

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU



mgr Dorota Blinkiewicz

**ZASADA LOKALNO-GLOBALNA
DLA ROZMAITOŚCI SEMIABELOWYCH**

Rozprawa doktorska z nauk matematycznych w zakresie matematyki
napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Grzegorza Banaszaka.
Promotorem pomocniczym rozprawy był dr Stefan Barańczuk.

Poznań 2017

Pragnę bardzo serdecznie podziękować mojemu promotorowi Panu Profesorowi Grzegorzowi Banaszakowi za opiekę merytoryczną, poświęcony czas na tłumaczenie i wyjaśnianie skomplikowanych teorii matematycznych, cierpliwość oraz za wiarę w moje możliwości.

Podziękowania kieruję również do mojego promotora pomocniczego Doktora Stefana Barańczuka za wyczerpujące rozmowy.

Chciałabym też podziękować Doktorowi Piotrowi Rzonsowskiemu za Jego nieocenioną pomoc.

Słowa wdzięczności należą się także moim Rodzicom i Bratu, za nieustanne wspieranie mnie i tolerowanie mojej wiecznej nieobecności.

Spis treści

1	Wstęp	4
1.1	Podstawowe oznaczenia	4
1.2	Historia problemu	4
1.3	Krótki opis najważniejszych wyników uzyskanych w niniejszej rozprawie . .	6
2	Rozmaitości semiabelowe	8
2.1	O endomorfizmach	8
2.2	Produkt torusa i rozmaitości abelowej	11
2.2.1	Przekształcenia redukcji	13
3	Zasada lokalno-globalna dla rozmaitości semiabelowych	18
3.1	Badanie liniowej zależności punktów oraz współmierności podgrup w grupie Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych	18
3.1.1	Uwagi ogólne	18
3.1.2	Główne rezultaty rozprawy	24
	Bibliografia	41

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Podstawowe oznaczenia

Wprowadźmy na początku oznaczenia, których będziemy używać w całej rozprawie. Pragnę jednak zaznaczyć, że pozostałe oznaczenia będziemy wprowadzać sukcesywnie.

Notacja

1. F ciało liczbowe,
2. \mathcal{O}_F pierścień liczb całkowitych ciała F ,
3. S skończony zbiór ideałów pierwszych pierścienia \mathcal{O}_F ,
4. $\mathcal{O}_{F,S}$ lokalizacja pierścienia \mathcal{O}_F względem S ,
5. v ideał pierwszy w \mathcal{O}_F ,
6. $k_v := \mathcal{O}_F/v$.

1.2 Historia problemu

Przez ostatnie 40 lat wielu matematyków badało liniową zależność punktów w grupach Mordella-Weila torusów i rozmaitości abelowych. Byli to między innymi (w kolejności chronologicznej): A. Schinzel [Sch](1975), C. Corrales-Rodrigáñez, R. Schoof [C-RS](1997), G. Banaszak [B1](1998), G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń [BGK1](2003), M. Larsen [La](2003), T. Weston [We](2003), C. Khare, D. Prasad [Kh-P](2004), G. Ba-

naszak, W. Gajda, P. Krasoń [BGK2](2005), S. Barańczuk [Bar](2006), S. Barańczuk, K. Górnisiewicz [BG](2008), W. Gajda, K. Górnisiewicz [GG](2009), G. Banaszak [B2](2009), P. Jossen, A. Perucca [JP](2010), A. Perucca [Pe2](2010), G. Banaszak, P. Krasoń [BK](2011), P. Jossen [J1](2013), P. Rzonsowski [Rz](2015).

Należy przytoczyć tutaj twierdzenie prof. Andrzeja Schinzla [Sch, Theorem 2, str. 398], które badania te zapoczątkowało:

Twierdzenie 1.2.1. *Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F^\times$ oraz $\beta \in F^\times$ spełniają następującą kongruencję:*

$$\beta \equiv \prod_{i=1}^k \alpha_i^{n_{v,i}} \pmod{v}$$

dla pewnych $n_{v,1}, n_{v,2}, \dots, n_{v,k} \in \mathbb{Z}$ oraz dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v pierścienia \mathcal{O}_F . Wówczas istnieją liczby całkowite $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ takie, że:

$$\beta = \prod_{i=1}^k \alpha_i^{n_i}.$$

Powyższe twierdzenie dotyczy grupy algebraicznej \mathbb{G}_m nad F . A. Schinzel pokazał również [Sch, str. 419], że nie można tego wyniku uogólnić dla produktu $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ nad F .

Problem badania liniowej zależności w odniesieniu do abelowych rozmaitości po raz pierwszy został sformułowany w 2002 roku przez prof. Wojciecha Gajdę.

Pytanie 1.2.2. *Niech A będzie rozmaitością abelową zdefiniowaną nad ciałem F . Niech P będzie punktem w grupie Mordella-Weila $A(F)$ oraz Λ będzie podgrupą grupy $A(F)$. Przypuśćmy, że dla prawie wszystkich v w \mathcal{O}_F zachodzi $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$. Czy punkt P należy do Λ ?*

Innymi słowy problem ten można sformułować następująco: czy istnieje analogiczne twierdzenie do przytoczonego powyżej twierdzenia A. Schinzla dla rozmaitości abelowych?

Dla prostych rozmaitości abelowych odpowiedź pozytywną na powyższe pytanie otrzymał P. Jossen [J1, Main Theorem]. Jednak w największej ogólności, problem ten został rozwiązany, z dokładnością do podgrupy elementów torsyjnych, przez prof. Grzegorza Banaszaka i prof. Piotra Krasonia w pracy [BK, Theorem 4.1, str. 325]. Autorzy pokazali, że założenia ich twierdzenia są bardzo istotne, gdyż próba ich ominięcia skutkuje znalezieniem kontrprzykładów. Opisywane powyżej twierdzenie uogólnia rezultaty otrzymane przez [We], [BGK2], [GG] oraz [B2]. Mianowicie, T. Weston [We] otrzymał analogiczne

twierdzenie do [BK, Theorem 4.1, str. 325] przy założeniu, że $\text{End}_{\bar{F}}(A)$ jest przemienne. G. Banaszak, W. Gajda oraz P. Krasoń [BGK2] udowodnili analogiczne twierdzenie dla krzywych eliptycznych bez mnożenia zespolonego oraz dla klasy rozmaitości abelowych A takich, że $\text{End}_{\bar{F}}(A) = \mathbb{Z}$, bez niejednoznaczności związanej z podgrupą torsyjną. Ponadto pokazali [BGK2, Theorem 2.9], że dla dowolnych rozmaitości abelowych A , dowolnych wolnych $\text{End}_F(A)$ -modułów $\Lambda \subset A(F)$ oraz $P \in A(F)$ takich, że $\text{End}_F(A)P$ jest wolnym modułem nad $\text{End}_F(A)$, jeśli dla prawie wszystkich v zachodzi $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, to istnieje $a \in \mathbb{N}$ takie, że $aP \in \Lambda$. W. Gajda wraz z K. Górniewiczem [GG, Theorem 5.1] pokazali natomiast, że za współczynnik a możemy przyjąć liczbę 1. Głównym wynikiem pracy G. Banaszaka [B2] jest rozwiązanie problemu liniowej zależności dla rozmaitości abelowych przy założeniu, że $\text{End}_F(A)P$ jest wolnym modułem nad $\text{End}_F(A)$ oraz Λ jest wolnym \mathbb{Z} -modułem, dla którego istnieje \mathbb{Z} -baza, której elementy są liniowo niezależne nad $\text{End}_F(A)$. W tej pracy, jako wniosek z głównego rezultatu, udowodniono również twierdzenie [GG, Theorem 5.1] (zobacz [B2, Proposition 2.8]).

W kontekście semiabelowych rozmaitości, pytanie o badanie liniowej zależności zadała A. Perucca w pracy [Pe2, Question 1., str. 119]:

Pytanie 1.2.3. *Niech G będzie produktem rozmaitości abelowej i torusa, zdefiniowanym nad ciałem F . Niech P będzie punktem w grupie Mordella-Weila $G(F)$ oraz Λ będzie skończenie generowaną podgrupą grupy $G(F)$. Przypuśćmy, że dla prawie wszystkich v w \mathcal{O}_F zachodzi $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$. Czy punkt P należy do Λ ?*

A. Perucca w wyżej wymienionej pracy, uogólnia wyniki [GG] oraz [B2], mianowicie dowodzi, że powyższe pytanie ma twierdzącą odpowiedź dla trzech typów podgrup Λ .

1.3 Krótki opis najważniejszych wyników uzyskanych w niniejszej rozprawie

Jeden z głównych wyników niniejszej rozprawy dotyczy badania liniowej zależności punktów w grupie Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych. Uogólniamy wyniki A. Perucci [Pe2]. Udowodnimy analogiczne twierdzenie (Twierdzenie 3.1.7) do cytowanego powyżej twierdzenia [BK, Theorem 4.1] dla szczególnej klasy rozmaitości semiabelowych G , które są produktem torusa i rozmaitości abelowej nad F oraz dowolnej skończenie generowanej podgrupy Λ grupy Mordella-Weila $G(F)$. W dowodzie tym będziemy używać pewnych metod i konstrukcji z [BK]. Zaprezentujemy również kontrprzykłady dotyczące Twierdzenia 3.1.7 pokazujące, że jego założenie (3.1.7) jest istotne.

Następnym wynikiem jest Twierdzenie 3.1.10 pokazujące, że wystarczy rozpatrywać tylko skończoną liczbę redukcji, by stwierdzić, czy $P \in \Lambda + G(F)_{\text{tor}}$, czy nie. Twierdzenie to jest analogicznym twierdzeniem do [BK, Theorem 6.4]. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że nawet dla jednowymiarowego torusa takiego twierdzenia nie było, wcześniej. Pojawia się ono dopiero w naszej pracy z G. Banaszakiem [BB, Theorem 4.3].

Wyniki niniejszej rozprawy dotyczą również badania współmierności podgrup w grupach Mordella-Weila poprzez przekształcenia redukcji. Są to wyniki uzyskane wspólnie z G. Banaszakiem [BB]. Wyniki te dotyczą relacji między lokalno-globalnymi własnościami współmierności a własnościami liniowej zależności (Twierdzenia 3.1.16, 3.1.17, 3.1.18). Jako wniosek (Wniosek 3.1.19.1) otrzymamy, że dla rozmaitości semiabelowych takich jak w Twierdzeniu 3.1.7 i dla skończone generowanych podgrup $\Lambda, \Lambda' \subset G(F)$ zachodzi lokalno-globalna własność silnej współmierności. Sformułujemy również kryterium (Wniosek 3.1.19.2) sprawdzania współmierności skończone generowanych podgrup grupy Mordella-Weila rozmaitości semiabelowej, używające skończonej liczby przekształceń redukcji. Na koniec przedstawimy kontrprzykłady dotyczące Wniosku 3.1.19.1, w przypadku, gdy opuścimy założenie o wykładnikach e_i (3.1.7). Przykłady te prowadzą do klas 1-motywów w sensie P. Deligne'a [Del], które z kolei prowadzą, dla prawie wszystkich v (po zmianie bazy do $\text{spec } k_v$ oraz wzięciu obrazów odpowiednich podgrup poprzez przekształcenia redukcji), do równych, torsyjnych 1-motywów ([B-VRS], [J2]).

Rozdział 2

Rozmaitości semiabelowe

Niech \mathcal{S} będzie schematem. **Semiabelowym schematem \mathcal{G} nad \mathcal{S}** nazywamy przemienny schemat grupowy nad \mathcal{S} , który daje następujące rozszerzenie:

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0,$$

gdzie \mathcal{T} jest \mathcal{S} -torusem, natomiast \mathcal{A} jest schematem abelowym nad \mathcal{S} . W przypadku, gdy $\mathcal{S} = \text{spec } K$, dla pewnego ciała K , to $\mathcal{G} = G$ nazywamy **rozmaitością semiabelową nad ciałem K** .

2.1 O endomorfizmach

Lemat 2.1.1. *Niech A będzie rozmaitością abelową a T torusem nad ciałem K . Wówczas*

$$\text{Hom}_K(A, T) = \{0\} \text{ oraz } \text{Hom}_K(T, A) = \{0\}.$$

Dowód. $\text{Hom}_K(A, T) = \{0\}$, ponieważ jedyne funkcje między A oraz K , to stałe funkcje. Druga równość wynika z [Mil, Corollary 3.9, str. 107]. \square

Lemat 2.1.2. *Niech G, G' będą rozmaitościami semiabelowymi nad ciałem K . Niech $\psi : G \rightarrow G'$ będzie homomorfizmem (grup algebraicznych). Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone, jedyne morfizmy $\psi_t : T \rightarrow T'$ oraz $\psi_a : A \rightarrow A'$ takie, że następujący diagram jest przemienny:*

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i_1} & G & \xrightarrow{\pi_1} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi_t & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_a & & \\ 0 & \longrightarrow & T' & \xrightarrow{i_2} & G' & \xrightarrow{\pi_2} & A' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dowód. Zauważmy, że złożenie homomorfizmów $\pi_2 \circ \psi \circ i_1 : T \rightarrow A'$ jest zerowym homomorfizmem (patrz Lemat 2.1.1). Zatem $\psi_t := \psi \circ i_1$ jest homomorfizmem z T do T' . Homomorfizm ψ_a jest ilorazem ψ przez ψ_t . Homomorfizm ψ_t (odp. ψ_a) jest jedyny, ponieważ i_2 jest iniekcją (odp. π_1 jest suriekcją). \square

Z powyższego widzimy, że:

$$(2.1.2) \quad \text{Hom}_K(G, G') \subset \text{Hom}_K(T, T') \times \text{Hom}_K(A, A').$$

W szczególności:

$$(2.1.3) \quad \text{End}_K(G) \subset \text{End}_K(T) \times \text{End}_K(A).$$

Twierdzenie 2.1.3 (Raynaud). *Niech \mathcal{S} będzie całkowitym noetherowskim schematem oraz \mathcal{G}, \mathcal{H} będą dwoma schematami semiabelowymi nad \mathcal{S} . Załóżmy, że istnieje gęsty otwarty podschemat U schematu \mathcal{S} oraz homomorfizm $\psi_U : \mathcal{H}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$. Wówczas istnieje jedyne rozszerzenie ψ_U do homomorfizmu $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ nad \mathcal{S} .*

Dowód. Patrz [FC, Proposition 2.7, str. 9]. \square

Twierdzenie 2.1.4. *Niech \mathcal{G}, \mathcal{H} będą schematami semiabelowymi nad całkowitym noetherowskim schematem \mathcal{S} z włóknami generycznymi G/K oraz H/K , odpowiednio. Niech $\xi = \text{spec } K$ będzie punktem generycznym. Wówczas*

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \text{Hom}_K(G, H).$$

Dowód. Z (2.1.2) wiemy, że $\text{Hom}_K(G, H) \subset \text{Hom}_K(A, A') \times \text{Hom}_K(T, T')$, gdzie

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

oraz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow H \longrightarrow A' \longrightarrow 0.$$

Stąd $\text{Hom}_K(G, H)$ jest skończenie generowaną grupą abelową i każdy homomorfizm $\phi \in \text{Hom}_K(G, H)$ rozszerza się do homomorfizmu z $\text{Hom}_{U_0}(\mathcal{G}|_{U_0}, \mathcal{H}|_{U_0})$ dla gęstego otwartego podzbioru $U_0 \subset \mathcal{S}$. Z twierdzenia 2.1.3 oraz Lematu 5 Grothendiecka [BLR, Chap. 1, Lemma 5, str. 14] otrzymujemy:

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \varinjlim_{\xi \in U \subset U_0} \text{Hom}_U(\mathcal{G}|_U, \mathcal{H}|_U) = \text{Hom}_K(G, H).$$

\square

Wniosek 2.1.4.1. Niech \mathcal{G}, \mathcal{H} będą schematami semiabelowymi nad \mathcal{S} z włóknami generycznymi G/K oraz H/K odpowiednio. Wówczas:

- (1) $\text{End}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \text{End}_K(G)$,
- (2) $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}, \mathcal{T}) = \{0\}$ and $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}, \mathcal{A}) = \{0\}$,
- (3) $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \subset \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \times \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$,
- (4) $\text{End}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}) \subset \text{End}_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}) \times \text{End}_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$,

gdzie

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

oraz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}' \longrightarrow 0.$$

Z powyższych rozważań widzimy, że wystarczy badać endomorfizmy dla rozmaitości semiabelowych.

Fakt 2.1.5. Niech G będzie rozmaiłością semiabelową nad ciałem K oraz:

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

będzie diagramem z nią stowarzyszonym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) $G \cong T \times A$.
- (2) Istnieje rozszczepienie $s : A \rightarrow G$ homomorfizmu π .
- (3) Zanurzenie (2.1.3) jest izomorfizmem $\text{End}_K(G) = \text{End}_K(T) \times \text{End}_K(A)$.
- (4) Homomorfizm $(\psi_t, \psi_a) = (0_T, \text{Id}_A) \in \text{End}_K(T) \times \text{End}_K(A)$ należy do $\text{End}_K(G)$.

Dowód. Rozważmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi_t & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_a & & \\ 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Równoważność (1) \iff (2) oraz implikacje (2) \implies (3) \implies (4) są oczywiste. Załóżmy (4). Biorąc $\psi = (\psi_t, \psi_a) = (0_T, \text{Id}_A)$ w powyższym diagramie, definiujemy $s : A \rightarrow G$ następująco: dla dowolnego $a \in A$, niech $g \in G$ będzie takie, że $\pi(g) = a$. Następnie:

$$s(a) := \psi(g).$$

Powyższa definicja nie zależy od wyboru g . Istotnie jeśli $\pi(g) = 0$, to $g \in T$ oraz wówczas

$$\psi(g) = \psi_t(g) = 0_T(g) = 0.$$

Ponadto

$$\pi \circ s(a) = \pi \circ \psi(g) = \text{Id}_A \circ \pi(g) = a.$$

Otrzymujemy (2). □

2.2 Produkt torusa i rozmaitości abelowej

Niech G będzie produktem torusa T oraz rozmaitości abelowej A nad ciałem F . Wówczas z Faktu 2.1.5 otrzymujemy:

$$\text{End}_F(G) = \text{End}_F(T) \times \text{End}_F(A).$$

Niech F'/F będzie skończonym rozszerzeniem ciał takim, że:

$$G \otimes_F F' = \prod_{i=0}^t G_i^{e_i},$$

gdzie

$$T \otimes_F F' = G_0^{e_0} \quad \text{oraz} \quad A \otimes_F F' = G_1^{e_1} \times \cdots \times G_t^{e_t},$$

$G_0 = \mathbb{G}_m$ oraz G_i/F' są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaitościami abelowymi dla $i = 1, \dots, t$. Załóżmy ponadto, że $\text{End}_{F'}(G_i) = \text{End}_{\bar{F}}(G_i)$. Wówczas

$$(2.2.1) \quad \text{End}_{F'}(G) = \prod_{i=0}^t \text{End}_{F'}(G_i^{e_i}) = \text{M}_{e_0}(\mathbb{Z}) \oplus \prod_{i=1}^t \text{M}_{e_i}(\text{End}_{F'}(G_i)).$$

Dla prostoty zapisu załóżmy, że F jest ciałem F' , jak wyżej.

Niech S będzie skończonym zbiorem ideałów pierwszych w \mathcal{O}_F , takim że dla każdego $v \notin S$ rozmaitość abelowa A oraz torus T mają dobrą redukcję. Niech \mathcal{A} będzie modelem Nérona nad $\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}$. Bez utraty ogólności, możemy oznaczać również $\mathbb{G}_m = \text{spec } \mathcal{O}_{F,S}[x, \frac{1}{x}]$. Zatem, oznaczmy $\mathcal{T} := \mathbb{G}_m^{e_0}$. Zauważmy, że

$$\mathcal{T} \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}} \text{spec } F = T.$$

Rozpatrzmy następujący model nad $\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}$ rozmaitości semiabelowej G :

$$\mathcal{G} = \mathbb{G}_m^{e_0} \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}} \mathcal{A}$$

Wówczas $G = \mathcal{G} \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}} \text{spec } F$.

Uwaga 2.2.1. Dla torusa T , mówiąc o redukcji punktu mamy na myśli redukcję modulo ideał pierwszy w pierścieniu $\mathcal{O}_{F,S'}$, gdzie zbiór S' powstał ze zbioru S poprzez dodanie do niego tych ideałów pierwszych v pierścienia \mathcal{O}_F , które występują w mianownikach tego punktu. Zauważmy również, że $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S}) = \mathcal{T}(\mathcal{O}_{F,S}) \times \mathcal{A}(\mathcal{O}_{F,S}) = (\mathcal{O}_{\bar{F},S}^\times)^{e_0} \times A(F)$. Widzimy więc, że jest to skończenie generowana grupa abelowa. Dlatego mówiąc o \mathbb{Z} -bazie grupy Mordella-Weila $G(F)$ będziemy mieć na myśli bazę skończenie generowanej grupy abelowej $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})$.

Niech L/F będzie skończonym rozszerzeniem ciał. Niech $P_{i1}, \dots, P_{ir_i} \in G_i(L)$ będą liniowo niezależne nad $\text{End}_F(G_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, t$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} L_{l^k} &:= L(G[l^k]), \\ L_{l^\infty} &:= L(G[l^\infty]), \\ H_{l^k} &:= \text{Gal}(\bar{F}/L_{l^k}), \\ H_{l^\infty} &:= \text{Gal}(\bar{F}/L_{l^\infty}), \\ \Gamma_{l^\infty} &:= \text{Gal}(L_{l^\infty}/L), \\ \Gamma_F &:= \text{Gal}(\bar{F}/F). \end{aligned}$$

Rozpatrzmy następującą wieżę ciał:

$$\begin{array}{c} \bar{F} \\ \left. \begin{array}{c} | \\ L_{l^\infty} \\ | \\ L_{l^k} \\ | \\ L \end{array} \right\} \begin{array}{l} H_{l^\infty} \\ \\ \\ \Gamma_{l^\infty} \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} | \\ L_{l^k} \\ | \\ L \end{array} \right\} H_{l^k} \\ | \\ F \end{array}$$

Niech l będzie liczbą pierwszą. Niech $T_l(A)$, $T_l(T)$, $T_l(G)$ oznaczają moduły Tate'a rozmaitości abelowej A , torusa T oraz rozmaitości semiabelowej G , odpowiednio. W tym przypadku $T_l(G) = T_l(T) \oplus T_l(A)$. Niech $V_l(G) := T_l(G) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$.

Uwaga 2.2.2. Zauważmy, że $V_l(G)$ jest półprostym $\mathbb{Q}_l[\Gamma_{l^\infty}]$ -modułem, ponieważ jest sumą prostą półprostych $\mathbb{Q}_l[\Gamma_{l^\infty}]$ -modułów (półprostota $V_l(A)$, patrz [Fa]).

Twierdzenie 2.2.3. [J2, Lemma 6.3.2] *Niech G_1 oraz G_2 będą rozmaitościami semiabelowymi nad ciałem F . Wówczas:*

$$\mathrm{Hom}_F(G_1, G_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma_F}(T_l(G_1), T_l(G_2)).$$

Lemat 2.2.4. *Dla $i \neq 0$, mamy:*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_F}(T_l(G_0), T_l(G_i)) = \mathrm{Hom}_{\Gamma_F}(T_l(G_i), T_l(G_0)) = \{0\}.$$

Dowód. Wynika z Twierdzenia 2.2.3 oraz Lematu 2.1.1. □

Twierdzenie 2.2.5. [Mat, Corollary 5.2.7, str. 59]

$$H^1(\Gamma_{l^\infty}, V_l(G)) = \{0\}.$$

Uwaga 2.2.6. Z powyższego twierdzenia widzimy, że $H^1(\Gamma_{l^\infty}, T_l(G))$ jest grupą skończoną, gdyż $H^1(\Gamma_{l^\infty}, T_l(G)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l = H^1(\Gamma_{l^\infty}, V_l(G))$.

2.2.1 Przekształcenia redukcji

Oznaczmy następująco przekształcenia Kummera:

$$\phi_{ij}^{(k)} : H_{l^k} \rightarrow G_i[l^k], \quad \phi_{ij}^{(k)}(\sigma) := \sigma \left(\frac{1}{l^k} P_{ij} \right) - \frac{1}{l^k} P_{ij}.$$

Niech $\phi_{ij} := \varprojlim_k \phi_{ij}^{(k)} : H_{l^\infty} \rightarrow T_l(G_i)$ będzie granicą odwrotną powyżej zdefiniowanych przekształceń Kummera. Zdefiniujemy również następujące przekształcenia:

$$\Phi_i^{(k)} : H_{l^k} \rightarrow G_i[l^k]^{r_i}, \quad \Phi_i^{(k)}(\sigma) := (\phi_{i1}^{(k)}(\sigma), \dots, \phi_{ir_i}^{(k)}(\sigma)),$$

$$\Phi^{(k)} : H_{l^k} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^t G_i[l^k]^{r_i}, \quad \Phi^{(k)} := \bigoplus_{i=0}^t \Phi_i^{(k)},$$

$$\Phi_i : H_{l^\infty} \rightarrow T_l(G_i)^{r_i}, \quad \Phi_i(\sigma) := (\phi_{i1}(\sigma), \dots, \phi_{ir_i}(\sigma)),$$

$$\Phi : H_{l^\infty} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}, \quad \Phi := \bigoplus_{i=0}^t \Phi_i.$$

Lemat 2.2.7. *Niech $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir_i} \in \mathrm{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ dla każdego $i = 0, 1, \dots, t$. Jeżeli:*

$$\sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \phi_{ij} = 0,$$

to α_{ij} jest endomorfizmem zerowym w $\mathrm{End}_F(G_i)$.

Dowód. Zdefiniujmy φ — homomorfizm $\text{End}_F(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ -modułów:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ G(L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longleftarrow H^1(\Gamma_L, T_l(G)) \xrightarrow{\text{res}^1} H^1(H_{l^\infty}, T_l(G)) = \text{Hom}(H_{l^\infty}, T_l(G)). \end{array}$$

Zauważmy, że

$$\ker \varphi \hookrightarrow \ker \text{res}^1 = \text{inf}^1 \left(H^1(\Gamma_{l^\infty}, T_l(G)) \right).$$

Z Uwagi 2.2.6, wiemy że $|H^1(\Gamma_{l^\infty}, T_l(G))| < \infty$, zatem $|\ker \varphi| < \infty$, więc $\ker \varphi \subset (G(L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l)_{\text{tor}}$. Z założenia mamy:

$$0 = \sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \phi_{ij} = \varphi \left(\sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} (P_{ij} \otimes 1) \right).$$

Zatem $|G(L)_{\text{tor}}| \cdot \sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} (P_{ij} \otimes 1) = 0$. Stąd $|G(L)_{\text{tor}}| \alpha_{ij} = 0$, gdyż $P_{ij} \otimes 1$ są liniowo niezależne nad $\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$. Otrzymujemy, więc $\alpha_{ij} = 0$. \square

Lemat 2.2.8. *Obraz Φ jest otwarty w $\bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}$.*

Dowód. Wykorzystując Uwagę 2.2.2, Twierdzenie 2.2.3 oraz Lemat 2.2.4, dowód przeprowadzamy analogicznie jak dowód [BK, Lemma 2.5]. \square

Uwaga 2.2.9. Z powyższego lematu (Lemat 2.2.8) widzimy, że istnieje liczba naturalna $m \in \mathbb{N}$ taka, że:

$$l^m \bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i} \subset \Phi(H_{l^\infty}) \subset \bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}.$$

Istnienie liczby m wynika z własności grup proskończonych, gdyż są to grupy topologiczne zwarte, więc każda podgrupa otwarta musi mieć skończony indeks.

Twierdzenie 2.2.10. *Niech l będzie liczbą pierwszą. Niech $G := G_0 \times G_1 \times \dots \times G_t$. Niech $Q_{ij} \in G_i(L)$ dla $j = 1, 2, \dots, r_i$ będą liniowo niezależne nad $\text{End}_F(G_i)$ dla każdego $i = 0, 1, \dots, t$. Wówczas istnieje zbiór ideałów pierwszych w \mathcal{O}_L o dodatniej gęstości Dirichleta taki, że $r_w(Q_{ij}) = 0$ w $G_{iw}(k_w)_l$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, t$ oraz $j = 1, 2, \dots, r_i$.*

Dowód. Zdefiniujmy Γ , podmoduł $\text{End}_F(G)$ -modułu $G(L)$, generowany przez punkty Q_{ij} :

$$\Gamma := \sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \text{End}_F(G_i) Q_{ij}.$$

Zauważmy, że mamy następujące równoważności:

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(\sigma) = 0 &\iff \forall i = 0, 1, \dots, t : \Phi_i^{(k)}(\sigma) = (0, 0, \dots, 0) \iff \\ &\iff \forall i = 0, 1, \dots, t \forall j = 1, \dots, r_i : \sigma\left(\frac{1}{l^k} Q_{ij}\right) = \frac{1}{l^k} Q_{ij}. \end{aligned}$$

Zatem $\ker \Phi^{(k)} = \text{Gal}(\bar{F}/L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\Gamma))$ oraz $\ker \Phi = \text{Gal}(\bar{F}/L_{l^\infty}(\frac{1}{l^\infty}\Gamma))$. Niech m będzie liczbą naturalną jak w Uwadze 2.2.9 oraz niech $k \geq m$. Niech

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} : H_{l^\infty}/\ker \Phi &= \text{Gal}\left(L_{l^\infty}\left(\frac{1}{l^\infty}\Gamma\right)/L_{l^\infty}\right) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}/l^m, \\ \bar{\Phi}^{(k)} : H_{l^k}/\ker \Phi^{(k)} &= \text{Gal}\left(L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right)/L_{l^k}\right) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^t G_i[l^k]^{r_i}/l^m \end{aligned}$$

będą przekształceniami zaindukowanymi przez przekształcenia Kummera. Możemy zatem rozpatrywać następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}\left(L_{l^\infty}\left(\frac{1}{l^\infty}\Gamma\right)/L_{l^\infty}\right) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}/l^m \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Gal}\left(L_{l^{k+1}}\left(\frac{1}{l^{k+1}}\Gamma\right)/L_{l^{k+1}}\right) & \xrightarrow{\bar{\Phi}^{(k+1)}} & \bigoplus_{i=0}^t G_i[l^{k+1}]^{r_i}/l^m \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Gal}\left(L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right)/L_{l^k}\right) & \xrightarrow{\bar{\Phi}^{(k)}} & \bigoplus_{i=0}^t G_i[l^k]^{r_i}/l^m \end{array}$$

Dla $k \geq m$ strzałki pionowe po prawej stronie są izomorfizmami. Ponieważ $\bigoplus_{i=0}^t T_l(G_i)^{r_i}/l^m$ jest skończone, więc dla dostatecznie dużego k , obrazy przekształceń $\bar{\Phi}^{(k)}$ muszą się stabilizować, tzn. dla $k \gg 0$:

$$\bar{\Phi}^{(k+1)}\left(\text{Gal}\left(L_{l^{k+1}}\left(\frac{1}{l^{k+1}}\Gamma\right)/L_{l^{k+1}}\right)\right) \cong \bar{\Phi}^{(k)}\left(\text{Gal}\left(L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right)/L_{l^k}\right)\right).$$

Ponadto przekształcenia:

$$\text{Gal}\left(L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right)/L_{l^k}\right) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^t G_i[l^k]^{r_i}$$

są różnowartościowe. Z przemienności diagramu oraz powyższych spostrzeżeń otrzymujemy, że homomorfizmy:

$$\text{Gal}\left(L_{l^{k+1}}\left(\frac{1}{l^{k+1}}\Gamma\right)/L_{l^{k+1}}\right) \rightarrow \text{Gal}\left(L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right)/L_{l^k}\right)$$

są suriekcjami dla $k \gg 0$. To oznacza, że dla $k \gg 0$

$$(2.2.2) \quad L_{l^k}\left(\frac{1}{l^k}\Gamma\right) \cap L_{l^{k+1}} = L_{l^k}.$$

Z tw. Bogomolova [Bo, Corollary 1, str. 702] oraz z własności charakteru cyklotomicznego, dla dostatecznie dużego k , istnieje automorfizm $h \in \text{Gal}(L_{l^\infty}/L_{l^k})$, który działa na $T_l(G)$ jako translacja $1 + l^k u$ dla pewnego $u \in \mathbb{Z}_l^\times$. Z (2.2.2), istnieje $\sigma \in \text{Gal}(L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}\Gamma)/L_{l^k})$ takie, że:

$$\sigma|_{L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\Gamma)} = \text{id} \quad \text{oraz} \quad \sigma|_{L_{l^{k+1}}} = h^{(k+1)},$$

gdzie $h^{(k+1)}$ jest obrazem homotetii h poprzez naturalne przekształcenie $\text{Gal}(L_{l^\infty}/L_{l^k}) \rightarrow \text{Gal}(L_{l^{k+1}}/L_{l^k})$. Z tw. Chebotarewa istnieje dodatniej gęstości zbiór ideałów pierwszych w pierścienia \mathcal{O}_L taki, że dla każdego w , istnieje ideał pierwszy w_1 pierścienia $\mathcal{O}_{L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}\Gamma)}$ leżący nad w , dla którego zachodzi $\text{Fr}_{w_1} = \sigma$.

Niech $l^{c_{ij}}$ będzie rzędem elementu $r_w(Q_{ij})$ w $G_{iw}(k_w)_l$, gdzie $c_{ij} \geq 0$. Niech $R_{ij} := \frac{1}{l^k}Q_{ij}$. Wówczas $R_{ij} \in G(L_{l^k}(\frac{1}{l^k})) \subset G(L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}))$. Element $r_{w_1}(R_{ij})$ ma rząd równy $l^{k+c_{ij}}$ w $G_{iw}(k_{w_1})_l$. Niech w_2 będzie ideałem pierwszym pierścienia $\mathcal{O}_{L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\Gamma)}$ leżącym poniżej w_1 . Zauważmy, że $\text{Gal}(k_{w_2}/k_w) \cong \langle \text{Fr}_{w_2} \rangle = \langle \text{id} \rangle$. Zatem $k_{w_2} = k_w$, czyli $G_{iw}(k_{w_2})_l = G_{iw}(k_w)_l$. Przeanalizujemy poniższy diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} G_i(L) & \xrightarrow{r_w} & G_{iw}(k_w)_l \\ \downarrow & & \downarrow = \\ G_i(L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\Gamma)) & \xrightarrow{r_{w_2}} & G_{iw}(k_{w_2})_l \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_i(L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}\Gamma)) & \xrightarrow{r_{w_1}} & G_{iw}(k_{w_1})_l \end{array}$$

Widzimy, że $r_{w_1}(R_{ij})$ przychodzi z $G_{iw}(k_w)_l$, czyli Fr_{w_1} na tym elemencie działa trywialnie.

Przypuśćmy, że $c_{ij} \geq 1$. Wówczas:

$$h^{(k+1)}(l^{c_{ij}-1}r_{w_1}(R_{ij})) = (1 + l^k u)l^{c_{ij}-1}r_{w_1}(R_{ij}).$$

Z drugiej strony

$$h^{(k+1)}(l^{c_{ij}-1}r_{w_1}(R_{ij})) = \text{Fr}_{w_1}(l^{c_{ij}-1}r_{w_1}(R_{ij})) = l^{c_{ij}-1}r_{w_1}(R_{ij}).$$

Mamy zatem:

$$l^{k+c_{ij}-1}ur_{w_1}(R_{ij}) = 0.$$

Czyli

$$l^{k+c_{ij}-1}ur_{w_1}(\frac{1}{l^k}Q_{ij}) = l^{c_{ij}-1}ur_{w_1}(Q_{ij}) = 0.$$

Sprzeczność z założeniem, że $r_{w_1}(Q_{ij})$ ma rząd równy $l^{c_{ij}}$ w $G_{iw}(k_w)_l$. Zatem $c_{ij} = 0$. \square

Uwaga 2.2.11. Niech m będzie nieujemną liczbą całkowitą oraz $G := G_0 \times G_1 \times \dots \times G_t$. Zakładając w Twierdzeniu 2.2.10, że $L \supset F(G[l^m])$ oraz podstawiając za $Q_{ij} := P_{ij} - T_{ij}$, gdzie $P_{ij} \in G_i(L)$ są liniowo niezależne nad $\text{End}_F G_i$ oraz $T_{ij} \in G_i[l^m]$, otrzymamy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.11.1. *Istnieje zbiór ideałów pierwszych w \mathcal{O}_L o dodatniej gęstości Dirichleta taki, że $r_w(P_{ij}) = r_w(T_{ij})$ w $G_{iw}(k_w)_l$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, t$ oraz $j = 1, 2, \dots, r_i$.*

Twierdzenie 2.2.12. *Niech $G = G_0 \times G_1 \times \dots \times G_t$. Niech l będzie liczbą pierwszą oraz niech $Q_{ij} \in G_i(L)$, dla $1 \leq j \leq r_i$ będą punktami liniowo niezależnymi nad $\text{End}_{e_i}(G_i)$ dla każdego $0 \leq i \leq t$. Niech $\mathbf{\Gamma} := \sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^{r_i} \text{End}_F(G_i)Q_{ij}$. Niech L/F będzie skończonym rozszerzeniem. Niech k będzie liczbą naturalną taką, że obraz reprezentacji*

$$\bar{\rho}_{l^{k+1}} : G_{L_{l^k}} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}/l^{k+1}}(G[l^{k+1}])$$

zawiera nietrywialną homotetię oraz $L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\mathbf{\Gamma}) \cap L_{l^{k+1}} = L_{l^k}$. Niech d będzie wyróżnikiem ciała $L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}\mathbf{\Gamma})/\mathbb{Q}$. Wówczas istnieją efektywnie obliczalne stałe b_1 oraz b_2 takie, że $r_w(Q_{ij}) = 0$ w $G_{i_w}(k_w)_l$ dla $1 \leq j \leq r_i$ oraz $0 \leq i \leq t$ dla pewnych ideałów pierwszych $w \subset \mathcal{O}_L$ takich, że $N_{L/\mathbb{Q}}(w) \leq b_1 d^{b_2}$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodu Twierdzenia 2.2.10 z jedyną zmianą, że zamiast cytowanego twierdzenia Chebotarewa musimy użyć jego efektywnej wersji [LO, str. 416]. \square

Stosując Uwagę 2.2.11 uzyskamy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.12.1. *Niech $k \geq m$ będzie liczbą naturalną taką, że obraz reprezentacji*

$$\bar{\rho}_{l^{k+1}} : G_{L_{l^k}} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}/l^{k+1}}(G[l^{k+1}])$$

zawiera nietrywialną homotetię oraz $L_{l^k}(\frac{1}{l^k}\mathbf{\Gamma}) \cap L_{l^{k+1}} = L_{l^k}$. Niech d będzie wyróżnikiem ciała $L_{l^{k+1}}(\frac{1}{l^k}\mathbf{\Gamma})/\mathbb{Q}$. Wówczas istnieją efektywnie obliczalne stałe b_1, b_2 oraz ideał pierwszy w pierścieniu \mathcal{O}_L taki, że $N_{L/\mathbb{Q}}(w) \leq b_1 d^{b_2}$ oraz

$$r_w(T_{ij}) = r_w(P_{ij}) \text{ w } G_{i_w}(k_w)_l$$

dla wszystkich $1 \leq j \leq r_i$ oraz $1 \leq i \leq t$.

Uwaga 2.2.13. Obliczanie stałych w twierdzeniu Lagarias-Odlyzki jest trudne (patrz [Se, sekcja 2.2-2.5]).

Rozdział 3

Zasada lokalno-globalna dla rozmaitości semiabelowych

3.1 Badanie liniowej zależności punktów oraz współmierności podgrup w grupie Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych

3.1.1 Uwagi ogólne

Moduły nad algebraami półprostymi

Na wstępie wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla $i = 0, \dots, t$

1. D_i skończenie wymiarowa algebra z dzieleniem nad \mathbb{Q} ,
2. $e_i \in \mathbb{N}$,
3. Ω_i skończenie wymiarowa przestrzeń nad D_i .

Ponadto,

4. $\mathbb{D} := \prod_{i=0}^t D_i$,
5. $e := (e_0, e_1, \dots, e_t)$,
6. $\mathbb{M}_e(\mathbb{D}) := \prod_{i=0}^t M_{e_i}(D_i)$,
7. $\Omega := \bigoplus_{i=0}^t \Omega_i^{e_i}$.

Widzimy, że Ω w naturalny sposób jest skończenie generowanym $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$ -modułem. Mamy następujący lemat.

Lemat 3.1.1. *Jeśli M jest niezerowym prostym podmodułem $M_{e_i}(D_i)$ -modułu $\Omega_i^{e_i}$, to M jest następującej postaci:*

$$M = K_1(i)\tilde{\omega}(i) = \{\tilde{\alpha}_1(i)\tilde{\omega}(i) : \tilde{\alpha}_1(i) \in K_1(i)\},$$

gdzie $K_1(i)$ jest lewym ideałem w $M_{e_i}(D_i)$ składającym się z macierzy postaci

$$\tilde{\alpha}_1(i) := \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e_i 1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

natomiast $\tilde{\omega}(i) \in \Omega_i^{e_i}$ jest elementem postaci

$$\tilde{\omega}(i) := \begin{bmatrix} \omega(i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jako wniosek otrzymujemy.

Wniosek 3.1.1.1. *Każdy niezerowy prosty podmoduł $M_e(\mathbb{D})$ -modułu Ω jest postaci:*

$$K_1(i)\tilde{\omega}(i),$$

gdzie $K_1(i)$ oraz $\tilde{\omega}(i)$ zdefiniowane są jak w powyższym lemacie.

Definicja 3.1.2. Niech \mathbf{D} będzie skończenie generowaną algebrą nad ciałem E , $\dim_E \mathbf{D} = r$. Wówczas $\mathbf{D} = \sum_{k=1}^r E v_k$. Niech $\delta \in \mathbf{D}$. Możemy zatem zapisać:

$$\delta v_j = \sum_{k=1}^r d_{kj} v_k, \quad \text{gdzie } d_{kj} \in E, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Mamy następującą macierz:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rr} \end{bmatrix}.$$

Wówczas wielomian charakterystyczny $f_\delta(x)$ elementu δ nad E jest równy:

$$f_\delta(x) = \det(I_r x - \boldsymbol{\delta}) = x^r - (\text{tr } \boldsymbol{\delta})x^{r-1} + \dots + (-1)^r N(\boldsymbol{\delta}).$$

Przekształcenie $\text{tr} : \mathbf{D} \rightarrow E$ określone następująco $\text{tr}(\delta) := \text{tr}(\boldsymbol{\delta})$, nazywamy **przekształceniem śladu**. Przekształcenie śladu ma następującą własność:

$$\text{tr}(\epsilon_1 \delta_1 + \epsilon_2 \delta_2) = \epsilon_1 \text{tr}(\delta_1) + \epsilon_2 \text{tr}(\delta_2), \quad \text{dla } \epsilon_1, \epsilon_2 \in E, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{D}.$$

Zdefiniujemy teraz homomorfizm śladu dla algebry $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$ nad \mathbb{Q} .

$$\text{tr} : \mathbb{M}_e(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{Q},$$

$$\text{tr} := \sum_{i=0}^t \text{tr}_i,$$

gdzie tr_i są homomorfizmami śladu

$$\text{tr}_i : \mathbb{M}_{e_i}(D_i) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Twierdzenie 3.1.3. *Homomorfizm tr daje naturalne przekształcenie pomiędzy przestrzeniami liniowymi nad \mathbb{Q} , które jest izomorfizmem:*

$$\text{tr} : \text{Hom}_{\mathbb{M}_e(\mathbb{D})}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbb{M}_e(\mathbb{D})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbb{Q}).$$

Dowód. [BK, Lemma 3.3] □

Uwaga 3.1.4. Algebra $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$ jest półprosta, więc każdy moduł nad $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$ jest półprosty. W szczególności $\boldsymbol{\Omega}$ jest półprostym modułem nad $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$. Zatem dla każdego $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \text{Hom}_{\mathbb{M}_e(\mathbb{D})}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbb{M}_e(\mathbb{D}))$ istnieje homomorfizm $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$ -modułów $\tilde{\boldsymbol{s}} : \text{Im } \tilde{\boldsymbol{\pi}} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}$ taki, że $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \circ \tilde{\boldsymbol{s}} = \text{id}$. Ponieważ $\text{Hom}_{\mathbb{M}_e(\mathbb{D})}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbb{M}_e(\mathbb{D})) \cong \bigoplus_{i=0}^t \text{Hom}_{\mathbb{M}_{e_i}(D_i)}(\boldsymbol{\Omega}_i^{e_i}, \mathbb{M}_{e_i}(D_i))$, możemy więc zapisać $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \prod_{i=0}^t \tilde{\boldsymbol{\pi}}(i)$ dla pewnych $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(i) \in \text{Hom}_{\mathbb{M}_{e_i}(D_i)}(\boldsymbol{\Omega}_i^{e_i}, \mathbb{M}_{e_i}(D_i))$. Zauważmy ponadto, że $\text{Im } \tilde{\boldsymbol{\pi}} = \prod_{i=0}^t \text{Im } \tilde{\boldsymbol{\pi}}(i)$. Następnie dla każdego i możemy zdefiniować homomorfizm $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ -modułów $\tilde{\boldsymbol{s}}(i) : \text{Im } \tilde{\boldsymbol{\pi}}(i) \rightarrow \boldsymbol{\Omega}^{e_i}$ taki, że $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(i) \circ \tilde{\boldsymbol{s}}(i) = \text{id}$ oraz $\tilde{\boldsymbol{s}} = \bigoplus_{i=0}^t \tilde{\boldsymbol{s}}(i)$, bo $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ jest pierścieniem prostym.

Uwaga 3.1.5. Z twierdzenia [Re, Theorem 7.3] otrzymujemy, że każdy prosty podmoduł $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ -modułu $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ jest izomorficzny z $K_1(i)$. Zauważmy również, że $\dim_{D_i} \mathbb{M}_{e_i}(D_i) = e_i^2$ oraz $\dim_{D_i} K_1(i) = e_i$. Stąd otrzymujemy, że $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ jest sumą prostą dokładnie e_i podmodułów prostych. Czyli każdy podmoduł $\mathbb{M}_{e_i}(D_i)$ jest sumą co najwyżej e_i podmodułów prostych.

Dalsze uwagi

Niech G/F będzie rozmaiłością semiabelową taką, że $G = T \times A$ nad ciałem F . Niech F'/F będzie skończonym rozszerzeniem ciał takim, że:

$$(3.1.1) \quad T \otimes_F F' = G_0^{e_0} \quad \text{oraz} \quad A \otimes_F F' = G_1^{e_1} \times \cdots \times G_t^{e_t},$$

gdzie $G_0 = \mathbb{G}_m$ i G_i/F' są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaiściami abelowymi, dla $i = 1, \dots, t$.

Niech L/F będzie skończonym rozszerzeniem ciał. Ponadto, zdefiniujmy stałą $c := |G(F)_{\text{tor}}|$ oraz grupę $\Omega := cG(F)$. Niech $P \in G(F)$ i niech $\Lambda \subset G(F)$ będzie skończenie generowaną podgrupą.

1. Załóżmy, że $P = Q_\Lambda + T_L$ w $G(L)$, gdzie $Q_\Lambda \in \Lambda$, a $T_L \in G(L)_{\text{tor}}$. Niech r będzie rzędem punktu T_L . Wówczas $r(P - Q_\Lambda) = 0$, zatem $P - Q_\Lambda = T_F \in G(F)_{\text{tor}}$, gdyż z założenia $P, Q_\Lambda \in G(F)$, więc $P - Q_\Lambda \in G(F)$. Stąd $P = Q_\Lambda + T_F$ w $G(F)$.
2. Załóżmy, że $\gamma : G \rightarrow \prod_{i=0}^t G_i^{e_i}$ jest izogenią zdefiniowaną nad L , gdzie $G_0 = \mathbb{G}_m$, natomiast G_i/L są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaiściami abelowymi, dla $i = 1, \dots, t$. Załóżmy ponadto, że $\gamma(P) \in \gamma(\Lambda) + T_L$, dla $T_L \in \prod_{i=0}^t G_i^{e_i}(L)_{\text{tor}}$. Niech r będzie rzędem punktu T_L . Istnieje zatem $Q_\Lambda \in \Lambda$ takie, że $r(P - Q_\Lambda) \in \ker \gamma$. Ponieważ γ z założenia jest izogenią, więc $|\ker \gamma| < \infty$. Stąd $r(P - Q_\Lambda) \in G(L)_{\text{tor}}$. Analogicznie jak powyżej dostajemy: $P - Q_\Lambda = T_F \in G(F)_{\text{tor}}$ oraz $P = Q_\Lambda + T_F$ w $G(F)$.
3. Załóżmy, że $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, wówczas $r_v(cP) \in r_v(c\Lambda)$.
4. Jeśli $P \in \Lambda + G(F)_{\text{tor}}$, to $cP \in c\Lambda \subset c\Lambda + G(F)_{\text{tor}}$.
5. Jeśli $cP \in c\Lambda + G(F)_{\text{tor}}$, to istnieje $Q_\Lambda \in \Lambda$ oraz $T \in G(F)_{\text{tor}}$, że $c(P - Q_\Lambda) = T$, ale $P - Q_\Lambda \in G(F)$, więc $T = 0$. Stąd wynika, że $P - Q_\Lambda \in G(F)_{\text{tor}}$, zatem $P \in \Lambda + G(F)_{\text{tor}}$.
6. Ω jest skończenie generowaną, wolną grupą abelową.

Z powyższych uwag oraz dlatego, że $\text{End}_{\bar{F}}$ jest skończenie generowaną wolną grupą abelową widzimy, że bez straty ogólności możemy założyć, że F jest takim ciałem, dla którego zachodzi następująca równość:

$$\text{End}_F(G_i) = \text{End}_{\bar{F}}(G_i)$$

oraz zachodzą rozkłady (3.1.1). Możemy również bez straty ogólności założyć, że $P \in \Omega$, $P \neq 0$, $\Lambda \subset \Omega$ oraz $\Lambda \neq \{0\}$.

Uzupełnimy teraz notację.

- $P_1, \dots, P_r, \dots, P_s$ \mathbb{Z} -baza grupy Ω taka, że

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} d_i P_i + \sum_{i=r+1}^s \mathbb{Z} d_i P_i,$$

gdzie $d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \neq 0$ dla $i = 1, \dots, r$ oraz $d_i = 0$ dla $i = r+1, \dots, s$,

- dla $R \in \Omega$, $R = \sum_{i=1}^s \nu_i P_i$, gdzie $\nu_i \in \mathbb{Z}$,
- $\Omega_i := {}_c G_i(F)$, wtedy $\Omega = \bigoplus_{i=0}^t \Omega_i^{e_i}$,
- $\mathbf{\Omega}_i := \Omega_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathbf{\Omega}_i^{e_i} := \Omega_i^{e_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathbf{\Omega} := \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,
- $D_i := \text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,
- K/\mathbb{Q} skończone rozszerzenie Galois takie, że $D_i \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong M_{d_i}(K)$.

Uwaga 3.1.6. Zauważmy, że jeśli $P \in \Omega$, to mamy następujące równoważności:

$$P \in \Lambda \iff P \otimes 1 \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \iff \forall l \forall \lambda | l : P \otimes 1 \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda,$$

gdzie l oznacza liczbę pierwszą, a λ ideał pierwszy w \mathcal{O}_K . Istotnie, niech $P = \sum_{i=1}^s n_i P_i$, dla $n_i \in \mathbb{Z}$. Jeśli $P \in \Lambda$, to oczywistym jest, że $P \otimes 1 \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$. Odwrotnie, jeśli $P \otimes 1 \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$, to $P \otimes 1$ można zapisać następująco:

$$P \otimes 1 = \sum_k \left(\sum_{i=1}^s d_i b_{i,k} P_i \otimes \beta_k \right) = \sum_{i=1}^r P_i \otimes d_i \gamma_i = \sum_{i=1}^s P_i \otimes n_i.$$

Stąd wynika, że $n_i = 0$ dla $i > r$ oraz $d_i \gamma_i = n_i$ w \mathcal{O}_K . Ponieważ $\mathbb{Q} \cap \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$, to $d_i | n_i$ w \mathbb{Z} , dla każdego $i = 1, \dots, r$. Analogicznie dowodzimy drugiej równoważności.

Niech

$$(3.1.2) \quad \pi : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$$

będzie dowolnym homomorfizmem \mathbb{Z} -modułów. Niech $\boldsymbol{\pi} := \pi \otimes \mathbb{Q} : \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbb{Q}$. Wówczas z Twierdzenia 3.1.3 istnieje przekształcenie $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \text{Hom}_{M_e(\mathbb{D})}(\mathbf{\Omega}, M_e(\mathbb{D}))$ takie, że $\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\pi}}) = \boldsymbol{\pi}$. Następnie z Uwagi 3.1.4, możemy zapisać:

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \prod_{i=0}^t \tilde{\boldsymbol{\pi}}(i)$$

oraz

$$\tilde{\mathbf{s}} = \prod_{i=0}^t \tilde{\mathbf{s}}(i),$$

gdzie $\tilde{\pi} \circ \tilde{\mathbf{s}} = \text{id}$, $\tilde{\pi}(i) \in \text{Hom}_{M_{e_i}(D_i)}(\Omega_i^{e_i}, M_{e_i}(D_i))$, $\tilde{\mathbf{s}}(i) \in \text{Hom}_{M_{e_i}(D_i)}(\text{Im } \tilde{\pi}(i), \Omega_i^{e_i})$ oraz $\tilde{\pi}(i) \circ \tilde{\mathbf{s}}(i) = \text{id}$. Mamy również:

$$\text{Ker } \tilde{\pi} = \prod_{i=0}^t \text{Ker } \tilde{\pi}(i), \quad \Omega_i^{e_i} \cong \text{Im } \tilde{\mathbf{s}}(i) \oplus \text{Ker } \tilde{\pi}(i), \quad \Omega \cong \text{Im } \tilde{\mathbf{s}} \oplus \text{Ker } \tilde{\pi}.$$

Z Lematu 3.1.1 i Uwagi 3.1.5 otrzymujemy następujące rozkłady na podmoduły proste:

$$\text{Im } \tilde{\mathbf{s}}(i) = \bigoplus_{k=1}^{k_i} K_1(i) \tilde{\omega}_k(i) \quad \text{oraz} \quad \text{Ker } \tilde{\pi}(i) = \bigoplus_{k=k_i+1}^{u_i} K_1(i) \tilde{\omega}_k(i),$$

gdzie $k_i \leq e_i$. Zauważmy, że elementy $\omega_1(i), \dots, \omega_{u_i}(i)$ tworzą bazę przestrzeni Ω_i nad D_i . Bez straty ogólności możemy założyć, że $\omega_k(i) \in \Omega_i$ dla $k = k_i + 1, \dots, u_i$.

Dla prostoty zapisu oznaczmy również przez π następujące przekształcenie:

$$(3.1.3) \quad \pi : \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K$$

oraz przez $\tilde{\pi}(i)$ i $\tilde{\mathbf{s}}(i)$ następujące $M_{e_i}(D_i) \otimes_{\mathbb{Q}} K$ -liniowe homomorfizmy:

$$\tilde{\pi}(i) : \Omega_i^{e_i} \otimes_{\mathbb{Z}} K \rightarrow M_{e_i}(D_i) \otimes_{\mathbb{Q}} K \quad \text{oraz} \quad \tilde{\mathbf{s}}(i) : \text{Im } \tilde{\pi}(i) \rightarrow \Omega_i^{e_i} \otimes_{\mathbb{Z}} K.$$

Ponieważ Ω jest skończenie generowanym $\text{End}_F(G)$ -modułem, więc istnieje liczba $M_0 \in \mathbb{N}$ taka, że homomorfizmy $\text{End}_F(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$ -modułów:

$$M_0 \tilde{\pi} : \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \rightarrow \text{End}_F(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K, \quad \tilde{\mathbf{s}} : M_0 \text{Im } \tilde{\pi} \rightarrow \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$$

są dobrze określone. Ograniczając homomorfizm śladu $\text{tr} : \mathbb{M}_e(\mathbb{D}) \otimes_{\mathbb{Q}} K \rightarrow K$ do $\text{End}_F(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$ otrzymamy \mathcal{O}_K -liniowy homomorfizm. Wówczas

$$(3.1.4) \quad \text{tr } M_0 \tilde{\pi} = M_0 \pi$$

oraz $M_0 \tilde{\pi} \circ \tilde{\mathbf{s}} = M_0 \text{id}_{M_0 \text{Im } \tilde{\pi}}$. Zdefiniujmy $M_{e_i}(\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K)$ -moduł $\Gamma(i)$:

$$\Gamma(i) := \sum_{k=1}^{k_i} K_1(i) M_0 \tilde{\omega}_k(i) + \sum_{k=k_i+1}^{u_i} K_1(i) \tilde{\omega}_k(i) \subset \Omega_i^{e_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K,$$

gdzie $K_1(i) \subset M_{e_i}(\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K)$ oraz $\text{End}_F(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$ -moduł $\Gamma := \bigoplus_{i=0}^t \Gamma(i) \subset \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$. Zdefiniujmy stałe $M_2 := [\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K : \Gamma]$ oraz $M_3 := [\Gamma : M_2 \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K]$.

Niech $K_{1,\lambda}(i) := K_1(i) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_\lambda \subset M_{e_i}(\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda)$. Niech ponadto $R \in \Omega$ będzie dowolnym punktem. Wówczas:

$$(3.1.5) \quad M_2(R \otimes 1) := M_0 \sum_{i=0}^t \sum_{k=1}^{k_i} \tilde{\alpha}(R)_k(i) \tilde{\omega}_k(i) + \sum_{i=0}^t \sum_{k=k_i+1}^{u_i} \tilde{\alpha}(R)_k(i) \tilde{\omega}_k(i),$$

dla pewnych $\tilde{\alpha}(R)_k(i) \in K_{1,\lambda}(i)$.

3.1.2 Główne rezultaty rozprawy

Twierdzenie 3.1.7. *Niech G/F będzie rozmaiłością semiabelową taką, że $G = T \times A$ nad ciałem F . Niech F'/F będzie skończonym rozszerzeniem ciał takim, że:*

$$(3.1.6) \quad T \otimes_F F' = G_0^{e_0} \quad \text{oraz} \quad A \otimes_F F' = G_1^{e_1} \times \cdots \times G_t^{e_t},$$

gdzie $G_0 = \mathbb{G}_m$ i G_i/F' są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaiłościami abelowymi, dla $i = 1, \dots, t$. Załóżmy, że:

$$(3.1.7) \quad e_i \leq \dim_{\text{End}_{F'}(G_i)^0} H_1(G_i(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \quad \text{dla } i = 0, \dots, t,$$

gdzie $\text{End}_{F'}(G_i)^0 = \text{End}_{F'}(G_i) \otimes \mathbb{Q}$. Niech $P \in G(F)$ oraz niech $\Lambda \subset G(F)$ będzie dowolną skończone generowaną podgrupą. Jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v pierścienia \mathcal{O}_F , to $P \in \Lambda + G(F)_{\text{tor}}$. Ponadto, jeśli $G(F)_{\text{tor}} \subset \Lambda$, to otrzymujemy następującą równoważność:

$$P \in \Lambda \iff r_v(P) \in r_v(\Lambda) \quad \text{dla p.w. ideałów pierwszych } v \text{ w } \mathcal{O}_F.$$

Uwaga 3.1.8. Ponieważ $H_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, więc $\dim_{\text{End}_{F'}(G_0)^0} H_1(G_0(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = 1$. Zatem warunek (3.1.7) dla G_0 ma następującą postać: $e_0 \leq 1$.

Dowód Twierdzenia 3.1.7. Załóżmy, że $e_0 \neq 0$ (przypadek $e_0 = 0$ — [BK, Theorem 4.1]). Niech $P \in \Omega$. Wówczas

$$(3.1.8) \quad P = \sum_{i=1}^s n_i P_i, \quad \text{dla } n_i \in \mathbb{Z}.$$

Założmy, że $P \notin \Lambda$. Korzystając z Uwagi 3.1.6 możemy równoważnie założyć, że

$$(3.1.9) \quad P \otimes 1 \notin \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda,$$

dla pewnego $\lambda|l$, gdzie l jest pewną liczbą pierwszą. Będziemy rozpatrywać równość (3.1.8) w $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K$. Z (3.1.9) wynika, że istnieje $1 \leq j_0 \leq s$ oraz liczby naturalne $m_1 < m_2$ takie, że $\lambda^{m_1} \| n_{j_0}$ oraz $\lambda^{m_2} | d_{j_0}$. Niech $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\pi(R) := \nu_{j_0}$ będzie homomorfizmem \mathbb{Z} -modułów jak w (3.1.2). Mamy wówczas homomorfizmy $\tilde{\pi}, \tilde{s}, \tilde{\pi}(i), \tilde{s}(i), M_0 \tilde{\pi}$ dla pewnej stałej M_0 . Mamy również stałą M_2 i M_3 oraz moduły $\Gamma(i)$ i Γ .

Niech $m \geq m_2$. Zauważmy, że dla j_0 mamy:

$$\pi(P \otimes 1) \notin \pi(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda) + \lambda^m \pi(\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda).$$

Zatem z (3.1.4) otrzymujemy: $M_0 \tilde{\pi}(P \otimes 1) \notin M_0 \tilde{\pi}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda) + M_0 \lambda^m \tilde{\pi}(\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda)$. Niech $Q \in \Lambda$. Wówczas

$$M_0 \tilde{\pi}(M_2(P \otimes 1 - Q \otimes 1)) = M_0^2 \left(\sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) \tilde{\pi}(\tilde{\omega}_k(i)) \right)_{0 \leq i \leq t}.$$

Zapis powyższy jest uzasadniony, gdyż $\tilde{\pi} = \prod_{i=0}^t \tilde{\pi}(i)$ przekształca moduł $\Omega = \bigoplus_{i=0}^t \Omega_i$ w pierścień $\mathbb{M}_e(\mathbb{D})$, po współrzędnych.

Zatem $M_0^2 \left(\sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) \tilde{\pi}(\tilde{\omega}_k(i)) \right)_{0 \leq i \leq t} \notin M_0 \lambda^m \tilde{\pi}(M_2 \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_\lambda)$. Stąd

$$M_0^2 \left(\sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) \tilde{\pi}(\tilde{\omega}_k(i)) \right)_{0 \leq i \leq t} \notin M_0 \lambda^m \tilde{\pi}(M_3 \Gamma).$$

Stąd wynika, że dla pewnego $0 \leq i \leq t$ oraz $1 \leq k \leq k_i$, mamy

$$(3.1.10) \quad \tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i) \notin \lambda^m M_3 K_{1,\lambda}(i).$$

Dla $i = 1, \dots, t$, niech \mathcal{L}_i będzie kratą Riemanna taką, że $G_i(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g / \mathcal{L}_i$. Dla $i = 0$, mamy $G_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0}^\times \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Niech $\mathcal{L}_0 = \mathbb{Z}$.

Niech $0 \leq i \leq t$. Wówczas mamy $H_1(G_i(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = \mathcal{L}_i \otimes \mathbb{Q}$. Mamy również $T_l(G_i) \cong \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$. Oznaczmy przez \mathcal{L}'_i podkratę kraty \mathcal{L}_i indeksu $[\mathcal{L}_i : \mathcal{L}'_i] = M_{1,i}$, która jest wolnym podmodułem $\text{End}_F(G_i)$ -modułu \mathcal{L}_i rangi $\dim_{D_i} \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Niech $M_4 := \text{NWW}_i M_{1,i}$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^t \mathcal{L}_i \quad \text{oraz} \quad \mathcal{L}' = \bigoplus_{i=0}^t \mathcal{L}'_i.$$

Niech e będzie stopniem rozgałęzienia ideału pierwszego $\lambda \subset \mathcal{O}_K$ nad l . Mamy $l\mathcal{O}_K = \prod_{\lambda|l} \lambda^e$. Ponadto wiemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$G_i[l^n] \cong \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l / l^n \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \quad \text{oraz} \quad G_i[l^n] = \bigoplus_{\lambda|l} G_i[\lambda^{en}].$$

Zatem $G_i[\lambda^{en}] = \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda / \lambda^{en} \mathcal{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda$. Rozpatrzmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \text{Ker } z(n, \lambda) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda & \xrightarrow{\text{pr}'} & \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda / \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow z(n, \lambda) \\ 0 & \longrightarrow & \lambda^{en} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda & \longrightarrow & \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda / \lambda^{en} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \lambda^{en} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda / \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\lambda & & & & \end{array}$$

Z „lematu węża” otrzymujemy, że:

$$\text{Ker } z(n, \lambda) \hookrightarrow \lambda^{en} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda} / \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}.$$

Stąd $|\text{Ker } z(n, \lambda)| < \infty$ oraz $\lambda^{em_4} \text{Ker } z(n, \lambda) = 0$, gdzie $l^{m_4} \| M_4$. Niech

$$p_i := \dim_{D_i} H_1(G_i(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = \dim_{D_i} \mathcal{L}_i \otimes \mathbb{Q}.$$

Niech $\boldsymbol{\eta}_1(i), \dots, \boldsymbol{\eta}_{p_i}(i)$ będzie bazą wolnego modułu \mathcal{L}'_i nad $\text{End}_F(G_i)$. Wówczas $\mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda} / \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}$ jest wolnym modułem nad $\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\lambda} / \lambda^{en} \text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\lambda}$ oraz elementy $\bar{\boldsymbol{\eta}}_k(i) := \text{pr}'(\boldsymbol{\eta}_k(i) \otimes 1)$ dla $k = 1, \dots, p_i$ tworzą bazę $\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\lambda} / \lambda^{en} \text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\lambda}$ -modułu $\mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda} / \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}$. Przypomnijmy, że z założenia $e_i \leq p_i$. Niech $l^{m_0} \| M_0$ oraz $l^{m_3} \| M_3$, dla $m_0, m_3 \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że liczba n spełnia następującą nierówność:

$$(3.1.11) \quad en > m + e(m_0 + m_3 + m_4).$$

Oznaczmy przez

$$\mathbf{T}_k(i) := z(n, \lambda) (\bar{\boldsymbol{\eta}}_k(i)) \in \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda} / \lambda^{en} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda} \cong G_i(\lambda^{en}).$$

Niech $L := F(G[l^n]) = F((G_0 \times G_1 \times \dots \times G_t)[l^n])$. Z Twierdzenia 2.2.10 oraz z Wniosku 2.2.11.1 istnieje zbiór W ideałów pierwszych w w \mathcal{O}_L o dodatniej gęstości Dirichleta taki, że dla $i = 0, 1, \dots, t$:

$$\begin{aligned} r_w(\boldsymbol{\omega}_k(i)) &= 0, \quad \text{dla } k_i + 1 \leq k \leq u_i \\ r_w(\boldsymbol{\omega}_k(i)) &= r_w(\mathbf{T}_k(i)), \quad \text{dla } 1 \leq k \leq k_i. \end{aligned}$$

Niech $w \in W$. Z założenia mamy $r_w(P) \in r_w(\Lambda)$. Załóżmy, że zdefiniowany wyżej punkt $Q \in \Lambda$ jest taki, że $r_w(Q) = r_w(P)$. Wówczas:

$$0 = r_w(M_2(P \otimes 1 - Q \otimes 1)) = \sum_{i=0}^t \sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(P)_k(i) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(Q)_k(i)) M_0 r_w(\tilde{\mathbf{T}}_k(i)).$$

Z [Pe1, Corollary 2.3.4], r_w jest różnowartościowe dla podgrupy torsyjnej. Zatem:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^t \sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(P)_k(i) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(Q)_k(i)) M_0 \tilde{\mathbf{T}}_k(i) = \\ &= z(n, \lambda) \left(\sum_{i=0}^t \sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(P)_k(i) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(Q)_k(i)) M_0 \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(i) \right) \end{aligned}$$

Stąd $\sum_{i=0}^t \sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) M_0 \tilde{\eta}_k(i) \in \text{Ker } z(n, \lambda)$, więc

$$\lambda^{e(m_0+m_4)} \sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) \tilde{\eta}_k(i) \in \lambda^{en} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}.$$

To implikuje, że

$$\sum_{k=1}^{k_i} (\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i)) \tilde{\eta}_k(i) \in \lambda^{e(n-m_0-m_4)} \mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}.$$

Zatem dla każdego $0 \leq i \leq t$ oraz $1 \leq k \leq k_i$:

$$\tilde{\alpha}(P)_k(i) - \tilde{\alpha}(Q)_k(i) \in \lambda^{e(n-m_0-m_4)} K_{1,\lambda}(i),$$

gdyż $\eta_1(i) \otimes 1, \dots, \eta_{p_i}(i) \otimes 1$ stanowią bazę $\text{End}_F(G_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\lambda}$ -modułu $\mathcal{L}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\lambda}$. W ten sposób uzyskaliśmy sprzeczność z (3.1.10), ponieważ z (3.1.11), mamy $e(n - m_0 - m_4) > m + em_3$. \square

Liniowa zależność punktów i skończona liczba redukcji

G. Banaszak i P. Krasoń pokazali w [BK, Theorem 6.4], że dla odpowiedniej klasy rozmaitości abelowych, wystarczy używać tylko skończonego zbioru $S_{P,\Lambda}^{\text{fin}}$ ideałów pierwszych v pierścienia \mathcal{O}_F , by sprawdzić, czy $P \in \Lambda + A(F)_{\text{tor}}$. Zbiór ten zależy tylko od A, P, Λ oraz od wyboru \mathbb{Z} -bazy grupy $A(F)/A(F)_{\text{tor}}$. W dowodzie tym autorzy wykorzystali wersję efektywną twierdzenia Chebotarewa [LO] oraz przekształcenie dwuliniowe kanonicznej wysokości:

$$\beta_H : A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \times A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest symetryczną dodatnio określoną formą dwuliniową nad \mathbb{R} .

We wspólnej pracy [BB, Sekcja 4.2] z G. Banaszakiem pokazaliśmy, że istnieje forma dwuliniowa, również dla jednowymiarowego torusa nad F , która jest symetryczna i dodatnio określona nad \mathbb{R} . Mianowicie, niech S będzie skończonym zbiorem miejsc \mathcal{O}_F zawierającym również wszystkie miejsca Archimedesowe (ang. Archimedean places). Niech $U(S) := \mathcal{O}_{F,S}^{\times} / (\mathcal{O}_{F,S}^{\times})_{\text{tor}}$. Istnieje przekształcenie dwuliniowe (ang. bilinear regulator pairing):

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : U(S) \times U(S) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle u, u' \rangle &:= \sum_v \log |u|_v \log |u'|_v, \end{aligned}$$

gdzie \sum_v oznacza sumowanie po wszystkich elementach zbioru S z pominięciem jednego miejsca Archimedesowego. Widzimy, że przekształcenie dwuliniowe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest symetryczne nieujemnie określone. Jest ono również niezdegenerowane, gdyż regulator jest różny od 0. Zatem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest dodatnio określone.

Niech (u_1, \dots, u_m) będzie bazą $U(S)$. Niech γ, γ' będą elementami $U(S) \otimes \mathbb{R}$. Wówczas γ oraz γ' możemy jednoznacznie zapisać jako $\gamma = \sum_{i=1}^m u_i \otimes c_i$ i $\gamma' = \sum_{j=1}^m u_j \otimes c'_j$ (stosując addytywną notację dla grupy $U(S)$). Rozważmy rozszerzenie współczynników do \mathbb{R} następująco:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \mathbb{R} : U(S) \otimes \mathbb{R} \times U(S) \otimes \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \langle \gamma, \gamma' \rangle &:= \sum_{i,j} c_i c'_j \sum_v \log |u_i|_v \log |u_j|_v. \end{aligned}$$

To przekształcenie dwuliniowe jest również symetryczne. Dla $\gamma = \sum_{i=1}^m u_i \otimes c_i \in U(S) \otimes \mathbb{R}$ mamy

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \sum_v \left(\sum_{i,j} c_i \log |u_i|_v c_j \log |u_j|_v \right) = \sum_v \left(\sum_i c_i \log |u_i|_v \right)^2 \geq 0.$$

Stąd $\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \mathbb{R}$ jest nieujemnie określone. Zauważmy, że $\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \mathbb{R}$ jest również niezdegenerowane, ponieważ jego macierz w bazie $(u_1 \otimes 1, \dots, u_m \otimes 1)$ jest taka sama jak macierz $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w bazie (u_1, \dots, u_m) . To implikuje, że $\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \mathbb{R}$ jest dodatnio określone. Oznaczmy $\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \mathbb{R}$ przez β_R .

Możemy, więc na $G := T \times A$, gdzie T jest jednowymiarowym torusem oraz A dowolną rozmaitością abelową nad ciałem F zdefiniować symetryczną dodatnio określoną formę dwuliniową β_G , która jest sumą ortogonalną formy β_R i β_H . Czyli $\beta_G = \beta_R \oplus \beta_H$.

Lemat 3.1.9. *Niech $P \in \Omega$ oraz niech Λ będzie skończenie generowaną podgrupą grupy Ω . Wtedy sprawdzenie, czy $P \in \Lambda$ lub nie, wymaga sprawdzenia tylko skończenie wielu układów liczb całkowitych (ν_1, \dots, ν_r) .*

Dowód. Patrz [BK, Lemma 6.1]. □

Twierdzenie 3.1.10. *Załóżmy, że rozmaitość semiabelowa G/F spełnia założenia Twierdzenia 3.1.7. Niech $P \in G(F)$ oraz niech Λ będzie dowolną skończenie generowaną podgrupą grupy $G(F)$. Wówczas istnieje skończony zbiór S^{fin} ideałów pierwszych w pierścieniu \mathcal{O}_F , zależący tylko od rozmaitości G , punktu P , podgrupy Λ oraz od \mathbb{Z} -bazy P_1, \dots, P_s grupy Mordella-Weila $G(F)$ (tzn. \mathbb{Z} -bazy grupy $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})$, jak w Uwadze 2.2.1) taki, że zachodzi następujący warunek:*

$$\text{jeśli } r_v(P) \in r_v(\Lambda) \text{ dla wszystkich } v \in S^{\text{fin}}, \text{ to } P \in \Lambda + G(F)_{\text{tor}}.$$

Jeśli $G(F)_{\text{tor}} \subset \Lambda$, to mamy również analogiczną równoważność jak w Twierdzeniu 3.1.7, tzn.:

$$P \in \Lambda \iff r_v(P) \in r_v(\Lambda) \text{ dla wszystkich ideałów pierwszych } v \text{ w } S^{\text{fin}}.$$

Dowód. Konstruujemy zbiór skończony S^{fin} analogicznie jak w dowodzie [BK, Theorem 6.4], korzystając m.in. z Lematu 3.1.9. Następnie modyfikujemy dowód Twierdzenia 3.1.7 w analogiczny sposób jak opisano w dowodzie wcześniej już cytowanym, stosując Twierdzenie 2.2.12 zamiast Twierdzenia 2.2.10 oraz Wniosek 2.2.12.1 zamiast Wniosku 2.2.11.1. \square

Uwaga 3.1.11. Zbiór S^{fin} można skonstruować efektywnie, gdy możemy skonstruować efektywnie \mathbb{Z} -bazę wolnej grupy abelowej $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})/\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})_{\text{tor}}$, czyli gdy możemy efektywnie skonstruować \mathbb{Z} -bazy dla $\mathcal{O}_{F,S}^{\times}/(\mathcal{O}_{F,S}^{\times})_{\text{tor}}$ oraz $A(F)/A(F)_{\text{tor}}$. \mathbb{Z} -baza $\mathcal{O}_{F,S}^{\times}/(\mathcal{O}_{F,S}^{\times})_{\text{tor}}$ jest konstruowalna efektywnie [Le, str. 234], natomiast dla $A(F)/A(F)_{\text{tor}}$ istnieje efektywny algorytm znajdowania \mathbb{Z} -bazy, jeśli grupa Tate'a-Shafarevicha dla A jest skończona.

Kontrprzykłady dotyczące Twierdzenia 3.1.7

A. Schinzel [Sch, str. 419-420] pokazał, że Twierdzenie 1.2.1 nie może zostać uogólnione dla dwuwymiarowego torusa. G. Banaszak oraz P. Krasoń [BK, Sekcja 5] również pokazali, że założenia o wykładnikach e_i w [BK, Theorem 4.1] są bardzo istotne oraz, gdy się przekroczy ograniczenie, możemy znaleźć kontrprzykłady. W podobny sposób pokażemy, że jeśli przekroczymy ograniczenia na e_i w Twierdzeniu 3.1.7, to również znajdziemy kontrprzykłady.

1. Niech $T := \mathbb{G}_m^{\text{eo}}$ nad $F = \mathbb{Q}(i)$ oraz niech $A := A_d$, gdzie A_d zdefiniowane jak w [BK, str. 330-331]. Czyli $A_d := E_d^2$, gdzie E_d jest krzywą eliptyczną nad \mathbb{Q} daną wzorem $y^2 = x^3 - d^2x$. Krzywa ta ma mnożenie zespolone przez $\mathbb{Z}[i]$. Zauważmy, że $\dim_{\mathbb{Q}(i)} H_1(E_d(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 1$. Postępując jak w [BK, str. 330-331], możemy znaleźć takie d , że $\text{rank}_{\mathbb{Z}[i]} E_d(\mathbb{Q}(i)) \geq 2$. Niech d będzie liczbą o tej własności. Niech $Q_1, Q_2 \in E_d(\mathbb{Q}(i))$ będą punktami liniowo niezależnymi nad $\mathbb{Z}[i]$. Niech $S := \{v|2d : v \text{ jest ideałem pierwszym pierścienia } \mathcal{O}_F\} \cup \{v : \text{torus } T \text{ ma złą redukcję}\}$. Niech Λ_T będzie dowolną podgrupą skończenie generowaną w torusie T . Zdefiniujemy następujące punkty w $A_d(\mathbb{Q}(i))$:

$$P_1 := \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{bmatrix}, \quad P_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $\Lambda'_A := \mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3$. Wówczas stosując metody z [BK, str. 330-332] łatwo można pokazać, że punkt $P' \in A(F)$ zdefiniowany następująco:

$$P' := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

spełnia następujące warunki: $r_v(P') \in r_v(\Lambda'_A)$ dla wszystkich $v \notin S$ oraz $P' \notin \Lambda'_A$.

Niech $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ będą \mathbb{Z} -generatorami podgrupy Λ'_A . Zdefiniujmy podgrupę $\Lambda_A := \sum_{i=1}^6 \mathbb{Z} R_i$. Wówczas oczywistym jest, że $P' \notin \Lambda_A$. Niech $\Lambda := \Lambda_T \oplus \Lambda_A$ w $G(F)$. Niech

$$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

Z powyższych rozważań widzimy, że

$$(3.1.12) \quad r_v(P) \in r_v(\Lambda)$$

dla wszystkich $v \notin S$ oraz

$$(3.1.13) \quad P \notin \Lambda.$$

2. Podobnie możemy skonstruować przykład dla dowolnego torusa $T := \mathbb{G}_m^{e_0}$ nad ciałem F oraz dowolnej skończone generowanej podgrupy Λ_T grupy $T(F)$ oraz rozmaitości abelowej A nad ciałem F , $A := E^3$, gdzie E jest krzywą eliptyczną nad ciałem F bez mnożenia zespolonego taką, że istnieją trzy punkty P_1, P_2, P_3 liniowo niezależne nad \mathbb{Z} . Widzimy wówczas, że $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 2$. Podgrupę Λ_A oraz punkt P (rozszerzony o odpowiednią liczbę jedynek dla współrzędnych odpowiadających torusowi) definiujemy jak w [JP] oraz $\Lambda := \Lambda_T \oplus \Lambda_A$.
3. Analogicznie możemy skonstruować przykład dla $\mathbb{G}_m^2 := \mathbb{G}_m \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}} \mathbb{G}_m$ dla $F := \mathbb{Q}$, $S := \{(2), (3)\}$, $\mathcal{O}_{F,S} := \mathbb{Z}_S$ oraz dowolnej rozmaitości abelowej $A := \prod_{i=1}^t G_i^{e_i}$ nad F (w tym momencie modyfikujemy zbiór S o ideały pierwsze złej redukcji dla A) i dowolnej podgrupy $\Lambda_A \in A(F)$. Wiemy, że $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 1$. Niech $\Lambda_T := \lambda_1^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_2^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_3^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{G}_m^2$, gdzie

$$\lambda_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Natomiast punkt P definiujemy następująco:

$$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Znowu przyjmujemy za $\Lambda := \Lambda_T \oplus \Lambda_A$. Stosując metody A. Schinzla [Sch, 419-420] uzyskamy własności analogiczne do (3.1.12) oraz (3.1.13).

Współmierność podgrup w grupach Mordella-Weila

Opisane tutaj wyniki dotyczą współmierności podgrup w grupach typu Mordella-Weila. Są to wspólne wyniki uzyskane z prof. Grzegorzem Banaszakiem [BB]. Na wstępie wprowadźmy dodatkowe oznaczenia, których będziemy używać w tej podsekcji.

NOTACJA

1. $B(F)$ skończenie generowana grupa abelowa,
2. $B_v(k_v)$ grupa skończona dla każdego v .

Założmy, że dla prawie wszystkich v istnieje homomorfizm grup (homomorfizm redukcji):

$$(3.1.14) \quad r_v : B(F) \rightarrow B_v(k_v).$$

Wprowadzimy teraz pojęcie współmierności i silnej współmierności.

Definicja 3.1.12. Niech G będzie dowolną grupą oraz H, H' dwoma podgrupami grupy G . H, H' nazywamy **współmiernymi**, gdy:

$$(3.1.15) \quad [H : H \cap H'] < \infty \quad \text{oraz} \quad [H' : H \cap H'] < \infty.$$

Definicja 3.1.13. Niech B będzie grupą abelową ze skończoną podgrupą torsyjną B_{tor} . Dwie podgrupy Λ oraz Λ' grupy B nazywamy **silnie współmiernymi**, gdy:

$$(3.1.16) \quad \Lambda \subset \Lambda \cap \Lambda' + B_{\text{tor}} \quad \text{oraz} \quad \Lambda' \subset \Lambda \cap \Lambda' + B_{\text{tor}}.$$

Uwaga 3.1.14. Zauważmy, że jeśli Λ oraz Λ' są silnie współmierne, to są one również współmierne.

Wyniki dotyczą badania relacji pomiędzy następującymi własnościami.

Lokalno-globalne własności badania liniowej zależności

Własność liniowej zależności: Niech $P \in B(F)$ oraz $\Lambda \subset B(F)$ będzie podgrupą. Jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, dla prawie wszystkich ideałów pierwszych v , to $P \in \Lambda + B(F)_{\text{tor}}$

Własność słabej liniowej zależności: Niech $P \in B(F)$ oraz $\Lambda \subset B(F)$ będzie podgrupą. Jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, dla prawie wszystkich v , to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $nP \in \Lambda$.

Uwaga 3.1.15. Oczywiście jest, że **Własność liniowej zależności** implikuje **Własność słabej liniowej zależności**. Natomiast z **Własności słabej liniowej zależności** nie wynika **Własność liniowej zależności**. Istotnie, niech A/F będzie rozmaiatością abelową nad ciałem F taką, że istnieje nietorsyjny element $P \in A(F)$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ oraz niech l będzie liczbą pierwszą względnie pierwszą z n . Zdefiniujmy następująco: $B(F) := A(F)$, $B_v(k_v) := A_v(k_v)_l$. Niech $\Lambda := \mathbb{Z}nP$. Oczywiście jest, że $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ oraz $nP \in \Lambda$, ale $P \notin \Lambda + B(F)_{\text{tor}}$.

Lokalno-globalne własności współmierności

Lokalno-globalna własność współmierności: Niech $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ będą dwiema podgrupami. Podgrupy Λ i Λ' są współmierne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna c taka, że dla prawie wszystkich v zachodzi:

$$(3.1.17) \quad [r_v(\Lambda) : r_v(\Lambda \cap \Lambda')] \leq c \quad \text{oraz} \quad [r_v(\Lambda') : r_v(\Lambda \cap \Lambda')] \leq c.$$

Lokalno-globalna własność silnej współmierności: Niech $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ będą dwiema podgrupami. Podgrupy Λ i Λ' są silnie współmierne wtedy i tylko wtedy, gdy dla prawie wszystkich v zachodzi:

$$(3.1.18) \quad r_v(\Lambda) \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda') + r_v(B(F)_{\text{tor}}) \quad \text{oraz} \quad r_v(\Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda') + r_v(B(F)_{\text{tor}}).$$

Wyniki dotyczące współmierności

Twierdzenie 3.1.16 ([BB, Proposition 2.1]). *Lokalno-globalna własność silnej współmierności implikuje Lokalno-globalną własność współmierności.*

Dowód. Załóżmy, że zachodzi **Lokalno-globalna własność silnej współmierności**. Niech $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ będą dwiema podgrupami. Załóżmy, że dla Λ, Λ' dla prawie wszystkich v , dla pewnego $c \in \mathbb{N}$, zachodzą warunki (3.1.17). Zdefiniujmy dwie podgrupy grupy $B(F)$ następująco:

$$H := c! \Lambda + \Lambda \cap \Lambda' \quad \text{oraz} \quad H' := c! \Lambda' + \Lambda \cap \Lambda'.$$

Zauważmy, że $\Lambda \cap \Lambda' \subset H \cap H'$, $H \subset \Lambda$ i $H' \subset \Lambda'$. Zatem $H \cap H' = \Lambda \cap \Lambda'$. Wówczas z (3.1.17), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} r_v(H) &= r_v(c! \Lambda) + r_v(\Lambda \cap \Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda') \subset r_v(H \cap H') + r_v(B(F)_{\text{tor}}), \\ r_v(H') &= r_v(c! \Lambda') + r_v(\Lambda \cap \Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda') \subset r_v(H \cap H') + r_v(B(F)_{\text{tor}}). \end{aligned}$$

Zatem dla H oraz H' zachodzą warunki (3.1.18). Z **Lokalno-globalnej własności silnej współmierności** uzyskujemy:

$$\begin{aligned} c! \Lambda + \Lambda \cap \Lambda' &= H \subset H \cap H' + B(F)_{\text{tor}} = \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}, \\ c! \Lambda' + \Lambda \cap \Lambda' &= H' \subset H \cap H' + B(F)_{\text{tor}} = \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}. \end{aligned}$$

Stąd $c! \Lambda \subset \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}$ oraz $c! \Lambda' \subset \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}$. Z tego wynika, że $[\Lambda : \Lambda \cap \Lambda'] < \infty$ oraz $[\Lambda' : \Lambda \cap \Lambda'] < \infty$. \square

Twierdzenie 3.1.17 ([BB, Proposition 2.2]). ***Własność słabej liniowej zależności jest równoważna Lokalno-globalnej własności współmierności.***

Dowód. Załóżmy, że zachodzi **Własność słabej liniowej zależności**. Niech $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ będą dwiema podgrupami.

(\Rightarrow) Załóżmy, że Λ, Λ' są współmierne. Wówczas warunek (3.1.17) zachodzi dla $c := \max\{[\Lambda : \Lambda \cap \Lambda'], [\Lambda' : \Lambda \cap \Lambda']\}$.

(\Leftarrow) Załóżmy, że (3.1.17) zachodzi dla pewnego $c \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$(3.1.19) \quad r_v(c! \Lambda) \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda'),$$

$$(3.1.20) \quad r_v(c! \Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda')$$

dla prawie wszystkich v . Niech $P_1, \dots, P_m \in c! \Lambda$ stanowią zbiór generatorów $c! \Lambda$. Z (3.1.19) otrzymujemy, że $r_v(P_i) \in r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla prawie wszystkich v , dla $i = 1, \dots, m$. Z założenia **Własności słabej liniowej zależności** wiemy, że istnieje liczba naturalna k taka, że $kP_i \in \Lambda \cap \Lambda'$, dla $i = 1, \dots, m$. Zatem $kc! \Lambda \subset \Lambda \cap \Lambda' \subset \Lambda$. Ponieważ $B(F)$ jest skończenie generowaną grupą abelową, więc $\Lambda/kc! \Lambda$ jest skończoną grupą abelową. Stąd otrzymujemy, że $\Lambda/\Lambda \cap \Lambda'$ jest skończoną grupą abelową. W analogiczny sposób dowodzimy, że $\Lambda'/\Lambda \cap \Lambda'$ jest skończoną grupą abelową.

Założmy teraz, że spełniona jest **Lokalno-globalna własność współmierności**. Załóżmy, że dla $P \in B(F)$ oraz podgrupy $\Lambda \subset B(F)$ zachodzi $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, dla prawie wszystkich v . Zdefiniujmy podgrupę $\Lambda' := \mathbb{Z}P + \Lambda \subset B(F)$. Zauważmy, że $\Lambda \cap \Lambda' = \Lambda$. Ponadto widzimy, że $r_v(\Lambda) = r_v(\Lambda')$ dla prawie wszystkich v . Zatem zachodzi warunek (3.1.17) dla $c = 1$. Z **Lokalno-globalnej własności współmierności** otrzymujemy, że $[\Lambda' : \Lambda] < \infty$. Stąd wnioskujemy, że istnieje liczba naturalna n taka, że $nP \in \Lambda$. \square

Twierdzenie 3.1.18 ([BB, Proposition 2.3]). *Własność liniowej zależności jest równoważna Lokalno-globalnej własności silnej współmierności.*

Dowód. Załóżmy, że zachodzi **Własność liniowej zależności**.

(\Rightarrow) Niech $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ będą podgrupami silnie współmiernymi. Wówczas oczywistym jest, że zachodzi warunek (3.1.18).

(\Leftarrow) Załóżmy, że dla prawie wszystkich v zachodzi warunek (3.1.18). Niech $P \in \Lambda$. Wtedy $r_v(P) \in r_v(\Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}})$, dla prawie wszystkich v . Z **Własności liniowej zależności** otrzymujemy, że $P \in \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}} + B(F)_{\text{tor}} = \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}$. Zatem $\Lambda \subset \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}$. W ten sam sposób pokazujemy, że $\Lambda' \subset \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}}$.

Założmy teraz, że zachodzi **Lokalno-globalna własność silnej współmierności**. Niech $P \in B(F)$ oraz niech $\Lambda \subset B(F)$ będzie podgrupą grupy $B(F)$. Rozważmy ponownie podgrupę $\Lambda' := \mathbb{Z}P + \Lambda \subset B(F)$. Przypomnijmy, że $\Lambda \cap \Lambda' = \Lambda$. Załóżmy, że dla prawie wszystkich v zachodzi $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$. Wynika stąd, że $r_v(\Lambda) = r_v(\Lambda') = r_v(\Lambda \cap \Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}})$. Z **Lokalno-globalnej własności silnej współmierności** otrzymujemy, że $\Lambda' \subset \Lambda \cap \Lambda' + B(F)_{\text{tor}} = \Lambda + B(F)_{\text{tor}}$. Zatem $P \in \Lambda + B(F)_{\text{tor}}$. \square

Uwaga 3.1.19. Twierdzenie 3.1.16 wynika również z Twierdzeń 3.1.17, 3.1.18 oraz Uwagi 3.1.15.

Jesteśmy w stanie sformułować wniosek analogiczny do [BB, Corollary 3.1] dla rozmaitości semiabelowych.

Wniosek 3.1.19.1. *Niech G będzie rozmaitością semiabelową nad F spełniającą założenia jak w Twierdzeniu 3.1.7. Wówczas zachodzi **Lokalno-globalna własność silnej współmierności** dla skończenie generowanych podgrup, ze względu na przekształcenia redukcji.*

Dowód. Wynika bezpośrednio z Twierdzenia 3.1.7 oraz z Twierdzenia 3.1.18. \square

Zachodzi również analogiczny wniosek do [BB, Corollary 4.2 i 4.6] dla rozmaitości semiabelowych zdefiniowanych jak w Twierdzeniu 3.1.7.

Wniosek 3.1.19.2. *Niech $\Lambda, \Lambda' \subset G(F)$ będą skończenie generowanymi podgrupami. Wówczas istnieje skończony zbiór $S_{\Lambda, \Lambda'}^{\text{fin}}$, który zależy od generatorów obu podgrup nad \mathbb{Z} , generatorów $\Lambda \cap \Lambda'$ oraz \mathbb{Z} -bazy grupy Ω taki, że spełniony jest następujący warunek: jeśli $r_v(\Lambda) \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ oraz $r_v(\Lambda') \subset r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla wszystkich $v \in S_{\Lambda, \Lambda'}^{\text{fin}}$, to Λ oraz Λ' są silnie współmierne.*

Dowód. Niech $\Lambda, \Lambda' \subset G(F)$ będą skończone generowanymi podgrupami. Niech P_1, \dots, P_r oraz P'_1, \dots, P'_s będą generatorami Λ i Λ' odpowiednio. Z Twierdzenia 3.1.10 istnieją skończone zbiory $S_{P_i, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}}$ oraz $S_{P'_j, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}}$ dla wszystkich $i = 1, \dots, r$ oraz $j = 1, \dots, s$ takie, że zachodzą następujące własności:

(3.1.21)

jeśli $r_v(P_i) \in r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla każdego $v \in S_{P_i, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}}$, to $P_i \in \Lambda \cap \Lambda' + G(F)_{\text{tor}}$,

jeśli $r_v(P'_j) \in r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla każdego $v \in S_{P'_j, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}}$, to $P'_j \in \Lambda \cap \Lambda' + G(F)_{\text{tor}}$.

Zbiór $S_{\Lambda, \Lambda'}^{\text{fin}}$ definiujemy następująco:

$$S_{\Lambda, \Lambda'}^{\text{fin}} := \bigcup_{i=1}^r S_{P_i, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}} \cup \bigcup_{j=1}^s S_{P'_j, \Lambda \cap \Lambda'}^{\text{fin}}.$$

□

Kontrprzykłady dotyczące Wniosku 3.1.19.1

Przedstawimy teraz kontrprzykłady do Wniosku 3.1.19.1, w przypadku, gdy pomiemy założenie (3.1.7) o wykładnikach e_i . Pierwsze dwa z nich opisałismy w [BB, Sekcja 3.1].

1. $G := A$. Niech E_d będzie krzywą eliptyczną nad \mathbb{Q} zdefiniowaną równaniem $y^2 = x^3 - d^2x$. Krzywa E_d ma mnożenie zespolone przez $\mathbb{Z}[i]$. Ranga grupy Mordella-Weila $E_d(\mathbb{Q})$ może osiągnąć wartość 6 (zobacz [RS, Table 2, str. 464]). Załóżmy, że ranga $E_d(\mathbb{Q})$ wynosi przynajmniej 2. Wówczas $\text{rank}_{\mathbb{Z}} E_d(\mathbb{Q}(i)) = 2 \text{rank}_{\mathbb{Z}}(E_d(\mathbb{Q}))$. Widzimy więc, że $\text{rank}_{\mathbb{Z}[i]} E_d(\mathbb{Q}(i)) \geq 2$. Zdefiniujmy abelową powierzchnię $A_d := E_d \times E_d = E_d^2$ nad $\mathbb{Q}(i)$. Zauważmy, że A_d nie spełnia założeń Wniosku 3.1.19.1, ponieważ $\dim_{\mathbb{Q}(i)} H_1(E_d(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 1$. (Zauważmy, że rozpatrujemy tą samą rozmaitość, co w pierwszym kontrprzykładzie dotyczącym Twierdzenia 3.1.7).

Niech $Q_1, Q_2 \in E_d(\mathbb{Q}(i))$ będą punktami liniowo niezależnymi nad $\mathbb{Z}[i]$. Rozważmy następujące punkty w $A_d(\mathbb{Q}(i))$:

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix}, P_1 := \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 := \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{bmatrix}, P_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix}, P' := \begin{bmatrix} Q_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

G. Banaszak oraz P. Krasoń [BK, str. 330-332] rozważali tylko punkty P, P_1, P_2, P_3 . My rozważamy dodatkowy punkt P' . Zdefiniujmy dwa następujące wolne $\mathbb{Z}[i]$ -podmoduły modułu $A_d(\mathbb{Q}(i))$:

$$\Lambda := \mathbb{Z}[i]P + \mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3,$$

$$\Lambda' := \mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3 + \mathbb{Z}[i]P'.$$

Wtedy:

$$\Lambda \cap \Lambda' = \mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3.$$

Z [BK, Proposition 5.6] $r_v(\Lambda) = r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla wszystkich ideałów pierwszych $v \nmid 2d \in \mathbb{Z}[i]$. W ten sam sposób możemy pokazać, że $r_v(\Lambda') = r_v(\Lambda \cap \Lambda')$ dla wszystkich ideałów pierwszych $v \nmid 2d \in \mathbb{Z}[i]$. Widzimy więc, że zachodzi (3.1.17) dla $c = 1$. Ale Λ oraz Λ' nie są współmierne, ponieważ są one wolnymi $\mathbb{Z}[i]$ -modułami rangi 4, a ich przekrój $\Lambda \cap \Lambda'$ jest wolnym $\mathbb{Z}[i]$ -modułem rangi 3.

Uwaga 3.1.20. Niech S będzie zbiorem ideałów pierwszych złej redukcji dla A . Niech \mathcal{A} będzie modelem Nérona nad $\mathcal{O}_{F,S}$. Rozważmy następujące 1-motywy nad $\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}$ w sensie P. Deligne'a [Del]:

$$[\Lambda \rightarrow \mathcal{A}], \quad [\Lambda' \rightarrow \mathcal{A}], \quad [\Lambda \cap \Lambda' \rightarrow \mathcal{A}] \quad \text{oraz} \quad [\Lambda + \Lambda' \rightarrow \mathcal{A}].$$

Zmieniając bazę do $\text{spec } k_v$ oraz biorąc obrazy podgrup Λ , Λ' , $\Lambda \cap \Lambda'$, $\Lambda + \Lambda'$ w $A_v(k_v)$ poprzez przekształcenia redukcji r_v (dla $v \notin S$), otrzymamy torsyjne 1-motywy

$$[r_v(\Lambda) \rightarrow A_v], \quad [r_v(\Lambda') \rightarrow A_v], \quad [r_v(\Lambda \cap \Lambda') \rightarrow A_v] \quad \text{oraz} \quad [r_v(\Lambda + \Lambda') \rightarrow A_v].$$

Powyższy przykład pokazuje, że dla każdego $v \notin S$ te cztery torsyjne 1-motywy są równe (definicję torsyjnych 1-motywów znaleźć można w pracach [B-VRS] oraz [J2]).

W podobny sposób skonstruowaliśmy przykład dla $G = T$.

2. $G = T$. Rozważmy schemat grupy $\mathbb{G}_m^2 := \mathbb{G}_m \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}} \mathbb{G}_m$. Wiemy, że

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 1.$$

Zatem w tym przypadku również nie zachodzą założenia Wniosku 3.1.19.1. Niech $F = \mathbb{Q}$ oraz $S = \{(2), (3)\}$. Stąd $\mathbb{Z}_S = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. Dla każdej liczby pierwszej $p \neq 2, 3$, rozważmy przekształcenia redukcji $r_p \times r_p : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times \times \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^\times$. Dla prostoty będziemy pisać r_p zamiast $r_p \times r_p$. Rozważmy następujące elementy w $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times \times \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times$:

$$\lambda := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda' := \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że A. Schinzel [Sch, str. 419-420] rozważał tylko pierwsze cztery z powyższych punktów $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. My rozważamy dodatkowy punkt λ' . Zdefiniujemy dwie podgrupy w $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times \times \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]^\times$ następująco:

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \lambda^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_1^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_2^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_3^{\mathbb{Z}}, \\ \Lambda' &:= \lambda_1^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_2^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_3^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda'^{\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

Wówczas

$$\Lambda \cap \Lambda' = \lambda_1^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_2^{\mathbb{Z}} \cdot \lambda_3^{\mathbb{Z}}.$$

Podążając za rozumowaniem A. Schinzla [Sch, str. 419-420] otrzymamy

$$(3.1.22) \quad r_p(\Lambda) = r_p(\Lambda \cap \Lambda') = r_p(\Lambda')$$

dla $p \neq 2, 3$. Istotnie, niech $\bar{\lambda} := r_p(\lambda)$, $\bar{\lambda}' := r_p(\lambda')$ oraz $\bar{\lambda}_i := r_p(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2, 3$. Równanie

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1^{R_1} \bar{\lambda}_2^{R_2} \bar{\lambda}_3^{R_3}$$

jest równoważne układowi równań

$$(3.1.23) \quad \begin{aligned}1 &\equiv 2^{R_1} 3^{R_2} \pmod{p}, \\ 2^2 &\equiv 2^{R_2} 3^{R_3} \pmod{p}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że (3.1.23) jest identyczne z [Sch, (69), str. 419], więc otrzymamy rozwiązania R_1, R_2, R_3 w dokładnie ten sam sposób co A. Schinzel. Teraz musimy pokazać, że $\bar{\lambda}' \in r_p(\Lambda \cap \Lambda')$. Równanie

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_1^{R_3} \bar{\lambda}_2^{R_2} \bar{\lambda}_3^{R_1}$$

jest równoważne układowi równań:

$$(3.1.24) \quad \begin{aligned}1 &\equiv 3^{R_1} 2^{R_2} \pmod{p}, \\ 3^2 &\equiv 3^{R_2} 2^{R_3} \pmod{p}.\end{aligned}$$

Dla $p > 3$ powyższy system jest równoważny systemowi:

$$(3.1.25) \quad \begin{aligned}0 &\equiv R_1 c_1 + R_2 c_2 \pmod{p-1}, \\ 2c_1 &\equiv R_2 c_1 + R_3 c_2 \pmod{p-1},\end{aligned}$$

gdzie $3 = g^{c_1}$, $2 = g^{c_2}$ w $(\mathbb{Z}/p)^\times = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/(p-1)$. Układy (3.1.25) oraz [Sch, (70), str. 420] są identyczne. Zatem używając tych samych obliczeń co A. Schinzel otrzymamy rozwiązania R_1, R_2, R_3 .

Stąd (3.1.17) zachodzi dla $c = 1$. Ale Λ i Λ' nie są współmierne, bo są one wolnymi \mathbb{Z} -modułami rangi 4, a ich przekrój $\Lambda \cap \Lambda'$ jest wolnym \mathbb{Z} -modułem rangi 3.

Uwaga 3.1.21. Niech $F = \mathbb{Q}$ jak wyżej. Niech $T := \mathbb{G}_m^2$ oraz niech $\mathcal{T} := \mathbb{G}_m \times_{\text{spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]} \mathbb{G}_m$. Rozważmy następujące 1-motywy nad $\text{spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ w sensie P. Deligne'a:

$$[\Lambda \rightarrow \mathcal{T}], \quad [\Lambda' \rightarrow \mathcal{T}], \quad [\Lambda \cap \Lambda' \rightarrow \mathcal{T}] \quad \text{oraz} \quad [\Lambda \cdot \Lambda' \rightarrow \mathcal{T}].$$

Zmieniając bazę do $\text{spec } \mathbb{F}_p$ oraz biorąc obrazy podgrup $\Lambda, \Lambda', \Lambda \cap \Lambda', \Lambda \cdot \Lambda'$ w $T_p(\mathbb{F}_p)$ poprzez r_p (dla $p \neq 2, 3$), otrzymamy torsyjne 1-motywy

$$[r_p(\Lambda) \rightarrow T_p], \quad [r_p(\Lambda') \rightarrow T_p], \quad [r_p(\Lambda \cap \Lambda') \rightarrow T_p] \quad \text{oraz} \quad [r_p(\Lambda \cdot \Lambda') \rightarrow T_p].$$

Powyższy przykład pokazuje, że powyższe cztery torsyjne 1-motywy są sobie równe, dla każdego $p \neq 2, 3$.

Uwaga 3.1.22. Stosując bezpośrednio przykład A. Schinzla [Sch, str. 419-420] otrzymalibyśmy dwie podgrupy $\Lambda \subset \Lambda'$. Nasza modyfikacja tegoż przykładu prowadzi do podgrup Λ, Λ' takich, że $\Lambda \not\subset \Lambda'$ oraz $\Lambda' \not\subset \Lambda$.

Uwaga 3.1.23. Warto zaznaczyć, że 1-motyw $[\Lambda \rightarrow \mathbb{G}_m^2]$ został nazwany przez P. Jossen 1-motywym Schinzla (Schinzel's 1-motive [J2]).

2'. Zmodyfikujemy teraz powyższy kontrprzykład 2. Niech $T := \mathbb{G}_m^2$ nad $F := \mathbb{Q}(i)$ oraz niech $\mathcal{T} := \mathbb{G}_m \times_{\text{spec } \mathcal{O}_{F, S_T}} \mathbb{G}_m$, gdzie $S_T := \{(3), (7)\}$. Zatem $\mathcal{T}(\mathcal{O}_{F, S_T}) = \mathcal{O}_{F, S_T}^\times \times \mathcal{O}_{F, S_T}^\times$. Dla każdego $v \notin S_T$, rozważamy przekształcenia redukcji $r_v \times r_v : \mathcal{O}_{F, S_T}^\times \times \mathcal{O}_{F, S_T}^\times \rightarrow k_v^\times \times k_v^\times$. Jak wyżej, dla prostoty będziemy pisać r_v zamiast $r_v \times r_v$. Rozważmy następujące elementy w $\mathcal{O}_{F, S_T}^\times \times \mathcal{O}_{F, S_T}^\times$:

$$\lambda := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 := \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Zdefiniujmy następujące podgrupy w $\mathcal{O}_{F, S_T}^\times \times \mathcal{O}_{F, S_T}^\times$:

$$\Lambda_T := \lambda^\mathbb{Z} \cdot \lambda_1^\mathbb{Z} \cdot \lambda_2^\mathbb{Z} \cdot \lambda_3^\mathbb{Z},$$

$$\Lambda'_T := \lambda_1^\mathbb{Z} \cdot \lambda_2^\mathbb{Z} \cdot \lambda_3^\mathbb{Z}.$$

Wówczas

$$\Lambda_T \cap \Lambda'_T = \lambda_1^\mathbb{Z} \cdot \lambda_2^\mathbb{Z} \cdot \lambda_3^\mathbb{Z} = \Lambda'_T.$$

Podążając za rozumowaniem A. Schinzla [Sch, str. 419-420], analogicznie jak w powyższym kontrprzykładzie 2., otrzymamy

$$(3.1.26) \quad r_v(\Lambda_T) = r_v(\Lambda_T \cap \Lambda'_T) = r_v(\Lambda'_T), \quad \text{dla } v \notin S_T.$$

Stąd (3.1.17) zachodzi dla $c = 1$. Ale Λ i Λ' nie są współmierne, bo Λ_T jest wolnym \mathbb{Z} -modułem rangi 4, a przekrój $\Lambda_T \cap \Lambda'_T$ jest wolnym \mathbb{Z} -modułem rangi 3.

Teraz skonstruujemy kontrprzykład dla $G := T \times A$.

3. $G := T \times A$ nad $F := \mathbb{Q}(i)$. Niech torus T , zbiór S_T , punkty $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_{F,S_T})$ oraz podgrupy Λ_T, Λ'_T będą zdefiniowane jak w kontrprzykładzie 2', powyżej. Rozmaitość abelową $A := A_d = E_d^2$ nad F , punkty $Q_1, Q_2 \in E_d(F)$ oraz $P, P_1, P_2, P_3 \in A_d(F)$ definiujemy jak w kontrprzykładzie 1. tej podsekcji.

Rozpatrywać będziemy grupę $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})$, gdzie $S := \{v : v|2d\} \cup S_T$. Niech $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ będą generatorami nad \mathbb{Z} wolnego $\mathbb{Z}[i]$ -podmodułu

$$\mathbb{Z}[i]P_1 + \mathbb{Z}[i]P_2 + \mathbb{Z}[i]P_3 \subset A(F).$$

Zdefiniujemy następujące podgrupy w $A(F)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_A &:= \sum_{i=1}^6 \mathbb{Z} R_i, \\ \Lambda'_A &:= \mathbb{Z} P + \Lambda_A. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy następujące wolne \mathbb{Z} -podmoduły modułu $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F,S})$:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \Lambda_T \oplus \Lambda_A, \\ \Lambda' &:= \Lambda'_T \oplus \Lambda'_A. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\Lambda \cap \Lambda' = \Lambda'_T \oplus \Lambda_A.$$

Z kontrprzykładu 1. dotyczącego Twierdzenia 3.1.7 oraz z kontrprzykładu 1. i powyższego kontrprzykładu 2'. tej podsekcji widzimy, że:

$$r_v(\Lambda) = r_v(\Lambda') = r_v(\Lambda \cap \Lambda'), \quad \text{dla } v \notin S.$$

Zatem zachodzi (3.1.17) dla $c = 1$. Jednak Λ i Λ' nie są współmierne, gdyż są one wolnymi \mathbb{Z} -modułami rangi 10, a ich przekrój $\Lambda \cap \Lambda'$ jest wolnym \mathbb{Z} -modułem rangi 9.

Uwaga 3.1.24. Zachowując oznaczenia tegoż kontrprzykładu, rozważmy następujące 1-motywy nad $\text{spec } \mathcal{O}_{F,S}$ w sensie P. Deligne'a:

$$[\Lambda \rightarrow \mathcal{G}], \quad [\Lambda' \rightarrow \mathcal{G}], \quad [\Lambda \cap \Lambda' \rightarrow \mathcal{G}] \quad \text{oraz} \quad [\Lambda_T \oplus \Lambda'_A \rightarrow \mathcal{G}].$$

Zmieniając bazę do $\text{spec } k_v$ oraz biorąc obrazy podgrup Λ , Λ' , $\Lambda \cap \Lambda'$, $\Lambda_T \oplus \Lambda'_A$ w $G_v(k_v)$ poprzez r_v (dla $v \notin S$), otrzymamy torsyjne 1-motywy

$$[r_v(\Lambda) \rightarrow G_v], \quad [r_v(\Lambda') \rightarrow G_v], \quad [r_v(\Lambda \cap \Lambda') \rightarrow G_v] \quad \text{oraz} \quad [r_v(\Lambda_T \oplus \Lambda'_A) \rightarrow G_v].$$

Przykład ten pokazuje, że powyższe cztery torsyjne 1-motywy są sobie równe, dla każdego $v \notin S$.

Bibliografia

- [B1] G. Banaszak, *Mod p logarithms $\log_2 3$ and $\log_3 2$ differ for infinitely many primes*, Proceedings of the Second Polish-Czech Conference on Number Theory, Annales Mathematicae Silesianae **12** (1998), 141–148.
- [B2] G. Banaszak, *On a Hasse principle for Mordell-Weil groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 709–714.
- [BB] G. Banaszak, D. Blinkiewicz, *Commensurability in Mordell-Weil groups of abelian varieties and tori*, Functiones et Approximatio, 9 str. (PRACA PRZYJĘTA DO PUBLIKACJI).
- [BGK1] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *A support problem for the intermediate Jacobians of l -adic representations*, Jour. of Number Theory **100** no. 1 (2003), 133–168.
- [BGK2] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *Detecting linear dependence by reduction maps*, Jour. of Number Theory **115** no. 2 (2005), 322–342.
- [BK] G. Banaszak, P. Krasoń, *On arithmetic in Mordell-Weil groups*, Acta Arithmetica, **150** no. 4 (2011), 315–337.
- [Bar] S. Barańczuk, *On reduction maps and support problem in K -theory and abelian varieties*, Jour. of Number Theory **119** no. 1 (2006), 1–17.
- [BG] S. Barańczuk, K. Górniewicz, *On reduction maps for the étale and Quillen K -theory of curves and applications*, J. K-Theory **2** no. 1 (2008), 103–122.
- [B-VRS] L. Barbieri-Viale, A. Rosenschon, M. Saito, *Deligne’s conjecture on 1-motives*, Annals of Mathematics **158** (2003), 593–633.
- [BLR] S. Bosch, W. Lülkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

-
- [Bo] F. A. Bogomolov, *Sur l'algébricité des représentations l -adiques*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **290** (1980), A701–A703.
- [C-RS] C. Corrales-Rodríguez, R. Schoof, *Support problem and its elliptic analogue*, Jour. of Number Theory **64** no. 2 (1997), 276–290.
- [Del] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Pub. math. de l'Inst. Hautes Études Scientifiques **44** (1974), 5–77.
- [Fa] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern* Inv. Math. **73** (1983), 349–366.
- [FC] G. Faltings, C-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [GG] W. Gajda, K. Górniewicz, *Linear dependence in Mordell-Weil groups*, J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 219–233.
- [J1] P. Jossen, *Detecting linear dependence on a simple abelian variety via reduction maps*, Comment. Math. Helv. **88** no. 2 (2013), 323–352.
- [J2] P. Jossen, *On the arithmetic of 1-motives*, Ph.D. Thesis (2009).
- [JP] P. Jossen, A. Perucca, *A counterexample to the local-global principle of linear dependence for Abelian varieties*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348** no. 1 (2010), 9–10.
- [Kh-P] C. Khare, D. Prasad, *Reduction of homomorphisms mod p and algebraicity*, Jour. of Number Theory **105** no. 2 (2004), 322–332.
- [Ko] E. Kowalski, *Some local-global applications of Kummer theory*, Manuscripta Math. **111** (2003), 105–139.
- [La] M. Larsen, *The support problem for abelian varieties*, Jour. of Number Theory **101** no. 2 (2003), 398–403.
- [Le] H. W. Lenstra, *Algorithms in Algebraic Number Theory*, Bulletin (New Series) American Math. Soc. **26** no. 2 (1992), 211–244.
- [LO] J. C. Lagarias, A. M. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem* Proc. Sympos. Univ. Durham, Academic Press London (1977), 409–464.

-
- [Mat] T. I. Matev, *Good reduction of 1-motives*, Ph.D. Thesis (2013).
- [Mil] J. S. Milne, *Abelian Varieties*, Arithmetic Geometry (edited by G. Cornell, J.H. Silverman) 103–150, Springer-Verlag, 1986.
- [Pe1] A. Perucca, *On the order of the reductions of points on abelian varieties and tori*, Ph.D. Thesis (2008).
- [Pe2] A. Perucca, *On the problem of detecting linear dependence for products of abelian varieties and tori*, Acta Arith. **142** no. 2 (2010), 119–128.
- [Re] I. Reiner, *Maximal orders*, Academic Press, London, 1975.
- [RS] K. Rubin, A. Silverberg, *Ranks of elliptic curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** no. 4 (2002), 455–474.
- [Rz] P. Rzonsowski, *Linear relations and arithmetic on abelian schemes*, Functiones et Approximatio, **52** no. 1 (2015), 83–107.
- [Se] J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. I.H.E.S., **54** (1981), 123–201.
- [Sch] A. Schinzel, *On power residues and exponential congruences*, Acta Arithmetica **27** (1975), 397–420.
- [We] T. Weston, *Kummer theory of abelian varieties and reductions of Mordell-Weil groups*, Acta Arith. **110** no. 1 (2003), 77–88.