdyż $|f(t)| \leqslant a < b_{\varphi_1}$ oraz $\frac{a}{b}\|\chi_{A_n}\|_{\varphi_1} \leqslant 1$. Ponadto z nierówności (2.1.5) wynika, że

$$I_{\varphi_1}(g\chi_{A_n}) \leqslant I_\varphi(fg\chi_{A_n}) \leqslant \|fg\chi_{A_n}\|_\varphi \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.1.7}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy

$$g_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} g\chi_{A_k}.$$

Twierdzimy, że $I_{\varphi_1}(g_n) \leqslant \frac{1}{2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnimy tę nierówność indukcyjnie. Dla $n = 1$ wynika ona z (2.1.7). Niech $n > 1$ oraz załóżmy, że

$$I_{\varphi_1}(g_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Mamy

$$I_{\varphi_1}(g_n) = I_{\varphi_1}(g_{n-1}) + I_{\varphi_1}(g\chi_{A_n}) \leqslant 1.$$

Zatem $\|g_n\|_{\varphi_1} \leqslant 1$, skąd otrzymujemy

$$\|fg_n\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}\|f_n\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Stosując ponownie nierówność (2.1.5) dostajemy ostatecznie

$$I_{\varphi_1}(g_n) \leqslant I_{\varphi}(fg_n) \leqslant \|fg_n\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co kończy dowód indukcyjny.

Zauważmy, że $g_n \uparrow g$ m–prawie wszędzie. Na mocy własności Fatou przestrzeni L^{φ_1} wnosimy, że $g \in L^{\varphi_1}$ oraz

$$\|g\|_{\varphi_1} \leqslant \sup_n \|g_n\|_{\varphi_1} \leqslant 1.$$

Ponieważ $\|fg\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}\|g\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2}$, więc stosując nierówność (2.1.4) otrzymujemy

$$I_{\varphi\ominus_a\varphi_1}(f) \leqslant I_{\varphi}(fg) \leqslant \|fg\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Na mocy lematu Fatou mamy

$$I_{\varphi\ominus\varphi_1}(f) = \int_I \varphi \ominus \varphi_1(f(t))\mathrm{d}t \leqslant \liminf_{a\to b_{\varphi_1}^-} \int_I \varphi \ominus_a \varphi_1(f(t))\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie $f \in L^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz $\|f\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \leqslant 1$, co kończy dowód w przypadku, gdy f jest funkcją prostą.

Niech teraz $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ będzie dowolną funkcją. Istnieje ciąg funkcji prostych nieujemnych (f_n) taki, że $f_n(t) \uparrow |f|(t)$ dla m-prawie wszystkich $t \in I$. Wtedy

$$\|f_n\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \leqslant 2b\|f_n\|_M \to 2b\|f\|_M.$$

Zatem własność Fatou oraz (2.1.2) implikuje, że $f \in L^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz $\|f\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \leqslant 2b\|f\|_M$, co kończy dowód. □

2.2 Faktoryzacja przestrzeni Orlicza

Jeżeli dla dwóch krat Banacha E, F przestrzeń mnożników $M(E, F)$ jest trywialna, to oczywiście przestrzeń E nie może faktoryzować przestrzeni F. W rozważaniach dotyczących faktoryzacji ograniczymy się zatem do sytuacji, w której przestrzeń mnożników jest nietrywialna.

Wiadomo (por. [39, 56, 67]), że jeżeli dla dwóch funkcji Younga φ, φ_1 istnieje trzecia funkcja Younga φ_0 taka, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi_0}$, to L^{φ_1} faktoryzuje L^{φ} wtedy i tylko wtedy, gdy równoważność (2.0.4), tj.

$$\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}$$

jest spełniona dla odpowiednich argumentów. Z drugiej strony, jeżeli nie jest spełniona równoważność (2.0.4), to ze znanych wcześniej twierdzeń nie możemy wnioskować, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest przestrzenią Orlicza. W takiej sytuacji nie możemy zastosować wcześniejszych wyników by otrzymać warunek na faktoryzację przestrzeni Orlicza. Dopiero na mocy twierdzenia 2.1.7 wiemy, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ zawsze jest przestrzenią Orlicza. Pozwala to w pełni scharakteryzować dla jakich funkcji Younga zachodzi faktoryzacja generowanych przez nie przestrzeni Orlicza.

Twierdzenie 2.2.1. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga. Wówczas przestrzeń L^{φ_1} faktoryzuje przestrzeń L^{φ}, tj.

$$L^{\varphi_1} \odot M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $I = [0, \infty)$ i równoważność $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$ jest spełniona dla wszystkich argumentów,

(ii) $I = [0, 1]$ i równoważność $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$ jest spełniona dla dużych argumentów.

Dowód. Wykażemy jedynie podpunkt (i). Dowód przypadku (ii) jest analogiczny. Z twierdzenia 2.1.7 wynika, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$. W szczególności $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest przestrzenią Orlicza. Wykorzystamy twierdzenie [40, Collorary 6 (a)], które orzeka, że dla trzech funkcji Younga $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ równość

$$L^{\varphi_1} \odot L^{\varphi_0} = L^{\varphi}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równoważność

$$\varphi^{-1}\varphi_0^{-1} \approx \varphi_1^{-1},$$

jest spełniona dla wszystkich argumentów. Na mocy powyższego, biorąc w miejsce φ_0 funkcję $\varphi \ominus \varphi_1$ otrzymujemy tezę twierdzenia. □

W [39, Example 7.8] autorzy konstruują parę przestrzeni Orlicza $L^{\varphi}, L^{\varphi_1}$ nad $[0, 1]$ taką, że L^{φ_1} nie faktoryzuje L^{φ}, mimo iż $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \neq \{0\}$. Poniżej zaprezentujemy dwie nowe pary przestrzeni Orlicza, dla których faktoryzacja również nie zachodzi. Pierwszy z przykładów jest analogiczny do konstrukcji z pracy [39], ale przestrzenie są zdefiniowane na półprostej. Istotą drugiego jest to, że przestrzeń mnożników $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest różna od L^{∞}, w przeciwieństwie do znanych przykładów tego typu.

Przykład 2.2.2. Zdefiniujmy następującą parę funkcji Orlicza

$$\varphi_1(u) := u^2$$

oraz

$$\varphi(u) := \begin{cases} 2n!u - n!^2 \text{ dla } u \in [\frac{n!+(n-1)!}{2}, \frac{n!(n+2)}{2}), \ n > 1 \\ \frac{2}{n!}u - \frac{1}{n!^2} \text{ dla } u \in [\frac{n+2}{2(n+1)!}, \frac{n+1}{2n!}), \ n > 1 \\ 2u - 1 \text{ dla } u \in [\frac{3}{4}, \frac{3}{2}). \end{cases}$$

Funkcja φ jest zdefiniowana w taki sposób, by była styczna do funkcji u^2 w punktach postaci $n!$ oraz $\frac{1}{n!}$. W szczególności, dla każdego $u \geqslant 0$, mamy

$$\varphi(u) \leqslant u^2 = \varphi_1(u). \tag{2.2.1}$$

Wypukłość funkcji φ wynika z faktu, że jest to łamana, dla której współczynniki kierunkowe kolejnych fragmentów liniowych rosną, gdy rośnie argument.

Rozważmy przestrzenie Orlicza $L^{\varphi}, L^{\varphi_1}$ zdefiniowane nad $[0,\infty)$. Zauważmy, że $L^{\varphi_1} = L^2$. Ponadto z nierówności (2.2.1) wynika, że $L^2 \subset L^{\varphi}$. Otrzymujemy, że $L^{\infty} \subset M(L^2, L^{\varphi})$. Wykażemy teraz, że $M(L^2, L^{\varphi}) = L^{\infty}$. Dowiedziemy $M(L^2, L^{\varphi}) \subset L^{\infty}$. W tym celu wykażemy, że $f_{M(L^2,L^{\varphi})}(0^+) = 1$ (ponieważ dla przestrzeni symetrycznych E warunek $f_E(0^+) > 0$ implikuje zawieranie $E \subset L^{\infty}$). Weźmy $\epsilon > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n!^2} \leqslant \varepsilon$. Mamy

$$\left\|\chi_{[0,\varepsilon)}\right\|_M = \sup_{\|f\|_2 \leqslant 1} \left\|f\chi_{[0,\varepsilon)}\right\|_{\varphi} \geqslant \left\|n!\chi_{[0,1/n!^2)}\chi_{[0,\varepsilon)}\right\|_{\varphi} = \left\|n!\chi_{[0,1/n!^2)}\right\|_{\varphi} = 1$$

gdyż $\left\|n!\chi_{[0,1/n!^2)}\right\|_2 = 1$. Wykazaliśmy zatem, że $M(L^2, L^{\varphi}) = L^{\infty}$.

Udowodnimy teraz, że nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca (2.0.4) dla małych lub dużych argumentów.

(i) Przypuśćmy, że istnieje funkcja Younga φ_0 taka, że

$$c\varphi^{-1}(u) \leqslant \varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u) \leqslant C\varphi^{-1}(u)$$

dla pewnych stałych $c, C, u_0 > 0$ i wszystkich $u > u_0$ (tj. spełniająca równoważność (2.0.4) dla dużych argumentów). Mamy dla $n > 1$

$$\begin{aligned} c &\leqslant \frac{\varphi_1^{-1}(n!(n-1)!)\varphi_0^{-1}(n!(n-1)!)}{\varphi^{-1}(n!(n-1)!)} = \frac{2\sqrt{n!(n-1)!}\varphi_0^{-1}(n!(n-1)!)}{(n-1)!(n+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{n}\varphi_0^{-1}(n!(n-1)!)}{(n+1)} \leqslant \frac{2\varphi_0^{-1}(n!(n-1)!)}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{c\sqrt{n}}{2} \leqslant \varphi_0^{-1}(n!(n-1)!). \tag{2.2.2}$$

Z drugiej strony dla dowolnego $n > 1$

$$C \geqslant \frac{\varphi_1^{-1}(n!^2)\varphi_0^{-1}(n!^2)}{\varphi^{-1}(n!^2)} = \frac{n!\varphi_0^{-1}(n!^2)}{n!} = \varphi_0^{-1}(n!^2). \tag{2.2.3}$$

Jednak φ_0^{-1} jako odwrotność funkcji Younga jest niemalejąca. Zatem nierówność (2.2.2) przeczy nierówności (2.2.3). Wobec tego nie może istnieć φ_0 spełniająca (2.2.2) dla dużych argumentów.

(ii) Podobne można wykazać, że nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca (2.0.4) dla małych argumentów. Przypuśćmy, że istnieje funkcja φ_0 spełniająca

$$c\varphi^{-1}(u) \leqslant \varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u) \leqslant C\varphi^{-1}(u)$$

dla pewnych stałych $c, C, u_0 > 0$ oraz wszystkich $0 \leqslant u < u_0$. Dla $n > 1$ mamy

$$c \leqslant \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)}{\varphi^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n!}}{\frac{n+1}{2n!}}\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) = 2\frac{\sqrt{n}}{n+1}\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) \leqslant \frac{2\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)}{\sqrt{n}}.$$

Zatem

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) \geqslant 2c\sqrt{n}$$

dla każdego $n > 1$. Z drugiej strony

$$C \geqslant \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n!}\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)}{\frac{1}{n!}} = \varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)$$

dla każdego $n > 1$, skąd

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right) \leqslant C.$$

Ponownie otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż φ_0^{-1} jest niemalejąca.

Na zakończenie wyznaczmy funkcję $\varphi \ominus \varphi_1$. Dla dowolnego $0 \leqslant u \leqslant 1$ mamy

$$\varphi(su) \leqslant \varphi(s) \leqslant \varphi_1(s),$$

skąd

$$\varphi(su) - \varphi_1(s) \leqslant 0.$$

Wobec tego, na mocy definicji funkcji $\varphi \ominus \varphi_1$, otrzymujemy

$$\varphi \ominus \varphi_1(u) = 0$$

dla $0 \leqslant u \leqslant 1$. Natomiast jeżeli $u > 1$, to dla każdego $n > 1$ mamy

$$\varphi(un!) - \varphi_1(n!) = 2n!un! - n!^2 - n!^2 = 2(u-1)n!^2.$$

Zatem

$$\varphi \ominus \varphi_1(u) = \sup_{s>0}\{\varphi(su) - \varphi_1(s)\} = \infty.$$

W rezultacie z definicji przestrzeni Orlicza wynika, że $L^{\varphi\ominus\varphi_1} = L^\infty$. Wobec tego zachodzą równości

$$L^{\varphi\ominus\varphi_1} = L^\infty = M(L^{\varphi_1}, L^\varphi)$$

mimo braku równoważności $(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}$. Tymczasem z twierdzeń z prac [39] czy [57] nie możemy wywnioskować, że przestrzeń $M(L^2, L^\varphi)$ jest przestrzenią Orlicza. Ponadto, zauważmy, że L^2 nie jest L^φ–doskonała. Istotnie, mamy

$$M(M(L^2, L^\varphi), L^\varphi) = M(L^\infty, L^\varphi) = L^\varphi \neq L^2.$$

Przykład 2.2.3. Zdefiniujmy następujące funkcje Younga, będące modyfikacją funkcji z poprzedniego przykładu

$$\varphi(u) := \begin{cases} u^2 \text{ dla } u \in [0,1), \\ 2u-1 \text{ dla } u \in [1,3/2), \\ 2n!u - n!^2 \text{ dla } u \in [\frac{n!+(n-1)!}{2}, \frac{n!(n+2)}{2}),\ n > 1 \end{cases}$$

oraz

$$\varphi_1(u) := \begin{cases} \frac{2}{n!}u - \frac{1}{n!^2} \text{ dla } u \in [\frac{n+2}{2(n+1)!}, \frac{n+1}{2n!}),\ n \geqslant 1 \\ u^2 \text{ dla } u \in [1,\infty). \end{cases}$$

Generowane przez nie przestrzenie Orlicza $L^{\varphi_1}, L^{\varphi}$ będziemy ponownie rozważać nad półprostą.

Zaczniemy od wykazania, że nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca (2.0.4) dla małych lub dużych argumentów.

(i) Fakt, że dla żadnej funkcji Younga φ_0 nie może zachodzić $\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów wynika z punktu (i) w przykładzie 2.2.2.

(ii) Wykażemy, że nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca (2.0.4) dla małych argumentów. Gdyby tak nie było, to istniałaby funkcja Younga φ_0 taka, że

$$c\varphi^{-1}(u) \leqslant \varphi_0^{-1}(u)\varphi_1^{-1}(u) \leqslant C\varphi^{-1}(u)$$

dla pewnych stałych $c, C, u_0 > 0$ oraz $0 \leqslant u < u_0$. Dla każdego $n > 1$ mamy

$$\begin{aligned} C &\geqslant \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)}{\varphi^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)} = \frac{\frac{n+1}{2n!}}{\frac{\sqrt{n}}{n!}}\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) \\ &= 2\frac{n+1}{\sqrt{n}}\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) \geqslant 2\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right)\sqrt{n} \end{aligned}$$

skąd

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{n}{n!^2}\right) \leqslant 2\frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Z drugiej strony dla wszystkich $n > 1$ otrzymujemy

$$c \leqslant \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n!}\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right)}{\frac{1}{n!}} = \varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right).$$

Stąd

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{n!^2}\right) \geqslant c.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż φ_0^{-1} jest niemalejąca.

Wyznaczymy teraz funkcję $\varphi \ominus \varphi_1$. Z przykładu 2.2.2 wynika, że $\varphi \ominus \varphi_1(u) = \infty$ dla każdego $u > 1$. Niech $0 < u \leqslant 1$. Zauważmy, że $\varphi(us) \leqslant \varphi(s) \leqslant \varphi_1(s)$ dla wszystkich $s \geqslant 1$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\varphi \ominus \varphi_1(u) &= \sup_{0 \leqslant s}\{\varphi(us) - \varphi_1(s)\}\\ &= \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1}\{\varphi(us) - \varphi_1(s)\}\\ &= \sup_{s \in [\frac{n+2}{2(n+1)!}, \frac{n+1}{2n!});\ n \in \mathbb{N}} \left\{(us)^2 - \frac{2}{n!}s + \frac{1}{n!^2}\right\}.\end{aligned}$$

Funkcje, które pojawiają się pod supremum nie posiadają wartości maksymalnej wewnątrz odpowiednich przedziałów, ponieważ są to fragmenty parabol o ramionach skierowanych do góry. By obliczyć supremum należy zatem rozważyć wartości na końcach przedziałów

$$\begin{aligned}\varphi \ominus \varphi_1(u) &= \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{(u\frac{n+2}{2(n+1)!})^2 - \frac{2}{n!}\frac{n+2}{2(n+1)!} + \frac{1}{n!^2}, (u\frac{n+1}{2n!})^2 - \frac{2}{n!}\frac{n+1}{2n!} + \frac{1}{n!^2}\right\}\\ &= \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{(n+2)^2u^2 - 8(n+2)(n+1) + 4(n+1)^2}{4(n+1)!^2}, \frac{(n+1)^2u^2 - 4n}{4n!^2}\right\}.\end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{(n+2)^2u^2 - 8(n+2)(n+1) + 4(n+1)^2}{4(n+1)!^2}$ jest zawsze ujemne, stąd

$$\varphi \ominus \varphi_1(u) = \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{(n+1)^2u^2 - 4n}{4n!^2}\right\}.$$

Najmniejsze $n \in \mathbb{N}$, dla którego wyrażenie $\frac{(n+1)^2u^2-4n}{4n!^2}$ jest nieujemne, to n_0 spełniające nierówność $\frac{2\sqrt{n_0}}{n_0+1} < u \leqslant \frac{2\sqrt{n_0-1}}{n_0}$. Analizując wartości wyrażenia pod maksimum dla $n \geqslant n_0$ otrzymujemy

$$\varphi \ominus \varphi_1(u) = \begin{cases} 0 \text{ dla } u = 0, \\ \frac{(n+1)^2u^2-4n}{4n!^2} \text{ dla } u \in \left(\frac{2\sqrt{n+\varepsilon_n}}{n+1}; \frac{2\sqrt{n-1+\varepsilon_{n-1}}}{n}\right],\ n \geqslant 1, \\ \infty \text{ dla } u \in (1, \infty), \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon_n := \frac{1}{n^2+3n+3}$. Zauważmy, że w tym przypadku $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \neq L^\infty$, ponieważ $a_{\varphi \ominus \varphi_1} = 0$.

Uwaga 2.2.4. Otrzymaliśmy zatem parę funkcji Younga φ_1, φ, dla których nie istnieje funkcja Younga φ_0 spełniająca (2.0.4), tj.

$$\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}.$$

Stąd wynika, że dotychczas znane twierdzenia nie dają możliwości wywnioskowania iż $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ jest przestrzenią Orlicza.

W przykładzie 2.2.2 byliśmy w stanie wykazać, że $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$. W przypadku przykładu 2.2.3 uzyskanie takiej równości bez odwołania się do twierdzenia 2.1.7 byłoby bardzo trudne.

W pierwszym przykładzie nieistnienie funkcji Younga spełniającej równoważność (2.0.4) dla małych argumentów możemy otrzymać również z ogólniejszych rozważań dotyczących mnożników punktowych pomiędzy ciągowymi przestrzeniami Orlicza. Istotnie, jeżeli φ jest zdefiniowana jak w przykładzie 2.2.2, to

$$\ell^2 \subsetneq \ell^{\varphi}$$

skąd $M(\ell^2, \ell^{\varphi}) = \ell^{\infty}$. Możemy stąd także wywnioskować, że ℓ^2 nie faktoryzuje ℓ^{φ} gdyż

$$\ell^2 \odot M(\ell^2, \ell^{\varphi}) = \ell^2 \odot \ell^{\infty} = \ell^2 \neq \ell^{\varphi}.$$

Korzystając z twierdzenia 2.2.1 wnosimy, że nie istnieje funkcja φ_0 spełniająca (2.0.4) dla małych argumentów.

Z drugiej strony w przykładzie 2.2.2 nie możemy użyć podobnej argumentacji. Niech funkcje φ, φ_1 będą zdefiniowane jak w przykładzie 2.2.2. Wykażemy, że przestrzeń mnożników pomiędzy ciągowymi przestrzeniami Orlicza generowanymi przez φ, φ_1 jest nietrywialna, tj. $M(\ell^{\varphi_1}, \ell^{\varphi}) \neq \ell^{\infty}$. Aby to udowodnić wystarczy pokazać, że dla ciągu (x_n) sum częściowych kolejnych elementów bazy kanonicznej, tj.

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} e_k$$

mamy $\|x_n\|_{M(\ell^{\varphi_1}, \ell^{\varphi})} \to \infty$ przy $n \to \infty$. W tym celu zauważmy, że $\ell^{\varphi} = \ell^2$. Korzystając ze wzoru na funkcję fundamentalną przestrzeni Orlicza otrzymujemy, że

$$\left\| \frac{n+1}{2n!} x_{\frac{n!2}{n}} \right\|_{\varphi_1} = 1,$$

dla $n > 1$. Stąd

$$\left\| x_{\frac{n!2}{n}} \right\|_{M(\ell^{\varphi_1}, \ell^2)} \geqslant \left\| \frac{n+1}{2n!} x_{\frac{n!2}{n}} \right\|_2 = \frac{n+1}{2n!} \frac{n!}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2},$$

dla $n > 1$. Zatem

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x_{\frac{n!2}{n}} \right\|_{M(\ell^{\varphi_1}, \ell^2)} = \infty.$$

Ponieważ, na mocy własności ideału ciąg $\left(\|x_n\|_{M(\ell^{\varphi_1}, \ell^2)} \right)$ jest niemalejący, więc również

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\|_{M(\ell^{\varphi_1}, \ell^2)} = \infty,$$

co dowodzi, że $M(\ell^{\varphi_1}, \ell^{\varphi}) \neq \ell^{\infty}$.

W obu przykładach nie zachodzi faktoryzacja odpowiednich przestrzeni Orlicza. Wynika to z twierdzenia 2.2.1 oraz braku równoważności $(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1}$.

Rozdział 3

Mnożniki punktowe pomiędzy uogólnieniami przestrzeni Orlicza

Głównym celem tego rozdziału będzie opis mnożników punktowych $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ oraz $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ pomiędzy parami przestrzeni Musielaka–Orlicza oraz parami przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego, odpowiednio.

Udowodnimy, że dla przestrzeni Musielaka–Orlicza $L^{\varphi_1}, L^{\varphi}$ zachodzi równość

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1},$$

o ile $\mathrm{supp}(L^{\varphi}) = \Omega$. Opis taki był znany wcześniej tylko dla wąskiej klasy przestrzeni, tj. dla par przestrzeni Nakano (nazywanych również przestrzeniami Lebesgue'a o zmiennym wykładniku). Reprezentacja przestrzeni mnożników punktowych pozwoli nam udowodnić, że warunkiem dostatecznym na faktoryzację przestrzeni Musielaka–Orlicza jest równoważność

$$\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}.$$

W przeciwieństwie do przypadku przestrzeni Orlicza, warunek ten nie jest konieczny, co zobrazujemy odpowiednim przykładem.

Podobne twierdzenia wykażemy w klasie przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Dokładniej, dla przestrzeni symetrycznej E oraz dwóch funkcji Younga φ, φ_1, spełniających pewne techniczne założenia, udowodnimy, że

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) = E_{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Na koniec omówimy warunki na to aby przestrzeń E_{φ_1} faktoryzowała E_{φ}.

3.1 Uogólniona funkcja dopełniająca w sensie Younga

W niniejszym podrozdziale zaprezentujemy konstrukcję uogólnionej funkcji dopełniającej w sensie Younga $\varphi \ominus \varphi_1$ dla pary funkcji Musielaka-Orlicza φ, φ_1 oraz przedstawimy podstawowe własności tej konstrukcji.

Niech φ oraz φ_1 będą funkcjami Musielaka-Orlicza nad przestrzenią miary Ω. Przyjmiemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}
\Omega_{0,0} &:= \{t \in \Omega^c : b_{\varphi_1}(t) = b_\varphi(t) = \infty\},\\
\Omega_{0,\infty} &:= \{t \in \Omega^c : b_{\varphi_1}(t) = \infty,\ b_\varphi(t) < \infty\},\\
\Omega_{\infty,0} &:= \{t \in \Omega^c : 0 < b_{\varphi_1}(t) < \infty,\ b_\varphi(t) = \infty\},\\
\Omega_{\infty,\infty} &:= \{t \in \Omega^c : 0 < b_{\varphi_1}(t) < \infty,\ b_\varphi(t) < \infty\},\\
\Omega_0 &:= \Omega_{0,0} \cup \Omega_{0,\infty},\\
\Omega_\infty &:= \Omega_{\infty,\infty} \cup \Omega_{\infty,0}.
\end{aligned}$$

Definicja 3.1.1. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza. **Uogólnioną funkcję dopełniającą w sensie Younga funkcji** φ_1 **względem** φ, oznaczaną $\varphi \ominus \varphi_1$, definiujemy wzorem

$$\varphi \ominus \varphi_1(t,u) := \begin{cases} \sup\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) \colon 0 \leqslant s < b_{\varphi_1}(t)\} & \text{dla } t \in \Omega^c,\\ \sup\left\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) \colon 0 \leqslant s \leqslant \min\left\{c_{\varphi_1}(t), \frac{b_{\varphi_1}(t)}{2}\right\}\right\} & \text{dla } t \in \Omega^a, \end{cases}$$

gdzie $c_{\varphi_1}(t) := \varphi_1^{-1}\left(t, \frac{1}{\mu(\{t\})}\right)$ dla $t \in \Omega^a$ (czyli $c_{\varphi_1}(t) = 1/\left\|\chi_{\{t\}}\right\|_{\varphi_1}$).

Zauważmy, że $b_{\varphi\ominus\varphi_1}(\omega) > 0$ dla każdego atomu $\omega \in \Omega^a$. Ponadto zachodzi równość

$$b_{\varphi\ominus\varphi_1}(t) = \frac{b_\varphi(t)}{b_{\varphi_1}(t)}$$

dla $t \in \Omega_\infty$. Istotnie ustalmy $t \in \Omega_\infty$, dla którego $\varphi(t,\cdot), \varphi_1(t,\cdot)$ są funkcjami Younga oraz niech $u > \frac{b_\varphi(t)}{b_{\varphi_1}(t)}$. Mamy wówczas $u = \frac{b_\varphi(t)+\varepsilon}{b_{\varphi_1}(t)-\varepsilon}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ a zatem

$$\begin{aligned}
\varphi \ominus \varphi_1(t,u) &= \sup\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) \colon 0 \leqslant s < b_{\varphi_1}(t)\}\\
&= \sup\left\{\varphi(t, s\frac{b_\varphi(t)+\varepsilon}{b_{\varphi_1}(t)}) - \varphi_1(t,s) \colon 0 \leqslant s < b_{\varphi_1}(t)\right\}\\
&\geqslant \varphi(t, b_\varphi(t)+\varepsilon) - \varphi_1(t, b_{\varphi_1}(t) - \varepsilon) = \infty.
\end{aligned}$$

Jeżeli zaś $u < \frac{b_\varphi(t)}{b_{\varphi_1}(t)}$ to łatwo zauważyć, że $\varphi \ominus \varphi_1(t,u) < \infty$.

Wobec tego dla μ–p.w. $t \in \Omega_{0,\infty}$

$$\varphi \ominus \varphi_1(t,u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u = 0,\\ \infty & \text{dla } u > 0, \end{cases}$$

skąd

$$\operatorname{supp}(L^{\varphi\ominus\varphi_1}) = (\Omega_{0,0} \cup \Omega_\infty \cup \Omega^a) \cap \operatorname{supp}(L^\varphi). \tag{3.1.1}$$

Podobnie jak w przypadku przestrzeni Orlicza, w dowodzie głównego twierdzenia będziemy używać następującej modyfikacji konstrukcji funkcji $\varphi \ominus \varphi_1$.

Definicja 3.1.2. Niech $a > 0$ oraz φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza. Funkcję $\varphi \ominus_a \varphi_1$ definiujemy wzorem

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t,u) := \begin{cases} \sup\left\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant a\right\} & \text{dla } t \in \Omega_0, \\ \sup\left\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t)\right\} & \text{dla } t \in \Omega_\infty, \\ \sup\left\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant \min\left\{c_{\varphi_1}(t), \frac{b_{\varphi_1}(t)}{2}\right\}\right\} & \text{dla } t \in \Omega^a. \end{cases}$$

Podobnie jak w przypadku funkcji $\varphi \ominus \varphi_1$ mamy równość

$$b_{\varphi \ominus_a \varphi_1}(t) = \frac{(a+1) b_\varphi(t)}{a b_{\varphi_1}(t)}$$

dla μ–p.w. $t \in \Omega_\infty$.

Lemat 3.1.3. Niech $a > 0$ oraz φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza. Wówczas, dla dowolnego $a > 0$, funkcje $\varphi \ominus \varphi_1$ i $\varphi \ominus_a \varphi_1$ są także funkcjami Musielaka–Orlicza.

Dowód. Z lematu 2.1.5 wynika, że dla prawie wszystkich $t \in \Omega$ funkcje $\varphi \ominus_a \varphi_1(t, \cdot)$ i $\varphi \ominus \varphi_1(t, \cdot)$ są funkcjami Younga. Wystarczy zatem uzasadnić, że dla $u \geqslant 0$ mierzalność funkcji $\varphi \ominus_a \varphi_1(\cdot, u)$ i $\varphi \ominus \varphi_1(\cdot, u)$. Udowodnimy ten fakt dla $\varphi \ominus \varphi_1$. Oczywiście każda część przestrzeni Ω może być rozważana osobno. Wykażemy mierzalność na Ω_∞. Zauważmy, że dla $u \geqslant 0$ oraz $t \in \Omega_\infty$ zachodzi

$$\begin{aligned} \varphi \ominus \varphi_1(t,u) &= \sup\{\varphi(t,su) - \varphi_1(t,s) : 0 \leqslant s < b_{\varphi_1}(t)\} \\ &= \sup\{\varphi(t, u b_{\varphi_1}(t) v) - \varphi_1(t, b_{\varphi_1}(t) v) : 0 \leqslant v < 1\} \\ &= \sup\{\varphi(t, u b_{\varphi_1}(t) v) - \varphi_1(t, b_{\varphi_1}(t) v) : v \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\}. \end{aligned}$$

Funkcje $\varphi(\cdot, u b_{\varphi_1}(\cdot) v)$ i $\varphi_1(\cdot, b_{\varphi_1}(\cdot) v)$ są mierzalne wobec czego także funkcja $\varphi \ominus \varphi_1(\cdot, u)$ jest mierzalna jako supremum przeliczalnej rodziny funkcji mierzalnych. Dowód mierzalności $\varphi \ominus \varphi_1$ funkcji na Ω_0 jest niemal identyczny. W przypadku funkcji $\varphi \ominus_a \varphi_1$ dowód mierzalności jest analogiczny. $\square$

Przykład 3.1.4. Niech $p, q : \Omega \to [1, \infty)$ będą dwoma funkcjami mierzalnymi takimi, że $q(t) \leqslant p(t)$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Zdefiniujmy parę funkcji Musielaka–Orlicza

$$\varphi_q(t,u) = \frac{1}{q(t)} u^{q(t)} \text{ oraz } \varphi_p(t,u) = \frac{1}{p(t)} u^{p(t)}$$

dla $t \in \Omega, u \geqslant 0$. Wtedy

$$\varphi_q \ominus \varphi_p(t,u) = \frac{1}{r(t)} u^{r(t)},$$

gdzie $\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{r(t)} = \frac{1}{q(t)}$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$.

3.2 Mnożniki punktowe pomiędzy przestrzeniami Musielaka–Orlicza

Dowód równości $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$ dla przestrzeni Musielaka–Orlicza $L^{\varphi_1}, L^{\varphi}$ będzie przebiegał podobnie jak dowód analogicznego twierdzenia z poprzedniego rozdziału.

Przypomnijmy, że wykazując twierdzenie 2.1.7 w dowodzie nierówności (2.1.6) wykorzystywaliśmy podział przestrzeni miary I na rodzinę zbiorów (A_n), których istnienie wynikało z symetrii przestrzeni Orlicza. W przypadku przestrzeni Musielaka–Orlicza podobna argumentacja nie jest wystarczająca, gdyż nie są to przestrzenie symetryczne. W poniższych dwóch lematach udowodnimy, że da się skonstruować podział przestrzeni miary w taki sposób, aby można było kontrolować normy funkcji charakterystycznych w przestrzeni Musielaka–Orlicza.

Lemat 3.2.1. Niech φ będzie funkcją Musielaka–Orlicza określoną nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) oraz niech $b_\varphi(t) = \infty$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Wówczas dla każdego $a > 0$ istnieje ciąg (A_n) parami rozłącznych i mierzalnych zbiorów taki, że $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ oraz

$$\|\chi_{A_n}\|_\varphi \leqslant \frac{1}{a},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Ustalmy $a > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$B_n \coloneqq \{t \in \Omega : n - 1 \leqslant \varphi(t, a) < n\}.$$

Zbiory B_n są mierzalne, gdyż dla każdego $a > 0$ funkcja $\varphi(\cdot, a)$ jest mierzalna. Co więcej, są one parami rozłączne i $\mu\left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$. Z założenia bezatomowości Ω wynika, że każdy ze zbiorów B_n możemy podzielić na ciąg (skończony lub nie) parami rozłącznych, mierzalnych zbiorów $(C_j^n)_{j \in I_n}$ spełniających $\bigcup\limits_{j \in I_n} C_j^n = B_n$, przy czym $\mu(C_j^n) \leqslant \frac{1}{n}$ dla $j \in I_n$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $j \in I_n$ zachodzi

$$I_\varphi\left(a\chi_{C_j^n}\right) = \int_{C_j^n} \varphi(t, a) \mathrm{d}\mu(t) \leqslant \mu(C_j^n) \sup_{t \in C_j^n} \varphi(t, a) \leqslant 1.$$

Stąd

$$\left\|\chi_{C_j^n}\right\|_\varphi \leqslant \frac{1}{a},$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $j \in I_n$. Poszukiwany ciąg (A_k) otrzymujemy poprzez odpowiednie przenumerowanie podwójnie indeksowanego ciągu $(C_j^n)_{n \in \mathbb{N}, j \in I_n}$. □

Lemat 3.2.2. Niech φ będzie funkcją Musielaka–Orlicza określoną nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) i niech $b_\varphi(t) < \infty$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Wówczas dla dowolnego

$a > 0$ istnieje ciąg parami rozłącznych zbiorów mierzalnych (A_n) takich, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ oraz

$$\|\chi_{A_n}\|_\varphi \leqslant \frac{2}{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in A_n}\{b_\varphi(t)\}}.$$

Dowód. Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ definiujmy zbiory

$$B_k := \{t \in \Omega : 2^{k-1} < b_\varphi(t) \leqslant 2^k\}.$$

Ponieważ funkcja b_φ jest mierzalna, więc każdy ze zbiorów B_k jest mierzalny. Dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$B_{k,n} := \{t \in B_k : n - 1 \leqslant \varphi(t, 2^{k-1}) < n\}.$$

Ciąg $(B_{k,n})$ zawiera parami rozłączne zbiory mierzalne oraz $\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} B_{k,n}\right) = 0.$ Mierzalność zbiorów $(B_{k,n})$ wynika z mierzalności funkcji $\varphi(\cdot, u)$. Oznaczmy

$$I := \{(k, n) \in \mathbb{Z}^2 : \mu(B_{k,n}) \neq 0\}.$$

Dla pary $(k, n) \in I$ istnieje ciąg (skończony lub nie) parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $(C_j^{k,n})_{j\in I_{k,n}}$ takich, że $\bigcup_{j\in I_{k,n}} C_j^{k,n} = B_{k,n}$ i $\mu(C_j^{k,n}) \leqslant \frac{1}{n}$ dla $j \in I_{k,n}$. Zatem

$$I_\varphi\left(2^{k-1}\chi_{C_j^{k,n}}\right) = \int_{C_j^{k,n}} \varphi(t, 2^{k-1})\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \mu(C_j^{k,n}) \sup_{t\in C_j^{k,n}} \varphi(t, 2^{k-1}) \leqslant 1,$$

dla wszystkich $(k, n) \in I$ oraz $j \in I_{k,n}$. Stąd

$$\left\|\chi_{C_j^{k,n}}\right\|_\varphi \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{2}{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in B_{k,n}}\{b_\varphi(t)\}} \leqslant \frac{2}{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in C_j^{k,n}}\{b_\varphi(t)\}}.$$

Podobnie jak poprzednio, poszukiwany ciąg (A_n) otrzymujemy poprzez przenumerowanie potrójnie indeksowanego ciągu $(C_j^{k,n})_{k,n\in\mathbb{N},j\in I_n}$. $\square$

Fakt 3.2.3. Niech φ będzie funkcją Musielaka–Orlicza taką, że $b_\varphi(t) < \infty$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Wówczas

$$L^\varphi \subset L^\infty(1/b_\varphi).$$

Dowód. Niech $f \notin L^\infty(1/b_\varphi)$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zbiór mierzalny

$$A_n = \left\{t \in \Omega : n \leqslant \frac{|f(t)|}{b_\varphi(t)}\right\}.$$

Ponieważ f/b_φ jest funkcją nieograniczoną, więc $\mu(A_n) > 0$ dla każdego $n \geqslant 0$. Ustalmy $a > 0$ oraz weźmy $n \geqslant N$ takie, aby spełniona była nierówność $an > 2$. Wtedy

$$nb_\varphi \chi_{A_n} \leqslant |f|,$$

skąd

$$I_\varphi(af) \geqslant I_\varphi(anb_\varphi \chi_{A_n}) \geqslant I_\varphi(2b_\varphi \chi_{A_n}) = \infty.$$

Wobec dowolności $a > 0$, na mocy definicji przestrzeni Musielaka-Orlicza wnosimy, że $f \notin L^\varphi$. □

Lemat 3.2.4. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza określonymi nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). Załóżmy, że $0 < b_{\varphi_1}(t) < \infty$ oraz $0 < b_\varphi(t) < \infty$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Wówczas

$$M(L^{\varphi_1}, L^\varphi) \subset L^\infty(b_{\varphi_1}/b_\varphi).$$

Dowód. Oznaczmy $v(t) := \frac{b_{\varphi_1}(t)}{b_\varphi(t)}$. Załóżmy, że funkcja nieujemna $f \notin L^\infty(v)$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$A_n := \{t \in \Omega : n \leqslant f(t)v(t) < n+1\}.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mu(A_n) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ przestrzeń Ω jest bezatomowa, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór miary dodatniej $B_n \subset A_n$ taki, że

$$\int_{B_n} \varphi_1\left(t, \frac{b_{\varphi_1}(t)}{2}\right) \mathrm{d}\mu(t) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Oznaczmy

$$g(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{\varphi_1}(t)}{2} \chi_{B_n}.$$

Wówczas

$$I_{\varphi_1}(g) = \int_\Omega \varphi_1(t, g(t))\, \mathrm{d}\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} \varphi_1\left(t, \frac{b_{\varphi_1}(t)}{2}\right) \mathrm{d}\mu(t) \leqslant 1,$$

wobec czego $g \in L^{\varphi_1}$ oraz $\|g\|_{\varphi_1} \leqslant 1$. Z drugiej strony

$$f(t)g(t) \geqslant \frac{1}{2} f(t) b_{\varphi_1}(t) \geqslant \frac{n}{2} b_\varphi(t) \quad \text{dla } \mu\text{–p.w. } t \in B_n,$$

skąd $fg \notin L^\varphi$, gdyż $L^\varphi \subset L^\infty(\frac{1}{b_\varphi})$ na mocy faktu 3.2.3. Wobec tego $f \notin M(L^{\varphi_1}, L^\varphi)$, co kończy dowód. □

Lemat 3.2.5. Niech φ, φ_1 będzie parą funkcji Musielaka–Orlicza określoną nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) oraz niech $\operatorname{supp} L^{\varphi_1} = \Omega$. Wówczas

$$\operatorname{supp} M(L^{\varphi_1}, L^\varphi) = \Omega_{0,0} \cup \Omega_\infty.$$

Dowód. Wykażemy, że $\mu(\Omega_{0,\infty} \cap \operatorname{supp} M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})) = 0$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje zbiór miary dodatniej $A \subset \Omega_{0,\infty}$, dla którego $\chi_A \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$. Wybierzmy zbiór miary dodatniej $C \subset A$ tak, aby $\inf\limits_{t\in C} b_{\varphi}(t) = \delta > 0$. Z lematu 3.2.1 wynika, że istnieje ciąg zbiorów miary dodatniej (A_n) taki, że $A_n \subset C$ oraz

$$\|\chi_{A_n}\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy faktu 3.2.3 otrzymujemy, że $L^{\varphi}[\Omega_{0,\infty}] \subset L^{\infty}(\frac{1}{b_\varphi})[\Omega_{0,\infty}]$ z pewną stałą zanurzenia $c > 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\|\chi_{A_n}\|_{\varphi} &\geqslant c^{-1}\,\|\chi_{A_n}\|_{L^{\infty}(\frac{1}{b_\varphi})} = c^{-1}\sup_{t\in A_n}\frac{1}{b_\varphi(t)}\\ &= \frac{1}{c\inf\limits_{t\in A_n} b_\varphi(t)} \geqslant \frac{1}{c\inf\limits_{t\in C} b_\varphi(t)} = \frac{1}{c\delta}.\end{aligned}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $f_n := n\chi_{A_n}$. Ponieważ $\|f_n\|_{L^{\varphi_1}} \leqslant 1$, więc

$$\|\chi_A\|_M \geqslant \|f_n\chi_A\|_{\varphi} = \|n\chi_{A_n}\|_{\varphi} \geqslant \frac{n}{c\delta},$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem $\chi_A \notin M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

W dowodzie twierdzenia 2.1.7 skonstruowaliśmy funkcję z przestrzeni Orlicza L^{φ_1} wydobywającą normę funkcji prostej $f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$. Dla każdego $t \in I$ wybieraliśmy liczbę $s = s(t)$ realizującą supremum

$$\sup\{\varphi(f(t)s) - \varphi_1(s) : 0 \leqslant s \leqslant a\}.$$

Ponieważ f była funkcją prostą, więc także funkcja $s(t)$ była funkcją prostą, a tym samym mierzalną. W przypadku przestrzeni mnożników pomiędzy przestrzeniami Musielaka–Orlicza podobna konstrukcja jest znacznie trudniejsza. Przypomnijmy, że supremum, które pojawia się w obciętej uogólnionej funkcji dopełniającej, ma postać

$$\sup\{\varphi(t, f(t)s) - \varphi_1(t, s) : 0 \leqslant s \leqslant a\}.$$

Nawet w sytuacji, gdy f jest funkcją prostą, mierzalność funkcji realizującej to supremum nie jest oczywista. Poniższy lemat zapewnia, że dla dowolnego $a > 1$ można wybrać mierzalną funkcję s taką, że

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) = \varphi\left(t, f(t)s(t)\right) - \varphi_1(t, s(t)),$$

dla μ–p.w. $t \in \Omega$.

Lemat 3.2.6. Niech φ, φ_1 będzie parą funkcji Musielaka–Orlicza określoną nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). Załóżmy ponadto, że $\operatorname{supp} L^{\varphi_1} = \Omega$. Niech

$A \subset \operatorname{supp} L^{\varphi} \setminus \Omega_{\infty,0}$ będzie zbiorem miary dodatniej. Jeżeli dla liczb $a > 1, u > 0$ nierówność

$$\varphi \ominus_a \varphi_1 \left(t, \frac{3}{2}u\right) < \infty$$

jest spełniona dla μ–p.w. $t \in A$, to funkcja $f : A \to [0, \infty)$ zdefiniowana wzorem

$$f(t) := \max\left\{0 \leqslant v \leqslant \min\left\{a, \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t)\right\} : \varphi_1(t,v) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t,u) = \varphi(t,uv)\right\}$$

jest funkcją mierzalną.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\varphi_1(t,\cdot)$ oraz $\varphi(t,\cdot)$ są funkcjami Younga dla każdego $t \in A$. Ustalmy $u > 0$ oraz $a > 1$ spełniające założenia, tj.

$$\varphi \ominus_a \varphi_1 \left(t, \frac{3}{2}u\right) < \infty \quad \text{dla } \mu\text{–p.w. } t \in A.$$

Dla $t \in A$ zdefiniujmy

$$f(t) := \max\left\{0 \leqslant v \leqslant \min\left\{a, \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t)\right\} : \varphi_1(t,v) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t,u) = \varphi(t,uv)\right\}.$$

Niech (r_k) będzie ciągiem gęstym w $[0,a]$ (tj. zbiorem $\{r_1, r_2, ...\}$ gęstym w $[0,a]$). Dla wszystkich $k, n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy zbiór

$$B_k^n := \left\{t \in A : r_k \leqslant \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t),\ \varphi_1(t,r_k) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t,u) - \varphi(t,ur_k) < 1/n\right\}$$

oraz funkcję

$$q_k^n(t) := r_k \chi_{B_k^n}(t).$$

Ponieważ zbiory B_k^n są mierzalne, więc każda z funkcji q_k^n jest mierzalna. Zauważmy, że z definicji $\varphi \ominus_a \varphi_1$ wynika nierówność

$$0 \leqslant \varphi_1(t,v) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t,w) - \varphi(t,wv)$$

dla μ–p.w. $t \in \Omega$ oraz $w, v \geqslant 0$. Stąd

$$\varphi(t, ur_k) < \infty,$$

gdyż $\varphi_1(t,r_k) < \infty$ i $\varphi \ominus_a \varphi_1(t,u) < \infty$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ supremum przeliczalnej rodziny funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną, wystarczy wykazać, że

$$f(t) = \limsup_{k,n\to\infty} q_k^n(t)$$

dla $t \in A$. W tym celu zacznijmy od udowodnienia nierówności

$$\limsup_{k,n\to\infty} q_k^n \leqslant f.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas dla pewnego $t_0 \in A$ oraz $\delta > 0$ zachodzi

$$\limsup_{k,n\to\infty} q_k^n(t_0) > f(t_0) + \delta.$$

Zatem istnieje podciąg $(q_{k_i}^{n_i})$ spełniający nierówności

$$\min\left\{a, \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t_0)\right\} \geqslant q_{k_i}^{n_i}(t_0) > x(t_0) + \delta,$$

oraz

$$\varphi_1(t_0, u_{q_{k_i}^{n_i}}(t_0)) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t_0, u) - \varphi(t_0, u_{q_{k_i}^{n_i}}(t_0)) < 1/n_i, \tag{3.2.1}$$

dla $i \in \mathbb{N}$. Z drugiej strony istnieje podciąg $(q_j) := (q_{k_{i_j}}^{n_{i_j}})$ ciągu $(q_{k_i}^{n_i})$ oraz liczba $p_0 > f(t_0)$ taka, że $q_j(t_0) \to p_0$. Na mocy (3.2.1) oraz ciągłości funkcji Younga mamy

$$\varphi_1(t_0, p_0) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t_0, u) - \varphi(t_0, up_0) = 0,$$

co jest w sprzeczności z wyborem $f(t_0)$ jako największej liczby spełniającej powyższe równanie. Zatem wykazaliśmy, że $\limsup_{k,n\to\infty} q_k^n \leqslant f$.

Wykażemy teraz nierówność przeciwną, tj.

$$\limsup_{k,n\to\infty} q_k^n \geqslant f.$$

Ustalmy $t \in A$ oraz zdefiniujmy

$$C_n := \left\{0 \leqslant v \leqslant \min\left\{a, \frac{a}{a+1} b_{\varphi_1}(t)\right\} : \varphi_1(t, v) + \varphi \ominus_a \varphi_1(t, u) - \varphi(t, uv) < 1/n\right\}.$$

Ponieważ $f(t) \in C_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc każdy ze zbiorów C_n jest niepustym zbiorem otwartym. Wobec tego istnieje ciąg (r_{n_i}) taki, że $r_{n_i} \in C_i$ oraz $r_{n_i} \to f(t)$. Stąd $t \in B_{n_i}^i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Zatem

$$f(t) \leqslant \limsup_{i\to\infty} q_{n_i}^i(t) \leqslant \limsup_{k,n\to\infty} q_k^n(t),$$

co kończy dowód mierzalności funkcji f. □

W dalszym ciągu okaże się przydatnym następujące proste spostrzeżenie dotyczące podziału przestrzeni mnożników punktowych względem przestrzeni miary. Jeżeli X jest kratą Banacha nad Ω oraz $A, B \subset \Omega$ są mierzalnymi zbiorami spełniającymi $A \cup B = \Omega$, to X możemy wyrazić wzorem

$$X = X[A] + X[B],$$

gdzie $X[A]$ oznacza obcięcie przestrzeni X do zbioru A (patrz definicja 1.1.8). Wówczas formuła

$$\|f\|_{X[A]+X[B]} = \|f\chi_A\|_{X[A]} + \|f\chi_B\|_{X[B]}$$

określa równoważną normę w przestrzeni X. Poniższy lemat orzeka, że mnożniki punktowe komutują z dekompozycją tego typu.

Lemat 3.2.7. Niech X, Y będzie parą przestrzeni funkcyjnych określonych nad Ω oraz niech $A, B \subset \Omega$ będą rozłącznymi zbiorami mierzalnymi spełniającymi $A \cup B = \Omega$. Zachodzą równości

$$M(X,Y) = M(X[A], Y[A]) + M(X[B], Y[B]) = M(X,Y)[A] + M(X,Y)[B].$$

Jesteśmy gotowi by udowodnić główne twierdzenie tego rozdziału.

Twierdzenie 3.2.8. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza określonymi nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). Załóżmy, że $\operatorname{supp} L^{\varphi_1} = \Omega$. Wówczas

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\operatorname{supp}(L^{\varphi}) = \Omega$, gdyż zarówno

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})[\Omega \setminus \operatorname{supp}(L^{\varphi})] = \{0\},$$

na mocy lematu 3.2.5, jak i

$$L^{\varphi \ominus \varphi_1}[\Omega \setminus \operatorname{supp}(L^{\varphi})] = \{0\},$$

na mocy faktu 3.1.1. Dowód włożenia

$$L^{\varphi \ominus \varphi_1} \subset M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$$

jest identyczny jak w przypadku przestrzeni Orlicza.

Wykażemy, że

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) \subset L^{\varphi \ominus \varphi_1}.$$

Gdy $\mu(\Omega_{\infty,\infty}) > 0$ oznaczmy przez C jest stałą zanurzenia

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})[\Omega_{\infty,\infty}] \subset L^{\infty}(b_{\varphi_1}/b_{\varphi})[\Omega_{\infty,\infty}],$$

(patrz lemat 3.2.4). W przypadku, gdy $\mu(\Omega_{\infty,\infty}) = 0$ przyjmijmy $C = 1$. Oznaczmy $c := \min\{1, C\}$. Niech $0 \leqslant f \in M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ będzie funkcją prostą postaci

$$f = \sum_{k \in J} a_k \chi_{\omega_k} + \sum_{k \in I} b_k \chi_{B_k},$$

gdzie I, J są skończonymi zbiorami indeksów, $B_k \subset \Omega^c$ dla $k \in I$ oraz ω_k są atomami dla $k \in J$. Załóżmy ponadto, że $\|f\|_M \leqslant \frac{1}{4c}$.

Udowodnimy, że dla dowolnego $a > 1$ zachodzi nierówność

$$I_{\varphi \ominus_a \varphi_1}(f) \leqslant 1. \tag{3.2.2}$$

Ustalmy $a > 1$. Skonstruujemy funkcję $g(t)$ określoną na Ω oraz rodzinę parami rozłącznych zbiorów mierzalnych (A_n) spełniających warunki

(i) $\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) = \varphi(t, g(t)f(t)) - \varphi_1(t, g(t))$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$,

(ii) $\|fg\chi_{A_n}\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\operatorname{supp}(M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,

(iv) $g \in L^{\varphi_1}$ oraz $\|g\|_{\varphi_1} \leqslant 1$.

Do konstrukcji funkcji g wykorzystamy lemat 3.2.6 zastosowany dla każdej z liczb b_k oraz każdego zbioru B_k z osobna. Zacznijmy od sprawdzenia, że dla $k \in I$ zachodzi nierówność $\varphi \ominus_a \varphi_1(t, \frac{3}{2}b_k) < \infty$ dla μ–p.w. $t \in B_k$. Niech $k \in I$. Na mocy lematu 3.2.4

$$\left\|fb^{-1}_{\varphi\ominus\varphi_1}\chi_{\Omega_{\infty,\infty}}\right\|_{\infty} \leqslant c\left\|f\chi_{\Omega_{\infty,\infty}}\right\|_{M} \leqslant \frac{1}{4}$$

oraz

$$b_{\varphi\ominus_a\varphi_1}(t) = \infty$$

dla μ–p.w. $t \in \Omega_{0,0} \cup \Omega_{\infty,0}$. Otrzymujemy zatem

$$b_k = f(t) \leqslant \frac{b_{\varphi\ominus\varphi_1}(t)}{4} \leqslant \frac{b_{\varphi\ominus_a\varphi_1}(t)}{2},$$

dla μ–p.w. $t \in B_k$. Stąd wynika, że $\varphi \ominus_a \varphi_1(t, \frac{3}{2}b_k) < \infty$ dla μ–p.w. $t \in B_k$. Wobec tego założenia lematu 3.2.6 są spełnione. Stosując go dla ustalonej liczby b_k oraz zbioru B_k, dla $k \in I$, otrzymujemy mierzalną funkcję $g_k(t)$ spełniającą warunki

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) = \varphi(t, g_k(t)f(t)) - \varphi_1(t, g_k(t))$$

oraz

$$0 \leqslant g_k(t) \leqslant \min\left\{a, \frac{a}{a+1}b_{\varphi_1}(t)\right\}$$

dla μ–p.w. $t \in B_k$.

Pozostało zdefiniować funkcję g na części atomowej. Niech ciąg $c_k > 0$ będzie taki, że

$$0 \leqslant c_k \leqslant \min\left\{\varphi_1^{-1}\left(\omega_k, \frac{1}{\mu(\{\omega_k\})}\right), \frac{b_{\varphi_1}(\omega_k)}{2}\right\}$$

i

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(\omega_k, a_k) = \varphi(\omega_k, c_k a_k) - \varphi_1(\omega_k, c_k).$$

dla dowolnego $k \in J$. Istnienie ciągu (c_k) spełniającego powyższe warunki wynika z faktu, że supremum w definicji $\varphi \ominus_a \varphi_1$ na części atomowej jest brane po zbiorach zwartych. Wobec tego funkcja g spełniająca warunek (i) wyraża się wzorem

$$g(t) := \begin{cases} g_k(t) & \text{dla } t \in B_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n \\ c_k & \text{dla } t = \omega_k,\ 0 \leqslant k \leqslant m \\ 0 & \text{dla } t \notin \operatorname{supp}(f). \end{cases}$$

Skonstruujemy teraz ciąg zbiorów (A_n) spełniający warunki (ii) oraz (iii). Rozważymy osobno zbiory Ω_∞, Ω_0 oraz część atomową przestrzeni Ω.

Zacznijmy od Ω_∞. Na mocy lematu 3.2.2 istnieje ciąg parami rozłącznych zbiorów mierzalnych (A_n^1) taki, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^1 = \Omega_\infty$ oraz

$$\left\|\chi_{A_n^1}\right\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{2}{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in A_n^1} b_{\varphi_1}(t)},$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $0 \leqslant g(t) < b_{\varphi_1}(t)$, więc

$$\left\|fg\chi_{A_n^1}\right\|_{\varphi} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in A_n^1} b_{\varphi_1}(t)\, \|f\|_M \left\|\chi_{A_n^1}\right\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2},$$

co oznacza, że zbiory (A_n^1) spełniają (ii).

Weźmy teraz pod uwagę zbiór Ω_0. Z lematu 3.2.1 wynika, że istnieje ciąg parami rozłącznych zbiorów mierzalnych (A_n^2) taki, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^2 = \Omega_0$ oraz

$$\left\|\chi_{A_n^2}\right\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Ponadto

$$\left\|fg\chi_{A_n^2}\right\|_{\varphi} \leqslant \frac{a}{2}\left\|\chi_{A_n^2}\right\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2},$$

gdyż $g(t) \leqslant a$.

Pozostało wyznaczyć odpowiednie zbiory dla części atomowej. Dla dowolnego $\omega \in \Omega^a$ zachodzi

$$\left\|fg\chi_{\{\omega\}}\right\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}\varphi_1^{-1}\left(\omega, \frac{1}{\mu(\{\omega\})}\right)\left\|\chi_{\{\omega\}}\right\|_{\varphi_1} = \frac{1}{2},$$

przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że $\left\|\chi_{\{\omega\}}\right\|_{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi^{-1}(\omega,1/\mu(\{\omega\}))}$. Zatem poszukiwanymi zbiorami będą atomy.

Z otrzymanych trzech ciągów zbiorów $(A_n^1), (A_n^2), (\{\omega\})_{\omega\in\operatorname{supp}(M(L^{\varphi_1},L^{\varphi}))^a}$ tworzymy pojedynczy ciąg zbiorów (A_n). Na mocy lematu 3.2.5 mamy

$$\operatorname{supp}(M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

skąd wnosimy, że ciąg zbiorów (A_n) spełnia warunek (iii).

Pozostało wykazać, że warunek (iv) jest także spełniony, tj.

$$\|g\|_{\varphi_1} \leqslant 1.$$

Podobnie jak w przypadku mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza udowodnimy ten fakt poprzez indukcję.

Zaczniemy od wykazania, że dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\|g\chi_{A_k}\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.2.3}$$

Z równości

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) = \varphi(t, f(t)g(t)) - \varphi_1(t, g(t))$$

wynikają dwie następujące nierówności

$$\varphi_1(t, g(t)) \leqslant \varphi(t, f(t)g(t)) \text{ dla } \mu\text{–p.w. } t \in \Omega, \tag{3.2.4}$$

$$\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) \leqslant \varphi(t, f(t)g(t)) \text{ dla } \mu\text{–p.w. } t \in \Omega. \tag{3.2.5}$$

Na mocy (3.2.4), nierówności $\|fg\chi_{A_k}\|_{\varphi} \leqslant \frac{1}{2}$ oraz (1.4.1) mamy

$$I_{\varphi_1}(g\chi_{A_k}) = \int_{A_k} \varphi_1(t, g(t))\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \int_{A_k} \varphi(t, f(t)g(t))\mathrm{d}\mu(t) = I_{\varphi}(fg\chi_{A_k}) \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.2.6}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Oznaczmy $g_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} g\chi_{A_k}$. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykażemy, że

$$I_{\varphi_1}(g_n) \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.2.7}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Z nierówności (3.2.3) wynika, że $I_{\varphi_1}(g_1) \leqslant \frac{1}{2}$. Niech $n > 1$ oraz załóżmy, że

$$I_{\varphi_1}(g_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Mamy

$$I_{\varphi_1}(g_n) = I_{\varphi_1}(g_{n-1}) + I_{\varphi_1}(g\chi_{A_n}) \leqslant 1,$$

skąd $\|g_n\|_{\varphi_1} \leqslant 1$. Podobnie jak w nierówności (3.2.6), otrzymujemy

$$I_{\varphi_1}(g_n) \leqslant I_{\varphi}(fg_n) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność (3.2.7) jest wykazana. Ponieważ $g_n(t) \uparrow g(t)$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$, więc na mocy własności Fatou przestrzeni L^{φ_1} wnosimy, że $g \in L^{\varphi_1}$ oraz

$$\|g\|_{\varphi_1} \leqslant \sup_n \|g_n\|_{\varphi_1} \leqslant 1,$$

co oznacza, że warunek (iv) także jest spełniony.

W dalszym ciągu wykażemy nierówność $I_{\varphi \ominus_a \varphi_1}(f) \leqslant 1$. Na mocy (3.2.5) mamy

$$\|fg\|_{\varphi} \leqslant \|f\|_M \|g\|_{\varphi_1} \leqslant \frac{1}{2}$$

oraz

$$I_{\varphi\ominus_a\varphi_1}(f) = \int_\Omega \varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t))\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \int_\Omega \varphi(t, f(t)g(t))\mathrm{d}\mu(t) = I_\varphi(fg) \leqslant 1.$$

Stosując lemat Fatou otrzymujemy, że

$$I_{\varphi\ominus\varphi_1}(f) = \int_\Omega \varphi \ominus \varphi_1(t, f(t))\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \liminf_{a\to\infty} \int_\Omega \varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t))\mathrm{d}\mu(t) \leqslant 1,$$

gdyż $\varphi \ominus_a \varphi_1(t, f(t)) \uparrow \varphi \ominus \varphi_1(t, f(t))$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$, co dowodzi nierówności (3.2.2). Zatem $f \in L^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz

$$\|f\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \leqslant 1.$$

Postępując jak w przypadku mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza, przybliżając dowolną funkcję $f \in M(L^{\varphi_1}, L^\varphi)$ funkcjami prostymi i korzystając z własności Fatou dostajemy, że $f \in L^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz

$$\|f\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \leqslant 4c\,\|f\|_M\,,$$

co kończy dowód. □

W przypadku przestrzeni Nakano $L^{p(\cdot)}$, tj. przestrzeni Lebesgue'a o zmiennym wykładniku $p(\cdot)$ (patrz przykład 3.1.4) otrzymujemy następującą charakteryzację, uzyskaną również, elementarnymi metodami, przez Karlovicha w [38].

Wniosek 3.2.9. Niech (Ω, Σ, μ) będzie bezatomową przestrzenią miary oraz $p, q : \Omega \to [1, \infty)$ będą mierzalnymi funkcjami spełniającymi $q(t) \leqslant p(t)$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$. Wówczas

$$M(L^{p(\cdot)}, L^{q(\cdot)}) = L^{r(\cdot)},$$

gdzie $\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{r(t)} = \frac{1}{q(t)}$ dla μ–p.w. $t \in \Omega$.

Dowód. Zauważmy, że przestrzenie Nakano $L^{p(\cdot)}$ mogą być równoważnie zdefiniowane przez funkcję Musielaka–Orlicza postaci $\varphi_p(t, u) = \frac{1}{p(t)}u^{p(t)}$. Istotnie dla $\varphi(t, u) = u^{p(t)}$ zachodzi

$$\varphi\left(t, \frac{u}{2}\right) = \left(\frac{u}{2}\right)^{p(t)} \leqslant \frac{1}{p(t)}u^{p(t)} = \varphi_p(t, u) \leqslant \varphi(t, u),$$

dla $t \in \Omega$ oraz $u > 0$, skąd dostajemy, że $L^{p(\cdot)} = L^{\varphi_p}$. Na mocy przykładu 3.1.4 mamy

$$\varphi_q \ominus \varphi_p(t, u) = \frac{1}{r(t)}u^{r(t)}.$$

Zatem, stosując twierdzenie 3.2.8, otrzymujemy

$$M(L^{p(\cdot)}, L^{q(\cdot)}) = L^{r(\cdot)}.$$

□

3.3 Mnożniki punktowe pomiędzy przestrzeniami Calderóna–Łozanowskiego

W tym paragrafie zajmiemy się przestrzeniami Calderóna–Łozanowskiego będącymi uogólnieniami przestrzeni Orlicza. Problem opisu przestrzeni $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ został podjęty w pracy [39]. Autorzy wykazali między innymi, że dla dowolnej przestrzeni symetrycznej E oraz pary funkcji Younga φ, φ_1 spełniającej równoważność

$$(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1}\varphi_1^{-1} \approx \varphi^{-1} \tag{3.3.1}$$

dla odpowiednich argumentów zachodzi

$$M(E^{\varphi_1}, E^\varphi) = E^{\varphi\ominus\varphi_1}.$$

W dalszym ciągu uzasadnimy, że założenie równoważności (3.3.1) nie jest konieczne.

Lemat 3.3.1. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga oraz niech E będzie przestrzenią symetryczną. Załóżmy, że $b_\varphi < \infty$, $b_{\varphi_1} = \infty$ oraz $f_E(0^+) = 0$. Wówczas

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = \{0\}.$$

Dowód powyższego lematu przebiega podobnie jak dowód lematu 2.1.1. Założenie, że $f_E(0^+) = 0$ jest istotne, ponieważ biorąc $E = L^\infty$ oraz dowolne nietrywialne funkcje Younga φ, φ_1 mamy

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = M(L^\infty, L^\infty) = L^\infty.$$

Twierdzenie 3.3.2. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga oraz niech E będzie przestrzenią symetryczną. Jeżeli warunki $b_\varphi < \infty$, $b_{\varphi_1} = \infty$ oraz $f_E(0^+) = 0$ nie są równocześnie spełnione, to zachodzi równość

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi\ominus\varphi_1}.$$

Dowód. Ponieważ w dowodzie twierdzenia 2.1.7 nie korzystaliśmy w istotny sposób z faktu, że modular jest definiowany przez całkę, więc tę samą technikę możemy zastosować do wykazania niniejszego twierdzenia. Zilustrujemy to na przykładzie dowodu inkluzji.

$$E^{\varphi\ominus\varphi_1} \subset M(E^{\varphi_1}, E^\varphi). \tag{3.3.2}$$

Niech $f \in E^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz $g \in E^{\varphi_1}$ będą takie, że

$$\|f\|_{E_{\varphi\ominus\varphi_1}} \leqslant \frac{1}{2} \text{ oraz } \|g\|_{E_{\varphi_1}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Wykażemy, że $fg \in E^\varphi$ oraz $\|fg\|_{E_\varphi} \leqslant 1$. W tym celu wykorzystamy uogólnioną nierówność Younga, tj.

$$\varphi(us) \leqslant \varphi_1(s) + \varphi \ominus \varphi_1(u) \quad \text{dla } u, s \geqslant 0.$$

Stąd, na mocy zależności normowo-modularnej, mamy

$$I_\varphi(fg) = \|\varphi(f(t)g(t))\|_E \leqslant \|\varphi \ominus \varphi_1(f(t))\|_E + \|\varphi_1(g(t))\|_E \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Zatem $fg \in E^\varphi$ oraz

$$\|fg\|_{E_\varphi} \leqslant 1.$$

Wobec tego

$$\|fg\|_{E_\varphi} \leqslant 4 \|f\|_{E_{\varphi\ominus\varphi_1}} \|g\|_{E_\varphi}$$

dla dowolnych $f \in E^{\varphi\ominus\varphi_1}$ i $g \in E^{\varphi_1}$.

Dowód inkluzji $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \subset E_{\varphi\ominus\varphi_1}$ będzie przebiegał podobnie jak dowód zawierania $M(L^{\varphi_1}, L^\varphi) \subset L^{\varphi\ominus\varphi_1}$. Wystarczy wszystkie wystąpienia całki zastąpić normą $\|\cdot\|_E$, tak jak zostało zrobione to powyżej.

Uzasadnimy jedynie, że możemy skonstruować podział przestrzeni miary I na ciąg rozłącznych podzbiorów analogiczny do tego, jaki posłużył do dowodu nierówności (2.1.6). Ciąg ten będzie zależał od tego czy b_{φ_1} jest skończona oraz od wartości $f_E(0^+)$. Przypomnijmy, że funkcja fundamentalna przestrzeni E_{φ_1} wyraża się wzorem

$$f_{E_{\varphi_1}}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))}.$$

Niech $a > 1$. Rozważmy następujące przypadki.

(i) Niech $b_\varphi = b_{\varphi_1} = \infty$ i $f_E(0^+) = 0$. Wówczas zachodzi równość $f_{E_{\varphi_1}}(0^+) = 0$. Możemy zatem znaleźć $t_a > 0$ takie, że $\|\chi_A\|_{E_{\varphi_1}} \leqslant \frac{1}{a}$ dla dowolnego $A \subset I$ spełniającego $m(A) \leqslant t_a$. Ciąg zbiorów (A_n) dobieramy w taki sposób, aby $m(A_n) \leqslant t_a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $I = \bigcup A_n$.

(ii) Niech $b_{\varphi_1} < \infty$ i $f_E(0^+) = 0$. Wtedy bez straty ogólności można założyć, że $b_{\varphi_1} > 1$. Wówczas $f_{E_{\varphi_1}}(0^+) = \frac{1}{b_{\varphi_1}} < 1$, wobec czego istnieje $t_a > 0$ takie, że

$$\|\chi_A\|_{E_{\varphi_1}} \leqslant 1,$$

dla wszystkich $A \subset I$ spełniających $m(A) \leqslant t_a$. Ponownie znajdziemy ciąg zbiorów (A_n) taki, że $m(A_n) \leqslant t_a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $I = \bigcup A_n$.

(iii) Niech teraz $f_E(0^+) > 0$. Wówczas to zachodzi równość

$$f_{E_{\varphi_1}}(0^+) = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/f_E(0^+))}. \tag{3.3.3}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że wyrażenie (3.3.3) jest mniejsze niż 1 a następnie wybieramy ciąg (A_n) tak jak w przypadku (ii).

Podział ten pozwala nam powtórzyć konstrukcję z dowodu twierdzenia 2.1.7. □

3.4 Faktoryzacja przestrzeni Musielaka–Orlicza oraz Calderóna–Łozanowskiego

Wykorzystując wyniki z poprzednich sekcji udowodnimy równoważny warunek na faktoryzację pary przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego E_{φ_1} oraz E_φ. Ponadto podamy warunek dostateczny na faktoryzację pary przestrzeni Musielaka–Orlicza.

Zacznijmy od prostszego przypadku, czyli od faktoryzacji przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Podobnie jak dla przestrzeni Orlicza, warunek na faktoryzację dwóch przestrzeni z tej klasy wynika z [40, Corollary 6] oraz opisu przestrzeni mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Calderóna–Łozanowskiego (twierdzenie 3.3.2).

Twierdzenie 3.4.1. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Younga oraz niech E będzie przestrzenią symetryczną. Załóżmy ponadto, że warunki $b_\varphi < \infty$, $b_{\varphi_1} = \infty$ oraz $f_E(0^+) = 0$ nie są równocześnie spełnione. Wówczas E_{φ_1} faktoryzuje E_φ wtedy i tylko wtedy, gdy

i) równoważność $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$ jest spełniona dla wszystkich argumentów, w przypadku $I = [0, \infty)$,

ii) równoważność $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$ jest spełniona dla dużych argumentów, w przypadku $I = [0, 1]$.

Zajmiemy się teraz faktoryzacją przestrzeni Musielaka–Orlicza. Udowodnimy włożenie $L^\varphi \subset L^{\varphi_0} \odot L^{\varphi_1}$ dla przestrzeni Musielaka–Orlicza $L^\varphi, L^{\varphi_0}, L^{\varphi_1}$ nad nieskończoną przestrzenią miary. W przypadku bezatomowej, skończonej przestrzeni miary dowód jest analogiczny. Można wówczas osłabić założenia i przyjąć, że nierówność $\varphi_1^{-1}\varphi_0^{-1} \succ \varphi^{-1}$ zachodzi tylko dla dużych argumentów.

Lemat 3.4.2. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ). Jeżeli $\varphi_1^{-1}\varphi_0^{-1} \succ \varphi^{-1}$ oraz $\operatorname{supp} L^{\varphi_1} = \Omega$, to zachodzi inkluzja

$$L^\varphi \subset L^{\varphi_0} \odot L^{\varphi_1}.$$

Dowód. Jeżeli $\mu(\Omega_{\infty,\infty}) > 0$, to przez C oznaczymy stałą zawierania

$$L^\varphi[\Omega_{\infty,\infty}] \subset L^\infty(b_\varphi^{-1})[\Omega_{\infty,\infty}],$$

w przeciwnym wypadku niech $C = 1$. Oznaczmy $c := \min\{1, C\}$. Weźmy nieujemną funkcję $f \in L^\varphi$ taką, że $\|f\|_\varphi = \frac{2}{3c}$. Oznaczmy $y(t) := \varphi(t, f(t))$. Wtedy $y(t) < \infty$ μ–p.w., gdyż $f(t) \leqslant \frac{2}{3}b_\varphi(t)$. Zdefiniujmy dla $i = 0, 1$

$$f_i(t) := \begin{cases} \varphi_i^{-1}(t, y(t))\sqrt{\frac{f(t)}{\varphi_0^{-1}(t,y(t))\varphi_1^{-1}(t,y(t))}} & \text{gdy } t \in \operatorname{supp}(f) \\ 0 & \text{gdy } t \notin \operatorname{supp}(f) \end{cases}$$

Oczywiście $f = f_0 f_1$. Musimy wykazać, że $f_i \in L^{\varphi_i}$, dla $i = 0, 1$, oraz, że normy $\|f_i\|_{\varphi_i}$ są ograniczone przez stałą. Z założenia $\varphi_1^{-1}\varphi_0^{-1} \succ \varphi^{-1}$ istnieje $D > 0$ spełniające nierówność

$$D\varphi_1^{-1}(t, u)\varphi_0^{-1}(t, u) \geqslant \varphi^{-1}(t, u) \text{ dla } (t, u) \in \Omega \times [0, \infty).$$

W szczególności, kładąc $u = 0$, otrzymujemy

$$\frac{a_\varphi(t)}{a_{\varphi_0}(t)a_{\varphi_1}(t)} \leqslant D.$$

Twierdzimy, że

$$\varphi_i\left(t, \frac{f_i(t)}{\sqrt{D}}\right) \leqslant \varphi(t, f(t)). \tag{3.4.1}$$

Jeżeli $y(t) = 0$, to

$$f_i(t) = a_\varphi(t)\sqrt{\frac{f(t)}{a_{\varphi_0}(t)a_{\varphi_1}(t)}} \leqslant a_\varphi(t)\sqrt{\frac{a_\varphi(t)}{a_{\varphi_0}(t)a_{\varphi_1}(t)}} \leqslant a_\varphi(t)\sqrt{D},$$

skąd

$$\varphi_i\left(t, \frac{f_i(t)}{\sqrt{D}}\right) = 0.$$

W przypadku, gdy $y(t) > 0$ mamy

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \varphi_i^{-1}(t, y(t))\sqrt{\frac{f(t)}{\varphi_0^{-1}(t, y(t))\varphi_1^{-1}(t, y(t))}} \\ &\leqslant \varphi_i^{-1}(t, y(t))\sqrt{\frac{Df(t)}{\varphi^{-1}(t, y(t))}} = \varphi_i^{-1}(t, y(t))\sqrt{\frac{Df(t)}{f(t)}} = \varphi_i^{-1}(t, y(t))\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$\varphi_i\left(t, \frac{f_i(t)}{\sqrt{D}}\right) \leqslant \varphi_i(t, \varphi_i^{-1}(t, y(t))) = y(t) = \varphi(t, f(t)), \tag{3.4.2}$$

co dowodzi (3.4.1). Całkując obustronnie nierówność (3.4.2) mamy

$$I_{\varphi_i}\left(\frac{f_i}{\sqrt{D}}\right) \leqslant I_\varphi(f) \leqslant 1,$$

dla $i = 0, 1$. Wynika stąd, że

$$\|f_i\|_{\varphi_i} \leqslant \sqrt{D} \leqslant \sqrt{2Dc\,\|f\|_\varphi}.$$

Ostatecznie $f \in L^{\varphi_0} \odot L^{\varphi_1}$ oraz

$$\|f\|_{L^{\varphi_0}\odot L^{\varphi_1}} \leqslant 2Dc\,\|f\|_\varphi,$$

co kończy dowód. □

Przypomnijmy, że dla funkcji Musielaka–Orlicza φ, φ_1 uogólniona nierówność Younga implikuje, że

$$\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \prec \varphi^{-1}$$

(patrz np. [39]).

Twierdzenie 3.4.3. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Musielaka–Orlicza nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) oraz niech $\operatorname{supp}(L^{\varphi_1}) = \Omega$. Jeżeli $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$, to L^{φ_1} faktoryzuje L^{φ}.

Dowód. Włożenie
$$L^{\varphi} \subset L^{\varphi\ominus\varphi_1} \odot L^{\varphi_1}$$
wynika z lematu 3.4.2. Udowodnimy inkluzję przeciwną, tj.
$$L^{\varphi\ominus\varphi_1} \odot L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi}$$
Niech $f \in L^{\varphi\ominus\varphi_1}$ oraz $g \in L^{\varphi_1}$. Ponieważ $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi\ominus\varphi_1}$, więc
$$fg \in L^{\varphi}$$
oraz
$$\|fg\|_{\varphi} \leqslant \|f\|_M \|g\|_{\varphi_1} \leqslant c\|f\|_{\varphi\ominus\varphi_1} \|g\|_{\varphi_1},$$
co kończy dowód. □

Na koniec zauważmy, że warunek $\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \approx \varphi^{-1}$, w przeciwieństwie do przypadku przestrzeni Orlicza, nie jest konieczny.

Przykład 3.4.4. Niech $\Omega := [0, 1/2)$ z miarą Lebesgue'a. Zdefiniujmy następujące funkcje Musielaka–Orlicza
$$\varphi(t, u) := \max\{u - t, 0\},$$
$$\varphi_1(t, u) := u,$$
dla $t \in \Omega$ oraz $u \geqslant 0$. Łatwo zauważyć, że $L^{\varphi} = L^{\varphi_1} = L^1$. Co więcej
$$\varphi \ominus \varphi_1(t, u) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ \infty & \text{gdy } u > 1, \end{cases}$$
zatem $L^{\varphi\ominus\varphi_1} = L^{\infty}$. Otrzymujemy faktoryzację
$$L^{\varphi_1} \odot L^{\varphi\ominus\varphi_1} = L^{\varphi}.$$
Z drugiej strony
$$(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1}(t, u) = 1,\ \varphi^{-1}(t, u) = u + t,\ \varphi_1^{-1}(t, u) = u.$$
Mamy $\varphi_1^{-1}(t, u) \cdot (\varphi \ominus \varphi_1)^{-1}(t, u) = u$, wobec czego nie istnieje stała D taka, że
$$Du = D\varphi_1^{-1}(t, u)(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1}(t, u) \geqslant \varphi^{-1}(t, u) = u + t$$
dla $t \in \Omega$ oraz $u = 0$. Ostatecznie otrzymaliśmy, że
$$\varphi_1^{-1}(\varphi \ominus \varphi_1)^{-1} \not\approx \varphi^{-1}$$
mimo, że L^{φ_1} faktoryzuje L^{φ}.

Rozdział 4

Słaba zwartość w przestrzeniach funkcyjnych

Rozdział ten poświęcimy opisowi zbiorów słabo zwartych w przestrzeniach funkcyjnych. Przypomnijmy klasyczne twierdzenie Dunforda–Pettisa orzekające, że ograniczony zbiór $K \subset L^1[0,1]$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest on jednostajnie całkowalny. Najważniejszym osiągnięciem tego rozdziału jest wykazanie, że podobna charakteryzacja jest prawdziwa dla dowolnej funkcyjnej kraty Banacha, która jest 1–rozłącznie jednorodna. Dokładniej, wykażemy, że w przestrzeni X klasa zbiorów warunkowo słabo zwartych pokrywa się z klasą zbiorów X–jednostajnie całkowalnych wtedy i tylko wtedy, gdy X jest 1–rozłącznie jednorodna.

Ponadto zbadamy własności zbiorów X–jednostajnie całkowalnych. Udowodnimy, że dla kraty funkcyjnej X każdy X–jednostajnie całkowalny zbiór $K \subset X$ jest zbiorem Banacha–Saksa. Wynik ten jest uogólnieniem [24, Theorem 4.10]. Wykażemy także analog twierdzenia de la Vallée Poussina dla przestrzeni symetrycznych na $[0,1]$.

Twierdzenia dotyczące związku pomiędzy X–jednostajną całkowalnością a słabą zwartością wykorzystamy do opisu słabo zwartych operatorów mnożenia pomiędzy kratami funkcyjnymi.

W ostatniej sekcji scharakteryzujemy 1–rozłącznie jednorodne przestrzenie Orlicza i Lorentza na $[0,\infty)$. Ponadto zbadamy warunek Δ_0 na funkcję Younga, który pojawia się w kontekście 1–rozłącznie jednorodnych przestrzeni Orlicza.

4.1 Przestrzenie 1–rozłącznie jednorodne i jednostajna całkowalność

Definicja 4.1.1. Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha. Mówimy, że X jest **1–rozłącznie jednorodna** (ang. „1–disjointly homogeneous”, co będziemy skrótowo zapisywać 1–DH), gdy dla dowolnego semiznormalizowanego[1] ciągu funkcji o rozłącznych

[1] Ciąg $(f_n) \subset X$ nazywamy **semiznormalizowanym**, gdy dla pewnych stałych $A, B > 0$ zachodzi $A \leqslant \|f_n\|_X \leqslant B$ dla $n \in \mathbb{N}$.

nośnikach $(f_n) \subset X$ istnieje podciąg (f_{n_k}) równoważny kanonicznej bazie ℓ^1, tj. istnieją stałe $c, C > 0$ takie, że dla każdego $a = (a_k) \in \ell^1$ zachodzi

$$c \|a\|_1 \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{n_k} \right\|_X \leqslant C \|a\|_1 .$$

Przestrzenie 1–DH i ich uogólnienia p–DH dla $1 \leqslant p < \infty$ były przedmiotem intensywnych badań w ostatniej dekadzie, por. [5–7, 28–30]. Przykładami 1–rozłącznie jednorodnych funkcyjnych krat Banacha są między innymi przestrzenie Orlicza $L^{\varphi}[0,1]$, których funkcja Younga φ spełnia warunki $\varphi \in \Delta_2^{\infty}$ oraz $\varphi^* \in \Delta_0$ (definicja 4.4.2, patrz także [28, 52]) oraz przestrzenie Lorentza $L^{p,1}[0,1]$ (patrz [27, Theorem 5.1]).

Przestrzenie 1–DH były również rozważane w kontekście dodatniej własności Schura. Mówimy, że krata Banacha X ma **dodatnią własność Schura**, gdy każdy dodatni słabo zbieżny do zera ciąg jest również normowo zbieżny, patrz [77, 78]. Wnuk wykazał w [78, Theorem 7], że krata Banacha X jest 1–DH wtedy i tylko wtedy, gdy ma dodatnią własność Schura (patrz także [29, Proposition 4.9] oraz [71, Proposition 1.2]).

Ograniczony zbiór $K \subset L^1[0,1]$ nazywamy **jednostajnie całkowalnym**, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego zbioru $A \subset [0,1]$ spełniającego warunek $m(A) \leqslant \delta$ zachodzi

$$\sup_{f \in K} \int_A |f(t)| \mathrm{d}(t) = \sup_{f \in K} \|f \chi_A\|_1 < \varepsilon.$$

W przypadku funkcyjnych krat nad dowolną (niekoniecznie skończoną) przestrzenią miary wprowadzimy następujące uogólnienie pojęcia jednostajnej całkowalności

Definicja 4.1.2. Niech K będzie ograniczonym podzbiorem funkcyjnej kraty Banacha X. Mówimy, że K jest X**–jednostajnie całkowalny** (ang. „X–equi–integrable”), gdy dla dowolnego ciągu zbiorów mierzalnych (A_n) takiego, że $A_n \downarrow \emptyset$ zachodzi

$$\sup_{f \in K} \|f \chi_{A_n}\|_X \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie elementy zbioru X–jednostajnie całkowalnego są porządkowo ciągłe (por. fakt 1.1.4). Następujący lemat mówi, że powyższa definicja X–jednostajnej całkowalności pokrywa się z pojęciem jednostajnej całkowalności podzbioru przestrzeni $L^1[0,1]$.

Lemat 4.1.3. Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha nad skończoną przestrzenią miary Ω. Dla ograniczonego podzbioru $K \subset X$ następujące warunki są równoważne:

(i) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla zbioru $A \subset \Omega$ spełniającego $\mu(A) \leqslant \delta$ zachodzi

$$\sup_{f \in K} \|f \chi_A\|_X < \varepsilon.$$

(ii) Dla każdego ciągu zbiorów (A_n), $A_n \subset \Omega$ takiego, że $\mu(A_n) \to 0$ zachodzi

$$\sup_{f \in K} \|f \chi_{A_n}\|_X \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

(iii) Dla każdego ciągu zbiorów (A_n), $A_n \subset \Omega$ takiego, że $A_n \downarrow \emptyset$ zachodzi

$$\sup_{f \in K} \|f\chi_{A_n}\|_X \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Dowód. Dla bezatomowej i skończonej przestrzeni miary oraz ciągu jej mierzalnych podzbiorów (A_n) warunki $\mu(A_n) \to 0$ oraz $A_n \downarrow \emptyset$ są równoważne. Zatem implikacje $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ są oczywiste. Dowiedziemy jedynie, że $(iii) \implies (i)$. Załóżmy, że (i) nie jest spełnione. Istnieje wówczas $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $B_n \subset \Omega$ spełniający $\mu(B_n) < 1/2^n$ oraz

$$\sup_{f \in K} \|f\chi_{B_n}\|_X > \varepsilon.$$

Oznaczmy $A_n \coloneqq \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$. Wówczas $A_n \downarrow \emptyset$ oraz

$$\sup_{f \in K} \|f\chi_{A_n}\|_X > \varepsilon,$$

wobec czego (iii) nie jest spełnione. □

W powyższym lemacie założenie skończoności miary było istotne, ponieważ dla miar nieskończonych warunek $A_n \downarrow \emptyset$ nie implikuje zbieżności $\mu(A_n) \to 0$, tj. nie zachodzi implikacja $(ii) \implies (iii)$.

Wiadomo, że w dowolnej kracie Banacha X każdy zbiór X–jednostajnie całkowalny jest również relatywnie słabo zwarty [61, Proposition 3.6.5.]. Dunford oraz Pettis w [25, Theorem 3.2.1.] dowiedli, że dla podzbiorów $L^1[0,1]$ przeciwna implikacja również jest prawdziwa, tj. $K \subset L^1[0,1]$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest on jednostajnie całkowalny. Kilka lat wcześniej Orlicz w [68] udowodnił, że dla N–funkcji φ takiej, że $\varphi^* \in \Delta_0$ (warunek ten zostanie dokładnie omówiony w następnej sekcji, patrz definicja 4.4.2) $K \subset L^\varphi[0,1]$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest on L^φ–jednostajnie całkowalny (przypomnijmy, że funkcja Orlicza generująca L^1 nie jest N–funkcją). Twierdzenie to zostało uogólnione przez Alexopoulosa, który wykazał w [1], że założenie iż φ jest N-funkcją można pominąć.

Definicja 4.1.4. Niech X będzie kratą Banacha. Mówimy, że X spełnia **kryterium Dunforda–Pettisa**, gdy każdy relatywnie słabo zwarty podzbiór X jest X–jednostajnie całkowalny (patrz [8]).

Zauważmy, że żadna nieskończenie wymiarowa przestrzeń refleksywna nie może spełniać kryterium Dunforda–Pettisa. Wynika to z faktu, że każdy ograniczony zbiór w refleksywnej kracie Banacha X jest relatywnie słabo zwarty, natomiast kula $B(X)$ nigdy nie jest zbiorem X–jednostajnie całkowalnym.

Zaczniemy od wykazania, że w przypadku funkcyjnych krat Banacha X–jednostajna całkowalność zbioru implikuje własność Banacha–Saksa.

Definicja 4.1.5. Niech K będzie ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Mówimy, że K jest **zbiorem Banacha–Saksa**, gdy dla każdego ciągu $(f_n) \subset K$ istnieje $f \in X$ oraz podciąg (f_{n_k}) taki, że ciąg średnich arytmetycznych dowolnego podciągu $\left(f_{n_{k_l}}\right)$ wyrwanego z (f_{n_k}) jest zbieżny do f, tj. ciąg

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f_{n_{k_l}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżny do f w normie X.

Przypomnijmy, że każdy zbiór Banacha–Saksa jest słabo zwarty. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem wyniku Doddsa, Semenova i Sukocheva, którzy w [24, Theorem 4.10] wykazali, że jeżeli X jest ośrodkową przestrzenią symetryczną na $[0,\infty)$, ciąg $(x_n) \subset X$ jest słabo zbieżny do zera oraz $\{x_n\}$ jest X–jednostajnie całkowalny, to (x_n) posiada podciąg, którego średnie są zbieżne.

Twierdzenie 4.1.6. Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha taką, że $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X$. Jeżeli zbiór ograniczony $K \subset X$ jest X–jednostajnie całkowalny, to K jest zbiorem Banacha–Saksa w X.

Dowód. Niech $K \subset X$ będzie ograniczonym X–jednostajnie całkowalnym zbiorem oraz niech $(f_n) \subset K$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $K \subset B(X)$. Z X–jednostajnej całkowalności zbioru K wynika, że funkcje f_n są porządkowo ciągłe dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem na mocy twierdzenia Daya–Lennarda [20, Theorem 3.1] wnosimy, że istnieje funkcja $f \in X$ oraz podciąg (f_{n_k}) ciągu (f_n) taki, że każdy kolejny podciąg $(f_{n_{k_j}})$ spełnia

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{n_{k_j}}(t) \to f(t) \text{ dla } \mu\text{–p.w. } t \in \Omega \text{ przy } n \to \infty.$$

Zaczniemy od wykazania, że $f \in X_a$. Niech $h \in B(X')$ oraz niech $A \subset \Omega$ będzie zbiorem mierzalnym. Mamy, na mocy lematu Fatou

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega h(t)\chi_A(t)f(t)\mathrm{d}\mu(t)\right| &\leqslant \int_\Omega |h(t)\chi_A(t)f(t)|\,\mathrm{d}\mu(t)\\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \left|h(t)\chi_A(t)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{n_k}(t)\right|\mathrm{d}\mu(t)\\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega |h(t)\chi_A(t)f_{n_k}(t)|\,\mathrm{d}\mu(t)\\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|f_{n_k}\chi_A\|_X\,\|h\|_{X'}\\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{g\in K}\|g\chi_A\|_X = \sup_{g\in K}\|g\chi_A\|_X\,.
\end{aligned}$$

Stąd, z własności Fatou przestrzeni X, wobec dowolności wyboru $h \in B(X')$, wynika, że

$$\|f\chi_A\|_X \leqslant \sup_{g\in K} \|g\chi_A\|_X$$

dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$. Na mocy X–jednostajnej całkowalności zbioru K otrzymujemy, że $f \in X_a$.

Niech $(f_{n_{k_i}})$ będzie dowolnym podciągiem ciągu (f_{n_k}). Oznaczmy ciąg jego średnich przez (g_n), tj.

$$g_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{n_{k_i}} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnimy teraz, że ciąg (g_n) jest zbieżny w normie do elementu f. Ponieważ Ω jest σ-skończona, więc istnieje ciąg zbiorów miary skończonej (Ω_k) taki, że $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Oznaczmy

$$B_n := \bigcup_{k>n} \Omega_k.$$

Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Ponieważ zbiór K jest X–jednostajnie całkowalny, funkcja f jest porządkowa ciągła oraz $B_n \downarrow \emptyset$, więc istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że równocześnie

$$\|f\chi_{B_i}\|_X \leqslant \varepsilon \ \text{ i } \ \sup_{g\in K}\|g\chi_{B_i}\|_X \leqslant \varepsilon.$$

Oznaczmy $B := B_i$. Zauważmy, że $\mu(B') < \infty$ (gdzie $B' = \Omega \setminus B$). Na mocy lematu 4.1.3 istnieje $\delta > 0$ taka, że dla zbioru $A \subset B'$ spełniającego $\mu(A) < \delta$ zachodzą nierówności

$$\|f\chi_A\|_X \leqslant \varepsilon \ \text{ i } \ \sup_{g\in K}\|g\chi_A\|_X \leqslant \varepsilon.$$

W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset B'$ spełniającego $\mu(A) < \delta$ otrzymujemy

$$\|g_n\chi_A\|_X \leqslant \varepsilon \ \text{ i } \ \|g_n\chi_B\|_X \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stosując twierdzenie Jegorowa wnioskujemy, że istnieje zbiór $C \subset B'$ taki, że $\mu(B' \setminus C) \leqslant \delta$ oraz ciąg (g_n) jest jednostajnie zbieżny do f na zbiorze C. Niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$\|(f-g_n)\chi_C\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\chi_C\|_X}$$

dla każdego $n \geqslant N$. Zatem

$$\begin{aligned}\|f-g_n\|_X &\leqslant \|(f-g_n)\chi_C\|_X + \left\|(f-g_n)\chi_{B'\setminus C}\right\|_X + \|(f-g_n)\chi_B\|_X\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\|\chi_C\|_X}\|\chi_C\|_X + \left\|f\chi_{B'\setminus C}\right\|_X + \left\|g_n\chi_{B'\setminus C}\right\|_X + \|f\chi_B\|_X + \|g_n\chi_B\|_X\\ &\leqslant 5\varepsilon\end{aligned}$$

dla wszystkich $n \geqslant N$, co kończy dowód. □

Z twierdzeniem Dunforda–Pettisa powiązane jest twierdzenie de la Vallée Poussina, które podaje równoważny opis zbiorów jednostajnie całkowalnych. Orzeka ono, że zbiór $K \subset L^1$ jest jednostajnie całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnąca, wypukła funkcja $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka, że $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$ oraz

$$\sup_{f\in K} \int_0^1 \varphi(|f(t)|)\mathrm{d}t < \infty.$$

Podobny warunek pojawia się w teorii przestrzeni symetrycznych w kontekście silnych zanurzeń (patrz np. [4, Lemma 4]). Następujące twierdzenie podaje charakteryzację zbiorów X–jednostajnie całkowalnych w symetrycznych przestrzeniach nad $[0,1]$ analogiczną do tej zawartej w twierdzeniu de la Vallée Poussina.

Twierdzenie 4.1.7. Niech K będzie zbiorem ograniczonym zawartym w przestrzeni symetrycznej X nad $I = [0,1]$ takiej, że $X_a \neq \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) K jest X–jednostajnie całkowalny;

(ii) $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \sup\limits_{f\in K} \left\| f\chi_{\{|f|>\gamma\}} \right\|_X = 0$;

(iii) Istnieje rosnąca i wypukła funkcja $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka, że $\varphi(0) = 0$ oraz $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$, dla której $\sup\limits_{f\in K} \|\varphi(|f|)\|_X < \infty$.

Dowód. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $\delta > 0$ taką, że dla każdego zbioru $A \subset \Omega$ spełniającego $m(A) \leqslant \delta$ zachodzi

$$\sup_{f\in K} \|f\chi_A\|_X \leqslant \varepsilon.$$

Ponieważ X jest przestrzenią symetryczną nad $[0,1]$, więc $X \subset L^1$. Niech C będzie stałą tego zawierania. Z nierówności Czebyszewa wynika, że

$$m(\{|f| > \gamma\}) \leqslant \frac{\|f\|_1}{\gamma} \leqslant C\frac{\|f\|_X}{\gamma} \leqslant \delta$$

dla każdego $f \in K$ oraz $\gamma > 0$. Zatem

$$\lim_{\gamma\to\infty} \sup_{f\in K} \left\| f\chi_{\{|f|>\gamma\}} \right\|_X = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia wynika, że istnieje $\gamma_0 > 0$ taka, że

$$\sup_{f\in K} \left\| f\chi_{\{|f|>\gamma_0\}} \right\|_X \leqslant \varepsilon.$$

Niech (A_n) będzie ciągiem zbiorów miary dodatniej takim, że $A_n \downarrow \emptyset$. Ponieważ $X_a \neq \{0\}$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|\chi_{A_n}\|_X < \frac{\varepsilon}{\gamma_0}$$

dla każdego $n \geqslant N$. Wobec tego

$$\|f\chi_{A_n}\|_X \leqslant \left\|f\chi_{\{|f|<\gamma_0\}\cap A_n}\right\|_X + \left\|f\chi_{\{|f|>\gamma_0\}\cap A_n}\right\|_X \leqslant \gamma_0 \|\chi_{A_n}\|_E + \varepsilon = 2\varepsilon$$

dla każdego $f \in K$ oraz wszystkich $n \geqslant N$, co oznacza, że K jest zbiorem X–jednostajnie całkowalnym.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. Obierzmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$, więc istnieje stała $u_\varepsilon > 0$ taka, że

$$u \leqslant \varepsilon\varphi(u) \text{ dla } u \geqslant u_\varepsilon. \tag{4.1.1}$$

Oznaczmy $M := \sup\limits_{f\in K} \|\varphi(|f|)\|_X$. Wtedy dla każdego $f \in K$ mamy

$$\|f\chi_{\{|f|>u_\varepsilon\}}\|_X \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(|f|)\chi_{\{|f|>u_\varepsilon\}}\|_X \leqslant \varepsilon \sup_{f\in K} \|\varphi(|f|)\|_X \leqslant M\varepsilon,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z (4.1.1).

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Niech $u_0 = 0$. Dla $n \geqslant 1$ wybierzemy $u_n > 0$ takie, że

$$\sup_{f\in K} \left\|f\chi_{\{|f|>u_n\}}\right\|_X \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

oraz $u_{n+1} \geqslant 2u_n$. Zdefiniujemy funkcję

$$\varphi(u) := \sum_{n=1}^{\infty}(u - u_n)_+.$$

Wtedy φ jest funkcją wypukłą, rosnącą taką, że $\varphi(0) = 0$. Wykażemy, że zachodzi równość

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty. \tag{4.1.2}$$

Dla $u \in [u_n, u_{n+1})$ mamy

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{n}(u - u_k)_+ = nu - \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant nu - 2u_n,$$

co oznacza, że

$$\frac{\varphi(u)}{u} \geqslant n - 2\frac{u_n}{u} \geqslant n - 2,$$

skąd bezpośrednio wnioskujemy równość (4.1.2).
Pozostało wykazać, że

$$\sup_{f\in K} \|\varphi(|f|)\|_X < \infty.$$

Dla każdego $f \in K$ mamy

$$\varphi(|f|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f| \chi_{\{|f|>u_n\}},$$

wobec czego

$$\|\varphi(|f|)\|_X \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\| f \chi_{\{|f|>u_n\}} \right\|_X \leqslant \frac{\pi^2}{6},$$

co kończy dowód. □

Uwaga 4.1.8. Podobna charakteryzacja zbiorów X–jednostajnie całkowalnych nie jest możliwa dla przestrzeni symetrycznych nad $I = [0, \infty)$. Istotnie, weźmy dowolną rosnącą funkcję $\varphi \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ oraz oznaczmy zbiór

$$K := \{\chi_{[n,n+1)} \colon n \in \mathbb{N}\} \subset X.$$

Zbiór K jest ograniczony, ale nie jest X–jednostajnie całkowalny. Z drugiej strony, mamy

$$\sup_{f \in K} \|\varphi(|f|)\|_X = \varphi(1) \left\| \chi_{[0,1)} \right\|_X < \infty.$$

4.2 Słaba zwartość w przestrzeniach 1–rozłącznie jednorodnych

Do dowodu głównego twierdzenie tego rozdziału będziemy potrzebować następujących lematów. Drugi z nich jest uogólnieniem [1, Lemma 2.6].

Lemat 4.2.1 (Lemma 2.7, [1])**.** Niech X będzie przestrzenią Banacha, $(x_n) \subset X$ ciągiem słabo zbieżnym do zera oraz niech $(x_n^*) \subset X^*$ będzie ciągiem słabo* zbieżnym do zera. Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje rosnący ciąg $(k_i) \subset \mathbb{N}$ taki, że

$$\sum_{j \neq i} \left| \left\langle x_{n_i}, x_{n_j}^* \right\rangle \right| < \varepsilon \text{ dla } i \in \mathbb{N}.$$

Lemat 4.2.2. Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha. Jeżeli zbiór ograniczony $K \subset X$ nie jest X–jednostajnie całkowalny, to istnieje ciąg $(f_n) \subset K$, liczba $\varepsilon > 0$ oraz ciąg rozłącznych i mierzalnych zbiorów (A_n), $A_n \subset \Omega$ takich, że

$$\|f_n \chi_{A_n}\|_X > \varepsilon \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Załóżmy, że $K \subset X$ nie jest zbiorem X–jednostajnie całkowalnym. Wówczas dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz dla pewnego ciągu zbiorów (B_n) takiego, że $B_n \downarrow \emptyset$, istnieje ciąg elementów $(f_n) \subset K$ spełniający

$$\|f_n \chi_{B_n}\|_X \geqslant \varepsilon,$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $n_0 = 1$. Z własności Fatou przestrzeni X wynika, że możemy znaleźć $n_1 > n_0$ takie, że

$$\left\| f_{n_0} \chi_{B_{n_0} \setminus B_{n_1}} \right\|_X \geqslant \varepsilon/2.$$

Kontynuujemy tę procedurę indukcyjnie, tj. mając wybrane n_k znajdujemy $n_{k+1} > n_k$ takie, że

$$\left\| f_{n_k} \chi_{B_{n_k} \setminus B_{n_{k+1}}} \right\|_X \geqslant \varepsilon/2.$$

Oznaczmy $A_k \coloneqq B_{n_k} \setminus B_{n_{k+1}}$. Wówczas dla $k \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\| f_{n_k} \chi_{A_k} \|_X \geqslant \varepsilon/2,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.2.3. Funkcyjna krata Banacha X spełnia kryterium Dunforda–Pettisa wtedy i tylko wtedy, gdy X jest 1–rozłącznie jednorodna.

Dowód. Zauważmy, że jeżeli X spełnia kryterium Dunforda–Pettisa lub jest 1–DH, to $X \in (OC)$. Możemy zatem, bez straty ogólności, przyjąć, że $X \in (OC)$.

(*Dostateczność*). Załóżmy, że X nie jest 1–DH. Wówczas istnieje znormalizowany ciąg $(f_n) \subset X$ funkcji o rozłącznych nośnikach, którego żaden podciąg nie jest równoważny bazie kanonicznej ℓ^1. Z twierdzenia Rosenthala (patrz [72, The Main Theorem]) wynika, że ciąg (f_n) zawiera podciąg (f_{n_k}), który jest słabym ciągiem Cauchy'ego, tj. dla dowolnego $x^* \in X^*$ ciąg $\langle f_{n_k}, x^* \rangle$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zaczniemy od wykazania, że jest on słabo zbieżny do zera. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją $g \in X'$ oraz $a \neq 0$ takie, że

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega g(t) f_{n_k}(t) \mathrm{d}\mu(t) = a.$$

Oznaczmy $A \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{supp}(f_{n_{2k}})$. Dla $h \coloneqq g\chi_A \in X'$ mamy

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega h(t) f_{n_{2k}}(t) \mathrm{d}\mu(t) = a \quad \text{i} \quad \int_\Omega h(t) f_{n_{2k+1}}(t) \mathrm{d}\mu(t) = 0.$$

Zatem ciąg liczbowy $(\int_\Omega h(t) f_{n_k}(t) \mathrm{d}\mu(t))_{k \in \mathbb{N}}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego, co jest sprzeczne z tym, że (f_{n_k}) jest słabym ciągiem Cauchy'ego. Wobec tego (f_{n_k}) jest słabo zbieżny do zera. W szczególności zbiór $K = \{f_{n_k}\}$ jest słabo zwarty. Wykażemy, że zbiór K nie jest X–jednostajnie całkowalny. Oznaczmy

$$A_i \coloneqq \bigcup_{k=i}^{\infty} \operatorname{supp}(f_{n_k}).$$

Wówczas $A_i \downarrow \emptyset$ oraz

$$\sup_{f \in K} \| f \chi_{A_i} \|_X \geqslant \| f_{n_i} \chi_{A_i} \|_X = \| f_{n_i} \|_X = 1,$$

co dowodzi, że X nie spełnia kryterium Dunforda–Pettisa.

(*Konieczność*). Niech $K \subset X$ będzie dowolnym słabo zwartym podzbiorem, który nie jest X–jednostajnie całkowalny. Wybierzmy ciąg $(g_m) \subset K$, który nie jest X–jednostajnie całkowalny. Ponieważ K jest słabo zwarty, więc istnieje podciąg (g_{m_n}) słabo zbieżny do pewnego $g \in X$. Oznaczmy

$$f_n := g_{m_n} - g.$$

Wówczas ciąg (f_n) jest słabo zbieżny do zera. Ponadto zbiór $\{f_n\}$ nie jest X–jednostajnie całkowalny. Wynika to z braku X–jednostajnej całkowalności zbioru $\{g_{m_n}\}$ oraz porządkowej ciągłości funkcji g. Na mocy lematu 4.2.2 istnieje $\varepsilon > 0$ oraz ciąg parami rozłącznych, mierzalnych zbiorów (A_k) taki, że dla pewnego podciągu (f_{n_k}) ciągu (f_n) oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\|f_{n_k}\chi_{A_k}\|_X > \varepsilon.$$

Ponieważ X jest 1–DH zatem istnieje dalszy podciąg $(f_{n_{k_l}}\chi_{A_{k_l}})$ ciągu $(f_{n_k}\chi_{A_k})$ równoważny bazie kanonicznej przestrzeni ℓ^1. Oznaczmy $w_l := f_{n_{k_l}}\chi_{A_{k_l}}$. Wykażemy teraz istnienie $h \in X'$ takiego, że

$$\left\langle \sum_{l=0}^{\infty} a_l w_l, h \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \text{ dla } a \in \ell^1. \tag{4.2.1}$$

Niech $U = [w_l]$ będzie domkniętą podprzestrzenią w X rozpiętą przez ciąg (w_l) oraz niech $T\colon U \to \ell^1$ będzie izomorfizmem takim, że $T(w_l) = e_l$ dla $l \in \mathbb{N}$. Weźmy $y^* \in \ell^\infty$ tak, aby $\langle a, y^*\rangle = \sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l$ dla dowolnego $a \in \ell^1$. Oznaczmy $h_U^* := T^*y^* \in U^*$. Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że istnieje $h^* \in X^*$ taki, że $h^*_{|U} = h_U^*$ i $\|h^*\|_{X^*} = \|h_U^*\|_{U^*}$. Oczywiście

$$\left\langle \sum_{l=0}^{\infty} a_l w_l, h^* \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} a_l$$

dla dowolnego $a \in \ell^1$, co dowodzi, że h^* ma pożądaną własność. Ponieważ $X \in (OC)$, więc $X^* = X'$. Wobec tego istnieje $h \in X'$ spełniający równość

$$\langle f, h^*\rangle = \int_\Omega f(t)h(t)\mathrm{d}\mu(t) \text{ dla } f \in X,$$

tym samym h spełnia (4.2.1).

Dla każdego $l \in \mathbb{N}$ oznaczmy $h_l := h\chi_{A_{k_l}}$ i niech h_l^* będzie funkcjonałem liniowym danym wzorem

$$\langle f, h_l^*\rangle = \int_\Omega f h_l(t)\mathrm{d}\mu(t) \text{ dla } f \in X.$$

Zauważmy, że dla $l \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left\langle f_{n_{k_l}}, h_l^* \right\rangle = \int_\Omega f_{n_{k_l}}(t)h_l(t)\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega f_{n_{k_l}}(t)h(t)\chi_{A_{k_l}}(t)\mathrm{d}\mu(t) = \langle w_l, h^*\rangle = 1.$$

Ponadto ciąg (h_l^*) jest słabo* zbieżny do zera, gdyż dla dowolnego $g \in X$ mamy

$$\left|\int_\Omega g(t)h_l(t)\mathrm{d}\mu(t)\right| = \left|\int_{A_{k_l}} g(t)h_l(t)\mathrm{d}\mu(t)\right| \leqslant \left\|g\chi_{A_{k_l}}\right\|_X \|h_l\|_{X'} \leqslant \left\|g\chi_{A_{k_l}}\right\|_X \|h\|_{X'}.$$

Porządkowa ciągłość X implikuje, że $\left\|g\chi_{A_{k_l}}\right\|_X \to 0$, a więc także $\langle g, h_l^*\rangle \to 0$.

Na mocy lematu 4.2.1 istnieje rosnący ciąg $(l_j) \subset \mathbb{N}$ taki, że dla $j \neq i \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{j\neq i}\left|\left\langle f_{n_{k_{l_i}}}, h_{l_j}^*\right\rangle\right| < \frac{1}{2}.$$

Dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f_{n_{k_{l_i}}}, h^*\right\rangle\right| &= \left|\left\langle f_{n_{k_{l_i}}}, \sum_{j=1}^{\infty} h_{l_j}^*\right\rangle\right| \\ &\geqslant \left|\left\langle f_{n_{k_{l_i}}}, h_{l_i}^*\right\rangle\right| - \sum_{j\neq i}\left|\left\langle f_{n_{k_{l_i}}}, h_{l_j}^*\right\rangle\right| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Zatem (f_n) nie jest słabo zbieżny do zera, co jest sprzeczne z założeniem i tym samym kończy dowód. □

4.3 Słaba zwartość operatorów mnożenia punktowego

Definicja 4.3.1. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha oraz niech $T\colon X \to Y$ będzie ciągłym operatorem liniowym. Mówimy, że T jest **operatorem słabo zwartym**, gdy $TB(X)$ jest zbiorem relatywnie słabo zwartym w przestrzeni Y.

Lemat 4.3.2. Niech X oraz Y będą funkcyjnymi kratami Banacha nad Ω. Jeżeli $f \in M(X,Y)_a$, to $M_f\colon X \to Y$ jest operatorem słabo zwartym.

Dowód. Wykażemy, że zbiór $M_f B(X)$ jest Y–jednostajnie całkowalny. Niech (A_n) będzie ciągiem mierzalnych zbiorów takim, że $A_n \downarrow \emptyset$. Mamy

$$\sup_{h\in M_f B(X)} \|h\chi_{A_n}\|_Y = \sup_{g\in B(X)} \|fg\chi_{A_n}\|_Y = \|f\chi_{A_n}\|_M \to 0 \text{ przy } n \to \infty,$$

co oznacza, że zbiór $M_f B(X)$ jest Y–jednostajnie całkowalny. □

Jeżeli przestrzeń Y spełnia kryterium Dunfforda-Pettisa, to okazuje się, że porządkowa ciągłość $f \in M(X,Y)$ jest także konieczna dla słabej zwartości operatora M_f.

Twierdzenie 4.3.3. Niech X oraz Y będą funkcyjnymi kratami Banacha nad Ω, przy czym Y jest 1–rozłącznie jednorodna. Dla dowolnego $f \in M(X,Y)$ operator $M_f\colon X \to Y$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in M(X,Y)_a$.

Dowód. Słaba zwartość operatora M_f oznacza, że zbiór $M_f B(X)$ jest relatywnie słabo zwarty. Z twierdzenia 4.2.3 wynika, że zbiór $M_f B(X)$ jest Y–jednostajnie całkowalny. Niech (A_n) będzie ciągiem mierzalnych zbiorów takim, że $A_n \downarrow \emptyset$. Z Y–jednostajnej całkowalności zbioru $M_f B(X)$ wynika, że

$$\|f\chi_{A_n}\|_M = \sup_{g\in B(X)} \|fg\chi_{A_n}\|_Y \to 0 \text{ przy } n \to \infty.$$

Zatem $f \in M(X,Y)_a$. □

Następne dwa przykłady pokazują, że założenia twierdzenia 4.3.3 są istotne. Oczywiście, w przypadku, gdy jedna z przestrzeni X, Y jest refleksywna, wówczas każdy operator jest słabo zwarty. W szczególności założenie $f \in M(X,Y)_a$ nie jest konieczne dla słabej zwartości operatora $M_f \colon X \to Y$. W przykładzie 4.3.5 wskażemy konkretny przykład mnożnika, który nie jest słabo zwarty.

Przykład 4.3.4. Niech $1 < p < q \leqslant \infty$. Na mocy przykładu 1.5.2, mamy

$$M(L^p, L^{p,q}) = L^\infty.$$

Zatem $M(L^p, L^{p,q})_a = \{0\}$. Z drugiej strony na mocy refleksywności przestrzeni L^p każdy operator mnożenia M_f jest słabo zwarty mimo, że jego symbol nie jest porządkowo ciągły.

Przykład 4.3.5. Niech $1 < p < q < \infty$. Przypomnijmy, że

$$M(L^{p,\infty}[0,1], L^{q,\infty}[0,1]) = L^{r,\infty}[0,1],$$

gdzie $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ (porównaj przykład 1.5.2). Weźmy $f(t) = t^{-1/r}$, wówczas mamy, że $f \in M(L^{p,\infty}[0,1], L^{q,\infty}[0,1])$. Zauważmy, że dla dowolnego $0 < \varepsilon < 1$

$$\left\|f\chi_{[0,\varepsilon)}\right\|_{r,\infty} = 1,$$

wobec czego f nie jest porządkowo ciągła. Dowiedziemy, że operator M_f nie jest słabo zwarty. Przez (r_n) oznaczmy ciąg funkcji Rademachera, tj.

$$r_n(t) \coloneqq \operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi t)) \text{ dla } t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Niech $g(t) = t^{-1/p}$, wtedy $g \in L^{p,\infty}$. Wykażemy, że obraz ciągu $(gr_n) \subset L^{p,\infty}$, tj. ciąg $(fgr_n) \subset L^{q,\infty}$, nie posiada podciągu słabo zbieżnego, co oznacza, że M_f nie jest słabo zwarty. Aby to udowodnić pokażemy, że dla dowolnego $x \in (L^{q,\infty})'$, zachodzi

$$\langle fgr_n, x\rangle = \int_\Omega f(t)g(t)r_n(t)x(t)\mathrm{d}t \to 0 \text{ przy } n \to \infty, \tag{4.3.1}$$

oraz zbudujemy funkcjonał $x_1^* \in (L^{q,\infty})^*$ taki, że

$$\langle fgr_n, x_1^*\rangle = \frac{q}{q-1} \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.2}$$

Równość (4.3.1) dla dowolnego $x \in (L^{q,\infty})'$ oznacza, że jeżeli ciąg $(M_f g r_n)$ posiadałby podciąg słabo zbieżny, to byłby on słabo zbieżny do zera. Wynika to z faktu, że dual Köthego jest normujący (patrz [13, Theorem 2.9]). Z drugiej strony słaba zbieżność podciągu ciągu $(M_f g r_n)$ do zera jest niemożliwa, na mocy (4.3.2). Niech $0 \neq x \in (L^{q,\infty})'$ będzie dowolne. Na mocy [53, Proposition 2.c.10.], mamy

$$\langle fgr_n, x \rangle = \int_\Omega f(t)g(t)r_n(t)x(t)\mathrm{d}t \to 0 \text{ przy } n \to \infty.$$

Skonstruujemy teraz funkcjonał $x_1^* \in (L^{q,\infty})^*$, tj. taki, że

$$\langle fgr_n, x_1^* \rangle = \frac{q}{q-1} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Oznaczmy przez B–lim granicę Banacha, tj. funkcjonał liniowy i ciągły na ℓ^∞ taki, że dla każdego ciągu zbieżnego a mamy B–lim $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (więcej informacji o takich funkcjonałach można znaleźć w [13, Lemma 2.8]). Zdefiniujmy

$$x_1^*(h) \coloneqq \text{B–lim } 2^{n-n/q} \int_0^{2^{-n}} h(t)\mathrm{d}t \text{ dla } h \in L^{q,\infty}.$$

W celu udowodnienia ciągłości x_1^* wystarczy wykazać nierówność

$$2^{n-n/q} \int_0^{2^{-n}} h(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\|h\|_{q,\infty}}{1-1/q} \text{ dla } h \in L^{q,\infty}.$$

Na mocy definicji normy w $L^{q,\infty}$ mamy

$$h^*(t) \leqslant \|h\|_{q,\infty} t^{-1/q} \text{ dla } h \in L^{q,\infty}.$$

Stosując nierówność

$$\left| \int_0^s h(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^s h^*(t)\mathrm{d}t \text{ dla } t > 0$$

(patrz [13, Theorem 2.2, p. 44]) dla każdego $h \in L^{q,\infty}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| 2^{n-n/q} \int_0^{2^{-n}} h(t)\mathrm{d}t \right| &\leqslant 2^{n-n/q} \int_0^{2^{-n}} h^*(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|h\|_{q,\infty} 2^{n-n/q} \int_0^{2^{-n}} t^{-1/q}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\|h\|_{q,\infty}}{1-1/q}. \end{aligned}$$

Tym samym dowiedliśmy ciągłości funkcjonału x_1^* na $L^{q,\infty}$. Pozostało sprawdzić, że $\langle fgr_n, x_1^* \rangle = \frac{q}{q-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $fgr_n(t) = t^{-1/q} r_n(t)$, więc

$$2^{N-N/q} \int_0^{2^{-N}} fgr_n(t)\mathrm{d}t = 2^{N-N/q} \int_0^{2^{-N}} t^{-1/q}\mathrm{d}t = \frac{q}{q-1},$$

dla każdego $N > n$. Stąd $\langle fgr_n, x_1^* \rangle = \frac{q}{q-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co kończy dowód.

Wykorzystamy teraz twierdzenie 4.3.3 by otrzymać warunek na porządkową ciągłość przestrzeni mnożników punktowych. W ogólności problem opisu porządkowej ciągłości przestrzeni mnożników punktowych jest nietrywialny. Z jednej strony nawet dla „porządnych" przestrzeniami X, Y przestrzeń $M(X, Y)$ może nie mieć żadnych elementów porządkowo ciągłych. Na przykład zachodzi

$$M(L^2, L^2) = L^\infty.$$

Z drugiej strony przynajmniej jedna z przestrzenie może być skrajnie „zła" w aspekcie porządkowej ciągłości, a przestrzeń mnożników punktowych mimo to będzie porządkowo ciągła. Fenomen ten potwierdza równość

$$M(L^\infty, L^2) = L^2.$$

Wniosek 4.3.6. Niech X oraz Y będą funkcyjnymi kratami Banacha nad Ω. Jeżeli przestrzeń X jest refleksywna oraz Y jest 1–rozłącznie-jednorodna, to $M(X, Y) \in (OC)$.

Dowód. Niech $f \in M(X, Y)$. Z refleksywności przestrzeni X wynika, że operator mnożenia $M_f \colon X \to Y$ jest słabo zwarty. Na mocy twierdzenia 4.3.3 otrzymujemy, że f jest porządkowo ciągła. □

4.4 Symetryczne przestrzenie 1–rozłącznie jednorodne

Przykładami przestrzeni symetrycznych będących 1–rozłącznie jednorodnymi są przestrzenie Lorentza $L^{p,1}[0, 1]$ oraz przestrzenie Orlicza $L^\varphi[0, 1]$, których funkcja generująca spełnia warunki $\varphi \in \Delta_2^\infty$ i $\varphi^* \in \Delta_0$. Jednak brak w literaturze przykładów przestrzeni z tą własnością zdefiniowanych na półprostej.

Twierdzenie 4.4.1. Dla każdego $1 < p < \infty$ przestrzeń $(L^{p,1} \cap L^1)[0, \infty)$ jest 1–rozłącznie jednorodna.

Dowód. Oznaczymy $E = (L^{p,1} \cap L^1)[0, \infty)$. Niech $(f_n) \subset E$ będzie znormalizowanym ciągiem funkcji o rozłącznych nośnikach. Wykażemy, że istnieje podciąg (f_{n_k}) ciągu (f_n) równoważny bazie kanonicznej przestrzeni ℓ^1. Rozważymy dwa przypadki. Załóżmy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\|f_{n_k}\|_1 > \delta$ na pewnym nieskończonym podciągu (f_{n_k}). Wówczas, dla dowolnego $a = (a_k) \in l^1$, zachodzi

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| = \sum_{k=1}^\infty \|a_k f_{n_k}\|_E \geqslant \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k f_{n_k} \right\|_E \geqslant \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k f_{n_k} \right\|_1 \geqslant \delta \sum_{k=1}^\infty |a_k|.$$

Oznacza to, że (f_{n_k}) jest równoważny bazie kanonicznej przestrzeni ℓ^1. Załóżmy teraz, że $\|f_n\|_1 \to 0$ przy $n \to \infty$. Istnieje zatem $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\|f_n\|_{p,1} = 1$ dla $n > N$, gdyż $\|f_n\|_{L^{p,1} \cap L^1} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\|f_n\|_{p,1} = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Twierdzimy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\| f_n \chi_{\{f_n > k\}} \right\|_{p,1} \geqslant 1/2. \tag{4.4.1}$$

Przypuśćmy, że nierówność (4.4.1) nie jest spełniona. Istnieje wówczas k_0 takie, że

$$\left\|f_n\chi_{\{f_n>k_0\}}\right\|_{p,1} < 1/2 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd wynika, że

$$\left\|f_n\chi_{\{f_n\leqslant k_0\}}\right\|_{p,1} \geqslant 1/2 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem, na mocy nierówności Höldera, zachodzi

$$1/2 \leqslant \left\|f_n\chi_{\{f_n\leqslant k_0\}}\right\|_{p,1} = \int_0^{k_0} d_{f_n}^{1/p}(t)\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{k_0} d_{f_n}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} k_0^{1/p'}.$$

Wobec tego

$$\|f_n\|_1 \geqslant \frac{1}{2^p k_0^{p/p'}},$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $\|f_n\|_1 \to 0$. Tym samym wykazaliśmy nierówność (4.4.1).

Ponieważ $\|f_n\|_{p,1} = 1$, więc istnieje nieskończony ciąg indeksów (n_k), dla którego spełnione są warunki

- $m(\{f_{n_k} > k\}) \to 0$ przy $k \to \infty$;
- $\left\|f_{n_k}\chi_{\{f_{n_k}>k\}}\right\|_{p,1} \geqslant 1/2$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Możemy więc wybrać kolejny podciąg $(f_{n_{k_i}})$ taki, że

$$m\left(\left\{f_{n_{k_i}} > k_i\right\}\right) < \frac{1}{2^i} \text{ dla } \ i \in \mathbb{N}.$$

Zdefiniujmy ciąg funkcji $(g_i) \subset E$ wzorem

$$g_i(t) := \left[f_{n_{k_i}}\chi_{\{f_{n_{k_i}}>k_i\}}\right]^* \left(t - 1/2^i\right)\chi_{[1/2^i,\infty)}(t).$$

Zauważmy, że dla $i \in \mathbb{N}$ funkcja g_i jest równomierzalna z $f_{n_{k_i}}\chi_{\{f_{n_{k_i}}>k_i\}}$. Ponadto mamy

$$\operatorname{supp}(g_i) \subset \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i+1}}\right) \text{ dla } i \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że ciąg (g_i) jest semiznormalizowanym ciągiem funkcji o rozłącznych nośnikach oraz $(g_i) \subset L^{p,1}[0,1]$. Ponieważ przestrzeń $L^{p,1}[0,1]$ jest 1–rozłącznie jednorodna (patrz [27, Theorem 5.1]), więc istnieje podciąg ciągu (g_i) równoważny bazie l^1. Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg (g_i) jest równoważny bazie l^1. Zatem istnieje $\eta > 0$ taka, że dla dowolnego $a = (a_i) \in l^1$ mamy

$$\eta\sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_i g_i\right\|_{L^{p,1}[0,1]} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_i f_{n_{k_i}}\chi_{\{f_{n_{k_i}}>k_i\}}\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_i f_{n_{k_i}}\right\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|,$$

co kończy dowód. □

Astashkin, Kalton oraz Sukochev w [8] dowiedli, że porządkowo ciągła przestrzeń Orlicza $L^\varphi[0,1]$ spełnia kryterium Dunforda–Pettisa wtedy i tylko wtedy, gdy dopełniająca funkcja Younga φ^* spełnia warunek Δ_0.

Definicja 4.4.2. Niech φ będzie funkcją Younga. Mówimy, że φ spełnia **warunek** Δ_0, gdy istnieje $\lambda > 1$ taka, że

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)} = \infty. \tag{4.4.2}$$

W przeciwieństwie do warunku Δ_2 powyższej definicji nie możemy równoważnie sformułować przyjmując, że równość (4.4.2) jest spełniona dla każdego $\lambda > 1$, co potwierdza [46, Example 7]. Z drugiej strony warunek Δ_0 możemy traktować jako silne zaprzeczenie warunku Δ_2^∞. Wynika to z faktu, że przy założeniu iż $\varphi \notin \Delta_2^\infty$ przestrzeń L^φ posiada kopię l^∞ na pewnym ciągu znormalizowanych funkcji o rozłącznych nośnikach. Jeżeli natomiast $\varphi \in \Delta_0$, to każdy taki ciąg rozpina kopię przestrzeni l^∞. W ostatnich latach warunek ten był intensywnie badany przez wielu autorów (patrz np. [2], [9], [45] oraz [75]).

W przypadku przestrzeni Orlicza na $I = [0,\infty)$ warunek na to, by była ona 1–rozłącznie jednorodna, a więc by spełniała kryterium Dunforda–Pettisa, rozważano w pracy [29, Theorem 5.1]. Jednakże warunek, który się tam pojawia, został sformułowany w termiach zbioru C_φ, przez co może być trudny do weryfikacji (por. [65]). Naturalnym jest zatem problem charakteryzacji 1–DH przestrzeni Orlicza na półprostej w terminach własności funkcji φ.

Twierdzenie 4.4.3. Przestrzeń Orlicza $L^\varphi[0,\infty)$ jest 1–rozłącznie jednorodna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki

(i) $\varphi \in \Delta_2$;

(ii) $\varphi^* \in \Delta_0$;

(iii) φ jest równoważna z funkcją liniową dla małych argumentów, tj. istnieją stałe $c, C, d, u_0 > 0$ takie, że zachodzi

$$cu \leqslant \varphi(du) \leqslant Cu \text{ dla } 0 < u < u_0.$$

Dowód. Dostateczność wynika z podobnej argumentacji jak w przypadku przestrzeni Lorentza, ponieważ z warunku (iii) wynika, że

$$L^\varphi[0,\infty) = (L^\varphi \cap L^1)[0,\infty).$$

Jedyna różnica w porównaniu z dowodem twierdzenia 4.4.1, pojawia się przy wykazywaniu nierówności (4.4.1). Załóżmy, że $(f_n) \subset L^\varphi[0,\infty)$ jest ciągiem dodatnich funkcji o rozłącznych nośnikach takim, że $\|f_n\|_1 \to 0$ oraz $\|f_n\|_\varphi = 1$. Udowodnimy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że spełniona jest nierówność

$$\left\| f_n \chi_{\{f_n > k\}} \right\|_\varphi > 1/2.$$

Przypuścimy, że tak nie jest. Wówczas istnieje k_0 takie, że

$$\left\|f_n\chi_{\{f_n>k_0\}}\right\|_\varphi \leqslant 1/2 \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

Wobec tego

$$\left\|f_n\chi_{\{f_n\leqslant k_0\}}\right\|_\varphi > 1/2 \text{ dla } n\in\mathbb{N},$$

skąd

$$\int_{\{f_n\leqslant k_0\}}\varphi(2f_n(t))\mathrm{d}t > 1.$$

Ponieważ funkcja φ jest wypukła, więc

$$\varphi(2t)\leqslant\frac{\varphi(2k_0)}{k_0}t \text{ dla } 0<t\leqslant k_0,$$

co implikuje, że

$$1<\int_{\{f_n\leqslant k_0\}}\varphi(2f_n(t))\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varphi(2k_0)}{k_0}\int_{\{f_n\leqslant k_0\}}f_n(t)\mathrm{d}t \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

Ostatecznie, na mocy warunku (ii) na funkcję φ, mamy

$$\|f_n\|_1\geqslant\frac{k_0}{\varphi(2k_0)}\geqslant\frac{1}{2} \text{ dla } n\in\mathbb{N},$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $\|f_n\|_1\to 0$.

Konieczność założenia $\varphi^*\in\Delta_0$ wynika z [8, Proposition 5.8]. Ponadto, na mocy porządkowej ciągłości przestrzeni 1–DH wnosimy, że $\varphi\in\Delta_2$. Pozostało wykazać, że φ spełnia warunek (iii). Rozważmy ciąg

$$f_n=\chi_{[n-1,n]}, \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

Każdy podciąg ciągu (f_n) jest równoważny bazie kanonicznej w ciągowej przestrzeni Orlicza l^φ. Zatem $l^\varphi=l^1$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważne funkcji liniowej dla małych argumentów. □

4.5 Warunek Δ_0

W tej sekcji rozważymy związek pomiędzy warunkiem Δ_0 a indeksami funkcji Younga. Przypomnijmy najpierw definicję indeksów Matuszewskiej–Orlicza oraz indeksów Simonenki.

Definicja 4.5.1. Niech φ będzie funkcją Younga. **Dolny i górny indeks Matuszewskiej–Orlicza** (dla dużych argumentów) oznaczamy odpowiednio symbolami $\alpha_\varphi^\infty,\beta_\varphi^\infty$ i definiujemy wzorami

$$\alpha_\varphi^\infty:=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln M(t,\varphi)}{\ln t},$$
$$\beta_\varphi^\infty:=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln M(t,\varphi)}{\ln t},$$

gdzie $M(t,\varphi) := \limsup\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(tu)}{\varphi(u)}$. Podobnie, **dolny oraz górny indeks Simonenki** (dla dużych argumentów) oznaczamy odpowiednio symbolami $a_\varphi^\infty, b_\varphi^\infty$ i definiujemy wzorami

$$a_\varphi^\infty := \liminf_{u\to\infty} \frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$
$$b_\varphi^\infty := \limsup_{u\to\infty} \frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}.$$

Zachodzą nierówności $1 \leqslant a_\varphi^\infty \leqslant \alpha_\varphi^\infty \leqslant \beta_\varphi^\infty \leqslant b_\varphi^\infty \leqslant \infty$ (patrz [55, Theorem 3.2]). Ponadto $b_\varphi^\infty < \infty$ i $\beta_\varphi^\infty < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2^\infty$. Indeksy Matuszewskiej–Orlicza funkcji Younga φ oraz jej funkcji dopełniającej φ^* powiązane są wzorem

$$\frac{1}{\alpha_\varphi^\infty} + \frac{1}{\beta_{\varphi^*}^\infty} = \frac{1}{\alpha_{\varphi^*}^\infty} + \frac{1}{\beta_\varphi^\infty} = 1.$$

Analogiczny wzór zachodzi dla indeksów Simonenki przy dodatkowym założeniu, że φ jest N–funkcją. Dokładniej dla N–funkcji φ zachodzą następujące równości

$$\frac{1}{a_\varphi^\infty} + \frac{1}{b_{\varphi^*}^\infty} = \frac{1}{a_{\varphi^*}^\infty} + \frac{1}{b_\varphi^\infty} = 1. \tag{4.5.1}$$

Więcej informacji o indeksach można znaleźć w [43, 55, 56].

Lemat 4.5.2. Jeżeli $\varphi \in \Delta_0$, to indeksy Matuszewskiej–Orlicza funkcji φ spełniają

$$\alpha_\varphi^\infty = \beta_\varphi^\infty = \infty.$$

Dowód. Jeżeli $\varphi \in \Delta_0$ to $\varphi \notin \Delta_2^\infty$ oraz $\beta_\varphi^\infty = \infty$. Niech $\lambda > 1$ będzie takie, że $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)} = \infty$. Wówczas $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u/\lambda)}{\varphi(u)} = 0$. Dla dowolnego $\eta > \lambda$ mamy

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(u/\eta)}{\varphi(u)} \leqslant \limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(u/\lambda)}{\varphi(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(u/\lambda)}{\varphi(u)} = 0.$$

Oznacza to, że $M(t,\varphi) = 0$ dla $t < \frac{1}{\lambda}$, a zatem $\alpha_\varphi^\infty = \infty$. $\square$

Wniosek 4.5.3. Jeżeli $\varphi \in \Delta_0$, to indeksy Matuszewskiej–Orlicza funkcji dopełniającej φ^* spełniają równość

$$\alpha_{\varphi^*}^\infty = \beta_{\varphi^*}^\infty = 1.$$

W szczególności $\varphi^* \in \Delta_2^\infty$.

W artykule [48] postawiliśmy pytanie o prawdziwość implikacji odwrotnej, tj. czy warunek

$$\alpha_\varphi^\infty = \beta_\varphi^\infty = \infty$$

implikuje, że $\varphi \in \Delta_0$. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna, co wykazali Astashkin oraz Strakhov w artykule [10], konstruując odpowiedni przykład.

Z drugiej strony w terminach indeksów Simonenki można podać warunek dostateczny na to, aby $\varphi \in \Delta_0$. Będziemy potrzebować następujący lemat.

Lemat 4.5.4. Niech φ będzie funkcją Orlicza. Jeżeli $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\infty$, to

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}=\infty \text{ dla dowolnego } \lambda>1.$$

Dowód. Zdefiniujmy $\psi(t):=\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}$. Istnieją wówczas stałe $t_0, c>0$ takie, że $\psi(t)>c$ dla $t>t_0$. Wobec tego dla dowolnej $\lambda>1$ otrzymujemy

$$\frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}=\exp\left(\int_u^{\lambda u}\frac{\psi(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\geqslant\exp\left(\int_u^{\lambda u}\frac{c}{t}\mathrm{d}t\right)=\lambda^c.$$

Zatem dla $\lambda>1$ mamy

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}\geqslant\lim_{u\to\infty}\lambda^c=\infty,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.5.5. Niech φ będzie funkcją Orlicza. Jeżeli spełniony jest warunek

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}=1, \tag{4.5.2}$$

to $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\varphi^*(\lambda u)}{\varphi^*(u)}=\infty$ dla każdego $\lambda>1$. W szczególności $\varphi^*\in\Delta_0$.

Dowód. Oznaczmy

$$p(u):=\frac{\varphi(u)}{u} \quad \text{oraz} \quad \varphi_1(u)=\int_0^u p(t)\mathrm{d}t \text{ dla } u\geqslant 0.$$

Wypukłość funkcji φ implikuje, że p jest niemalejąca. Oznacza to, że φ_1 jest

$$\begin{aligned}1\geqslant\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi_1(u)}{up(u)}&\geqslant\lim_{u\to\infty}\frac{\int_{u/a}^u p(t)\mathrm{d}t}{up(u)}\geqslant\lim_{u\to\infty}\frac{p(u/a)(1-1/a)}{p(u)}\\&=\lim_{u\to\infty}\frac{a\varphi(u/a)(1-1/a)}{\varphi(u)}\geqslant\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)(1-1/a)}{\varphi(u)}=1-1/a,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z wypukłości funkcji φ. Otrzymujemy stąd

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi_1(u)}{up(u)}=1. \tag{4.5.3}$$

Ustalmy $v>0$ oraz oznaczmy $u=p^{-1}(v)$. Wówczas z [56, Theorem 8.2] wynika równość

$$uv=up(u)=\varphi_1(u)+\varphi_1^*(v),$$

co oznacza, że

$$\frac{\varphi_1(u)}{up(u)}+\frac{\varphi_1^*(v)}{vp^{-1}(v)}=1.$$

Korzystając z równości (4.5.3) dostajemy

$$\lim_{v\to\infty} \frac{vp^{-1}(v)}{\varphi_1^*(v)} = \infty.$$

Ponieważ ${\varphi_1^*}'(u) = p^{-1}(u)$ (por. [42]), więc na mocy lematu 4.5.4, dostajemy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi_1^*(\lambda u)}{\varphi_1^*(u)} = \infty, \text{ dla } \lambda > 1. \tag{4.5.4}$$

Z monotoniczności p wynika, że $\varphi_1(u) \leqslant \varphi(u)$ dla $u > 0$. Zachodzi zatem nierówność

$$\varphi_1^*(u) \geqslant \varphi^*(u)$$

dla $u > 0$. Pokażemy teraz, że

$$\frac{1}{\eta-1}\varphi_1^*\left(\frac{\eta-1}{\eta}u\right) \leqslant \varphi^*(u) \text{ dla } u > 0. \tag{4.5.5}$$

Mamy, dla $u > 0$

$$\varphi_1(\eta u) \geqslant \int_u^{\eta u} p(t)\mathrm{d}t \geqslant up(u)\,(\eta-1) = \varphi(u)(\eta-1) \text{ dla } \eta > 1,\ u > 0,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta-1}\varphi_1^*\left(\frac{\eta-1}{\eta}u\right) &= \frac{1}{\eta-1}\sup_{s>0}\left\{\frac{\eta-1}{\eta}us - \varphi_1(s)\right\} \\ &= \sup_{s>0}\left\{\frac{us}{\eta} - \frac{1}{\eta-1}\varphi_1(s)\right\} = \sup_{t>0}\left\{tu - \frac{1}{\eta-1}\varphi_1(\eta t)\right\} \\ &\leqslant \sup_{t>0}\{tu - \varphi(t)\} = \varphi^*(u), \end{aligned}$$

co dowodzi nierówności (4.5.5). Ustalmy dowolne $\lambda > 1$ oraz wybierzmy $\eta > 1$ tak, aby $\lambda\frac{\eta-1}{\eta} > 1$. Na mocy (4.5.4) mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi^*(\lambda u)}{\varphi^*(u)} \geqslant \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{\eta-1}\varphi_1^*\left(\lambda\frac{\eta-1}{\eta}u\right)}{\varphi_1^*(u)} = \infty,$$

co kończy dowód. □

Otrzymujemy zatem następującą charakteryzację.

Wniosek 4.5.6. Jeżeli dla N–funkcji φ obydwa indeksy Simonenki są nieskończone, tj. $a_\varphi^\infty = b_\varphi^\infty = \infty$, to $\varphi \in \Delta_0$.

Dowód. Z równości (4.5.1) wynika, że $a_{\varphi^*}^\infty = b_{\varphi^*}^\infty = 1$, zatem funkcja φ^* spełnia założenia twierdzenia 4.5.5. Wynika stąd, że $\varphi = \varphi^{**} \in \Delta_0$. □

Warunek $a_\varphi^\infty = b_\varphi^\infty = \infty$ nie może być konieczny na to by $\varphi \in \Delta_0$. Pokazuje to [46, Example 7], w którym autorzy konstruują funkcję Orlicza φ taką, że

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < \infty,$$

ale

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(5u)}{\varphi(u)} = \infty.$$

Zatem $\varphi \in \Delta_0$. Z drugiej strony, jeżeli obydwa indeksy Simonenki funkcji φ byłyby nieskończone to, na mocy twierdzenia 4.5.5, obie powyższe granice również byłyby nieskończone.

W wielu przypadkach dla funkcji Orlicza φ nie da się jawnym wzorem opisać funkcji dopełniającej φ^*, ale wykorzystując twierdzenie 4.5.2 możemy wykazać, że $\varphi^* \in \Delta_0$.

Przykład 4.5.7. Zdefiniujmy następujące rodziny N–funkcji dla $a > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_a^0(u) &:= u \ln^a(1+u), \\ \varphi_a^1(u) &:= u\sqrt{1 + a\ln(1+u)} \end{aligned}$$

oraz

$$\varphi_a^2(u) := u \exp\left(\sqrt{1 + a\ln^+ u}\right).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{u\varphi_a^{0\prime}(u)}{\varphi_a^0(u)} &= 1 + \frac{au}{(1+u)\ln(1+u)} \to 1 \text{ gdy } u \to \infty, \\ \frac{u\varphi_a^{1\prime}(u)}{\varphi_a^1(u)} &= 1 + \frac{au}{2(1+u)[1 + a\ln(1+u)]} \to 1 \text{ gdy } u \to \infty \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{u\varphi_a^{2\prime}(u)}{\varphi_a^2(u)} = 1 + \frac{a}{2\sqrt{1 + a\ln^+ u}} \to 1 \text{ gdy } u \to \infty.$$

Z twierdzenia 4.5.5 otrzymujemy więc, że $\left(\varphi_a^0\right)^*, \left(\varphi_a^1\right)^*, \left(\varphi_a^2\right)^* \in \Delta_0$.

Bibliografia

[1] J. Alexopoulos, *De la Vallée Poussin's theorem and weakly compact sets in Orlicz spaces*, Quaestiones Math. 17 (1994), no. 2, 231–248.

[2] J. Alexopoulos, *On subspaces of non-reflexive Orlicz spaces*, Quaestiones Math. 21 (1998), no. 3–4, 161–175.

[3] T. Ando, *On products of Orlicz spaces*, Math. Ann. 140 (1960), 174–186.

[4] S. V. Astashkin, *$\Lambda(p)$-spaces*, J. Funct. Anal. 266 (2014), 5174–5198.

[5] S. V. Astashkin, *Disjointly homogeneous rearrangement invariant spaces via interpolation*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), no. 1, 338–361.

[6] S. V. Astashkin, *Duality problem for disjointly homogeneous rearrangement invariant spaces*, J. Funct. Anal. 276 (2019), 3205–3225.

[7] S. V. Astashkin, *Some remarks about disjointly homogeneous symmetric spaces*, Rev. Mat. Complut. 32 (2019), no. 3, 823–835.

[8] S. V. Astashkin, N. Kalton, F. A. Sukochev, *Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces*, Positivity 12 (2008), no. 3, 387–406.

[9] S. V. Astashkin, S. I. Strakhov, *On symmetric spaces with convergence in measure on reflexive subspaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2018, no. 8, 3–11; (po rosyjsku); Angielskie tłumaczenie w: Russian Math. (Iz. VUZ) 62 (2018), no. 8, 1–8.

[10] S. V. Astashkin, S.I. Strakhov, *On disjointly homogeneous Orlicz–Lorentz spaces*, Math. Notes 108 (2020), 631–642.

[11] B. Bollobás and G. R. Brightwell, *Convex bodies, graphs and partial orders*, Proc. London Math. Soc. 80 (2000), no. 2, 415–450.

[12] L. Baratchart, F. Seyfert, *An L^p Analog to AAK Theory for $p \geqslant 2$*, J. Funct. Anal. 191 (2002), 52–122.

[13] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston (1988).

[14] D. W. Boyd, *Indices for the Orlicz spaces*, Pacific J. Math. 38 (1971), no. 2, 315–323.

[15] F. Cabello Sańchez, *Factorization in Lorentz spaces, with an application to centralizers*, J. Math. Anal. Appl. 446 (2017), no. 2, 1372–1392.

[16] J. M. Calabuig, O. Delgado and E. A. Sánchez Pérez, *Generalized perfect spaces*, Indag. Math. (N.S.) 19 (2008), no. 3, 359–378.

[17] J. Cerda, M. Mastyło, *The type and cotype of Calderón–Lozanovskii spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), 105–117

[18] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 356 (1996). Ze wstępem Juliana Musielaka.

[19] I. Chlebicka, *A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces*, Nonlinear Anal. 175 (2018), 1–27.

[20] J. B. Day, C. Lennard, *Convex Komlós sets in Banach function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 367 (2010), no. 1, 129–136.

[21] O. Delgado, E.A. Sańchez Pérez, *Summability properties for multiplication operators on Banach function spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory 66 (2010), 197–214.

[22] O. Delgado, E.A. Sańchez Pérez, *Strong factorizations between couples of operators on Banach function spaces*, J. Convex Analysis. 20 (2013), no. 3, 599–616.

[23] P. B. Djakov, M. S. Ramanujan, *Multipliers between Orlicz sequence spaces*, Turk. J. Math. 24 (2000), 313–319.

[24] P. G. Dodds, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, *The Banach–Saks property in rearrangement invariant spaces*, Studia Math. 162 (2004), 263–294.

[25] N. Dunford, B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940), 323–392.

[26] M. Fan, *On interpolation of vector-valued Banach lattices and Calderón–Lozanovskii construction*, Math. Nachr. 227 (2001), 63–80.

[27] T. Figiel, W. B. Johnson, L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces*, J. Approx. Theory 13 (1975), no. 4, 395–412.

[28] J. Flores, F. L. Hernández, E. Semenov, P. Tradacete, *Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices*, Israel J. Math. 188 (2012), 323–352.

[29] J. Flores, F. L. Hernández, E. Spinu, P. Tradacete, V. G. Troitsky, *Disjointly homogeneous Banach lattices: duality and complementation*, J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 9, 5858–5885.

[30] J. Flores, F.L. Hernandez, P. Tradacete, *Disjointly homogeneous Banach lattices and applications,* w: „Ordered Structures and Applications", Papers from Positivity VII (Leiden, July 22–26, 2013), Trends in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham 2016, 179–201.

[31] T. A. Gillespie, *Factorization in Banach function spaces*, Indag. Math. 43 (1981), no. 3, 287–300.

[32] L. Grafakos, *Some Remarks on the Mikhlin–Hörmander and Marcinkiewicz Multiplier Theorems: A Short Historical Account and a Recent Improvement*, The Journal of Geometric Analysis 31 (2021), 6987–7007.

[33] P. Harjulehto, P. Hästö, *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces* Springer, (2019).

[34] P. Hästö, *The maximal operator on Musielak–Orlicz spaces*, J. Funct. Anal. 269 (2015), no. 12, 4038–4048.

[35] H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastyło, *Geometric properties of some Calderón–Lozanovskii spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston J. Math. 22 (1996), no. 3, 638–663.

[36] R. E. Jamison, W. H. Ruckle, *Factoring Absolutely Convergent Series*, Math. Ann. 224 (1976), no. 2, 143–148.

[37] N. Kalton, *Differentials of complex interpolation processes for Köthe function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992), 479–529.

[38] A. Yu. Karlovich, *The Coburn-Simonenko theorem for Toeplitz operators acting between Hardy type subspaces of different Banach function spaces,* Mediterr. J. Math. 15 (2018), 15–91.

[39] P. Kolwicz, K. Leśnik, L. Maligranda, *Pointwise multipliers of Calderón-Lozanovskiĭ spaces,* Math. Nachr. 286 (2013), 876–907.

[40] P. Kolwicz, K. Leśnik, L. Maligranda, *Pointwise products of some Banach function spaces and factorization*, J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 2, 616–659.

[41] P. Kolwicz, K. Leśnik, L. Maligranda, *Symmetrization, factorization and arithmetic of quasi-Banach function spaces*, J. Math. Anal. App. 470 (2019), no. 2, 1136–1166.

[42] M. A. Krasnosel'skiĭ, Ya. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen (1961).

[43] S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Amer. Math. Soc., Providence (1982).

[44] N. Kruglyak, L. Maligranda, *Calderón–Lozanovskii construction on weighted Banach function lattices*, J. Math. Anal. App. 288 (2003), no. 2, 744–757.

[45] E. Lavergne, *Reflexive subspaces of some Orlicz spaces*, Colloq. Math. 113 (2008), no. 2, 333–340.

[46] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *A criterion of weak compactness for operators on subspaces of Orlicz spaces*, J. Funct. Spaces Appl. 6 (2008), no. 3, 277–292.

[47] K. Leśnik, *Toeplitz and Hankel operators between distinct Hardy spaces*, Studia Math. 249 (2019), 163–192

[48] K. Leśnik, L. Maligranda, J. Tomaszewski, *Weakly compact sets and weakly compact pointwise multipliers in Banach function lattices*, Math. Nachr. 295 (2022), 574–592.

[49] K. Leśnik, R. Płuciennik, J. Tomaszewski, *Pointwise multipliers of Calderón-Lozanovskiĭ function spaces*, w przygotowaniu.

[50] K. Leśnik, J. Tomaszewski, *Pointwise mutipliers of Orlicz function spaces and factorization*, Positivity 21 (2017), no. 4, 1563–1573.

[51] K. Leśnik, J. Tomaszewski, *Pointwise multipliers of Musielak–Orlicz spaces and factorization*, Rev. Mat. Complut. 34 (2021), 489–509.

[52] D. H. Leung, *On the weak Dunford-Pettis property*, Arch. Math. (Basel) 52 (1989), no. 4, 363–364.

[53] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–New York (1979).

[54] G. Ja. Lozanovskiĭ, *On some Banach lattices*, Sibirsk. Mat. Zh. **10** (1969), 584–599 (po rosyjsku); Angielskie tłumaczenie w: Siberian Math. J. 10 (1969), no. 3, 419–431.

[55] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 234 (1985), 1–54.

[56] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Mathematics 5, University of Campinas, Campinas SP, Brazil (1989).

[57] L. Maligranda, E. Nakai, *Pointwise multipliers of Orlicz spaces*, Arch. Math. 95 (2010), no. 3, 251–256.

[58] L. Maligranda, L. E. Persson, *Generalized duality of some Banach function spaces*, Indag. Math. 51 (1989), no. 3, 323–338.

[59] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p*, Astérisque 11 (1974), 1–163.

[60] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev Multipliers*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg (2009).

[61] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991).

[62] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[63] E. Nakai, *Pointwise multipliers on Musielak–Orlicz spaces*, Nihonkai Math. J. 27 (2016), no. 1, 135–146.

[64] E. Nakai, *Pointwise multipliers on Musielak–Orlicz–Morrey spaces*, Function Spaces and Inequalities, Springer Proc. Math. Stat. 206 (2017), Springer, Singapore, 257–281.

[65] N. J. Nielsen, *On the Orlicz function spaces* $L_M(0,\infty)$, Israel J. Math. 20 (1975), no. 3–4, 237–259.

[66] P. Nilsson, *Interpolation of Banach lattices*, Studia Math. 82 (1985), no. 2, 135–154.

[67] R. O'Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 300–328.

[68] W. Orlicz, *Über Räume* (L^M), Bull. Internat. l'Acad. Polon. Sci. et Lettres, Classe des Sci. Math. et Naturelles: Série A, Sciences Math. (1936), 93–107.

[69] C. Palazuelos, E. A. Saánchez Pérez, P. Tradacete, *Maurey–Rosenthal Factorization For p–Summing Operators And Dodds–Fremlin Domination*, J. Operator Theory 68 (2012), no. 1, 205–222.

[70] V. Peller, *Hankel Operators and Their Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer New York, NY (2003).

[71] M. Räbiger, *Lower and upper 2-estimates for order bounded sequences and Dunford–Pettis operators between certain classes of Banach lattices*, w: „Functional Analysis" (Austin, TX, 1987/1989), Lecture Notes in Math. 1470 (1991), 159–170.

[72] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ^1, Proc. Nat. Acad. Sci. 71 (1974), 241–243.

[73] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York (1991).

[74] S. Reisner, *A factorization theorem in Banach lattices and its applications to Lorentz spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 31 (1981), no. 1, 239–255.

[75] S. I. Strakhov, *Characterization of the Orlicz spaces whose convergence is equivalent to convergence in measure on reflexive subspaces*, Sibirsk. Mat. Zh. 60 (2019), no. 4, 881–890; Angielskie tłumaczenie w: Sib. Math. J. 60 (2019), no. 4, 690–698.

[76] A. R. Schep, *Products and factors of Banach function spaces*, Positivity 14 (2009), no. 2, 301–319.

[77] W. Wnuk, *A note on the positive Schur property*, Glasg. Math. J. 31 (1989), 169–172.

[78] W. Wnuk, *Banach lattices with properties of the Schur type - survey*, Conf. Semin. Mat. Univ. Bari 249 (1993).