

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Fizyki

Ryszard Stagraczyński*

**Analiza splątania układów kwantowych dla ścisłych
rozwiązań podstawienia Bethego**

*Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

Politechnika Rzeszowska

Praca doktorska wykonana pod kierunkiem

prof. dr hab. Tadeusza Lulka

Poznań 2012

Autor pragnie gorąco podziękować Panu
Profesorowi Tadeuszowi Lulkowi,
doktorowi Janowi Milewskiemu, pani dr hab.
Barbarze Lulek oraz rzeszowskiemu oddzia-
łowi grupy LFPPI za opiekę naukową i nie-
ocenioną pomoc udzieloną podczas pisania
niniejszej pracy.

Spis treści

Wstęp	v
Cel pracy	vi
Metody	viii
Układ pracy	ix
Rozdział 1. Oryginalne podstawienie Bethego	1
Rozdział 2. Dwoistość Weyla	6
Rozdział 3. Ożaglowane konfiguracje strunowe w języku quasipędów	10
Rozdział 4. Otrzymywanie ścisłych rozwiązań	19
Rozdział 5. Splątanie stanów jednowęzłowych	31
Rozdział 6. Algebraiczne podstawienie Bethego (Algebraic Bethe Ansatz)	35
Rozdział 7. Wyprowadzenie układu równań Bethego	38
Rozdział 8. Kombinatoryka obiektów Laxa	43
Rozdział 9. Splątanie strun	56
Rozdział 10. Wnioski i uwagi końcowe	67
Dodatek A. Ścisłe rozwiązania podstawienia Bethego	70

SPIS TREŚCI

	iv
Dodatek B. Klasyfikacja ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego	76
Dodatek C. Tabele splątań	80
Bibliografia	89

Wstęp

Stale rosnąca ilość gromadzonych i przetwarzanych informacji powoduje dynamiczny rozwój informatyki. To stałe zapotrzebowanie na coraz wydajniejsze maszyny skutkuje olbrzymimi nakładami na badania umożliwiające łamanie kolejnych barier sprzętowych związanych z coraz większą skalowalnością, redukcją poboru energii czy problemami związanymi z chłodzeniem układów. W tym kontekście zrozumiała staje się pokusa odejścia od klasycznego przetwarzania informacji na rzecz metod kwantowych. Mimo problemów technologicznych przy konstrukcji odpowiednio trwałego i sterowalnego komputera kwantowego daje się zauważyć niesłabnące zainteresowanie rozwijaniem kwantowych metod rejestracji i przetwarzania informacji.

Jednym z ważniejszych zagadnień związanych z komputerami kwantowymi jest pojęcie splątania podukładu z drugim podukładem lub resztą układu kwantowego [8, 26, 84, 92, 93, 94]. Splątanie to możemy rozumieć jako miarę korelacji pomiędzy dwoma podukładami. Jak łatwo można zauważyć, niezwykle istotnym aspektem podziału układu na podukłady np. A i B, jest w kontekście mechaniki kwantowej fakt, iż przestrzeń \mathcal{H} stanów kwantowych całego układu jest *iloczynem tensorowym* przestrzeni podukładów \mathcal{H}_A i \mathcal{H}_B co zapisujemy jako:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (1)$$

Bardzo ważnym narzędziem staje się więc multiliniowa struktura przestrzeni liniowych.

Formalne podobieństwo (w sensie struktury multiliniowej) przestrzeni stanów magnetyka Heisenberga z przestrzenią stanów komputera kwantowego sprawia, że warto podjąć studia nad

zagadnieniami związanymi z podstawieniem Bethego. Z drugiej strony, metody rozwinięte w informatyce kwantowej (analiza splątania) mają szansę rzucić nowe światło na wiele aspektów związanych z podstawieniem Bethego, w szczególności z hipotezą strun. W niniejszej pracy rozważamy wyłącznie model izotropowy (XXX), to oznacza:

- węzły są ułożone w pierścień,
- pojedyncze obsadzenie zbioru węzłów \widetilde{N} spinami,
- rzut spinu na kierunek zadany zewnętrznym polem magnetycznym wynosi $\pm\frac{1}{2}$,
- oddziaływanie pomiędzy sąsiednimi spinami jest izotropowe, tzn. jest tylko jedna całka wymiany.

Cel pracy

Punktem wyjściowym rozprawy jest ściśle rozwiązanie zagadnienia własnego hamiltonianu Heisenberga dla tzw. modelu XXX czyli dla pierścienia N spinów $1/2$ z izotropowym oddziaływaniem najbliższych sąsiadów [5, 6, 9, 16, 21, 31, 40, 50, 51, 52, 87, 98, 99, 121, 122]. Jak dobrze wiadomo, takie ściśle rozwiązanie na wartości i wektory własne podał Bethe w roku 1931 [9], zaś elegancką formę kombinatoryczną klasyfikacji tych rozwiązań podali Kerov, Kirillov i Reshetikin (KKR) [55] w terminach ożaglowanych konfiguracji strunowych.

W naszej pracy [68] zaproponowaliśmy zmodyfikowaną wersję, w której struktura kombinatoryczna pozostaje bez zmian, a jedynie ożaglowanie każdej struny ma sens quasipędu. W takim ujęciu, na początku rozważań dotyczących rozprawy dysponowaliśmy ścisłymi rozwiązaniami podstawienia Bethego dla wszystkich stanów $N = 4..7$, co z jednej strony stanowi szeroką podstawę badania struktur spinowych i ich splątania, a z drugiej unikamy bariery katastrofy

kombinatorycznej związanej z wykładniczym wzrostem liczby rozwiązań.

Celem rozprawy jest

- zdefiniowanie różnych podukładów na bazie posiadanych ścisłych rozwiązań
- analiza splątania dla takich podukładów

Dwa istotnie różne sposoby wyodrębniania podukładów polegają na

- wyodrębnieniu węzłów - naturalny sposób wyodrębnienia podukładów narzucający się już na pierwszy rzut oka
- wyodrębnienie strun - wyjaśnienie tej procedury wymaga już głębokiej znajomości struktury ścisłych rozwiązań i związanych z tym niektórych matematycznych metod układów całkownych.

W ramach splątania węzłów przetestujemy różne miary splątania: negatywność (negativity) i współbieżność (concurrency). W ramach drugiego wątku naszym podstawowym narzędziem jest Algebraiczny Bethe Ansatz (ABA) znany również w literaturze jako kwantowa metoda odwrotnego rozpraszania, ang. Quantum Inverse Scattering Method (QISM), opierająca się na równaniu Yanga-Baxtera. Istotnym wkładem naszej pracy będzie zaproponowanie pewnych kombinatorycznych metod ABA zwanych dalej roboczo kombinatoryką obiektów Laxa. W tym miejscu antycypujemy, że istotnym elementem opisu ścisłych rozwiązań jest tzw. konfiguracja strunowa ν , która kombinatorycznie stanowi partycję liczby r' tych odwróceń spinowych, które są związane w struny. W takim ujęciu istotną charakterystyką ścisłego rozwiązania jest diagram Younga $\nu \vdash r'$, każdy wiersz tego diagramu jest struną a każda kratka reprezentuje dewiację spinową w obrębie struny. Szczegółowe określenia i stosowne twierdzenia pojawią się w dalszej części pracy.

Metody

Naturalnym narzędziem zarówno modelu Heisenberga w teorii materii skondensowanej jak też teorii układów ściśle rozwiązywalnych, a ostatnio również informatyki kwantowej, jest algebra iloczynów tensorowych. Przestrzeń stanów \mathcal{H} magnetyka Heisenberga jest N -tą potęgą tensorową przestrzeni jednowęzłowej h , co w informatyce kwantowej przetwarza się na stwierdzenie, że rejestr komputera kwantowego jest N -tą potęgą pojedynczego qubitu. Taka przestrzeń stanowi również podstawę teorii układów całkowalnych, której najprostszym wariantem jest model XXX. W pracy będziemy posługiwać się metodą ABA, w której podstawowym obiektem jest operator Laxa, działający w iloczynie tensorowym $\mathcal{H} \otimes V$ przestrzeni fizycznej przez przestrzeń pomocniczą $V = h$.

Będziemy też posługiwać się metodami kombinatorycznymi związanymi ze schematem dwoistości Weyla [34, 35, 47, 70, 89, 111], w którym przestrzeń \mathcal{H} jest areną działań dwóch grup dualnych: grupy symetrycznej Σ_N permutującej węzły i grupy unitarnej $U(2)$ działającej na spiny jednowęzłowe. Ta dwoistość Weyla zapewnia pożyteczną klasyfikację stanów w terminach reprezentacji nieprzywiedlnych obu grup (partycje liczby N na dwie części) oraz standardowych tablic Younga i Weyla.

Ważnym narzędziem w opisie tych baz jest dobrze znany w kombinatoryce algorytm Robinsona Schensteda Knutha (RSK)[90, 91, 54]. W kontekście podstawienia Bethego należy go uzupełnić o tzw bijekcję Kerova Kirillova Reshetikina [55]. Połączenie tych bijekcji prowadzi do powiązania wyjściowych konfiguracji magnetycznych ze ścisłymi rozwiązaniami podstawienia Bethego, poprzez bazę nieprzywiedlną dwoistości Weyla.

Motywacja wprowadzenia hipotezy strun jest dość złożona. Opiera się ona na dwóch algorytmach kombinatorycznych, nazywanych skrótowo RSK i KKR. Nie będziemy w rozprawie przytaczać szczegółowego opisu tych algorytmów, gdyż wymaga to dużej objętości tekstu, a nie jest bezpośrednio związane z niezbędnymi procedurami obliczeniowymi w temacie pracy. W ogromnym skrócie, algorytm RSK (tj. Robinosna [90], Schensteda [91] i Knutha [54]) jest bijekcją pomiędzy zbiorem $\tilde{2}^{\tilde{N}}$ wszystkich konfiguracji magnetycznych i bazą nieprzywiedlną $\{|\lambda ty\rangle\}$ dwoistości Weyla, a opisaną w rozdziale 2. Natomiast bijekcję KKR [55, 56] można uważać za przedłużenie algorytmu RSK do bazy wszystkich ścisłych rozwiązań Bethego. Bijekcja KKR daje formalną podstawę definicji tzw. ścieżek, a przez to również ożaglowanych konfiguracji strunowych, co opiszemy w dalszym ciągu.

Układ pracy

Praca składa się z 95-iu stron zorganizowanych w dziesięć rozdziałów i uzupełnionych trzema dodatkami. Łącznie w pracy zawarto 23 tabele i 6 rysunków.

Pierwszy rozdział zawiera wprowadzenie do oryginalnego podstawienia Bethego wraz z definicją najważniejszych obiektów używanych w niniejszej pracy. Następny z rozdziałów wprowadza działanie dwóch istotnych grup symetrii tj. grupy unitarnej i symetrycznej. Wprowadza klasyfikację reprezentacji nieprzywiedlnych grupy unitarnej i symetrycznej poprzez partycje liczby N . Rozdział 3 przytacza pojęcie ożaglowanych konfiguracji strunowych jako klasyfikacji ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego. W kolejnym rozdziale przedstawiamy otrzymywanie ścisłych rozwiązań metodą bezpośredniej diagonalizacji operatora Hamiltona. Drugim istotnym wątkiem poruszonym w tym rozdziale jest przedstawienie metody odwrotnego podstawienia Bethego (IBA) pozwalającej na otrzymywanie zestawów parametrów Bethego dla sektorów

dwu i trójmagnonowych. Rozdział 5ty przytacza definicje używanych w pracy miar splątania (współbieżność-concurrence i ujemność-negativity) oraz opisuje wyznaczania tych wielkości w tej pracy. W kolejnych dwóch rozdziałach przytaczamy metodę algebraicznego podstawienia Bethego (ABA) włącznie z wyprowadzeniem układu równań Bethego. Rozdziały "Kombinatoryka obiektów Laxa" oraz "Splątanie strun" przedstawiają obiekty Laxa jako kluczowe narzędzie badania splątania strun.

ROZDZIAŁ 1

Oryginalne podstawienie Bethego

Model rozważany w niniejszej rozprawie składa się z N węzłów ułożonych w pierścień, tak że naturalną symetrią układu staje się grupa cykliczna C_N . Niech

$$\tilde{N} = \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2)$$

będzie zbiorem węzłów, a przez

$$\tilde{2} = \{i = 1, 2\} \cong \{i = 0, 1\} \cong \{i = +, -\} \quad (3)$$

oznaczymy zbiór możliwych rzutów spinu. W dalszym ciągu będziemy też zamiennie używać terminów "alfabet węzłów" i "alfabet spinów". Powyższa definicja wprowadza stosowane często w literaturze oznaczenia, które w dalszej części pracy będą używane zamiennie. Klasyczną przestrzenią konfiguracyjną modelu będzie zbiór odwzorowań

$$\tilde{2}^{\tilde{N}} = \{f : \tilde{N} \rightarrow \tilde{2}\}, |\tilde{2}^{\tilde{N}}| = 2^N, \quad (4)$$

a elementami tej przestrzeni będą konfiguracje magnetyczne $f = (i[1], \dots, i[N])$. Przestrzenią stanów kwantowych magnetyka Heisenberga jest iloczyn tensorowy przestrzeni jednowęzłowych [34, 89, 95, 111]

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_2. \quad (5)$$

Jeśli przez r oznaczymy ilość odwróceń spinów, związanych z namagnesowaniem M pierścienia wzorem

$$r = \frac{N}{2} - M, \quad (6)$$

to przestrzeń stanów magnetyka można przedstawić jako sumę prostą podprzestrzeni $\mathcal{H}^{(r)}$ z ustaloną liczbą dewiacji spinowych

$$\mathcal{H} = \sum_r \oplus \mathcal{H}^{(r)}, \quad (7)$$

a wymiar każdej z podprzestrzeni jest równy wartości odpowiedniego dwumianu Newtona

$$\dim \mathcal{H}^{(r)} = \binom{N}{r}. \quad (8)$$

Oczywiście, zbiór

$$Q^{(r)} = \{\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_r) \mid 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq N\} \quad (9)$$

nazywamy bazą konfiguracji w przestrzeni $\mathcal{H}^{(r)}$. Ponieważ r jest naturalną stałą ruchu modelu, to $\mathcal{H}^{(r)}$ możemy utożsamić z przestrzenią stanów kwantowych *nowego* układu

$$\tilde{r} = \{\alpha = 1, 2, \dots, r\}, \quad (10)$$

nazywanego w dalszym ciągu *układem \tilde{r} pseudocząstek Bethego* (na pierścieniu N , czego nie zaznaczamy explicite w notacji). Wektory $\mathbf{j} \in Q^{(r)}$ utożsamiamy z możliwymi położeniami układu \tilde{r} , a sam zbiór $Q^{(r)}$ - z jego klasyczną przestrzenią konfiguracyjną. Przy takim utożsamieniu, wzór

$$\mathcal{H}^{(r)} = \ell_{\mathbb{C}} Q^{(r)} \quad (11)$$

realizuje kwantowanie Schrodingera klasycznego układu pseudocząstek Bethego (podobnie jak qubit $h = \mathbb{C}^2 = \ell_{\mathbb{C}} \tilde{2}$ jest kwantową wersją bitu w informatyce) [42, 96, 106]. Zauważmy, że

klasyczne pseudocząstki Bethego są rozróżnialne przez swoje położenia na łańcuchu na mocy definicji (9)

$$1 \leq j_\alpha < j_{\alpha'} \leq N, \text{ dla } 1 \leq \alpha < \alpha' \leq r, \quad (12)$$

natomiast ich odpowiedniki kwantowe mają bardziej złożone własności statystyczne. Jest to konsekwencja numeracji pseudocząstek Bethego, narzucona przez strukturę Yanga-Baxtera przestrzeni konfiguracyjnej, w związku z tym np. nie ma sensu transpozycja pseudocząstek Bethego.

Zgodnie z oryginalną pracą Bethego, dynamikę układu \tilde{r} opisuje hamiltonian Heisenberga, którego działanie w ograniczeniu do przestrzeni $\mathcal{H}^{(r)}$ można zapisać wzorem

$$\widehat{H} |\mathbf{j}\rangle = \sum_{\mathbf{j}' \in Q_{\mathbf{j}}^{(r)}} (|\mathbf{j}'\rangle - |\mathbf{j}\rangle), \quad (13)$$

gdzie przyjęliśmy całkę wymiany równą 2 (w celu uniknięcia ułamkowych elementów macierzowych), zaś $Q_{\mathbf{j}}^{(r)} \subset Q^{(r)}$ oznacza zbiór wszystkich konfiguracji magnetycznych sąsiadujących z daną konfiguracją \mathbf{j} . W tym miejscu należy wspomnieć, że zgodnie z poprzednimi pracami zespołu rzeszowsko-poznańskiego [44, 69, 81, 107], przestrzeń konfiguracyjna $Q^{(r)}$ ma naturalną strukturę sieci hiperkubiczej w r wymiarach z pewnymi F -wymiarowymi brzegami, $1 \leq F < r$, co jest konsekwencją faktu, że dwie pseudocząstki Bethego nie mogą się znaleźć na jednym węźle (warunek twardego rdzenia). Oryginalne podstawienie Bethego polega na szukaniu rozwiązań zagadnienia własnego hamiltonianu w postaci:

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{j} \in Q^{(r)}} a(\mathbf{j}) \mathbf{j}, \quad (14)$$

gdzie

$$a(\mathbf{j}) = \sum_{\pi \in \Sigma_r} A_\pi \exp \left(i \sum_{\alpha \in \tilde{r}} p_{\pi(\alpha)} j_\alpha \right), \quad (15)$$

jest wartością funkcji falowej Bethego na j -tym węźle, przy czym

$$A_\pi = \prod_{\substack{\alpha > \alpha' \\ \pi(\alpha) < \pi(\alpha')}} \exp \left(\frac{i}{2} \phi_{\pi(\alpha), \pi(\alpha')} \right), \quad \pi \in \Sigma_r, \quad (16)$$

oznacza amplitudę rozpraszania w kanale, w którym pseudocząstka α ma pseudopęd $p_{\pi(\alpha)}$, zaś $\phi_{\alpha\alpha'}$, zadane przez związek

$$2\text{ctg} \frac{\phi_{\alpha\alpha'}}{2} = \text{ctg} \frac{p_\alpha}{2} - \text{ctg} \frac{p_{\alpha'}}{2}, \quad \alpha, \alpha' \in \tilde{r}. \quad (17)$$

jest fazą związaną z solitonowym rozproszeniem pseudopędów p_α i $p_{\alpha'}$. Solitonowe zderzenie określone jest przez tzw. warunek odbicia (17) i wyznacza fazę $\phi_{\alpha\alpha'}$ przez pseudopędy p_α i $p_{\alpha'}$. W tym miejscu warto zauważyć, że zderzenie solitonowe różni się od sprężystego tym, że w pierwszym oba pseudopędy p_α i $p_{\alpha'}$ zachowują się a zmienia się jedynie faza $\phi_{\alpha\alpha'}$, podczas gdy w drugim zachowuje się tylko suma $p_\alpha + p_{\alpha'} = p'_\alpha + p'_{\alpha'}$, zaś pędy po zderzeniu mogą się różnić od pędów przed zderzeniem ($p_\alpha \neq p'_\alpha$, $p_{\alpha'} \neq p'_{\alpha'}$). Wzory (14-17) stanowią w naszych oznaczeniach istotę podstawienia Bethego.

Każde ścisłe rozwiązanie $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(r)}$, dane przez wzór (14), jest scharakteryzowane przez zbiór $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ wielkości, na ogół zespolonych, zwanych pseudopędami. Niech Σ_r będzie grupą wszystkich permutacji na zbiorze \tilde{r} . W myśl powyższych wzorów, wielkość $a(\mathbf{j}) \in \mathbb{C}$ funkcji falowej $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(r)}$ układu \tilde{r} jest superpozycją, czyli sumą po $\pi \in \Sigma_r$, fal swobodnych będących kompozycją wszystkich pseudopędów, tak że w członie $\pi \in \Sigma_r$ z amplitudą A_π zadaną przez wzór (16), pseudocząstka $\alpha \in \tilde{r}$ w węźle j posiada pseudopęd $p_{\pi(\alpha)}$. Mamy więc obraz kwantowy, w którym

- pseudocząstki ulegają zderzeniom dwucząstkowym,
- pomiędzy zderzeniami poruszają się swobodnie, każda z jakimś pseudopędem z powyższego zbioru.

Zderzenia mają charakter solitonowy tj. zderzenie czątek α i α' wyznacza fazę $\phi_{\alpha,\alpha'}$ według wzoru (17), zwanego warunkiem odbicia (ang. reflection condition), zaś wszystkie zderzenia wyznaczają odpowiednią amplitudę A_π zgodnie ze wzorem (16). Fazę $\psi_{\alpha\alpha'}$ można interpretować jako specyficzny odpowiednik statystyki dla pseudocząstek Bethego. W ten sposób Σ_r gra rolę grupy Pauliego (lub grupy nierozróżnialności kwantowej) dla układu \tilde{r} . Przy tym właściwości statystyczne pseudocząstek Bethego zależą w tym ujęciu od ich pseudopędów poprzez fazy $\phi_{\alpha,\alpha'}$. Zauważmy, że $\phi = 0$ i $\phi = \pi$ zadają odpowiednio statystykę bozonową i fermionową.

ROZDZIAŁ 2

Dwoistość Weyla

Przestrzeń wszystkich stanów magnetyka Heisenberga \mathcal{H} jest miejscem, w którym działa grupa unitarna $U(2)$ oraz grupa symetryczna Σ_N . Działanie każdej z nich można opisać wzorami

$$A : \Sigma_N \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad B : U(2) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (18)$$

gdzie

$$A(\sigma) = \begin{pmatrix} f \\ f \circ \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad f \in \tilde{2}^{\tilde{N}}, \quad \sigma \in \Sigma_N, \quad (19)$$

oraz

$$B(u) = \begin{pmatrix} f \\ uf \end{pmatrix}, \quad f \in \tilde{2}^{\tilde{N}}, \quad u \in U(2), \quad (20)$$

$$[A(\sigma), B(u)] = 0, \quad \sigma \in \Sigma_N, \quad u \in U(2). \quad (21)$$

Występujące we wzorze 19 działanie $f \circ \sigma^{-1}$ jest złożeniem działań $\sigma^{-1} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$, oraz $f : \tilde{N} \rightarrow 2$. Działania A i B można uważać za działania wzajemnie dualne. Również zbiory \tilde{N} i $\tilde{2}$ można traktować jako dualne i interpretować odpowiednio jako alfabety węzłów i spinów. W ten sposób, każda konfiguracja magnetyczna jest słowem, w alfabecie spinów, o długości N .

Niezwykle istotnym faktem z punktu widzenia klasyfikacji stanów własnych magnetyka jest przemienności działań A i B , co skutkuje możliwością wprowadzenia bazy dostosowanej do symetrii każdej z tych grup [10, 11, 12, 48, 49, 57, 63, 64, 65, 66, 67, 76, 82, 83, 86,

102, 109, 116, 123]. Rozkład działań A i B na reprezentacje nieprzywiedlne jest realizowany wzorami

$$A = \sum_{\lambda \vdash N} m(A, \lambda) \Delta^\lambda, \quad (22)$$

oraz

$$B = \sum_{\lambda \vdash N} m(B, \lambda) D^\lambda, \quad (23)$$

gdzie $m(A, \lambda)$, $m(B, \lambda)$ są krotnościami występowania odpowiednich reprezentacji nieprzywiedlnych, przy czym na mocy dwoistości Weyla zachodzi:

$$m(A, \lambda) = \dim D^\lambda, \quad (24)$$

$$m(B, \lambda) = \dim \Delta^\lambda. \quad (25)$$

Przypomnijmy tu, że reprezentacje nieprzywiedlne Δ^λ grupy symetrycznej Σ_N i D^λ grupy unitarnej $U(n)$ są klasyfikowane przez ten sam obiekt kombinatoryczny λ , czyli partycję liczby N na co najwyżej n części.

Baza obliczeniowa $\tilde{2}^{\tilde{N}}$ jest naturalną bazą wyjściową. Również naturalne jest działanie $A : \Sigma_N \times \tilde{2}^{\tilde{N}} \rightarrow \tilde{2}^{\tilde{N}}$, traktowane jako działanie permutacyjne, a więc jako element kombinatoryki. Działanie to rozkłada zbiór $\tilde{2}^{\tilde{N}}$ wszystkich konfiguracji magnetycznych na orbity grupy Σ_N . Przy tym, każdej orbicie przypisuje się tzw. *wagę*, charakteryzującą wszystkie konfiguracje tej orbity, zadaną przez

$$\mu = (N - r, r), \quad 0 \leq r \leq N, \quad (26)$$

gdzie r jest liczbą dewiacji spinowych każdej z tych konfiguracji. Waga μ określa stabilizator grupy Σ_N na tej orbicie, zadany przez klasę podgrup wzajemnie sprzężonych postaci

$$\Sigma^\mu = \Sigma_{N-r} \times \Sigma_r \subset \Sigma_N. \quad (27)$$

Każda taka podgrupa nosi nazwę podgrupy Younga (danej konfiguracji f). Orbita tego działania jest więc zadana przez liczbę r dewiacji spinowych. W przypadkach $r \leq N/2$, orbitę taką utożsamiamy z wprowadzoną wcześniej przestrzenią konfiguracyjną $Q^{(r)}$ układu r dewiacji spinowych. W istocie, $Q^{(r)}$ stanowi punkt wyjścia metody podstawienia Bethego. W ten sposób

$$A = \sum_{r=0}^N R^{(N-r,r)}, \quad (28)$$

tzn. działanie A rozkłada się na sumę reprezentacji tranzytywnych $R^{(N-r,r)}$ grupy Σ_N . Związek $R^{(N-r,r)}$ z reprezentacjami nieprzywiedlnymi Δ^λ dwoistości Weyla jest zadany przez rozkład Kostki, który w ogólności ma postać

$$R^\mu = \sum_{\lambda \leq \mu} K_{\lambda\mu} \Delta^\lambda, \quad (29)$$

gdzie waga μ definiuje stabilizator, zaś kształt λ definiuje reprezentację nieprzywiedlną poprzez diagram Younga, \leq określa pewien porządek częściowy w zbiorze partycji liczby N , zwany porządkiem dominacji, zaś $K_{\lambda\mu}$ jest tzw. liczbą Kostki [53, 59]. Nie będziemy tu szczegółowo definiować porządku dominacji, z uwagi na fakt że nie jest to istotne dla rozpatrywanego w rozprawie przypadku spinu $1/2$, natomiast przytoczymy fakt z kombinatoryki, że liczba Kostki $K_{\lambda\mu}$, oznaczająca krotność reprezentacji nieprzywiedlnej Δ^λ w reprezentacji tranzytywnej R^μ , jest równa liczbie standardowych tablic Younga o kształcie λ i wadze μ . W naszym przypadku, rozkład Kostki ma postać [1, 2, 43, 69, 75]

$$R^{(N-r,r)} = \sum_{r'=0}^r \Delta^{(N-r',r')}. \quad (30)$$

Stosownie do powyższych rozkładów, przestrzeń \mathcal{H} rozpada się na sektory \mathcal{H}^λ

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda} \oplus \mathcal{H}^\lambda \quad (31)$$

tak, że w każdym sektorze występuje $m(A, \lambda) = \dim D^\lambda$ kopii reprezentacji Δ^λ oraz $m(B, \lambda) = \dim \Delta^\lambda$ kopii reprezentacji D^λ . W efekcie, w przestrzeni \mathcal{H} można wybrać tzw. bazę nieprzywiedlną dwoistości Weyla w postaci $|\lambda ty\rangle$.

Podamy tu krótki, ale przejrzysty opis kombinatoryczny bazy dwoistości Weyla. Symbol $\lambda = (N - r, r)$ jest partycją liczby N na dwie części i klasyfikuje reprezentacje nieprzywiedlne Δ^λ grupy Σ_N , a jednocześnie reprezentacje nieprzywiedlne D^λ grupy $U(2)$. Natomiast bazy nieprzywiedlne tych reprezentacji oznaczamy odpowiednio przez (standardową) tablicę Younga y oraz Weyla t . Wprowadzone pojęcia oparte na dwoistości Weyla pozwalają podać kombinatoryczne definicje tablicy Younga i Weyla. Mianowicie, tablica Younga y jest bijektywnym wypełnieniem diagramu Younga λ literami alfabetu węzłów tak, że kolejne litery w każdym wierszu i każdej kolumnie ułożone są w kolejności ściśle rosnącej. Natomiast tablica Weyla t jest wypełnieniem diagramu literami alfabetu spinów tak, że kolejne litery są w porządku słabo rosnącym (dopuszczalne są powtórzenia).

ROZDZIAŁ 3

Ozaglowane konfiguracje strunowe w języku quasipędów

Ważną, a w istocie niezastąpioną rolę w klasyfikacji ścisłych rozwiązań Bethego odgrywa tzw. hipoteza strun [9, 15, 16, 17, 18, 19, 28, 29, 99]. Co prawda jest ona nieudowodniona, a zgodnie z założeniami ma obowiązywać w granicy $N \rightarrow \infty$ (tzw. granica termodynamiczna). Co gorsza, istnieją przypadki w których nie jest ona spełniona [27, 30, 33, 17, 20, 103]. Tym niemniej, w aktualnym stanie wiedzy jest ona niezbędna do strunowej klasyfikacji tych rozwiązań.

W celu sformułowania tej hipotezy wprowadzimy zamiast pseudopędu nową zmienną charakteryzującą dynamikę pseudocząstki Bethego, tzw. parametr spektralny λ . Formalnie jest on określony przez wzór

$$e^{ip} = \frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}}, \quad (32)$$

inaczej

$$\lambda = \frac{ia + 1}{2a - 1}, \quad (33)$$

gdzie $a = e^{ip}$ jest porcją fazy związaną z przeskokiem pseudocząstki między sąsiednimi węzłami (wzór (33) określa się niekiedy jako transformatę Jacobiego). Z powyższych definicji widać między innymi, że

- $p \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy $\lambda \in \mathbb{R}$,
- λ jest określone tylko poza $p = 0$.

Okazuje się, że w modelu XXX zerowe pseudopędy odpowiadają zwyrodnieniu wynikającemu z symetrii sferycznej modelu. Dokładniej, podany wcześniej wzór (6) dotyczy rzutu M wypadkowego spinu S magnetyka. W przypadku symetrii sferycznej, tj. przemienności hamiltonianu Heisenberga z operatorem \hat{S} całkowitego spinu układu, każdej wartości S odpowiada $2S + 1$ zwyrodniałych energetycznie rzutów M , $-S \leq M \leq S$. Z perspektywy stanów magnetyka, celowe jest wprowadzenie wielkości

$$r' = \frac{N}{2} - S; \quad (34)$$

gdzie $0 \leq r' \leq r$. Zatem każdy sektor o ustalonym r zawiera kopie rozwiązań z sektorów o niższej liczbie dewiacji spinowych. Jeśli rozpoczniemy rozwiązywanie problemu od znalezienia stanu próżniowego, to wraz ze zwiększeniem ilości odwróceń spinów istotnie nowe będą rozwiązania z $r' = r$. Stany tego typu przyjęło się nazywać stanami najwyższej wagi. W myśl hipotezy strun, stany własne magnetyka Heisenberga dla zadanych (N, r, S) są jednoznacznie sklasyfikowane poprzez diagram Younga będący partycją liczby r' , $\nu \vdash r'$. W ten sposób liczba r' ma fizyczną interpretację tych pseudocząstek Bethego, które są powiązane w struny (w danym ścisłym stanie własnym Bethego), zaś pozostałe $r - r'$ pseudocząstek są odpowiednikami tzw. bosonów Goldstone'a lub też modnych ostatnio cząstek Higgsa, odpowiedzialnymi za zwyrodnienie wynikłe z symetrii sferycznej. Każdy wiersz diagramu jest struną, a każda kratka reprezentuje jedną związaną pseudocząstkę Bethego, charakteryzowaną przez parametr spektralny $\lambda \neq 0$. W ten sposób, każda pseudocząstka Bethego związana w konfigurację strunową jest klasyfikowana przez parametr spektralny jako

$$\lambda_{lv}^m,$$

gdzie $l = 1, 2, \dots$ oznacza długość struny, a więc liczbę krutek w wierszu diagramu Younga $\nu \vdash r'$, $v = 1, 2, \dots, m_l$ numeruje kolejne struny o długości l , tak że m_l jest liczbą l -strun. Natomiast liczba m , $-s_{string} \leq m \leq s_{string}$, numeruje kolejne kratki danej struny, tak że wielkość $s_{string} = \frac{l-1}{2}$ zwana jest spinem tej l -struny. Hipoteza zakłada, że w granicy z $N \rightarrow \infty$ zachodzi równość

$$\lambda_{lv}^m = \lambda_{lv} + im, \quad (35)$$

gdzie m jest liczbą całkowitą lub połówkową. Innymi słowy, wszystkie parametry spektralne danej struny (l, v) mają jednakową część rzeczywistą λ_{lv} , zaś część urojona im przyjmuje wartości całkowite lub połówkowe odpowiednio dla nieparzystych i parzystych l we wskazanym zakresie. Zatem w przypadku granicznym, aby określić stan w sposób jednoznaczny, wystarczy podać kształt tablicy Younga oraz rzeczywiste części parametrów spektralnych dla każdej ze strun. Uzasadnieniem stosowania hipotezy strun jest powszechne przekonanie (oparte ex post na ogromnej liczbie danych numerycznych [7]) iż jest ona z nieco zmienionymi parametrami λ_{lv} i m (tzw. "finite size corrections", czyli poprawki na skończone rozmiary) w przybliżeniu spełniona dla przeważającej większości przypadków (ale nie zawsze!) również dla skończonych wartości N .

Opiszemy teraz, w pewnym rozwinięciu i ilustracji na przykładach, ideę ożaglowania konfiguracji strunowych nakreśloną w fundamentalnej, ale bardzo zwięzłej pracy Kerowa, Kiryłowa i Reshethikhina (KKR) [55]. Chodzi o to, aby wyznaczyć, (a dokładniej, sklasyfikować) wszystkie stany dynamiczne danej konfiguracji strunowej $\nu \vdash r'$. W tym celu KKR podają kombinatoryczną definicję l -struny na pierścieniu \widetilde{N} w terminach ścieżek na dyskretnej płaszczyźnie $(j, 2S)$ [23, 24, 108]. Dodawanie N spinowych momentów pędu $1/2$ w układzie drabinkowym można

przedstawić jako sumę iloczynów współczynników Clebscha-Gordana

$$\sum_{M_{12} \dots M_{1 \dots N-1}}^{m_1 \dots m_N} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{12} & \frac{1}{2} & S_{123} \\ M_{12} & m_3 & M_{123} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} S_{1 \dots N-1} & \frac{1}{2} & S \\ M_{1 \dots N-1} & m_N & M \end{bmatrix} |m_1\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle = |S_{12} S_{123} \dots S_{1 \dots N-1} S M\rangle, \quad (36)$$

lub krócej, jako standardową tablicę Younga o kształcie $\lambda = \{N - r', r'\}$, wypełnioną literami alfabetu węzłów \widetilde{N} tak, że jeżeli

$$S_{1 \dots j-1} \lesssim S_{1 \dots j} = \begin{cases} S_{1 \dots j-1 + \frac{1}{2}} \\ S_{1 \dots j-1 - \frac{1}{2}} \end{cases}, \quad (37)$$

to literę j zapisujemy w $\{\text{górnym}\}$ wierszu diagramu λ . Powyższy proces standardowego wypełniania tablicy można przedstawić graficznie jako ścieżkę na dyskretnej płaszczyźnie $(j, 2S)$. Na rysunku 1 przedstawiono ścieżkę odpowiadającą tablicy $y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array}$. Przykładowa konfiguracja przedstawia przypadek struny izolowanej, utworzonej ze spinów "+" znajdujących się na 3-tym i 4-tym węźle oraz następujących po nich dwóch spinów "-" z węzłów 5 i 6. Strunę na tym diagramie symbolizuje piramida o podstawie j od 2 do 6 oraz wysokości $2S$ od 2 do 4. Dowolną strunę izolowaną można zapisać poprzez tablicę Younga postaci

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline H_l & B_l & H_r \\ \hline B_r & & \\ \hline \end{array}, \quad (38)$$

gdzie H_l, H_r, B_l, B_r są wierszami składającymi się z kolejnych liter z alfabetu węzłów \widetilde{N}

$$H_l = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & L \\ \hline \end{array}, \quad (39)$$

$$H_r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L + 2l + 1 & L + 2l + 2 & \dots & N \\ \hline \end{array}, \quad (40)$$

$$B_l = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L + 1 & L + 2 & \dots & L + l \\ \hline \end{array}, \quad (41)$$

$$B_r = \boxed{L + l + 1 \quad L + l + 2 \quad \dots \quad L + 2l}, \quad (42)$$

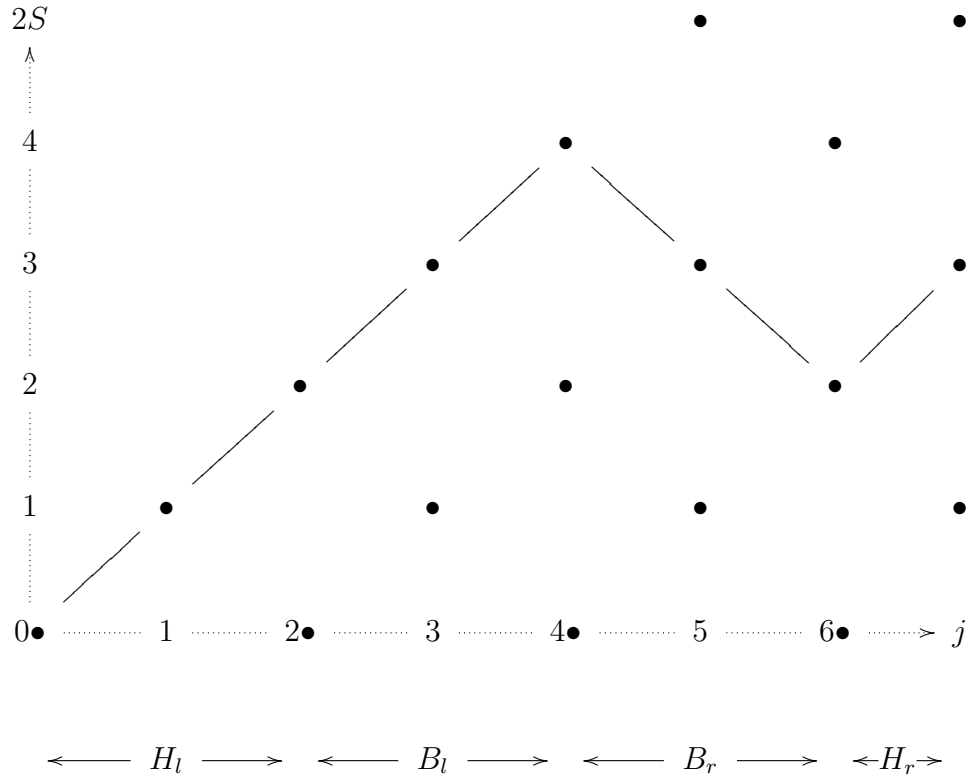
W ten sposób łańcuch można podzielić na cztery kolejne ciągi skończone H_l , B_l , B_r , H_r . W obrazie KKR ciągi B_l i B_r , wzięte razem, formują l -strunę. Zauważmy, że każdy z ciągów B ma dokładnie l elementów, zatem cała struna składa się z $2l$ węzłów. W skład l -struny wchodzi l kolejno rozmieszczonych dewiacji spinowych i l następujących bezpośrednio po nich "spinów kompensujących" o rzucie zgodnym z polem zewnętrznym. Zatem każda l -struna stanowi molekułę będącą obiektem rozciągląym zajmującym $2l$ kolejnych węzłów. Kombinatorycznie, strunę o długości l (l -strunę) określamy jako piramidę na ścieżce odpowiadającej $y \in SYT(\lambda)$. Unię zbiorów $H_l \cup H_r$ interpretuje się często jako "morze dziur" dla l -struny, zaś liczbę całkowitą $L = |H_l|$ określającą położenie tej struny względem lewego brzegu ścieżki nazywa się ożagłowaniem tej l -struny. Liczba L dla l -struny może przyjmować wartości z przedziału

$$0 \leq L \leq P_l, \quad (43)$$

gdzie liczbę P_l nazywamy *zakresem ożaglowania* l -struny. Nie będziemy tu przytaczać szczegółowego wyjaśnienia wzoru na zakres ożaglowania, podanego przez KKR. Powiemy tylko, że ma on postać

$$P_l = N - 2Q_l, \quad (44)$$

przy czym Q_l jest w ogólności liczbą kraterów w pierwszych l kolumnach diagramu Younga konfiguracji strunowej ν , a w przypadku szczególnym struny izolowanej ze wzorów (38-42) mamy $Q_l = l$. Czynniki kombinatoryczne Q_l odzwierciedla fizycznie efekty ograniczeń kinematycznych na ruch pojedynczej struny, wywołanych przez rozmiary pozostałych strun.



Rysunek 1. Na płaszczyźnie kropkami zaznaczono wszystkie dozwolone punkty $(j, 2S)$, dowolna ścieżka musi być łamaną łączącą punkty spełniające odpowiednie reguły dodawania spinów. Dla ilustracji zaznaczono przykład ścieżki dla stanu magnetyka o $N = 7$ węzłów, o dwóch dewiacjach spinowych związanych w struny $r' = 2$ i przypadkowym spinie $S = 3/2$. Przy czym H_l oznacza obszar zawierający plusy na lewo od piramidy, B_l zawiera minusy lewego stoku piramidy, B_r plusy prawego stoku piramidy. Obszar H_r zawierający znak ”+”

Zatem diagram odpowiadający powyższej ścieżce wynosi $y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array}$.

Dla struny izolowanej ożaglowanie L ma prostą interpretację graficzną i oznacza ilość dziur, czyli niezwiązanych w struny spinów ”+” $\in \tilde{2}$ na lewo od molekuly. Pominiemy tu szczegółowy opis sytuacji, gdy struny się częściowo przekrywają [108], stwierdzając jedynie, że każda

dozwolona konfiguracja strunowa ν charakteryzuje się pewnym ożaglowaniem L_{lv} dla każdej struny. Zbiór wszystkich ożaglowań \mathcal{L} , zdefiniowany jako

$$\mathcal{L} = \{L_{lv} \mid l = 1, 2, \dots; v \in \widetilde{m}_l\}, \quad (45)$$

wraz z konfiguracją ν nazywamy ożaglowaną konfiguracją strunową $\nu\mathcal{L}$ która określa jeden stan własny Bethego.

Tak określone ożaglowania L_{lv} mają prosty sens kombinatoryczny w schemacie konstrukcji ożaglowanych konfiguracji strunowych [62]. W naszej pracy [68] nadaliśmy im też naturalny sens kinematyczny. W ogólności, kinematyczne wyrażenia na dopuszczalne stany kwantowe, opisane kombinatorycznie powyżej, przekładają się na określone reguły wyboru dla możliwych stanów pojedynczej struny. Wprowadzenie reprezentacji pędowej, a co z tym idzie pojęcia strefy Brillouina B określonej poprzez

$$B = \left\{ \begin{array}{l} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \pm(N-1)/2, N/2, \quad \text{dla } N \text{ parzystych} \\ \pm(N-1)/2, \quad \text{dla } N \text{ nieparzystych} \end{array} \right\} \quad (46)$$

z reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy translacji C_N

$$\Gamma_k(j) = \exp(-2\pi i j k / N), \quad j \in \widetilde{N}, \quad (47)$$

numerowanymi quasipędami k będącymi fizycznie dopuszczalnymi pędami na łańcuchu N , pozwala wyrazić je precyzyjnie jako ograniczenia na k . Dokładniej, struna o długości l dla konfiguracji strunowej ν nie może przyjmować dowolnych wartości quasipędu k ze strefy Brillouina B . W takim wypadku strefę Brillouina B można podzielić na dwie części,

$$B = B_f \cup B_a, \quad (48)$$

gdzie B_f jest strefą zabronioną, umieszczoną symetrycznie względem centrum $k = 0$, zaś B_a jest zbiorem quasipędów dozwolonych dla rozpatrywanej struny. Przy tym graniczny quasipęd k_F^l (pewien analogon powierzchni Fermiego) powiązany jest z zakresem ożaglowania l -struny przez związek

$$k_F^l = Q_l - 1. \quad (49)$$

Innymi słowy l -struna jest obiektem pozostającym w nieustannym ruchu, z dopuszczalnym quasipędem o wartości nie mniejszej niż k_F^l . Przy czym wartość quasipędu struny (lv) o ożaglowaniu L_{lv} określa wzór

$$lv = (Q_l + L_{lv}) \pmod{B}, \quad (50)$$

gdzie \pmod{B} oznacza redukcję do strefy Brillouina B . Natomiast całkowity quasipęd stanu własnego podstawienia Bethego $|\nu\mathcal{L}\rangle$ jest sumą po wszystkich strunach co daje

$$k(\nu\mathcal{L}) = \sum_l \left(m_l Q_l + \sum_{v=1}^{m_l} L_{lv} \right) \pmod{B}, \quad (51)$$

przy czym pierwszy wyraz z ostatniego wzoru reprezentuje wkład konfiguracji strunowej ν , zaś drugi pochodzi od zbioru ożaglowań \mathcal{L} . Zatem jest zupełnie oczywistym fakt, iż każdą ożaglowaną konfigurację strunową $|\nu\mathcal{L}\rangle$ można zapisać przy pomocy unikalnego zbioru strun, przy czym każda z nich posiada pewien dopuszczalny quasipęd k_{lv} , $l = 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots, m_l$.

Pseudopędy p_α spełniają układ równań,

$$Np_\alpha - \sum_{\alpha' \neq \alpha} \phi_{\alpha\alpha'} = 2\pi k_\alpha, \quad \alpha \in \tilde{r}, \quad (52)$$

który w połączeniu z warunkami odbicia dla $\phi_{\alpha\alpha'}$, $1 \leq \alpha < \alpha' \leq r$, stanowi podstawę do wyznaczenia ścisłych rozwiązań. Układ ten jest znany w literaturze jako układ równań Bethego. W

powyższej postaci jest to układ równań transcendentnych. W języku parametrów spektralnych λ_α , $\alpha \in \tilde{r}'$, układ równań Bethego ma postać wielomianową [60]

$$\left(\frac{\lambda_\alpha + \frac{i}{2}}{\lambda_\alpha - \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{\alpha' \in \tilde{r}' \setminus \{\alpha\}} \frac{\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha'} + i}{\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha'} - i}, \quad \alpha \in \tilde{r}'. \quad (53)$$

Należy pamiętać, że te równania nie stosują się do zerowych pseudopełdów, gdyż wówczas parametr spektralny jest wielkością nieoznaczoną. Układ równań Bethego jest układem wysoce nieliniowym, trudnym do rozwiązania explicite. Istotnym osiągnięciem Bethego jest trafne odgadnięcie struktury tych rozwiązań. Liczba elementów zbioru $z(\nu) = \{\nu\mathcal{L}\}$ zadanego partycją $\nu \vdash r'$ wynosi

$$|\{\nu\mathcal{L}\}| = \prod_l \binom{P_l + m_l}{m_l}, \quad (54)$$

przy czym zachodzi

$$\dim \Delta^\lambda = \sum_{\nu \vdash r'} |z(\nu)|. \quad (55)$$

Ostatnia z relacji wyrażona w języku ścieżek stanowi, iż liczba ścieżek wychodzących z punktu $(0, 0)$ do dowolnego punktu z ustalonymi parametrami $(j, 2S)$ dla zadanego N jest równa wymiarowi reprezentacji nieprzywiedlnej Δ^λ grupy symetrycznej Σ_N . W rozdziale 6 przytoczymy wyprowadzenie układu równań Bethego w ujęciu tzw. algebraicznego podstawienia Bethego (Algebraic Bethe Ansatz, ABA).

ROZDZIAŁ 4

Otrzymywanie ścisłych rozwiązań

Niezwykle istotnym problemem z punktu widzenia analizy splątania stanów własnych podstawienia Bethego jest, z jednej strony, uzyskanie tych rozwiązań, zaś z drugiej - umiejętny wybór podukładów. Z uwagi na fakt iż, hipoteza strun przewiduje postać tych rozwiązań dla $N \rightarrow \infty$, należy użyć innych metod ich otrzymywania. Bezpośrednie rozwiązywanie układu równań Bethego z uwagi na ich nieliniowość staje się na obecnym stanie wiedzy trudno dostępne już dla łańcuchów składających się z zaledwie kilku węzłów (np. $N = 6$, $r' = 3$). Dlatego też tam gdzie jest to możliwe (tj. w szczególności, gdy odpowiednie operatory rzutowania na przestrzeń stanów własnych są efektywnie jednowymiarowe) użyto metody bezpośredniej diagonalizacji. Zatem aby znajdować ścisłe rozwiązania magnetyka Heisenberga dążymy do możliwie najprostszego rozwiązania zagadnienia sekularnego dla Hamiltonianu (13), czyli do bezpośredniej diagonalizacji hamiltonianu, bez rozwiązywania układu równań Bethego.

Punktem wyjścia jest, wspomniany we wstępie, fakt formalnego podobieństwa modelu magnetyka Heisenberga do komputera kwantowego, przejawiający się w strukturze multiliniowej (5) odpowiednich przestrzeni stanów [105]. Zatem najbardziej naturalnym jest zapisanie wszelkich potrzebnych operatorów w tym Hamiltonianu w bazie iloczynu tensorowego (baza uporządkowania leksykalnego). Ideę tego wygodnie jest wyjaśnić poprzez wprowadzenie odwzorowania J takiego, że jeżeli rzutowi spinu do góry " + " przypiszemy wartość 0, a rzutowi " - " wartość

1, to takie odwzorowanie zadane formalnie poprzez

$$J : \widetilde{2}^{\widetilde{N}} \rightarrow \mathbb{N}, J(f) = \sum_{j \in \mathcal{N}} i_j 2^{N-j} \quad (56)$$

przypisze każdej konfiguracji magnetycznej zapisaną binarnie unikalną liczbę naturalną z przedziału $[0, \dots, 2^N - 1]$.

W ten sposób otrzymujemy system N -bitowy z dobrze określonym bitem najstarszym i najmłodszym. Jak łatwo można zauważyć, w bazie iloczynu tensorowego konfiguracje f są (zależnie od konwencji) uporządkowane rosnąco lub malejąco ze względu na $J(f)$.

Niezwykle istotną symetrią magnetyka Heisenberga jest symetria cykliczna. Ponieważ grupa C_N jest podgrupą Σ_N dlatego orbity $Q^{(N)}$ grupy Σ_N dają się rozłożyć na orbity grupy translacji tak, że każda orbita grupy C_N stanowi przestrzeń nośną reprezentacji tranzytywnej $R^{C_N:C_\kappa}$. Liczby κ są dzielnikami liczby węzłów N i tworzą sieć dzielników $K(N)$ liczby N

$$K(N) = \{\kappa \in \widetilde{N} \mid \text{nwd}(N, \kappa) = \kappa\}. \quad (57)$$

Rozkład przestrzeni $Q^{(r)}$ na orbity grupy C_N zapisujemy formalnie:

$$R^{\Sigma_N:(\Sigma_{N-rx}\Sigma_r)} \downarrow C_N = \sum_{\kappa \in K(N)} m(r, \kappa) R^{C_N:C_\kappa}, \quad (58)$$

gdzie $m(r, \kappa)$ jest krotnością κ -krotnie rozrzedzonej orbity C_N w $Q^{(r)}$. Zatem aby wyznaczyć macierz przejścia z bazy iloczynu tensorowego do bazy orbit grupy C_N , grupujemy konfiguracje z ustaloną liczbą odwróceń spinów r , sortujemy po r , a następnie w każdym z bloków grupujemy elementy w orbity grupy cyklicznej. Ostatnie działanie daje się bardzo łatwo algorytmizować ze względu na to, że grupa C_N działa na $J(f)$ jak przesunięcie bitowe w prawo z przeniesieniem

reszty z dzielenia na najstarszy bit [97]

$$C_N(J(f)) := [(J(f) - 1)/2] + 2^{N-1}[(J(f) - 1) \bmod 2] + 1 \quad (59)$$

Ostatecznie otrzymujemy bazę orbit $|\widetilde{N}, r, \mathbf{t}\rangle$, gdzie \mathbf{t}

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_r), \sum_{\alpha} t_{\alpha} = N \quad (60)$$

jest wektorem odległości wzajemnych a każda z jego składowych t_{α} opisuje dystans jaki dzieli dewiację α -tą od $\alpha + 1$ -ej [41]

$$t_{\alpha} = \begin{cases} j_{\alpha+1} - j_{\alpha} & \text{dla } \alpha < r \\ j_1 - j_r + N & \text{dla } \alpha = r \end{cases} . \quad (61)$$

Oczywiście formalnie każdy z elementów orbity grupy C_N będzie miał inny wektor \mathbf{t} , jednakże różnica ta wynika jedynie z wyboru pierwszego węzła. Zauważmy, że cykliczne przesunięcie konfiguracji f na łańcuchu nie powoduje reorganizacji układu dewiacji a jedynie zmianę wyboru pierwszego węzła a co za tym idzie cykliczne przestawienie elementów początkowego wektora \mathbf{t} . Konwencją przyjętą w literaturze jest używanie do scharakteryzowania orbity grupy C_N oznaczanej symbolem $\mathcal{O}_{\mathbf{t}}$ wektora \mathbf{t} utworzonego dla pierwszego jej elementu.

Niezwykle istotnym etapem podczas systematycznego otrzymywania rozwiązań jest wprowadzenie reprezentacji pędowej przestrzeni \mathcal{H} , czyli transformaty Fouriera na wszystkich orbitach grupy C_N . Bazę taką nazywamy bazą profili falowych i tworzymy ją poprzez wprowadzenie strefy Brillouina B (46) i zastąpienie położeń odwróceń spinowych j quasipędami k w ramach każdej z orbit $\mathcal{O}_{\mathbf{t}}$. Matematycznie, B jest grupą dualną do grupy translacji C_N , zaś jej elementy $k \in B$, czyli quasipędy, interpretuje się jako reprezentacje nieprzywiedlne

$$\Gamma_k(j) = \exp(-2\pi i j k / N), \quad j \in \widetilde{N}, \quad (62)$$

grupy C_N nad ciałem \mathbb{C} liczb zespolonych. Fizycznie, strefa Brillouina B stanowi zbiór dopuszczalnych pędów na łańcuchu \widetilde{N} . Obecność κ -krotnie rozrzedzonych orbit grupy cyklicznej powoduje wystąpienie rozrzedzonych stref Brillouina B/κ

$$B/\kappa = \{k \in B \mid k/\kappa \in \mathbb{Z}\} \subset B. \quad (63)$$

Rozkład reprezentacji $R^{N:\kappa}$ grupy translacji na nieprzywiedlne opisuje wzór

$$R^{N:\kappa} = \sum_{k \in B/\kappa} \oplus \Gamma_k. \quad (64)$$

Zatem transformację Fouriera pojedynczej orbity grupy cyklicznej definiuje wzór

$$|B, \mathbf{t}, k\rangle = \sqrt{\frac{\kappa}{N}} \sum_{j=1}^{N/\kappa(\mathbf{t})} \Gamma_k |\widetilde{N}, \mathbf{t}, j\rangle. \quad (65)$$

Dokonanie powyższej transformaty na wszystkich orbitach $\mathcal{O}_{\mathbf{t}}$ wprowadza bazę profili falowych w całej przestrzeni magnetyka Heisenberga. Przykładem jednego z prostszych układów w którym występują orbity rozrzedzone jest magnetyk składający się z $N = 6$ węzłów ($K(N) = \{1, 2, 3\}$), mamy wówczas:

$$\begin{aligned} B &= \{0, \pm 1, \pm 2, 3\} \\ B/2 &= \{0, \pm 2\} \quad , \\ B/3 &= \{0, 3\} \end{aligned} \quad (66)$$

w przypadku $r = 1$ występuje jedna orbita regularna ($\kappa = 1$) mamy

$$R^{6:1} = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_{-2} + \Gamma_{-1} \quad (67)$$

dla $r = 2$ występują dwie orbity regularne ($\mathbf{t} \in \{(1, 5), (2, 4)\}$) oraz jedną orbitę dwukrotnie rozrzedzoną $\mathbf{t} = \{3, 3\}$ dla której $\kappa = 2$ wówczas oprócz rozkładów $R^{6:1}$ pojawia się

$$R^{6:2} = \Gamma_0 + \Gamma_2 + \Gamma_{-2}, \quad (68)$$

analogicznie dla $r = 3$ mamy 3 orbity regularne ($\mathbf{t} \in \{(1, 1, 4), (1, 2, 3), 1, 3, 2\}$) oraz 3-krotnie rozrzedzoną orbitę Neela $\mathbf{t} = \{2, 2, 2\}$, o rozkładzie

$$R^{6:3} = \Gamma_0 + \Gamma_3. \quad (69)$$

Zaletą stosowania metody bezpośredniej diagonalizacji dla zagadnienia Hamiltona zapisanego w bazie Fouriera jest możliwość praktycznego uproszczenia rozwiązywania wysoce nieliniowego układu równań Bethego przy równoczesnym znacznym ograniczeniu wymiaru zagadnienia. Rozważmy dla przykładu łańcuch złożony z $N = 7$ węzłów wówczas $\dim \mathcal{H} = 128$. Uwzględnienie symetrii cząstka-dziura pozwala na ograniczenie się do rozwiązania zagadnienia w podprzestrzeniach $\mathcal{H}^{(r)}$, $r \leq 3$, których wymiary wynoszą odpowiednio $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{7}{2} = 21$, $\binom{7}{3} = 35$. Strefa Brillouina zawiera 7 quasipędów $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ilość węzłów jest liczbą pierwszą z czego

wynika, że mamy wyłącznie orbity regularne.

r	\mathbf{t}
1	(7)
2	(1, 6)
	(2, 5)
	(3, 4)
3	(1, 1, 5)
	(1, 2, 4)
	(1, 3, 3)
	(1, 4, 2)
	(2, 3, 3)

(70)

Zapisanie zagadnienia na wartości własne energii w bazie profili falowych skutkuje uzyskaniem:

- postaci diagonalnej zagadnienia $r = 1$, z energiami postaci

$$E_{1,k} = 2 + \xi + \bar{\xi}, \quad \xi = \omega^k, \quad \omega = \exp(2\pi i/N) \quad (71)$$

- siedmiu zagadnień o wymiarze 3 dla $r = 2$ postaci,

$$H_{7,2,k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 + \xi & 0 \\ 1 + \bar{\xi} & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 1 + \bar{\xi} & \xi^3 \bar{\xi}^3 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

- siedmiu zagadnień o wymiarze 5 dla $r = 3$

$$H_{7,2,k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \bar{\xi} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \bar{\xi}^2 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 1 & +\bar{\xi}^3 \\ \xi & \xi^2 & 1 & 0 & \xi^2 \\ 0 & \bar{\xi} & 1 + \bar{\xi}^3 & \bar{\xi}^2 & -2 + \xi^2 + \bar{\xi}^2 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Fakt zawierania rozwiązań rozpatrywanego zagadnienia sekularnego w dowolnej podprzestrzeni $\mathcal{H}^{(r)}$ rozwiązań z $\mathcal{H}^{(r^*)}$, $r^* < r$ sprawia iż nośnikiem istotnie nowych informacji dla każdego z rozpatrywanych w tym przykładzie wielomianów charakterystycznych są wielomiany $v_{N,r,k}(x)$ stopnia drugiego. Innymi słowy, wielomian charakterystyczny zagadnienia sekularnego dla operatora Hamiltona $w_{N,r,k}(x)$ rozkłada się na iloczyn wielomianów $w_{N,r-1,k}(x)$ i $v_{N,r,k}(x)$

$$\frac{w_{N,r,k}(x)}{w_{N,r-1,k}(x)} = v_{N,r,k}(x), \quad (74)$$

gdzie pierwiastki wielomianów v zawierają dokładnie wszystkie energie stanów najwyższej wagi [32, 58]. Pomimo niewątpliwych zalet metoda bezpośredniej diagonalizacji ma także bardzo poważną wadę. Zauważmy, że w podanym przykładzie dla $N = 7$, $r = 3$, $k = 0$ wielomian $v_{7,3,0}$ jest w istocie równaniem posiadającym pierwiastek dwukrotny zatem stosując tę metodę otrzymujemy jedynie operator rzutowania na całą przestrzeń stanów najwyższej wagi.

Tabele z wartościami własnymi dla rozpatrywanych przypadków $N = 4..7$ zostały umieszczone w dodatku A. Zgodnie z notacją przyjętą we wspomnianych tabelach w dalszej części tekstu będziemy się odwoływać do konkretnego stanu poprzez $E(N, r, k, \pm g)$, gdzie znak \pm jest taki jak znak przy odpowiednim wyróżniku równania kwadratowego a $r - r'$ literek g informuje

iż rozpatrywany stan jest $r - r'$ -szym potomkiem odpowiedniego stanu z sektora z r' dewiacjami.

Pokazaliśmy więc, że w rozpatrywanych przypadkach (poza jednym wyjątkiem) możemy otrzymać ściśle rozwiązania bez odwoływania się do metody podstawienia Bethego (BA). Naturalne staje się tu pytanie, jak porównać nasze wyniki z rozwiązaniami BA. Pytanie to sformułujemy jako tzw. odwrotne podstawienie Bethego (the inverse Bethe Ansatz, IBA) [3, 79]. Polega ono na wyznaczaniu parametrów Bethego, a więc albo

(i) pseudopędów p_α i faz $\phi_{\alpha\beta}$, $1 \neq \alpha < \beta \neq r'$,

albo

(ii) parametrów spektralnych λ_α , $\alpha \in \tilde{r}'$

albo

(iii) porcji fazy $a_\alpha = e^{ip_\alpha}$, $\alpha \in \tilde{r}$,

na podstawie znajomości danego rozwiązania $|\psi\rangle$ zagadnienia własnego hamiltonianu Heisenberga

$$\widehat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (75)$$

z metody bezpośredniej diagonalizacji. Innymi słowy, w IBA dane są: $|\psi\rangle$, E , k , a szukane np. porcje fazy a_α . Oczywiście przypadki $r = 0$ i $r = 1$ są trywialne. W miarę prosty jest przypadek $r = 2$, gdzie mamy do czynienia z solitonowym rozpraszaniem dwóch pseudocząstek Bethego, spełniającym zasady zachowania energii i quasipędu. Oznaczając $a_1 = a$, $a_2 = b$, zapisujemy zasadę zachowania quasipędu w postaci

$$ab = \xi, \quad (76)$$

a zasadę zachowania energii jako

$$a + a^{-1} + b + b^{-1} = E + 4. \quad (77)$$

Jest to układ dwóch równań na dwie niewiadome (a, b) przy danych (ξ, E) . W tabelach (7-9 dodatku A) zawarto kolekcję parametrów spektralnych λ stanów dwumagnonowych dla łańcuchów $N = 4..6$. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że na obecnym stanie wiedzy nie jest znana metoda pozwalająca na jednoznaczną identyfikację stanu własnego z odpowiednią tablicą w przypadkach gdy dla określonych N, r, k posiadamy kilka rozwiązań o tym samym typie symetrii (dodatek). W przypadku trzech dewiacji spinowych na chwilę obecną nie dysponujemy całą ruchem pozwalającą na otrzymanie rozwiązań podstawienia Bethego, dlatego posiłkujemy się układem równań Bethego z dodatkowymi warunkami wynikającymi z zasady zachowania energii i pędu

$$abc = \xi \quad (78)$$

$$(a + a^{-1}) + (b + b^{-1}) + (c + c^{-1}) = E + 6. \quad (79)$$

Podstawiając do powyższego wzoru $F = E + 6 - (a + a^{-1})$ otrzymujemy

$$F = (b + b^{-1}) + (c + c^{-1}). \quad (80)$$

Równania Bethego (53) w języku wielkości a, b, c ma postać

$$a^N = \frac{(ab - 2a + 1)(ac - 2a + 1)}{(ab - 2b + 1)(ac - 2c + 1)}, \quad (81)$$

pozostałe dwa równania powstają z (81) poprzez cykliczną zamianę parametrów a, b, c . Wprowadzając wielkość $\eta = bc$, na mocy zasady zachowania pędu zachodzi równocześnie $\eta = \xi/a$, i

podstawiając ją do równania (80) otrzymujemy, że zarówno a jak i b są pierwiastkami równania

$$(1 + \eta^{-1})x^2 - Fx + (1 + \eta) = 0. \quad (82)$$

Wymnożenie równania Bethego na parametr a (81) przez jego prawą stronę oraz uwzględnienie, wynikającej z zasad zachowania energii i pędu, specyficznej symetrii między parametrami b i c (81), pozwala sprowadzić układ równań Bethego do wielomianu stopnia N postaci

$$Aa^N + Ba^{N-1} + Ca^{N-2} - \bar{C}a^2 - \bar{B}a - A = 0. \quad (83)$$

gdzie $A = E + 6 + \xi + \bar{\xi} - 2$, $B = 4 - 4\xi - 2(E + 6)$, $\bar{B} = 4 - 4\xi^{-1} - 2(E + 6)$, $C = 4\xi + 2$ oraz $\bar{C} = 4\xi^{-1} + 2$. Równanie (83) zawiera wszystkie rozwiązania parametrów a, b, c a także trywialny pierwiastek $a = 1$. Stąd ogólny wielomian na parametry Bethego a, b, c w sektorze trójmagnonowym ma postać

$$f(t) = R_1 t^{N-1} + R_2 t^{N-2} + R_3 (t^{N-3} + \dots + t^2) + \bar{R}_2 t + R_1, \quad (84)$$

gdzie $R_1 = A$, $R_2 = A + B$, $R_3 = A + B + C$.

Jako przykład rozważmy degenerację w centrum strefy Brillouina ($k = 0$) w heptagonie ($N = 7$). Mamy do czynienia z dwoma stanami o tej samej energii $E = -5$ rozróżnialnymi poprzez zamianę ożagłowań jedno i dwu-struny (Dodatek B). Rozwiązanie tego przypadku jest o tyle istotne, że nie można go otrzymać przy pomocy bezpośredniej diagonalizacji. Podstawiając odpowiednie wartości do równania (84) otrzymujemy wielomian

$$f(t) = t^6 - t^5 + 5(t^4 + t^3 + t^2) - t + 1. \quad (85)$$

Zauważmy, że dzieląc powyższe równanie przez t^3 oraz stosując podstawienie

$$y = t + t^{-1} \quad (86)$$

otrzymujemy równanie

$$g(x) = x^3 - x^2 + 2x + 7 \quad (87)$$

o rozwiązaniach

$$x_a = \frac{1}{3} + Y_1 + Y_2, \quad (88)$$

$$x_b = \frac{1}{3} + \epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2, \quad (89)$$

$$x_c = \frac{1}{3} + \epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2, \quad (90)$$

gdzie $Y_{1,2} = -\frac{\sqrt[3]{20}}{6} \sqrt[3]{(41 \pm 9\sqrt{21})}$ oraz $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z równania (86) wynikają równania postaci

$$a^2 - ax_a + 1 = 0, \quad b^2 - bx_b + 1 = 0, \quad c^2 - cx_c + 1 = 0, \quad (91)$$

stąd mamy trzy pary rozwiązań $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, jak łatwo sprawdzić zachodzi $a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2 = 1$ oraz $a_1 + a_2 = x_a$; $b_1 + b_2 = x_b$; $c_1 + c_2 = x_c$. Jedynym rzeczywistym rozwiązaniem naszego równania trzeciego stopnia jest x_a , zaś $a_{1,2}$ wynoszą

$$a_{1,2} = \frac{x_a}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4 - x_a^2}. \quad (92)$$

Rozwiązania x_b, x_c są sprzężone, stąd ustalając jedno z rozwiązań $b^2 - xb + 1 = 0$ i oznaczając je przez b , pamiętając o tym że nasze rozwiązania muszą spełniać zasadę zachowania pędu $abc = 1$, otrzymujemy dwa możliwe zestawy rozwiązań

$$a_1 = \frac{\bar{b}}{b}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = \frac{1}{\bar{b}}, \quad (93)$$

albo

$$a_2 = \frac{b}{\bar{b}}, \quad b_2 = \frac{1}{\bar{b}}, \quad c_2 = \bar{b}. \quad (94)$$

Równanie (85) można zapisać w postaci

$$f(t) = w_1(t)w_2(t), \quad (95)$$

gdzie $w_1(t) = t^3 - At^2 + \bar{A}t - 1$, $w_2(t) = t^3 - \bar{A}t^2 + At - 1$, $A = \frac{\bar{b}}{b} + b + \frac{1}{b}$. Wymnażając wielomiany $w_1(t)$ i $w_2(t)$ i porównując odpowiednie współczynniki z wielomianem (85) otrzymujemy $A = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$. Ostatecznie poszukiwane zestawy parametrów a, b, c są pierwiastkami

$$w_1(t) = t^3 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}\right)t^2 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}\right)t - 1, \quad (96)$$

oraz

$$w_2(t) = t^3 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}\right)t^2 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}\right)t - 1. \quad (97)$$

Transformując rozwiązania wielomianów $w_1(t)$ i $w_2(t)$ zgodnie z (33) otrzymujemy

$$w_1(\lambda) = \lambda^3 - \frac{5}{2\sqrt{15}}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{3}{8\sqrt{15}}, \quad (98)$$

$$w_2(\lambda) = \lambda^3 + \frac{5}{2\sqrt{15}}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{8\sqrt{15}}. \quad (99)$$

Przybliżone wartości parametrów spektralnych wynoszą

$$\lambda \approx -0.2199035743, \quad \lambda_{b,c} \approx 0.4327003994 \pm 0.5030656948i.$$

Warto zauważyć iż pomimo relatywnie małej liczby węzłów $N = 7$ są zaskakująco zgodne z przewidywaniami hipotezy strun dla $N \rightarrow \infty$.

ROZDZIAŁ 5

Splątanie stanów jednowęzłowych

Jak wiadomo, pojęcie splątania (ang. entanglement) ściśle wiąże się z podziałem układu U na pewien podukład A i jego otoczenie O .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_O. \quad (100)$$

Przypomnijmy, że tzw. stany czyste w mechanice kwantowej są reprezentowane przez wektory z przestrzeni Hilberta, charakteryzującej dany układ. W aspekcie podziału układu na podukłady taki opis jest niewystarczający. Bardziej ogólnym przedstawieniem stanów jest tzw. macierz gęstości $\hat{\rho}$, tj. macierz hermitowska

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad (101)$$

o śladzie 1, tj.

$$\text{Trace } \hat{\rho} = 1. \quad (102)$$

Macierz gęstości stanu czystego $|\psi\rangle$ jest dane przez $|\psi\rangle \langle\psi|$ i spełnia warunek idempotentyczności

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad (103)$$

natomiast dla tzw. stanów mieszanych jej sens fizyczny jest zadany przez zagadnienie własne

$$\hat{\rho} |\psi_j\rangle = p_j |\psi_j\rangle, \quad (104)$$

gdzie $p_j \geq 0$ jest prawdopodobieństwem znalezienia w stanie $|\psi_j\rangle$ układu spreparowanego w stanie $\hat{\rho}$, przy czym spełniony jest warunek [13, 14, 25, 36, 37, 85]

$$\sum_j p_j = 1. \quad (105)$$

Innymi słowy, sens fizyczny stanu mieszanego wyraża się poprzez rozkład spektralny operatora $\hat{\rho}$ w postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (106)$$

gdzie $p_i \geq 0$ i spełniają warunek (105), zaś $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ są wzajemnie ortogonalnymi wektorami napinającymi przestrzeń

$$\mathcal{H}^\rho = \text{lc}_{\mathbb{C}} \{|\psi_i\rangle \mid p_i \neq 0\} \subset \mathcal{H}. \quad (107)$$

Liczbę całkowitą $n_\rho = \dim \mathcal{H}^\rho$ nazywaną rzędem Gramma-Schmidta stanu $\hat{\rho}$. Przypadek $n_\rho = 1$ odpowiada stanowi czystemu (wtedy $p_1 = 1$) [22, 45, 46].

W tym rozdziale zajmujemy się badaniem splątania dla ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego, przyjmując węzły magnetyka jako elementarne podukłady. Musimy tu zaznaczyć, że liczbowe oszacowanie tzw. miary splątania jest aktualnie ciągle problemem otwartym. Ścisłe wyniki na kryteria separowalności zostały opublikowane dla niewielkich układów [38, 88]. W kontekście BA, odpowiada to badaniu podukładu dwóch lub trzech węzłów, przy zastosowaniu tzw. współbieżności (concurrence) i negatywności (negativity) dla oszacowania splątania jednowęzłowego [39, 104, 117, 118, 119, 120, 124]. W rozprawie bierzemy więc jako punkt startowy ścisłe rozwiązanie $|\nu\mathcal{L}\rangle$ dla pewnego $N \in (4..7)$, wyznaczamy z niego ścisłą zredukowaną macierz gęstości

$$\widehat{RDM}_{\nu\mathcal{L},O,U} = \text{Tr}_{\tilde{N} \setminus \{j_1, j_2\}} |\nu\mathcal{L}\rangle \langle \nu\mathcal{L}|. \quad (108)$$

dla podukładu $A = \{j_1, j_2\}$ dwóch wybranych węzłów, otrzymaną z uśrednienia po otoczeniu układu $O = \widetilde{N} \setminus U$. Miary splątania używane w rozprawie, czyli tzw. negatywność i współbieżność (nasze robocze odpowiedniki angielskich terminów "negativity" i "concurrence"), wyrażają się w terminach zapisanych poniżej zagadnień własnych. Przy czym negatywność \mathcal{N} jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{N} = \sum_{\lambda \in A} |\lambda|, \quad A = \{\lambda \in \text{Spec } \hat{\rho}^{TB} : \lambda < 0\}, \quad (109)$$

gdzie $\hat{\rho}^{TB}$ jest częściową transpozycją macierzy gęstości ρ po podukładzie B. Wprowadzoną przez Woottersa współbieżność definiuje wzór

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (110)$$

gdzie uporządkowane malejąco liczby λ są wartościami własnymi macierzy

$$\tilde{\rho}\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y). \quad (111)$$

Stan próżniowy nie zawiera żadnych dewiacji spinowych, stąd zredukowana macierz gęstości zawiera tylko jeden położony na diagonalu element niezerowy. Tabele zawierające obliczone wartości rozważanych miar splątania zamieszczono w dodatku C. Interesującym wynikiem jest, że splątania dla wszystkich kopii stanu próżniowego dla dowolnego wyboru węzłów w ramach rozpatrywanych długości łańcuchów są różne od zera. Wśród wszystkich przeanalizowanych przypadków zabsorbowano zgodność obu miar co do istnienia splątania, choć wartości liczbowe na ogół były różne. Zauważmy, że dla dwóch wybranych w sposób dowolny stanów $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ o splątaniach N_1, N_2, C_1, C_2 spełnienie nierówności $\mu_1 < \mu_2$ dla jednej z miar nie implikuje spełnienia nierówności $\nu_1 < \nu_2$ dla drugiej.

Dla układu składającego się z $N = 4$ węzłów zanotowano niezerowe wartości miar splątania: w przypadku węzłów bezpośrednio sąsiadujących dla pierwszego potomka stanu jednomagnonowego o quasipędzie $k = 0$ (dla tego stanu zanotowano najwyższe wartość każdej z miar). dla węzłów niesąsiadujących splątanie wykazuje stan najwyższej wagi w sektorze dwumagnonowym z quasipędem $k = 0$.

Przypadek łańcucha o długości $N = 5$ wskazuje na ciekawą korelację między quasipędem a sąsiedztwem węzłów. To znaczy, dla węzłów sąsiednich splątanie wykazuje stan najwyższej wagi dla $r = 2$, $E_{5,2,\pm 1}$ o quasipędzie $k = \pm 1$ natomiast dla węzłów odległych stan $E_{5,2,\pm 2}$ o quasipędzie $k = \pm 2$ a wartości odpowiednich miar są sobie równe.

Układ składający się z $N = 6$ węzłów jest pierwszym w którym w sposób nietrywialny pojawiają się rozwiązania trójmagnonowe. Z uwagi na większą ilość węzłów bogatsza jest również struktura splątań. Zauważmy, że w sektorze z $r = 2$ dla węzłów sąsiadujących splątanie wykazują stany: $E_{6,2,\pm 2,-}$, $E_{6,2,0,-}$ oraz $E_{6,2,\pm 1}$, zwiększenie odległości między wybranymi węzłami powoduje, "uaktywnienie" $E_{6,2,\pm 2,+}$, $E_{6,2,0,+}$ oraz $E_{6,2,3,g}$. Dla maksymalnej możliwej odległości między węzłami splątanie wykazuje stan $E_{6,2,\pm 2,+}$. W sektorze trójmagnonowym $r = 3$ mamy dla sąsiednich węzłów stany $E_{6,3,3,-}$, $E_{6,3,0,-g}$, dla węzłów maksymalnie rozsuniętych $E_{6,3,\pm 2,+g}$, $E_{6,3,3,+}$, $E_{6,3,0,+g}$ i $E_{6,3,0,-g}$, natomiast w przypadku pośrednim obserwujemy brak splątań.

W przypadku łańcucha o $N = 7$ węzłach obserwujemy splątania sąsiadujących węzłów dla stanów: $E_{7,2,\pm 1,-}$, $E_{7,2,\pm 2,+}$, $E_{7,2,\pm 3,-}$, $E_{7,2,\pm 0,-2}$, $E_{7,3,\pm 1,-g}$, $E_{7,3,\pm 2,-}$, $E_{7,3,\pm 3,-}$. Dla węzłów średnioodległych: $E_{7,2,\pm 1,-}$, $E_{7,2,\pm 2,-}$, $E_{7,2,\pm 3,+}$, $E_{7,2,\pm 3,-}$, $E_{7,2,\pm 0,-6}$, $E_{7,3,\pm 1,+}$, $E_{7,3,\pm 2,+}$. Dla węzłów maksymalnie od siebie oddalonych $E_{7,2,\pm 2,-}$, $E_{7,2,\pm 3,+}$, $E_{7,3,\pm 2,-g}$, $E_{7,2,\pm 3,+}$.

ROZDZIAŁ 6

Algebraiczne podstawienie Bethego (Algebraic Bethe Ansatz)

Algebraiczne sformułowanie podstawienia Bethego zostało rozwinięte na gruncie teorii odwrotnego kwantowego rozpraszania. Metody pozwalające na sformułowanie ABA były rozwijane przez wielu naukowców, warto wymienić chociażby Izergina, Korepina, Takhtajana i Faddeeva. Na szczególną uwagę zasługują tu prace [28, 29, 100, 101]. Aby lepiej unaocznić istotę ABA, w niniejszym rozdziale prześledzono fragmenty rozumowania Faddeeva zawarte w [29]. Wprowadźmy operator Laxa działający na j -tym węźle jako $\hat{L}_{j,\alpha}$

$$\hat{L}_{j,\alpha}(\lambda) = \lambda \hat{I}_{\mathcal{H}} \otimes \hat{I}_V + i \sum_{\alpha} \hat{s}_j^{\alpha} \otimes \hat{\sigma}^{\alpha}, \quad (112)$$

gdzie $\hat{I}_{\mathcal{H}}$ oraz \hat{I}_V są odpowiednio operatorami jednostkowymi w przestrzeni fizycznej i pomocniczej a λ jest parametrem spektralnym. Wygodnie jest przedstawiać operatory \hat{L} w bazie związanej z przestrzenią pomocniczą w postaci macierzy

$$\hat{L}_{j,\alpha}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + i\hat{s}_j^z & \hat{s}_j^- \\ \hat{s}_j^+ & \lambda - i\hat{s}_j^z \end{pmatrix} \quad (113)$$

gdzie

$$\hat{s}_j^+ = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_j^x + i\hat{\sigma}_j^y), \quad \hat{s}_j^- = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_j^x - i\hat{\sigma}_j^y) \quad (114)$$

Równanie (113) wygodnie jest również zapisać w postaci

$$\hat{L}_{j,\alpha}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{a}_j(\lambda) & \hat{b}_j(\lambda) \\ \hat{c}_j(\lambda) & \hat{d}_j(\lambda) \end{pmatrix} \quad (115)$$

gdzie $\hat{a}(\lambda), \hat{b}(\lambda), \hat{c}(\lambda), \hat{d}(\lambda)$ nazywamy obiektami Laxa. Rola tych obiektów zostanie omówiona w sposób szczegółowy w następnym rozdziale. Załóżmy, że dwa określone na różnych węzłach operatory Laxa mają tę samą przestrzeń fizyczną, iloczyn $\hat{L}_{j,i} \hat{L}_{j,i+1}$ jest określony nad $\mathcal{H} \otimes V \otimes V$. Iloczyn operatorów Laxa spełnia regułę przemienności:

$$\hat{R}_{i_1, i_2}(\lambda - \mu) \hat{L}_{j, i_1}(\lambda) \hat{L}_{j, i_2}(\mu) = \hat{L}_{j, i_2}(\mu) \hat{L}_{j, i_1}(\lambda) \hat{R}_{i_1, i_2}(\lambda - \mu), \quad (116)$$

gdzie

$$\hat{R}_{i_1, i_2}(\lambda - \mu) = \lambda \hat{I}_{i_1, i_2} + i \hat{U}_{i_1, i_2}. \quad (117)$$

Relacja przemienności dla operatorów Laxa, zwana też warunkiem Yang-Baxtera, dotyczy operatorów w przestrzeni $\mathcal{H} \otimes (V \otimes V)$, przy czym operator $\hat{R}(\lambda - \mu)$ działa w kwadracie tensorowym $V^{\otimes 2}$ przestrzeni pomocniczej i zwany jest w literaturze \hat{R} -macierzą. Operator \hat{U} jest transpozycją w $V^{\otimes 2}$, tj.

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a \otimes b \\ b \otimes a \end{pmatrix}, \quad a \in V, \quad b \in V. \quad (118)$$

Uporządkowany iloczyn wszystkich operatorów Laxa $\hat{L}_{j_N, i}(\lambda) \hat{L}_{j_{N-1}, i}(\lambda) \dots \hat{L}_{j_2, i}(\lambda) \hat{L}_{j_1, i}(\lambda)$ nazywamy macierzą monodromii i oznaczamy literą \hat{M}

$$\hat{M}_{N, j}(\lambda) = \hat{L}_{N, j}(\lambda) \dots \hat{L}_{1, j}(\lambda). \quad (119)$$

W przestrzeni pomocniczej macierz monodromii ma strukturę

$$\hat{M}_{N, j}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{A}_N(\lambda) & \hat{B}_N(\lambda) \\ \hat{C}_N(\lambda) & \hat{D}_N(\lambda) \end{pmatrix} \quad (120)$$

i spełnia te same reguły zamiany operatorów jak operator Laxa

$$\widehat{R}_{i_1, i_2}(\lambda - \mu) \widehat{M}_{i_1}(\lambda) \widehat{M}_{i_2}(\mu) = \widehat{M}_{i_2}(\mu) \widehat{M}_{i_1}(\lambda) \widehat{R}_{i_1, i_2}(\lambda - \mu). \quad (121)$$

Z definicji operatora Laxa widać, że macierz monodromii jest wielomianem stopnia N ze względu na parametr λ . Zatem wielomianem jest także ślad macierzy monodromii po przestrzeni pomocniczej

$$\widehat{F}(\lambda) = \text{tr}_V \widehat{M}(\lambda) = \widehat{A}(\lambda) + \widehat{D}(\lambda) = 2\lambda^N \widehat{I}_{\mathcal{H}} + \sum_{l=0}^{N-2} \widehat{F}_l \lambda^l \quad (122)$$

gdzie

$$\widehat{F}_l = \left. \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} \widehat{F}(\lambda) \right|_{\lambda=0} \quad (123)$$

brak wyrazu przy λ^{N-1} wynika z postaci równania (113) oraz własności iloczynu macierzy to jest wyraz w $N - 1$ ej potęgze λ może powstać jedynie z iloczynu N obiektów Laxa $a(\lambda)$ dla operatora \widehat{A} oraz obiektów $d(\lambda)$ dla operatora \widehat{D} :

$$\begin{aligned} & (\lambda + i\hat{s}_N^z)(\lambda + i\hat{s}_{N-1}^z) \dots (\lambda + i\hat{s}_2^z)(\lambda + i\hat{s}_1^z) \\ & (\lambda - i\hat{s}_N^z)(\lambda - i\hat{s}_{N-1}^z) \dots (\lambda - i\hat{s}_2^z)(\lambda - i\hat{s}_1^z) \end{aligned}$$

stąd mamy odpowiednio wyrazy $i\lambda^{N-1} \sum_{i=1}^N \hat{s}_i^z$ oraz $-i\lambda^{N-1} \sum_{i=1}^N \hat{s}_i^z$.

Przemienność operatorów \widehat{F} oraz \widehat{F}_l sprawia iż mamy dokładnie $N - 1$ stałych ruchu. Zatem całkowalność układu wymaga dołączenia jednej niezależnej stałej ruchu, np. operatora rzutu spinu. Jak wiadomo rodzina przemiennych operatorów zawiera hamiltonian, który daje się zapisać poprzez

$$\widehat{H} = \left. \frac{i}{2} \frac{d}{d\lambda} \ln \widehat{F}(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} - \frac{N}{2} \widehat{I}. \quad (124)$$

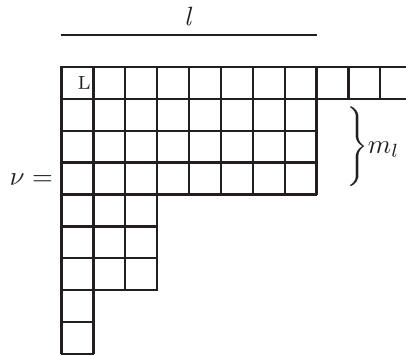
Warto w tym miejscu nadmienić, że powyższe rozumowanie posłużyło do wyznaczenia pełnego układu całek ruchu dla modelu XXX w pracy [78]

ROZDZIAŁ 7

Wyprowadzenie układu równań Bethego

Stan próżni ferromagnetycznej $|0\rangle$ jest wektorem własnym operatorów \hat{A} i \hat{D} , a operator \hat{C} w działaniu na $|0\rangle$ daje wektor zerowy. Ponieważ wektor $|0\rangle$ spełnia równanie sekularne dla \hat{A} i \hat{D} , równocześnie zatem jest wektorem własnym operatora \hat{F} . Chcemy, aby wszystkie pozostałe wektory własne operatora \hat{F} miały z dokładnością do czynnika normującego postać:

$$|\nu\mathcal{L}\rangle = |\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{r'}\rangle \cong \hat{B}(\lambda_1)\dots\hat{B}(\lambda_{r'})|0\rangle. \quad (125)$$



Rysunek 2. Graficzny opis konfiguracji strunowej w formalizmie ABA.

- konfiguracja strunowa $\nu \vdash r'$ jest partycją liczby r' pseudocząstek Bethego powiązanych w struny,
- każdy wiersz partycji ν jest struną, której długość l jest liczbą kratek. Struny są ułożone w bloki prostokątne o długości l i wysokości m_l , w kolejności malejącej długości l ,

- każdej kratce (l, v, m) odpowiada parametr spektralny λ_{lv}^m . Podstawienie wartości parametrów spektralnych, wyznaczonych z układu równań Bethego (53), do wzoru (125) generuje nieunormowany stan własny $|\nu\mathcal{L}\rangle$ ożaglowanej konfiguracji strunowej [56, 62, 69, 71, 73].

Wynika stąd, że

$$\xi |\lambda_1 \dots \lambda_{r'}\rangle = (\widehat{A}(\mu) + \widehat{D}(\mu)) |\lambda_1 \dots \lambda_{r'}\rangle = \widehat{A}(\mu) \widehat{B}(\lambda_1) \dots \widehat{B}(\lambda_l) |0\rangle + \widehat{D}(\mu) \widehat{B}(\lambda_1) \dots \widehat{B}(\lambda_{r'}) |0\rangle, \quad (126)$$

gdzie ξ jest wartością własną śladu macierzy monodromii. Wiemy, że $\widehat{A}(\lambda) |0\rangle = p^N |0\rangle$ oraz $\widehat{D}(\lambda) |0\rangle = q^N |0\rangle$, gdzie $p = \lambda + \frac{i}{2}$, $q = \lambda - \frac{i}{2}$. Zatem aby zbadać jakie relacje wynikają z tak określonej postaci wektorów własnych, należy posłużyć się odpowiednimi regułami zamiany operatorów. Jako bazę przestrzeni pomocniczej wybierzmy:

$$e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oraz } e_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wówczas operatory \widehat{U} i \widehat{R} przyjmują postać:

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$\widehat{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + i & & & \\ & \lambda & i & \\ & i & \lambda & \\ & & & \lambda + i \end{pmatrix} \quad (128)$$

W tak określonej bazie operatory \widehat{M} z równania (121) przyjmują postać:

$$\widehat{M}_{i_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{A}(\lambda) & & \widehat{B}(\lambda) & \\ & \widehat{A}(\lambda) & & \widehat{B}(\lambda) \\ \widehat{C}(\lambda) & & \widehat{D}(\lambda) & \\ & \widehat{C}(\lambda) & & \widehat{D}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (129)$$

$$\widehat{M}_{i_2}(\mu) = \begin{pmatrix} \widehat{A}(\mu) & \widehat{B}(\mu) & & \\ \widehat{C}(\mu) & \widehat{D}(\mu) & & \\ & & \widehat{A}(\mu) & \widehat{B}(\mu) \\ & & \widehat{C}(\mu) & \widehat{D}(\mu) \end{pmatrix} \quad (130)$$

z wymnożenia odpowiednich macierzy i porównania odpowiednich elementów macierzowych wynikają m.in. następujące reguły zamiany operatorów. Świadomie używamy tu terminu "reguły zamiany operatorów", gdyż wzory (132 -134) nie są regułami komutacji (jak w zwykłej algebrze Liego), ale specyficznymi relacjami definiującymi w ABA.

$$[\widehat{A}(\lambda), \widehat{A}(\mu)] = [\widehat{B}(\lambda), \widehat{B}(\mu)] = [\widehat{C}(\lambda), \widehat{C}(\mu)] = [\widehat{D}(\lambda), \widehat{D}(\mu)] = 0 \quad (131)$$

$$(\lambda - \mu)\widehat{A}(\lambda)\widehat{B}(\mu) = (\lambda - \mu - i)\widehat{B}(\mu)\widehat{A}(\lambda) - i(\lambda - \mu)\widehat{A}(\mu)\widehat{B}(\lambda) \quad (132)$$

$$(\lambda - \mu)\widehat{D}(\lambda)\widehat{B}(\mu) = (\lambda - \mu + i)\widehat{B}(\mu)\widehat{D}(\lambda) + i(\lambda - \mu)\widehat{D}(\mu)\widehat{B}(\lambda) \quad (133)$$

$$\widehat{C}(\lambda)\widehat{B}(\mu) = ((\lambda - \mu)^2 - i^2)\widehat{C}(\mu)\widehat{B}(\lambda) - (\lambda - \mu)^2\widehat{B}(\lambda)\widehat{C}(\mu) \quad (134)$$

Zbadajmy prawą stronę równania (126)

$$\begin{aligned}
& \widehat{A}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \widehat{D}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle = \\
& \left[f(\mu - \lambda_1)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{A}(\mu) + g(\mu - \lambda_1)\widehat{B}(\mu)\widehat{A}(\lambda_1) \right] \widehat{B}(\lambda_2)\widehat{B}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle = \\
& f(\mu - \lambda_1)\widehat{B}(\lambda_1) \left[f(\mu - \lambda_2)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{A}(\mu) + g(\mu - \lambda_2)\widehat{B}(\mu)\widehat{A}(\lambda_2) \right] \widehat{B}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + g(\mu - \lambda_1)\widehat{B}(\mu) \left[f(\lambda_1 - \lambda_2)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{A}(\lambda_1) + g(\lambda_1 - \lambda_2)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{A}(\lambda_2) \right] \widehat{B}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle = \\
& f(\mu - \lambda_1)f(\mu - \lambda_2)f(\mu - \lambda_3)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{B}(\lambda_3)\widehat{A}(\mu)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + f(\mu - \lambda_1)f(\mu - \lambda_2)g(\mu - \lambda_3)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{B}(\mu)\widehat{A}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + f(\mu - \lambda_1)g(\mu - \lambda_2)f(\lambda_2 - \lambda_3)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_3)\widehat{A}(\lambda_2)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + f(\mu - \lambda_1)g(\mu - \lambda_2)g(\lambda_2 - \lambda_3)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{A}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + g(\mu - \lambda_1)f(\lambda_1 - \lambda_2)f(\lambda_1 - \lambda_3)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{B}(\lambda_3)\widehat{A}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + g(\mu - \lambda_1)f(\lambda_1 - \lambda_2)f(\lambda_1 - \lambda_3)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{A}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + g(\mu - \lambda_1)g(\lambda_1 - \lambda_2)f(\lambda_2 - \lambda_3)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\lambda_3)\widehat{A}(\lambda_2)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \\
& + g(\mu - \lambda_1)g(\mu - \lambda_2)g(\mu - \lambda_3)\widehat{B}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\lambda_2)\widehat{A}(\lambda_3)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle = \dots
\end{aligned} \tag{135}$$

gdzie $f(\lambda - \mu) = \frac{\lambda - \mu + i}{\lambda - \mu}$ oraz $g(\lambda - \mu) = \frac{i}{\lambda - \mu}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \widehat{A}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \widehat{D}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle = \prod_{k=1}^l \frac{\mu - \lambda_k + i}{\mu - \lambda_k} p^N(\mu) |\{\lambda\}\rangle + \\
& + \sum_{k=1}^l M_k(\mu, \{\lambda\}) |\{\lambda\} \cup \mu \cap \lambda_k\rangle
\end{aligned} \tag{136}$$

przy czym

$$M_j(\mu, \{\lambda\}) = \frac{i}{\mu - \lambda_j} \prod_{k \neq j}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k} p^N(\lambda_j). \tag{137}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla operatora D , pamiętając o wynikającej z (134) konieczności zmiany znaku przed czynnikiem i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle + \widehat{D}(\mu)\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l)|0\rangle &= \prod_{k=1}^l \frac{\mu-\lambda_k-i}{\mu-\lambda_k} q^N(\mu) |\{\lambda\}\rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^l N_k(\mu, \{\lambda\}) |\{\lambda\} \cup \mu \cap \lambda_k\rangle, \end{aligned} \quad (138)$$

$$N_j(\mu, \{\lambda\}) = -\frac{i}{\mu-\lambda_j} \prod_{k \neq j}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k} q^N(\lambda_j) \quad (139)$$

Zauważmy, że konieczność spełnienia warunku (125) wymaga aby dla zbioru parametrów spektralnych $\{\lambda\}$ zachodziła równość $M_j(\mu, \{\lambda\}) = -N_j(\mu, \{\lambda\})$, to znaczy:

$$\prod_{k \neq j}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k} p^N(\lambda_j) = \prod_{k \neq j}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k} q^N(\lambda_j). \quad (140)$$

Zatem z założenia postaci $(\widehat{B}(\lambda_1)\dots\widehat{B}(\lambda_l))|0\rangle$ wektorów własnych operatora \widehat{F} wynika iż parametry $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ muszą spełniać układ równań Bethego

$$\left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right)^N = \prod_{k \neq j}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i}. \quad (141)$$

Pokazaliśmy więc, że ABA prowadzi do takiego samego układu równań, jakie oryginalnie otrzymał Bethe w swojej pracy [9]. W nowej literaturze wyprowadzenie Bethego określa się jako "współrzędnościowy" BA, w odróżnieniu od ABA.

ROZDZIAŁ 8

Kombinatoryka obiektów Laxa

Kluczowym obiektem ABA okazuje się być macierz monodromii $\widehat{M}(\lambda) \in \text{End}(\mathcal{H} \otimes V)$.

Przedstawimy ją w postaci

$$\widehat{M}(\lambda) = \sum_{m \in M_M} m(\lambda) \quad (142)$$

gdzie

$$m(\lambda) = \prod_{j \in \widetilde{N}} x_j(\lambda) \quad (143)$$

jest jednomianem stopnia N względem obiektów Laxa

$$x(\lambda) \in \{a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), d(\lambda)\}, \quad (144)$$

zaś sumowanie w (142) przebiega po zbiorze M_M takich jednomianów, określonym przez definicję (119) operatora monodromii w języku iloczynu operatorów Laxa. Obiekty Laxa są formalnie operatorami w przestrzeni $\mathcal{H} \otimes V$, $x_j(\lambda) \in \text{End}(\mathcal{H} \otimes V)$, ale działają efektywnie tylko w przestrzeni (qubicie) węzła $j \in \widetilde{N}$, tj.

$$\hat{x}_j(\lambda) = \widehat{I}_2 \otimes \dots \otimes \hat{x}(\lambda) \otimes \dots \otimes \widehat{I}_2, \quad (145)$$

gdzie mają postać

$$\hat{a}(\lambda) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & p & 0 \\ - & 0 & q \end{array} \quad (146)$$

$$\hat{b}(\lambda) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & 0 & 0 \\ - & i & 0 \end{array} \quad (147)$$

$$\hat{c}(\lambda) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & 0 & i \\ - & 0 & 0 \end{array} \quad (148)$$

$$\hat{d}(\lambda) = \begin{array}{c|cc} & + & - \\ \hline + & q & 0 \\ - & 0 & p \end{array}, \quad (149)$$

przy czym

$$p = \lambda + \frac{i}{2}, \quad q = \lambda - \frac{i}{2}, \quad (150)$$

są wartościami własnymi operatorów wagowych $\hat{a}(\lambda)$ i $\hat{d}(\lambda)$, zaś operatory skokowe $\hat{b}(\lambda)$ i $\hat{c}(\lambda)$ są w istocie niezależne od parametru spektralnego λ , a niezerowy element macierzowy i jest wybrany wygodnie z punktu widzenia konwencji inwersji czasu i sprzężenia zespolonego. W tym kontekście warto zauważyć, że układ równań Bethego (53) ma w języku widm operatorów Laxa postać

$$\left(\frac{p_\alpha}{q_\alpha} \right)^N = \prod_{\alpha' \neq \alpha} \frac{p_\alpha - q_{\alpha'}}{q_\alpha - p_{\alpha'}}, \quad \alpha \in \tilde{r}. \quad (151)$$

W ten sposób, wszystkie subtelnosci ożaglowanych konfiguracji strunowych, opisanych w rozdz. 3,4 i dodatku 1, zawarte są - poprzez układ równań Bethego w postaci (141) - w widmach obiektów Laxa. Definicja (119) macierzy monodromii implikuje podział zbioru M_M , jednomianów

zgodnie ze wzorem

$$\widehat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{A}(\lambda) & \widehat{B}(\lambda) \\ \widehat{C}(\lambda) & \widehat{D}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (152)$$

na postać operatora monodromii w przestrzeni pomocniczej V , zadany przez

$$M_M = M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D, \quad (153)$$

tak że

$$\widehat{X}(\lambda) = \sum_{m \in M_X} m(\lambda), \quad X \in \{A, B, C, D\} \quad (154)$$

przy tym

$$|M_M| = 2^{N+1}, \quad |M_X| = 2^{N-1} \quad \text{dla } X \in \{A, B, C, D\}. \quad (155)$$

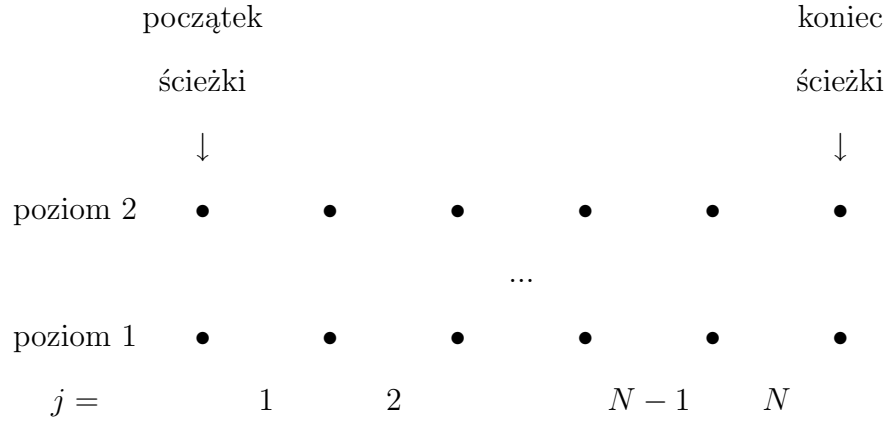
Używamy tu więc zapisu, w którym $\widehat{X}(\lambda) \in \text{End}\mathcal{H}$ jest operatorem w przestrzeni stanów magnetyka, zaś $X \subset M_M$ jest pewnym obiektem kombinatorycznym (zbiorem określonych jednomianów).

Warto zauważyć, że pojedynczy jednomian $m \in M_M$ ma proste właściwości separowalności: każdy czynnik $x_j(\lambda)$ tego jednomianu działa efektywnie tylko w przestrzeni j -tego węzła, $j \in \widetilde{N}$. Określimy wagę $w(m) = (w_a, w_b, w_c, w_d)$ jednomianu m tak, że w_x jest liczbą obiektów Laxa typu x w m . Oczywiście, mamy

$$w_a + w_b + w_c + w_d = N. \quad (156)$$

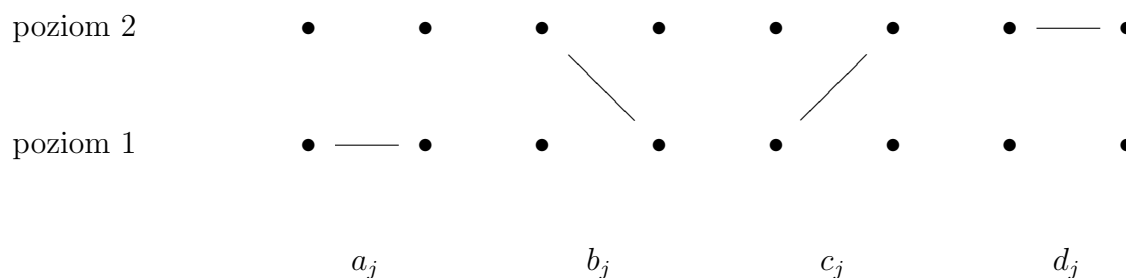
Ponadto, definicja (119) macierzy monodromii implikuje

$$\begin{aligned} w_b &= w_c & \text{dla } m \in M_A \text{ lub } m \in M_D, \\ w_b &= w_c + 1 & \text{dla } m \in M_B, \\ w_c &= w_b + 1 & \text{dla } m \in M_C, \end{aligned} \quad (157)$$



Rysunek 3. Konstrukcja ścieżek reprezentujących jednomiany m .

co się wiąże z nazwą "operatory wagowe" dla \hat{A} i \hat{D} oraz "skokowe" dla \hat{B} i \hat{C} . Użyteczną klasyfikację jednomianów można uzyskać przy pomocy pewnych ścieżek napiętych na drabinkowej sieci $2(N+1)$ punktów (rys. 3). Krawędzie łączące sąsiednie punkty tej sieci reprezentują obiekty Laxa zgodnie z konwencją przedstawioną na (rys. 4.) Wówczas każdy jednomian $m \in M_M$ jest reprezentowany przez ścieżkę, łączącą w sposób ciągły bez rozgałęzień pewne punkty na obu brzegach sieci. Przy tym zbiór M_X zadany jest przez wszystkie ścieżki o określonym początku i końcu zgodnie z tabelą. Przedstawiamy zatem pewien kombinatoryczny algorytm obliczania elementów macierzowych operatora $\widehat{M}(\lambda)$ poprzez wyznaczanie wszystkich ścieżek o własnościach spełniających warunki tabeli 1. Algorytm ten wykazuje zaletę wyraźnego uwidaczniania różnych przestrzennych reguł wyboru, zawartych w kolejności i rodzaju obiektów Laxa występujących w danym jednomianie m . Na przykład, pomiędzy dwoma dowolnymi obiektami tworzenia dewiacji spinowej \hat{b}_{j_1} i \hat{b}_{j_2} , musi występować operator niszczenia \hat{c}_j , $j_1 < j_2 < j_3$. W szczególności, zakazany jest iloczyn typu $\hat{b}_j \hat{b}_{j+1}$, i podobnie $\hat{c}_j \hat{c}_{j+1}$. Również operatory wagowe różnych typów nie mogą sąsiadować. Bardziej szczegółowa analiza takich reguł wyboru wiąże



Rysunek 4. Konwencja reprezentacji graficznej obiektów Laxa: operatory wagowe przedstawione są przez krawędzie poziome (operatory \hat{a} i \hat{d} odpowiednio na poziomie 1 i 2), zaś operatory skokowe - przez krawędzie diagonalne (operatory \hat{b} i \hat{c} odpowiednio od 2 do 1 i od 1 do 2, w konwencji z lewa na prawo)

X	początek ścieżki	koniec ścieżki	schemat graficzny
A	poziom 1	poziom 1	
B	poziom 2	poziom 1	
C	poziom 1	poziom 2	
D	poziom 2	poziom 2	

Tabela 1. Ścieżki reprezentujące operatory $\hat{A}(\lambda), \hat{B}(\lambda), \hat{C}(\lambda), \hat{D}(\lambda)$

się z konkretnymi stanami układu, na jakie działa dany jednomian.

Działanie jednomianu $m(\lambda)$ na dowolny stan $|fa\rangle$ jest dane przez wzór

$$m(\lambda)|fa\rangle = \begin{cases} 0, & \tilde{N}^+ \cap \tilde{N}_c \neq \emptyset \text{ lub } \tilde{N}^- \cap \tilde{N}_b \neq \emptyset \\ i^{w_b+w_c} p^u q^v |f'a'\rangle, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (158)$$

gdzie

$$\tilde{N} = \tilde{N}_a \cup \tilde{N}_b \cup \tilde{N}_c \cup \tilde{N}_d \quad (159)$$

określa rozkład zbioru \tilde{N} węzłów magnetyka na podzbiory \tilde{N}_x , wyznaczony przez jednomian m , zaś

$$\tilde{N} = \tilde{N}^+ \cup \tilde{N}^- \quad (160)$$

- rozkład określony przez konfigurację magnetyczną f , i wreszcie wykładniki u i v przy wartościach własnych obiektów Laxa p i q zadane są przez odpowiednie przekroje zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned} u &= |\tilde{N}^+ \cap \tilde{N}_a| + |\tilde{N}^- \cap \tilde{N}_d|, \\ v &= |\tilde{N}^+ \cap \tilde{N}_d| + |\tilde{N}^- \cap \tilde{N}_a|. \end{aligned} \quad (161)$$

Równoważnie, warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby element macierzy $\langle f'_a | m | f_a \rangle$, wyznaczony przez wzór (158) był różny od zera, jest aby zachodziły następujące inkluzje zbiorów

$$\tilde{N}_c \subset \tilde{N}^-(f) \quad \text{oraz} \quad \tilde{N}_b \subset \tilde{N}^+(f) \quad (162)$$

(tj. każdy obiekt c_j jednomianu m musi działać na "minus" konfiguracji f , i podobnie b_j na "plus").

Jak łatwo można zauważyć, działanie dowolnego jednomianu $m(\lambda)$ na dowolny stan $|fa\rangle$ daje albo zero, albo inny stan $|f'a'\rangle$, jednoznacznie określony przez $m(\lambda)$ oraz $|fa\rangle$, pomnożony

przez współczynnik określony wzorem (158). Jeżeli ustalimy $|fa\rangle$ i wybierzemy dowolnie dwa różne jednomiany $m(\lambda)$ i $m'(\lambda)$, to zawsze

$$m(\lambda)|fa\rangle \neq m'(\lambda)|fa\rangle \quad (163)$$

Oznacza to, że dla każdego niezerowego elementu macierzowego operatora monodromii $\widehat{M}(\lambda)$ istnieje dokładnie jeden jednomian $m \in M_M$ taki, że

$$\langle f'a'|M(\lambda)|fa\rangle = \langle f'a'|m(\lambda)|fa\rangle \quad (164)$$

Innymi słowy, zliczanie niezerowych elementów macierzowych operatora monodromii, a więc w istocie różnych kanałów rozpraszania, staje się przedmiotem względnie prostej kombinatoryki.

Wzór (158) pozwala nam wyciągnąć jeszcze jeden wniosek natury kombinatorycznej, który okaże się ważny w aspekcie dyskusji splątania rozwiązań strunowych. Ustalmy mianowicie konfiguracje f i f' i zbadajmy, jakie jednomiany m sprzęgają te konfiguracje zgodnie ze wzorem (158). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f \in \mathcal{H}^{(r-1)}$, $f' \in \mathcal{H}^{(r)}$, czyli że szukane m należy do M_B (rozważania dla pozostałych przypadków przebiegają podobnie, ze stosownymi modyfikacjami). Precyzując te założenia, przyjmijmy że

$$f \cong (j_1, \dots, j_{r-1}), \quad f' \cong (j'_1, \dots, j'_r), \quad (165)$$

gdzie j_α oznacza położenie "minusa" (czyli pseudocząstki Bethego) na łańcuchu \widetilde{N} w danej konfiguracji. Niech

$$\widetilde{N}^-(f) = \{j_1, \dots, j_{r-1}\}, \quad \widetilde{N}^-(f') = \{j'_1, \dots, j'_r\} \quad (166)$$

oznaczają zbiory węzłów z dewiacjami, zaś

$$\widetilde{N}^+(f) = \widetilde{N} \setminus \widetilde{N}^-(f), \quad \widetilde{N}^+(f') = \widetilde{N} \setminus \widetilde{N}^-(f') \quad (167)$$

będą odpowiednimi dopełnieniami. Utwórzmy teraz zbiory

$$\widetilde{N}_c = \widetilde{N}^-(f) \setminus (\widetilde{N}^-(f) \cap \widetilde{N}'(f')) \quad (168)$$

oraz

$$\widetilde{N}_b = \widetilde{N}^-(f') \setminus (\widetilde{N}^-(f) \cap \widetilde{N}'(f')). \quad (169)$$

Wzór (158) implikuje, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby istniał taki jednomian $m \in M_B$, że $\langle f' | m(\lambda) | f \rangle \neq 0$, jest aby zbiory \widetilde{N}_c^+ i \widetilde{N}_b^+ "wzajemnie się przenikały", tj. aby w zbiorze $\widetilde{N}_b \cup \widetilde{N}_c \in \widetilde{N}$ najbliższymi sąsiadami dowolnego $j \in \widetilde{N}_c$ były węzły $j'' \in \widetilde{N}_b$.

Powyższe rozważania generują jednoznaczny przepis na konstrukcję jednomianu m . Mianowicie, jeżeli spełniony jest warunek przenikania, to jednomian m zadany jest przez

$$x_j = \begin{cases} b_j & \text{dla} & j \in \widetilde{N}_b^+ \\ c_j & \text{dla} & j \in \widetilde{N}_c^+ \\ a_j \text{ lub } d_j & \text{w pozostałych przypadkach, tak aby spełnić} \\ & \text{warunek quasiciągłości ścieżki drabinkowej.} \end{cases} \quad (170)$$

Naturalna jest dalsza klasyfikacja jednomianów $m \in M_X$ w zależności od ich wag $w(m)$, czyli graficznie, od liczby "zygzaków" na ścieżkach drabinkowych. Formalnie, określamy rozkłady

$$M_X = \bigcup_r M_{Xr}, \quad X \in \{A, B, C, D\} \quad (171)$$

gdzie

$$M_{Ar} = \bigcup_{m \in M_A} \{m | w(m) = (w_a, r, r, N - w_a - 2r)\} \quad (172)$$

$$M_{Br} = \bigcup_{m \in M_B} \{m | w(m) = (w_a, r, r - 1, N - w_a - 2r + 1)\} \quad (173)$$

$$M_{Cr} = \bigcup_{m \in M_C} \{m | w(m) = (w_a, r - 1, r, N - w_a - 2r + 1)\} \quad (174)$$

$$M_{Dr} = \bigcup_{m \in M_D} \{m | w(m) = (w_a, r, r, N - w_a - 2r)\} \quad (175)$$

są zbiorami jednomianów z określoną liczbą skokowych obiektów Laxa. Spełnione są przy tym reguły sum

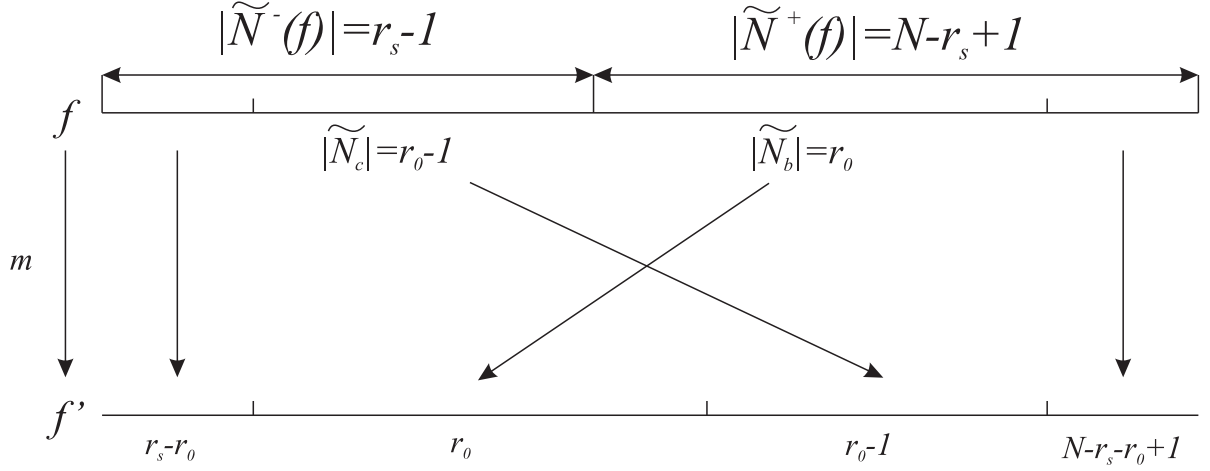
$$|M_{Ar}| = |M_{Dr}| = \binom{N}{2r} \quad (176)$$

$$|M_{Br}| = |M_{Cr}| = \binom{N}{2r-1} \quad (177)$$

$$\sum_{r=0}^{[N/2]} \binom{N}{2r} = 2^{N-1} \quad (178)$$

$$\sum_{r=1}^{[N/2]+1} \binom{N}{2r-1} = 2^{N-1} \quad (179)$$

gdzie $[N/2]$ oznacza część całkowitą liczby $N/2$. Powyższe wzory podają kombinatoryczny bilans różnych jednomianów m , wchodzących w skład wyrażenia na macierz monodromii. Jednakże, z uwagi na omówione powyżej własności separowalności obiektów Laxa, w szczególności na wzór (163), możemy przy ich pomocy ustalić również liczbę niezerowych elementów macierzowych, zarówno całej macierzy monodromii $\widehat{M}(\lambda)$, jak też operatorów $\widehat{A}(\lambda), \dots, \widehat{D}(\lambda)$. Co więcej, można przewidzieć na drodze kombinatorycznej, ile niezerowych elementów macierzowych istnieje w ramach danego sektora $\mathcal{H}^{(r)}$ (dla operatorów wagowych $\widehat{A}(\lambda)$ i $\widehat{D}(\lambda)$), czy też pomiędzy sektorami $\mathcal{H}^{(r-1)}$ i $\mathcal{H}^{(r)}$ (operator $\widehat{B}(\lambda)$) oraz $\mathcal{H}^{(r)}$ i $\mathcal{H}^{(r-1)}$ (operator $\widehat{C}(\lambda)$). Dalsze rozważania szczegółowe przeprowadzimy, w celu skupienia uwagi, dla operatora skokowego $\widehat{B}(\lambda)$, a wyniki



Rysunek 5. Schemat pomocniczy do ilustracji kombinatoryki związanej z elementem macierzowym $\langle f'|m|f \rangle \neq 0$ dla $m \in M_{Br_0}$ w bloku $\beta^{(r_s-1, r_s)}$

przedstawimy dla wszystkich czterech operatorów.

Rozpatrzmy jednomian $m \in M_{Br_0}$. Niech $Z(m|r_s)$ będzie liczbą niezerowych elementów macierzowych tego jednomianu, związaną z blokiem $\beta^{(r_s-1, r_s)}$, tj.

$$Z(m|r_s) = \left| \left\{ \langle f'|m|f \rangle \neq 0 \mid f \in Q^{(r_s-1)}, f' \in Q^{(r_s)} \right\} \right|, m \in M_{Br_0}. \quad (180)$$

Wyznamy teraz kombinatorycznie wielkość $Z(m|r_s)$. Rysunek (5) przedstawia rozkłady (160) zbioru \tilde{N} węzłów magnetyka na podzbiory $\tilde{N}^-(f)$, $\tilde{N}^+(f)$ oraz $\tilde{N}^-(f')$, $\tilde{N}^+(f')$, z dodatkowym wyróżnieniem podzbiorów $\tilde{N}_b \subset \tilde{N}^+(f)$ i $\tilde{N}_c \subset \tilde{N}^-(f)$ zgodnie ze wzorem (162). Przedstawienie to jest oczywiście schematyczne, gdyż pomija ono warunek wzajemnego przenikania, ale jest wystarczającą ilustracją potrzebnej kombinatoryki. Działanie jednomianu m na konfigurację f polega, zgodnie z formułami ABA, na zamianie minusów na plusy w podziorze $\tilde{N}_c \subset \tilde{N}^-(f)$ oraz plusów na minusy w podziorze $\tilde{N}_b \subset \tilde{N}^+(f)$, tak że powstaje konfiguracja

f' zgodnie ze strzałkami na rys. (5), a element macierzowy zawiera stosowne czynniki zgodnie ze wzorem (158). Ten rysunek pozwala nam określić liczbę możliwych konfiguracji $f \in Q^{(r_s-1)}$ spełniających wymóg $\langle f'|m|f \rangle$ dla ustalonego $m \in M_{Br_0}$. Widać bowiem, że środkowa część pierścienia, powiązana ze zbiorami \widetilde{N}_b i \widetilde{N}_c jednomianu m , jest ściśle określona, natomiast pozostaje swoboda rozmieszczenia $r_s - r_0$ "minusów" ze zbioru $\widetilde{N}^-(f) \setminus \widetilde{N}_c$, a więc tych "minusów", które nie są anihilowane przez obiekty skokowe c_j jednomianu m (kombinatorycznych "kulek") na węzłach zbioru $\widetilde{N}^-(f) \setminus \widetilde{N}_c \cup \widetilde{N}^+(f) \setminus \widetilde{N}_b$ (kombinatorycznych "pudełek"). Mamy zatem

$$Z(m|r_s) = \binom{N - 2r_0 + 1}{r_s - r_0}, \quad m \in M_{Br_0}. \quad (181)$$

Wyrażenie $Z(m|r_s)$ spełnia oczywiste reguły sum

$$\sum_{r_s=r_0}^{N-r_0+1} Z(m|r_s) = 2^{N-2r_0+1} \quad (182)$$

oraz

$$\sum_{r_0=1}^{r_s-1} \binom{N}{2r_0-1} \binom{N-2r_0+1}{r_s-r_0} = Z(B|r_s). \quad (183)$$

Zauważmy, że dolna granica sumowania we wzorze (182) odpowiada sytuacji, gdy $r_s = r_0$, a więc gdy znika lewa część konfiguracji f' na rys. (5), natomiast górna granica gdy znika część prawa.

Przykład bilansu niezerowych elementów macierzowych operatora $\widehat{B}(\lambda)$, w podziale na "długości zygzaków" zadane przez r_0 i na sektory zadane przez r_s , podany jest w tabeli (2)

Analogiczne wzory dla $\widehat{A}, \widehat{C}, \widehat{D}$ mają postać:

$$Z(m|r_s) = \binom{N - 2r_0}{r_s - r_0}, \quad m \in M_{Ar_0}. \quad (184)$$

$$Z(m|r_s) = \binom{N - 2r_0 + 1}{r_s - r_0}, \quad m \in M_{Cr_0}. \quad (185)$$

r_s	1	2	3	4	5	Σ
B_{r_0}						
B_1	5	20	30	20	5	80
B_2	–	10	20	10	–	40
B_3	–	–	1	–	–	1
Σ	5	30	51	30	5	121

Tabela 2. Przykładowy bilans niezerowych elementów macierzowych operatora $\widehat{B}(\lambda)$

dla $N = 5$

$$Z(m|r_s) = \binom{N - 2r_0}{r_s - r_0}, \quad m \in M_{Dr_0}. \quad (186)$$

W ten sposób, zaprezentowane elementy kombinatoryki obiektów Laxa pozwalają wyznaczyć ścisłą postać całej macierzy monodromii w wyjściowej bazie konfiguracji magnetycznych. Wprowadzona terminologia pozwala zlokalizować wszystkie niezerowe elementy macierzowe i wyznaczyć ich zależność od parametru spektralnego λ , poprzez wartości własne p i q obiektów Laxa.

Kombinatoryka obiektów Laxa pozwala nam prześledzić złożone korelacje w ścisłych rozwiązaniach podstawienia Bethego metodą algebraiczną, przy pomocy ABA, w sposób operacyjnie niezależny od ścisłej diagonalizacji, przedstawionej w rozdz. 4 i dodatku. Umożliwia to głębsze zrozumienie istoty procesów, zawartych implícite w wysoce nieliniowym układzie równań Bethego. Otwiera to, naszym zdaniem, duże możliwości pogłębienia wiedzy o tych rozwiązaniach,

w szczególności stawiania i rozwiązywania pytań o splątanie strun, poprzez bezpośrednią analizę wszystkich istotnych kanałów rozpraszania, sklasyfikowanych przy pomocy ścieżek obiektów Laxa. W następnym rozdziale przedstawimy taką analizę dla rozwiązań dwumagnonowych.

ROZDZIAŁ 9

Splątanie strun

W rozdziale 6 opisaliśmy szczegółowo ściśle rozwiązania $|\nu\mathcal{L}\rangle$ Bethego, scharakteryzowane przez ożaglowane konfiguracje strunowe, w opisie ABA. Przypomnijmy tu krótko, że konfiguracja strunowa $\nu \vdash r'$ jest partycją liczby $r' = N/2 - S$ tych pseudocząstek Bethego, które są związane w struny w stanach o wypadkowym spinie S . ABA możemy interpretować, zgodnie ze wzorem (125) w taki sposób, że każda z tych pseudocząstek wiąże się formalnie z jedną kratką diagramu Younga ν (rys 2), a więc również z pewnym parametrem spektralnym λ_α , $\alpha \in \tilde{r}'$. Innymi słowy, możemy uważać iż tę pseudocząstkę kreuje operator $\hat{B}(\lambda_\alpha)$ ze stanu próżniowego, tj że

$$|\lambda_\alpha\rangle = \hat{B}(\lambda_\alpha) |0\rangle \quad (187)$$

jest (nieunormowanym) stanem jednomagnonowym (na ogół niestacjonarnym), z zadaniem parametrem spektralnym λ_α , czyli z pseudopędem p_α określonym przez wzór (32). Podobnie, nieunormowany stan $|\nu\mathcal{L}\rangle$ można utworzyć ze stanu próżniowego zgodnie ze wzorem (125), poprzez iloczyn r' operatorów $\hat{B}(\lambda_\alpha)$ tworzenia pseudocząstek Bethego o parametrach spektralnych λ_α otrzymanych z rozwiązania układu równań Bethego. Formalnie, mamy więc do czynienia z iloczynem operatorów \hat{B} po kratkach diagramu Younga konfiguracji strunowej ν . Dyskusja tych rozwiązań zawiera więc kombinatoryczną analizę iloczynu r' operatorów $\hat{B}(\lambda_\alpha)$. W tym rozdziale przedstawiamy taką analizę dla kilku najprostszych konfiguracji strunowych.

Rozpocznijmy od przypadku $r = r' = 1$, tj. od stanów jednomagnonowych (187). W terminologii poprzedniego rozdziału, jest to przypadek sektora $r_s = 1$. Wzór (181) na liczbę $Z(m|1)$ niezerowych elementów macierzowych, pochodzących od jednomianu $m \in M_{B_{r_0}}$,

$$Z(m|1) = \binom{N - 2r_0 + 1}{1 - r_0}, \quad (188)$$

implikuje $r_0 = 1$ jako jedyną możliwość (zauważmy, że zgodnie ze wzorem (173) $r_0 = 1$ jest minimalną możliwą wartością). Innymi słowy, spośród wszystkich jednomianów $m \in M_B$, aktywne w działaniu na próżnię okazują się być tylko jednomiany z podzbioru M_{B_1} , a więc zawierające tylko jeden operator $b_j(\lambda)$ tworzenia pseudocząstki Bethego. Mamy więc

$$\widehat{B}(\lambda) |0\rangle = \widehat{B}_1(\lambda) |0\rangle, \quad (189)$$

gdzie

$$\widehat{B}_1(\lambda) = \sum_{m \in M_{B_1}} m = \sum_{j \in \widetilde{N}} d_1(\lambda) \dots d_{j-1}(\lambda) b_j a_{j+1}(\lambda) \dots a_N(\lambda) \quad (190)$$

Zatem, na mocy wzorów (146)-(149)

$$\widehat{B}(\lambda) |0\rangle = i \sum_{j \in \widetilde{N}} q^{j-1} p^{N-j} |j\rangle = i \frac{p^N}{q} \sum_{j \in \widetilde{N}} e^{-ip_{ps}j} |j\rangle \quad (191)$$

gdzie

$$e^{ip_{ps}} = \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}} \quad (192)$$

określa pseudopęd p_{ps} magnonu z parametrem spektralnym λ . Powyższe wzory demonstrują fakt, że $\widehat{B}(\lambda)$ jest operatorem tworzenia magnonu z pseudopędem p_{ps} . Jest oczywiste, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$ pseudopęd p_{ps} nie będzie współmierny z pierścieniem magnetyka, tj. $Np_{ps} \neq 2\pi k$ dla dowolnego całkowitego k . W szczególnych przypadkach, dla

$$p_{ps} = \frac{2\pi}{N} k, \quad k \in B, \quad (193)$$

(tu B oznacza strefę Brillouina), pseudopęd magnonu pokrywa się z quasipędem. Zauważmy też, że nieunormowana amplituda p^N/q stanu (191) wyraża się przez wartości własne obiektów Laxa.

Warto zauważyć, że powyższe wyniki dają się prosto wyrazić dzięki faktowi iż operator $\widehat{B}(\lambda)$ w działaniu na próżnię redukuje się efektywnie do sumy $\widehat{B}_1(\lambda)$ jednomianów zawierających tylko jeden skokowy obiekt Laxa. Sytuacja komplikuje się przy rozpatrywaniu wyższych sektorów $r_s > 0$, ale również wtedy operator $\widehat{B}(\lambda)$ "uaktywnia" tylko część jednomianów, co adekwatnie opisuje kombinatoryka z poprzedniego rozdziału. W przypadku dwumagnonowym, a więc $r = r' = r_s = 2$, uaktywniają się w operatorze $\widehat{B}(\lambda)$ jednomiany postaci

$$m_{j_1 l j_2} = d_1 \dots d_{j_1-1} b_{j_1} a_{j_1+1} \dots a_{l-1} c_l d_{l+1} \dots d_{j_2-1} b_{j_2} a_{j_2+1} \dots a_{j_N}, \quad (194)$$

zawierające dwa operatory tworzenia pseudocząstki Bethego w węzłach $j_1 < j_2$ oraz operator niszczenia w węźle pośrednim l , $j_1 < l < j_2$, czyli $m_{j_1 l j_2} \in M_{B2}$.

Zanalizujemy teraz elementy macierzowe takich jednomianów zgodnie z opisem kombinatorycznym z poprzedniego rozdziału. Zgodnie ze wzorem (158), w przypadku sektora β^2 niezerowe elementy macierzowe mają postać

$$\langle j_1 j_2 | m_{j_1 l j_2} | l \rangle = i^3 p^u q^v, \quad (195)$$

gdzie

$$u = N - j_1 + l - j_3 - 1, \quad v = j_1 - l + j_3 - 2 \quad (196)$$

są równe odpowiednio liczbie operatorów wagowych a i d w jednomianie (194). Widać z tego wzoru, że taki jednomian tworzy dwie pseudocząstki Bethego na węzłach $j_1 < j_2$, z jednoczesnym niszczeniem pseudocząstki na węźle pośrednim l , $j_1 < l < j_2$. W szczególności, ten

jednomian anihiluje próżnię i uaktywnia się dopiero w działaniu na stany jednomagnonowe. Stany dwumagnonowe nieunormowane w ABA konstruuje się zgodnie ze wzorem

$$|\lambda_1\lambda_2\rangle = \widehat{B}(\lambda_1)\widehat{B}(\lambda_2)|0\rangle, \quad (197)$$

gdzie λ_1 i λ_2 są parametrami spektralnymi otrzymanymi z rozwiązań układu równań Bethego. Z uwagi na opisane tu fakty o uaktywnianiu poszczególnych jednomianów m wchodzących do \widehat{B} w postaci sumy, wystarczy przyjąć przy generacji stanów dwumagnonowych, że

$$\widehat{B}(\lambda) \cong \widehat{B}_1(\lambda) + \widehat{B}_2(\lambda), \quad (198)$$

gdzie \cong oznacza równość operatorów przy ograniczeniu ich dziedziny do stanów jednomagnonowych, zaś

$$\widehat{B}_1(\lambda) = \sum_{m \in M_{B_1}} m = \sum_{j \in \widetilde{N}} m_j(\lambda), \quad (199)$$

$$\widehat{B}_2(\lambda) = \sum_{m \in M_{B_2}} m = \sum_{1 \leq j_1 < l < j_2 \leq N} m_{j_1 l j_2}(\lambda), \quad (200)$$

przy czym

$$m_j(\lambda) = d_1 \dots d_{j-1} b_j a_{j+1} \dots a_N \quad (201)$$

kreują pojedynczą dewiację na węźle j . Przy tym samym znaczeniu znaku \cong , zachodzi

$$\widehat{B}(\lambda)\widehat{B}(\mu) \cong [\widehat{B}_1(\lambda) + \widehat{B}_2(\mu)] \widehat{B}_1(\mu), \quad (202)$$

gdyż człon $\widehat{B}_2(\lambda)$ nie uaktywnia się przy bezpośrednim działaniu na próżnię.

Zgodnie ze wzorem (202), operator $\widehat{B}(\lambda)\widehat{B}(\mu)$ tworzenia z próżni stanu dwumagnonowego,

zadanego przez parametry spektralne λ i μ , jest sumą dwóch składników. Pierwszy z nich, postaci

$$\widehat{B}_1(\lambda)\widehat{B}_1(\mu) = \sum_{j_1, j_2 \in \widetilde{N}} m_{j_1}(\lambda)m_{j_2}(\mu), \quad (203)$$

jest zwykłą sumą iloczynów jednomianów jednowęzłowych (201), zaś drugi, czyli

$$\widehat{B}_2(\lambda)\widehat{B}_1(\mu) = \sum_{1 \leq j_1 < l < j_2 \leq N} m_{j_1 l j_2}(\lambda)m_l(\mu), \quad (204)$$

opisuje bardziej złożone procesy kreacji i anihilacji. W ostatnim przypadku, najpierw utworzona jest wirtualna pseudocząstka Bethego na węźle $l \in \widetilde{N}$, która następnie anihiluje razem z utworzeniem dwóch innych pseudocząstek, jednej na lewo od l (w węźle j_1), a drugiej na prawo (w węźle j_2). Takie procesy stanowią uzupełnienie zwykłych iloczynów jednowęzłowych, niezbędnie do zachowania reguł zamiany kolejności operatorów ABA, w szczególności przemienności operatora \widehat{B} dla różnych wartości parametru spektralnego.

W celu ilustracji zastosowania kombinatoryki obiektów Laxa w ABA przedstawimy pewne graficzne sposoby obliczania elementów macierzowych operatorów (203) i (204). Na rys. 6 przedstawiony jest graficznie element macierzowy $\langle j_1 j_2 | m_{j_1}(\lambda) m_{j_2}(\mu) | 0 \rangle$. W górnym wierszu rysunku zaznaczone są węzły łańcucha, w kolejności rosnącej. Kolejny wiersz oznacza początkową konfigurację magnetyczną, $|f\rangle = |0\rangle$ w tym przypadku próżnię ferromagnetyczną. Poniżej wizualizujemy jednomiany działające na $|f\rangle$, w kolejności od góry do dołu dla jednomianów występujących w iloczynie z lewa na prawo. Dla każdego jednomianu przedstawiona jest jego ścieżka na diagramie drabinkowym, z zaznaczonymi wierzchołkami drabinki jako tłem niezbędnym do identyfikacji obiektów Laxa. Wiersz poniżej ścieżki opisuje obiekty Laxa przypisane poszczególnym węzłom magnetyka zgodnie z rysunkiem 4, zaś kolejny wiersz zawiera współczynnik przy obiekcie Laxa $x_j(\lambda)$ ($p = \lambda + i/2$, $q = \lambda - i/2$, lub i). Współczynnik ten

jest jednoznacznie określony przy pomocy wzorów (146-149) przez obiekt Laxa $x_j(\lambda)$ i wartość $\tilde{f}(j)$ konfiguracji magnetycznej \tilde{f} figurującej bezpośrednio nad ścieżką ($\tilde{f} = f$ dla $m_{j_2}(\mu)$, lub $\tilde{f} = f''$ dla $m_{j_1}(\lambda)$ na rys. 6). Wartość końcową elementu macierzowego otrzymujemy w wyniku pomnożenia wszystkich uwidocznionych współczynników przy obiektach Laxa. Zauważmy, że parametrowi spektralnemu λ przypisane są wartości własne p i q , zaś parametrowi μ odpowiadają $r = \mu + i/2$, $s = \mu - i/2$.

Obliczone w ten sposób elementy macierzowe wynoszą

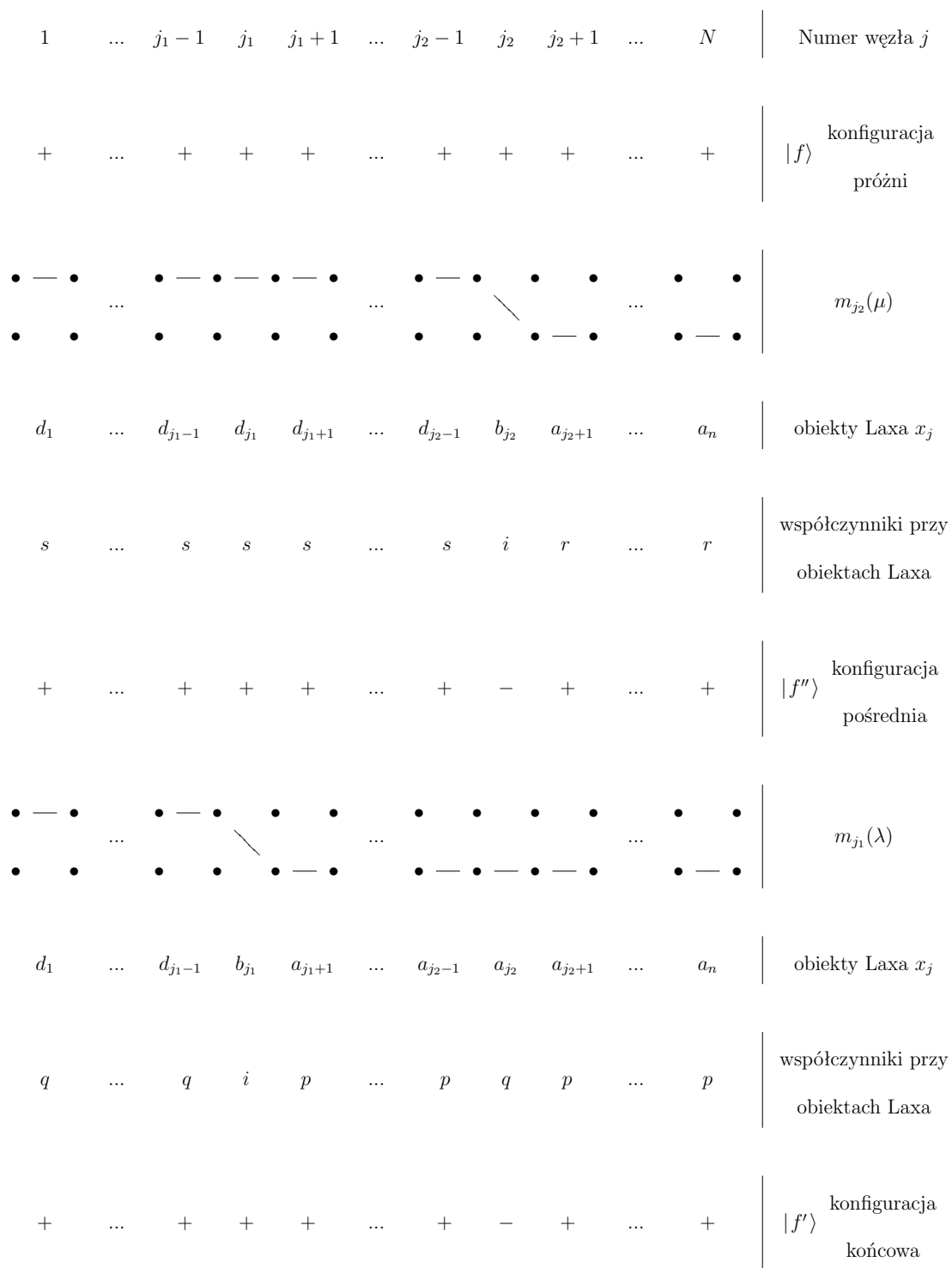
$$\langle j_1 j_2 | m_{j_1}(\lambda) m_{j_2}(\mu) | 0 \rangle = -p^{N-j_1-1} q^{j_1} r^{N-j_2} s^{j_2-1}, \quad (205)$$

$$\langle j_1 j_2 | m_{j_2}(\lambda) m_{j_1}(\mu) | 0 \rangle = -p^{N-j_2+1} q^{j_2-2} r^{N-j_1} s^{j_1-1}, \quad (206)$$

co daje pełny wkład pochodzący od procesów jednomagnonowych w postaci

$$\langle j_1 j_2 | m_{j_1}(\lambda) m_{j_2}(\mu) | 0 \rangle = -p^{N-j_1-1} q^{j_1} r^{N-j_2} s^{j_2-1} - p^{N-j_2+1} q^{j_2-2} r^{N-j_1} s^{j_1-1}. \quad (207)$$

Zauważmy, że rys. 6 dobrze odzwierciedla istotne aspekty rachunku elementów macierzowych. W szczególności, należy pamiętać, że we wzorach (205)-(207) zachodzi $j_1 < j_2$ z uwagi na konwencję związane z mapą Yanga-Baxtera na przestrzeniach konfiguracyjnych, natomiast takiego ograniczenia nie ma we wzorze (203). Z tego powodu, wzory (205)-(207) nie są podatne na transpozycję wskaźników j_1 i j_2 przy ustalonych parametrach spektralnych λ i μ . Wiąże się to też z faktem, że jednomiany jednomagnonowe nie są wzajemnie przemienne ($[m_{j_1}(\lambda), m_{j_2}(\mu)] \neq 0$), chociaż $[B(\lambda), B(\mu)] = 0$. Uwidoczniona jest także rola pośrednich konfiguracji magnetycznych f'' , która determinuje właściwy wybór wartości własnych operatorów wagowych (p, q, r, s) .



Rysunek 6. Graficzny sposób obliczania elementu macierzowego $\langle j_1, j_2 | m_{j_1}(\lambda) m_{j_2}(\mu) | 0 \rangle$

Rysunek 6 dobrze prezentuje strukturę iloczynu tensorowego przestrzeni stanów magnetyka (konfiguracje magnetyczne: początkowa $|f\rangle$, pośrednia $|f''\rangle$ i końcowa $|f'\rangle$), są stanami separowalnymi, a więc iloczynami stanów jednowęzłowych) oraz separowalność każdego jednomianu $m \in M_M$ (jest on przemianym iloczynem jednowęzłowych obiektów Laxa). Zatem w przypadku pojedynczego jednomianu, element macierzowy $\langle f'|m|f\rangle$ faktoryzuje się na czynniki jednowęzłowe

$$\langle f'|m|f\rangle = \prod_{j \in \tilde{N}} \langle f'(j)|x_j|f(j)\rangle. \quad (208)$$

Spostrzeżenie to łatwo jest uogólnić na iloczyny jednomianów. Jak widać z rys. 6, faktoryzacja jednowęzłowa zachodzi dla takich węzłów j , dla których wszystkie obiekty Laxa x_j są operatorami wagowymi. Natomiast w pozostałych przypadkach separacja na ogół nie jest możliwa. W ogólności, czynnikowy element macierzowy obejmuje te wszystkie węzły, które należą do zbioru

$$\bigcup_m \tilde{N}_b(m) \cup \tilde{N}_c(m) \quad (209)$$

i w takich sytuacjach możliwości dalszej faktoryzacji należy rozpatrywać dla każdego przypadku oddzielnie.

Przejdźmy teraz do obliczenia elementu macierzowego operatora $\hat{B}_2(\lambda)\hat{B}_1(\lambda)$, zadanego przez wzór (204), który zgodnie ze wzorem (202) stanowi niezbędne uzupełnienie członu jednomagnonowego (203) w pełnym opisie stanów dwumagnonowych. Opisana powyżej procedura graficzna daje w wyniku

$$\langle j_1 j_2 | \hat{B}_2(\lambda) \hat{B}_1(\mu) | 0 \rangle = \sum_{l=j_1+1}^{j_2-1} i^4 p^{N-j_1-j_2+l-1} q^{j_1+j_2-l-2} r^{N-l} s^{l-1}. \quad (210)$$

Jak widać, procesy tworzenia i niszczenia wirtualnej pseudocząstki Bethego zachodzą wyłącznie na węzłach $l \in \widetilde{N}$, spełniających warunek pośredniczenia

$$j_1 < l < j_2 \quad (211)$$

a więc w obszarze pomiędzy lokalizacjami rzeczywistych pseudocząstek. Ostatecznie na mocy wzorów (202), (207) (210) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 | \lambda \mu \rangle = & \sum_{l=j_1+1}^{j_2-1} i^4 p^{N-j_1-j_2+l-1} q^{j_1+j_2-l-2} r^{N-l} s^{l-1} \\ & - p^{N-j_1-1} q^{j_1} r^{N-j_2} s^{j_2-1} - p^{N-j_2+1} q^{j_2-2} r^{N-j_1} s^{j_1-1}. \end{aligned} \quad (212)$$

Wykazanie separowalności lub splątania strun w obrębie dowolnego ścisłego rozwiązania podstawienia Bethego wymaga znajomości kompletu parametrów spektralnych $\widetilde{\lambda}_{l_i v_i} = \bigcup_m \lambda_{l_i v_i}^m$ oraz ich rozkładu na poszczególne struny.

$$\widetilde{\lambda} = \bigcup_{l_i} \left(\bigcup_{v_i} \widetilde{\lambda}_{l_i v_i} \right) \quad (213)$$

gdzie $\widetilde{\lambda}_{l_i v_i}$ oznacza komplet parametrów niezbędnych do utworzenia v_i -tej l_i -struny. Przy czym na to aby dwie struny w stanie $|\nu \mathcal{L}\rangle$ były separowalne musi zachodzić

$$|\nu \mathcal{L}\rangle = C \left[\left(\widehat{B}(\lambda_{v_i l_i}^1) \dots \widehat{B}(\lambda_{v_i l_i}^{l_i}) \right) |0\rangle \otimes \left(\widehat{B}(\lambda_{v_j l_j}^1) \dots \widehat{B}(\lambda_{v_j l_j}^{l_j}) \right) |0\rangle \right]. \quad (214)$$

Jak łatwo można zauważyć, ze względu na różne wymiary wektorów stojących po obu stronach, powyższy warunek nie może być spełniony w sposób formalny. Jednakże z relacji Yanga-Baxtera ($m < n$ pociąga za sobą $j_m < j_n$) wynika, że baza wektora po prawej stronie ostatniego równania zawiera składowe spoza modelu. Dlatego też zamiast porównywać wprost stan własny z iloczynem tensorowym strun dokonamy odpowiedniej symetryzacji i odrzucenia tzw. "twardego

rdzenia” (elementy zawierające powtórzenia węzłów). Dla przypadku iloczynu dwu jednostrun mamy:

$$|u\rangle = \frac{c}{2} \left[(\hat{B}_1(\lambda)|0\rangle \otimes (\hat{B}(\mu)|0\rangle + (\hat{B}_1(\mu)|0\rangle \otimes (\hat{B}(\lambda)|0\rangle) \right] - \frac{c}{2} \left[(\hat{B}_1(\lambda)|0\rangle \otimes (\hat{B}(\mu)|0\rangle + (\hat{B}_1(\mu)|0\rangle \otimes (\hat{B}(\lambda)|0\rangle) \right]_{h.c.}, \quad (215)$$

gdzie wyraz z indeksem *h.c.* (skrót od hard core) posiada niezerowe składowe wyłącznie dla składowych typu $|j_i j_i\rangle$.

Na podstawie kombinatoryki obiektów Laxa dowolny element macierzowy $\langle j_1 j_2 | u \rangle$ wynosi

$$\langle j_1 j_2 | u \rangle = -p^{N-j_1} q^{j_1-1} r^{N-j_2} s^{j_2-1} - p^{N-j_2} q^{j_2-1} r^{N-j_1} s^{j_1-1}. \quad (216)$$

Porównanie współczynników (212) z (216) wskazuje na brak separowalności stanów zbudowanych z dwu jednostrun. Przedstawienie podobnego rozumowania dla stanów o bardziej rozbudowanych konfiguracjach strunowych wymaga dalszych badań struktury odpowiednich elementów macierzowych a także sprawnych metod uśredniania po podukładzie dla stanów składających się z trzech i więcej strun.

Do liczbowej oceny stopnia splątania pomiędzy dwoma strunami w stanie $|\nu\mathcal{L}\rangle$ proponujemy wprowadzenie wielkości C_s zdefiniowanej jako

$$C_s = 1 - \frac{|\langle u | \nu\mathcal{L} \rangle|}{\langle u | u \rangle \langle \nu\mathcal{L} | \nu\mathcal{L} \rangle}. \quad (217)$$

Jak widać C_s leży w przedziale domkniętym $[0, 1]$, przy czym wartość 0 osiąga dla stanów separowalnych i rośnie monotonicznie w miarę odchylenia wektora $|\nu\mathcal{L}\rangle$ od zsymetryzowanego iloczynu wektorów strun. Mamy świadomość tego, iż zaproponowana miara jest jedynie pierwszym krokiem na drodze do uzyskania uniwersalnej metody obliczania splątań strun. Niemniej jednak mamy nadzieję, że ten pierwszy krok pozwoli na dalszy rozwój metod umożliwiających

pełny opis splątań strun w BA. W tym miejscu twierdzimy, że zaproponowana wielkość pozwoli na analizę splątań dla rozwiązań odpowiadających tablicom kształtu \square .

Rozważmy przypadek pentagonu $N = 5$. Z tablicy w dodatku B wynika, że interesujące nas stany odpowiadają przypadkom $r = 2$, $k = \{0, \pm 1\}$. Wykorzystując odpowiednie parametry spektralne λ z dodatku A generujemy wektory własne jak i odpowiednie wektory iloczynu tensorowego. Przykładowo dla rozwiązania o quasipędzie $k = 0$ mamy wartość $C_s = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.7690598924$ co wskazuje na znaczne splątanie strun. W tym miejscu mamy świadomość, że problem badania splątania strun został jedynie zarysowany i wymaga dalszego znacznie pogłębionego zbadania. Niemniej jednak wydaje się iż narzędzia analizy zaproponowane w niniejszej pracy stanowią obiecującą bazę dalszej eksploracji tego tematu.

ROZDZIAŁ 10

Wnioski i uwagi końcowe

W pracy zajmowaliśmy się analizą zjawiska zwanego splątaniem dla przypadku ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego. Szczegółowa analiza splątania jest dziedziną stosunkowo młodą, zapoczątkowaną na szerszą skalę w latach 80-tych ubiegłego stulecia w związku z tzw. paradoksem EPR oraz z możliwością zastosowania splątania do przetwarzania informacji w układach kwantowych. Sam efekt splątania wiąże się z kwantową możliwością nielokalnego oddziaływania pomiędzy układami kwantowymi. Przy tym sam układ kwantowy definiowany jest przez jego przestrzeń Hilberta, zaś powszechnie stosowanym uproszczeniem jest założenie, że ta przestrzeń ma wymiar skończony. Pojęcie splątania, czy też jego przeciwieństwa czyli separowalności, oparte jest na wyobrażeniach o multiliniowej strukturze przestrzeni stanów kwantowych różnych układów kwantowych, a więc na możliwości faktoryzacji takich przestrzeni. W pracy wykorzystaliśmy model magnetyka Heisenberga dla przypadku jednowymiarowego. Jak wiadomo, jest to model ściśle rozwiązywalny a więc umożliwia on stawianie i rozwiązywanie pytań związanych z informatyką kwantową.

Przedstawię teraz pokrótce najważniejsze wyniki uzyskane w pracy. Takim wynikiem jest przedstawienie w rozdziale trzecim tzw. ożagłowanych konfiguracji strunowych w języku quasipędów. Opisuję tam szczegółowo jak można znanym rozwiązaniom strunowym Bethego przypisać liczby kwantowe mające fizyczny sens quasipędu. Całkowalność BA przejawia się w tym ujęciu po prostu jako zasada zachowania quasipędu w odniesieniu nie tylko do całego rozwiązania, ale też każdej jego struny. W szczególności, przedstawiony obraz wyjaśnia naturę

specyficznego zwyrodnienia zaobserwowanego w heptagonie (łańcuch o długości $N=7$) dla stanów trójmagnonowych w centrum strefy Brillouina.

W rozdziale czwartym skompletowałem wszystkie ściśle rozwiązania BA dla łańcuchów o długości $N=4..7$. Korzystałem przy tym ze źródeł literaturowych, chociaż w części tych wyników ($N=6,7$) mam własny udział jako współautor. Wyniki dotyczące splątania stanów jednowęzłowych przedstawione w rozdziale 5 uzyskałem we współpracy z innymi kolegami, w szczególności z dr J. Milewskim. Posługiwaliśmy się tu standardowymi miarami splątania (negatywnością i współbieżnością). Okazało się że splątanie ścisłych rozwiązań względem tych miar ma charakter raczej sporadyczny niż powszechny.

Za kluczowy element pracy uważam opracowanie kombinatoryki obiektów Laxa przedstawione w rozdziale 8. Pokazałem tam, że ABA jest bardzo dobrym narzędziem do badania splątania dzięki temu, że jego elementarne składniki, tzw. obiekty Laxa, spełniają mocne wymagania separowalności w reprezentacji położeniowej. Dzięki temu możliwe jest śledzenie splątania, szczególnie w kontekście warunków Yanga-Baxtera, przy pomocy przejrzystych metod graficznych. W ogólności, kombinatoryka obiektów Laxa może być mocnym narzędziem pogłębionego badania układów całkowalnych w kontekście informatyki kwantowej, z uwagi na transparentność ścieżek reprezentujących aktywne jednomiany obiektów Laxa.

Tą kombinatorykę obiektów Laxa zastosowałem do przypadku rozwiązań dwumagnonowych. Okazało się, że rozwiązania dwumagnonowe nie są zwykłą kompozycją rozwiązań jednomagnonowych, ale wymagają uzupełnienia w postaci procesów typu wirtualnej anihilacji cząstki Bethego z utworzeniem dwóch innych. Takie procesy mają charakter nielokalny, gdyż anihilacji cząstki w danym węźle towarzyszy kreacja w węzłach odległych. Daje to dokładny wgląd w nieliniowe mechanizmy rozproszeniowe w układzie równań Bethego. W rozdziale 6 w ramach

referatowego opisu ABA przedstawiłem samodzielne wyprowadzenie specyficznych reguł komunikacji związanych z obiektami Laxa, bardziej szczegółowo niż jest to dostępne w literaturze.

Wyniki rozprawy zostały częściowo opublikowane w 4-ech pracach [3, 4, 68, 97].

Publikacja [97] zawiera wstępne wyniki rozważań dotyczących symetrii cząstka-dziura, pokazano ogólną postać operatora w bazie leksycznej i na przykładzie łańcucha składającego się z $N = 4$ węzłów pokazano w jaki sposób można go zapisywać w różnych użytecznych bazach.

Praca [68] stanowi przedłużenie algorytmów RSK i KKR pozwalające w jednoznaczny i prosty sposób wyrazić ożagłowania strun poprzez quasipędy. Wyniki tej pracy stanowiły podstawę do "operacyjnego" zastosowania ABA w problemach separowalności, badanych w niniejszej rozprawie. W szczególności, ważne było powiązanie parametrów spektralnych ABA z odpowiednimi kratkami diagramu Younga ν konfiguracji strunowej.

Ostatnie dwie publikacje traktują o algebraicznych własnościach ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego dla łańcuchów składających się z $N = 6$ i 7-miu węzłów. W szczególności przeanalizowano tam problem skończonych rozszerzeń ciała liczb wymiernych o pierwiastki wyróżników równań kwadratowych (jedynie w tych przypadkach nierozkładalne części wielomianów charakterystycznych hamiltonianu), pierwiastków N -tego stopnia z jedyńki oraz działanie odpowiednich grup Galois na tych rozszerzeniach.

Zdajemy sobie sprawę z tego, że wymienione powyżej wyniki nie wyczerpują, a jedynie rozpoczynają teoretyczną eksploatację metod używanych w pracy, w szczególności kombinatoryki obiektów Laxa. Mamy nadzieję na wykorzystanie ich w najbliższej przyszłości.

Dodatek A. Ścisłe rozwiązania podstawienia Bethego

W tym dodatku zamieszczamy kolekcję wartości własnych E hamiltonianu otrzymanych metodą bezpośredniej diagonalizacji, oraz otrzymane metodą odwrotnego podstawienia Bethego (IBA) odpowiadające im zestawy parametrów λ (dla przypadków $N = 4..6$, $r = 2$). Zauważmy, że najkrótszy z rozważanych łańcuchów posiada stany własne o energiach całkowitoliczbowych.

$N = 4$		
r	k	E
0	0	0
1	± 1	-2
	2	-4
2	0	-6
	2	-2

Tabela 3. Wartości własne energii dla magnetyka o $N = 4$ węzłach.

Energie stanów własnych pentagonu zawierają czynnik $\omega = \exp(2\pi i/5)$ a ściślej $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Zgodnie z pracą [79] rozszerzenie ciała liczb wymiernych \mathbb{Q} o pierwiastki z jedynki ω daje ciało $\mathbb{Q}(\omega)$ takie, że wielomian charakterystyczny operatora \widehat{H} jest rozkładalny nad $\mathbb{Q}(\omega)$.

$N = 5$		
r	k	E
0	0	0
1	± 1	$-3 - (\omega^2 + \bar{\omega}^2)$
2	0	-4
	± 1	$-3 + 2(\omega^2 + \bar{\omega}^2)$
	± 2	$-5 - 2(\omega^2 + \bar{\omega}^2)$

Tabela 4. Wartości własne energii dla magnetyka o $N = 5$ węzłach

W odróżnieniu od pentagonu dla hexagonu oprócz orbit regularnych grupy cyklicznej C_6 występują orbity dwu oraz trzykrotnie rozrzedzone. Zgodnie z przykładem opisanym w rozdziale 4 pociąga to za sobą wystąpienie rozrzedzonych stref Brillouina $B/2$ i $B/3$. Obecność tych rozrzedzonych stref sprawia iż w obrębie ustalonej liczby magnonów różnym quasipędom odpowiada różna liczba stanów własnych (tu 1 lub 2). Jak łatwo można zauważyć w przypadkach z dwoma rozwiązaniami ciało $\mathbb{Q}(\omega)$ jest niewystarczające do rozkładu wielomianu. Bardziej precyzyjnie, przypadki dwumagnonowe $r' = 2$ o quasipędach $k = 0$ i ± 2 wymagają dołączenia $\sqrt{5}$ i $\sqrt{17}$, natomiast stany trójmagnonowe $r' = 3$ na brzegu strefy Brillouina $k = 3$ zawierają część niewymierną ($\sqrt{13}$). Podsumowując, w przeciwieństwie do $N = 5$ dla $N = 6$ zapewnienie rozkładalności wielomianu charakterystycznego wymaga rozszerzenia $\mathbb{Q}(\omega)$ o kolejne pierwiastki. Z tego bogactwa rozszerzeń wynika bardziej skomplikowana struktura sieci rozszerzeń [3].

$N = 6$		
r	k	E
0	0	0
1	± 1	-1
	± 2	-3
	3	-4
2	0	$-5 + \sqrt{5}$
		$-5 - \sqrt{5}$
	± 1	-5
	± 2	$\frac{-7 + \sqrt{17}}{2}$
		$\frac{-7 - \sqrt{17}}{2}$
	3	-2
3	0	-6
	± 1	-4
	3	$-5 + \sqrt{13}$
		$-5 - \sqrt{13}$

Tabela 5. Wartości własne energii dla magnetyka o $N = 6$ węzłach.

Najbogatszym pod względem struktury rozszerzeń ciał wśród rozważanych przypadków jest heptagon $N = 7$. Każda z podprzestrzeni z ustalonym $r', \pm k$ ($r' \in \{2, 3\}$) ma wymiar równy 2 a odpowiednie wielomiany charakterystyczne są nierozkładalne w $\mathbb{Q}(\omega)$ [4]. Stąd każdy quasipęd k w sektorach $r' \in \{2, 3\}$ powoduje konieczność kolejnego rozszerzenia $\mathbb{Q}(\omega)$.

$N = 7$		
r	k	E
0	0	0
1	± 1	$-3 - (\omega^2 - \bar{\omega}^2) - (\omega^3 + \bar{\omega}^3)$
	± 2	$-2 + (\omega^2 - \bar{\omega}^2)$
	± 3	$-2 + (\omega^3 - \bar{\omega}^3)$
2	0	-2
		-6
	± 1	$\frac{-7+2(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{2,1}}}{2}$
		$\frac{-7+2(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{2,1}}}{2}$
	± 2	$\frac{-9-(\omega^3+\bar{\omega}^3)-2(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{2,2}}}{2}$
		$\frac{-9-(\omega^3+\bar{\omega}^3)-2(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{2,2}}}{2}$
	± 3	$\frac{-8-(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{2,3}}}{2}$
		$\frac{-8-(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{2,3}}}{2}$
3	0	-5
		-5
	± 1	$\frac{-10-(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{3,1}}}{2}$
		$\frac{-10-(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{3,1}}}{2}$
	± 2	$\frac{-9+2(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{3,2}}}{2}$
		$\frac{-9+2(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{3,2}}}{2}$
	± 3	$\frac{-11-(\omega^3+\bar{\omega}^3)-(\omega^2+\bar{\omega}^2)+\sqrt{\Delta_{3,2}}}{2}$
		$\frac{-11-(\omega^3+\bar{\omega}^3)-(\omega^2+\bar{\omega}^2)-\sqrt{\Delta_{3,2}}}{2}$

$$\Delta_{2,1} = 11 + (\omega^3 + \bar{\omega}^3) - 2(\omega^2 + \bar{\omega}^2), \quad \Delta_{2,2} = 10 - 3(\omega^3 + \bar{\omega}^3) - (\omega^2 + \bar{\omega}^2),$$

$$\Delta_{2,3} = 13 + 2(\omega^3 + \bar{\omega}^3) + 3(\omega^2 + \bar{\omega}^2),$$

$$\Delta_{3,1} = 29 + 10(\omega^3 + \bar{\omega}^3) + 7(\omega^2 + \bar{\omega}^2), \quad \Delta_{3,2} = 19 - 3(\omega^3 + \bar{\omega}^3) - 10(\omega^2 + \bar{\omega}^2),$$

$$\Delta_{3,3} = 22 - 7(\omega^3 + \bar{\omega}^3) + 3(\omega^2 + \bar{\omega}^2),$$

Tabela 6. Wartości własne energii dla magnetyka o $N = 7$ węzłach.

$$\begin{array}{c}
N = 4 \\
k = 0 \left| \begin{array}{l} \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \\ \end{array} \right. \\
k = 2 \left| \begin{array}{l} \\ \\ \text{nieokreślone} \end{array} \right.
\end{array}$$

Tabela 7. Kolekcja parametrów spektralnych stanów dwumagnonowych dla $N = 4$

$$\begin{array}{c}
N = 5 \\
k = 0 \left| \begin{array}{l} \lambda = \pm \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \right. \\
k = 1 \left| \begin{array}{l} \lambda = \pm \frac{1}{12} (\sqrt{5} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{5}} \right) \\ \\ \end{array} \right. \\
k = 2 \left| \begin{array}{l} \lambda = \pm \frac{1}{12} (\sqrt{5} + 1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}} \pm i\sqrt{-1 + 2\sqrt{5}} \right) \\ \\ \end{array} \right.
\end{array}$$

Tabela 8. Kolekcja parametrów spektralnych stanów dwumagnonowych dla $N = 5$

Metoda bezpośredniej diagonalizacji mimo niewątpliwych zalet nie pozwala niestety na znajdowanie parametrów Bethego. Niemniej jednak znalezione przy jej pomocy wartości energii umożliwiają znalezienie tych wielkości w sektorze dwumagnonowym poprzez zastosowanie zasad zachowania energii i quasipędu (opisana w rozdziale 4 metoda odwrotnego podstawienia Bethego - IBA). Zgodnie z oczekiwaniami najprostszą postać kompletów parametrów λ obserwujemy dla najkrótszych łańcuchów. Przy czym zwiększanie ilości węzłów powoduje nie tyle utrudnienie otrzymania parametrów spektralnych, co raczej doprowadzenia ich do zwartej łańcuchowej do zaprezentowania postaci. Z tego też powodu w tym miejscu ograniczamy się do podania wyników dla łańcuchów o liczbie węzłów $N \in \{4, 5, 6\}$.

$$N = 6$$

$k = 0$	$E(6, 2, 0, +)$	$\lambda = \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(-5+\sqrt{5})}$
$k = 0$	$E(6, 2, 0, -)$	$\lambda = \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2(5+\sqrt{5})}$
$k = 1$		$\lambda = - \pm \frac{\sqrt{3}\mp 3\sqrt{11}}{2(\pm 15+\sqrt{3}\sqrt{11})}$
$k = 2$	$E(6, 2, 2, +)$	$\lambda_1 = \frac{1/2 i \left(-i\sqrt{17}\sqrt{3}-i\sqrt{3}-\sqrt{17}-9+2\sqrt{\sqrt{17}+1}\sqrt{-1+i\sqrt{3}} \right)}{-i\sqrt{17}\sqrt{3}-i\sqrt{3}-\sqrt{17}+7+2\sqrt{\sqrt{17}+1}\sqrt{-1+i\sqrt{3}}}$ $\lambda_2 = \frac{-1/2 i \left(3-5i\sqrt{3}-i\sqrt{17}\sqrt{3}-\sqrt{17}+2\sqrt{\sqrt{17}+1}\sqrt{-1+i\sqrt{3}} \right)}{-5+3i\sqrt{3}-i\sqrt{17}\sqrt{3}-\sqrt{17}+2\sqrt{\sqrt{17}+1}\sqrt{-1+i\sqrt{3}}}$
$k = 2$	$E(6, 2, 2, -)$	$\lambda_1 = \frac{1/2 i \left(i\sqrt{17}\sqrt{3}-i\sqrt{3}+\sqrt{17}-9+2\sqrt{\sqrt{17}-1}\sqrt{1-i\sqrt{3}} \right)}{i\sqrt{17}\sqrt{3}-i\sqrt{3}+\sqrt{17}+7+2\sqrt{\sqrt{17}-1}\sqrt{1-i\sqrt{3}}}$ $\lambda_2 = \frac{-1/2 i \left(3-5i\sqrt{3}+\sqrt{17}+i\sqrt{17}\sqrt{3}+2\sqrt{-1+\sqrt{17}}\sqrt{1-i\sqrt{3}} \right)}{-5+3i\sqrt{3}+\sqrt{17}+i\sqrt{17}\sqrt{3}+2\sqrt{-1+\sqrt{17}}\sqrt{1-i\sqrt{3}}}$
$k = 3$		nieokreślone

Tabela 9. Kolekcja parametrów spektralnych stanów dwumagnonowych dla $N = 6$

Dodatek B. Klasyfikacja ścisłych rozwiązań podstawienia Bethego

Rolą niniejszego dodatku jest ilustracja idei klasyfikacji ścisłych rozwiązań Bethego poprzez ożaglowane konfiguracje strunowe. Korzystając z wyników zawartych w pracy [68] możemy dokonać ożaglowania w języku quasipędów a tym samym przedstawić tę klasyfikację w postaci rozkładu konfiguracji ożaglowanych po strefie Brillouina. Rozważane w niniejszej pracy przypadki $N = 4.7$ są na tyle dalekie od przypadków rozważanych w pracach [27, 30, 33, 17, 20, 103], iż możemy uznać że symetria ścisłych rozwiązań magnetyka Heisenberg jest zgodna z tą wykazywaną przez hipotezę strun. W przypadku najkrótszego z rozpatrywanych łańcuchów w sektorze

k	-1	0	1	2
r'				
0		\emptyset		
1	-1		1	2
2		2		
		2		
				2
				2

Tabela 10. Rozkład stanów najwyższej wagi po strefie Brillouina dla łańcucha z $N = 4$ węzłami

jednomagnonowym mamy zaledwie dwa rozwiązania przy czym stan rozproszeniowy lokuje się w centrum a stan związany na brzegu strefy Brillouina.

k	-2	-1	0	1	2
r'					
0	\emptyset				
1	-2	-1		1	2
2	-2				2
		2	2	-2	
		2	-2	-2	

Tabela 11. Rozkład stanów najwyższej wagi po strefie Brillouina dla łańcucha z $N = 5$ węzłami

Sektor dwumagnonowy dla pentagonu zawiera po jednym rozwiązaniu dla każdego z quasipędów przy czym quasipędom $k \in \{0, \pm 1\}$ odpowiadają stany rozproszeniowe zaś dla $k = \pm 2$ mamy stany związane.

Hexagon jest pierwszym z przypadków w którym pojawiają się stany trójmagnonowe przy czym stan związany i rozproszeniowy są zlokalizowane na brzegu strefy Brillouina. Quasipędom $k = \pm 2$ nie odpowiadają żadne stany trójmagnonowe zaś dla $k \in \{0, \pm 1\}$ obserwujemy stany o symetrii mieszanej. Analogicznie dla sektora dwumagnonowego mamy w centrum strefy Brillouina dwa stany rozproszeniowe, po jednym dla $k = \pm 1$. Quasipędom $k = \pm 2$ odpowiada po jednym stanie związanym i rozproszeniowym zaś na brzegu strefy lokuje się tylko jeden stan rozproszeniowy.

Jak już zaznaczono w rozdziale 4 niewątpliwie z najciekawszą sytuacją mamy do czynienia w centrum strefy Brillouina dla sektora trójmagnonowego w heptagonie. Mamy tam dwa stany o takich samych ożagłowaniach a rozróżnialnych długością strun. Mamy tu do czynienia z

k	-2	-1	0	1	2	3
r'						
0			\emptyset			
1	$\boxed{-2}$	$\boxed{-1}$		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$
2	$\boxed{-2} \mid \square$				$\boxed{2} \mid \square$	$\boxed{3} \mid \square$
	$\boxed{2}$ $\boxed{2}$	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$	$\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-2}$	$\boxed{3}$ $\boxed{-2}$	$\boxed{-2}$ $\boxed{-2}$	
3						$\boxed{3} \mid \square \mid \square$
		$\boxed{3} \mid \square$ $\boxed{2}$	$\boxed{3} \mid \square$ $\boxed{3}$	$\boxed{3} \mid \square$ $\boxed{-2}$		$\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$

Tabela 12. Rozkład stanów najwyższej wagi po strefie Brillouina dla łańcucha z $N = 6$ węzłami

degeneracją, energia każdego z tych stanów wynosi $E = -5$ i jest to jedyne miejsce spośród rozważanych w którym metoda bezpośrednia diagonalizacja nie pozwala na otrzymanie wektorów własnych i co za tym idzie macierzy gęstości. Dla tego przypadku aby otrzymać pożądane macierze gęstości należy wyznaczyć zestawy parametrów spektralnych λ a następnie skonstruować odpowiednie wektory własne przy użyciu aparatu opisanego w rozdziałach 6 i 7 poświęconych Algebraicznemu podstawieniu Bethego (ABA).

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
r'							
0				\emptyset			
1	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$
2	$\begin{array}{ c c } \hline -3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline -2 & \\ \hline \end{array}$				$\begin{array}{ c c } \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline \end{array}$
	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline -3 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline -2 \\ \hline 3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline -2 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -2 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array}$
3	$\begin{array}{ c c c } \hline -3 & & \\ \hline \end{array}$						$\begin{array}{ c c c } \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$
		$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline 3 \\ \hline -3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline -2 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline -3 & \\ \hline -2 \\ \hline \end{array}$	
	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$				$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}$

Tabela 13. Rozkład stanów najwyższej wagi po strefie Brillouina dla łańcucha z $N = 7$ węzłami

Dodatek C. Tabele splątania

W niniejszym dodatku przedstawiamy kolekcję tabel zawierających wyniki miar splątania (współbieżność - concurrence i negatywność - negativity) węzłów dla rozważanych długości łańcuchów i różnych możliwych typów sąsiedztwa. Warto zauważyć, że dla przypadku $N = 4$

Splątanie najbliższych sąsiadów dla $N = 4$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{4,1,\pm 1}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,1,2}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,1,0,g}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{4,2,2,g}$	0.5	1
$E_{4,2,2}$	0	0
$E_{4,2,0,g}$	0.1666666667	0.3333333333
$E_{4,2,0}$	0	0

Tabela 14. Zestawienie splątania najbliższych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 4$ węzłów

pierwszy potomek stanu jednomagnonowego o quasipędzie $k = 2$ osiąga maksymalną możliwą wartość współbieżności (concurrence).

Splątanie węzłów odległych dla $N = 4$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{4,1,\pm 1}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,1,2}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,1,0,g}$	0.1035533905	0.5
$E_{4,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{4,2,2,g}$	0	0
$E_{4,2,2}$	0	0
$E_{4,2,0,g}$	0.1666666666667	0.3333333333333
$E_{4,2,0}$	0.25	0.5

Tabela 15. Zestawienie splątań dalszych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 4$ węzłów

Dla pentagonu obserwujemy zmniejszenie się wyników miar splątania dla stanów w sektorze jednomagnonowym, jest to tendencja którą łatwo można zaobserwować również dla kolejnych łańcuchów. Inną ciekawą korelacją między quasipędem stanu a sąsiedztwem węzłów dla stanów najwyższej wagi z sektora dwumagnonowego ($E(5, 2, \pm 1)$ i $E(5, 2, \pm 2)$). Niestety dla wyższych wartości N nie jesteśmy w stanie zaobserwować tego typu prostych zależności, a wraz ze wzrostem długości łańcucha splątanie między-węzłowe staje się coraz rzadsze. Jest wielce prawdopodobne, że nowe światło na korelacje między węzłami może rzucić analiza ich ścisłych wartości która zostanie podjęta w toku dalszych badań.

Splątanie najbliższych sąsiadów dla $N = 5$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{5,1,\pm 1}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,1,\pm 2}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,1,0,g}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{5,2,\pm 1}$	0.1982380546	0.4641949229
$E_{5,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{5,2,\pm 2}$	0	0
$E_{5,2,0,g}$	0.1162277660	0.2535898384
$E_{5,2,0}$	0	0

Tabela 16. Zestawienie splątań najbliższych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 5$ węzłów

Splątanie węzłów odległych dla $N = 5$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{5,1,\pm 1}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,1,\pm 2}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,1,0}$	0.0605551275	0.4
$E_{5,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{5,2,\pm 1}$	0	0
$E_{5,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{5,2,\pm 2}$	0.1982380546	0.4641949229
$E_{5,2,0,g}$	0.1162277660	0.2535898384
$E_{5,2,0}$	0	0

Tabela 17. Zestawienie splątań dalszych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 5$ węzłów

Splątanie najbliższych sąsiadów dla $N = 6$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{6,1,\pm 1}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,\pm 2}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,3}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,0}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 1}$	0.0121459426	0.0386751347
$E_{6,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,+}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,-}$	0.1472052278	0.4511535397
$E_{6,2,3,g}$	0	0
$E_{6,2,3,}$	0	0
$E_{6,2,0,g}$	0.0811327044	0.2067347009
$E_{6,2,0,+}$	0	0
$E_{6,2,0,-}$	0.1485189540	0.4320510021
$E_{6,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,+g}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,-g}$	0	0
$E_{6,3,3,gg}$	0	0
$E_{6,3,3,g}$	0	0
$E_{6,3,3,+}$	0	0
$E_{6,3,3,-}$	0.2171292729	0.4342585460
$E_{6,3,0,ggg}$	0.1	0.2
$E_{6,3,0,+g}$	0	0
$E_{6,3,0,-g}$	0.1030056648	0.2060113293
$E_{6,3,0,}$	0	0

Tabela 18. Zestawienie splątań najbliższych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 6$ węzłów

Splątanie dalszych sąsiadów dla $N = 6$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{6,1,\pm 1}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,\pm 2}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,3}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,0}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 1}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,+}$	0.1039725975	0.2827894191
$E_{6,2,\pm 2,-}$	0	0
$E_{6,2,3,g}$	0.0690355937	0.3333333333
$E_{6,2,3,}$	0	0
$E_{6,2,0,g}$	0.0811327044	0.2067347009
$E_{6,2,0,+}$	0.0235125205	0.09871766877
$E_{6,2,0,-}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,+g}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,-g}$	0	0
$E_{6,3,3,gg}$	0	0
$E_{6,3,3,g}$	0	0
$E_{6,3,3,+}$	0	0
$E_{6,3,3,-}$	0	0
$E_{6,3,0,ggg}$	0.1	0.2
$E_{6,3,0,+g}$	0	0
$E_{6,3,0,-g}$	0	0
$E_{6,3,0,}$	0	0

Tabela 19. Zestawienie splątań drugich sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 6$ węzłów

Splątanie węzłów odległych dla $N = 6$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{6,1,\pm 1}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,\pm 2}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,3}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,1,0}$	0.0393446629	0.3333333333
$E_{6,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 1}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{6,2,\pm 2,+}$	0.1238868562	0.3506731113
$E_{6,2,\pm 2,-}$	0	0
$E_{6,2,3,g}$	0	0
$E_{6,2,3,}$	0	0
$E_{6,2,0,g}$	0.0811327044	0.2067347009
$E_{6,2,0,+}$	0	0
$E_{6,2,0,-}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,g}$	0	0
$E_{6,3,\pm 1,}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{6,3,\pm 2,+g}$	0.0758689584	0.1517379169
$E_{6,3,\pm 2,-g}$	0	0
$E_{6,3,3,gg}$	0	0
$E_{6,3,3,g}$	0	0
$E_{6,3,3,+}$	0.3515667321	0.7031334640
$E_{6,3,3,-}$	0	0
$E_{6,3,0,ggg}$	0.1	0.2
$E_{6,3,0,+g}$	0.0333333333	0.0666666664
$E_{6,3,0,-g}$	0.0333333333	0.0666666664
$E_{6,3,0,}$	0	0

Tabela 20. Zestawienie splątań trzecich sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 6$ węzłów

Splątanie najbliższych sąsiadów dla $N = 7$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{7,1,\pm 1}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 2}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 3}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,0}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,-}$	0.1116063945	0.4054465426
$E_{7,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,+}$	0.0352538192	0.1455521891
$E_{7,2,\pm 2,-}$	0	0
$E_{7,2,\pm 3,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 3,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 3,-}$	0.1085975170	0.4417274047
$E_{7,2,0,g}$	0.05822291440	0.1750211752
$E_{7,2,0,-2}$	0.0333751012	0.1257667170
$E_{7,2,0,-6}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,-g}$	0.0331353180	0.0815088680
$E_{7,3,\pm 1,+0}$	0	
$E_{7,3,\pm 1,-}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,+}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,-}$	0.1954608657	0.4244933622
$E_{7,3,\pm 3,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,-}$	0.0265422715	0.0579282585
$E_{7,3,0,gg}$	0.0802218304	0.1673675536
$E_{7,3,0,+g}$	0	0
$E_{7,3,0,-g}$	0	0
$E_{7,3,0,-5}$		
$E_{7,3,0,-5}$		

Tabela 21. Zestawienie splątań dla najbliższych sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 7$ węzłów

Splątanie dalszych sąsiadów dla $N = 7$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{7,1,\pm 1}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 2}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 3}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,0}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,-}$	0.0195506738	0.06388048294
$E_{7,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,-}$	0.0615112523	0.1929843804
$E_{7,2,\pm 3,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 3,+}$	0.0374155581	0.1812541978
$E_{7,2,\pm 3,-}$	0.0055769024	0.01961345166
$E_{7,2,0,g}$	0.0584196202	0.1750211752
$E_{7,2,0,-2}$	0	0
$E_{7,2,0,-6}$	0.01159126140	0.1428571428
$E_{7,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,+}$	0.0094860750	0.0207738646
$E_{7,3,\pm 1,-}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,+}$	0.0015761960	0.0034528133
$E_{7,3,\pm 2,-}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,-}$	0	0
$E_{7,3,0,gg}$	0.0802218304	0.1673675536
$E_{7,3,0,+g}$	0	0
$E_{7,3,0,-g}$	0	0
$E_{7,3,0,-5}$		
$E_{7,3,0,-5}$		

Tabela 22. Zestawienie splątań dla drugich sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 7$ węzłów

Splątanie węzłów odległych dla $N = 7$

E	\mathcal{N}	\mathcal{C}
$E_{7,1,\pm 1}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 2}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,\pm 3}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,1,0}$	0.0275117720	0.2857142857
$E_{7,2,\pm 1,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 1,-}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,+}$	0	0
$E_{7,2,\pm 2,-}$	0.0810472950	0.2671676189
$E_{7,2,\pm 3,g}$	0	0
$E_{7,2,\pm 3,+}$	0.0040403397	0.06707959510
$E_{7,2,\pm 3,-}$	0	0
$E_{7,2,0,g}$	0.0584196202	.1750211752
$E_{7,2,0,-2}$	0	0
$E_{7,2,0,-6}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,+}$	0	0
$E_{7,3,\pm 1,-}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,-g}$	0.0051983941	0.0132305644
$E_{7,3,\pm 2,+}$	0	0
$E_{7,3,\pm 2,-}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,gg}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,-g}$	0	0
$E_{7,3,\pm 3,+}$	0.1636459802	0.3553377983
$E_{7,3,\pm 3,-}$	0	0
$E_{7,3,0,gg}$	0.0802218304	0.1673675536
$E_{7,3,0,+g}$	0	0
$E_{7,3,0,-g}$	0	0
$E_{7,3,0,-5}$		
$E_{7,3,0,-5}$		

Tabela 23. Zestawienie splątań trzech sąsiadów dla łańcucha składającego się z $N = 7$ węzłów

Bibliografia

- [1] Bacon D., Chuang I. L., Harrow A. W., Phys. Rev. Lett. **97** (2006)17502.
- [2] Bacon D., Chuang I. L., Harrow A. W., quant-ph/0601001.
- [3] Banaszak G., Barańczuk S., Lulek T., Milewski J., Stagraczyński R., Galois properties of the eigenproblem of a hexagonal magnetic Heisenberg ring, Acta Physica Polonica A, **121**, 1111(2012).
- [4] Banaszak G., Milewski J., Lulek T., Labuz M., Stagraczyński R., Galois actions on the eigenproblem of the Heisenberg heptagon, OSID, **19**, p1250012(2012).
- [5] Baxter R., Ann. Phys. N.Y., **70**, 193(1972).
- [6] Baxter R., "Exactly solvable models in Statistical Mechanics", Academic Press, New York (1982).
- [7] Baxter R., J. Statist. Phys. **108** 1(2002).
- [8] Bell J.S., "Sparkable and unsparkable in quantum mechanics", Cambridge University Press, Cambridge(1987).
- [9] Bethe H., *Z. Physik* **71**, 205(1931) (in German; English translation in: D.C.Mattis, The Many-Body Problem, World Sci., Singapore, 689(1993)).
- [10] Biedenharn L. C., Giovannini C.A., Louck J. D., J. Math. Phys. **4**, 439(1963).
- [11] Biedenharn L. C., Giovannini C.A., Louck J. D., J. Math. Phys. **8**, 691(1967).
- [12] Biedenharn L. C., Louck J. D., Commun. Math. Phys. **8**, 89-131(1968).
- [13] Born M., Jordan P., Zur Quantenmechanik, Zeitschrift für Physik, **34**, 858–888 (1925). English translation in: B. L. van der Waerden, editor, Sources of Quantum Mechanics (Dover Publications, 1968, English title: On Quantum Mechanics).
- [14] Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zur Quantenmechanik II, Zeitschrift für Physik, **35**, 557–615 (1925). English translation in: B. L. van der Waerden, editor, Sources of Quantum Mechanics (Dover Publications, 1968)

- [15] Caspers W.J., "Theory of spin relaxation", Willey-Interscience, New York (1964).
- [16] Caspers W.J., "Spin systems", World Sci., Singapore (1989).
- [17] Caspers W.J., Labuz M., Wal A., Kuzma M., Lulek., "From asymptotic to finite Heisenberg chain - the evolution of Bethe solutions", Journal of Physics A: Mathematical and General **36**, 5369(2003).
- [18] Caspers W. J., Wal A., Labuz M., Kuzma M., Lulek T., "Continuity of Bethe solutions with respect to chain length N and winding numbers $\{\lambda_l\}$ ", **45**, 391-399(2004).
- [19] Caspers W. J., Labuz M., Wal A., "On the completeness of set of Bethe-Hulthen solutions of the linear Heisenberg system", Journal of Physics: Conference Series **30**, 73-85(2006).
- [20] Caspers W.J., Lulek T., Lulek B., Kuzma M., Wal A., in: T. Lulek, B. Lulek, A. Wal(Eds.), Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter, World Scientific, Singapore, 2002,p.224.
- [21] Coulemans A., Cojocaru S.P., Chibotaru L.F., Eur. Phys. J., **B 21**, 511(2001)
- [22] Chruściński D.,J. Phys.: Conf. Ser. textbf213 012003(2010).
- [23] Dasmahapatra S., Foda O., Int. J. Mod. Phys. **38**, 1041(1997).
- [24] Dasmahapatra S., Foda O., Int. J. Mod. Phys. **13**, 501(1998).
- [25] Dirac P. A. M., Principles of Quantum Mechanics 4th ed. revised, Oxford University Press 1967.
- [26] Einstein A., Podolsky B., and Rosen N., Phys. Rev. **47**: p.777(1935).
- [27] Essler F.H.L., Korepin V.E., and Schoutens K., J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 4115(1992).
- [28] Faddeev L.D., J. Sov. Math. **24**, 241-67(1984).
- [29] Faddeev L.D., arXiv:hep-th/9605187v1.
- [30] Fujita T., Kobayashi T., Takahashi H., J. Phys. A: Math. Gen. **36** 1553(2003).
- [31] Gaudin M., La fonction d'onde de Bethe, Masson, Paris 1983.
- [32] Gelfand I.M., Wykłady z algebry liniowej, PWN Warszawa 1977.
- [33] Hagemans R., Caux J.-S., J. Phys. A: Math. Theor. **40** 14605(2007).
- [34] Halverson T., Ram A.,European J. Combin. **26**(2005)869.
- [35] Halverson T., Massocco M., Ram A., Commuting families in Heckeand Temperley–Lieb algebras, Preprint, 2007.

- [36] Heisenberg W., Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Zeitschrift für Physik, **33**, 879–893 (1925). English translation in: B. L. van der Waerden, editor, Sources of Quantum Mechanics (Dover Publications, 1968, English title: Quantum-Theoretical Re-interpretation of Kinematic and Mechanical Relations).
- [37] Heisenberg W., Eckart C., (translator), Hoyt F.C. (translator), The Physical Principles of the Quantum Theory (Dover, 1930).
- [38] Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R., Phys. Lett. A **223** pp.1-8(1996).
- [39] Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki K., Rev. Mod. Phys. **81**, 865–942 (2009), arXiv:quant-ph/0702225v2.
- [40] Hulthén L., Arkiv. Nat. Astron. Fys. **26A**,1-106(1938).
- [41] Jakubczyk D., Lulek T., Jakubczyk P., Lulek B., J. Phys.: Conf. Ser. **30** 188-196(2006)
- [42] Jakubczyk P., Topolewicz S., Wal A., Lulek T., OSID **16** 221(2009).
- [43] Jakubczyk P., Lulek T., Jakubczyk D., Lulek B., J. Phys. Conference Ser.**30**(2006) 203.
- [44] Jakubczyk P., Lulek T., Jakubczyk D., Lulek B., J. Phys. Conference Ser.**30**(2006) 188.
- [45] Jamiołkowski D., Chruściński A., "Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics", Birkhauser, Berlin 2004.
- [46] Jamiołkowski A., Rep. Math. Phys. **3**, 275(1972).
- [47] Jones V.F.R., Ann. Math. **126** (1987)335.
- [48] Jucys A.A.,Lietuvos Fizikos Rinkinys **6**, 163(1966).
- [49] Jucys A.A.,Lietuvos Fizikos Rinkinys **11**, 5(1971).
- [50] Karbach M., Müller G., Comp. in Phys. **11**, 36(1997).
- [51] Karbach M., Hu K., Müller G., Comp. in Phys. **12**, 565(1998).
- [52] Karbach M., Hu K., Müller G., cond-mat/0008018v1 (2000).
- [53] Kerber A., "Algebraic Combinatorics via Finite Group Actions", Wissenschaftsverlag, Mannheim (1991).
- [54] Knuth D., Pacific J. Math. **34**, 709(1970).

- [55] Kerov S.V., Kirillov A.N., Reshetikhin N.Yu. , *LOMI* **155**, 50(1986) (in Russian; English translation: *J. Sov. Math.* **41**, 916(1988)).
- [56] Kirillov A.N., Schilling A., Shimozono M., *Selecta Mathematica*, N.S., **8**, 67(2002).
- [57] Komorowski J., *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, PWN Warszawa 1978.
- [58] Kostirkin A.I., *Wstęp do algebry*, PWN Warszawa 2004.
- [59] Kostka C., *Crelle's Journal*, **93**, 89(1882).
- [60] Langlands R.P., Saint-Aubin Y., in *Strings and Symmetries*, G. Aktas, C. Saçlıoglu, M. Serdaroglu (Eds), *Lecture Notes in Physics*, **447**, Springer Berlin/Heilderberg, 40-53(1995)
- [61] Lascoux A., in: T.Lulek, B.Lulek, A.Wal(Eds.), *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, World Scientific, Singapore ,p.94(2000).
- [62] Lascoux A.,Leclerc B.,Thibon J.-Y.,*J.Math.Phys.***38** 1041(1997).
- [63] Littlewood D.E., "The theory of group characters", Clarendon Press, Oxford (1950).
- [64] Louck J. D., *Unitary Symmetry and Combinatorics*, World Scientific Publishing Singapore 2008.
- [65] Louck J.D., in: T.Lulek, W.Florek, B.Lulek(Eds.), *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 1997, p.231.
- [66] Louck J.D., in: T. Lulek, B. Lulek, A. Wal(Eds.),*Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 2002, p.23.
- [67] Lubarski G. L., *Teoria grup i jej zastosowania w fizyce*, PWN Warszawa 1961.
- [68] Lulek B., Lulek T., Labuz M., Stagracyński R., *Physica B: Condensed Matter*, **405**, Issue 12, 2654-2658(2010).
- [69] Lulek B., Lulek T., Jakubczyk P., Jakubczyk D.,*Physica B* **382**,162–180(2006).
- [70] Lulek B., Lulek T., Jakubczyk P., Jakubczyk D.,*Physica B* **404**,115–121(2009).
- [71] Lulek B., Lulek T., Milewski J., *Acta Phys. Pol. A* **115** 159(2009)
- [72] Lulek B., Jakubczyk D., Jakubczyk P., *Molecular Phys.* **102**(2004)1269.
- [73] Lulek T., *Banach Center Publ.* **78** 231(2007).

- [74] Lulek T., Lulek B., Jakubczyk P., Jakubczyk D., J. Phys.: Conf. Ser. **30** 209(2006).
- [75] Lulek T., Jakubczyk P., Jakubczyk D., Molecular Phys. **102**(2004)1279.
- [76] Lulek T., in: T. Lulek, B. Lulek, A. Wal(Eds.),Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter, World Scientific, Singapore,2002,p.279.
- [77] Lulek T., Lulek B., Jakubczyk P., Jakubczyk D., J. Phys. Conference Ser.**30**(2006) 209.
- [78] Lulek T. and Topolewicz S., J. Phys. A: Math. Theor. **43** 495201(2010).
- [79] Milewski J., Banaszak G., Lulek T., Łabuz M., Physica B **406** 3, (520-526)2011.
- [80] Milewski J.,Lulek B., Lulek T., Phys. Stat. Sol. B **244**(7) 2497(2007).
- [81] Milewski J., Ambrożko E., J. Phys. Conf. Ser. **104** 012040(2008).
- [82] Murphy G.E., J. Algebra, **69**, 287(1981).
- [83] Murphy G.E., J. Algebra **81** (1983)258.
- [84] Nielsen M.A., Chuang I.L., Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge(2000).
- [85] Neumann John von, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press 1955
- [86] Okounkov A. and Vershik A., Selecta Mathematica, **2**, 581(1996).
- [87] Orbach R., Phys. Rev. **112**, 309-16(1958)
- [88] Peres A., Phys. Rev. Lett. **77**,1413(1996).
- [89] Ram A., Invent. Math. **106** (1991)461.
- [90] Robinson G., Amer. J. Math. **60**, 745(1938).
- [91] Schensted G., Canad. J. Math. **13**, 179(1961).
- [92] Schrödinger E; Born, M., "Discussion of probability relations between separated systems". Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31** (4): 555–563(1935).
- [93] Schrödinger E; Dirac, P. A. M., "Probability relations between separated systems". Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **32** (3): 446–452(1936).
- [94] Schrödinger E., "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", Naturwissenschaften **23**: pp.807-812; 823-828; 844-849(1935).

- [95] Schur I. *Angew. J. R. Math* **139** 155(1911).
- [96] Schwinger J., *Quantum Kinematics and Dynamics*, Benjamin, New York, 1979.
- [97] Stagraczynski R., Lulek T., *J. Phys.: Conf. Ser.* **213** 012008(2010).
- [98] Sutherland R., *Beautiful Models 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*, World Scientific Publishing Singapore 2004
- [99] Takahashi M., *Prog. Theor. Phys., Kyoto*, **46**, 401(1971).
- [100] Takhtajan L.A., Faddeev L.D., *LOMI* **109**,134 (1981)(in Russian, English translation: *J. Sov. Math.* **24**, 241(1984)).
- [101] Takhtajan L.A., *Phys. Lett.* **87A**, 478(1982).
- [102] Tong D.-M., Zhu C.-J., Ma Z.-Q., *J. Math. Phys.* **33** (1992)2660.
- [103] Vladimirov A. A., *Phys. Lett.* **105A** 418(1984).
- [104] Vidal G., Werner R.F., *Phys. Rev. A* **65**, 032314(2002), quant-ph/0102117.
- [105] Vourdas A., in *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, Lulek T., Lulek B. and Wal A. (eds.), World Sci. Singapore, **6** 55(2003).
- [106] Vourdas A., *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** R285(2007).
- [107] Wal A., Lulek T., Lulek B., Kozak E., *International Journal of Modern Physics B*, Volume 13, Issue 28, pp. 3307-3321(1999).
- [108] Warnaar S. O., *J. Stat. Phys.* **82**, 657(1996).
- [109] Wenzl H., *Invent. Math.* **92**(1988)349.
- [110] Werner R.F., *Phys. Rev. A* **40**, 4277–4281 (1989).
- [111] Weyl H., *Gruppentheorie und Quantummechanik*, Leipzig, Hirzel, (1931).
- [112] Wigner E.P., *Group theory*, New York, Academic Press, (1959).
- [113] Wybourne B.G., *Classical groups for Physicists*, New York: J. Wiley and Sons, (1974).
- [114] Wybourne B.G., in *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, Lulek T., Florek W. and Wal A. (eds.), World Sci. Singapore, 56(1995).

- [115] Wybourne B.G., in *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, Lulek T., Lulek B. and Wal A. (eds.), World Sci. Singapore, 135(2001).
- [116] Wybourne B.G., *Spectroscopic Properties of the Rare Earths*, Wiley, New York, 1965.
- [117] Wooters W.K., arXiv:quant-ph/0001114v2
- [118] Wooters W.K., arXiv:quant-ph/0009041v3
- [119] Wooters W.K., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022–5025 (1997).
- [120] Wooters W.K., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245–2248 (1998).
- [121] Yang C.N., Yang C.P., *Phys. Rev.* **150**, 327 (1966).
- [122] Yang C.N., *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1312 (1967).
- [123] Zhu C.-J., Chen J.-Q., *J. Math. Phys.* **24** (1983) 2266.
- [124] Życzkowski K., Horodecki P., Sanpera A., and Lewenstein M., *Phys. Rev. A* **58**, 883(1998), quant-ph/9804024