

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Adrian Łydka

Formuły dokładne związane z funkcją Möbiusa
krzywej eliptycznej

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab.
Jerzego Kaczorowskiego

Poznań 2010

*Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi
Jerzemu Kaczorowskiemu
za okazaną życzliwość
oraz wskazówki udzielone mi podczas pisania pracy.*

Spis treści

Wstęp	2
Oznaczenia	7
Rozdział 1. Preliminaria	8
1.1. Funkcje hipergeometryczne	8
1.2. L-funkcje krzywych eliptycznych	10
1.3. Funkcja Möbiusa krzywej eliptycznej	14
Rozdział 2. Lematy	18
2.1. Analityczne własności funkcji $m(F, z)$	18
Rozdział 3. Zespolone formuły dokładne	28
3.1. Równanie funkcyjne	28
3.2. Zespolona formuła dokładna	37
Bibliografia	44

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy formuł dokładnych związanych z funkcją Möbiusa krzywej eliptycznej. Motywacją do moich rozważań są wyniki dotyczące formuł dokładnych związanych z klasyczną funkcją Möbiusa $\mu(n)$, która jest zdefiniowana równością

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 \dots p_r, p_i - \text{różne liczby pierwsze,} \\ 0, & p^2 | n \text{ dla jakiejś liczby pierwszej } p. \end{cases}$$

Można też ją zdefiniować jako współczynniki szeregu Dirichleta

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Rozdział pierwszy zawiera wiadomości o pojęciach i twierdzeniach występujących w pracy.

Paragraf pierwszy zawiera informacje na temat funkcji hipergeometrycznych, przytaczam w nim definicje i własności funkcji G -Meijera oraz funkcji Bessela pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju.

W paragrafie drugim podaję definicję L -funkcji krzywej eliptycznej $E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$, podstawowe własności współczynników w odpowiadającym jej szeregu Dirichleta, twierdzenie o przedłużeniu analitycznym L -funkcji na płaszczyznę zespoloną i równaniu funkcyjnym oraz wprowadzam funkcję $F(s) = L\left(s + \frac{1}{2}, E\right)$, czyli znormalizowaną L -funkcję. Dalej podaję twierdzenia związane z zerami tak określonej L -funkcji. Definicje i twierdzenia w tym paragrafie zaczerpnąłem głównie z [8], [12] i [19].

Następnie w paragrafie trzecim definiuję funkcję Möbiusa krzywej eliptycznej $\mu_E(n)$ oraz formułuję i udowadniam twierdzenie dotyczące podstawowych własności tejże funkcji, takich jak multiplikatywność, wartości w potęgach liczb pierwszych i oszacowanie $\mu_E(n) = O(n^\epsilon)$. Następnie dowodzę, że funkcja $F(s)$ należy do klasy Selberga.

W drugim rozdziale dowodzę pewnych analitycznych własności funkcji $F(s)$ analogicznych do znanych twierdzeń dla funkcji dzeta Riemanna, które są konsekwencją twierdzeń dotyczących zer w pasie krytycznym. Następnie definiuję funkcję $m(F, z)$, która jest analogonem funkcji $m(z)$, badanej przez K. Bartz w pracach [1], [2]

$$m(z) = \int_D \frac{e^{sz}}{\zeta(s)} ds, \quad \Re z > 0, \quad (1)$$

gdzie D oznacza kontur składający się z półprostej $\left(-\frac{1}{2} + i\infty, -\frac{1}{2}\right]$, odcinka $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ i półprostej $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + i\infty\right)$. W pracy [1] autorka pokazuje, że $m(z)$ jest funkcją holomorficzną na górnej półpłaszczyźnie. W tym rozdziale udowadniam analogiczne twierdzenie dla funkcji

$$m(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

gdzie C oznacza kontur składający się z półprostej $\left(-\frac{1}{4} + i\infty, -\frac{1}{4}\right]$, krzywej gładkiej l_1 określonej przy pomocy funkcji $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ takiej, że $\tau(0) = -\frac{1}{4}$, $\tau(1) = \frac{3}{2}$ i $0 < \Im \tau(t) < 1$ dla $t \in (0, 1)$ i pomiędzy odcinkiem $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$ a krzywą l_1 funkcja $F(s)$ nie ma zer, oraz półprostej $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + i\infty\right)$.

W rozdziale drugim wspominam także o funkcji sumacyjnej

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

Funkcja $M(x)$ jest ściśle związana z hipotezą Riemanna, tzn. hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$ dla dowolnego $\epsilon > 0$.

Najstarszą hipotezą związaną z funkcją Möbiusa była hipoteza Mertensa, który sformułował ją w pracy [13], mówiąca, że

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \right| < \sqrt{x},$$

dla $x > 1$. Jednak w roku 1985 Andrew Odlyzko i Hermann te Riele w pracy [16] pokazali jej fałszywość, zamykając w ten sposób jedną z dróg do dowodu hipotezy Riemanna.

Główne wyniki pracy zawarte są w rozdziale trzecim. W paragrafie pierwszym udowadniam twierdzenie o przedłużeniu meromorficznym funkcji $m(F, z)$ na całą płaszczyznę zespoloną. Twierdzenie to jest analogiczne do twierdzeń K. Bartz, głównie z pracy [1], a także do twierdzeń K. Bartz z pracy [2]. Poniższe twierdzenie jest głównym rezultatem tych rozważań

Twierdzenie (Bartz). *Funkcja $m(z)$ może być przedłużona analitycznie do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej, gdzie spełnia równanie funkcyjne*

$$m(z) + \overline{m(\bar{z})} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n} e^{-z}\right). \quad (2)$$

Jedynymi osobliwościami tak przedłużonej funkcji są bieguny proste w punktach $z = \log n$, z residuami

$$\operatorname{res}_{z=\log n} m(z) = -\frac{\mu(n)}{2\pi i}.$$

K. Bartz uzyskała także analogiczne wyniki dla innych rodzajów funkcji, które można znaleźć w pracach [3] i [4].

Analogiczne wyniki związane z funkcją ϕ Eulera otrzymała M. Rękoś w pracy [20], a związane z funkcją $\theta(n)$ (liczba dzielników bezkwadratowych liczby n) otrzymał K. Wiertelak w [22].

J. Kaczorowski w pracy [9] otrzymał zespoloną formułę dokładną dla funkcji $m(z)$. Udowodnił zupełnie nowymi metodami

Twierdzenie (Kaczorowski). Dla $|\Im z| < \pi$, $z \neq \log n$, $\mu(n \neq 0)$

$$m(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e\left(-\frac{1}{ne^z}\right) - \frac{e^z}{2\pi i} m_0(z) \\ - \frac{1}{2i} (m_1(z) + \overline{m_1}(z)) + \frac{1}{2i} (F_m(z) + \overline{F_m}(z)), \quad (3)$$

gdzie

$$m_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \frac{1}{z - \log n}, \\ m_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2} - i \right) \frac{e^{sz}}{\zeta(z)} ds, \\ F_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{1+i\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2} - i \right) \frac{e^{sz}}{\zeta(z)} ds$$

są funkcjami holomorficznymi w półpłaszczyźnie $\Im z > -\pi$.

Głównym wynikiem mojej rozprawy jest analogiczna zespolona formuła dokładna dla badanej przeze mnie funkcji $m(F, z)$, której dowód znajduje się w paragrafie drugim trzeciego rozdziału. Dowód opiera się na nieco zmodyfikowanej metodzie z pracy [9]. Zarówno w przypadku równania funkcyjnego, jak i formuły dokładnej występują funkcje Bessela rzędu pierwszego, natomiast w pracy [9] występuje funkcja $\cos z = -\sqrt{\frac{1}{2}\pi z} Y_{\frac{1}{2}}(z)$. Natomiast w pomocniczych funkcjach $m^*(F, z)$, $m_1(F, z)$ i $H(F, z)$ zmieniłem funkcję $\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2}$ na funkcję $\operatorname{tg} \pi s$, oraz sama formuła dokładna jest prawdziwa w pasie $|\Im z| < 2\pi$. Zmiany te można powiązać z tym, że w [9] rozważana była funkcja ζ Riemanna, która jest stopnia 1, natomiast badana przeze mnie funkcja $F(s)$ jest stopnia 2, stąd podwojenie argumentu. W obliczeniach pojawiły się dość skomplikowane całki, które wymagały użycia funkcji specjalnych, takich jak funkcja G -Meijera i funkcje Bessela. Dodatkową trudnością w badaniach było pojawienie się możliwych osobliwości w przedziale $(0, 1)$, których istnienie nie jest wykluczone, bo funkcja $F(s)$ może mieć zera w tym przedziale. Stąd konieczne było wprowadzenie funkcji $R(z)$ i $R^*(z)$, które mają tę dobrą własność, że są całkowite.

Twierdzenie. Dla $z = x + iy$, $|y| < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}
m(F, z) &= \frac{-\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(H_1^{(2)} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} i \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} (R(z) - iR^*(z)) + \frac{1}{2i} (H(F, z) + \overline{H}(F, z)) - \frac{e^{(1+\delta)z}}{2\pi i} m_0(F, z) \\
&\quad - \frac{1}{2i} (m_1(F, z) + \overline{m}_1(F, z)),
\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
m_0(F, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{z - \log n}, \\
m_1(F, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds, \\
H(F, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds, \\
R(z) &= \sum_{\substack{F(\beta)=0 \\ 0 < \beta < 1}} \operatorname{res}_{s=\beta} \frac{e^{sz}}{F(s)}, \\
R^*(z) &= \sum_{\substack{F(\beta)=0 \\ 0 < \beta < 1}} \operatorname{res}_{s=\beta} \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)}.
\end{aligned}$$

Oznaczenia

\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{C}	zbiór liczb zespolonych
\mathbb{H}	zbiór liczb zespolonych o dodatniej części urojonej
$\Re z$	część rzeczywista liczby zespolonej
$\Im z$	część urojona liczby zespolonej
$ z $	moduł liczby zespolonej
$f(x) = O(g(x))$	symbol Landaua oznaczający, że istnieje stała dodatnia c taka, że $ f(x) \leq cg(x)$ dla każdego $x \in X$
\ll	symbol Winogradowa mający to samo znaczenie co symbol Landaua
$f(x) \approx g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$z_1 \asymp z_2$	istnieją stałe dodatnie c_1, c_2 takie, że $ z_1 \leq c_1 z_2 $ i $ z_2 \leq c_2 z_1 $
$\zeta(s)$	funkcja dzeta Riemanna
$\Gamma(s)$	funkcja Gamma Eulera
$\log s$	logarytm zespolony o podstawie e
$n m$	liczba n dzieli liczbę m
$\bar{f}(s)$	podwójne sprzężenie, tj. $\bar{f}(s) = \overline{f(\bar{s})}$
$\text{Arg}(s)$	argument główny liczby zespolonej s .

Ponadto w pracy liczby zespolone będziemy oznaczać przez $z = x + iy$, bądź przez $s = \sigma + it$. Natomiast przez $\rho = \beta + i\gamma$ oznaczać będziemy zera L -funkcji.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1. Funkcje hipergeometryczne

Ważnym narzędziem w badaniu funkcji $m(z, F)$ okazują się być funkcje specjalne.

Funkcję G -Meijera definiujemy w następujący sposób

$$G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds, \quad (1.1)$$

gdzie $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, przy czym muszą być spełnione warunki:

- * $0 \leq m \leq q < 0 \leq n \leq p, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$
- * $a_k - b_j \neq 1, 2, 3, \dots$ dla $k = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ (1.2)
- * $z \neq 0$.

Warunek drugi implikuje, że żaden biegun $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, \dots, m$ nie pokrywa się z żadnym biegunem $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Kontur L może mieć jedną z trzech postaci:

1. L przebiega od $-i\infty$ do $i\infty$ w ten sposób, że wszystkie bieguny funkcji $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, \dots, m$ są na prawo od konturu, a wszystkie bieguny funkcji $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, \dots, n$ są na lewo. Wtedy całka (1.1) jest zbieżna dla z takich, że $|\arg z| < \delta\pi$, gdzie $\delta = m + n - \frac{1}{2}(p + q)$

2. L jest pętlą zaczynającą i kończącą się w ∞ , otaczającą wszystkie bieguny funkcji $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, \dots, m$ dokładnie jeden raz, z ujemną orientacją,

ale nieokrążającą żadnego bieguna funkcji $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Wówczas całka jest zbieżna dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$, jeżeli tylko $q > p \geq 0$; jest także zbieżna, gdy $p = q > 0$, ale tylko w kole $|z| = 1$.

$3.L$ jest pętlą zaczynającą i kończącą się w $-\infty$, otaczającą wszystkie bieguny funkcji $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, \dots, n$ dokładnie jeden raz, z dodatnią orientacją, ale nieokrążającą żadnego bieguna funkcji $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Wówczas całka jest zbieżna dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$, jeżeli tylko $p > q \geq 0$; jest także zbieżna, gdy $p = q > 0$, ale tylko w kole $|z| = 1$.

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju dana jest równością

$$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \quad (1.3)$$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju, zwaną też funkcją Neumanna, dana jest równością

$$Y_\alpha(z) = \lim_{\nu \rightarrow \alpha} \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (1.4)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ funkcję $Y_n(z)$ możemy zapisać

$$\begin{aligned} \pi Y_n(z) = & 2J_n(z) \left(\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}}{(n-m-1)!m!} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} (h_{m+n} + h_m) \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

gdzie $h_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \dots$ i przyjmujemy dodatkowo $h_0 = 0$.

Funkcję Hankela, zwaną też funkcją Bessela trzeciego rodzaju, definiuje się następująco

$$H_\alpha^{(n)}(z) = J_\alpha(z) - (-1)^n i Y_\alpha(z), \quad n = 1, 2. \quad (1.6)$$

Własności

$$G_{pq}^{mn} \left(z^{-1} \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = G_{qp}^{nm} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - b_1, 1 - b_2, \dots, 1 - b_q \\ 1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_p \end{matrix} \right. \right). \quad (1.7)$$

$$G_{02}^{10}(z|a, b) = x^{\frac{1}{2}(a+b)} J_{a-b}(2\sqrt{z}). \quad (1.8)$$

$$G_{13}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} a - \frac{1}{2} \\ a, b, a - \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) = z^{\frac{1}{2}(a+b)} Y_{b-a}(2\sqrt{z}). \quad (1.9)$$

$$G_{02}^{20}(z|a, c) = 2z^{\frac{1}{2}(a+c)} K_{a-c}(2\sqrt{z}), \quad (1.10)$$

gdzie $K_v(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju daną wzorem

$$K_v(z) = -\frac{1}{2}i\pi e^{-\frac{1}{2}v\pi i} H_v^{(2)}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}). \quad (1.11)$$

Powyższe definicje i własności pochodzą z [5] i [6].

W rozważaniach często będziemy też korzystać ze wzoru Stirlinga: Dla $\delta > 0$ i $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ zachodzi

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right), \quad (1.12)$$

którego dowód można znaleźć w [11] oraz z oszacowania

$$|\Gamma(\sigma + it)| \approx e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}, \quad \text{gdy } |t| \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

którego dowód znaleźć można na przykład w [18], str. 342.

1.2. L-funkcje krzywych eliptycznych

Niech będzie dana krzywa eliptyczna daną równaniem Weierstrassa

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (1.14)$$

określona nad ciałem \mathbb{Q} . Definiujemy współczynniki $b_2 = a_1^2 + 4a_2$, $b_4 = a_1a_3 + 2a_4$, $b_6 = a_3^2 + 4a_6$, $b_8a_1^2a_6 - a_1a_3a_4 + 4a_2a_6 + a_2a_3^2 - a_4^2$. Wyróżnik krzywej eliptycznej E jest zdefiniowany wzorem

$$\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6, \quad (1.15)$$

przy czym zakłada się, że $\Delta \neq 0$. Wprowadźmy jeszcze współczynniki $c_4 = b_2^2 - 24b_4$, $c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6$.

Definicja 1.1. Funkcję $L(s)$ nazywamy L -funkcją, jeżeli spełnione są poniższe warunki:

(1) przedstawia się jako szereg Dirichleta oraz posiada iloczyn Eulera stopnia $d \geq 1$,

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_d(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad (1.16)$$

gdzie $\lambda(1) = 1$, $\lambda(n) \in \mathbb{C}$, $\alpha_i(p) \in \mathbb{C}$. Szereg i iloczyn muszą być zbieżne w półpłaszczyźnie $\Re s > 1$. Liczby $\alpha_i(p)$ nazywamy lokalnymi pierwiastkami funkcji $L(s)$ w punkcie p , i spełniają nierówność

$$|\alpha_i(p)| < p \text{ dla każdego } p. \quad (1.17)$$

(2) Uzupełniona L -funkcja

$$\Lambda(L, s) = q^{\frac{s}{2}} \gamma(s) L(s), \quad (1.18)$$

(tzw. czynnik gamma $\gamma(s)$ dany jest równością

$$\gamma(s) = \pi^{-\frac{ds}{2}} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{s + \kappa_j}{2}\right), \quad (1.19)$$

liczby $\kappa_j \in \mathbb{C}$ zwane są lokalnymi parametrami funkcji $L(s)$ w nieskończoności. Zakładamy ponadto, że liczby κ_j są rzeczywiste lub parami sprzężone i $\Re(\kappa_j) > -1$. Natomiast liczba całkowita q , zwana przewodnikiem funkcji $L(s)$, jest taka, że $\alpha_i(p) \neq 0$ dla $p \nmid q$ i $1 \leq i \leq d$.)

która jak łatwo widać jest holomorficzna w półpłaszczyźnie $\Re(s) > 1$ musi być analitycznie przedłużalna do funkcji meromorficznej rzędu 1 na całej płaszczyźnie zespolonej. Ponadto musi spełniać równanie funkcyjne

$$\Lambda(L, s) = \omega \Lambda(\bar{L}, 1 - s), \quad (1.20)$$

gdzie $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$.

Definicja 1.2. L -funkcję krzywej eliptycznej $E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ definiujemy jako iloczyn

$$L(s, E) = \prod_{p|\Delta} (1 - a_p p^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}, \quad (1.21)$$

gdzie

$$a_p = \begin{cases} p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p), & p \nmid \Delta \\ 0, & \text{gdy } E \text{ ma redukcję addytywną mod } p, \\ 1, & \text{gdy } E \text{ ma redukcję mult. typu split mod } p, \\ -1, & \text{gdy } E \text{ ma redukcję mult. typu non-split mod } p. \end{cases}$$

Mówimy, że krzywa eliptyczna E ma dobrą redukcję mod p , jeżeli $p \nmid \Delta$; $\#E(\mathbb{F}_p)$ oznacza liczbę punktów na krzywej E nad ciałem \mathbb{F}_p wraz z punktem w nieskończoności. Jeżeli zaś $p|\Delta$ to krzywa zredukowana jest osobliwa (punkt osobliwy jest tylko jeden) i mówimy, że krzywa ma złą redukcję mod p , przy czym jeżeli $p|c_4$ to nazywamy redukcję addytywną (E/\mathbb{F}_p ma ostrze (ang.cusp)), a jeżeli $p \nmid c_4$ to redukcję nazywamy multiplikatywną (E/\mathbb{F}_p ma węzeł (ang.node)). Ponadto redukcję multiplikatywną nazywamy typu split, jeżeli tangens nachylenia stycznej w węźle jest wymierny, bądź typu non-split, jeżeli tangens nachylenia stycznej w węźle jest niewymierny.

Powyższy iloczyn jest zbieżny w półpłaszczyźnie $\Re s > \frac{3}{2}$, co wynika z tw.Hasse, które mówi, że $|a_p| < 2\sqrt{p}$. Ponadto jeżeli zapiszemy $L(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$, to $c(1) = 1$ i wykorzystując własności operatorów Hecke'go mamy $c(p) = a_p, c(p^{v+1}) = c(p)c(p^v) - pc_{p^{v-1}}, v = 1, 2, 3, \dots$, jeżeli $(p, \Delta) = 1$ oraz $c(p^{v+1}) = c(p)^{v+1}$, jeżeli $p|\Delta$, $c(mn) = c(m)c(n)$, o ile $(m, n) = 1$. Definiuje się też przewodnik N krzywej eliptycznej E wzorem

$$N = \prod_p p^{v_p}, \quad (1.22)$$

$$v_p = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } E \text{ ma dobrą redukcję mod } p \\ 1, & \text{jeśli } E \text{ ma multiplikatywną redukcję mod } p, \\ 2 + \lambda_p, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie λ_p jest całkowite i nieujemne. Nie będziemy tu przytaczać szczegółowej definicji liczb λ_p , gdyż nie jest to istotne w naszych rozważaniach. Ogólnie można powiedzieć, że $p|\Delta \Leftrightarrow p|N$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1. $L(E, s)$ przedłuża się do funkcji całkowitej, która spełnia równanie funkcyjne

$$\Lambda(E, s) = \eta \Lambda(E, 2 - s),$$

gdzie

$$\Lambda(E, s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(E, s)$$

oraz $\eta = \pm 1$.

Powyższe twierdzenie zostało udowodnione w połowie lat dziewięćdziesiątych XX wieku dla pewnej klasy krzywych eliptycznych przez Taylora i Wileasa, przy dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata. Po kilku latach zostało udowodnione dla dowolnej krzywej eliptycznej przez Breuila, Diamonda, Conrada i Taylora [7].

Z równania funkcyjnego widzimy, że funkcja $L(E, s)$ ma zera w punktach $s = 0, -1, -2, \dots$ i nazywamy te zera trywialnymi. Pozostałe zera znajdują się w tzw. pasie krytycznym $\frac{1}{2} < \Re s < \frac{3}{2}$. Przypuszcza się, że wszystkie zera w pasie krytycznym leżą na prostej $\Re s = 1$ i są pojedyncze (Hipoteza Riemanna). W przeciwieństwie do funkcji dzeta Riemanna istnieją L -funkcje krzywej eliptycznej, które mają zero rzeczywiste na prostej krytycznej w punkcie $s = 1$ oraz Birch i Swinnerton-Dyer sformułowali hipotezę o związku krotności tego zera z rangą grupy Mordella-Weila na krzywej eliptycznej.

Podana wyżej L -funkcja krzywej eliptycznej nie jest standardową L -funkcją, która jest początkowo określona dla $\Re s > 1$, i dla której równanie funkcyjne wiąże wartości s i $1 - s$, dlatego w dalszym ciągu będziemy zajmować się funkcją

$$F(s) = L\left(s + \frac{1}{2}, E\right), \quad (1.23)$$

czyli znormalizowaną L -funkcją.

Wniosek 1.2. Funkcja $F(s)$ jest holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Re(s) > 1$, $|F(s)| > 0$ w tej półpłaszczyźnie, ponadto $F(s)$ przedłuża się do funkcji całkowitej i spełnia równanie funkcyjne

$$\tilde{\Lambda}(E, s) = \eta \tilde{\Lambda}(E, 1 - s), \quad (1.24)$$

gdzie

$$\tilde{\Lambda}(E, s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) F(s) \quad (1.25)$$

oraz $\eta = \pm 1$.

Dowód. Wynika bezpośrednio z tw. 1.1. □

W tym miejscu podamy dwa ważne fakty związane z L -funkcjami. W [8] na str. 104 znajdujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.3. *Niech $L(s)$ będzie L -funkcją stopnia d . Niech $N(T, L)$ będzie liczbą zer $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji $L(s)$ takich, że $0 \leq \beta \leq 1$ i $|\gamma| \leq T$, $T \geq 2$. Zachodzi wówczas równość*

$$N(T, L) = \frac{T}{\pi} \log \frac{qT^d}{(2\pi e)^d} + O(\log T). \quad (1.26)$$

Także w [8], str. 97, znajduje się istotny lemat

Lemat 1.4. *Dowolna L -funkcja $L(s)$ jest wielomianowo ograniczona w pionowym pasie $s = \sigma + it$, $a \leq \sigma \leq b$, $t \geq 1$.*

1.3. Funkcja Möbiusa krzywej eliptycznej

Definicja 1.3. Arytmetyczną funkcję Möbiusa $\mu_E(n)$ krzywej eliptycznej definiujemy jako współczynniki szeregu Dirichleta odwrotności funkcji $F(s)$

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^s}, \quad \sigma > 1.$$

Twierdzenie 1.5. *i) Funkcja $\mu_E(n)$ jest funkcją multiplikatywną.*

$$ii) \mu_E(p^k) = \begin{cases} -\frac{a_p}{\sqrt{p}}, & k = 1 \\ 1, & k = 2 \text{ i } p \nmid \Delta \\ 0, & k \geq 3 \text{ lub } k \geq 2 \text{ i } p | \Delta. \end{cases}$$

iii) $\mu_E(n) = O(n^\epsilon)$ dla dowolnego $\epsilon > 0$.

Dowód. i) Uzasadnienie tej własności wynika z własności grupy funkcji moltiplicatywnych ze splotem Dirichleta i elementem neutralnym

$$e(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Mianowicie skorzystamy z podanego niżej lematu, który znaleźć można (jako Wniosek) w [15], str.109

Lemat 1.6. *Jeżeli funkcja $f * g = h$ jest moltiplicatywna, to obie funkcje f, g są moltiplicatywne lub też żadna z nich.*

Wystarczy przyjąć $f(n) = c_n$, gdzie c_n są współczynnikami szeregu Dirichleta funkcji $F(s)$, $g(n) = \mu_E(n)$, wtedy $f(n) * g(n) = e(n)$, a stąd otrzymujemy moltiplicatywność funkcji $\mu_E(n)$.

ii) Z definicji funkcji $F(s)$ oraz równości (1.21) mamy

$$\frac{1}{F(s)} = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{a_p}{\sqrt{p}} p^{-s}\right) \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{a_p}{\sqrt{p}} p^{-s} + p^{-2s}\right),$$

stąd wynika teza.

iii) Jeśli liczba n dzieli się przez trzecią potęgę jakiegokolwiek liczby pierwszej to teza jest oczywista, bo wtedy z i) i ii) mamy od razu $\mu_E(n) = 0$. Załóżmy więc, że n nie dzieli się przez żadną trzecią potęgę liczby pierwszej i niech będzie dany rozkład liczby n na czynniki pierwsze $n = p_1 \cdots p_r \cdot q_1^2 \cdots q_s^2$, przy czym dowolne dwie liczby spośród p_i, q_j są różne, co możemy też zapisać $n = n_1 n_2^2$, $(n_1, \Delta) = 1$, $(n_1, n_2) = 1$ gdzie n_1 i n_2 są bezkwadratowe, wtedy

$$\mu_E(n) = \prod_{p^k | n} \mu_E(p^k) = (-1)^r \frac{a_{p_1} \cdots a_{p_r}}{\sqrt{p_1 \cdots p_r}} = \frac{\mu(n_1)}{\sqrt{n_1}} \prod_{p|n_1} a(p),$$

gdy $(n_2, \Delta) = 1$ oraz $\mu_E(n) = 0$, gdy $(n_2, \Delta) > 1$.

Korzystając teraz z nierówności Hasse i oszacowania $d(n) = O(n^\epsilon)$ (p.[15], str. 114) mamy

$$\mu_E(n) = O\left(2^{\omega(n)}\right) = O(d(n)) = O(n^\epsilon).$$

□

Definicja 1.4. Klasą Selberga S nazywamy zbiór wszystkich funkcji $f(s)$ zmiennej zespolonej s spełniających poniższe warunki:

1.(Szereg Dirichleta): Dla $\Re s > 1$, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ gdzie $a_1 = 1$.

2.(Przedłużenie analityczne):Dla pewnego całkowitego $m \geq 0$, $(s-1)^m f(s)$ przedłuża się do funkcji całkowitej skończonego rzędu.

3.(Równanie funkcyjne):Istnieją liczby $Q > 0$, $\alpha_i > 0$, $r_i \in \mathbb{C}$, dla których $\Re r_i \geq 0$ takie, że funkcja

$$\Phi(s) = Q^s \prod_{i=1}^d \Gamma(\alpha_i s + r_i) f(s) \quad (1.27)$$

spełnia równanie funkcyjne

$$\Phi(s) = w \bar{\Phi}(1-s), \quad (1.28)$$

gdzie w jest liczbą zespoloną taką, że $|w| = 1$.

4.(Iloczyn Eulera):Dla $\Re(s) > 1$

$$f(s) = \prod_p f_p(s),$$

gdzie

$$f_p(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}\right)$$

i $b_{p^k} = O(p^{k\theta})$ dla pewnego $\theta < \frac{1}{2}$.

5.(Hipoteza Ramanujana): Dla dowolnego ustalonego $\epsilon > 0$

$$a_n = O(n^\epsilon),$$

gdzie stała w symbolu O może zależeć od ϵ .

Liczbę $d_f = 2 \sum_{j=1}^d \alpha_j$ nazywamy stopniem funkcji f .

Mamy następujący lemat

Lemat 1.7. *Funkcja $F(s)$ należy do klasy Selberga.*

Dowód. Warunek 1. jest spełniony w sposób oczywisty. Spełnienie warunków 2., 3. jest natychmiastową konsekwencją wniosku 1.2. Warunek 5. wynika z twierdzenia 1.5. Sprawdzimy warunek 4. Z równości 1.21 i równości

$\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$ mamy, że spełniony jest warunek $F(s) = \prod_p F_p(s)$,

gdzie $F_p(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}\right)$. Niech teraz $a_p = \alpha_p + \bar{\alpha}_p$, $\alpha_p \bar{\alpha}_p = p$, zatem $|\alpha_p| = \sqrt{p}$.

$$\log L(s, E) = - \sum_{p|\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a_p}{p^s}\right)^n - \sum_{p \nmid \Delta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_p}{p^s}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\bar{\alpha}_p}{p^s}\right)^n \right).$$

Zatem

$$F(s) = \exp \left(- \sum_{p|\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a_p/\sqrt{p}}{p^s} \right)^n - \sum_{p \nmid \Delta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_p/\sqrt{p}}{p^s} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\overline{\alpha}_p/\sqrt{p}}{p^s} \right)^n \right) \right).$$

Stąd widać, że dla $p \nmid \Delta$ mamy $|b_{p^k}| \leq \left| \frac{\alpha(p)}{\sqrt{p}} \right|^k + \left| \frac{\overline{\alpha}(p)}{\sqrt{p}} \right|^k = 2$, a dla $p|\Delta$ mamy $|b_{p^k}| \leq 1$. □

Rozdział 2

Lematy

2.1. Analityczne własności funkcji $m(F, z)$

W przypadku klasycznej funkcji Möbiusa, jak wcześniej wspominaliśmy, bada się jej funkcję sumacyjną

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n). \quad (2.1)$$

Możemy analogicznie dla L -funkcji krzywej eliptycznej i odpowiadającej jej funkcji Möbiusa $\mu_E(n)$ wprowadzić funkcję sumacyjną

$$M_E(x) = \sum_{n \leq x} \mu_E(n). \quad (2.2)$$

Podobnie jak w przypadku funkcji dzeta Riemanna, hipoteza Riemanna dla naszej funkcji F jest równoważna oszacowaniu

$$M_E(x) \ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2} + \epsilon},$$

dla dowolnego $\epsilon > 0$, co jest treścią tw.5.14 z [8].

Ponadto z oszacowania obszaru wolnego od zer

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log(|t| + 2)}$$

wynika oszacowanie

$$M_E(x) \ll x e^{-c\sqrt{\log x}}. \quad (2.3)$$

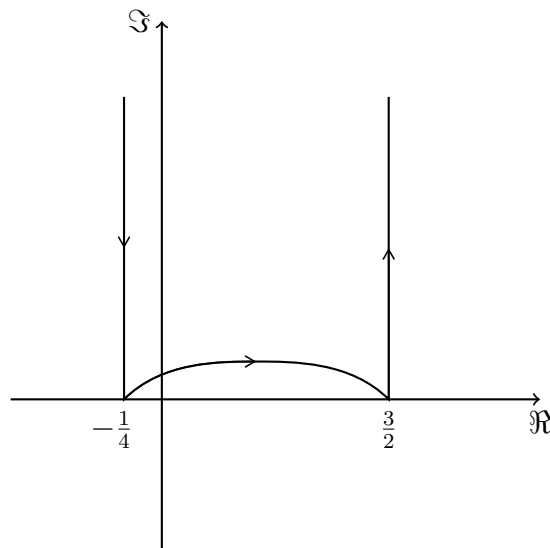
Dwa powyższe fakty wynikają z twierdzeń z pracy [17].

W dalszej części pracy będziemy głównie zajmować się analitycznymi własnościami funkcji

$$m(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sz}}{F(s)} ds, \quad (2.4)$$

która jak już wspomniano we Wstępie jest odpowiednikiem funkcji badanej przez K. Bartz i J. Kaczorowskiego funkcji $m(z)$.

Występujący w określeniu funkcji $m(F, z)$ kontur C składa się z półprostej $(-\frac{1}{4} + i\infty, -\frac{1}{4}]$, krzywej gładkiej l_1 określonej przy pomocy funkcji $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ takiej, że $\tau(0) = -\frac{1}{4}$, $\tau(1) = \frac{3}{2}$ i $0 < \Im \tau < 1$ dla $t \in (0, 1)$ i pomiędzy odcinkiem $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$ a krzywą l_1 funkcja $F(s)$ nie ma zer oraz półprostej $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + i\infty)$.



Do udowodnienia niektórych własności funkcji $m(F, z)$ będziemy potrzebować więcej własności funkcji $F(s)$, które są analogiczne jak dla funkcji dzeta Riemanna. Punktem wyjścia będzie poniższy lemat, którego dowód można znaleźć w [21] na stronie 49.

Lemat 2.1. *Jeżeli $f(s)$ jest regularna oraz zachodzi nierówność*

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M, \quad M > 1$$

w kole $|s - s_0| \leq r$, to

$$\left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho} \right| < \frac{AM}{r}, \quad |s - s_0| \leq \frac{1}{4}r,$$

gdzie ρ przebiega zera funkcji $f(s)$ takie, że $|\rho - s_0| \leq \frac{1}{2}r$.

W dalszej części udowodnimy kilka lematów dotyczących związków funkcji F i jej zer. W poniższych rozważaniach wybieramy gałąź główną logarytmu.

Jako konsekwencję powyższego lematu otrzymujemy

Lemat 2.2. *Jeżeli $\rho = \beta + i\gamma$ przebiega nietrywialne zera funkcji $F(s)$ to*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log |t|), \quad (2.5)$$

dla $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \geq 2$.

Dowód. Lemat 5.2 na str.97 w [8] mówi, że dowolna L-funkcja jest wielomianowo ograniczona w pionowym pasie $s = \sigma + it$, gdzie $a \leq \sigma \leq b$, $|t| \geq 1$. Zatem w lemacie 2.1 możemy przyjąć $f(s) = F(s)$, $s_0 = 2 + it$, $r = 12$, wtedy przy $M = A \log T$ mamy

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{|\rho - s_0| \leq 6} \frac{1}{s - \rho} + O(\log T) \quad (2.6)$$

dla $|s - s_0| \leq 3$, w szczególności dla $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| = T$. Otrzymujemy wtedy równość (2.6) z członem resztowym $O(\log |t|)$. Ponadto każdy składnik sumy występujący w (2.6), a nie występujący w (2.5), jest ograniczony, ponieważ wtedy $\left| \frac{1}{s - \rho} \right| \leq \left| \frac{1}{t - \gamma} \right| \leq 1$, i liczba takich składników nie przekracza $N(t + 6) - N(t - 6) = O(\log |t|)$, co wynika z tw.1.3. \square

Lemat 2.3. *Jeżeli $\rho = \beta + i\gamma$ przebiega nietrywialne zera funkcji $F(s)$ to*

$$\log F(s) = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \log(s - \rho) + O(\log |t|), \quad (2.7)$$

dla $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \geq 2$, przy czym $-\pi < \Im \log(s - \rho) \leq \pi$.

Dowód. Całkując obustronnie równość (2.5) w granicach od s do $2 + it$, przy czym zakładamy, że t nie jest równe części urojonej żadnego zera funkcji F , otrzymujemy

$$\log F(s) - \log F(2 + it) = \sum_{|t-\gamma|\leq 1} (\log(s - \rho) - \log(2 + it - \rho)) + O(\log |t|), \quad (2.8)$$

$\log F(2 + it)$ jest ograniczony, ponadto $\log(2 + it - \rho)$ także jest ograniczony i takich składników jest $O(\log |t|)$, więc ich suma szacuje się przez $O(\log |t|)$. Zatem lemat jest prawdziwy dla t takich, które nie jest równe części urojonej żadnego zera funkcji F , a przez ciągłość dla wszystkich s w podanym pasie, różnych od zer. \square

Udowodnimy teraz istotny lemat, którego zastosowanie pozwoli później przedstawić funkcję $m(F, z)$, określoną jako całkę, w postaci sumy szeregu.

Lemat 2.4. *Istnieje stała dodatnia A taka, że każdy przedział $(T, T + 1)$, $T \geq T_0 > 0$ zawiera wartość t , dla której*

$$|F(s)| > t^{-A} \quad (-1 \leq \sigma \leq 2).$$

Dowód. Porównując części rzeczywiste lewej i prawej strony równości (2.7) i korzystając z równości $\Re \log z = \log |z|$ mamy

$$\log |F(s)| = \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \log |s - \rho| + O(\log t) \geq \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \log |t - \gamma| + O(\log t), \quad (2.9)$$

gdyż $|s - \rho| = |\sigma - \beta + i(t - \gamma)| \geq |t - \gamma|$.

Następnie mamy

$$\begin{aligned} \int_T^{T+1} \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \log |t - \gamma| dt &= \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} \int_{\max(\gamma-1, T)}^{\min(\gamma+1, T+1)} \log |t - \gamma| dt \\ &\geq \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \log |t - \gamma| dt = \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} (-2) > -A_1 \log T, \end{aligned} \quad (2.10)$$

przy pewnym $A_1 > 0$. Ostatnia nierówność wynika z faktu, że w pasie $T-1 \leq \Im z \leq T+2$ funkcja $F(s)$ ma $O(\log T)$ zer, co jest wnioskiem z tw.1.3.

Jeżeli dla każdego $t \in (T, T+1)$ byłoby $\sum_{|t-\gamma| \leq 1} \log |t-\gamma| \leq -A_1 \log T$, to mielibyśmy

$$\int_T^{T+1} \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \log |t-\gamma| dt \leq \int_T^{T+1} (-A_1 \log T) dt = -A_1 \log T,$$

a więc sprzeczność z powyższym.

Zatem

$$\sum_{|t-\gamma| \leq 1} \log |t-\gamma| > -A_1 \log T$$

dla pewnego $t \in (T, T+1)$, stąd wynika, że $\log |F(s)| > -A \log T$ dla pewnego $t \in (T, T+1)$ oraz dla każdego $\sigma \in [-1, 2]$. □

W pracy [9] na str.2 znajduje się stwierdzenie mówiące, że istnieje rosnący ciąg liczb dodatnich $(T_n)_{n=1}^\infty$, $T_n \rightarrow \infty$ taki, że

$$\max_{-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}} |\zeta(\sigma + iT_n)|^{-1} = O(T_n^A). \quad (2.11)$$

Poniżej podajemy analogiczny fakt dla funkcji $F(s)$, który jest łatwym wnioskiem z lematu 2.4.

Lemat 2.5. *Istnieje rosnący ciąg liczb dodatnich $(T_n)_{n=1}^\infty$, $T_n \rightarrow \infty$ taki, że*

$$\max_{-1 \leq \sigma \leq 2} |F(\sigma + iT_n)|^{-1} = O(T_n^A), \quad (2.12)$$

dla pewnej stałej dodatniej A .

Dowód. □

Ostatni lemat stosuje się w dowodzie, już wspomnianej, własności zawartej w tezie poniższego lematu

Lemat 2.6. *Funkcja $m(F, z)$ przedstawia się w postaci*

$$m(F, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \Im \rho < T_n}} \operatorname{res}_{s=\rho} \left(\frac{e^{sz}}{F(s)} \right),$$

gdzie ciąg $(T_n)_{n=1}^\infty$ jest taki jak w lemacie 2.5.

Dowód. Dla $z \in \mathbb{H}$ możemy zapisać

$$m(F, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(z, F; T_{n-1}, T_n), \quad (2.13)$$

gdzie dla dowolnych rzeczywistych $0 < a < b$ kładziemy

$$m(z, F; a, b) = \sum_{a < \gamma \leq b} \operatorname{res}_{s=\rho} \left\{ \frac{e^{sz}}{F(s)} \right\}. \quad (2.14)$$

przy czym sumowanie jest po nietrywialnych zerach $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji $F(s)$, takich że $a < \gamma \leq b$.

Mając ciąg T_n możemy pogrupować wyrazy szeregu $\sum_{\gamma > 0} \operatorname{res}_{s=\rho} \left(\frac{e^{sz}}{F(s)} \right)$ tak, że jest zbieżny, ponieważ

$$\int_{-\frac{1}{4}+iT_n}^{\frac{3}{2}+iT_n} \frac{e^{sz}}{F(s)} \ll \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} T_n^A e^{(\sigma+iT_n)(x+iy)} d\sigma \ll \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} T_n^A e^{\sigma x - T_n y} \rightarrow 0, \text{ przy } n \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

i teraz korzystając z tw. Cauchy'ego otrzymujemy tezę. \square

Z powyższego widzimy, że dla $\Im(z) > 0$ możemy napisać

$$m(F, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \Im \rho < T_n}} \frac{1}{(k_\rho - 1)!} \frac{d^{k_\rho - 1}}{ds^{k_\rho - 1}} \left[(s - \rho)^{k_\rho} \frac{e^{sz}}{F(s)} \right]_{s=\rho}. \quad (2.16)$$

Pokażemy teraz, że $m(F, z)$ jest funkcją holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie.

Rozbijmy funkcję $m(F, z)$ na sumę trzech całek

$$\begin{aligned} 2\pi i m(F, z) &= n_1(z) + n_2(z) + n_3(z) \\ &= \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds + \int_{l_1} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds + \int_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}+i\infty} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Badamy zbieżność całki n_1 .

Z równania funkcyjnego (1.25) dla funkcji $F(s)$ mamy

$$F(s) = \eta \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{1-2s} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} F(1 - s), \quad (2.18)$$

korzystając teraz z oszacowania (1.13) oraz faktu, że $|F(\frac{5}{4} - it)| \asymp 1$ otrzymujemy

$$F\left(-\frac{1}{4} + it\right) \asymp \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}-2it} \frac{|t|^{\frac{7}{4}}}{|t|^{\frac{1}{4}}} \asymp t^{\frac{3}{2}}, \text{ przy } t \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

więc

$$\frac{1}{|F(-\frac{1}{4} + it)|} = O(|t|^{-\frac{3}{2}}), \text{ przy } t \rightarrow \infty,$$

stąd mamy

$$\int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}+it} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds \ll \int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}x-ty} dt.$$

Zatem całka

$$n_1(z) = \left(\int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}+i} + \int_{-\frac{1}{4}+i}^{-\frac{1}{4}} \right) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds$$

jako suma dwóch bezwzględnie zbieżnych całek jest zbieżna bezwzględnie na \mathbb{H} , stąd wynika holomorficzność $n_1(z)$ w tym obszarze. Całka $n_3(z)$ jest także bezwzględnie zbieżna dla $y > 0$, bo

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{|e^{sz}|}{|F(s)|} |ds| \ll \int_0^{\infty} e^{\frac{3}{2}x-ty} dt,$$

a więc jest funkcją holomorficzną dla $y > 0$. Oczywiście $n_2(z)$ przedstawia funkcję analityczną na całej płaszczyźnie, jako całka z funkcji ograniczonej po zbiorze domkniętym i ograniczonym.

Tak więc udowodniliśmy

Lemat 2.7. *Funkcja $m(F, z)$ jest funkcją holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie.*

Na zakończenie rozważań w tym rozdziale udowodnimy lemat, który jak zobaczymy w następnym rozdziale pozwoli nam przedłużyć meromorficznie funkcję $m(F, z)$ na całą płaszczyznę zespoloną, otrzymać równanie funkcyjne i formułę dokładną.

Lemat 2.8. Niech $z = x + iy, y > 0, s = Re^{i\theta}, R \sin \theta \geq 1, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Wtedy dla $R \geq R(x, y)$ prawdziwa jest nierówność

$$\left| \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| \leq e^{-y \frac{R}{2}}.$$

Dowód. Z równania funkcyjnego (1.25) mamy

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} \frac{1}{F(1-s)}, \quad (2.20)$$

stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \log \frac{e^{sz}}{F(s)} &= sz - (2s-1) \log 2\pi - \log \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right) + \\ &+ \log \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - s\right) \log N - \log(\eta F(1-s)). \end{aligned}$$

Mamy

$$sz = Re^{i\theta}(x + iy) = xR \cos \theta - yR \sin \theta + i(R \sin \theta + x \cos \theta).$$

Skorzystamy z równości

$$\log \left(\frac{3}{2} - s \right) = \log \left| \frac{3}{2} - s \right| + i \operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - s \right).$$

Dalej mamy

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{3}{2} - s \right| &= \log \left(\frac{3}{2} - R \cos \theta - iR \sin \theta \right) \\ &= \log \sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \log \left(R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4} \right) \\ &= \log R + \frac{1}{2} \log \left(1 - 3 \frac{\cos \theta}{R} + \frac{9}{4R^2} \right) = \log R + O\left(\frac{1}{R}\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdyż $\log(1-x) = O(x)$, dla dostatecznie małych x . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \cos \operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - s \right) &= \cos \operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - R \cos \theta - iR \sin \theta \right) \\ &= \frac{\frac{3}{2} - R \cos \theta}{\sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}}} = -\cos \theta + O\left(\frac{1}{R}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdyż

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}}} &= \frac{R - \sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}}}{\sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}}} + 1 \\ &= 1 + \frac{3R \cos \theta - \frac{9}{4}}{\sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}} \left(R + \sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}} \right)} = 1 + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podobnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - s \right) &= \sin \operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - R \cos \theta - iR \sin \theta \right) \\ &= \frac{-R \sin \theta}{\sqrt{R^2 - 3R \cos \theta + \frac{9}{4}}} = -\sin \theta + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Korzystając ze znanych związków trygonometrycznych $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$, $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ otrzymujemy

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{3}{2} - s \right) = \theta + \pi + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Tak więc

$$\log \left(s + \frac{1}{2} \right) = \log R + i\theta + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

następnie korzystając ze wzoru Stirlinga

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2} \right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

dostajemy

$$\begin{aligned} -\Re \log \Gamma \left(\frac{3}{2} - s \right) &= -\Re(1 - s) \log \left(\frac{3}{2} - s \right) - \Re s + O(\log R) \\ &= -\Re(1 - Re^{i\theta}) \left(\log R + i(\theta + \pi) + O\left(\frac{1}{R}\right) \right) - \Re s + O(\log R) \\ &= R \log R \cos \theta - R(\theta + \pi) \sin \theta - R \cos \theta + O(\log R). \end{aligned} \quad (2.25)$$

podobnie

$$\begin{aligned} \Re \log \Gamma \left(s + \frac{1}{2} \right) &= \Re \left(s \log \left(s + \frac{1}{2} \right) \right) - \Re s + O(\log R) \\ &= R \log R \cos \theta - R\theta \sin \theta - R \cos \theta + O(\log R), \end{aligned} \quad (2.26)$$

korzystając ponadto z oszacowania $\log F(\sigma + it) \ll \log(|t| + 2)$, $|\sigma| \geq 1$, $|t| \geq 1$, otrzymujemy w końcu

$$\log \left| \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| = \Re \log \frac{e^{sz}}{F(s)} = 2R \log R \cos \theta + Rf(\theta, x, y) + O(\log R), \quad (2.27)$$

gdzie $f(\theta, x, y) = \left(x + 2 \log \frac{\sqrt{N}}{2\pi} - 2\right) \cos \theta - (y + 2\theta + \pi) \sin \theta$.

Dla $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\log R}}$ mamy

$$f(\theta, x, y) = -(y + 2\theta + \pi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log R}}\right)$$

i wtedy

$$\log \left| \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| \leq -\frac{yR}{2},$$

a dla $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\log R}} \leq \theta \leq \pi$ jest

$$|\cos \theta| \gg \frac{1}{\sqrt{\log R}}$$

i wtedy

$$\log \left| \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| = -2|\cos \theta|R \log R + O(R) \leq -yR \leq -\frac{yR}{2}$$

dla dostatecznie dużych R , co dowodzi tezy lematu. □

Rozdział 3

Zespolone formuły dokładne

3.1. Równanie funkcyjne

Pokażemy teraz, że $m(z)$ przedłuża się meromorficznie na \mathbb{C} i spełnia pewne równanie funkcyjne.

Przy oznaczeniach z równości (2.17) widać od razu, że całka $n_2(z)$ przedstawia funkcję całkowitą.

Całkę $n_3(z)$ przekształcamy w poniższy sposób

$$n_3(z) = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds = -e^{\frac{3}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}(z - \log n)}, \quad (3.1)$$

a więc $n_3(z)$ jest funkcją meromorficzną na płaszczyźnie zespolonej mającą bieguny pierwszego rzędu w punktach $z = \log n, \mu_E(n) \neq 0$ z residuami

$$\operatorname{res}_{z=\log n} n_3(z) = -\mu_E(n). \quad (3.2)$$

Rozpatrzmy teraz funkcję $n_1(z)$. Z równania funkcyjnego mamy

$$n_1(z) = \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds = \frac{1}{\eta} \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{sz} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2s-1} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right) F(1-s)} ds, \quad (3.3)$$

korzystając z równości

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{\cos(\pi s)}$$

oraz

$$\cos(\pi s) = \frac{e^{\pi i s} + e^{-\pi i s}}{2}$$

mamy dalej

$$\begin{aligned}
n_1(z) &= -\frac{1}{\eta\sqrt{N}} \left(\int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})+\pi i)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{F(1-s)} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})-\pi i)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{F(1-s)} ds \right) \quad (3.4) \\
&= -\frac{1}{\eta\sqrt{N}} (n_{1,1}(z) + n_{1,2}(z)),
\end{aligned}$$

korzystając z oszacowania $\left| \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{F(1-s)} \right| \ll e^{-\pi|t|}$, $s = -\frac{1}{4} + it$, które wynika z (1.13) i (2.19) otrzymujemy, że całka $n_{1,1}(z)$ jest zbieżna w półpłaszczyźnie $y > -2\pi$ i przedstawia tam funkcję holomorficzną, a $n_{1,2}(z)$ jest funkcją holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie.

Dalej mamy

$$\begin{aligned}
n_{1,2} &= - \int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} \frac{e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})-\pi i)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{F(1-s)} ds \\
&\quad + \int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})-\pi i)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{F(1-s)} ds \quad (3.5) \\
&= n_{1,2,1}(z) + n_{1,2,2}(z).
\end{aligned}$$

Korzystając z oszacowania podanego wyżej łatwo widać, że $n_{1,2,2}$ jest zbieżna w półpłaszczyźnie $y < 2\pi$. Pokażemy, że $n_{1,2,1}$ przedstawia funkcję analityczną

$$\begin{aligned}
n_{1,2,1} &= \int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})-\pi i)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1-s}} \right) ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} e^{s(z+2\log(\frac{\sqrt{N}}{2\pi})-\pi i+\log n)} \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\frac{1}{2}) ds. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Niech

$$D_1 = \left(-\frac{1}{4} - i\infty, -\frac{1}{4} - i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} - i, \frac{3}{4} - i\right] \cup \left[\frac{3}{4} - i, \frac{3}{4} + i\right] \\ \cup \left[\frac{3}{4} + i, -\frac{1}{4} + i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} + i, -\frac{1}{4} + i\infty\right]$$

oraz

$$D_2 = \left[-\frac{1}{4} - i, -\frac{1}{4} + i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} + i, \frac{3}{4} + i\right] \cup \left[\frac{3}{4} + i, \frac{3}{4} - i\right] \cup \left[\frac{3}{4} - i, -\frac{1}{4} - i\right].$$

Przy tych oznaczeniach mamy

$$\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} e^{s\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) ds \\ = \left(\int_{D_1} + \int_{D_2}\right) e^{s\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) ds. \quad (3.7)$$

Obliczamy powyższe dwie całki. Korzystając kolejno z definicji funkcji G -Meijera oraz własności (1.7), (1.10) oraz (1.11) mamy

$$\int_{D_1} e^{s\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) ds \\ = 2\pi i G_{20}^{02} \left(e^{z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n} \left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right. \right) \\ = 2\pi i G_{02}^{20} \left(e^{-\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right) \\ = 4\pi i K_1 \left(2e^{-\frac{1}{2}\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \right) \\ = 4\pi i \left(-\frac{1}{2} i\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i} H_1^{(2)} \left(2e^{-\frac{1}{2}\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} e^{-\frac{1}{2}\pi i} \right) \right) \\ = -2\pi^2 i H_1^{(2)} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right). \quad (3.8)$$

Natomiast z tw. Cauchy'ego o residuach mamy

$$\int_{D_2} e^{s\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) ds \\ = -2\pi i e^{\frac{1}{2}\left(z+2\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)-\pi i+\log n\right)} \\ = -2\pi i \cdot (-i) \frac{e^{\frac{z}{2}} \sqrt{Nn}}{2\pi} = -4\pi \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Zatem

$$n_{1,2,1} = -2\pi^2 i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(H_1^{(2)} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} i \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \right). \quad (3.10)$$

Pokażemy, że ostatni szereg jest bezwzględnie zbieżny. Z (1.6) mamy równość

$$\begin{aligned} & H_1^{(2)} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} i \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \\ &= J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - i \left(Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Pokażemy najpierw, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \quad (3.11)$$

jest zbieżny bezwzględnie. Istotnie korzystając z oszacowania

$$|J_v(z)| \leq \left| \frac{1}{2} z \right|^v e^{|y|} / \Gamma(v+1), \quad (3.12)$$

którego dowód można znaleźć w [6], str. 14 otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_E(n)}{n} \right| \left| J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \right| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\epsilon}} e^{\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{|\frac{z}{2}|}} \cdot e^{|\frac{z}{2}|} \quad (3.13)$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$, gdyż $|e^z| \leq e^{|z|}$.

Teraz pokażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \right) \quad (3.14)$$

jest zbieżny bezwzględnie.

Z równości (1.5) mamy

$$\begin{aligned} & Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \\ &= 2\gamma J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) + 2 \log \left(\frac{4\pi}{2\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{\left(\frac{\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}}}{2} \right)^{1+2m}}{m!(m+1)!} (h_{m+1} + h_m) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \quad (3.16)$$

jest jak pokazaliśmy wyżej bezwzględnie zbieżny. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \log \left(\frac{4\pi}{2\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \quad (3.17)$$

także jest bezwzględnie zbieżny, gdyż korzystając z oszacowania $z^\alpha \log z \ll 1$, dla $\alpha > 0$ i $z \ll 1$, ustalamy tutaj gałąź główną logarytmu, mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_E(n)}{n} \right| \left| \log \left(\frac{4\pi}{2\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \right| \left| J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) \right| \\ & \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} - \epsilon}} e^{\alpha|\frac{z}{2}|} e^{\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{|\frac{z}{2}|}} \cdot e^{|\frac{z}{2}|}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Przyjmując teraz α dostatecznie małe, np. $\alpha = \frac{1}{4}$, otrzymujemy bezwzględną zbieżność szeregu.

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{\left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{1+2m}}{m!(m+1)!} (h_{m+1} + h_m) \right) \quad (3.19)$$

jest bezwzględnie zbieżny, bo

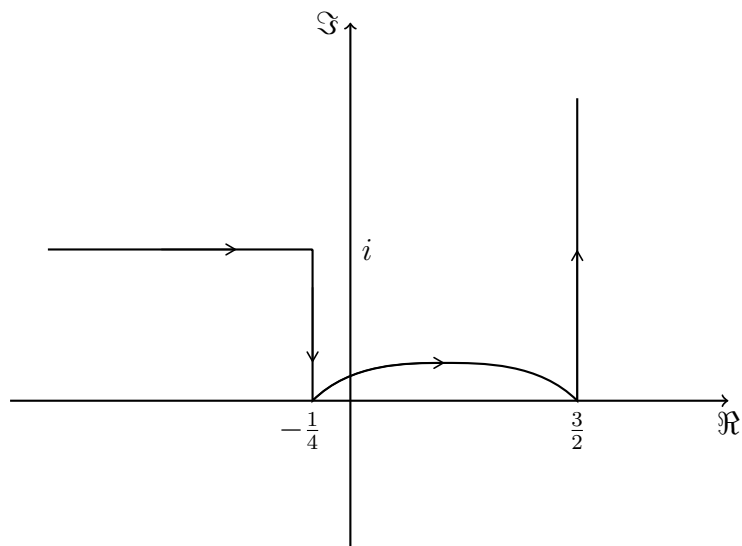
$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{\left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{1+2m}}{m!(m+1)!} (h_{m+1} + h_m) \right) \right| \\ & \ll \left| \frac{2\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left| \frac{2\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right|^{2m}}{m!} = \left| \frac{2\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right| e^{\frac{4\pi^2}{Nn} |e^{-z}|}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A więc pokazaliśmy, że $n_{1,2,1}$ jest funkcją całkowitą.

W ten sposób otrzymaliśmy przedłużenie meromorficzne funkcji $m(F, z)$ do półpłaszczyzny $\Im z > -2\pi$.

Niech C_1 składa się z półprostej $s = \sigma + i$, $-\infty < \sigma \leq -\frac{1}{4}$, odcinka $[-\frac{1}{4} + i, -\frac{1}{4}]$, krzywej $l : [-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$.

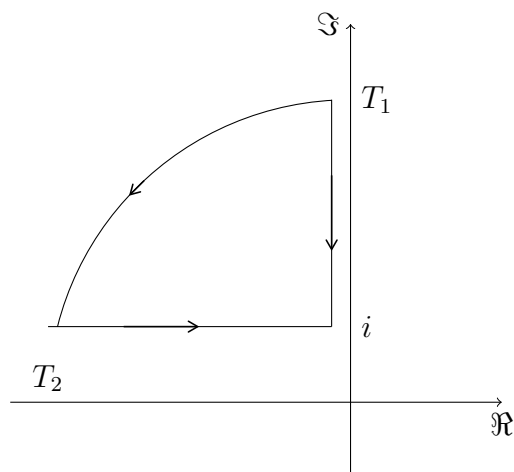
Z uwagi na lemat 2.8 można zmienić kontur całkowania C na kontur składający się z C_1 oraz półprostej $s = \frac{3}{2} + it$, $0 \leq t < \infty$



Wynika to stąd, że

$$\int_{-\frac{1}{4}+iT_1}^{-\frac{1}{4}+i} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds = \int_S \frac{e^{sz}}{F(s)} ds + \int_{T_2+i}^{-\frac{1}{4}+i} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

gdzie S oznacza łuk okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $R > 1$ zawarty między półprostą $-\frac{1}{4} + it$, $1 \leq t < \infty$, a półprostą $t + i$, $-\infty < t < -\frac{1}{4}$, a $T_1 = T_1(R)$ i $T_2 = T_2(R)$ oznaczają odpowiednio rzędną i odciętą przecięć półprostych z okręgiem $|s| = R$.



Zauważmy, że z lematu 2.8

$$\left| \int_S \frac{e^{sz}}{F(s)} ds \right| \leq |S| e^{-\frac{yR}{2}} \rightarrow 0,$$

gdy $R \rightarrow \infty$.

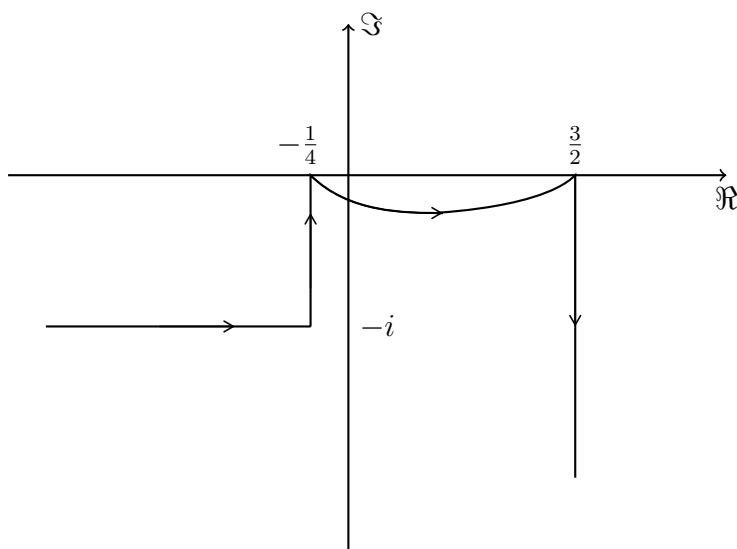
$$m(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds + M_0^+(z),$$

gdzie $M_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds$. Zauważmy dalej, że

$$\bar{m}(F, z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

gdzie $\bar{C} = \left[-\frac{1}{4} - i\infty, -\frac{1}{4} - i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} - i, -\frac{1}{4}\right] \cup l\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} - i\infty\right]$.

Poniższy rysunek przedstawia kontur \bar{C}



Zatem

$$\bar{m}(F, z) = M_0^-(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}_1} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

gdzie

$$M_0^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}-i\infty} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

a $\overline{C_1} : l\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-i] \cup [-\frac{1}{4}-i, -\frac{1}{4}-i\infty)$, kontur mogliśmy "złamać" po zastosowaniu lematu 2.8 do funkcji $\overline{F}(s) = \overline{F(\overline{s})}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} M_0^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^s} e^{sz} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} e^{s(z-\log n)} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{z-\log n} e^{\frac{3}{2}(z-\log n)} = -\frac{e^{\frac{3}{2}z}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}(z-\log n)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

oraz

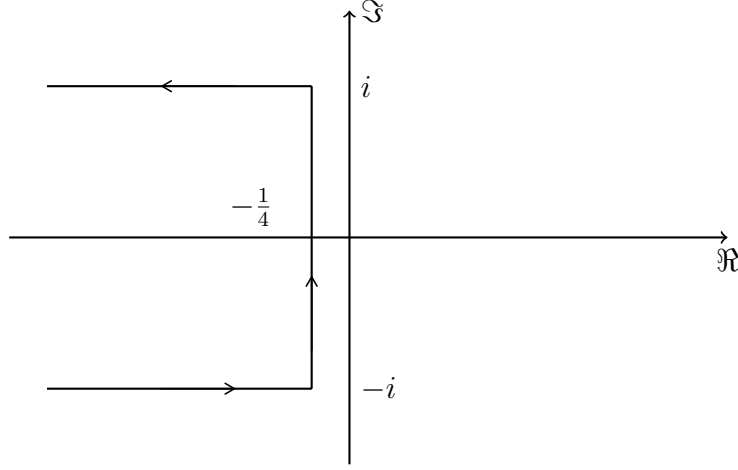
$$\begin{aligned} M_0^-(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}-i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^s} e^{sz} ds = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}-i\infty} e^{s(z-\log n)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{z-\log n} e^{\frac{3}{2}(z-\log n)} = \frac{e^{\frac{3}{2}z}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}(z-\log n)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$M_0^+(z) + M_0^-(z) = 0.$$

Zatem dla $|\Im z| < 2\pi$, $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ mamy

$$m(z) + \overline{m}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds - R(z), \quad (3.23)$$

gdzie $C_2 : (-\infty - i, -\frac{1}{4} - i] \cup [-\frac{1}{4} - i, -\frac{1}{4} + i] \cup [-\frac{1}{4} + i, -\infty + i)$,



(3.24)

$$R(z) = \sum_{\substack{F(\beta)=0 \\ 0 < \beta < 1}} \operatorname{res}_{s=\beta} \frac{e^{sz}}{F(s)}, \quad (3.25)$$

powyższa suma ma skończoną liczbę składników, więc funkcja $R(z)$ jest funkcją całkowitą.

Zauważmy, że z (2.20) dla $\Re s < 0$ mamy

$$\frac{1}{F(s)} = \eta \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1-s}}. \quad (3.26)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} e^{sz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} n^s ds \\ &= \frac{\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} \left(\frac{Nne^z}{(2\pi)^2} \right)^s ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Obliczmy całkę wewnątrz powyższej sumy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} \left(\frac{Nne^z}{(2\pi)^2} \right)^s ds &= G_{20}^{01} \left(\frac{Nne^z}{(2\pi)^2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \\ &= G_{02}^{10} \left(\frac{(2\pi)^2}{Nne^z} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Twierdzenie 3.1. Funkcja $m(z)$ przedłuża się meromorficznie na całą płaszczyznę zespoloną i dla $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ spełnia równanie funkcyjne

$$m(z) + \overline{m(\bar{z})} = -\frac{2\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - R(z). \quad (3.29)$$

Jedynymi osobliwościami tak przedłużonej funkcji $m(z)$ są bieguny pierwszego rzędu w punktach $z = \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ z reszduami

$$\operatorname{res}_{z=\log n} m(z) = -\frac{\mu_E(n)}{2\pi i}.$$

Dowód. Równanie funkcyjne jest słuszne w pasie $|\Im z| < 2\pi$, co wynika z równości (3.23). Korzystając teraz z faktu, że $m(F, z)$ jest holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Im z > -2\pi$ otrzymujemy

$$m(F, z) = -\overline{m(F, z)} - \frac{2\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - R(z)$$

dla $\Im z < 2\pi$, co wynika z zasady przedłużania analitycznego oraz dla $\Im z > -2\pi$

$$\overline{m(F, z)} = -m(F, z) - \frac{2\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - R(z).$$

Zatem $m(F, z)$ i $\overline{m(F, z)}$ przedłużają się do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej oraz dla $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ spełniają równanie (3.29). Wartości reszduów w punktach osobliwych wynikają z (3.2). \square

3.2. Zespólona formuła dokładna

Rozważmy następujące funkcje

$$\begin{aligned} m_0(F, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{z - \log n}, \\ m_1(F, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds, \\ H(F, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pokażemy, że $m_1(F, z)$ i $H(F, z)$ są holomorficznymi w półpłaszczyźnie $\Im(z) > -2\pi$. Zauważmy, że $\operatorname{tg}(\sigma + it) = i + O(e^{-2t})$, przy $t \rightarrow \infty$. Istotnie

dla dostatecznie dużych t mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sigma + it) - i &= \frac{\sin(\sigma + it)}{\cos(\sigma + it)} - i = \frac{e^{i\sigma}e^{-t} - e^{-i\sigma}e^t}{e^{i\sigma}e^{-t} + e^{-i\sigma}e^t} - i \\ &= \frac{2e^{i\sigma}e^{-t}}{i(e^{i\sigma}e^{-t} + e^{-i\sigma}e^t)} \ll \frac{e^{-t}}{|e^{i\sigma}e^{-t} + e^{-i\sigma}e^t|} \ll \frac{e^{-t}}{|e^{-t} - e^t|} \\ &= \frac{e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \frac{1}{e^{2t} - 1} \ll O(e^{-2t}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Zauważmy, że

$$\int_{\frac{3}{2}+i}^{\frac{3}{2}+i\infty} (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds = i \int_1^{\infty} \left(\operatorname{tg} \pi \left(\frac{3}{2} + it \right) - i \right) \frac{e^{\left(\frac{3}{2}+it\right)z}}{F\left(\frac{3}{2} + it\right)} dt, \quad (3.32)$$

ostatnia całka jest bezwzględnie zbieżna w półpłaszczyźnie $\Im z > -2\pi$, ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \left(\operatorname{tg} \pi \left(\frac{3}{2} + it \right) - i \right) \frac{e^{\left(\frac{3}{2}+it\right)z}}{F\left(\frac{3}{2} + it\right)} \right| dt &\ll \int_0^{\infty} e^{-2\pi t} e^{x-ty} dt \\ &\ll e^x \int_0^{\infty} e^{-t(y+2\pi)} dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zatem $H(F, z)$ jest holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Im z > -2\pi$.

Analogicznie mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}+i} \left| (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| |ds| \ll \int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-2\pi t} e^{-\frac{1}{4}x-ty} dt,$$

skorzystaliliśmy tu z oszacowania (2.19). Mamy także

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}+i}^{\frac{3}{2}+i\infty} \left| (\operatorname{tg} \pi s - i) \frac{e^{sz}}{F(s)} \right| |ds| \ll \int_1^{\infty} e^{-2\pi t} e^{\frac{3}{2}x-ty} dt,$$

bo czynnik $F\left(\frac{3}{2} + it\right)$ jest ograniczony. Zatem funkcja $m_1(F, z)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Im z > -2\pi$.

Z oszacowania $\mu_E(n) = O(n^\epsilon)$ wynika, że funkcja

$$m_0(F, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{z - \log n} \quad (3.34)$$

jest meromorficzna na \mathbb{C} i ma bieguny pierwszego rzędu w punktach $s = \log n, \mu_E(n) \neq 0$ z residuami

$$\operatorname{res}_{s=\log n} m_0(F, z) = \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Rozpatrzmy teraz funkcję

$$m^*(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \operatorname{tg}(\pi s) \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

korzystając znowu z lematu 2.8 możemy zapisać

$$\begin{aligned} m^*(F, z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \right) \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)} ds \\ &= m_a^*(F, z) + m_b^*(F, z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{tg}(\pi(\sigma + i)) = \frac{\sin(\pi(\sigma + i))}{\cos(\pi(\sigma + i))} = -i \cdot \frac{e^{2\pi i\sigma} - e^{-2\pi}}{e^{2\pi i\sigma} + e^{-2\pi}} \ll 1. \quad (3.36)$$

Przyjmując teraz w (2.27) $s = \sigma + i$, $\sigma \leq 0$ otrzymujemy

$$\frac{1}{|F(\sigma + i)|} \leq e^{-c_0|\sigma| \log(|\sigma|+2)},$$

a stąd mamy, że $m_a^*(F, z)$ jest funkcją całkowitą. Funkcję $m_b^*(F, z)$ możemy zapisać

$$\begin{aligned} m_b^*(F, z) &= H(F, z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{e^{sz}}{F(s)} ds \\ &= H(F, z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} e^{sz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^s} ds. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zauważmy teraz, że szereg $1/F\left(\frac{3}{2} + it\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{\frac{3}{2}+it}}$ jest zbieżny bezwzględnie, więc powyższą równość możemy całkować wyraz po wyrazie i otrzymujemy

$$m_b^*(F, z) = H(F, z) - \frac{e^{\frac{3}{2}z}}{2\pi} m_0(F, z).$$

To daje przedłużenie meromorficzne $m^*(F, z)$ do pasa $|y| < 2\pi$ i $m^*(F, z)$ ma bieguny w punktach $\log n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\mu_E(n) \neq 0$, z residuami

$$\operatorname{res}_{s=\log n} m^*(F, z) = -\frac{\mu_E(n)}{2\pi}.$$

Rozważmy teraz funkcję $\overline{m}^*(F, z)$, $\Im z < 0$. Zmieniając zmienną $s \mapsto \bar{s}$ otrzymujemy

$$\overline{m}^*(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{C}} \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)} ds,$$

tak jak poprzednio zamieniamy kontur całkowania \overline{C} na kontur składający się z półprostej $\left[\frac{3}{2} + i\infty, \frac{3}{2}\right]$ oraz konturu $\overline{C}_1 = l\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} - i, -\infty - i\right]$ i otrzymujemy

$$\overline{m}^*(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{C}_1} \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)} ds + \overline{H}(F, z) - \frac{e^{\frac{3}{2}z}}{2\pi} m_0(F, z).$$

To daje przedłużenie meromorficzne $\overline{m}^*(F, z)$ do pasa $|\Im(z)| < 2\pi$.

Zatem dla $|\Im(z)| < 2\pi$ zachodzi

$$\begin{aligned} m^*(F, z) + \overline{m}^*(F, z) \\ = -J(F, z) - \frac{e^{\frac{3}{2}z}}{\pi} m_0(F, z) + H(F, z) + \overline{H}(F, z) - R^*(z), \end{aligned} \quad (3.38)$$

gdzie

$$J(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)} ds, \quad (3.39)$$

a $C_2 : \left(-\infty - i, -\frac{1}{4} - i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} - i, -\frac{1}{4} + i\right] \cup \left[-\frac{1}{4} + i, -\infty + i\right)$.

$$R^*(z) = \sum_{\substack{F(\beta)=0 \\ 0 < \beta < 1}} \operatorname{res}_{s=\beta} \operatorname{tg} \pi s \frac{e^{sz}}{F(s)}.$$

Funkcja $R^*(z)$ jest całkowita, bo powyższa suma jest skończona.

Wykorzystując równanie funkcyjne otrzymujemy

$$J(F, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \operatorname{tg}(\pi s) \frac{e^{sz} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\eta \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right) F(1-s)} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2s-1} ds.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} = -\frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cos \pi s}{\pi}$$

oraz

$$\frac{1}{F(1-s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1-s}}, \quad \Re s < 0,$$

więc

$$\begin{aligned} J(F, z) &= \left(-\frac{2}{\eta\sqrt{N}} \right) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \operatorname{tg}(\pi s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \cos(\pi s) \left(\frac{e^z N}{4\pi^2}\right)^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1-s}}\right) ds = \\ &= \left(-\frac{2}{\eta\sqrt{N}} \right) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \sin(\pi s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{e^z N}{4\pi^2}\right)^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1-s}}\right) ds = \\ &= \frac{-2\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds \right) \end{aligned}$$

Obliczmy całkę wewnątrz powyższej sumy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2' \cup C_2''} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_2' &: \left(-\infty - i, \frac{3}{4} - i \right] \cup \left[\frac{3}{4} - i, \frac{3}{4} + i \right] \cup \left[\frac{3}{4} + i, -\infty + i \right), \\ C_2'' &: \left[-\frac{1}{4} - i, -\frac{1}{4} + i \right] \cup \left[-\frac{1}{4} + i, \frac{3}{4} + i \right] \cup \left[\frac{3}{4} + i, \frac{3}{4} - i \right] \cup \left[\frac{3}{4} - i, -\frac{1}{4} - i \right]. \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2'} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2''} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2}\right)^s ds \quad (3.41) \\
&= G_{3,1}^{0,2} \left(\frac{e^z N n}{4\pi^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \right) - \frac{1}{\pi} \frac{e^{\frac{z}{2}} \sqrt{N n}}{2\pi} \\
&= -Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$J(F, z) = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(-Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{z}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{z}{2}} \right)^{-1} \right).$$

Dla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \log n$ mamy

$$\begin{aligned}
\Re(m^*(F, x)) &= \frac{\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(-Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{x}{2}} \right) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{x}{2}} \right)^{-1} \right) \\
&\quad - \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{2\pi} m_0(F, x) + \frac{1}{2} \left(H(F, x) + \overline{H}(F, x) \right) - \frac{1}{2} R^*(x), \quad (3.42)
\end{aligned}$$

z oczywistej równości

$$m^*(F, z) = im(F, z) + m_1(F, z)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Im(m(F, x)) &= -\frac{\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(-Y_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{N n}} e^{-\frac{x}{2}} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{e^{\frac{x}{2}} \sqrt{N n}}{2\pi} \right) \\
&\quad + \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{2\pi} m_0(F, x) - \frac{1}{2} \left(H(F, x) + \overline{H}(F, x) \right) \quad (3.43) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(m_1(F, x) + \overline{m}_1(F, x) \right) + \frac{1}{2} R^*(x).
\end{aligned}$$

Z kolei

$$\Re(m(F, x)) = -\frac{\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} J_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{2} R^*(x), \quad (3.44)$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.2. Dla $z = x + iy$, $|y| < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} m(F, z) &= \frac{-\pi}{\eta\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n} \left(H_1^{(2)}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}}\right) - \frac{2}{\pi} i \left(\frac{4\pi}{\sqrt{Nn}} e^{-\frac{z}{2}}\right)^{-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (R(z) - iR^*(z)) + \frac{1}{2i} (H(F, z) + \overline{H}(F, z)) - \frac{e^{\frac{3}{2}z}}{2\pi i} m_0(F, z) \\ &\quad - \frac{1}{2i} (m_1(F, z) + \overline{m_1}(F, z)). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dowód. Z równości (3.43) i (3.44) wynika słuszność tezy dla $z \in \mathbb{R}$, $z \neq \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$, a przez przedłużenie analityczne jest słuszna w pasie $|\Im z| < 2\pi$. \square

Bibliografia

- [1] K. Bartz, *On some complex explicit formulae connected with the Möbius function. I*, Acta Arith. **57** (1991), no. 4, 283–293.
- [2] K. Bartz, *On some complex explicit formulae connected with the Möbius function. II*, Acta Arith. **57** (1991), no. 4, 295–305.
- [3] K. Bartz, *On some complex explicit formulae connected with the Möbius function, III*, Functiones et Approximatio **XX** (1992), 119–133.
- [4] K. Bartz, *On Some Connections Between Zeta-Zeros and Square-Free Integers*, Monatshefte für Mathematik **114** (1992), no. 1, 15–34.
- [5] H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, Vol. I, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.
- [6] H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, Vol. II, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.
- [7] B. C. C. Breuil F. Diamond and R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over Q* , Journal of AMS **14** (2001), 843–939.
- [8] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, AMS, 2003.
- [9] J. Kaczorowski, *Results on the Möbius function*, J. Lond. Math. Soc **75** (2007), no. 2, 65–358.
- [10] J. Kaczorowski and K. Wiertelak, *Ω -estimates for a class of arithmetic error terms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **142** (2007), 385–394.
- [11] A. Karatsuba, *Podstawy analitycznej teorii liczb (po rosyjsku)*, Moskwa, 1983.
- [12] A. W. Knap, *Elliptic curves*, Princeton University Press, 1992.
- [13] F. Mertens, *Über eine zahlentheoretische Funktion.*, Sber. Kais. Akad. Wissensch. Wien **106** (1897), no. 2a, 761–830.
- [14] W. Narkiewicz, *The development of prime number theory*, Springer, 2000.

- [15] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [16] A. M. Odlyzko and H. I. I te Riele, *Disproof of the Mertens Conjecture*, *J. Reine Angew. Math.* **357** (1985), 138–160.
- [17] A. Perelli, *On the Prime Number Theorem for the coefficients of certain modular forms*, *Banach Center Publications Warsaw* **17** (1985), 405–410.
- [18] M. Ram Murty, *Problems in Analytic Number Theory*, Springer Verlag New York, 2001.
- [19] M. Ram Murty and V. Kumar Murty, *Non-vanishing of L-Functions and Applications*, Birkhäuser Verlag, 1997.
- [20] M. Rękoś, *On some complex explicit formulae connected with the Euler's ϕ function. I*, *Functiones et Approximatio* **XXIX** (2001), 113–124.
- [21] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press, 1951.
- [22] K. Wiertelak, *On some connections between zeta-zeros and square-free divisors of an integer*, *Functiones et Approximatio* **XXXI** (2003), 133–145.