

Stochastyczne metody
matematyki finansowej
w zadaniach

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Jolanta Grala-Michalak

Stochastyczne metody matematyki finansowej w zadaniach



POZNAŃ 2016

Recenzent: prof. dr hab. Antoni Leon Dawidowicz

© Jolanta Grala-Michalak 2014
This edition © Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,
Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2014

Redaktor: Katarzyna Muzia
Redaktor techniczny: Dorota Borowiak
Łamanie komputerowe: Eugeniusz Strykowski
Projekt okładki: K.&S. Szurpit

ISBN 978-83-232-2793-9

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
UL. FREDRY 10, 61-701 POZNAŃ

www.press.amu.edu.pl

Sekretariat: tel. 61 829 46 46, faks 61 829 46 47, e-mail: wydnauk@amu.edu.pl

Dział sprzedaży: tel. 61 829 46 40, e-mail: press@amu.edu.pl

Wydanie II poprawione. Ark. wyd. 9,00. Ark. druk. 9,125.

DRUK I OPRAWA: EXPOL, WŁOCLAWEK, UL. BRZESKA 4

Spis treści

Wprowadzenie	7
1. Wstęp	9
1.1. Początki stochastycznych modeli matematyki finansowej	9
1.2. Podział modeli matematyki finansowej	11
2. Rynek finansowy	14
2.1. Podział rynku finansowego	14
2.2. Charakterystyka danych na rynku finansowym	16
Zadania do rozdziału 2	21
3. Kapitalizacja, oprocentowanie i dyskontowanie	23
3.1. Zmienność pieniądza w czasie	23
3.2. Oprocentowanie i dyskontowanie	26
3.3. Zmienny strumień przepływu kapitału	29
3.4. Zasada stałej efektywności kapitalizacji oraz stałego przyrostu w kapitalizacji ..	32
3.5. Od modelu ciągłego do dyskretnego	35
3.6. Ocena inwestycji	37
3.7. Wycena obligacji	42
Zadania do rozdziału 3	45
4. Modele z losową stopą zwrotu	49
4.1. Kapitalizacja spełniająca zasadę stałej efektywności	49
4.2. Kapitalizacje o stałym przyroście	60
4.3. Kapitalizacje z zależnymi stopami zwrotu	62
Zadania do rozdziału 4	69
5. Analiza portfelowa	73
5.1. Miary dochodu, ryzyka i związku liniowego	73
5.2. Średnia i wariancja portfela	76
5.3. Portfele optymalne	82
5.4. Model CAPM	88
Zadania do rozdziału 5	95
6. Wycena w modelach dyskretnych	101
6.1. Własności błędzenia losowego	101
6.2. Podstawowe informacje o opcjach	109

6.3. Model CRR	113
6.4. Martyngały dyskretne	120
6.5. Łańcuchy Markowa	123
Zadania do rozdziału 6	126
7. Wycena w modelach ciągłych	132
7.1. Proces Wienera	132
7.2. Całka Itô	133
7.3. Model BS	135
7.4. Parametry „greckie”	139
Zadania do rozdziału 7	142
Bibliografia	144

Wprowadzenie

Niniejszy podręcznik jest adresowany do studentów nauk ścisłych, przede wszystkim studiujących na kierunku matematyka, oraz do osób przygotowujących się do egzaminu dla aktuariuszy. Zawiera przegląd najczęściej stosowanych modeli matematyki finansowej, w których używa się zmiennych bądź procesów losowych. Oczywiście w siedmiu rozdziałach nie można przedstawić całego bogactwa i różnorodności tych zagadnień, toteż zachęcam do sięgnięcia po literaturę fachową, której spis zamieszczam na końcu.

W celu zrozumienia treści książki czytelnik powinien znać rachunek różniczkowy funkcji jednej i dwóch zmiennych, podstawy algebry liniowej, metod rozwiązywania równań różniczkowych, statystyki, a przede wszystkim podstawy rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych.

Pierwszy rozdział poświęcony jest krótkiemu opisowi rozwoju matematyki finansowej, aby czytelnik poszukujący dalszych informacji wiedział, pod jakimi hasłami ich szukać. Kolejny rozdział jest wprowadzeniem do zagadnień opisanych w publikacji. W rozdziale trzecim można zapoznać się z podstawowymi własnościami modeli deterministycznych matematyki finansowej. Następne rozdziały poświęcone są modelom losowym, czyli stochastycznym; w rozdziale czwartym modele te dotyczą przewidywania wartości lokat, w piątym – analizy portfeli. Rozdział szósty zawiera opis metod stosowanych przy dyskretnym modelu czasu, a siódmy przy ciągłym modelu. Każdy rozdział, poczynając od drugiego, a skończywszy na siódmym, składa się z dwóch części. Pierwszą z nich stanowi skrócony opis teorii i jej zastosowanie do zadań podanych w formie rozwiązanych przykładów opatrzonych komentarzami. Część drugą tworzą zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Zamieszczone w niej odpowiedzi i wskazówki do zadań mogą służyć do sprawdzenia poprawności rozwiązań. W celu ułatwienia odszukiwania potrzebnej teorii kolejność zadań odpowiada kolejności omawianych w rozdziale zagadnień.

Zadania i przykłady ilustrujące teorię zostały wybrane nieprzypadkowo. Większość z nich stanowią zadania z egzaminu dla aktuariuszy z lat 2000–2013 z działu matematyka finansowa. Oprócz wspomnianego działu egzamin obejmuje także zadania z matematyki ubezpieczeń życiowych i ubezpieczeń majątkowych, nieobjętych treścią niniejszego skryptu, oraz ze statystyki. Zadania z egzaminu dla aktuariuszy są oznaczone literą E, po której zamieszczona jest data egzaminu. Książka ta może być cennym zbiorem zadań dla osób przygoto-

wujących się do wspomnianego egzaminu. Tym osobom gorąco polecam publikację prof. dr. hab. Waldemara Wołyńskiego pt. *Prawdopodobieństwo i statystyka. Zadania z egzaminów dla aktuariuszy z rozwiązaniami (2003–2007)*, wydaną w roku 2008 w Poznaniu przez Wydawnictwo Naukowe UAM. Stanowi ona dodatkową pomoc w nauce statystyki nie tylko dla przyszłych aktuariuszy.

Moje zainteresowania matematyką finansową rozpoczęły się w 2000 roku, gdy powierzono mi prowadzenie ćwiczeń z tego przedmiotu. W 2001 roku brałam udział w Szkole z Matematyki Finansowej (Ośrodek Konferencyjny PAN w Będlewie, 2–10.07).

Książka ta nie powstałaby, gdybym nie uczestniczyła, w latach 2000–2005, w wykładach prof. dr. hab. Dobiesława Bobrowskiego, który zapoczątkował tę tematykę na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM.

Życzę przyjemnego studiowania
Jolanta Grala-Michalak

1. Wstęp

1.1. Początki stochastycznych modeli matematyki finansowej

Nazwa „matematyka finansowa” w literaturze pojawiła się w 1946 roku, w tytule książki Clarence’a Richardsona *Financial Mathematics*. Pierwszy model losowy¹ (czyli stochastyczny) wyceny instrumentów finansowych na giełdzie paryskiej został zaproponowany przez Louisa Bacheliera w pracy doktorskiej zatytułowanej *Théorie de la spéculation*, obronionej 29 marca 1900 roku. Było to przełomowe odkrycie; sądzono bowiem, że zmiany cen na giełdzie są tak bardzo nieprzewidywalne, iż nie można ich opisać metodami matematycznymi, ponieważ próby dokonania tego nie przynosiły efektów. Do modelowania cen Bachelier użył, znanego od czasów Carla Gaussa i Simona de Laplace’a, rozkładu normalnego. Dzisiaj ten model nazywa się ruchem Browna, od nazwiska angielskiego botanika Roberta Browna, który w 1827 roku opisał ruch ziaren pyłku roślin w wodzie. Matematyczny opis tego zjawiska podał Albert Einstein dopiero w 1905 roku, a wyniki potwierdził eksperymentalnie Marian Smoluchowski w roku 1906. Ostateczny kształt temu procesowi nadał Norbert Wiener w latach 1918–1923.

Model Bacheliera zakładał zerową stopę procentową lokat i pożyczek oraz to, że ceny akcji mogą przyjąć wartości ujemne, jak to jest w rozkładzie normalnym. Dzisiaj zastosowany przez niego model nazywamy arytmetycznym ruchem Browna. Mankamenty tego modelu poprawili, w latach 1955–1959, Paul Samuelson i Matthew Osborne, wprowadzając tak zwany geometryczny ruch Browna. Założono w nim, że to logarytmy cen mają rozkłady normalne. Paul Samuelson został laureatem Nagrody Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych w 1970 roku.

W 1963 roku Benoit Mandelbrot, badacz fraktali, zaproponował model, w którym przyrosty cen miały niezależne i identyczne rozkłady z klasy tak zwanych rozkładów stabilnych, opisanych przez Paula Levy’ego około 1920 roku. Rozkłady te przeważnie nie mają skończonej wariancji i gęstości wyrażonej

¹ Model nazywamy losowym, jeżeli przynajmniej jeden z czynników w nim występujących jest zmienną losową, której wartości pojawiające się z określonym prawdopodobieństwem znamy, ale nie wiemy, która z nich się pojawi w ustalonej chwili. W sensie matematycznym zmienna losowa jest funkcją mierzalną określoną na pewnej przestrzeni probabilistycznej.

explicite, natomiast charakteryzują się tym, że kombinacje liniowe niezależnych zmiennych losowych o wybranym rozkładzie stabilnym mają też ten rozkład (z dokładnością do stałej).

W latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku Harry Markowitz zaproponował zastosowanie statystycznego kryterium oczekiwanej stopy zwrotu oraz minimalnej wariancji do wyboru najlepszego portfela inwestycyjnego. Jego odkrycia oraz pomysł Williama Sharpe'a dotyczący miernika atrakcyjności funduszy inwestycyjnych i prace Mertona Millera uhonorowano przyznaniem Nagrody Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych w 1990 roku.

Włoski ekonomista Eugene Fama, w 1965 roku, zasugerował użycie rozkładu *t*-Studenta do modelowania cen, ponieważ ma on rozmaite zalety: należy do klasy rozkładów stabilnych, ma gęstość i wariancję oraz charakteryzuje się „grubszymi ogonami” w porównaniu z rozkładem normalnym.

Inne podejście zaproponował Peter Clark w 1973 roku. Twierdził, że „zegar nie zawsze tyka z jednakową szybkością”, czyli zdarzają się dni, w których pojawia się więcej informacji niż przeciętnie, a wtedy giełda reaguje większą zmiennością. Zatem proces logarytmów cen giełdowych powinno się modelować za pomocą ruchu Browna, ale względem upływu czasu zmodyfikowanego przez pewien proces kierujący.

Fischer Black i Myron Scholes, w 1973 roku, wykorzystali proces ruchu Browna do opisu rynku finansowego w postaci dwóch równań: deterministycznego opisującego wartość obligacji w czasie oraz stochastycznego równania różniczkowego względem ruchu Browna. Model ten został wyróżniony Nagrodą Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych w 1997 roku wraz z pracami Roberta Mertona nad wyceną instrumentów pochodnych.

W 1979 roku John Cox, Stephen Ross i Mark Rubinstein przedstawili analogiczny model dla czasu dyskretnego, oparty na błędzeniu losowym, zwany modelem CRR. Nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk twórców modelu.

David Easley, Nicholas Kiefer i Maureen O'Hara przedstawili, w 1997 roku, model EKO. Zaproponowali użycie teorii kolejek do opisu zachowań inwestorów.

Do opisu zjawisk na rynku finansowym używano dyskretnych procesów liniowych, czyli szeregów czasowych z zależnościami o charakterze liniowym. Do nich zalicza się proces ruchomej średniej (*moving average* – MA) oraz model autoregresji rzędu *n* (zwany AR(*n*)), w którym rozpatrywana wielkość zależy od jej wartości historycznych w *n* momentach czasowych w przeszłości. Połączeniem tych modeli jest model ARMA, charakteryzujący się szybko zanikającą funkcją autokorelacji, stosowany do opisu zmienności krótkoterminowej.

W procesach nieliniowych błędy losowe (czyli „biały szum”) mnoży się, w przeciwieństwie do procesów liniowych, w których się je dodaje. Pierwszym, który do opisu zmienności charakteryzującej ceny giełdowe zastosował tego typu model, był Robert Engle, laureat Nagrody Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych w 2003 roku. W roku 1982 zdefiniował model ARCH, czyli *Autore-*

gressive Conditional Heteroscedasticity Model (model autoregresyjny warunkowo jednorodny), co dało początek badaniom nad tego typu modelami. Znalazł on wielu naśladowców, m.in.: Tim Bollerslev w 1986 roku uogólnił go do postaci GARCH (*Generalized ARCH*), a Ulrich Müller z zespołem w 1995 roku wprowadzili model HARCH (*Heterogeneous Auto-Regressive Conditional Heteroscedastic model*). Model TARCH (*Threshold ARCH* – model progowy ARCH) został wprowadzony przez Howella Tonga w 1990 roku. Obecnie do modeli typu GARCH stosuje się funkcje łącznikowe Abe Sklara, a przykłady znaleźć można w książce Ryszarda Domana z 2011 roku.

Prace Michaela Harrisona i Stanleya Pliski z lat 1981–1983 zawierały twierdzenia dotyczące wyceny instrumentów finansowych w języku martyngałów. Metoda przez nich zastosowana pozwala zredukować proces stochastyczny do funkcyjonału zależnego od procesu Wienera i zastosować lemat Kiyoshi Itô.

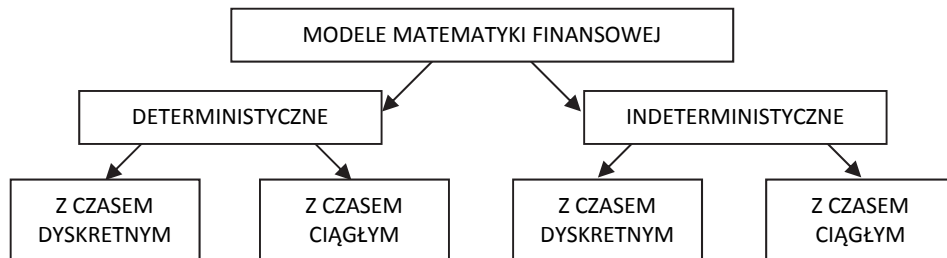
Wkład profesorów Eugene Famy, Larsa Hansena oraz Roberta Shillera w rozwój badań nad analizą i wyceną aktywów został doceniony przez Królewską Szwedzką Akademię Nauk, która w 2013 roku przyznała im Nagrodę Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych. W uzasadnieniu napisano, że chociaż nie ma sposobu dokładnego przewidzenia cen akcji czy obligacji za kilka dni lub tygodni, to dzięki badaniom laureatów okazało się, iż można przewidzieć, z dużym prawdopodobieństwem, szerokie spektrum cen w okresach rzędu 3–5 lat. Już w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku Eugene Fama wykazał, że ceny akcji są trudne do przewidzenia w krótkim okresie, choćby dlatego, że nowe informacje są prawie natychmiast stosowane do wyceny. To odkrycie zaowocowało rozwojem funduszy opartych na indeksach giełdowych. Na początku lat osiemdziesiątych dwudziestego wieku Robert Shiller odkrył, iż stosunek wyceny do dywidendy dąży do spadku, kiedy jest wysoki oraz ma tendencję wzrostową, gdy jest niski. Ten mechanizm samoregulacji działa dla różnych rodzajów aktywów, nie tylko akcji i obligacji. Trzeci z laureatów – Lars Hansen opracował statystyczną metodę, która dobrze testuje sposoby racjonalnej wyceny aktywów oraz zauważył, że teorie Famy i Shillera dobrze wyjaśniają zagadnienia wyceny aktywów [18].

Szczegółowy wykaz literatury dotyczącej historii matematyki finansowej można znaleźć na przykład w książce [21] lub w monografii [10] (w języku angielskim).

1.2. Podział modeli matematyki finansowej

Modele stosowane w matematyce finansowej można podzielić na dwie kategorie: **modele deterministyczne**, opisujące zjawiska za pomocą deterministycznych, tj. nielosowych równań różniczkowych zwyczajnych bądź cząstkowych oraz **indeterministyczne (losowe)**, w których występują równania zawierające zmienne losowe zwane stochastycznymi równaniami różniczkowymi.

Ze względu na przyjęty sposób postrzegania czasu wyróżnia się modele **z czasem dyskretnym**, gdy zbiór rozpatrywanych chwil T jest przeliczalnym zbiorem postaci $\{0, 1, 2, \dots\}$ oraz **z czasem ciągłym**, gdy T jest zbiorem nieprzeliczalnym – przedziałem $[0, \infty)$.



Ryc. 1.2.1. Podział modeli matematyki finansowej

Ta dwoistość stosowanego opisu wynika z paradoksu Zenona z Elei opisanego przez Arystotelesa w księdze VI „Fizyki” [6].

Założmy, że wystrzelona z łuku strzała pokonała określony odcinek drogi do tarczy. W momencie wystrzelenia znajdowała się na początku tej trasy, a po dotarciu do celu – na jej końcu. W każdej chwili lotu znajdowała się w jakimś konkretnym punkcie trasy, zatem pozostawała w spoczynku. Jednocześnie poruszała się, bo przebyła tę trasę w pewnym czasie. Matematyk Giovanni Benedetti (1530–1590) wyjaśnił tę sprzeczność, twierdząc, że „zatrzymanie” obiektów w ich ruchu to dostrzeganie jedynie części zjawiska, bowiem między statycznymi obrazami znajdują się nieskończenie krótkie odcinki czasu, w których obiekt przebywa odpowiednie odcinki drogi [7]. Zatem, w niektórych sytuacjach zakładamy, że obserwujemy proces stochastyczny z czasem płynącym w sposób ciągły. W innych przypadkach możemy przyjmować, że obserwowany proces zmienia się skokowo, ale zmiany te mogą się pojawiać tylko w pewnych, ustalonych z góry momentach (patrz podrozdz. 3.5).

Wartość instrumentu finansowego w ogólności może być nieujemną funkcją rzeczywistą, której wartość jest określona w każdej chwili czasu, reprezentowanej przez punkt nieujemnej części osi liczb rzeczywistych $[0, \infty)$. Punkt zero jest ustaloną umowną chwilą zapoczątkowania obserwacji procesu.

Jeżeli rozpatrujemy bankową lokatę terminową, która przy dopisaniu odsetek wymaga dotrzymania ustalonego okresu, to zakładamy, że kapitalizacja odsetek dokonuje się w chwili kończącej ustalony okres (są to tzw. odsetki z dołu). Wystarczy więc rozpatrywać te chwile czasu, w których dokonuje się kapitalizacja, zaniedbując dokładniejszy opis. Koncentrujemy nasze postrzeganie tylko na tych punktach $\{0, 1, 2, \dots\}$ osi czasu, w których zmienia się wartość rozpatrywanej funkcji, stosując tzw. model dyskretny czasu.

W przypadku instrumentów finansowych o ustalonym z góry momencie wygaśnięcia (takich jak na przykład obligacje, opcje) zakłada się, że rozpatrywany model ma **skończony horyzont czasowy** T^* , czyli zaprzestajemy obserwacji procesu w pewnej ustalonej chwili T^* i nie rozważamy późniejszych momentów. W przypadku modelu dyskretnego bierzemy pod uwagę wyłącznie chwile $\{0, 1, 2, \dots, T^*\}$, a odpowiadający mu model ciągły jest zdefiniowany na przedziale $[0, T^*]$ liczb rzeczywistych.

2. Rynek finansowy

2.1. Podział rynku finansowego

Rynek finansowy jest częścią każdej gospodarki. Na nim zawierane są transakcje finansowe polegające na zakupie i sprzedaży instrumentów finansowych. **Instrumenty finansowe** są dwustronnymi umowami regulującymi zależności finansowe lub majątkowe między stronami. Rynek finansowy dzieli się na: rynek pieniężny, rynek kapitałowy, rynek walutowy i rynek instrumentów pochodnych (derywatów). Uczestnikami rynku są **inwestorzy** indywidualni lub instytucjonalni (banki, fundusze) oraz maklerzy/brokerzy pracujący w domach maklerskich.

W węższym znaczeniu rynek kapitałowy utożsamiany jest jedynie z **rynkiem papierów wartościowych**, który dzieli się na rynek pierwotny (obrótno nowo emitowanymi walorami) i rynek wtórny (obrótno walorami będącymi w obiegu). Instytucjonalną formą rynku wtórnego jest giełda papierów wartościowych – miejsce obrotu papierami wartościowymi przynoszącymi stały dochód – **obligacjami**, walorami przynoszącymi zmienny dochód – **akcjami, bonami skarbowymi** oraz **instrumentami pochodnymi**.

Podstawowymi kategoriami rynku kapitałowego podlegającymi analizie są stopy zwrotu z instrumentów finansowych. Do ich określenia niezbędne są metody **wyceny**, czyli określenia terażniejszej wartości instrumentu. Temu celowi służą stochastyczne modele wyceny.

Zachowanie się inwestorów na rynku kapitałowym wyjaśniają teorie makroekonomiczne zwane **modelami równowagi rynku kapitałowego**. Do nich należy między innymi teoria portfela i teoria arbitrażu. Modele te wskazują, jaka powinna być stopa zwrotu (lub równoważnie cena) instrumentu finansowego w warunkach równowagi rynkowej.

Podstawową obserwowaną wielkością na rynku finansowym jest jednookresowa stopa zwrotu R z instrumentu finansowego. Oznaczenie pochodzi od francuskiego terminu *rente reportable* – stopa zwrotu (z inwestycji), użytego przez Louisa Bacheliera w 1900 roku.

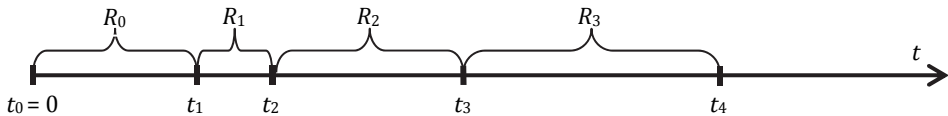
Definicja 2.1.1. Stopą zwrotu lub stopą zysku z instrumentu finansowego R_t nazywamy względną zmianę ceny instrumentu finansowego w ustalonym okresie bazowym (od t do $t + \Delta t$), czyli

$$R_t = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t},$$

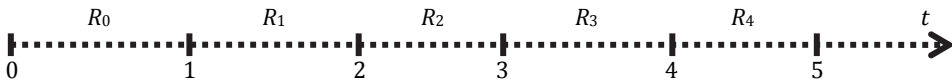
gdzie P_t jest ceną tego instrumentu w chwili t , z uwzględnieniem dywidendy.

Okresem bazowym dla stopy zwrotu jest najczęściej rok. W modelu ciągłym można rozważać stopę zwrotu dla okresu od t_{i-1} do t_i , gdy ciąg rosnący liczb rzeczywistych (t_i) z $t_0 = 0$ określa podział osi czasu na kolejne okresy. W modelu dyskretnym natomiast najczęściej przyjmuje się, że taki podział na okresy generuje zbiór liczb naturalnych. Często zakłada się, że wszystkie okresy mają jednakową długość równą okresowi bazowemu.

Model ciągły



Model dyskretny



Ryc. 2.1.1. Porównanie modelu z czasem ciągłym i dyskretnym

Stopę zwrotu zwykle wyraża się w procentach. Najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć stopa zysku, jest -1 (czyli -100%), co oznacza utratę całego początkowego kapitału. Wartości ujemne świadczą o utracie części wartości kapitału początkowego, dodatnie zaś o wzroście wartości początkowego kapitału.

Inwestor dysponujący wieloma walorami, czyli portfelem, może również obliczyć stopę zwrotu z całego posiadanego zespołu instrumentów (patrz podrozdz. 5.2).

Definicja 2.1.2. Stopa zwrotu w momencie t z portfela składającego się z N walorów o udziałach zapisanych za pomocą wektora kolumnowego

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$$

(gdzie wszystkie współczynniki $\omega_i \in [0, 1]$ oraz $\omega_1 + \dots + \omega_N = 1$), jest średnią ważoną stóp zwrotu R_t^i dla poszczególnych walorów i ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$), czyli

$$R_t^P = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot R_t^i.$$

2.2. Charakterystyka danych na rynku finansowym

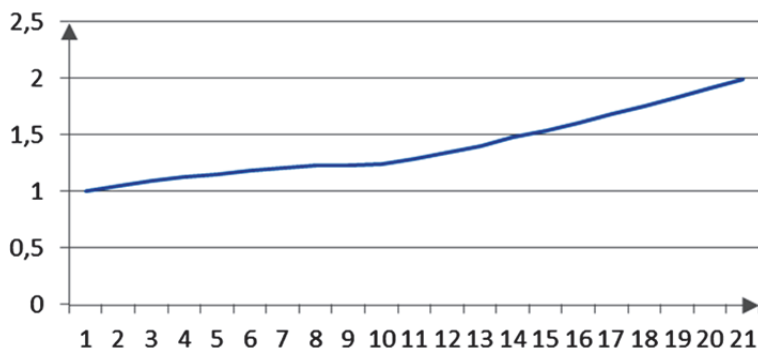
Dane finansowe, w odróżnieniu od innych rodzajów danych (biometrycznych, technicznych, środowiskowych itp.), charakteryzują się następującymi cechami: asymetrią, „grubymi” ogonami, częstym brakiem korelacji cząstkowej oraz zmieniającymi się skupieniami wartości [10].

Przykład 2.2.1. Rozważmy przykładowe ceny w chwili zamknięcia dziennych sesji giełdy pewnego instrumentu finansowego, którego cena w chwili rozpoczęcia obserwacji wynosi 1 i po 21 okresach (dniach) wzrosła prawie do 2.

Szczegółowe wyniki są następujące:

1	1,0512	1,092	1,1236	1,1548	1,1873	1,2091	1,2258
1,2316	1,2414	1,285	1,3433	1,4045	1,4793	1,5408	1,6009
1,6811	1,758	1,8322	1,9103	1,9918.			

Przedstawimy je na wykresie, aby łatwiej było zinterpretować zmiany (ryc. 2.2.1).



Ryc. 2.2.1. Wykres cen z przykładu 2.2.1

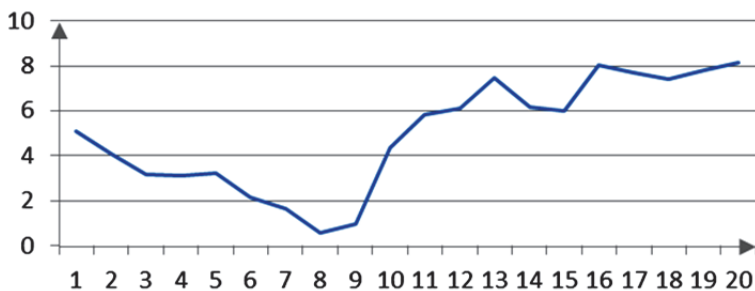
Wydaje się, że ceny wzrastają prawie w tym samym tempie, od 1 do 2, bo wykres przypomina linię prostą. Wrażenie to jest jednak mylące; wystarczy wyliczyć stopy zwrotu dla jednodniowych okresów.

Stopy zwrotu wynoszą:

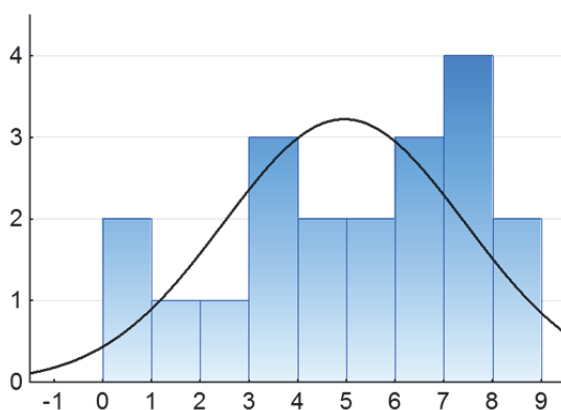
5,12	4,08	3,16	3,12	3,25	2,18	1,67	0,58
0,98	4,36	5,83	6,12	7,48	6,15	6,01	8,02
7,69	7,42	7,81	8,15.				

W celu weryfikacji postawionej hipotezy sporządzimy odpowiedni wykres zmian dziennych stóp zwrotu (ryc. 2.2.2). Wprawdzie zauważyć można, że cena stale rośnie, ale do połowy badanego okresu tempo wzrostu (czyli stopa zwrotu) malało od 5% prawie do zera, później wzrastało, oscylując, do poziomu 8%.

Sporządzmy histogramy stóp zwrotu (ryc. 2.2.3). Są to wykresy słupkowe, których wysokość odzwierciedla liczbę wyników znajdujących się w przedziale, dla którego sporządzono słupek. Można zauważyć, że wykres dość znacznie odbiega od krzywej gęstości rozkładu normalnego, naszkicowanej linią ciągłą. Rozkład stóp zwrotu charakteryzuje się „grubymi” ogonami, tzn. wartości skrajne pojawiają się częściej, niż gdyby dane podlegały rozkładowi normalnemu. Stąd pomysły użycia rozkładów stabilnych oraz tych o „grubych”



Ryc. 2.2.2. Wykres stóp zwrotu dla danych z przykładu 2.2.1

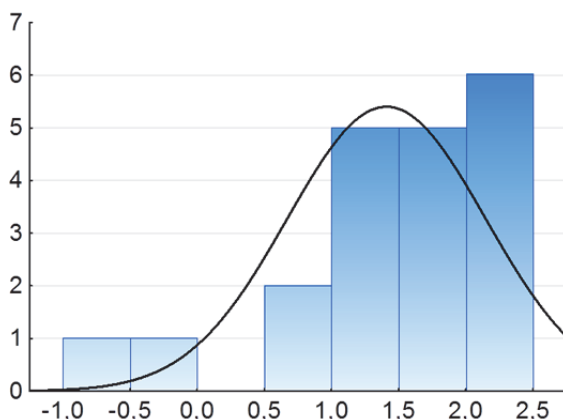


Ryc. 2.2.3. Histogram stóp zwrotu dla danych z przykładu 2.2.1

lub „ciężkich” ogonach, rozkładów o większym rozrzucie niż rozkład normalny, do modelowania danych.

Zgodnie z twierdzeniami granicznymi rachunku prawdopodobieństwa, wraz ze wzrostem liczby danych ich rozkład bardziej przypomina rozkład normalny. Można zakładać, że notowania dzienne mają rozkład normalny, ale już dane zbierane tygodniowo wykazują znaczne odstępstwa od niego. Najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć stopa zysku, jest -1 (-100%), więc uwzględniać należy rozkłady obcięte.

Asymetria danych finansowych polega na tym, że ekstremalne ujemne wartości zdarzają się częściej niż bardzo duże wartości dodatnie. Ta ujemna skośność, widoczna na histogramach, sugeruje, że to nie dane podlegają rozkładowi normalnemu, lecz raczej ich logarytmy. Na rycinie 2.2.4 przedstawiono histogram sporządzony dla logarytmów cen. Wykres słupkowy logarytmów cen bardziej przypomina krzywą gęstości rozkładu normalnego niż wykres dla samych cen (ryc. 2.2.3). Warto zwrócić uwagę na ekstremalne wartości dodatnie, które pojawiały się zbyt często, niż wynikałoby to z przyjętego modelu.



Ryc. 2.2.4. Histogram logarytmów cen dla danych z przykładu 2.2.1

W celu zbadania zależności pojawiania się poszczególnych wartości sporządzimy wykresy wartości współczynnika autokorelacji dla danych z przykładu 2.2.1. Współczynnik autokorelacji jest odpowiednikiem współczynnika korelacji liniowej z podrozdziału 5.1 i interpretuje się go w ten sam sposób. Oblicza się go dla wybranych dwóch podciągów kolejnych obserwacji tej samej długości, przesuniętych w czasie. To przesunięcie nazywa się opóźnieniem czasowym.

Definicja 2.2.1. Współczynnikiem **autokorelacji próbkowej** dla dwóch ciągów obserwacji długości k x_1, \dots, x_k oraz x_{k+1}, \dots, x_{k+l} (z opóźnieniem l), wybranych z ciągu (x_i) wyników obserwacji procesu losowego² X , nazywać będziemy wyrażenie

$$r_l = \frac{\sum_{i=1}^{k-l} (x_i - \bar{x}) \cdot (x_{i+l} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2},$$

Gdzie $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$ jest średnią arytmetyczną wyrazów ciągów x_1, \dots, x_k .

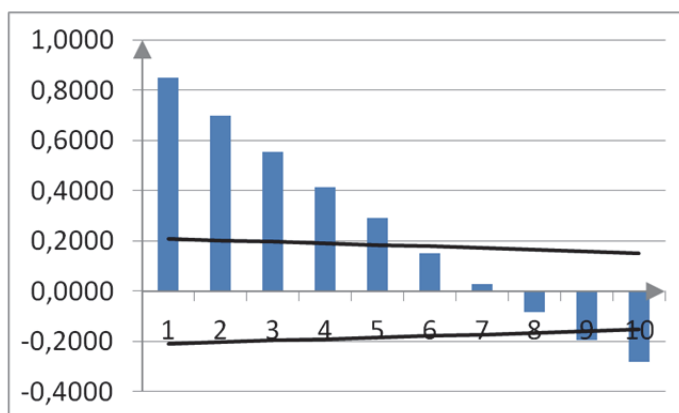
Tabela 2.2.1. Wartości autokorelacji dla różnych opóźnień i błędy standardowe służące do oszacowania białego szumu

Opóźnienie	Autokorelacja	Błąd standardowy
1	0,8506	0,2078
2	0,6979	0,2023
3	0,5550	0,1966
4	0,4132	0,1907
5	0,2930	0,1846
6	0,1515	0,1784
7	0,0292	0,1719
8	-0,0830	0,1651
9	-0,1943	0,1581
10	-0,2807	0,1508

Wykres współczynników autokorelacji jest wykresem słupkowym (im wyższa wartość bezwzględna współczynnika, tym wyższy słupek). Współczynnik autokorelacji przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$. Im jego wartość bezwzględna jest bliższa 1, tym większa jest siła zależności liniowej pomiędzy dwoma ciągami wartości. Ujemne wartości współczynnika świadczą o ujemnej zależności, w której wzrost wartości w jednym ciągu współwystępuje ze spadkiem wartości w drugim ciągu.

Na rycinie 2.2.5 przedstawiono wartości współczynników autokorelacji w postaci słupków dla opóźnień od 1 do 10 oraz przedziały ufności (granice), wewnątrz których znalazłyby się słupki, gdyby obserwowany proces był białym szumem (ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $N(0, \sigma^2)$). Można zauważyć silną dodatnią zależność liniową pomiędzy stopami zwrotu z bliskich sobie momentów czasowych (opóźnienia od 1 do 5) oraz pojawiające się zależności ujemne dla opóźnień począwszy od 8 (bo wtedy spada tempo wzrostu stóp zwrotu, które początkowo rosło silniej). Dlatego

² Procesem losowym (albo stochastycznym) nazywamy ciąg zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej.



Ryc. 2.2.5. Wykres autokorelacji dla danych z przykładu 2.2.1

należy odrzucić hipotezę, że stopy zwrotu mają niezależne rozkłady normalne o jednakowej wariancji.

Duże wartości współczynników autokorelacji mogą wynikać z rozmaitych przyczyn. Trzeba sprawdzić, czy badany proces losowy nie jest procesem autoregresji (patrz podrozdz. 4.3), w którym poszczególne zmienne losowe mają wprawdzie rozkłady normalne o jednakowej wariancji, ale ich kolejne wartości oczekiwane są związane liniową rekurencyjną zależnością. Może okazać się, że dane podlegają rozkładowi o „grubym” ogonie, znacznie różniącym się od rozkładu normalnego, dlatego proces różni się od białego szumu. Wreszcie, oscylacje wartości współczynników mogą być spowodowane nieliniową zależnością pomiędzy wartościami oczekiwanymi lub wariancjami zmiennych losowych tworzących rozpatrywany proces.

Poza danymi o dużej częstotliwości (na przykład notowania dzienne z przykł. 2.2.1) testy zwykle nie wykazują istotnej **korelacji częstkowej**. Jednak korelacja między stopami zwrotu wzrasta podczas okresów o dużej zmienności (krachów). Pojawiające się wówczas ekstremalne dodatnie lub ekstremalne ujemne wartości zwykle utrzymują się przez dłuższy czas (w przykł. 2.2.1 stale utrzymuje się rosnący trend cen notowań). Czas ten jest potrzebny na to, aby rynek finansowy wytracony ze stanu równowagi ustabilizował się w nowym jej punkcie.

Powyższe cechy danych finansowych spowodowały poszukiwania nowych, niegaussowskich lub nieliniowych modeli (wspomnianych w podrozdz. 1.1), które w krótkim lub długim horyzoncie czasowym dobrze określałyby zależności między badanymi wielkościami. Więcej informacji o tych modelach i testowaniu ich dopasowania można znaleźć w pozycji [10].

Zadania do rozdziału 2

1. W ubiegłym roku diler samochodów sprzedał 1 egzemplarz za 120 000 zł, a jego zysk wyniósł 1%. Kioskarz sprzedający miesięcznie 1000 gazet po 2,50 zł miał pięcioprocentową marżę. Sklepiarz sprzedawał żywność z dwuprocentowym zyskiem, a jego miesięczne obroty wynosiły średnio 6000 zł. Który z nich uzyskał największą stopę zwrotu w ciągu roku?
2. Na podstawie poniższych informacji wyznaczyć tygodniowe stopy zwrotu, ich średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe (patrz podrozdz. 5.1).

Tydzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kurs akcji	135,0	142,0	158,0	154,0	175,0	169,0	173,0	188,0	187,0	198,0
Dywidenda	7,5	6,2	2,1	3,3	5,8	3,4	5,6	4,5	4,7	8,9

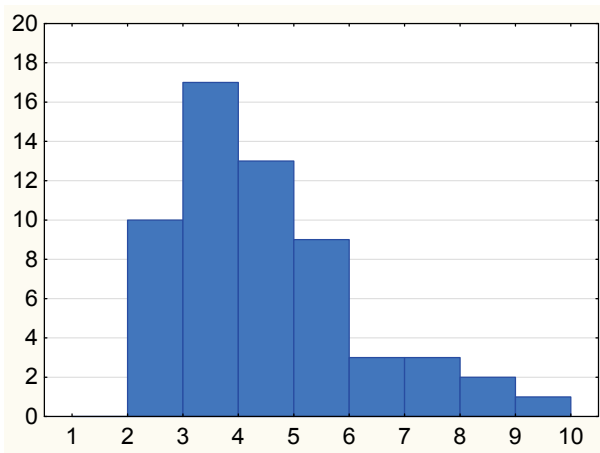
3. Dane są notowania dzienne akcji pewnej spółki. Sporządzić histogram dla tych danych, zakładając, że przedziały klasowe są prawostronnie domknięte, mają długość 1%, a środek pierwszego z nich leży w punkcie 2,5. Wykonać wykres dziennych notowań, logarytmów notowań oraz stóp zwrotu.

3,3	4,6	2,2	3,0	4,1	5,1	6,2	7,3	8,2
9,1	2,6	3,2	4,4	5,3	2,3	3,1	4,2	5,2
6,1	7,5	2,8	3,3	4,5	5,8	2,4	3,2	4,3
5,3	6,7	2,2	3,1	4,2	5,2	6,0	7,3	8,7
3,7	4,8	2,9	3,3	4,6	5,7	3,5	4,7	2,5
3,2	4,5	5,7	3,9	4,9	3,8	3,7	3,6	3,6
3,5	3,7	4,9	2,7					

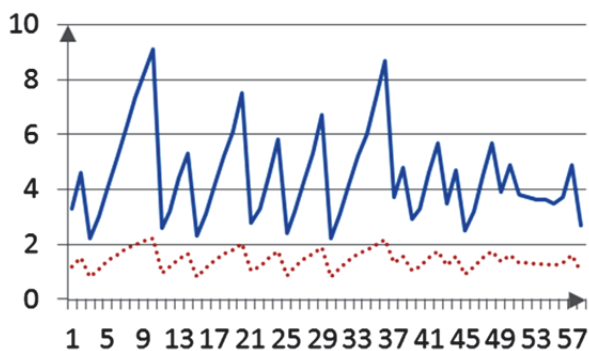
Odpowiedzi

1. $R_1 = 1200$ zł, $R_2 = 1500$ zł, $R_3 = 1440$ zł.
2. Kolejno: 9,78%, 12,75%, -0,44%, 17,4%, -1,49%, 5,68%, 11,27%, 1,97%, 10,64%. Średnia arytmetyczna: 7,5%, odchylenie standardowe (na podstawie estymatora nieobciążonego wariancji): 6,65%.

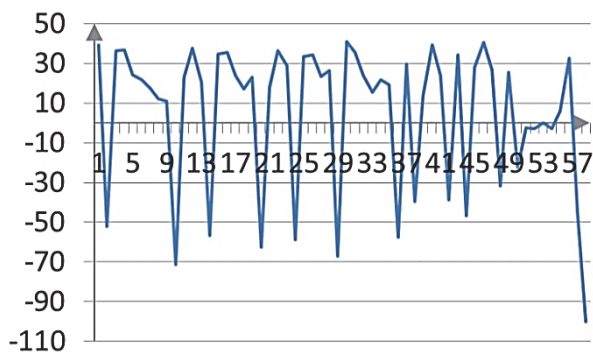
3.



Histogram częstości danych. Kształt histogramu sugeruje, że dane mają rozkład logarymiczno-normalny.



Wykresy notowań (linia ciągła) i ich logarytmów (linia kropkowana).



Wykres wartości stóp zwrotu.

3. Kapitalizacja, oprocentowanie i dyskontowanie

3.1. Zmienność pieniądza w czasie

Wszystkie modele matematyki finansowej zakładają, że wartość pieniądza zmienia się wraz z upływem czasu. Zakładamy, że w ustalonej chwili początkowej (czyli w punkcie 0 na osi czasu) mamy kapitał K_0 , który wyrażony w (jakiś) jednostkach pieniężnych (np. w euro, dolarach, złotych) jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Funkcja wartości kapitału $K(t)$, określona dla wszystkich chwil $t \in T = [0, \infty)$, opisuje sposób, w jaki następuje zmiana wartości początkowego kapitału K_0 . O funkcji $K(t)$ będziemy, przynajmniej, zakładali, iż jest ciągła i różniczkowalna na przedziale $[0, \infty)$. Możemy przyjąć, że jeśli funkcja osiągnie wartość równą zero w pewnej chwili t , to później przyjmie już zawsze wartości zerowe.

Do porównania inwestycji o różnym kapitale początkowym służy funkcja akumulacji kapitału, wyrażająca zmianę wartości w czasie jednostki zainwestowanego kapitału.

Definicja 3.1.1. Funkcją akumulacji kapitału nazywać będziemy funkcję $a(t): [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ określoną wzorem

$$a(t) = \frac{K(t)}{K(0)}$$

dla wszystkich $t \in [0, \infty)$, gdzie $K(t)$ jest wartością kapitału w chwili t , a $K(0)$ jego wartością w chwili początkowej.

Przykład 3.1.1. Pan A zainwestował 1000 zł w roczną lokatę bankową, która przyniosła mu 12% zysku, a pan B za kwotę 500 zł zakupił pamiątkowe monety wyemitowane przez NBP, które po roku sprzedał za 600 zł. Która z tych inwestycji miała większe tempo wzrostu wartości?

Rozwiązanie. Funkcja akumulacji kapitału pana A po roku wyniosła $a_1(1) = \frac{1120}{1000} = 1,12$, natomiast pana B po dwóch latach wyniosła $a_2(1) = \frac{600}{500} = 1,2$. Jednostka kapitału zainwestowana przez pana A zwiększyła w ciągu roku wartość o 0,12, czyli względny przyrost jednostki kapitału był równy $\frac{a_1(1) - a_1(0)}{a_1(0)} = 0,12$. Inwestycja pana B miała tempo wzrostu $\frac{a_2(1) - a_2(0)}{a_2(0)} = 0,2$. Pan B okazał się lepszym inwestorem.

Zmianę wartości funkcji rzeczywistej można opisać za pomocą tempa wzrostu, używając pojęcia pochodnej, czyli granicy ilorazu różnicowego dla tej funkcji. Należy wtedy założyć, że funkcja ta jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $[0, \infty)$.

Definicja 3.1.2. Chwilową stopą zwrotu (inaczej: chwilową stopą zysku) z pojedynczej inwestycji kapitału w wysokości $K(0)$ w chwili 0 nazywać będziemy iloraz pochodnej funkcji wartości kapitału oraz tej funkcji, czyli wyrażenie

$$r(t) = \frac{K'(t)}{K(t)}$$

dla wszystkich $t \in [0, \min \{x: K(x) = 0\})$, gdzie $K(t)$ jest wartością kapitału w chwili t .

Przyjmijmy, że zmiana wartości kapitału jest proporcjonalna do jego wysokości, a współczynnik proporcjonalności $r(t)$ jest pewną funkcją czasu, całkowaną w dowolnym przedziale $[0, s]$ zawartym w $[0, \min \{x: K(x) = 0\})$. Wtedy funkcja $K(t)$ musi spełniać równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dK(t)}{dt} = K(t) \cdot r(t)$$

z warunkiem początkowym $K(0) = K_0$.

Twierdzenie 3.1.1. Jeżeli wartość kapitału w chwili t określa równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt}K(t) = r(t) \cdot K(t),$$

to rozwiązanie tego równania określone jest wzorem

$$K(t) = K_0 \cdot e^{\int_0^t r(u) du}.$$

Dowód. Zapiśmy równanie w postaci

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = r(t).$$

Całkujemy obustronnie równanie w przedziale $[0, t]$, dostając kolejno

$$\int_0^t \frac{K'(u)}{K(u)} du = \int_0^t r(u) du,$$

$$\ln(K(t)) - \ln(K(0)) = \int_0^t r(u) du.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie w postaci $K(t) = K(0) \cdot e^{\int_0^t r(u) du}$ dla wszystkich $t \in [0, \min \{x: K(x) = 0\}]$. Łatwo sprawdzić, że chwilowa stopa zwrotu wyraża zmianę wartości jednostki zainwestowanego kapitału, czyli

$$r(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

dla wszystkich $t \in [0, \min \{x: K(x) = 0\}]$. □

Przykład 3.1.2. [E17.05.2003] Oznaczmy przez $A^X(t)$ stan środków w pewnym funduszu X. Natężenie oprocentowania w tym funduszu dane jest wzorem $\delta_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$. Do funduszu w chwili $t = 0$ jest dokonywana wpłata w wysokości 1. Wiadomo, że

(i) $A^X(1) = e^{0,04}$,

(ii) $A^X(3) = e^{0,42}$,

(iii) $A^X(5) = e^{1,60}$.

Wyznacz $A^X(7)$.

Rozwiązanie. Przy oprocentowaniu lokat pieniężnych chwilową stopę zwrotu $r(t)$ nazywa się natężeniem oprocentowania i oznacza się (ją) symbolem δ_t lub $\delta(t)$. Stąd mamy

$$A^X(t) = e^{\int_0^t (a + bu + cu^2) du} = e^{at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}}.$$

Z warunków zadania wynika, że

$$\begin{aligned}\ln(A^x(1)) &= 0,04 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}, \\ \ln(A^x(3)) &= 0,42 = 3a + \frac{9b}{2} + 9c, \\ \ln(A^x(5)) &= 1,6 = 5a + \frac{25b}{2} + \frac{125c}{3}.\end{aligned}$$

Dostajemy następujący układ równań liniowych z niewiadomymi a , b i c :

$$\begin{cases} 6a + 3b + 2c = 0,24 \\ 6a + 9b + 18c = 0,84 \\ 30a + 75b + 250c = 9,6 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $a = 0,02$, $b = 0,02$ i $c = 0,03$. Ostatecznie mamy

$$A^X(7) = e^{0,02 \cdot 7 + 0,02 \cdot \frac{49}{2} + 0,03 \cdot \frac{343}{3}} = e^{4,06} \approx 58.$$

Szczególnym przypadkiem modelu chwilowej stopy zwrotu jest tzw. kapitalizacja ciągła. Zakładamy wówczas, że tempo wzrostu wartości kapitału jest stałe w czasie.

Twierdzenie 3.1.2. Jeżeli chwilowa stopa zwrotu (inaczej: chwilowa stopa zysku) z inwestycji ma stałą wysokość w pewnym przedziale $[0, s]$, to dla wszystkich $t \in [0, s]$ zachodzą wzory:

$$\begin{aligned}K(t) &= K_0 \cdot e^{rt}, \\ a(t) &= e^{rt}.\end{aligned}$$

Dowód. Załóżmy, że $r(t) = r_0$ dla wszystkich $t \in [0, s]$. Ponieważ $\int_0^t r(u) du = r_0 t$, więc $K(t) = K(0) \cdot e^{r_0 t}$, $a(t) = \frac{K(t)}{K(0)} = e^{r_0 t}$. □

3.2. Oprocentowanie i dyskontowanie

Stopa procentowa jest miernikiem zysku (przychodu), jaki przysługuje posiadaczowi kapitału z racji udostępnienia go innym podmiotom (na przykład bankowi na tzw. umowę lokaty) na określony czas. Stopa zysku z inwestycji, zwana też stopą zwrotu z inwestycji, pozwala wyliczyć przyszłą oczekiwaną wartość kapitału na podstawie jego wartości obecnej według wzoru $K(t) = K_0 \cdot a(t)$.

Stopę procentową odsetek najczęściej podaje się w stosunku rocznym (*per anno*, p.a.). Odsetki są kwotami pieniężnymi płaconymi za udostępnienie kapitału. Wysokość tych kwot wylicza się na podstawie stopy procentowej. Ze względu na to, czy po upływie pierwszego ustalonego okresu odsetkowego doliczane są one do kapitału czy też nie, odsetki nazywamy składanymi (złożonymi) lub, odpowiednio, prostymi. Warto zauważyć, że jeśli oprocentowanie liczone jest metodą składaną, to w następnych okresach odsetki z okresów wcześniejszych są również oprocentowane. W drugim przypadku odsetki we wcześniejszych okresach nie są później oprocentowane, zatem sumują się w sposób prosty, stąd nazwa: odsetki proste. Odsetki ze względu na moment wypłacania dzielimy na wypłacane z góry (w zaliczce, na początku ustalonego okresu powierzenia kapitału) lub na wypłacane z dołu (na końcu tego okresu). Proces dopisywania odsetek do kapitału z zastosowaniem formuły odsetek złożonych nazywa się kapitalizacją odsetek. W tabeli 3.4.2. zamieszczono wzory określające wartość kapitału i funkcję akumulacji kapitału dla podstawowych modeli kapitalizacji odsetek.

Dyskontowaniem nazywamy metodę obliczania wartości obecnej kapitału na podstawie jego oczekiwanej wartości przyszłej. Inaczej mówiąc, dyskontowanie polega na pomniejszaniu wartości przyszłej kapitału o kwotę zwaną kwotą dyskonta, reprezentującą zmianę wartości pieniądza w czasie. Tak więc, funkcja dyskonta jest odwrotnością (ale nie funkcją odwrotną!) funkcji akumulacji kapitału, gdyż $K_0 = \frac{K(t)}{a(t)} = K(t) \cdot v(t)$.

Definicja 3.2.1. Funkcją dyskonta nazywamy funkcję

$$v(t) : [0, \min\{x: K(x) = 0\}] \rightarrow [0, \infty)$$

określoną wzorem

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{a(t)}, & \text{gdy } a(t) \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } a(t) = 0 \end{cases}$$

dla wszystkich $t \in [0, \min\{x: K(x) = 0\}]$, gdzie $a(t)$ jest funkcją akumulacji kapitału.

W przypadku, gdy $\{x: K(x) = 0\} = \emptyset$, przyjmujemy, że $\min\{x: K(x) = 0\} = \infty$.

Przykład 3.2.1. [E25.01.2003] Dana jest funkcja akumulacji kapitału postaci

$$a(t) = \frac{\ln(5) - \ln(3)}{\ln(t+5) - \ln(t+3)}.$$

Wyznacz obecną wartość renty płatnej z dołu $a_{\overline{10}|}$.

Rozwiązanie. Symbol $a_{\overline{10}|}$ oznacza obecną, tzn. w chwili 0, wartość renty, czyli ciągu wypłat w wysokości 1, dokonywanych w momentach 1, 2, ..., 10. Obecna wartość wypłaty jednostkowej w chwili k ($k \in \{1, 2, \dots, 10\}$) wynosi $K_0^k = [a(k)]^{-1}$. Należy obliczyć sumę obecnych wartości wszystkich 10 wypłat renty, czyli

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} K_0^k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a(k)} = \sum_{k=1}^{10} v(k) = \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\ln(k+5) - \ln(k+3)}{\ln(5) - \ln(3)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} \sum_{k=1}^{10} \ln\left(\frac{k+5}{k+3}\right) = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{21}{2}\right)}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{2,351375}{0,510826} \approx 4,60. \end{aligned}$$

Stopę procentową użytą do obliczania kwoty dyskonta określa się mianem stopy dyskontowej. Jeśli do wyznaczenia kwoty dyskonta używa się formuły odsetek prostych, to dyskonto nazywamy prostym (lub handlowym), jeśli zaś procentu składanego – to złożonym.

Definicja 3.2.2. Chwilową funkcją dyskonta (dyskontem chwilowym) nazywać będziemy wyrażenie

$$\zeta(t) = - \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)}\right)}{\frac{1}{a(t)}}$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją akumulacji kapitału.

Definicja ta jest analogiczna do definicji chwilowej stopy procentowej. Znak „minus” we wzorze został umieszczony po to, by dyskonto przyjmowało wartości dodatnie. Okazuje się, że pojęcie to jest równoważne chwilowej stopie zwrotu w modelu opisanym w podrozdziale 3.1, gdyż prawdziwe jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3.2.1. $\zeta(t) = r(t)$.

Dowód. Korzystając z definicji chwilowego dyskonta, mamy

$$\varsigma(t) = -\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)}\right)}{\frac{1}{a(t)}} = -\frac{\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t r(u)du}\right)}{e^{-\int_0^t r(u)du}} = \frac{d}{dt} \int_0^t r(u)du = r(t).$$

□

Ponieważ obie wielkości są równe co do wartości, zatem posługujemy się tylko pojęciem chwilowej stopy zwrotu.

3.3. Zmienny strumień przepływu kapitału

W podrozdziale 3.1 zakładaliśmy, że jedynym wpływem podczas inwestycji jest kapitał początkowy K_0 , a jego wartość końcowa jest zależna od tempa wzrostu jego wartości, wyrażonego przez iloraz pochodnej $K'(t)$ i wartości funkcji $K(t)$. Załóżmy teraz, że w każdym punkcie odcinka $[0, s]$ osi czasu do inwestycji dopływa nowy kapitał w wysokości określonej przez wartość pewnej nieujemnej funkcji $\varphi(t)$. Chcemy znaleźć wzór opisujący wartość kapitału końcowego w chwili t sumy wpływów w czasie $[0, s]$. Przyjmijmy, że chwilowa stopa zwrotu $r(t)$ ma stałą dodatnią wartość dla $t \in [0, s]$.

W matematyce finansowej ze względu na założenie, że wartość pieniądza jest zmienna, należy, oprócz wartości nominalnej kapitału (wyrażonej w jednostkach pieniężnych), podać, w jakim momencie jest ona obliczona lub jakiej chwili dotyczy. Najczęściej tym wybranym momentem jest zakończenie inwestycji (na przykład koniec okresu ważności lokaty pieniężnej, moment wygaśnięcia opcji, sprzedaż portfela posiadanych walorów itp.), bo wtedy podsumowuje się zyski i straty związane z tą inwestycją i ocenia się, jaką stopę zwrotu kapitału przyniosła ona inwestorowi. W matematyce aktuarialnej (ubezpieczeniowej) natomiast podstawowym problemem jest wycena świadczenia (w ubezpieczeniach życiowych) lub ochrony ubezpieczeniowej (w ubezpieczeniach innych, na przykład majątkowych) w chwili 0, czyli cena (netto) ubezpieczenia w momencie jego zakupu.

Przykład 3.3.1. [E11.10.2003] Inwestor rozważa nabycie 20-letniej renty pewnej, ciągłej, płatnej natychmiast, o intensywności wypłat (*force of payment*) zadanej wzorem $\varphi(t) = t^2$. Wiadomo, że w całym rozpatrywanym okresie intensywność oprocentowania jest stała i wynosi $\delta = 7,00\%$ (*force of interest*). O ile mniej zapłaciłby inwestor, gdyby zrezygnował z otrzymywania płatności w ostatnim 5-letnim okresie wypłaty, a intensywność oprocentowania została by podwyższona i wynosiłaby $\delta = 10,00\%$? Cena renty w każdym rozpatrywanym przypadku jest równa wartości obecnej tej renty (*net present value*).

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od kilku niezbędnych wyjaśnień. W odniesieniu do odsetek, zamiast symbolu $r(t)$ używa się oznaczenia $\delta(t)$, natomiast gdy funkcja ta nie zmienia się w czasie – δ .

Rentą nazywamy ciąg płatności wypłacanych w określonej wysokości i w określonych punktach czasowych. Renta pewna jest wypłacana zawsze, niezależnie od tego, czy rentobiorca żyje, w przeciwieństwie do tzw. renty życiowej. Ciągłość renty wymaga użycia modelu ciągłego dla określenia czasu (patrz podrozdz. 1.2). W rozpatrywanym problemie zakładamy, że w każdej chwili (punkcie) odcinka $[0, 20]$ na osi czasu następuje wypłata w wysokości określonej przez funkcję $\varphi(t)$. Na przykład, w chwili $t = 5$ następuje wypłata $t^2 = 25$ jednostek. Obecna wartość wypłaty (zwana wartością aktuarialną) jest wartością wypłaty renty przeliczoną na chwilę 0.

Wartość wypłaty t^2 w chwili t należy zdyskontować na chwilę 0, czyli obliczyć, jaka wielkość kapitału w chwili 0 będzie równa t^2 po upływie czasu t . Będzie to oczywiście $t^2 \cdot v(t)$, gdzie $v(t)$ jest chwilową funkcją dyskonta postaci

$$v(t) = \zeta(t) = e^{-\int_0^t r(u) du}.$$

Następnie należy zsumować obecne wartości wszystkich wypłat po (nieprzeliczalnym) przedziale $[0, 20]$, otrzymując wzór

$$K_1(20) = \int_0^{20} t^2 e^{-\int_0^t r(u) du} dt.$$

Wyznamy teraz różnicę obecnych wartości obu rent

$$\begin{aligned} K_1(20) - K_2(20) &= \\ &= \int_0^{20} t^2 e^{-\int_0^t 0,07 du} dt - \int_0^{15} t^2 e^{-\int_0^t 0,1 du} dt = \\ &= \int_0^{20} t^2 e^{-0,07t} dt - \int_0^{15} t^2 e^{-0,1t} dt \approx 589. \end{aligned}$$

W ostatnim wierszu wykorzystano wzór $\int x^2 e^{-ax} dx = e^{-ax} \left[-\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \right]$.



Rozumując analogicznie można wnioskować, że wartość końcowa kapitału w chwili s , gdy dopływa on do inwestycji w chwili $t \in (0, s]$ w wysokości $\varphi(t)$, wyniesie

$$K(s) = \int_0^s \varphi(t) e^{-\int_0^t r(u) du} dt.$$

Udowodnimy teraz, że wzór ten jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego niejednorodnego I rzędu.

Twierdzenie 3.3.1. Jeżeli wartość kapitału w chwili t określa równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt}K(t) - r(t) \cdot K(t) = \varphi(t),$$

to rozwiązanie tego równania podane jest wzorem

$$K(s) = \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{\int_t^s r(u)du} dt + e^{\int_0^s r(u)du} \cdot K_0.$$

Dowód. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne $K'(t) - r(t) \cdot K(t) = 0$ metodą rozdziału zmiennych (patrz dowód twierdzenia 3.1.1). Całkujemy obustronnie równanie

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = r(t),$$

otrzymując

$$\int \frac{K'(t)}{K(t)} dt = \int r(t) dt,$$

stąd

$$\ln(K(t)) = \int r(t) dt + c.$$

Ostatecznie mamy

$$K(t) = c_1 \cdot e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Uzmienniając stałą, otrzymujemy końcową postać rozwiązania naszego równania

$$K(t) = c_1(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Zatem $c_1(0) = K_0$. Różniczkujemy względem czasu t , dla $t \in [0, s]$,

$$K'(t) = c_1'(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du} + c_1(t) \cdot r(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Otrzymane wyrażenie podstawiamy do równania niejednorodnego

$$c_1'(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du} + c_1(t) \cdot r(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du} - r(t) \cdot c_1(t) \cdot e^{\int_0^t r(u)du} = \varphi(t),$$

a stąd

$$c_1'(t) = \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^t r(u)du}.$$

Całkując stronami względem zmiennej t , wyznaczamy c_1 postaci

$$c_1(s) - c_1(0) = \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} dt.$$

Następnie określamy

$$K(s) = e^{\int_0^s r(u) du} \left(\int_0^s \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} dt + K_0 \right).$$

Po przekształceniu prawej strony wzoru otrzymujemy

$$K(s) = \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{\int_t^s r(u) du} dt + e^{\int_0^s r(u) du} \cdot K_0.$$

□

W rozwiązaniu równania różniczkowego z twierdzenia 3.3.1 pierwszy składnik sumy jest całką z wartości kapitału $\varphi(t)$ inwestowanego w chwili t i zakumulowanego na moment s . Drugi składnik sumy stanowi dodatkowy kapitał K_0 inwestowany w chwili 0, zakumulowany na moment końca inwestycji s . Zapišmy $K(s)$ za pomocą funkcji akumulacji kapitału $a(t)$ zdefiniowanej w podrozdziale 3.1 i funkcji dyskonta z podrozdziału 3.2.

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} e^{\int_0^s r(u) du} dt + e^{\int_0^s r(u) du} \cdot K_0 = \\ &= \int_0^s \varphi(t) \cdot \nu(t) a(s) dt + a(s) \cdot K_0 = a(s) \left(\int_0^s \varphi(t) \cdot \nu(t) dt + K_0 \right). \end{aligned}$$

Wyrażenie

$$\int_0^s \varphi(t) \cdot \nu(t) dt + K_0$$

jest wielkością kapitału, który w momencie s osiąga wartość $K(s)$. W jego skład wchodzi „prawdziwy” kapitał początkowy K_0 zainwestowany w chwili 0 oraz dalsze inwestycje $\varphi(t)$ w chwilach $t \in (0, s)$ dokonywane z intensywnością $r(t)$, zdyskontowane na moment 0 oraz zsumowane za pomocą całki $\int_0^s \varphi(t) \cdot \nu(t) dt$. Chwilowa stopa zwrotu z pojedynczej inwestycji K_0 wynosi

$$r(s) = \frac{K'(s) - \varphi(s)}{K(s)}.$$

3.4. Zasada stałej efektywności kapitalizacji oraz stałego przyrostu w kapitalizacji

W niektórych rodzajach kapitalizacji tempo wzrostu wartości kapitału jest stałe w czasie, czyli efekt kapitalizacji zależy od czasu trwania inwestycji, a nie od chwili jej rozpoczęcia.

Definicja 3.4.1. Mówimy, że kapitalizacja spełnia **zasadę stałej efektywności**, jeśli dla wszystkich $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ akumulacja kapitału początkowego w okresie od t_1 do t_3 jest równa akumulacji tego kapitału zainwestowanego w okresie od t_1 do t_2 i ponownie zainwestowanego na tych samych warunkach od t_2 do t_3 .

Zbadamy, jakie rodzaje kapitalizacji charakteryzują się stałą efektywnością. Załóżmy, że dla wszystkich $w > u \geq 0$ funkcja akumulacji kapitału spełnia zależność rekurencyjną $a(w + u) = a(w) \cdot a(u)$. Wiemy też, że $a(0) = 1$. Chcemy wyznaczyć wzór, za pomocą którego można będzie znaleźć wartość w chwili t zainwestowanej jednostki kapitału, czyli $a(t)$. W tym celu oszacujemy najpierw tempo zmian wartości funkcji $a(t)$. Granica ilorazu różnicowego jest równa

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{(t+h) - t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t)a(h) - a(t)}{h} = a(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h) - 1}{h} = \\ &= a(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h) - a(0)}{h} = a(t) \cdot a'(0). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe $a'(t) = a(t) \cdot a'(0)$ o zmiennych rozdzielonych, bo $a'(0)$ jest stałą. Całkujemy obustronnie równanie w przedziale $[0, t]$, otrzymując

$$\int_0^t \frac{a'(s)}{a(s)} ds = a'(0) \int_0^t ds.$$

Rozwiązanie ogólne przyjmuje postać $\ln a(t) - \ln a(0) = a'(0) \cdot t$, z której wynika, że

$$a(t) = e^{a'(0)t}.$$

Wykresy rozwiązań równania należą do rodziny krzywych $y = e^{ct}$.

W zależności od wybranego warunku początkowego możemy otrzymać inny rodzaj kapitalizacji. Uwzględnijmy warunek początkowy $a'(0) = c$. Wtedy otrzymamy, że $a(t) = e^{ct}$, a ten rodzaj wzrostu kapitału nazywa się kapitalizacją ciągłą ze stopą c w okresie bazowym.

Wybór warunku $a(1) = (1 + R)$, gdzie $R > 0$, prowadzi do wzoru określającego kapitalizację złożoną, z funkcją akumulacji kapitału postaci

$$a(t) = e^{t \cdot \ln(1+R)} = (1 + R)^t.$$

Biorąc $a(1) = \frac{1}{1-R}$, gdzie $0 < R < 1$, otrzymujemy wzór $a(t) = e^{-t \cdot \ln(1-R)} = (1 - R)^{-t}$ definiujący kapitalizację z góry, zwaną też kapitalizacją w zaliczce.

Wreszcie, jeśli $a(1) = (1 - d)$, gdzie $0 < d < 1$, to wzór $a(t) = e^{t \cdot \ln(1-d)} = (1 - d)^t$ określa dyskonto złożone.

Tabela 3.4.1. Przegląd najważniejszych modeli kapitalizacji

Modele z czasem dyskretnym			
Rodzaj kapitalizacji	Wartość kapitału po n okresach ($n = 1, 2, \dots$)	Funkcja (czynnik) akumulacji kapitału dla n okresów ($n = 1, 2, \dots$)	Funkcja (czynnik) dyskonta dla n okresów ($n = 1, 2, \dots$)
Kapitalizacja prosta ze stopą $R > -1$ we wszystkich okresach	$K(n) = K_0(1 + nR)$	$a(n) = 1 + nR$	$v(n) = \frac{1}{1 + nR}$
Dyskonto proste ze stopą dyskontową $d \in (0, 1)$	$K(n) = K_0(1 - nd)$	$a(n) = 1 - nd$	$v(n) = \frac{1}{1 - nd}$
Kapitalizacja złożona ze stopą $R > -1$ we wszystkich okresach	$K(n) = K_0(1 + R)^n$	$a(n) = (1 + R)^n$	$v(n) = \frac{1}{(1 + R)^n}$
Dyskonto złożone ze stopą dyskontową $d \in (0, 1)$	$K(n) = K_0(1 - d)^n$	$a(n) = (1 - d)^n$	$v(n) = \frac{1}{(1 - d)^n}$
Kapitalizacja z góry ze stopą R we wszystkich okresach, $ R < 1$	$K(n) = K_0 \frac{1}{(1 - R)^n}$	$a(n) = \frac{1}{(1 - R)^n}$	$v(n) = (1 - R)^n$
Modele z czasem ciągłym			
Rodzaj kapitalizacji	Wartość kapitału w chwili t , $t \in [0, \infty)$	Funkcja akumulacji kapitału w chwili t , $t \in [0, \infty)$	Funkcja dyskonta w chwili t , $t \in [0, \infty)$
Kapitalizacja ciągła z chwilową stopą $r(t) = r \geq 0$ stałą w czasie, kapitał pojedynczy	$K(t) = K_0 e^{rt}$	$a(t) = e^{rt}$	$v(t) = e^{-rt}$
Kapitalizacja z chwilową stopą $r(t)$ zmienną w czasie, kapitał pojedynczy w chwili 0	$K(t) = K_0 e^{\int_0^t r(s) ds}$	$a(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$	$v(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds}$
Kapitalizacja z chwilową stopą $r(t)$, zmienną w czasie, kapitał inwestowany z intensywnością wpłat $\varphi(t)$	$K(t) = \int_0^t \varphi(s) e^{\int_s^t r(u) du} ds$	$a(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$	$v(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds}$

W innym podejściu zakładamy, że funkcja akumulacji kapitału charakteryzuje się **stałym przyrostem kapitału** w jednostce czasu. Załóżmy, że dla wszystkich argumentów $w > u \geq 0$ funkcja akumulacji kapitału spełnia zależność $a(w + u) = a(w) + a(u) - 1$ (odjęcie jedynki jest konieczne, aby funkcja osiągnęła wartość 1 w punkcie 0). W podobny sposób wyznaczamy pochodną funkcji akumulacji kapitału

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{(t+h) - t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t) + a(h) - 1 - a(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h) - a(0)}{h} = a'(0). \end{aligned}$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe $a'(t) = a'(0) = c$ z rozwiązaniem $a(t) - a(0) = ct$, prowadzącym do wzoru $a(t) = 1 + ct$.

W tym przypadku, jeśli $c = R > 0$, jest to kapitalizacja prosta ze stopą zwrotu R we wszystkich okresach bazowych, a jeśli $c = -d$ i $0 < d < 1$, to funkcja $a(t)$ określa dyskonto proste.

Z powyższych rozważań wynika, że kapitalizacja złożona, ciągła, z góry, dyskonto złożone i kapitalizacja z chwilową stopą $r(t)$ (ze względu na własności całki w wykładniku wzoru) spełniają zasadę stałej efektywności, natomiast kapitalizacja prosta i dyskonto proste charakteryzują się stałym przyrostem bezwzględny kapitału w jednostce czasu.

Podstawowe modele kapitalizacji, zarówno w modelach z czasem ciągłym, jak i dyskretnym, można znaleźć w tabeli 3.4.1. Domyślnie w modelach z czasem dyskretnym stosuje się zasadę kapitalizacji złożonej, w modelach z czasem ciągłym zaś kapitalizację ciągłą. Przeglądając rubryki tabeli, należy zwrócić uwagę, że dyskonto jest wartością, o którą należy pomniejszyć przyszłą wartość kapitału $K(t)$ w celu uzyskania wartości początkowej kapitału $K(0)$. Dlatego wzory dla kapitalizacji prostej i dyskonta prostego oraz dla kapitalizacji złożonej i dyskonta złożonego różnią się znakiem wyrażenia w nawiasie. Dyskontowanie jest działaniem odwrotnym do kapitalizacji odsetek, dlatego funkcja dyskonta v jest odwrotnością funkcji akumulacji kapitału $a(t)$.

Stopa dyskontowa d i stopa zwrotu R są równoważne, jeżeli w tym samym okresie wartość dyskonta i odsetek jest jednakowa. W przypadku odsetek prostych, dla równoważnych stóp, zachodzi zależność $1 + nR = \frac{1}{1 - nd}$. Stąd wynikają równości $d = \frac{R}{1 + nR}$ i $R = \frac{d}{1 - nd}$. Dla odsetek złożonych, ze wzoru $(1 + R)^n = \frac{1}{(1 - d)^n}$, mamy zależności $d = \frac{R}{1 + R}$ i $R = \frac{d}{1 - d}$, w których nie pojawia się n z uwagi na stałą w czasie efektywność.

3.5. Od modelu ciągłego do dyskretnego

Wróćmy do twierdzenia 3.3.1. Wzór opisujący wartość kapitału końcowego w chwili t dla sumy wpływów w czasie $[0, s]$, określonych funkcją $\varphi(t)$, można zapisać następująco:

$$K(s) = e^{\int_0^s r(u) du} \left(\int_0^s \varphi(t) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} dt + K_0 \right).$$

W interpretacji wzoru znalezienie wartości łącznego kapitału zgromadzonego w czasie $[0, s]$ wymaga zakumulowania, czyli pomnożenia przez funkcję akumulacji $a(s) = e^{\int_0^s r(u) du}$. Wyrażenie w nawiasie oznacza pojedynczy kapitał początkowy K_0 oraz wartość aktuarialną wpłat $\varphi(t)$ dokonywanych w różnych momentach t przedziału $[0, s]$, zdyskontowaną na chwilę 0, czyli pomnożoną

przez funkcję dyskonta $v(t) = e^{-\int_t^s r(u)du}$. Jest to metoda retrospektywna, bo „sięgamy wstecz” do chwili 0.

Ten sam wzór można zapisać równoważnie w postaci wyrażenia

$$K(s) = \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{-\int_t^s r(u)du} dt + e^{\int_0^s r(u)du} \cdot K_0$$

interpretowanego jako metoda prospektywna, czyli „sięganie w przód”. W tej metodzie akumulujemy na moment s pojedynczy kapitał początkowy K_0 (mnożąc przez $a(s) = e^{\int_0^s r(u)du}$) oraz wpłaty $\varphi(t)$ dokonywane w różnych momentach t (mnożąc przez funkcję akumulacji kapitału dla czasu pozostałego do chwili s , czyli przez $e^{\int_t^s r(u)du} = \frac{a(s)}{a(t)}$). Przypomnijmy, że kapitalizacja z chwilową stopą zwrotu spełnia zasadę stałej efektywności kapitalizacji.

Omawiany wzór może przybrać różne warianty.

1. Gdyby $K_0 = 0$, byłby to model z czasem ciągłym i z chwilową stopą zwrotu z kapitalizacji $r(u)$, zamieszczony w ostatnim wierszu tabeli 3.4.1 w poprzednim podrozdziale.
2. Model z przedostatniego wiersza tabeli 3.4.1 otrzymamy, zakładając, że $\varphi(t) = 0$ dla wszystkich $t \in [0, s]$. Będzie to wówczas model z pojedynczym kapitałem początkowym K_0 , inwestowanym w chwili 0. Interesuje nas dopiero jego wartość w chwili s . W tej sytuacji można posłużyć się znacznie prostszym przypadkiem dyskretnym, z kapitalizacją prostą lub złożoną (w jednym okresie mamy ten sam wzór) ze stopą zwrotu R dla okresu $[0, s]$, traktowanego jako okres bazowy. Oba sposoby kapitalizacji muszą powodować taki sam efekt jednostki kapitału, czyli $1 + R = e^{\int_0^s r(u)du}$. Wynika stąd, że stopa zwrotu w modelu dyskretnym, odpowiadająca chwilowej stopie zwrotu z kapitalizacji $r(u)$ w modelu ciągłym, musi być równa $R = e^{\int_0^s r(u)du} - 1$. Stosując ją, otrzymujemy wzór wyrażający wartość zainwestowanego kapitału w chwili s

$$K(s) = K(0) \cdot e^{\int_0^s r(u)du} = K_0(1 + R),$$

zgodny z modelem z czasem dyskretnym i stopą kapitalizacji R w jednym okresie.

3. Załóżmy, że funkcje φ i r określone na przedziale $[0, s]$ są funkcjami schodkowymi, tzn. $\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \varphi(t_j) \cdot \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$ oraz $r(u) = \sum_{i=1}^k r(t_j) \cdot \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$, gdzie symbol $\chi_{(t_{j-1}, t_j]}$ oznacza funkcję charakterystyczną przedziału $(t_{j-1}, t_j]$. Wartość funkcji φ oraz r w punkcie 0 nie ma znaczenia. Skoki tych funkcji znajdują się w punktach t_1, t_2, \dots, t_{k-1} (gdzie $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k = s$) przedziału $[0, s]$. Chcemy zbudować dyskretny model ka-

pitalizacji, podobny do powyższego, ale w którym kapitalizacja odsetek dokonuje się tylko w punktach t_1, t_2, \dots, t_k . Dlatego naturalnym wydaje się przyjęcie formuły

$$K(s) = \int_0^s \varphi(t) \cdot e^{\int_{\min\{t_j: t_j > t\}}^s r(u) du} dt.$$

Wówczas mamy

$$K(s) = \sum_{j=1}^k \varphi(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\int_{t_j}^s r(u) du} dt.$$

Założmy ponadto, że

$$e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u) du} = 1 + R_{i+1}$$

dla $i = 0, 1, \dots, k-1$, wówczas

$$K(s) = \sum_{j=1}^k \varphi(t_j) \cdot (t_j - t_{j-1}) \cdot \prod_{q=i+1}^k (1 + R_q).$$

Biorąc $t_j = j$, otrzymujemy wzór pozwalający wyznaczyć wartość końcową sumy zainwestowanych kapitałów w momencie $s = k$,

$$K(k) = \sum_{i=1}^k \varphi(i) \prod_{j=i+1}^k (1 + R_j).$$

Wartość aktuarialna (tj. zdyskontowana na moment 0) sumy kapitałów będzie równa

$$K(0) = \sum_{i=1}^k \varphi(t_i) \prod_{j=1}^i v_j,$$

gdzie $v_j = \frac{1}{(1+R_j)}$.

3.6. Ocena inwestycji

Wariant trzeci modelu z podrozdziału 3.5 jest stosowany do wyceny obligacji, rent oraz różnych strumieni przepływów pieniężnych, w których określone są momenty, kierunek i wielkość przepływu. Wielkość $K(0)$, w ostatnim wzorze, zwana jest bieżącą wartością netto inwestycji i oznaczana skrótem NPV (*net present value*).

Definicja 3.6.1. Bieżąca wartość netto inwestycji (NPV) jest sumą zdyskontowanych na moment 0 nakładów i dochodów z inwestycji przy ustalonym modelu kapitalizacji i ustalonej stopie zwrotu.

Wartość ta, przy konkretnym modelu kapitalizacji, służy do oceny i porównywania różnych inwestycji, ponieważ jest jednoznacznie określona. Bardziej opłacalna będzie inwestycja o większej wartości bieżącej netto.

Przykład 3.6.1. [E24.03.2001] Inwestor postanowił zainwestować kapitał P na dwa lata. Przedstawiono mu dwie oferty:

- (i) w ofercie I zagwarantowano efektywną roczną stopę zwrotu 15% w każdym roku trwania inwestycji,
- (ii) w ofercie II zagwarantowano, że natężenie oprocentowania δ_t będzie dane wzorem $\delta_t = 0,1 \cdot t$ w ciągu całego okresu trwania inwestycji.

Inwestor zdecydował, że część $\alpha \cdot P$ kapitału zainwestuje, korzystając z oferty I oraz resztę $(1 - \alpha) \cdot P$ – korzystając z oferty II. Po dwóch latach inwestor posiadał kwotę (kapitał P oraz odsetki) 200 000 zł. Wiadomo, że gdyby inwestor zainwestował $2\alpha \cdot P$, korzystając z oferty I oraz $(1 - 2\alpha) \cdot P$, korzystając z oferty II, to po dwóch latach miałyby kwotę 205 000 zł. Oblicz wysokość kapitału P .

Rozwiązanie. Dla oferty I mamy: $a^I(2) = (1 + 0,15)^2$, dla II: $a^{II}(2) = e^{\int_0^2 0,1s ds} = e^{0,2}$. Korzystając z warunków zadania, dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha P(1,15)^2 + (1 - \alpha) P e^{0,2} = 200\,000 \\ 2\alpha P(1,15)^2 + (1 - 2\alpha) P e^{0,2} = 205\,000 \end{cases}$$

Po odjęciu pierwszego równania od drugiego łatwo otrzymujemy

$$\alpha P = \frac{5\,000}{1,15^2 - e^{0,2}} \approx 49457,33,$$

a podstawiając do pierwszego, mamy $P \approx 160\,000$ zł.

W przykładzie 3.6.1 w wyniku strategii pierwszej mamy kwotę 200 000 zł, a strategii drugiej kwotę 205 000 zł. Zatem, druga inwestycja okazała się bardziej opłacalna. Ten sam wniosek otrzymalibyśmy, porównując bieżące wartości netto obu strategii, przy na przykład kapitalizacji złożonej z roczną stopą R . Mamy $NPV(I) = 200\,000 \cdot (1 + R)^{-2}$ oraz $NPV(II) = 205\,000 \cdot (1 + R)^{-2}$, stąd $NPV(I) < NPV(II)$.

Z bieżącą wartością netto związana jest wewnętrzna stopa zwrotu, oznaczana skrótem IRR (*internal rate of return*).

Definicja 3.6.2. Wewnętrzna stopa zwrotu inwestycji (IRR) to dodatnia stopa zwrotu R (w modelu dyskretnym), przy której wartość obecna (wartość aktuarialna) inwestycji wynosi 0 pod warunkiem, że istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona.

Okazuje się niestety, że wewnętrzna stopa zwrotu może nie istnieć lub nie być jednoznacznie wyznaczona, co pokażemy na poniższym przykładzie.

Przykład 3.6.2. [E25.01.2003] Rozważmy inwestycję, o której wiadomo, że w chwili $t = 0$ otrzymuje się kwotę $(k - 0,5)^2$, po ośmiu latach, czyli w chwili $t = 8$ otrzymuje się kwotę $(k - 1)$, a na końcu szesnastego roku, czyli w chwili $t = 16$ kwotę 1. Sformułować warunek konieczny i wystarczający nieistnienia wewnętrznej stopy zwrotu dla tej inwestycji.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru końcowego z podrozdziału 3.5, z punktu 3:

$$K(0) = \sum_{i=1}^k \varphi(t_i) \prod_{j=1}^i v_j.$$

Zakładamy, że w czasie trwania inwestycji roczna stopa zwrotu R ma jednakową wartość w każdym roku, stąd $v_j = \frac{1}{(1+R)}$ dla wszystkich $j = 1, \dots, 16$.

Zatem

$$K(0) = \sum_{i=0}^2 \varphi(t_i) \left(\frac{1}{1+R}\right)^{t_i} = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + (k - 1) \left(\frac{1}{1+R}\right)^8 + 1 \left(\frac{1}{1+R}\right)^{16} = 0.$$

Podstawiając $x = \left(\frac{1}{1+R}\right)^8$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$x^2 + (k - 1)x + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

które nie ma jednoznacznego rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest różny od zera, czyli gdy $(k - 1)^2 - 4\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$, tzn. gdy $k \neq 0$ lub $k \neq 2/3$.

—————•••••—————

Załóżmy dla uproszczenia, że nakłady i/lub dochody $\varphi(j)$ mają miejsce w równoodległych od siebie momentach j osi czasu. Wówczas punkty t_i dzielą

odcinek $[0, s]$ na k części o równej długości. Zastępujemy chwilę t_i liczbami i (wtedy $s = k$).

Zgodnie z definicją, wewnętrzną stopę zwrotu R (dodatnią, jednakową dla wszystkich okresów $(j - 1, j), j \in \{1, \dots, k\}$) wyznaczamy z równania

$$\sum_{j=0}^k \varphi(j) (1 + R)^{-j} = 0.$$

Podstawiając nową zmienną $x = \frac{1}{1 + R}$ ($x \in (0, 1)$), otrzymujemy równanie, którego lewa strona jest wielomianem stopnia k postaci

$$\sum_{j=0}^k \varphi(j) x^j = 0.$$

Wewnętrzna stopa zwrotu dla tej inwestycji istnieje w przypadku, gdy ten wielomian ma tylko jeden dodatni pierwiastek (bo $R > 0$). Rozstrzygnięcie, czy inwestycja ma wewnętrzną stopę zwrotu, przynosi reguła Kartezjusza [17].

Reguła Kartezjusza. Liczba dodatnich pierwiastków wielomianu o współczynnikach rzeczywistych nie jest większa od liczby zmian znaku w ciągu jego niezerowych współczynników i różni się od niej o liczbę parzystą.

Twierdzenie 3.6.1. Dla inwestycji opisanej ciągiem płatności $\varphi(j)$ dla $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, w którym znak wyrazów ciągu zmienia się dokładnie raz, istnieje w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jeden dodatni pierwiastek wielomianu, gdy

$$- \sum_{\{j: \varphi(j) < 0\}} \varphi(j) < \sum_{\{j: \varphi(j) > 0\}} \varphi(j).$$

Dowód. Na podstawie reguły Kartezjusza wnioskujemy, że wielomian $f(x) = \sum_{j=0}^k \varphi(j) x^j$ ma co najwyżej jedno dodatnie miejsce zerowe. Należy rozważyć dwa przypadki.

1. Załóżmy, że $\varphi(j) \leq 0$ dla $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ jest ciągiem nakładów i $\varphi(j) > 0$ dla $j \in \{m, m + 1, \dots, n\}$ jest ciągiem dochodów z pewnej inwestycji.

Założmy teraz, że $\varphi(0) < 0$, wtedy dla $x = 0$ wielomian przyjmuje wartość ujemną, bo jego wyraz wolny $\varphi(0)$ jest ujemny. Ponadto $f(1) = \sum_{j=0}^k \varphi(j) > 0$. Zatem, na mocy własności Darboux funkcji ciągłych, f ma pierwiastek w przedziale $(0, 1)$.

Przyjmijmy, że $\varphi(0) = \dots = \varphi(i - 1) = 0$ oraz $\varphi(i) < 0$ dla pewnego $i \geq 1$. Wówczas $f(x) = x^i \sum_{j=0}^{k-i} \varphi(j + i) x^j$. Ponieważ funkcja $g(x) = x^i$ jest dodatnia

na $(0, \infty)$, więc wystarczy pokazać, że wielomian $h(x) = \sum_{j=0}^{k-i} \varphi(j+i)x^j$ ma pierwiastek leżący w przedziale $(0, 1)$. O funkcji h wiemy, że $h(0) = \varphi(i) < 0$ i $h(1) = \sum_{j=0}^k \varphi(j) > 0$. Stąd na mocy własności Darboux funkcji ciągłych f ma pierwiastek w przedziale $(0, 1)$.

2. W przypadku drugim, kiedy najpierw następują dochody z inwestycji, a potem nakłady (na przykład przy otrzymaniu kredytu) przebieg rozumowania jest podobny. □

Przykład 3.6.3. [E10.10.2005] Które spośród podanych stwierdzeń są prawdziwe?

1. $s_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^n a(t)$ w modelu oprocentowania prostego.
2. Jeżeli c_i są płatnościami w chwilach $t_i = 1, 2, \dots, n$, to dla

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

prawdziwe jest stwierdzenie

$$\frac{\sum_{i=1}^n c_i v^{t_i}}{\sum_{i=1}^n c_i} > v^{\bar{t}}$$

(dla czynnika dyskontującego $0 < v < 1$).

3. Dla każdego ciągu przepływów pieniężnych

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n,$$

gdzie $m < n$, wewnętrzna stopa zwrotu IRR istnieje i jest jednoznacznie określona w przypadku, gdy przepływy a_i są tylko ujemne dla $i < m + 1$, a tylko dodatnie dla $i > m$.

Rozwiązanie 1. Symbol $s_{\overline{n}|}$ oznacza wartość, w momencie n , wypłat renty w wysokości 1, dokonywanych w chwilach 1, 2, ..., n .

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= a(n-1) + a(n-2) + \dots + a(1) + a(0) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a(i) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + i \cdot R) = n \left(1 + \frac{n-1}{2} R \right). \end{aligned}$$

Podany wzór nie jest prawdziwy, gdyż górny indeks sumowania powinien być równy $n - 1$.

2. Wzór $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i}{\sum_{i=1}^n c_i}$ określa średni czas trwania (*duration*) instrumentu przynoszącego stały dochód. Jest to średnia ważona długości okresów, po ja-

kich pojawiają się przepływy pieniężne. Wiemy, że jeśli f jest funkcją ściśle wypukłą, to

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) < \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)$$

dla $\lambda_i > 0$ oraz takich, że $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Podstawiając $\lambda_i = \frac{c_i}{\sum c_j}$, $x_i = t_i$, $f(u) = v^u$, otrzymujemy podane stwierdzenie.

3. Stwierdzenie jest prawdziwe, patrz twierdzenie 3.6.1.

3.7. Wycena obligacji

Jak wspomnieliśmy, model 3. z podrozdziału 3.5 postaci

$$K(0) = \sum_{i=1}^k \varphi(t_i) \prod_{j=1}^i v_j$$

może posłużyć do wyceny obligacji przy założeniu, że punkty t_i dzielą odcinek $[0, s]$ na $(k + 1)$ części o równej długości. Zastąpmy chwile t_i liczbami i . Załóżmy też, że $v_j = \frac{1}{(1 + R)}$ dla wszystkich $j = 1, \dots, k$. Wtedy

$$K(0) = \sum_{i=1}^k \varphi(i) (1 + R)^{-i}$$

oznacza bieżącą cenę obligacji (tj. wartość obligacji w chwili 0). Wielkości $\varphi(i)$ (dla $i = 1, \dots, k - 1$) mają jednakowe znaki i określają wypłaty z kuponów, a $\varphi(k)$ jest sumą wypłaty z ostatniego kuponu i kwoty za wykup obligacji w terminie jej zapadalności k .

Przykład 3.7.1. [E15.01.2000] Dane są trzy rodzaje obligacji o tej samej wartości wykupu i te same terminy płatności kuponów.

- (i) pierwsza obligacja z kuponem w wysokości 40 ma cenę P ,
- (ii) druga obligacja z kuponem w wysokości 30 ma cenę Q ,
- (iii) trzecia obligacja z kuponem w wysokości 80 ma cenę S .

Wyznacz cenę S trzeciej obligacji.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{k-1} 40 (1 + R)^{-i} + \varphi(k)(1 + R)^{-k}, \\ Q &= \sum_{i=1}^{k-1} 30 (1 + R)^{-i} + \varphi(k)(1 + R)^{-k}, \\ S &= \sum_{i=1}^{k-1} 80 (1 + R)^{-i} + \varphi(k)(1 + R)^{-k}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $40 \cdot 5 - 30 \cdot 4 = 80$. Mnożąc pierwsze równanie przez 5, a drugie przez (-4) i odejmując stronami, otrzymujemy $5P - 4Q = S$.



Przykład 3.7.2. [E05.12.2005] Zakład ubezpieczeń majątkowych emituje 10-letnią obligację katastroficzną z rocznym kuponem X i nominałem 1200 zł. W momencie wystąpienia pierwszej katastrofy wszystkie przyszłe płatności z tytułu obligacji zostają umorzone. Ile wynosi kupon tej obligacji, jeżeli:

- (i) prawdopodobieństwa co najmniej jednej katastrofy w każdym roku są równe $p = 5\%$ i są niezależne,
- (ii) druga i kolejne katastrofy w dowolnym czasie nie mają wpływu na płatności z obligacji,
- (iii) inwestorzy dyskontują wszystkie płatności z obligacji przy stopie $i = 8\%$ w skali roku,
- (iv) rynkowa cena obligacji wynosi 850.

Rozwiązanie. Niech zmienna losowa Z oznacza sumę wartości wypłat z obligacji zdyskontowanych na chwilę 0. Rozkład zmiennej losowej Z przedstawiono poniżej.

Obecna wartość	0	Xv	$Xv + Xv^2$...	$Xv + Xv^2 + \dots + Xv^9$	$Xv + Xv^2 + \dots + Xv^{10} + 1200v^{10}$
Prawdopodobieństwo	0,05	$0,05 \cdot 0,95$	$0,05 \cdot 0,95^2$...	$0,05 \cdot 0,95^9$	$0,95^{10}$

Funkcja dyskonta dla jednego okresu wynosi $v = \frac{1}{1,08}$. Jeżeli rynek dobrze wycenił tę obligację, to cena rynkowa jest równa bieżącej cenie obligacji, a ta jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej Z

$$850 = \sum_{k=1}^9 \left(\sum_{i=1}^k Xv^i \right) 0,05 \cdot 0,95^k + 0,95^{10} \left[\left(\sum_{i=1}^{10} Xv^i \right) + 1200v^{10} \right].$$

Korzystając ze wzoru na sumę k wyrazów ciągu geometrycznego, mamy

$$850 = 0,05 \sum_{k=1}^9 \left(X \frac{v}{1-v} (1-v^k) \right) \cdot 0,95^k + 0,95^{10} \left[\left(X \frac{v}{1-v} (1-v^{10}) \right) + 1200v^{10} \right].$$

Dalej równanie przekształcamy do postaci

$$850 = 0,05 \left[\left(\sum_{k=1}^9 X \frac{v}{1-v} \right) - \left(\sum_{k=1}^9 X \frac{v^{k+1}}{1-v} \right) \right] \cdot 0,95^k + \\ + 0,95^{10} \left[\left(X \left(\frac{v}{1-v} - \frac{v^{11}}{1-v} \right) \right) + 1200 v^{10} \right].$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $X \approx 98$.



Zadania do rozdziału 3

1. Potrzebujemy 5 kg proszku do prania. W jakim przypadku zapłacimy najniższą cenę za kilogram, jeśli mamy do wyboru następujące możliwości:
 - kupić w najbliższym sklepiku 5 opakowań kilogramowych w cenie detalicznej 12 zł za jedno,
 - wziąć „na zeszyt” w osiedlowym sklepiku opakowanie pięciokilogramowe za 57 zł, a zapłacić po miesiącu z pięcioprocentowymi odsetkami za odroczenie zapłaty.
2. Zamierzamy nabyć telewizor za 4999,99 zł. Mamy do wyboru trzy sposoby zapłaty:
 - a) zapłacić od razu,
 - b) wpłacić 10% ceny, wnieść opłatę 50 zł, a resztę spłacić w 12 ratach miesięcznych z dołu, po 400 zł,
 - c) kupić dwa takie telewizory w promocji „drugi za pół ceny”, a po miesiącu sprzedać ten zbędny za 3300 zł, płacąc 19-procentowy podatek od tej transakcji.Który sposób jest dla nas najkorzystniejszy, jeśli przyjmiemy, że roczna inflacja jest na poziomie 6%?
3. Chcemy zainwestować kapitał początkowy 1000 USD na dwa lata. Mamy do wyboru trzy oferty banku:
 - a) roczna lokata z roczną kapitalizacją (złożoną) i nominalną stopą procentową odsetek wynoszącą 4%,
 - b) lokata półroczna z nominalną stopą procentową w wysokości 3% przy odsetkach kapitalizowanych miesięcznie w sposób składany,
 - c) lokata półroczna ze stopą procentową wynoszącą 3,1% w kapitalizacji ciągłej.Z każdej z ofert możemy skorzystać tylko raz. W jakiej kolejności należy wybrać oferty, aby wartość kapitału po dwóch latach była największa?
4. Wykazać, że chwilowa stopa zwrotu spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt}r(t) + (r(t))^2 - \frac{1}{K(t)}\frac{d^2}{dt^2}K(t) = 0.$$

5. Wykazać, że czynnik dyskonta w kapitalizacji z chwilową stopą zwrotu w okresie $[a, b]$, gdzie $0 < a < b$, wyraża się wzorem
$$A(a, b) = e^{-\int_a^b r(s)ds}.$$
6. Wykazać, że w kapitalizacji złożonej, ciągłej oraz z góry spełniona jest zasada stałej efektywności.
7. Kwotę 1000 PLN inwestor ulokował w banku na rok na lokacie oprocentowanej 4% w stosunku rocznym, później na lokacie kwartalnej oprocentowanej z góry z nomi-

nalnym oprocentowaniem 3,25% i trzykrotnie na lokaty kwartalne z oprocentowaniem ciągłym na 5%, 4% i 3% odpowiednio. Ile wyniosła końcowa wartość jego kapitału? Zapisać wzór funkcji akumulacji kapitału dla tej inwestycji.

8. Funkcja akumulacji kapitału ma postać $a(n) = \begin{cases} 0,5n + 1 & \text{dla } n = 0 \text{ lub } 1 \\ n^2 - 4n + 6 & \text{dla } n = 2 \text{ lub } 3. \\ \ln n & \text{dla } n = 4, 5, 6 \end{cases}$

W którym okresie intensywność akumulacji była największa?

9. Chwilową stopę zwrotu określa wzór $r(t) = 1/(1 + t)$, $t \in (0, \infty)$. Znaleźć postać funkcji akumulacji kapitału. Jaki to rodzaj kapitalizacji?
10. Znaleźć wzór określający funkcję akumulacji kapitału i określić rodzaj kapitalizacji w następujących przypadkach:
- Wartość jednostki kapitału zainwestowanego na $(t + s)$ okresów jest równa sumie wartości jednostki kapitału zainwestowanej na t okresów i wartości jednostki kapitału zainwestowanej na następnych s okresów pomniejszonej o jej wartość początkową.
 - Wartość jednostki kapitału zainwestowanego na $(t + s)$ okresów jest równa iloczynowi wartości jednostki kapitału zainwestowanej na t okresów i wartości jednostki kapitału zainwestowanej na następnych s okresów.
11. Zakładając, że stopa w każdym okresie kapitalizacji wynosi R ($R > 0$), ocenić bezwzględny i względny przyrost w okresie $[n - 1, n]$ funkcji akumulacji kapitału z poprzedniego zadania (gdzie $n = 1, 2, \dots$).
12. [E02.06.2001] Dla funduszu A natężenie oprocentowania wynosi $r(t) = (1 + t)^{-1}$, natomiast dla funduszu B $r(t) = 2t \cdot (1 + t^2)^{-1}$. W chwili $t = 0$ inwestujemy 100 000 zł w każdy z funduszy. Jeżeli $A(t)$ oznacza kwotę zgromadzoną w chwili t w funduszu A, natomiast $B(t)$ w funduszu B, znajdź t , dla którego funkcja $C(t) = A(t) - B(t)$ osiąga maksimum.
13. [E06.12.2003] Natężenie oprocentowania zadane jest wzorem

$$r(t) = \frac{1}{1 + 2 \cdot e^t} + \frac{2}{1 + 3 \cdot e^{2t}}$$

dla $t > 0$. Wyznacz efektywną roczną stopę zwrotu w ciągu trzeciego roku trwania inwestycji, tj. w okresie pomiędzy $t = 2$ a $t = 3$.

14. [E09.10.2006] Funkcja intensywności oprocentowania w chwili t dla kwoty zainwestowanej w chwili s , $0 \leq s \leq t$, wynosi $\delta(s, t) = (1 + s + t)^{-1}$. Funkcja $a(s, t)$ jest funkcją akumulacji w chwili t kwoty zainwestowanej w chwili s . Wyznacz różnicę $a(1, 4) - [a(1, 2) \cdot a(2, 4)]$ między akumulacją bez reinwestycji i z reinwestycją.
15. [E12.10.2002] O pewnej inwestycji wiadomo, że w chwili $t = 0$ oraz w chwili $t = 2$ należy wpłacić odpowiednio $P_0 = 504$ oraz $P_2 = 2400$, natomiast w chwili $t = 1$ oraz

w chwili $t = 3$ otrzymuje się odpowiednio $B_1 = 1910$ oraz $B_3 = 1000$. Które z poniższych sformułowań są prawdziwe:

- (i) istnieją dokładnie dwie wewnętrzne stopy zwrotu, z których jedna wynosi 25%,
- (ii) wartość obecna tej inwestycji jest funkcją rosnącą stopy zwrotu R dla $R \in [0,25, 0,3]$,
- (iii) dla $v \in [0,6; 0,91]$ wartość obecna tej inwestycji jest minimalizowana dla $v_1 = 0,6$, a maksymalizowana dla $v_2 = 0,91$.

16. Uzupełnij tabelę.

Równanie różniczkowe zmian kapitału	Funkcja akumulacji kapitału	Dopływ kapitału do inwestycji	Rozwiązanie równania różniczkowego
$K'(t) - K(t) = e^t$ $t \in (0, s)$		$\varphi(t) = e^t$ rosnąca wykładniczo od 1 do e^s	$K(t) = (t + K(0))e^t$
$K'(t) - tg(t) \cdot K(t) = 2 \sin(t)$ $t \in (0, s), s = \frac{\pi}{2}$	$a(t) = \cos(t)$ maleje od 1 do 0	$\varphi(t) = 2 \sin(t)$ rosnąca od 0 do 2	
$K'(t) - a \cdot K(t) = e^{at}$ $t \in (0, s)$	$a(t) = e^{at}$ $a > 0$ - kapitalizacja ciągła ze stopą a , $a < 0$ - funkcja dyskonta ze stopą $-a$		$K(t) = (t + K(0))e^{at}$
$K'(t) - \left(1 - \frac{t}{s}\right) \cdot K(t) = e^{-\frac{t^2}{2s}}$ $t \in (0, s)$		$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2s}}$ malejąca wykładniczo od 1 do $e^{-s/2}$	$K(t) = (K(0) + 1 - e^{-t}) \cdot e^{t - \frac{t^2}{2s}}$

Odpowiedzi

1. W pierwszym przypadku zapłacimy $(5 \cdot 12)/5 = 12$ zł/kg, w drugim $(57 \cdot 1,05)/5 = 11,97$ zł/kg.
2. Obecna cena telewizora przy pierwszym sposobie zapłaty wynosi 4999,99 zł, przy drugim $500 + 50 + 400 \cdot (v + v^2 + v^3 + \dots + v^{12}) = 550 + 400v \cdot (1 - v^{12})/(1 - v) = 5548$ zł, gdzie czynnik dyskonta za okres miesięczny wynosi $v = (1 + 0,06/12)^{-1/12} \approx 0,9996$, $v^{12} \approx 0,995$. W trzecim przypadku płacimy za dwa telewizory 7499,99 zł, zwraca się kwota $3300 \cdot 0,81 \cdot v = 2\ 671,93$ zł. Wartość obecna telewizora wyniesie 4828,06 zł.
3. W dowolnej. Funkcja akumulacji kapitału jest iloczynem (przemienność!) trzech czynników: 1,04; 1,00125 i 1,0156, bo wszystkie kapitalizacje spełniają zasadę stałej efektywności.
4. Wystarczy zróżniczkować wzór podany w definicji 3.1.2.

5. Wykorzystać twierdzenie 3.1.1 oraz definicję 3.2.1.
6. Użyć definicji 3.4.1 do wzorów z tabeli 3.4.1.
7. 1080,45 PLN, $a(5) = 1,04 \cdot (1 - 0,0325/4)^{-1} \cdot e^{0,04 \cdot 1/4} \cdot e^{0,04 \cdot 1/4} \cdot e^{0,03 \cdot 1/4}$.
8. $[0, 1]$ i $[2, 3]$.
9. $a(t) = 1 + t$, kapitalizacja prosta.
10. Skorzystać z podrozdziału 3.4. Kapitalizacja prosta $a(t + s) = a(t) + a(s) - 1$, kapitalizacja złożona $a(t + s) = a(t) \cdot a(s)$.
11. Stałe są: przyrost bezwzględny w kapitalizacji prostej i względny w kapitalizacji złożonej. W kapitalizacji prostej przyrosty względne maleją z upływem czasu. W kapitalizacji złożonej bezwzględne przyrosty wzrastają z upływem czasu.
12. $t = 1/2$.
13. $\frac{a(3) - a(2)}{a(2)} \approx 0,048 = 4,8\%$.
14. $a(s, t) = (1 + s + t)/(1 + 2s)$, odp. 2/15.
15. (i) Nie jest prawdziwe, są trzy. Pierwiastkami równania są 0,8, 0,9 i 0,7. Odpowiadają im następujące stopy zwrotu: 1/4, 1/9 i 3/7.
 (ii) Tak, pochodna jest dodatnia dla $R \in [0,16; 0,35]$.
 (iii) Nie, podane liczby nie są miejscami zerowymi pochodnej, nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum.
16. Wiersz pierwszy: $a(t) = e^t$ kapitalizacja ciągła ze stopą 1, wiersz drugi: $K(t) = \frac{\sin^2(t) + K(0)}{\cos(t)}$, wiersz trzeci: $\varphi(t) = e^{at}$ dla $a > 0$ – rosnąca wykładniczo od 1 do e^{as} , dla $a < 0$ – malejąca wykładniczo od 1 do e^{as} , wiersz czwarty: $a(t) = e^{t - \frac{t^2}{2s}}$.

4. Modele z losową stopą zwrotu

4.1. Kapitalizacja spełniająca zasadę stałej efektywności

Rzadko zdarza się, że stopy zwrotu mają identyczne wartości we wszystkich rozważanych okresach. Dlatego w tym rozdziale zakładamy, że stopy zwrotu R_i z zainwestowanego kapitału w i -tym okresie ($i = 1, 2, \dots, n$) (lub ich równoważne odpowiedniki) są zmiennymi losowymi. Niech K_0 i K_n będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Zmienna losowa $K(n)$, oznaczająca wartość kapitału początkowego K_0 w chwili n , wyraża się za pomocą $a(n)$ jako

$$K(n) = K_0 \cdot a(n).$$

Podobnie możemy rozpatrywać zmienną losową $K(0) = K_n \cdot v(n)$, oznaczającą wartość K_n kapitału w chwili n , zdyskontowaną na chwilę 0.

Założenia o rozkładach stóp zwrotu są wyrazem naszych przewidywań co do przyszłych ich wartości. Na przykład, jeśli obecnie stopa zwrotu kapitału R_0 jest znana i wynosi 5% w okresie bazowym oraz przypuszczamy, że w następnym okresie znajdzie się pomiędzy 2 i 8%, to możemy założyć, że R_1 ma rozkład jednostajny na przedziale $[2\%, 8\%]$ o gęstości $\frac{1}{6}$ dla $x \in [2, 8]$, co oznaczymy symbolem $J [2, 8]$. Wtedy zmienna losowa $(1 + R_1)$, wyrażona w procentach, ma rozkład jednostajny $J [102, 108]$ o dystrybuancie $F_{1+R_1}(t) = \frac{t-102}{6}$ dla $t \in [102, 108]$. Wtedy funkcja dyskonta $v_1(t) = \frac{1}{1+R_1}$ ma rozkład o dystrybuancie $F_{v_1}(t) = \frac{1}{6}(108 - \frac{1}{t})$ dla $t \in [\frac{1}{102}, \frac{1}{108}]$.

Dobór odpowiedniego rozkładu jest uwarunkowany postulatem o nieujemności zmiennych losowych R_i , co się przekłada na nieujemność zmiennych losowych $a(n)$, $v(n)$, $K(n)$ i $K(0)$. Dlatego większość modeli opiera się na rozkładzie logarytmiczno-normalnym, a jeśli wybiera się rozkład normalny, to z zastrzeżeniem, że w praktyce zmienne losowe R_i nie mogą przyjąć wartości mniejszej niż -1 (czyli -100%). Osiągnięcie wartości -1 przez losową stopę zwrotu oznacza utratę całego zainwestowanego kapitału.

Rozważmy najczęściej stosowany model kapitalizacji dyskretnej, spełniającej zasadę stałej efektywności. Przy kapitalizacji złożonej z czasem dyskretnym funkcja akumulacji kapitału ma postać $a(n) = (1 + R_1) \cdot (1 + R_2) \cdot \dots \cdot (1 + R_n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest więc iloczynem czynników postaci

$(1 + R_i)$, zwanych **stopami brutto**. Funkcja dyskonta jest równa

$$v(n) = \frac{1}{a(n)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + R_i}.$$

Jako iloczyn zmiennych losowych $(1 + R_i)$ lub ich odwrotności funkcje $a(n)$ oraz $v(n)$ są **zmiennymi losowymi** (jako funkcje borelowskie zmiennych losowych).

W modelach kapitalizacji spełniających zasadę stałej efektywności wykorzystuje się rozkłady, dla których rozkład iloczynu lub ilorazu daje się łatwo wyznaczyć. Inny problem stanowi opis zależności stopy zwrotu w i -tym okresie od wartości stóp w poprzedzających okresach. Wówczas albo zakłada się, że takiej zależności nie ma, albo stosuje się zaawansowane modele – modele Markowa, procesy autoregresji lub funkcje łącznikowe (patrz [3]).

Wiele twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa pozwala wyznaczać charakterystyki funkcji akumulacji kapitału i funkcji dyskonta, takie jak rozkład prawdopodobieństwa, momenty zwykłe i centralne (o ile istnieją).

Twierdzenie 4.1.1. Jeżeli stopy zwrotu z inwestycji w kolejnych okresach tworzą ciąg (R_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z wartością oczekiwaną $\mu \geq -1$ i skończoną wariancją $\sigma^2 > 0$, wówczas wartość oczekiwana jednostki pieniężnej po n okresach kapitalizacji jest równa

$$E(a(n)) = (1 + \mu)^n,$$

a wariancja wartości jednostki pieniężnej po n okresach kapitalizacji jest równa

$$Var(a(n)) = \{\sigma^2 + (1 + \mu)^2\}^n - (1 + \mu)^{2n}.$$

Dowód. Ciąg (R_i) tworzą niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie. Ich wartość oczekiwana $E(R_i) = \mu$, a wariancja $Var(R_i) = \sigma^2 > 0$, stąd

$$\begin{aligned} E(a(n)) &= E(1 + R_1) \cdot E(1 + R_2) \cdot \dots \cdot E(1 + R_n) = \\ &= (1 + E(R_1))^n = (1 + \mu)^n, \\ E(a^2(n)) &= E[(1 + R_1) \cdot (1 + R_2) \cdot \dots \cdot (1 + R_n)]^2 = \\ &= E[(1 + R_1)^2] \cdot E[(1 + R_2)^2] \cdot \dots \cdot E[(1 + R_n)^2] = \\ &= \{E[(1 + R_1)^2]\}^n = \{Var[1 + R_1] + [E(1 + R_1)]^2\}^n = \\ &= \{\sigma^2 + (1 + \mu)^2\}^n, \end{aligned}$$

$$Var(a(n)) = E(a^2(n)) - [E(a(n))]^2 = \{\sigma^2 + (1 + \mu)^2\}^n - [(1 + \mu)^n]^2.$$

Dodatkowy warunek $\mu \geq -1$ zapewnia nieujemność wyrażenia $E(a(n))$, gdy n jest nieparzyste. □

Przykład 4.1.1. [E05.06.2006] Inwestor dokonuje w banku lokaty w kwocie 1000 PLN na 10 lat. Roczne stopy zwrotu w poszczególnych latach są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-10\%, 25\%]$. Ile wynosi współczynnik $E(X)/\sigma(X)$ dla tej lokaty?

Rozwiązanie. Z własności rozkładu jednostajnego wynika, że $\mu = E(R_i) = \frac{-0,1+0,25}{2} = 0,075$ oraz $\sigma^2 = \text{Var}(R_i) = \frac{(0,25-(-0,1))^2}{12} \approx 0,0102$. Korzystając z twierdzenia 4.1.1, mamy:

$$E(1000 \cdot a(10)) = 1000 \cdot (1 + 0,075)^{10} \approx 2061,03,$$

$$\text{Var}(1000 \cdot a(n)) = 10^6(\{0,0102 + (1,075)^2\}^{10} - [(1,075)^{10}]^2) \approx 390\,180.$$

Współczynnik $E(X)/\sigma(X)$ wynosi około 3,3.



Warto zwrócić uwagę, że dla dowolnego rodzaju kapitalizacji zmienne losowe $a(n)$ i $v(n)$, będące swoimi odwrotnościami, nie muszą mieć wartości oczekiwanych, które są liczbami odwrotnymi.

||| **Twierdzenie 4.1.2.** Wartość oczekiwana losowej funkcji dyskonta jest równa odwrotności wartości oczekiwanej funkcji akumulacji kapitału tylko w przypadku rozkładu zdegenerowanego.

Dowód. Załóżmy, że obie wartości oczekiwane istnieją i są skończone. Powyższe twierdzenie wynika wprost z nierówności Jensena. Jeśli f jest funkcją ściśle wypukłą, to $E(f(X)) > f(E(X))$ dla niezdegenerowanej zmiennej losowej X . Weźmy funkcję ściśle wypukłą $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$. Można wtedy zapisać:

$$E(v(n)) = E\left(\frac{1}{a(n)}\right) > \frac{1}{E(a(n))}.$$

Jeśli natomiast prawdopodobieństwo $P(X = c) = 1$ dla pewnej liczby rzeczywistej c , wówczas $E(f(X)) = E(f(c)) = E\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c} = f(c) = f(E(X))$. □

Przykład 4.1.2. [E14.05.2007] Efektywna stopa zwrotu w okresie od $t - 1$ do t wynosi i_t dla $t = 1, 2, \dots, n$. Zakładamy, że i_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach ze średnią i oraz wariancją s^2 . Rozważamy:

- A. Zakumulowaną wartość kwoty 1 na koniec okresu n , oznaczaną przez $a(n)$.
- B. Obecną wartość płatności 1, wykonanej w chwili n , oznaczanej przez $a^{-1}(n)$.
- C. Przyszłą wartość (na moment n) jednostkowej renty pewnej, n -letniej, płatnej na początku roku t , $t = 1, 2, \dots, n$, oznaczanej przez $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Które stwierdzenia są prawdziwe?

- A. Wariancję zmiennej losowej $a(n)$ opisuje wzór

$$Var(a(n)) = \{s^2 + 1 + 2i + i^2\}^n - [1 + i]^{2n}.$$

- B. Wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ opisuje wzór $E(\ddot{s}_{\overline{n}|}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$.

- C. Wartość oczekiwaną zmiennej losowej $a^{-1}(n)$ opisuje wzór $E(a^{-1}(n)) = (1+i)^{-n}$.

Rozwiązanie. Stwierdzenie A jest prawdziwe na mocy twierdzenia 4.1.1.

Mamy: $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i_1)(1+i_2) \dots (1+i_n) + (1+i_2) \dots (1+i_n) + \dots + (1+i_n)$ lub krótko $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^n \prod_{k=j}^n (1+i_k)$, stąd

$$\begin{aligned} E(\ddot{s}_{\overline{n}|}) &= \sum_{j=1}^n E\left(\prod_{k=j}^n (1+i_k)\right) = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=j}^n E(1+i_k)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j+1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \end{aligned}$$

Wzór w B jest prawdziwy. Stwierdzenie C jest fałszywe ze względu na twierdzenie 4.1.2.

◆◆◆◆◆

Rozważmy najczęściej stosowany model kapitalizacji dyskretniej, spełniającej zasadę stałej efektywności.

Twierdzenie 4.1.3. Zakładamy, że stopy zwrotu brutto z inwestycji $(1 + R_i)$ tworzą, w kolejnych okresach, ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych $LN(\mu_i, \sigma_i^2)$, gdzie $\sigma_i^2 > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Wówczas funkcja akumulacji kapitału $a(n)$ ma rozkład $\text{LN}(a, b^2)$, funkcja dyskonta $v(n)$ ma rozkład $\text{LN}(-a, b^2)$, zmienna losowa $K(n)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) + a, b^2)$ oraz zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) - a, b^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ i $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ (przyjmujemy, że $b > 0$).

Dowód. Zmienna losowa X ma rozkład $\text{LN}(\mu_i, \sigma_i^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ln(X)$ ma rozkład $N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Rozważmy zmienną losową $\ln(a(n)) = \ln(1 + R_1) + \dots + \ln(1 + R_n)$. Jako suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych ma rozkład normalny $N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$. Stąd $a(n) = e^{\ln(a(n))}$ ma rozkład $\text{LN}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$. Dalej, $K(n)$ jest iloczynem dodatniej stałej K_0 i funkcji $a(n)$, więc ten iloczyn będzie miał taki sam rozkład i drugi parametr, jak funkcja akumulacji kapitału, zmianie ulegnie jedynie pierwszy parametr. Stąd wynika, że $K(n)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

Dalej dowodzimy w podobny sposób, że $\ln(v(n)) = -\ln(1 + R_1) - \dots - \ln(1 + R_n)$ jest sumą n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $N(-\mu_i, \sigma_i^2)$, ma więc rozkład normalny $N(-\mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$. Zatem, funkcja dyskonta $v(n)$ ma rozkład logarytmiczno-normalny $\text{LN}(-\mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$, a zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$. □

Przykład 4.1.3. Na roczną, odnawialną co kwartał lokatę wpłacono kwotę 10 tys. zł. Przyjmijmy, że w kolejnych czterech kwartałach kwartalne stopy oprocentowania brutto dla tej lokaty będą miały niezależne rozkłady logarytmiczno-normalne: $\text{LN}(0,04, 0,0004)$, $\text{LN}(0,02, 0,0001)$, $\text{LN}(0,03, 0,0002)$ i $\text{LN}(0,03, 0,0001)$. Podać prognozę wartości lokaty po roku na podstawie wartości oczekiwanej i mediany oraz porównać te wielkości. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną wartość lokaty po roku. Oszacować prawdopodobieństwo, że wartość lokaty po roku będzie większa niż jej wartość oczekiwana.

Rozwiązanie. Przyjmuje się, że jeśli w zadaniu nie określono rodzaju kapitalizacji, to zakładamy, że jest to kapitalizacja złożona. W dalszej części rozdziału uzasadnimy przyczyny takiego podejścia. Załóżmy więc, że kapitalizacja odbywa się tylko na końcu każdego kwartału, a wysokość kwartalnej stopy zwrotu brutto w tym momencie określa odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa podany w treści zadania. Zmienna losowa W reprezentująca wartość wyrażonej w złotych lokaty po roku będzie podlegała rozkładowi $\text{LN}(\ln(10^3) + 0,04 + 0,02 + 0,03 + 0,03, 0,0004 + 0,0001 + 0,0002 + 0,0001)$, czyli $\text{LN}(3 \cdot \ln(10) + 0,12, 0,0008)$.

Tabela 4.1.1. Wzory określające wybrane charakterystyki zmiennej losowej W podlegającej rozkładowi logarytmiczno-normalnemu $LN(a, b^2)$, gdzie $a, b \in \mathfrak{R}, b^2 > 0$ [17]

Nazwa	Wartość oczekiwana	Dominanta	Mediana	Wariancja	Współczynnik zmienności
Wzór	$E(W) = e^{a + \frac{b^2}{2}}$	$Do(W) = e^{a - b^2}$	$Me(W) = e^a$	$Var(W) = e^{2a + 2b^2} - e^{2a + b^2}$	$\eta(W) = \frac{b}{\sqrt{e^{b^2} - 1}}$

Korzystając ze wzorów podanych w tabeli 4.1.1, wykonujemy obliczenia. Prognoza obliczona według wartości oczekiwanej wynosi $E(W) = e^{3 \ln(10) + 0,1204} \approx 1127,95$ zł, natomiast według mediany $Me(W) = e^{3 \ln(10) + 0,12} \approx 1127,50$ zł. Różnice w wartościach prognoz są nieistotne w porównaniu z kwotą 10 tys. zł. Najbardziej prawdopodobną wartość lokaty określa dominanta wynosząca w tym rozkładzie $Do(W) = e^{3 \ln(10) + 0,1192} \approx 1126,60$ zł. Ponadto, można obliczyć, że odchylenie standardowe wartości lokaty, będące pierwiastkiem kwadratowym z wariancji, jest równe 31,91 zł; niewielkie w porównaniu z kwotą lokaty. Współczynnik zmienności także przyjmuje niewielką wartość (2,8%).

Prawdopodobieństwo, że wartość lokaty po roku będzie większa niż jej wartość oczekiwana, jest równe $P(W > E(W)) = 1 - F_W(1127,95) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1127,95) - (3 \cdot \ln(10) + 0,12)}{\sqrt{0,0008}}\right) = 1 - \Phi(0,0135) \approx 0,4946$, gdzie funkcja Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego.



Rozważmy przypadek kapitalizacji zwanej ciągłą. Przyjmijmy, że r_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ oznaczają chwilowe stopy zwrotu z zainwestowanego w chwili 0 kapitału w kolejnych okresach i że zmiana ich wysokości może nastąpić tylko na końcu okresu. Oczywiście wewnątrz okresu utrzymują się one na tym samym poziomie, a kapitalizacja jest dokonywana w każdej chwili (punkcie) przedziału $[0, T^*]$, podzielonego na okresy (niekoniecznie równej długości). Funkcja akumulacji kapitału przyjmuje więc postać $a(n) = \exp\{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n\}$. Jest więc iloczynem czynników postaci $\exp\{r_i\}$, gdzie $\exp\{x\}$ jest innym zapisem wyrażenia e^x . Jako iloczyn zmiennych losowych funkcja $a(n)$ jest zmienną losową. Ponadto, czynnik dyskonta, jako jej odwrotność, wyraża się wzorem $v(n) = \exp\{-r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n\}$. Możemy dopuścić, że zmienna losowa r_i przybierze ujemną wartość dla pewnych i , co oznaczałoby deflację w tych okresach.

Twierdzenie 4.1.4. Załóżmy, że w każdym okresie obowiązuje kapitalizacja ciągła ze stałą stopą procentową r_i (w i -tym okresie), która ma rozkład normalny $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ z dodatnią wariancją σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$), niezależny od rozkładów w pozostałych okresach. Wówczas funkcja akumulacji kapitału $a(n)$ ma rozkład $LN(a, b^2)$, funkcja dyskonta $v(n)$ ma rozkład $LN(-a, b^2)$, zmien-

na losowa $K(n)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) + a, b^2)$ oraz zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) - a, b^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ i $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ (przyjmujemy, że $b > 0$).

Dowód. Zastąpmy zmianę e^{r_i} wartości jednostki kapitału w i -tym okresie w modelu ciągłym kapitalizacją dyskretną ze stopą R_i , dokonywaną w chwili końcowej i -tego okresu. Wielkości te będą powiązane zależnością $1 + R_i = e^{r_i}$. Korzystając z twierdzenia 4.1.3, otrzymujemy natychmiast tezę. □

Z twierdzeń 4.1.3 i 4.1.4 wynika, iż modele w nich rozpatrywane są równoważne w tym sensie, że prowadzą do takich samych wniosków. Wymaga to jednak wyboru kapitalizacji spełniającej zasadę stałej efektywności i odpowiedniego rozkładu stóp zwrotu, powiązanego z rozkładem logarytmiczno-normalnym. Można na przykład sformułować analogiczne twierdzenie dla kapitalizacji z góry, zakładając, iż zmienna losowa $\frac{1}{1-R}$ ma rozkład $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ (z parametrem $\sigma > 0$) o gęstości

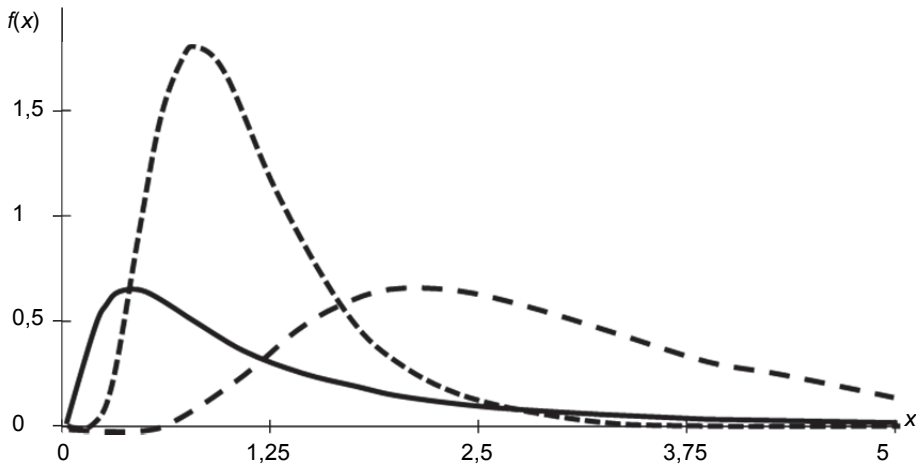
$$f_{\frac{1}{1-R}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma x} \varphi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

dla $x \in (0, \infty)$, gdzie φ jest gęstością rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Jest to równoważne stwierdzeniu, że gęstość zmiennej losowej R jest równa

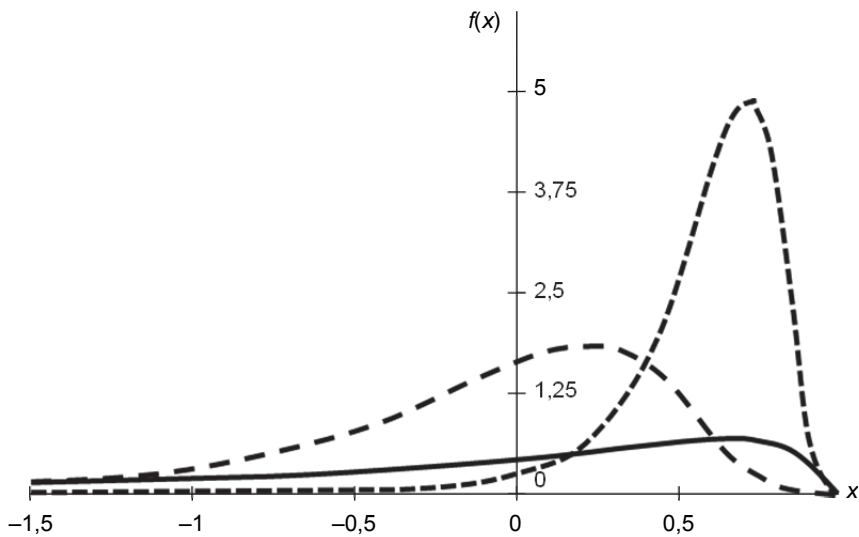
$$f_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot e^{-\frac{(\ln(1-x) + \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma(1-x)} \varphi\left(\frac{\ln(1-x) + \mu}{\sigma}\right)$$

dla $x \in [-\infty, 1)$.

Twierdzenie 4.1.5. Zakładamy, że stopy zwrotu brutto z inwestycji $\frac{1}{1-R_i}$ przy kapitalizacji z góry tworzą, w kolejnych okresach, ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych $\text{LN}(\mu_i, \sigma_i^2)$, gdzie $\sigma_i^2 > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas funkcja akumulacji kapitału $a(n)$ ma rozkład $\text{LN}(a, b^2)$, funkcja dyskonta $v(n)$ ma rozkład $\text{LN}(-a, b^2)$, zmienna losowa $K(n)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) + a, b^2)$ oraz zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład $\text{LN}(\ln(K_0) - a, b^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ i $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ (przyjmujemy, że $b > 0$).



Ryc. 4.1.1. Gęstości rozkładów logarytmiczno-normalnych; od lewej: $LN(0,1)$, $LN\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $LN\left(1, \frac{1}{4}\right)$



Ryc. 4.1.2. Gęstości zmiennej losowej R dla parametrów $\mu = 1, \sigma^2 = \frac{1}{4}$ (największe maksimum), $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{4}$ i $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ (najmniejsze maksimum)

Z powyższych rozważań wynika, że można przyjąć, iż podstawowym rodzajem kapitalizacji spełniającym zasadę stałej efektywności jest kapitalizacja złoż-

zona, do której można sprowadzić pozostałe przypadki. Mniejsze znaczenie niż wybór zasady przyrostu kapitału ma wybór konkretnego rozkładu stopy zwrotu.

W długim okresie inwestowania lub gdy inwestujemy w wiele drobnych przedsięwzięć, możemy oszacować rezultat przyrostu kapitału za pomocą rozkładu granicznego, jakim jest najczęściej rozkład normalny. W tym przypadku do osiągnięcia przybliżonego wyniku wystarczają ogólne założenia o momentach i niezależności rozważanych zmiennych losowych. Stosujemy wtedy odpowiednie twierdzenie graniczne.

Twierdzenie 4.1.6. (Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga) Niech ciąg X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych ze skończonymi momentami drugiego rzędu. Niech $m_k = E(X_k)$ i $\sigma_k^2 = Var(X_k)$ oraz $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Niech $F_k(x)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X_k dla $k = 1, 2, \dots$, a zbiór $D_\varepsilon = \{x: |x - m_k| \geq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\}$. Załóżmy, że spełniony jest, dla każdego dodatniego ε , następujący warunek (zwany warunkiem Lindeberga):

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \sum_{k=1}^n \int_{D_\varepsilon} (x - m_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

Wówczas wyrażenie $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$ dąży, przy $n \rightarrow \infty$, według rozkładu do zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym standaryzowanym.

Przykład 4.1.4. [E09.10.2006] Inwestor równomiernie inwestuje w ciąg 5 lat swoje środki o wartości 1 mln PLN w grupę N firm o podwyższonym stopniu ryzyka. Prawdopodobieństwo podwojenia wartości każdej z inwestycji w ciągu dowolnego roku wynosi 60%, a bankructwa inwestycji jest równe 40%. Wyniki inwestycji są niezależne w kolejnych latach i w tym samym roku dla różnych firm. Ile musi wynosić N , aby inwestor miał 99% pewności osiągnięcia po 5 latach 50% zysku nominalnego od całości włożonego kapitału początkowego? Użyj faktu, że wartość dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego Φ dla argumentu 2,326 wynosi $\Phi(2,326) = 0,99$.

Rozwiązanie. Niech zmienna losowa X_i oznacza wartość inwestycji w i -tą firmę po 5 latach. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ zmienna losowa X_i przyjmuje wartość $2^5 \cdot (1/N)$ z prawdopodobieństwem $0,6^5$ oraz wartość 0 z prawdopodobieństwem $1 - 0,6^5$. Wartość oczekiwana tej zmiennej jest równa $E(X_i) = \frac{1,2^5}{N}$, a wariancja $Var(X_i) = \frac{2,4^5}{N^2} - \frac{1,44^5}{N^2}$. Z faktu, że suma wartości oczekiwanych N zmiennych losowych wynosi $1,25^2$, a suma ich wariancji jest równa $\frac{73,4345}{N}$, wynika, iż spełniony jest warunek Lindeberga. Prawdopodobieństwo osiągnię-

cia celu inwestycyjnego ma wynosić 0,99, czyli

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i \geq \frac{3}{2}\right) = 0,99.$$

Wyrażenie przekształcamy w następujący sposób:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - \left(\frac{6}{5}\right)^5}{\frac{8,57}{\sqrt{N}}} \geq \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{6}{5}\right)^5}{\frac{8,57}{\sqrt{N}}}\right) = 0,99.$$

Lewa strona nierówności jest wyrażeniem dążącym do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym standaryzowanym, o dystrybuancie Φ . Przechodząc do granicy, zapisujemy, że

$$\Phi\left(\frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{6}{5}\right)^5}{\frac{8,57}{\sqrt{N}}}\right) = \Phi(-2,326) = 0,99.$$

Ostatecznie otrzymujemy $N = 406,8$, czyli trzeba zainwestować przynajmniej w 407 firm.



Oto przykład o podobnej treści, wymagający zastosowania twierdzenia Poissona.

Twierdzenie 4.1.7. (Poissona) Jeżeli X_1, X_2, \dots jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, p_1), \dots, (n, p_n), \dots$ oraz $n \cdot p_n$ dąży do stałej λ ($\lambda > 0$), gdy $n \rightarrow \infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

dla $k \in \{0, 1, \dots\}$, czyli ciąg rozkładów dwumianowych jest zbieżny do rozkładu Poissona z parametrem λ .

Przykład 4.1.5. [E10.10.2005] Wypłata z rocznej obligacji uzależniona jest od liczby bankructw w tym okresie w ustalonym zbiorze 100 spółek. Na koniec roku wyniesie ona: 130 PLN, o ile zdarzyły się nie więcej niż 2 bankructwa, 100 PLN, jeśli były 3 lub 4 bankructwa, 90 PLN, jeśli zdarzyło się 5 lub 6 bankructw oraz 50, jeśli było więcej niż 6 bankructw. Rynek wycenia obligację na poziomie dającym oczekiwaną stopę zwrotu $i = 10\%$. Zakładamy, że prawdopodobieństwa bankructwa każdej ze spółek w ciągu roku wynoszą 2% i są wz-

jemnie niezależne. Wypłata z obligacji jest pewna, a inwestor ją kupuje po bieżącej cenie rynkowej. Po godzinie od zakupu na rynek dotarła informacja o bankructwie jednej ze spółek. O ile procent zmniejszy się cena rynkowa obligacji wskutek reakcji na tę wiadomość?

Rozwiązanie. Niech X_1 oznacza wypłatę z obligacji w początkowej sytuacji, a X_2 niech będzie wypłatą po wiadomości o bankructwie jednej ze spółek. Rozkład zmiennej losowej X_1 jest następujący:

130	100	90	50
$P(0) + P(1) + P(2)$	$P(3) + P(4)$	$P(5) + P(6)$	$P(7) + P(8) + \dots + P(100)$

$P(k)$ oznacza prawdopodobieństwo k sukcesów spośród 100 prób Bernoulliego, czyli

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, 100.$$

Rozkład X_2 jest podany poniżej.

130	100	90	50
$P(0) + P(1)$	$P(2) + P(3)$	$P(4) + P(5)$	$P(6) + P(7) + \dots + P(100)$

Należy wyznaczyć wielkość wyrażenia

$$\frac{E(X_1) - E(X_2)}{E(X_1)} = \frac{130 \cdot P(2) + 100 \cdot (P(4) - P(2)) + 90 \cdot (P(6) - P(4)) - 50 \cdot P(6)}{130 \cdot (P(0) + P(1) + P(2)) + 100 \cdot (P(3) + P(4)) + 90 \cdot (P(5) + P(6)) + 50 \cdot (\sum_{k=7}^{100} P(k))}$$

Wartości prawdopodobieństw $P(k)$ wyznaczamy dla $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0,02 = 2$, korzystając z przybliżenia rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona (twierdzenie 4.1.7).

$P(k)$	Przybliżenie	$P(k)$	Przybliżenie
$P(0)$	0,135 335	$P(4)$	0,090 224
$P(1)$	0,270 671	$P(5)$	0,036 089
$P(2)$	0,270 671	$P(6)$	0,012 030
$P(3)$	0,180 447	$1 - [P(0) + \dots + P(6)]$	0,002 517

Wartość wyrażenia jest równa $9,50357/119,59247 \approx 0,079$, czyli 7,9% początkowej ceny.

4.2. Kapitalizacje o stałym przyroście

Przy kapitalizacji, z czasem dyskretnym, ze stałym w czasie przyrostem funkcja akumulacji kapitału jest zmienną losową i ma postać $a(n) = (1 + R_1 + R_2 + \dots + R_n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Zmienne losowe R_i oznaczają stopy zwrotu z inwestycji w okresach $i = 1, 2, \dots, n$. Funkcja dyskonta jest zmienną losową postaci

$$v(n) = \frac{1}{a(n)} = \frac{1}{1 + R_1 + R_2 + \dots + R_n}.$$

Zmienna losowa $K(n)$, jak w poprzednim rozdziale, oznacza wartość kapitału początkowego K_0 w chwili n i wyraża się za pomocą $a(n)$ jako

$$K(n) = K_0 \cdot a(n),$$

natomiast $K(0) = K_n \cdot v(n)$ jest zmienną losową oznaczającą wartość K_n kapitału w chwili n , zdyskontowaną na chwilę 0.

Twierdzenie 4.2.1. Załóżmy, że w każdym okresie obowiązuje kapitalizacja prosta ze stopą procentową R_i w i -tym okresie, która ma rozkład normalny $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ z dodatnimi wariancjami σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$), niezależny od pozostałych rozkładów. Wówczas zmienna losowa $a(n)$ ma rozkład normalny $N(1 + a, b^2)$ oraz $K(n)$ ma rozkład normalny $N(K_0(1 + a), K_0^2 \cdot b^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ i $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ (przyjmujemy, że $b > 0$). Zmienna losowa $v(n)$ ma gęstość postaci

$$f_v(x) = \frac{1}{bx^2} \cdot \varphi\left(\frac{\frac{1}{x} - (1 + a)}{b}\right) \text{ dla } x \neq 0,$$

a zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład o gęstości

$$f_{K(0)}(x) = \frac{K_n}{bx^2} \cdot \varphi\left(\frac{\frac{K_n}{x} - (1 + a)}{b}\right) \text{ dla } x \neq 0,$$

gdzie φ jest gęstością rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

W modelach kapitalizacji o stałym przyroście prym wiedzie rozkład normalny ze względu na własność addytywności. Niestety, tak jak w modelu Bacheliera, w tym przypadku stopy procentowe R_i mogą przyjmować wartości

ujemne z prawdopodobieństwem

$$P(R_i < 0) = \Phi\left(-\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right).$$

Założenie, że stopa zwrotu $R \geq 0$ jest równoważne stwierdzeniu, że funkcja dyskonta dla tego okresu spełnia warunek $\nu \in (0, 1]$, a jeśli przyjmiemy, że $R > -1$, jest to równoważne warunkowi $\nu > 0$.

Dystrybuanta zmiennej losowej $\nu(n)$ jest określona wzorem

$$F_\nu(x) = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{1}{x} - (1+a)}{b}\right), & \text{gdy } x < 0 \\ \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) + \Phi\left(-\frac{\frac{1}{x} - (1+a)}{b}\right), & \text{gdy } x > 0 \end{cases},$$

a dla zmiennej losowej $K(0)$ mamy

$$F_{K(0)}(x) = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{K_n}{x} - (1+a)}{b}\right), & \text{gdy } x < 0 \\ \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) + \Phi\left(-\frac{\frac{K_n}{x} - (1+a)}{b}\right), & \text{gdy } x > 0 \end{cases}.$$

Jeśli parametr a przyjmie dużą wartość, a b^2 małą, wówczas prawdopodobieństwo tego, że wartość kapitału będzie ujemna, jest nieduże i można je zaniedbać (patrz ryc. 4.2.1). Wynika to ze wzorów:

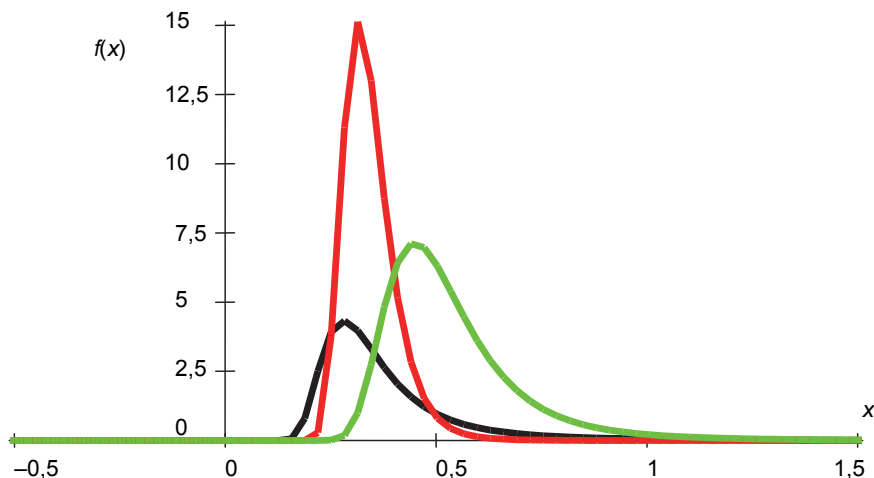
$$P(a(n) < 0) = \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) = P(K(n) < 0),$$

$$P(\nu(n) \notin (0, 1]) = 1 - \Phi\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Jeżeli zdecydujemy się wybrać słabsze założenia, to prawdopodobieństwa nieinterpretowalnych przypadków będą jeszcze mniejsze

$$P(a(n) < -1) = \Phi\left(\frac{-1 - (1+a)}{b}\right),$$

$$P(\nu(n) < 0) = \Phi\left(-\frac{1+a}{b}\right) = P(K(0) < 0).$$



Ryc. 4.2.1. Gęstości zmiennej losowej $v(n)$ dla parametrów $a = 2, b^2 = \frac{1}{4}$ (największe maksimum), $a = 1, b^2 = \frac{1}{4}$ i $a = 2, b^2 = 1$ (najmniejsze maksimum)

4.3. Kapitalizacje z zależnymi stopami zwrotu

W tym rozdziale przedstawimy trzy rodzaje procesów stochastycznych, znajdujące zastosowania w matematyce finansowej: procesy gaussowskie, procesy autoregresji i procesy Markowa. W procesach gaussowskich, łączne, skończenie wymiarowe rozkłady zmiennych losowych tworzące proces mają wielowymiarowy rozkład normalny. Procesy autoregresji są procesami gaussowskimi, w których wartości oczekiwane zmiennych losowych są powiązane zależnością rekurencyjną. Łańcuchy Markowa są procesami z czasem dyskretnym, w których określona jest zależność pomiędzy rozkładami kolejnych par zmiennych losowych tworzących proces.

Dla kapitalizacji o stałych przyrostach mamy twierdzenie analogiczne do twierdzenia 4.2.1.

Twierdzenie 4.3.1. Załóżmy, że w każdym okresie obowiązuje kapitalizacja prosta ze stopą procentową R_i w i -tym okresie oraz że wektor losowy $[R_1, R_2, \dots, R_n]^T$ ma n -wymiarowy rozkład normalny $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ z wektorem wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ oraz dodatnio określoną macierzą kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$. Wówczas zmienna losowa $a(n)$ ma jednowymiarowy rozkład normalny $N_1(1 + a, d^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \dots + \mu_n$ i $d^2 = \mathbf{1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{1}$ (wyrażenie $\mathbf{1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{1}$ to suma elementów macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$). Przyjmujemy, że $d > 0$. Dalej, zmienna losowa $K(n)$ ma jednowymiarowy rozkład normalny $N_1(K_0 \cdot (1 + a), K_0^2 \cdot d^2)$,

zmienna $\nu(n)$ ma gęstość postaci

$$f_{\nu}(x) = \frac{1}{d \cdot x^2} \cdot \varphi\left(\frac{\frac{1}{x} - (1+a)}{d}\right), \text{ dla } x \neq 0,$$

natomiast $K(0)$ ma rozkład o gęstości

$$f_{K(0)}(x) = \frac{K_n}{d \cdot x^2} \cdot \varphi\left(\frac{\frac{K_n}{x} - (1+a)}{d}\right), \text{ dla } x \neq 0,$$

gdzie φ jest gęstością rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 4.2.1. Łatwo można zauważyć, że po uwzględnieniu struktury zależności pomiędzy rozkładami stóp zwrotu, zapisanej za pomocą macierzy Σ , nie zmienia się postać rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych $a(n)$, $K(n)$, $\nu(n)$ i $K(0)$, a jedynie parametr $d^2 = \mathbf{1}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{1}$ zastępuje $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$. Oczywiście $d^2 = b^2$, jeśli macierz Σ jest diagonalna, co w przypadku rozkładu normalnego jest równoważne niezależności składowych wektora $[R_1, R_2, \dots, R_n]^T$. Wzory określające dystrybuanty zmiennych losowych $\nu(n)$ i $K(0)$ oraz dyskusję problemu ujemnych wartości zamieszczono w poprzednim rozdziale, a gęstość $\nu(n)$ przedstawiono na rycinie 4.2.1.

Wobec zależności $e^{r_k} = 1 + R_k$, pomiędzy dwoma kapitalizacjami o stałej efektywności, k -tym okresie, mamy odpowiednik twierdzenia 4.1.4 dla rozkładów normalnych zależnych. Tutaj jednak zmienne losowe $a(n)$, $K(n)$, $\nu(n)$ i $K(0)$ mają rozkład logarytmiczno-normalny, skupiony na przedziale $[0, \infty)$.

Twierdzenie 4.3.2. Załóżmy, że w każdym okresie obowiązuje kapitalizacja ciągła ze stałą (w i -tym okresie) nieujemną stopą procentową r_i , a wektor $[r_1, r_2, \dots, r_n]^T$ ma n -wymiarowy rozkład normalny $N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ z wektorem wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ oraz dodatnio określoną macierzą kowariancji Σ . Wówczas funkcja akumulacji kapitału $a(n)$ ma jednowymiarowy rozkład $LN_1(a, d^2)$ oraz $K(n)$ ma rozkład $LN_1(\ln(K_0) + a, d^2)$. Losowa funkcja dyskonta $\nu(n)$ ma rozkład $LN_1(-a, d^2)$, a zmienna losowa $K(0)$ ma rozkład $LN_1(\ln(K_n) - a, d^2)$, gdzie $a = \mu_1 + \dots + \mu_n$ i $d^2 = \mathbf{1}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{1}$ (przyjmujemy, że $d > 0$).

Przykład 4.3.1. [E10.12.2012] W chwili 0 kwota K_0 została w całości zainwestowana w akcje pewnej spółki. Cena akcji tej spółki w chwili 0 wynosi S_0 . Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki w chwili 1 ma rozkład logarytmiczno-

-normalny z $E(S_1) = S_0$ i $Var(S_1) = 0,04 \cdot S_0^2$. Obliczyć oczekiwaną wysokość straty z tej inwestycji pod warunkiem, że strata wystąpi.

Rozwiązanie. W chwili 0 za kwotę K_0 kupujemy $\frac{K_0}{S_0}$ akcji po cenie S_0 . W chwili 1 cena S_1 ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$. Ponieważ $E(S_1) = S_0 = e^{\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\}}$ oraz $Var(S_1) = 0,04 \cdot S_0^2 = \{e^{\sigma^2} - 1\} \cdot e^{\{2\mu + \sigma^2\}}$, więc $\sigma^2 = \ln 1,04$ i $\mu = \ln\left(\frac{S_0}{\sqrt{1,04}}\right)$. Strata powstaje wtedy, gdy $K_1 - K_0 = \left(\frac{K_0}{S_0}\right) S_1 - K_0 < 0$. Wiemy, że w chwili 1 wartość kapitału K_1 ma rozkład $LN(\mu + \ln\left(\frac{K_0}{S_0}\right), \sigma^2)$ z dystrybucją $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu - \ln\left(\frac{K_0}{S_0}\right)}{\sigma}\right)$.

Obliczamy wartość oczekiwaną straty pod warunkiem, że zajdzie strata:

$$E(-(K_1 - K_0) | K_1 - K_0 < 0) = \frac{-E(K_1 | K_1 < K_0)}{P(K_1 < K_0)} + \frac{K_0}{P(K_1 < K_0)}.$$

Mianowniki są równe wyrażeniu $\Phi\left(\frac{\ln S_0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)$. Dalej mamy

$$E(K_1 | K_1 < K_0) = \int_0^{K_0} x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu - \ln\left(\frac{K_0}{S_0}\right))^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Podstawiając $x = \exp\left\{\sigma t + \mu - \ln\left(\frac{K_0}{S_0}\right)\right\}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E(K_1 | K_1 < K_0) &= \frac{K_0}{S_0} \int_{-\infty}^{\frac{\ln S_0 - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t - \sigma)^2}{2}\right\} dt = \\ &= \frac{K_0}{S_0} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\ln S_0 - \mu}{\sigma} - \sigma\right) - \Phi(-\infty) \right] = \frac{K_0}{S_0} S_0 \cdot \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(-(K_1 - K_0) | K_1 - K_0 < 0) &= \frac{K_0 - K_0 \cdot \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = \frac{K_0 \left(1 - \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\right)}{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \\ &= \frac{K_0 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = K_0. \end{aligned}$$

Podobne obliczenia przeprowadzamy, wyznaczając prawdopodobieństwo ogonowe dla wartości zagrożonej (*tail value at risk*) w następnym przykładzie.

Przykład 4.3.2. [E09.10.2006] Inwestujemy na giełdzie kwotę X_0 . Po 12 miesiącach stan naszego rachunku maklerskiego wynosi X_1 . Oceniamy, że wynik inwestycji $X = \frac{X_1}{X_0}$ ma rozkład logarytmiczno-normalny ze średnią 1 i odchyleniem standardowym $a > 0$. Znajdź wzór określający prawdopodobieństwo ogonowe dla wartości zagrożonej (*tail value at risk*) $TVaR_p(X) = E(X|X > x_p)$, gdzie x_p jest p -tym kwantylem rozkładu zmiennej losowej X , czyli liczba spełniająca warunek $P(X \leq x_p) = p$.

Rozwiązanie. Z własności rozkładu logarytmiczno-normalnego wynika, że

$$E(X) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} = 1,$$

$$\text{Var}(X) = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} = a^2,$$

a stąd mamy: $\mu = -\frac{1}{2}\ln(1 + a^2)$ i $\sigma^2 = \ln(1 + a^2)$.

Obliczmy

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= E(X | X > x_p) = \\ &= \frac{\int_{x_p}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx}{P(X > x_p)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{N_p}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt}{1 - \Phi\left(\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}\right)} = \\ &= \frac{1 - \Phi\left(N_p - \sqrt{\ln(1 + a^2)}\right)}{1 - p}, \end{aligned}$$

gdzie $N_p = \frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}$.

W procesach autoregresji rzędu m ($m = 1, 2, \dots$) zakłada się, że wartość oczekiwana procesu w chwili n zależy od $(n - m)$ poprzednich wartości, a zależność ta ma charakter liniowy. Zatem, ciąg wartości oczekiwanych zmiennych losowych tworzących proces losowy jest ciągiem rekurencyjnym, dla którego łatwo można wyznaczyć charakterystyki probabilistyczne [2]. Rozważmy, na przykład, proces autoregresji rzędu II.

Twierdzenie 4.3.3. [12] Załóżmy, że chwilowe stopy zwrotu z inwestycji w kolejnych okresach podlegają **procesowi autoregresji** rzędu 2 (AR(2)), czyli tworzą ciąg zmiennych losowych (r_i) określony w następujący sposób:

$$r_i = \bar{r} + k_1(r_{i-1} - \bar{r}) + k_2(r_{i-2} - \bar{r}) + e_i,$$

gdzie \bar{r} jest długoterminową średnią stopą zwrotu, a k_1 i k_2 stałymi spełniającymi warunki:

$$k_1 + k_2 < 1, k_2 - k_1 < 1, -1 < k_2 < 1.$$

Ciąg zmiennych losowych (e_i) jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych, wyrażających losowe wahania, zwanym „białym szumem”. Każda ze zmiennych losowych e_i ma rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$ z dodatnią wartością parametru σ^2 . Wówczas:

$$Var(r_i) = \frac{1 - k_2}{1 + k_2} \cdot \frac{\sigma^2}{(1 - k_2)^2 - k_1^2},$$

$$Cov(r_k, r_m) = Var(r_m) \cdot [\lambda \alpha_1^{m-k} + (1 - \lambda) \alpha_2^{m-k}],$$

gdzie $\lambda = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2)}$, a α_1 i α_2 są odwrotnościami pierwiastków równania charakterystycznego $1 - k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 = 0$.

Ograniczenia nałożone na stałe k_1 oraz k_2 wynikają z tego, że proces musi być stacjonarny. Jeśli założymy dodatkowo, że $k_2 = 0$, to otrzymamy model autoregresji AR(1) z rekurencją rzędu pierwszego postaci

$$r_i = k_1 r_{i-1} + (1 - k_1) \bar{r} + e_i.$$

Gdy $k_1 = k_2 = 0$, to (r_i) jest ciągiem niezależnych chwilowych stóp zysku z inwestycji podlegających rozkładowi normalnemu $N(\bar{r}, \sigma^2)$, natomiast gdy $k_1 = 1/2$ i $k_2 = 0$, to otrzymane równanie określa model wyrównania wykładniczego szeregu stochastycznego (czyli procesu stochastycznego z czasem dyskretnym).

Przykład 4.3.3. Wiemy, że ciąg chwilowych stóp zwrotu kapitału $(r(t))_{t \in N}$ jest procesem autoregresji I rzędu ze średnią (długoterminową efektywną stopą) 0,09 i wariancją 0,003 oraz kowariancją pomiędzy sąsiednimi wartościami równą 0,002. W trzecim roku chwilowa stopa wyniosła 6,75%. Jakiej stopy oczekujemy w roku następnym?

Rozwiązanie. Rozważamy proces autoregresji I rzędu postaci $r_i = \bar{r} + k_1(r_{i-1} - \bar{r}) + e_i$, stąd $E(r_i) = \bar{r} + k_1(E(r_{i-1}) - \bar{r})$. Zauważmy, że $k_2 = 0$, a równanie charakterystyczne ma postać $1 - k_1 \cdot x = 0$, z pierwiastkiem $x = 1/k_1$. Stąd $\alpha_1 = k_1$ i $\alpha_2 = 0$ (równanie jest liniowe, brak drugiego pierwiastka). Dalej otrzymujemy $\lambda = 1$, $Cov(r_{k-1}, r_k) = k_1 \cdot Var(r_k)$, stąd $k_1 = 2/3$. Znając wszystkie parametry procesu, obliczamy prognozę na czwarty rok

$$E(r_4) = 0,09 + \frac{2}{3}(0,0675 - 0,09) = 0,075.$$

Szczególną grupą procesów z czasem dyskretnym są procesy Markowa.

Definicja 4.3.1. Ciąg zmiennych losowych $\{X_n: n \geq 0\}$, przyjmujących wartości w pewnym zbiorze przeliczalnym $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, nazywamy **łańcuchem Markowa**, gdy dla dowolnego k i dowolnych $y_1, y_2, \dots, y_k \in A$ takich, że $P(X_1 = y_1, \dots, X_{k-1} = y_{k-1}) > 0$, zachodzi równość

$$P(X_k = y_k | X_1 = y_1, \dots, X_{k-1} = y_{k-1}) = P(X_k = y_k | X_{k-1} = y_{k-1}).$$

Zależności pomiędzy zmiennymi losowymi X_n i X_{n+1} w łańcuchu Markowa pokazuje macierz przejścia \mathbf{P}_n . Macierz ta ma elementy postaci $\mathbf{P}_n(i, j) = P(X_{n+1} = X_j | X_n = X_i)$. Jest macierzą stochastyczną, czyli taką, dla której suma elementów każdego wiersza jest równa 1. W zastosowaniach najczęściej posługujemy się jednorodnymi łańcuchami Markowa, czyli takimi, dla których macierze \mathbf{P}_n są identyczne (i równe macierzy \mathbf{P}_0).

Wielką zaletą jednorodnych łańcuchów Markowa jest możliwość uzyskania rozkładu zmiennej losowej X_n przez pomnożenie wektora rozkładu zmiennej losowej X_0 przez n -tą potęgę macierzy \mathbf{P}_0 . Często definiuje się jednorodne łańcuchy Markowa, podając jedynie zmienną losową, od której startuje proces oraz macierz przejścia. Znając prawdopodobieństwo *a priori*, można stwierdzić, gdzie i z jakim prawdopodobieństwem zakończy się proces po n krokach.

Przykład 4.3.4. [E08.01.2007] Sytuację na giełdzie opisuje łańcuch Markowa z dwoma stanami: H (hossa – stan I) i B (bessa – stan II). Prawdopodobieństwa przejścia dla tego procesu zawiera macierz: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} h & 1-h \\ 1-b & b \end{bmatrix}$.

W chwili $t = 0$ kupujemy za kwotę 100 PLN dwuletnią obligację X uprawniającą do wypłaty z kuponu w chwili $t = 2$ jednorazowo kwotę 215, jeżeli na giełdzie w drugim okresie ($t = 2$) była hossa, 100 zaś, jeśli była besa. Jaki powinien być początkowy rozkład prawdopodobieństwa łańcucha, aby oczekiwana wartość bieżąca inwestycji wyniosła 0 dla $h = 0,4$ i $b = 0,9$? Stała intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0,1$.

Rozwiązanie. Oczekiwana wartość bieżąca inwestycji to wartość oczekiwana zmiennej losowej NPV o wartości $215 \cdot e^{-0,2}$ z prawdopodobieństwem p i wartości $100 \cdot e^{-0,2}$ z prawdopodobieństwem $(1 - p)$. Symbol p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że na giełdzie w drugim okresie ($t = 2$) była hossa. Z zależności $215 \cdot e^{-0,2} \cdot p + 100 \cdot e^{-0,2} \cdot (1 - p) = 100$ wyznaczamy $p = 0,1925$.

Niech wektor $[x, y]$ będzie (nieznany) początkowym rozkładem prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwa końcowe $[p, 1-p]$ w łańcuchu Markowa są iloczynami wektora $[x, y]$ i macierzy \mathbf{P} dla $h = 0,4$ i $b = 0,9$

$$[x, y] \cdot \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = [0,1925, \quad 0,8075].$$

Rozwiązaniem zadania są liczby $x = 0,695$ i $y = 0,305$.



Zadania do rozdziału 4

1. Sformułować i udowodnić twierdzenie o rozkładzie iloczynu niezależnych zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych.
2. Wykazać, że jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady logarytmiczno-normalne, to
 - a) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$,
 - b) $Me(X \cdot Y) = Me(X) \cdot Me(Y)$, gdzie Me oznacza medianę rozkładu,
 - c) $Do(X \cdot Y) = Do(X) \cdot Do(Y)$, gdzie Do oznacza dominantę (wartość modalną) rozkładu,
 - d) $Var(X \cdot Y) > Var(X) \cdot Var(Y)$,
 - e) $Do(X \cdot Y) < Me(X \cdot Y) < E(X \cdot Y)$.
3. Ciąg stóp procentowych brutto jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach logarytmiczno-normalnych $LN(\mu = 0,06; \sigma^2 = 0,01)$. Znaleźć oczekiwaną wartość jednostki pieniężnej i wariancję tej wartości po pięciu okresach.
4. [E16.11.1996] Zmienna losowa X ma rozkład $LN(\mu, 1)$. Wiadomo, że $P(X \leq q) = 0,6$ oraz $P(X \leq r) = 0,4$. Pokazać, że $E(X) = (q \cdot r \cdot e)^{1/2}$.
5. Kwotę 10 tys. zł wpłacono na kwartalną, przedłużalną lokatę. Jaki jest rozkład możliwych wartości tej lokaty po roku, jeśli jej oprocentowanie brutto w kolejnych kwartałach miałyby niezależne rozkłady $LN(0,05; 0,0001)$, $LN(0,06; 0,0009)$, $LN(0,07; 0,0009)$, $LN(0,08; 0,0025)$? Podać prognozę wartości lokaty na koniec roku i rocznej stopy zwrotu oszacowane według mediany oraz najbardziej prawdopodobną wartość lokaty.
6. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli w j -tym okresie stopa procentowa brutto ma rozkład $LN(\mu_j, \sigma_j^2)$ niezależny od pozostałych okresów kapitalizacji, to

 - a) czynnik dyskonta w j -tym okresie ma rozkład $LN(-\mu_j, \sigma_j^2)$,
 - b) kapitał końcowy po n okresach kapitalizacji ma rozkład
$$LN(\ln(K_0) + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2),$$
 - c) początkowa wartość kapitału, który po n okresach osiągnie wartość K ma rozkład
$$LN(\ln(K) - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2).$$
7. Zakładamy, że ciąg chwilowych stóp zwrotu (r_n) w kolejnych okresach jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $N\left(1 - \frac{1}{n+2}, 1\right)$ dla $n = 1, 2, \dots$. Znaleźć rozkład wartości złotówki po trzech okresach.

8. Ciąg $(1 + R_t)$ stóp procentowych brutto w latach $t = 1, 2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach jednostajnych $J[1/2, 3/2]$, gdy t jest nieparzyste i $J[3/4, 7/4]$, gdy t jest parzyste. Znaleźć wartość oczekiwaną złotówki po pięciu latach i wariancję tej wartości.

Wskazówka: Jeśli zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $J[a, b]$, to $EX = (a + b)/2$ oraz $Var(X) = (b - a)^2/12$.

9. Ciąg $(1 + R_t)$ stóp procentowych brutto w latach $t = 1, 2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $LN((t - 1)/t, \sigma^2)$, gdzie $\sigma^2 = 0,04$. Znaleźć wartość oczekiwaną złotówki po trzech latach i odchylenie standardowe tej wartości.

Wskazówka: Jeśli zmienna losowa X ma rozkład $LN(\mu, \sigma^2)$, to $E(X^k) = \exp \{k \cdot \mu + 0,5 \cdot k^2 \cdot \sigma^2\}$.

10. Miesięczne stopy zwrotu brutto z pewnej inwestycji w kolejnych miesiącach tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $LN(0,01 \cdot (j + 1); 0,03)$ dla j -tego miesiąca roku. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zainwestowana złotówka po roku przyniesie zysk mniejszy niż e (stała Eulera).

11. [E14.05.2007] Inwestor równomiernie inwestuje na trzy lata swoje środki o wartości 1 mln PLN w grupę N firm o podwyższonym stopniu ryzyka. Prawdopodobieństwo podwojenia wartości każdej z inwestycji w ciągu dowolnego roku wynosi 40%, braku zmiany wartości jest równe 40%, a bankructwa inwestycji 20%. Wyniki inwestycji są niezależne w kolejnych latach i w tym samym roku dla różnych firm. Ile musi wynosić N , aby inwestor miał 99% pewności osiągnięcia po trzech latach 50% zysku nominalnego od całości włożonego kapitału początkowego? Użyj faktu, że wartość dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego wynosi $\Phi(2,326) = 0,99$.

12. Załóżmy, że długoterminowa (średnia efektywna) stopa zwrotu kapitału w pewnym roku wynosiła 6%, a stopa krótkookresowa w obecnym okresie wynosi 9%. Załóżmy ponadto, że stopy zwrotu kapitału $(r(t))_{t \in \mathbb{N}}$ w kolejnych okresach podlegają modelowi autoregresyjnemu I rzędu. Porównać wartości oczekiwane stóp zwrotu w trzech pierwszych okresach, gdy $k_1 = 0,2$ i $k_1 = 0,8$. Jaka jest szybkość zmian w obu przypadkach? Do czego dążą wartości oczekiwane?

13. Udowodnić, że w modelu autoregresyjnym I rzędu ze współczynnikiem autoregresji $k_1 = 1$ trend jest stały.

14. Wiedząc, że ciąg chwilowych stóp zwrotu kapitału $(r(t))_{t \in \mathbb{N}}$ jest procesem autoregresji II rzędu ze średnią 0,08 oraz że dane są poniższe wartości:

Chwila	Wartość prawdziwa	Wartość oszacowana
$t = 1$	0,1	0,086
$t = 2$	0,11	0,094
$t = 3$	0,09	0,102
$t = 4$	0,095	0,092

znaleźć oszacowanie wartości $r(5)$.

Odpowiedzi i wskazówki

1. Jeśli zmienna losowa Z ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$, to e^Z ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$. Zastosować odpowiednie twierdzenia o rozkładzie normalnym.
2. Jeżeli zmienna losowa Z ma rozkład $LN(\mu, \sigma^2)$, to $E(Z) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$, $Me(Z) = \exp\{\mu\}$, $Do(Z) = \exp\{\mu - \sigma^2\}$, $Var(Z) = \exp\{2\mu + \sigma^2\} \cdot [\exp\{\sigma^2\} - 1]$. Skorzystać z zadania 1.
3. $a(5)$ ma rozkład $LN(5 \cdot 0,06, 5 \cdot 0,01)$. $E[a(5)] = e^{0,325}$, $Var[a(5)] = e^{0,65} \cdot (e^{0,05} - 1)$.
4. Zauważyć, że $P(X \leq q) = 0,6 = 1 - P(X \leq r)$.
5. $K(4)$ ma rozkład $LN(\ln(10) + 0,26; 0,0044)$, 12,96930 tys. zł, 0,29693%, 12,91236 tys. zł.
6. Patrz dowód twierdzenia 4.1.3.
7. $LN(133/60; 3)$.
8. $E(a(5)) = 9/4$, $Var(a(5)) \approx 1,86$.
9. $E(a(3)) \approx 2,59$, $Var(a(3)) = 0,0219$, $\sigma \approx 0,148$.
10. $\Phi(1/6) \approx 0,56$, gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego.
11. Niech dla każdej inwestycji k ($k = 1, 2, \dots, N$) zmienna losowa Z_k oznacza wartość funkcji akumulacji kapitału zainwestowanego w k -tą firmę po trzech latach. Jej rozkład jest następujący:

wartość $a_k(3)$	prawdopodobieństwo
8	0,064
4	0,192
2	0,192
1	0,064
0	0,488.

Stosując metodę z podrozdziału 4.1, otrzymujemy $\frac{1,5 - 1,728}{\sqrt{5,014}} \sqrt{N} = -2,326$, stąd $N \approx 521,8$. Odpowiedź: 522 firmy.

12. Przy $k_1 = 0,2$ otrzymujemy kolejno: 6,6%; 6,12%; 6,024%. Przy $k_1 = 0,8$ mamy 8,4%; 7,92%; 7,536%. W drugim przypadku wolniejsze tempo zbiegania do 6%.

13. W modelu AR(1) mamy $E(r_i) = E(k_1 r_{i-1} + (1 - k_1)\bar{r} + e_i) = k_1 E(r_{i-1}) + (1 - k_1)\bar{r}$, dla $k_1 = 1$ otrzymujemy $E(r_i) = E(r_{i-1})$ dla wszystkich i . Stąd wynika, że wartości oczekiwane zmiennych losowych w ciągu (r_i) są jednakowe, czyli trend (tendencja) nie zmienia się.

14. 0,091.

5. Analiza portfelowa

5.1. Miary dochodu, ryzyka i związku liniowego

Miarą dochodu z waloru (czyli instrumentu finansowego) jest oczekiwana stopa zwrotu, czyli wartość oczekiwana stopy zwrotu będącej zmienną losową. Jest to jedna z najważniejszych charakterystyk liczbowych zmiennej losowej, należąca do grupy momentów zwykłych. Miarą ryzyka waloru może być: **wariancja** (drugi moment centralny) zmiennej losowej, **odchylenie standardowe**, semiwariancja, semiodchylenie, odchylenie przeciętne lub jeszcze inna statystyczna miara zmienności. Większość teorii portfela opiera się na **wartości oczekiwanej** (zwanej też wartością średnią) i odchyleniu standardowym (zwanym **ryzykiem**) ze względu na proste związki między tymi wielkościami dla pojedynczego waloru i całego portfela. Jako ocenę zależności liniowej między stopami zwrotu dwóch walorów przyjmuje się **współczynnik korelacji liniowej** z próby zwany momentem iloczynowym lub współczynnikiem korelacji Pearsona. Wzory definiujące te statystyki z próby oraz ich własności czytelnik znajdzie w literaturze statystycznej, na przykład w [13].

Przykład 5.1.1. Wartość oczekiwaną waloru można oszacować metodą ekspertów, pytając, jaka ich zdaniem będzie stopa zwrotu w następnym okresie. Przykładowo, dwóch ekspertów przewidywało duży wzrost gospodarki, a w wyniku tego 20-procentową stopę zwrotu, trzech ekspertów, cechujących się mniejszym optymizmem, wskazywało na powolny wzrost PKB i 10-procentowy zysk z instrumentu, trzech wieszczyło stagnację i tylko 2-procentowy zysk, a dwóch ostatnich straszło recesją i wskazywało na 5-procentową stratę. Przyjmuje się, że prawdopodobieństwa poszczególnych stanów rynku są równe frakcji częstości względnej wybranej odpowiedzi ekspertów.

Stan rynku	Stopa zwrotu [%]	Prawdopodobieństwo tego stanu
Duży wzrost	20	0,2
Powolny wzrost	10	0,3
Stagnacja	2	0,3
Recesja	-5	0,2

Wartość oczekiwana zmiennej losowej R oznaczającej prognozę stopy zwrotu w następnym okresie jest równa $E(R) = 20 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + (-5) \cdot 0,2 = 6,6\%$, czyli 0,066 w notacji dziesiętnej.

Można postąpić inaczej; jeśli w poprzednim okresie stopa zysku była równa 3% i przypuszczamy, że w następnym znajdzie się w granicach od 2,5 do 4% oraz nie mamy innej dodatkowej informacji, to zakładamy, że będzie miała rozkład jednostajny na przedziale $[2,5; 4]$. W tym rozkładzie wartość oczekiwana wyniesie 3,25, bo to środek nośnika rozkładu, czyli nasza prognoza wskaże 3,25%. Sposób ten wymaga czynienia założeń o konkretnym rozkładzie i jego parametrach, ale potrafimy wówczas podać oszacowanie wartości oczekiwanej i wariancji stopy zwrotu. Stosujemy wówczas następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1.1. Jeśli jakaś charakterystyka instrumentu finansowego jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[a, b]$, o gęstości $f(x) = \frac{1}{b-a}$ dla $a \leq x \leq b$, to wartość oczekiwana tej charakterystyki wyniesie $\frac{a+b}{2}$, a wariancja będzie równa $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Różne metody statystyki matematycznej pozwalają na estymację, tj. oszacowanie wartości nieznanymi parametrów rozkładu (estymacja parametryczna) bądź weryfikację założeń o przyjętym rozkładzie (estymacja nieparametryczna, testy zgodności). W najprostszym przypadku, jeżeli rozkład prawdopodobieństwa ma skończoną wartość oczekiwaną, a dysponujemy próbą n -elementową, czyli wynikami z n poprzednich okresów, to **średnia arytmetyczna** tych wyników jest estymatorem (nieobciążonym, zgodnym) wartości oczekiwanej w tym rozkładzie. Taka ocena, na podstawie danych historycznych, jest dobrym miernikiem w przypadku stabilności rynku, bo sposób ten zakłada niezmienną wartość rozkładu w tych n okresach. W warunkach dużej niepewności lepiej jest stosować medianę, czyli wartość położoną na środku ciągu danych, uporządkowanego w kolejności niemalejącej. W modelach z rozkładem logarytmiczno-normalnym wartość oczekiwana jest większa od mediany, może więc wskazywać zbyt optymistyczne prognozy.

Jeśli oczekiwane stopy zwrotu są takie same, inwestorzy wybiorą walor charakteryzujący się mniejszą wariancją, gdyż to oznacza większą pewność osiągnięcia oczekiwanego zysku. Wśród miar ryzyka **wariancja** jest ważoną sumą kwadratów odchyłeń wartości stóp zwrotu od wartości oczekiwanej wynoszącej 6,6% w powyższym przykładzie. Wartość **semiwariancji** jest ważoną sumą kwadratów wyrażeń postaci $d_i = \min \{(R_i - 6,6), 0\}$. **Odchylenie przeciętne** jest ważoną sumą wartości bezwzględnych odchyłeń wartości stóp zwrotu od wartości oczekiwanej. W tabeli 5.1.1 zamieszczono wzory i wyniki obliczeń dla podanego przykładu.

Tabela 5.1.1. Obliczenia do przykładu 5.1.1

Stan rynku	Stopa zwrotu, R_i [%]	$(R_i - 6,6)^2$ [% ²]	d_i [%]	d_i^2 [% ²]	$ R_i - 6,6 $ [%]	p_i
Duży wzrost	20	179,56	0	0	13,4	0,2
Mały wzrost	10	11,56	0	0	3,4	0,3
Stagnacja	2	21,16	-4,6	21,16	4,6	0,3
Recesja	-5	134,56	-11,6	134,56	11,6	0,2
		wariancja $\sum p_i (R_i - 6,6)^2 =$ $= 72,64$		semiwariancja $\sum p_i d_i^2 =$ $= 33,26$	odch. przeciętne $\sum p_i R_i - 6,6 =$ $= 4,72$	

Wadą wariancji jest to, że wyraża się ją w jednostkach kwadratowych, inaczej niż wartość oczekiwaną. Dlatego najczęściej stosowaną miarą ryzyka jest pierwiastek kwadratowy z wariancji, czyli **odchylenie standardowe**, wynoszące w przykładzie w przybliżeniu 8,5229. Unikamy wtedy rozbieżności jednostek. Odchylenia wartości stóp od wartości oczekiwanej mają zarówno wartość dodatnią, jak i ujemną, w sumie znosząc się wzajemnie, dlatego do oceny zmienności albo bierzemy ich kwadraty (obliczając wariancję), albo wartości bezwzględne (wyznaczając odchylenie przeciętne). Semiwariancja uwzględnia jedynie odchylenia poniżej średniej, ponieważ wyższe od przeciętnych stopy zwrotu są dla inwestora jak najbardziej pożądane. Pierwiastek kwadratowy z semiwariancji zwany jest **semiodchyleniem** stopy zwrotu i w podanym przykładzie wynosi około 5,7671.

Jeśli zdecydujemy się narzucić konkretny rozkład, to statystyczne metody estymacji pozwolą oszacować jego parametry, korzystając z danych historycznych. Przykładowo zakładamy, za Bachelierem, że stopy zwrotu podlegają rozkładowi normalnemu. Wtedy estymatorem (nieobciążonym o minimalnej wariancji, zgodnym, największej wiarygodności, najmniejszych kwadratów) wartości oczekiwanej jest średnia arytmetyczna danych historycznych. W przypadku wariancji możemy wybrać pomiędzy estymatorem nieobciążonym, otrzymanym z metody najmniejszych kwadratów, zwanym wariancją z próby a asymptotycznie nieobciążonym i zgodnym estymatorem największej wiarygodności, zwanym wariancją z populacji. Wartość pierwszego z nich obliczamy jako wariancję ze wszystkimi wagami p_i równymi $(n - 1)$, a drugiego na podstawie wszystkich wag p_i równych n . Dla mniejszej liczby danych lepszym rozwiązaniem jest pierwszy estymator.

Oszacowanie współczynnika korelacji liniowej pomiędzy dwiema stopami zwrotu R_1 oraz R_2 z dwóch walerów I i II otrzymujemy na podstawie wzoru

$$\rho_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i (R_{1,i} - ER_1)(R_{2,i} - ER_2)}{s_1 \cdot s_2} = \frac{s_{1,2}}{s_1 \cdot s_2},$$

gdzie s_j jest odchyleniem standardowym stopy zwrotu j -tego waloru ($j = 1, 2$), a wyrażenie w liczniku

$$s_{1,2} = \sum_{i=1}^N p_i (R_{1,i} - ER_1)(R_{2,i} - ER_2)$$

zwane jest **kowariancją z próby**. Podobnie jak dla wariancji, obliczając wartość wyrażenia na podstawie danych historycznych, przyjmujemy w obliczeniach, że wszystkie wagi p_i są równe $(n - 1)$ (lub dla dużej liczby danych: n). Jeżeli stopy zwrotu walorów zmieniają się niezależnie od siebie (zmiennie losowe je reprezentujące są niezależne), to współczynnik korelacji ma wartość równą zero, a jego oszacowanie nie powinno istotnie różnić się od zera. Za ewentualną różnicę odpowiadają błędy losowe, na które nie mamy wpływu. Dodatnia wartość współczynnika korelacji z próby może świadczyć o tym, że obie stopy zwrotu zmieniają się w podobny sposób. Ujemne wartości sugerują, że wzrostowi jednej stopy zwrotu towarzyszy spadek drugiej, i odwrotnie.

5.2. Średnia i wariancja portfela

Definicja 2.1.2 podaje sposób określania stopy zwrotu z portfela. W świetle poprzedniego rozdziału możemy sformułować definicję oczekiwanej stopy zwrotu z portfela i ryzyka (odchylenia standardowego) portfela.

Definicja 5.2.1. Oczekiwana stopa zwrotu z portfela P składającego się z N walorów o udziałach zapisanych za pomocą wektora kolumnowego $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$, o elementach ω_i takich, że $\omega_1 + \dots + \omega_N = 1$, jest średnią ważoną oczekiwanych stóp zwrotu z poszczególnych walorów, czyli

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot E(R_i).$$

Portfel, o którym mowa w definicji 5.2.1, zwany jest **portfelem dopuszczalnym**. Zauważmy, że może on mieć ujemne udziały (nie wszystkie jednocześnie!). Ujemną wartość udziału ω_i interpretujemy jako krótką sprzedaż, czyli sprzedajemy i -ty w ilości $-\omega_i$, którego w chwili obecnej nie mamy, ale zaraz odkupimy go po, jak się spodziewamy, niższej cenie. Niektóre modele nie pozwalają na krótką sprzedaż, która nie na wszystkich rynkach jest dozwolona.

Definicja 5.2.2. Odchyleniem standardowym albo **ryzykiem portfela** dopuszczalnego P składającego się z N walorów o udziałach zapisanych za pomocą wektora kolumnowego $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ nazywamy wyrażenie $s_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}}$, gdzie macierz $\boldsymbol{\Sigma}$ jest macierzą kowariancji kolumnowego wektora losowego $\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_N]^T$. Wyrażenie $s_p^2 = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$ nazywamy **wariancją portfela P** .

Macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ jest symetryczną, nieujemnie określoną macierzą wymiaru $N \times N$, zawierającą informacje o zależnościach między stopami zwrotu. Elementami głównej przekątnej tej macierzy są oszacowania wariancji stóp zwrotu kolejnych walorów w portfelu. Pozadiagonalne elementy na miejscu (i, j) są oszacowaniami kowariancji między i -tą i j -tą stopą zwrotu dla $i, j = 1, \dots, N$. Sposób obliczania kowariancji z próby podano w poprzednim rozdziale w części o współczynniku korelacji liniowej.

Zauważmy, że oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest równocześnie iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_N]^T$ oraz $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ (w dowolnej kolejności ze względu na przemienność iloczynu skalarnego). Pierwszy z nich powinien być zapisany wierszowo, a drugi kolumnowo, aby wyznaczyć iloczyn $E(R^P) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}$. Podobnie można zapisać portfel dopuszczalny jako portfel, dla którego $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega} = 1$. Dodajmy, że $\mathbf{1}$ oznacza N -elementowy wektor, którego elementami są wyłącznie jedynki. Wyrażenie $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$ zaś, będące wariancją portfela, można zapisać za pomocą formy kwadratowej

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} = s_p^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \cdot s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \omega_i \cdot \omega_j \cdot s_i \cdot s_j \cdot \rho_{i,j}.$$

Pierwszy składnik jest ważoną sumą wariancji składników portfela, a drugi podwojoną ważoną sumą kowariancji pomiędzy tymi składnikami.

Zbiór D **portfeli dopuszczalnych**, czyli możliwych do utworzenia z N walorów, których wartości oczekiwane opisuje wektor \mathbf{R} , a wariancje i kowariancje macierz $\boldsymbol{\Sigma}$, można zapisać następująco:

$$D = \{\boldsymbol{\omega} \in [0, 1]^N: \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1, E(R^P) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R}, s_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}}\} \text{ (bez krótkiej sprzedaży)}$$

$$\text{lub } D_{KP} = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{R}^N: \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1, E(R^P) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R}, s_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}}\} \text{ (z krótką sprzedażą)}.$$

Zbiór ten przedstawia się graficznie na płaszczyźnie rozpiętej przez oś ryzyka i oś wartości oczekiwanej $(s_p, E(R_p))$ w postaci krzywej zależnej od parametru wektorowego $\boldsymbol{\omega}$. W niektórych modelach rozważamy płaszczyznę rozpiętą przez wariancję i wartość oczekiwaną $(s_p^2, E(R_p))$. W tym przypadku odcięta jest podniesiona do kwadratu w porównaniu z poprzednim sposobem opisu graficznego. Ponieważ ryzyko i wariancja nie mogą przyjmować wartości ujemnych, więc wspomniane zbiory będą się znajdować w półpłaszczyźnie zawierającej nieujemne wartości odciętej.

Przykład 5.2.1. [E17.06.2013] Rozważamy aktywa A i B o identycznej cenie. Inwestor rozpatruje następujące scenariusze w zakresie zwrotu z inwestycji w aktywa A i B:

Scenariusz	Prawdopodobieństwo	Zwrot z aktywa A [%]	Zwrot z aktywa B [%]
I	0,3	20	5
II	0,2	5	10
III	0,5	-10	20

Inwestor inwestuje $p\%$ posiadanych środków w aktywo A, a pozostałe środki w aktywo B, wyznaczając $p \in [0, 100]$ w taki sposób, aby wariancja stopy zwrotu dla tak skonstruowanego portfela była minimalna. Wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu przy tak skonstruowanym portfelu.

Rozwiązanie. Posłużymy się wzorami z rozdziału 5.1. Wartość oczekiwana portfela złożonego wyłącznie z aktywów A będzie wynosiła $E(R_A) = 20 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 - 10 \cdot 0,5 = 2\%$, a złożony tylko z aktywów B portfel będzie miał oczekiwaną stopę zwrotu $E(R_B) = 5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,5 = 13,5\%$. Wariancja zmiennej losowej oznaczającej stopę zwrotu z inwestycji w portfel aktywów A będzie równa wyrażeniu

$$\sum p_i (R_i - 2)^2 = 0,3 \cdot (20 - 2)^2 + 0,2 \cdot (5 - 2)^2 + 0,5 \cdot (-10 - 2)^2 = 171(\%)^2.$$

Analogiczna wielkość dla portfela złożonego z aktywów B wyniesie

$$\sum p_i (R_i - 13,5)^2 = 0,3 \cdot (5 - 13,5)^2 + 0,2 \cdot (10 - 13,5)^2 + 0,5 \cdot (20 - 13,5)^2 = 45,25(\%)^2.$$

Kowariancja pomiędzy wartościami stóp zwrotu z aktywów może być obliczona na podstawie następującej formuły:

$$s_{AB} = \sum_{i=1}^N p_i (R_{A,i} - ER_1)(R_{B,i} - ER_2) = 0,3 \cdot (20 - 2) \cdot (5 - 13,5) + 0,2 \cdot (5 - 2) \cdot (10 - 13,5) + 0,5 \cdot (-10 - 2) \cdot (20 - 13,5) = -87(\%)^2.$$

Rozważmy zbiór D portfeli dopuszczalnych zawierających w swym składzie $p \cdot 100\%$ aktywów A i $(1 - p) \cdot 100\%$ aktywów B dla $p \in [0; 1]$

$$D = \{ \omega \in [0, 1]^2 : \omega' \mathbf{1} = 1, E(R) = \omega' \mathbf{R}, s_p = \sqrt{\omega' \Sigma \omega} \}.$$

Oczekiwane wartości tych portfeli będą równe $E(R) = p \cdot E(R_A) + (1 - p) \cdot E(R_B)$, bo $\omega \in [p, 1 - p]^T$, a macierz kowariancji walorów wchodzących w skład portfela mieszanego dla danych z przykładu 5.2.1 ma postać

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 171 & -87 \\ -87 & 45,25 \end{bmatrix}.$$

Wariancje portfeli ze zbioru D wynoszą

$$s_p^2 = p^2 \cdot 171 + (1 - p)^2 \cdot 45,25 + 2 \cdot (-87) \cdot p \cdot (1 - p).$$

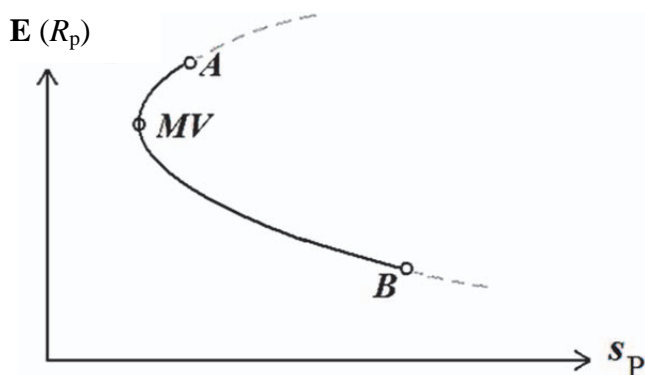
Funkcja ta jest trójmianem kwadratowym zmiennej p mającym minimum w punkcie

$$\frac{45,25 + 87}{171 + 45,25 - 2 \cdot (-87)} \approx 0,3389.$$

Wartość oczekiwana portfela, w którym 33,89% stanowią aktywa A, a resztę aktywa B, jest równa $E(R) = 0,3389 \cdot 2 + (1 - 0,3389) \cdot 13,5 \approx 9,6\%$, a wariancja wynosi 0,4324 i jest najmniejsza dla rozpatrywanego zbioru portfeli dopuszczalnych D . Współczynnik korelacji aktywów A i B jest równy $\rho_{AB} = \frac{-87}{\sqrt{171 \cdot 45,25}} = -0,99$.



Na rycinie 5.2.1 na płaszczyźnie ryzyko–stopa zwrotu przedstawiono zbiór portfeli dopuszczalnych D , który jest fragmentem krzywej przypominającej łuk paraboli i przechodzącej przez punkty A i B, narysowanej linią ciągłą. Punkty A i B odpowiadają portfelom złożonym tylko z jednego rodzaju aktywów.



Ryc. 5.2.1. Zbiór portfeli dopuszczalnych skonstruowanych z dwóch walorów

Punkt MV reprezentuje portfel o minimalnej wariancji (lub równoważnie: o minimalnym ryzyku) spośród portfeli złożonych wyłącznie z walorów A i B. Linia przerywaną zaznaczono punkty odpowiadające portfelom z krótką sprzedażą jednego z rozpatrywanych walorów. Zbiór $D_{KP} = \{\omega \in \mathbb{R}^N: \omega^T \mathbf{1} = 1, E(R^P) = \omega^T \mathbf{R}, s_p = \sqrt{\omega^T \Sigma \omega}\}$ jest zbiorem punktów (x, y) należących do wykresu krzywej narysowanej linią ciągłą i kreskowaną. Krzywa (dla danych

z przykładu 5.2.1) określona jest zależnościami

$$x = \pm\sqrt{p^2 \cdot 171 + (1-p)^2 \cdot 45,25 + 2 \cdot (-87)p(1-p)}$$

i

$$y = 2p + 13,5 \cdot (1-p),$$

gdzie $p \in \mathfrak{R}$.

Zastanówmy się teraz, jak wyglądałyby zbiory D i D_{KP} , gdyby współczynnik korelacji przyjął inną wartość niż $-0,99$ (jak w przypadku danych z przykł. 5.2.1). Rozważmy przypadki graniczne $\rho = 1$ i $\rho = -1$, zakładając, że pozostałe charakterystyki aktywów A i B nie uległy zmianie. W tym pierwszym przypadku portfel o udziałach zapisanych za pomocą wektora $\omega \in [p, 1-p]'$ ma wartość oczekiwaną równą

$$E(R) = 2 \cdot p + 13,5 \cdot (1-p)$$

i wariancję

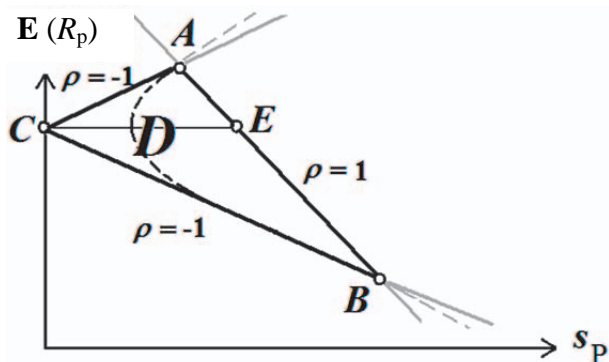
$$\begin{aligned} s_p^2 &= p^2 \cdot 171 + (1-p)^2 \cdot 45,25 + 2\sqrt{171 \cdot 45,25} \cdot p(1-p) = \\ &= \left(\sqrt{171} \cdot p + \sqrt{45,25} \cdot (1-p)\right)^2. \end{aligned}$$

Stąd jego ryzyko jest równe

$$s_p = \left|\sqrt{171} \cdot p + \sqrt{45,25} \cdot (1-p)\right| \approx |6,3499 \cdot p + 6,7268|.$$

Dla $p \in \mathfrak{R}$ wzory $x = 6,3499 \cdot p + 6,7268$ i $y = 2 \cdot p + 13,5 \cdot (1-p)$, określające współrzędne punktów zbioru D_{KP} , są równaniami parametrycznymi prostej AB na płaszczyźnie. Zbiór D punktów (x, y) płaszczyzny ryzyko–stopa zwrotu jest odcinkiem o końcach w punktach A i B .

Gdyby współczynnik korelacji między walorami A i B wyniósł $\rho = -1$, to wartość oczekiwana portfela byłaby równa $E(R) = 2 \cdot p + 13,5 \cdot (1-p)$, a ryzyko wyniosłoby $s_p = \left|\sqrt{171} \cdot p - \sqrt{45,25} \cdot (1-p)\right| \approx |19,8035 \cdot p - 6,7268|$. Zbiór D_{KP} byłby wówczas wykresem funkcji wartość bezwzględna po obrocie o kąt -90° , z wierzchołkiem w punkcie C (ryc. 5.2.2). Punkt C odpowiada portfelowi o zerowym ryzyku. Taki portfel można utworzyć z walorów A i B tylko w przypadku, gdy $\rho = -1$. Na odcinku CE leżą punkty obrazujące portfele o minimalnej wariancji dla różnych wartości współczynnika korelacji ρ . Wszystkie mają jednakowy skład $\omega = [0,3389; 0,6611]^T$, jednakową wartość oczekiwaną równą $E(R) \approx 9,6\%$, ale różnią się ryzykiem, bo odpowiadają innym wartościom współczynnika korelacji. Wszystkie pozostałe przypadki dla $\rho \in (-1, 1)$ znajdują się wewnątrz obszarów ograniczonych wariantami $\rho = 1$ i $\rho = -1$.



Ryc. 5.2.2. Zbiór portfeli dopuszczalnych skonstruowanych z dwóch walorów, gdy $\rho = 1$ i $\rho = -1$
Kolorem szarym zaznaczono portfele z krótką sprzedażą.

Reasumując, zbiór D portfeli dopuszczalnych bez krótkiej sprzedaży, złożony z dwóch walorów ryzykownych, dla wszystkich możliwych wartości współczynnika korelacji, jest domkniętym trójkątem ABC . Analogiczny zbiór D_{KP} uwzględniający możliwość krótkiej sprzedaży jest sumą domkniętego trójkąta ABC i dwóch nieograniczonych obszarów z brzegiem utworzonych przez przedłużenia boków tego trójkąta w wierzchołkach A i B . Dla ustalonej wartości współczynnika korelacji ρ wszystkie możliwe portfele leżą na krzywej symetrycznej względem prostej CE , przypominającej kształtem parabolę, narysowanej linią przerywaną na rycinie 5.2.2. Im mniejsza jest wartość ρ , tym punkt odpowiadający portfelowi o minimalnej wariancji znajduje się bliżej punktu C , im większa – tym punkt przybliży się do punktu E . Równocześnie zmienia się zakrzywienie linii, ale cały czas mieści się ona w zbiorze D (lub D_{KP}).

Przykład 5.2.2. [E02.06.2001] Inwestor ma 400 akcji spółki X . Wariancja stopy zwrotu z akcji spółki X wynosi 1. Inwestor rozważa zakup akcji spółki Y , dla której wariancja stopy zwrotu wynosi 2,25. Kowariancja pomiędzy stopami zwrotu z obu akcji wynosi 0,53. Inwestor mierzy ryzyko inwestycji odchyleniem standardowym stopy zwrotu ze swojego portfela. Jak zmieni się ryzyko inwestycji, jeśli inwestor sprzeda 100 akcji spółki X i kupi 100 akcji spółki Y ?

Rozwiązanie. Portfel zawierający 400 akcji spółki X ma wariancję 1600 razy większą niż wariancja jednej akcji, czyli 1600 jednostek kwadratowych. Po zmianie składu portfela jego wariancja wyniesie $s_p^2 = 300^2 \cdot 1 + 100^2 \cdot 2,25 + 2 \cdot 300 \cdot 100 \cdot 0,53 = 144\,300$ jednostek kwadratowych. Ryzyka mierzone odchyleniami standardowymi będą równe odpowiednio 400 i 380, czyli zmiana składu portfela spowoduje spadek ryzyka o 20 jednostek, tj. 4% wartości początkowej.

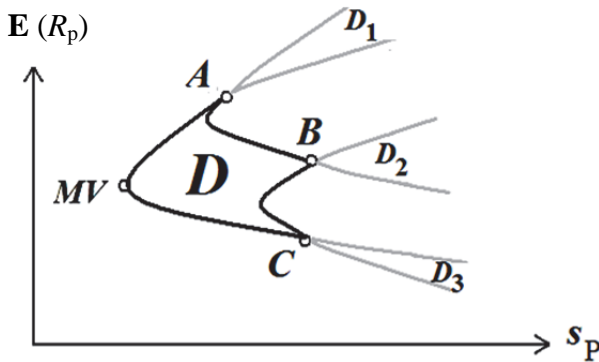
5.3. Portfele optymalne

W poprzednim rozdziale badaliśmy kształt zbioru portfeli dopuszczalnych złożonych z dwóch walorów ryzykownych na płaszczyźnie ryzyko–stopa zwrotu. Otrzymane wnioski zastosujemy do rozważenia ogólniejszego przypadku. Założmy, że na rynku dostępne są trzy walory ryzykowne: A, B i C, różniące się wartościami oczekiwanych stóp zwrotu i wariancjami. Macierz kowariancji pomiędzy tymi walorami ma postać

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_2^2 & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_3^2 \end{bmatrix},$$

gdzie $s_i^2 > 0$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $s_{ij} = s_i \cdot s_j \cdot \rho_{ij}$ dla wszystkich $i = 1, 2, 3$ oraz $j = 1, 2, 3$ takich, że $i \neq j$. Macierz kowariancji pomiędzy zmiennymi losowymi jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, stąd $-1 < \rho_{ij} < 1$ (dla wszystkich $i = 1, 2, 3$ oraz $j = 1, 2, 3$ takich, że $i \neq j$) oraz

$$1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13} - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 > 0.$$



Ryc. 5.3.1. Zbiór portfeli dopuszczalnych bez krótkiej sprzedaży (zbiór D) i z krótką sprzedażą (zbiory: D, D_1, D_2, D_3)

Rozważamy zbiór D portfeli dopuszczalnych bez krótkiej sprzedaży, złożonych z walorów A, B i C (nie wszystkie muszą wejść w jego skład). Jest on ograniczony łukami krzywych składających się z punktów odpowiadających portfelom zawierającym tylko 2 walory, a takie krzywe konstruowaliśmy w poprzednim podrozdziale. Brzegi zbioru D mają kształt łuków (ryc. 5.3.1).

W przypadku, gdy walorów na rynku jest więcej niż 3, rzut zbioru D na płaszczyznę ryzyko–stopa zwrotu wygląda analogicznie. Zbiór D_{KP} jest sumą

zbioru D oraz nieograniczonych obszarów D_1, D_2, D_3 pomiędzy przedłużeniami łuków tworzących brzegi obszaru D .

Inwestorzy są niechętni ryzyku i preferują wyższe stopy zwrotu. Portfele, których poszukują, tworzą zbiór efektywny, zwany też granicą efektywną portfeli dopuszczalnych.

Definicja 5.3.1. Portfelem efektywnym nazywamy taki portfel, dla którego nie istnieje inny portfel o tej samej stopie zwrotu i mniejszym ryzyku oraz nie istnieje portfel o tym samym ryzyku i większej stopie zwrotu.

Zbiór D na płaszczyźnie ryzyko–stopa zwrotu jest zbiorem domkniętym i ograniczonym (zwartym), a jego granica efektywna będzie jego brzegiem położonym najbardziej na lewo i najbardziej u góry. Na rycinie 5.3.1 jest to łuk krzywej od punktu MV do A . Zbiór D_{KP} natomiast jest nieograniczony, więc nie może być zwarty. Granicą efektywną zbioru D_{KP} jest krzywa wychodząca z punktu MV poprzez A aż do nieskończoności wzdłuż paraboli AB .

Portfele efektywne są rozwiązaniami zagadnienia

$$(*) \begin{cases} \max_{\omega \in D} \omega^T R \\ \min_{\omega \in D} \omega^T \Sigma \omega \end{cases} \text{ lub } (**) \begin{cases} \max_{\omega \in D_{KP}} \omega^T R \\ \min_{\omega \in D_{KP}} \omega^T \Sigma \omega \end{cases}.$$

Numeryczne znalezienie rozwiązania zagadnień (*) i (**) wymaga zastosowania metody programowania kwadratowego z warunkami Kuhna–Tuckera. Szczegółowe wyjaśnienia oraz przegląd literatury znajdują się w [4].

Powyższe zagadnienia można uprościć do postaci (***), zakładając, że poszukujemy portfela o minimalnym ryzyku, bez względu na spodziewaną wysokość stopy zwrotu z niego.

$$(***) \begin{cases} \min_{\omega} \omega^T \Sigma \omega \\ \text{przy warunku } \omega^T \mathbf{1} = 1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie problemu (***) otrzymujemy po zastosowaniu metody mnożników Lagrange’a służącej do znalezienia ekstremum warunkowego. W tym celu stworzymy nową funkcję

$$h(\omega, \lambda) = \omega^T \Sigma \omega + \lambda(1 - \omega^T \mathbf{1})$$

i poszukujemy jej minimum. Warunkiem koniecznym na to, by funkcja h miała ekstremum w pewnym punkcie, jest zerowanie się jej pochodnej (zapisanej w postaci wektora) w tym punkcie. Zatem

$$\frac{\partial h(\omega, \lambda)}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

a stąd mamy $\omega = \frac{2}{\lambda} \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}$. Z warunku $\mathbf{1} = \omega^T \mathbf{1}$ wynika, że $\lambda = 2 \cdot \mathbf{1}^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}$.
Zatem rozwiązanie ma postać

$$\omega = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}}.$$

Ponieważ funkcja $\omega^T \Sigma \omega$ jest wypukła, więc w otrzymanym punkcie osiąga swoje minimum.

Przykład 5.3.1. Na pewnym rynku można kupić tylko dwa rodzaje walorów: A oraz B, o stopach zwrotu 20% i 8%, ryzykach 7% i 5%, dla których współczynnik korelacji wynosi $\rho = -0,4$. Jaki skład miałyby portfel o minimalnym ryzyku?

Rozwiązanie. Macierz kowariancji dla walorów A i B ma formę

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 49 & -14 \\ -14 & 25 \end{bmatrix},$$

a jej odwrotność jest równa

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 14 & 49 \end{bmatrix}.$$

Zatem skład portfela o minimalnym ryzyku będzie następujący:

$$\omega = \frac{1}{102} \cdot \begin{bmatrix} 39 \\ 63 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,38 \\ 0,62 \end{bmatrix}.$$

Inny problem postawił Harry Markowitz w artykule *Portfolio selection* w 1952 roku, opublikowanym w „Journal of Finance” [14]. Wśród portfeli osiągających oczekiwany zysk m , zawierających walory bez ryzyka o stopie zwrotu R_F , poszukujemy portfela o minimalnym ryzyku, rozwiązując zagadnienie

$$(\text{****}) \begin{cases} \min_{\omega} \omega^T \Sigma \omega \\ \text{przy warunkach } \omega^T \mathbf{1} = 1 \text{ oraz } \omega^T \cdot ER = m \end{cases}$$

ER jest wektorem wartości oczekiwanych walorów w portfelu (z ostatnim elementem równym R_F). Macierz Σ , w tym przypadku, ma elementy równe zero w ostatnim wierszu i kolumnie, bo niezmienny walor bez ryzyka nie może być skorelowany z pozostałymi walorami zmieniającymi swoją cenę.

Jak podają Wolfgang Härdle i Leopold Simar w [5], metoda mnożników Lagrange’a pozwala na wyznaczenie rozwiązania zagadnienia (****) poprzez minimalizację funkcji

$$h(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \omega^T \Sigma \omega + \lambda_1 (m - \omega^T \cdot ER) + \lambda_2 (1 - \omega^T \mathbf{1})$$

względem wektora ω . Podobnie jak poprzednio, przyrównamy pochodną funkcji h do zera

$$\frac{\partial h(\omega, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \omega} = 2\Sigma \omega - \lambda_1 \cdot (ER) - \lambda_2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

i szukamy rozwiązania tego równania. Mnożymy wyrażenie lewostronnie przez ω^T , otrzymując

$$2\omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 \cdot \omega^T (ER) - \lambda_2 \cdot \omega^T \mathbf{1} = 0.$$

Uwzględniając warunki $\omega^T \cdot ER = m$ i $\omega^T \mathbf{1} = 1$, dostajemy

$$2\omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 \cdot m - \lambda_2 \cdot 1 = 0.$$

Stąd mamy

$$\lambda_2 = 2\omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 \cdot m$$

i podstawiamy wynik do warunku koniecznego

$$2\Sigma \omega - \lambda_1 \cdot (ER) - (2\omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 \cdot m) \cdot \mathbf{1} = 0.$$

Wyznaczamy wektor ER

$$ER = \frac{1}{\lambda_1} [2\Sigma \omega - 2\omega^T \Sigma \omega \cdot \mathbf{1} + \lambda_1 \cdot m \cdot \mathbf{1}] = m \cdot \mathbf{1} + \frac{2}{\lambda_1} [\Sigma \omega - \omega^T \Sigma \omega \cdot \mathbf{1}].$$

Zapiszmy wektory ω i ER , wydzielając ostatnie elementy osobno w następujący sposób:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ u \end{bmatrix}, ER = \begin{bmatrix} ER_0 \\ R_F \end{bmatrix}.$$

Podobnie zapiszmy macierz Σ za pomocą nieosobliwej, symetrycznej i dodatnio określonej macierzy \mathbf{M} wymiaru o 1 mniejszego niż Σ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyraźmy inaczej wyrażenie z ER w postaci układu, w którym pierwsze równanie będzie równaniem wektorowym, a ostatnie jednowymiarowym

$$\begin{cases} ER_0 = m \cdot \mathbf{1} + \frac{2}{\lambda_1} [\mathbf{M} \cdot \omega_0 - \omega_0^T \mathbf{M} \omega_0 \cdot \mathbf{1}] \\ R_F = m + \frac{2}{\lambda_1} [0 - (ER_0)^T \mathbf{M} (ER_0)] \end{cases}.$$

Z ostatniego równania mamy

$$\lambda_1 = \frac{2(ER_0)^T \mathbf{M} (ER_0)}{m - R_F} = \frac{2(ER)^T \Sigma (ER)}{m - R_F}.$$

Stąd

$$ER_0 = m \cdot \mathbf{1} + \frac{\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{M} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{1}}{(\mathbf{ER}_0)^T \mathbf{M} (\mathbf{ER}_0)} [m - R_F], ER = m \cdot \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}}{(\mathbf{ER})^T \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{ER})} [m - R_F].$$

Ostatni zapis jest jedną z postaci modelu CAPM, który będzie przedstawiony w następnym podrozdziale.

Można też pokazać, że $\lambda_2 = -R_F \cdot \lambda_1 + c$ i bez straty ogólności założyć, że $c = 0$.

Powróćmy do równania $2\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \cdot (\mathbf{ER}) - \lambda_2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Uwzględniając dotychczasowe wyniki, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}_0 + \lambda_1[R_F\mathbf{1} - \mathbf{ER}_0] = \mathbf{0} \\ R_F\lambda_1 - R_F\lambda_1 = 0 \end{cases}.$$

Stąd poszukiwany wektor udziałów walorów ryzykownych w portfelu ma skład

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0 - R_F \mathbf{1}) = \frac{(\mathbf{ER}_0)^T \mathbf{M} (\mathbf{ER}_0)}{m - R_F} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0 - R_F \mathbf{1}).$$

Teraz uwzględnimy udział waloru bez ryzyka we wzorach. W tym celu wróćmy do zależności $\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{ER} = m$. Zapiszmy ją w innej postaci, tj.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0^T & u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{ER}_0 \\ R_F \end{bmatrix} = m$$

lub równoważnie

$$\boldsymbol{\omega}_0^T (\mathbf{ER}_0) + u \cdot R_F = m.$$

Uwzględniając wzór na $\boldsymbol{\omega}_0$ i fakt, że \mathbf{M}^{-1} jest macierzą symetryczną, otrzymujemy

$$\frac{(\mathbf{ER}_0)^T \mathbf{M} (\mathbf{ER}_0)}{m - R_F} (\mathbf{ER}_0 - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0) + u \cdot R_F = m,$$

stąd

$$\begin{aligned} m - u \cdot R_F &= \frac{(\mathbf{ER}_0)^T \mathbf{M} (\mathbf{ER}_0)}{m - R_F} (\mathbf{ER}_0 - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0) \\ &= \frac{\lambda_1}{2} (\mathbf{ER}_0 - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0). \end{aligned}$$

Mnożnik λ_1 można zapisać za pomocą innej zależności jako

$$\lambda_1 = \frac{2(m - u \cdot R_F)}{(\mathbf{ER}_0)^T \mathbf{M} (\mathbf{ER}_0) - R_F \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{ER}_0)}.$$

Uwzględniając ten wynik w równaniu $2\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}_0 + \lambda_1[R_F\mathbf{1} - E\mathbf{R}_0] = \mathbf{0}$, mamy

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}_0 + \frac{2(m - u \cdot R_F)}{(E\mathbf{R}_0)^T \mathbf{M}(E\mathbf{R}_0) - R_F \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1}(E\mathbf{R}_0)} [R_F\mathbf{1} - E\mathbf{R}_0] = \mathbf{0}.$$

Stąd wzór pozwalający wyznaczyć udziały walorów ryzykownych w poszukiwanym portfelu ma następującą postać

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{(m - u \cdot R_F)\mathbf{M}^{-1}(E\mathbf{R}_0 - R_F\mathbf{1})}{(E\mathbf{R}_0)^T \mathbf{M}^{-1}(E\mathbf{R}_0 - R_F \cdot \mathbf{1})}.$$

Ostatni element wektora $\boldsymbol{\omega}$, czyli udział u waloru bez ryzyka w portfelu znajdziemy, wiedząc, że suma udziałów w portfelu wynosi 1. Zatem

$$[\boldsymbol{\omega}_0^T \quad u] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$$

czyli

$$u = 1 - \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{1}.$$

Wektor $\boldsymbol{\omega}^T = [\boldsymbol{\omega}_0^T \quad u]$ jest rozwiązaniem zagadnienia (****). Ponieważ funkcja $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$ jest wypukła, więc badana funkcja osiągnie minimum w tym punkcie.

Przykład 5.3.2. Na pewnym rynku można kupić tylko dwa rodzaje walorów: A oraz B, o stopach zwrotu 20% i 8%, ryzykach 7% i 5%, dla których współczynnik korelacji wynosi $\rho = -0,4$. Walor bez ryzyka ma stopę zwrotu 5%. Jaki skład miałby portfel o minimalnym ryzyku i stopie zwrotu na poziomie 10%?

Rozwiązanie. Na podstawie danych w zadaniu możemy zapisać:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 49 & -14 & 0 \\ -14 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1029} \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 14 & 49 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{10 - 5u} = \begin{bmatrix} 0,0372 \\ 0,0319 \end{bmatrix}$$

oraz $(10 - 5u) \cdot (0,0372 + 0,0319) + u = 1$. Stąd $u = 0,4721$. Zatem portfel o minimalnym ryzyku i stopie zwrotu na poziomie 10% ma następujący skład: walor A stanowi 28,42%, walor B - 24,37%, walor bez ryzyka - 47,21%.



Należałoby wyjaśnić, dlaczego w modelu Markowitza zakłada się, że istnieje na rynku tylko jeden walor bez ryzyka. Jest rzeczą niemożliwą, aby na rynku występowały dwa całkowicie bezpieczne (tj. bez ryzyka, czyli o zerowym ryzyku) walory o różnej stopie zwrotu, ponieważ wówczas wszyscy inwestowaliby

w lokaty przynoszące większy dochód, nikt nie kupowałby aktywów dających niższy zysk. Pozostają zatem dwie możliwości: albo jest tylko jedna stopa bez ryzyka, albo walor o wyższej stopie zwrotu jest obciążony jakimś dodatnim ryzykiem.

5.4. Model CAPM

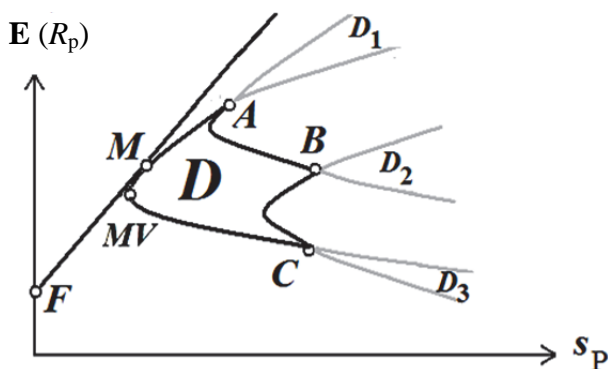
Najprostszą postacią modelu równowagi rynku kapitałowego jest model wyceny dóbr kapitałowych zwany modelem CAPM (od słów: *Capital Asset Pricing Model*). Model ten występuje w różnych wariantach, ponieważ został zaproponowany osobno przez Wiliama Sharpe'a (1964), Johna Lintnera (1965) i Jana Mossina (1966). Jego standardowa postać wymaga wielu założeń:

- 1) brak kosztów transakcji; ani z zakupem, ani ze sprzedażą nie są związane koszty,
- 2) aktywa są nieskończenie podzielne, na przykład za jednostkę pieniężną można kupić $1/183$ część pewnej akcji,
- 3) brak podatku od dochodów osobistych,
- 4) decyzje kupna lub sprzedaży pojedynczego inwestora nie mają wpływu na kursy akcji, które są rezultatem działania ogółu inwestorów,
- 5) inwestorzy podejmując decyzje, kierują się tylko wartościami oczekiwanymi i ryzykiem,
- 6) inwestor może krótko sprzedać każdą liczbę dowolnych akcji,
- 7) każdy inwestor może bez ograniczeń zaciągać pożyczkę lub ulokować dowolną kwotę na procent równy stopie wolnej od ryzyka $R_F \geq 0$,
- 8) inwestorzy podejmują decyzje na jeden i ten sam dla wszystkich okres,
- 9) inwestorzy mają jednorodne (jednakowe) oczekiwania w odniesieniu do portfeli,
- 10) istnieje rynek na wszystkie aktywa.

Każdy inwestor dąży do posiadania portfeli efektywnych leżących na granicy efektywnej portfeli dopuszczalnych. Stosując zasady zawarte w punktach 5 i 7, może wybierać portfele, które są kombinacją liniową portfeli efektywnych i portfela złożonego wyłącznie z waloru bez ryzyka. Wybierane portfele leżą więc na prostej przechodzącej przez punkt F (odpowiadający portfelowi bez ryzyka) i pewien punkt należący do zbioru efektywnego.

W rodzinie prostych przechodzących przez punkt F i punkty zbioru efektywnego znajdziemy taką, dla której zwiększenie ryzyka o jednostkę spowoduje największy wzrost stopy zwrotu. Taką prostą, dla której współczynnik kierunkowy będzie maksymalny, będziemy nazywać **linią rynku kapitałowego** (*capital market line*). Prosta ta będzie styczna do zbioru efektywnego w punkcie M ze względu na wypukłość zbioru efektywnego.

Na rycinie 5.4.1 przedstawiono linię rynku kapitałowego i zbiór portfeli dopuszczalnych na płaszczyźnie ryzyko–stopa zwrotu. Zbiór efektywny (opisany w podrozdz. 5.3) jest łukiem krzywej od punktu MV przez M oraz A i dalej przedłużeniem krzywej BA do nieskończoności. Punkt styczności M należy zarówno do zbioru efektywnego, jak i do linii rynku kapitałowego. Musi zatem odpowiadać tzw. portfelowi rynkowemu. **Portfel rynkowy** (*market portfolio*) to portfel złożony ze wszystkich ryzykownych walorów, którego skład odzwierciedla strukturę udziału tych walorów w rynku, czyli jest dobrze zdywersyfikowany (musi być więc efektywny). Gdyby wszyscy inwestorzy mieli taki sam portfel ryzykownych aktywów, to, zgodnie z punktami 7. i 9., w warunkach równowagi musiałyby być on portfelem rynkowym. Dlatego portfel rynkowy może być zidentyfikowany z indeksem giełdowym tego rynku.



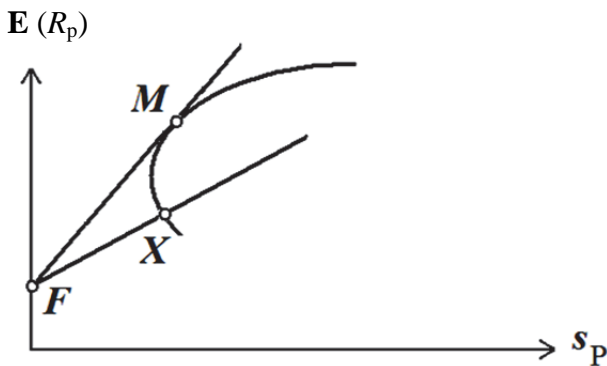
Ryc. 5.4.1. Linia rynku kapitałowego i zbiór portfeli dopuszczalnych

Nietrudno pokazać, że linia rynku kapitałowego na płaszczyźnie ryzyko–stopa zwrotu jest półprostą wychodzącą z punktu F i przechodzącą przez M o równaniu

$$E(R_E) = R_F + \frac{(E(R_M) - R_F)}{s_M} s_E$$

(dla $s_E \geq 0$). W tym wzorze R_F jest (stałą) stopą zwrotu z waloru bez ryzyka (zwaną krótko: stopą bez ryzyka), R_M jest (losową) stopą zwrotu dla portfela rynkowego, R_E oznacza (losową) stopą zwrotu dla portfela efektywnego, s_E oraz s_M są oszacowaniami ryzyk portfela efektywnego i rynkowego, odpowiednio. Współczynnik kierunkowy prostej postaci $\frac{E(R_M) - R_F}{s_M}$ jest premią za ryzyko związane z inwestowaniem w walory ryzykowne zamiast w aktywa bez ryzyka. Punkt F ma współrzędne $(0, R_F)$, a punkt M ma współrzędne $(s_M, E(R_M))$.

Z warunków **równowagi** (*equilibrium*) dla portfeli efektywnych można wyprowadzić warunki równowagi dla dowolnego waloru. Załóżmy, że i -ty walor na rynku (odpowiadający punktowi X) należy do zbioru efektywnego. Portfel rynkowy jest również efektywny. Ze względu na wypukłość zbioru portfeli dopuszczalnych prosta FX nie może mieć większego współczynnika kierunkowego niż prosta FM , więc albo proste te pokrywają się, albo prosta FX ma mniejszy współczynnik kierunkowy. W ostatnim przypadku portfele odpowiadające punktom półprostej FM byłyby bardziej efektywne niż portfel X , co przeczy założeniu o efektywności tego waloru. Pozostaje jedyna możliwość – punkty X i M leżą na linii rynku kapitałowego. Dowolne kombinacje liniowe portfeli X i M znajdują się na prostej XM , która jest linią rynku kapitałowego, czyli są efektywne. Oznacza to, że współczynnik korelacji dla waloru X i portfela rynkowego musi wynosić 1. Gdyby był mniejszy niż 1, to zbiór dopuszczalny portfeli zbudowanych z X i portfela rynkowego przekroczyłby linię rynku kapitałowego, co byłoby sprzeczne z jej definicją.



Ryc. 5.4.2. Półproste FM i FX

Mamy więc

$$1 = \rho_{i,M} = \frac{Cov(R_i, R_M)}{s_i s_M}$$

dla waloru X . Zatem ryzyko i -tego waloru jest równe $s_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{s_M}$ i możemy zapisać linię rynku kapitałowego w postaci

$$E(R_i) = R_F + \frac{(E(R_M) - R_F)}{s_M^2} Cov(R_i, R_M).$$

Oznaczając przez β_i wyrażenie

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{s_M^2},$$

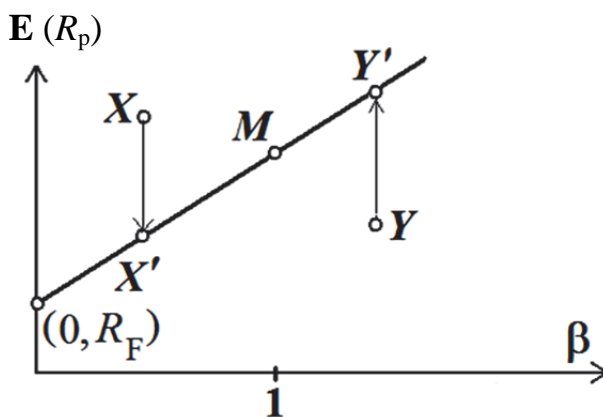
dostajemy miarę oczekiwanej zmiany stopy zwrotu z i -tego waloru R_i przy danej zmianie $E(R_M)$, zwaną **współczynnikiem beta** w jednowskaźnikowym modelu Williama Sharpe'a z 1964 roku. Wstawiając ten wzór do poprzedniego, otrzymujemy **linię rynku papierów wartościowych** (*security market line*) w postaci równania

$$E(R_i) = R_F + \beta_i(E(R_M) - R_F).$$

Oczekiwana premia za ryzyko dla i -tego waloru ($E(R_i) - R_F$) jest proporcjonalna ze współczynnikiem β_i do premii za ryzyko rynkowe ($E(R_M) - R_F$). Walor bez ryzyka ma współczynnik beta równy zero, dla portfela rynkowego $\beta_M = 1$. Walory, dla których $\beta > 1$, zwane ofensywnymi, reagują gwałtowniej niż rynek na zachodzące zmiany. Walory defensywne, z $\beta < 1$, są mniej wrażliwe niż portfel rynkowy.

Współczynnik beta dla portfela walorów jest kombinacją liniową współczynników beta dla składowych walorów, przy czym udziały w portfelu są współczynnikami tej kombinacji.

Linie rynku papierów wartościowych (patrz ryc. 5.4.3) przedstawia się jako prostą na płaszczyźnie rozpiętej przez oś współczynnika beta i oś oczekiwanej stopy zwrotu ($\beta, E(R)$). Gdyby jakaś inwestycja była położona powyżej lub poniżej tej prostej, istniałaby wówczas możliwość przeprowadzenia arbitrażu pozbawionego ryzyka. Arbitraż trwałby do momentu, gdy wszystkie inwestycje znalazłyby się na tej linii.



Ryc. 5.4.3. Linia rynku papierów wartościowych

Można zauważyć, że równanie linii rynku papierów wartościowych jest równaniem prostej regresji, dopasowywanej metodą najmniejszych kwadratów do k punktów odpowiadających wszystkim możliwym walorom na rynku. Załóżmy, że pewien portfel X odpowiada punktowi leżącemu powyżej linii rynku papierów wartościowych. Charakteryzuje się więc zbyt dużą stopą zwrotu w porównaniu z dobrze wycenionym portfelem X', leżącym na linii rynku papierów wartościowych. Oznacza to, że został zbyt nisko wyceniony przez rynek w porównaniu do jego rzeczywistej wartości, a to powoduje nadwyżkę jego stopy zwrotu ponad przeciętną wartość (patrz definicja 2.1.1). Niska cena spowoduje duży popyt na niego wśród inwestorów, przy stałej podaży jego cena będzie wzrastać aż do wartości, dla której jego stopa zwrotu zrówna się ze stopą zwrotu dla portfela X'. Podobnie portfel Y, odpowiadający punktowi znajdującemu się poniżej prostej regresji, ma zbyt wysoką cenę narzuconą przez rynek. Wskutek małego popytu na niego, przy stałej podaży na rynku, jego cena zacznie spadać, a stopa zwrotu zacznie rosnać. Po pewnym czasie portfel osiągnie punkt równowagi X' będący rzutem punktu X na prostą regresji. Więcej informacji można znaleźć w [8] i [14].

Przykład 5.4.1. [E02.06.2008] Inwestor chce oszacować oczekiwaną stopę zwrotu z akcji X, korzystając z Modelu Wyceny Aktywów Kapitałowych CAPM. Ma do dyspozycji następujące informacje: stopa wolna od ryzyka wynosi 10%, oczekiwana stopa zwrotu z indeksu replikującego cały rynek wynosi 22%, korelacja między stopą zwrotu akcji i stopą zwrotu indeksu wynosi 14%, wariancja stopy zwrotu indeksu wynosi 36%, wariancja stopy zwrotu akcji wynosi 25%. Wyznacz wartość oczekiwanej stopy zwrotu z akcji X.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru linii rynku kapitałowego

$$E(R_X) = R_F + (E(R_M) - R_F) \cdot \frac{\rho_{SX} \cdot s_M}{s_X^2} = 0,1 + 0,12 \cdot \frac{0,14 \sqrt{0,25 \cdot 0,36}}{0,36} = 0,114,$$

czyli oczekiwana stopa zwrotu z akcji X wznosi 11,4%.



Przykład 5.4.2. [E20.06.2011] Zakład ubezpieczeń rozpatruje inwestycje w dwa portfele, których charakterystyki są następujące:

portfel	premia za ryzyko	współczynnik beta
I	3,1%	0,85
II	3,8%	0,68.

Do oceny stopy zwrotu inwestor stosuje model CAPM, w którym stopa wolna od ryzyka, mierzona dochodowością długoterminowych obligacji rządowych

wynosi 5,5%. Ponadto, dla portfela I istnieje dodatkowa premia za ryzyko – 0,3%, będąca narzutem na ryzyko związanym ze strukturą portfela. Spośród podanych stwierdzeń wybierz poprawne.

A. Informacje, do których ma dostęp zakład ubezpieczeń, nie wystarczają, aby oszacować oczekiwaną stopę zwrotu przy użyciu modelu CAPM.

B. Inwestycje w oba portfele przyniosą takie same stopy zwrotu, niezależnie od tego, czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I.

C. Inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I niezależnie od tego, czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I.

D. Tylko przy uwzględnieniu dodatkowej premii za ryzyko dla portfela I inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I.

E. Inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II niezależnie od tego, czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I.

Rozwiązanie. Wyznamy równanie linii rynku papierów wartościowych $E(R_i) = R_F + \beta_i(E(R_M) - R_F)$ dla obu portfeli. Dla portfela I mamy: bez uwzględnienia dodatkowej premii za ryzyko $E(R_I) = 5,5 + 0,85 \cdot 3,1 = 8,135$, z jej uwzględnieniem $E(R_I) = 5,5 + 0,85 \cdot 3,4 = 8,39$ oraz dla portfela II $E(R_{II}) = 5,5 + 0,68 \cdot 3,8 = 8,084$. Prawidłowe jest stwierdzenie E.



Przykład 5.4.3. Akcja A o stopie zwrotu 7% ma współczynnik beta równy 0,5, natomiast akcja B o stopie zwrotu 15% ma współczynnik beta wynoszący 1,5. Znajdź wartość stopy wolnej od ryzyka. Zakładając, że współczynniki korelacji z rynkiem są jednakowe dla obu akcji, wyznacz iloraz ryzyk dla tych akcji.

Rozwiązanie. Zapisujemy równanie linii rynku papierów wartościowych dla obu walorów, otrzymując układ równań liniowych

$$\begin{cases} 7 = R_F + 0,5 \cdot (E(R_M) - R_F) \\ 15 = R_F + 1,5 \cdot (E(R_M) - R_F) \end{cases}$$

Po odjęciu stronami dostajemy $8 = E(R_M) - R_F$. Podstawiając do pierwszego równania, otrzymujemy $R_F = 3\%$.

Dalej korzystamy ze wzorów:

$$\beta_A = \frac{\text{Cov}(R_A, R_M)}{s_M^2} \text{ i } \beta_B = \frac{\text{Cov}(R_B, R_M)}{s_M^2}$$

Następnie podstawiamy dane i stosujemy wzór na kowariancję, dostając

$$0,5 = \beta_A = \frac{\rho_{A,M} \cdot s_A \cdot s_M}{s_M^2}$$

i

$$1,5 = \beta_B = \frac{\rho_{B,M} \cdot s_B \cdot s_M}{s_M^2}.$$

Korzystamy z tego, że $\rho_{A,M} = \rho_{B,M}$ i otrzymujemy

$$\frac{0,5 \cdot s_M}{s_A} = \frac{1,5 \cdot s_M}{s_B},$$

a stąd iloraz ryzyk jest równy

$$\frac{s_B}{s_A} = \frac{1,5}{0,5} = 3.$$



Zadania do rozdziału 5

1. Przypuśćmy, że stopy zwrotu pięciu akcji z pięciu okresów w przeszłości kształtowały się następująco:

Okres	Stopy zwrotu z waloru A [%]	Stopy zwrotu z waloru B [%]	Stopy zwrotu z waloru C [%]	Stopy zwrotu z waloru D [%]	Stopy zwrotu z waloru E [%]
1	6,5	6,0	5,0	5,0	6,5
2	7,0	7,0	4,0	5,0	7,5
3	8,0	6,0	6,0	4,0	5,5
4	8,5	7,0	5,0	3,0	4,5
5	8,0	6,5	5,0	3,0	6,0

- Znaleźć oczekiwane stopy zwrotu oraz oszacowania wartości ryzyka i współczynników zmienności dla tych akcji. Który walor ma najmniejszą zmienność?
- Wyznaczyć współczynniki korelacji pomiędzy każdą parą akcji.
- Przedstawić graficznie zmiany stóp zwrotu z akcji w czasie.
- Przedstawić graficznie portfele składające się z co najwyżej dwóch walorów w układzie współrzędnych (ryzyko, oczekiwana stopa zwrotu).
- Przy jakim udziale akcji A oraz E w portfelu jego ryzyko byłoby najmniejsze? Jaka byłaby jego wysokość?
- Ile walorów bez ryzyka o stopie zwrotu 2% dokupić do portfela o składzie $\omega_A = 0,8$; $\omega_E = 0,2$, aby jego ryzyko zmalało dwukrotnie?

2. Dane są wartości stóp zwrotu akcji i portfela rynkowego osiągniętych w ostatnich 10 okresach.

Okres	Stopy zwrotu akcji	Stopy zwrotu portfela rynkowego
	[%]	
1	10	9
2	8	7
3	7	6
4	2	6
5	-4	5
6	-2	4
7	-1	3
8	2	2
9	3	3
10	5	5

- A. Oszacować wariancję stopy zwrotu akcji i portfela rynkowego oraz porównać te wielkości.
- B. Oszacować semiwariancję i semiodchylenie stopy zwrotu z akcji oraz z portfela rynkowego.
3. Rozważmy portfel, w którym znajdują się akcje o równych wariancjach, jednakowo skorelowane. Wykazać, że portfel o minimalnej wariancji ma jednakowe wagi.
4. Rozważmy portfel nieskorelowanych akcji o wariancjach s_1^2, \dots, s_k^2 . Wykazać, że minimalną wariancję ma portfel o wagach $\omega_j = \frac{s_j^{-2}}{\sum_{i=1}^k s_i^{-2}}$ dla $j = 1, \dots, k$.
5. Walor bez ryzyka ma stopę zwrotu wynoszącą 2%, a portfel rynkowy ma stopę zwrotu równą 7%.
- A. Wyznaczyć linię rynku papierów wartościowych.
- B. Inwestorzy mają portfele reprezentowane punktami $A(3/2, 8), B(3/4, 6), C(1, 7), D(1/5, 3), E(1/2, 6)$ w układzie współrzędnych (współczynnik beta, stopa zwrotu). Które z nich są dobrze wycenione? Co stanie się z pozostałymi?
6. Czy wariancja portfela składającego się z dwóch akcji o ryzykach 0,4 i 0,5 oraz współczynnika korelacji pomiędzy nimi wynoszącym 0,6 może być równa 0,5?
7. Dla jakich wartości współczynnika korelacji z dwóch akcji o ryzykach 0,7 i 0,5 można skonstruować portfel o ryzyku mniejszym niż 0,5?
8. Wiemy, że stopa zwrotu z portfela rynkowego jest k -krotnie ($k > 2, k$ jest liczbą całkowitą) większa niż stopa zwrotu z walorów bez ryzyka.
- A. Przy jakim współczynniku beta portfel o stopie zwrotu dwukrotnie większej niż stopa zwrotu dla walorów bez ryzyka jest dobrze wyceniony?
- B. Dobrze wyceniona akcja A ma stopę zwrotu $(k - 1)$ -krotnie wyższą niż stopa zwrotu dla walorów bez ryzyka. Czy jest to walor ofensywny?
- C. Przy jakim współczynniku beta portfel o stopie zwrotu dwukrotnie większej niż stopa zwrotu dla portfela rynkowego jest dobrze wyceniony?
- D. Dobrze wyceniona akcja A ma stopę zwrotu trzykrotnie wyższą niż stopa zwrotu dla portfela bez ryzyka. Jaki jest współczynnik beta dla akcji A?
- E. Dobrze wyceniona akcja A ma stopę zwrotu trzykrotnie wyższą niż stopa zwrotu dla portfela rynkowego. Czy jest to walor defensywny?
9. Rozpatrujemy akcje dwóch firm – A i B. Skorelowanie stóp zwrotu tych akcji wynosi 0,3. Oszacowane są oczekiwane stopy zwrotu i ryzyko tych akcji. Wynoszą one:
- dla A: stopa zwrotu 8,7%, ryzyko 3,2%,
 - dla B: stopa zwrotu 6,2%, ryzyko 2,1%.

- A. Wyznaczyć udziały obu akcji w portfelu o minimalnym ryzyku.
- B. Zakładając, że interesuje nas portfel o ryzyku równym 2%, wyznaczyć udziały obu akcji w portfelu, który gwarantuje maksymalną stopę zwrotu przy takim ryzyku.
- C. Zakładając, że interesuje nas portfel o oczekiwanej stopie zwrotu równej 7%, wyznaczyć udziały obu akcji w portfelu, który gwarantuje taką stopę zwrotu.

10. Jakiego ryzyka mogą mieć portfele bez krótkiej sprzedaży skonstruowane z walorów: A o stopie zwrotu 8% i ryzyku 5% oraz B o stopie zwrotu 5% i ryzyku 3%, jeżeli współczynnik korelacji pomiędzy nimi jest równy -1 ?

11. Które z portfeli są efektywne?

Portfele walorów	Stopa zwrotu	Odchylenie standardowe
	[%]	
Portfel A	8	5
Portfel B	15	18
Portfel C	9	6
Portfel D	16	21
Portfel rynkowy	14	16
Instrument wolny od ryzyka	6	0

12. [E17.03.2008] Zakład ubezpieczeń rozpatruje inwestycje w dwa portfele, o których wiadomo, z jakim sektorem są związane. Ich charakterystyki są następujące:

Portfel	Sektor	Premia za ryzyko	Współczynnik beta
		[%]	
I	X	4,1	0,8
II	Y	4,8	0,97

Do oceny stopy zwrotu inwestor stosuje model CAPM, w którym stopa wolna od ryzyka, mierzona dochodowością długoterminowych obligacji rządowych, wynosi 6%. Ponadto, dla portfela I istnieje dodatkowa premia za ryzyko 2,3%, będąca narzutem na ryzyko związanym ze strukturą portfela. Spośród podanych stwierdzeń wybierz poprawne.

- A. Po uwzględnieniu dodatkowej premii za ryzyko zidentyfikowanej dla portfela I inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II.
- B. Inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II niezależnie od uwzględnienia dodatkowej premii za ryzyko dla portfela I.
- C. Inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I niezależnie od uwzględnienia dodatkowej premii za ryzyko dla portfela I.
- D. Inwestycje w oba portfele przyniosą takie same stopy zwrotu.
- E. Informacje, do których ma dostęp zakład ubezpieczeń, nie wystarczają, aby oszacować oczekiwaną stopę zwrotu przy użyciu modelu CAPM.

Odpowiedzi

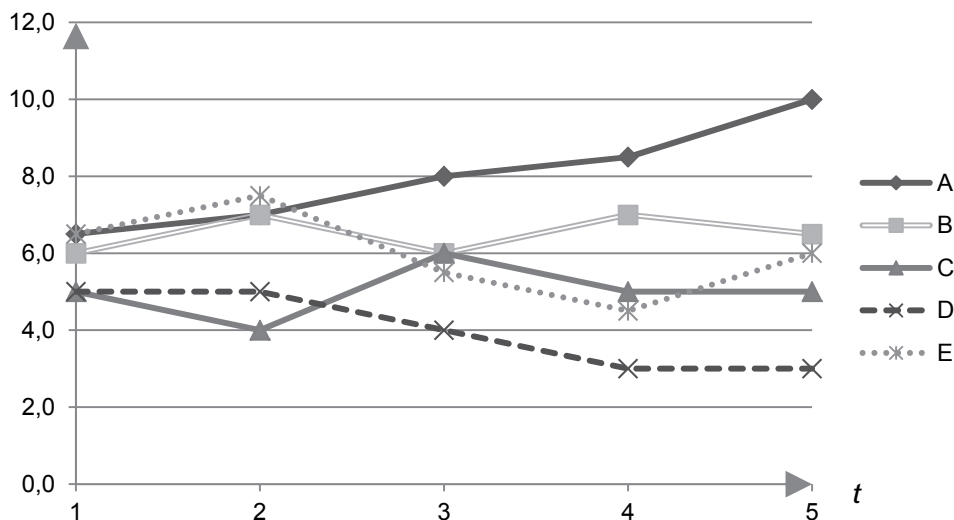
1. Oto charakterystyki portfeli A, B, C, D i E:

Walory	Oczekiwane stopy zwrotu	Ryzyka	Współczynniki zmienności	Macierz współczynników korelacji
A	8	1,3693	0,1712	$\begin{bmatrix} 1 & 0,18 & 0,26 & -0,91 & -0,49 \\ 0,18 & 1 & -0,71 & -0,25 & 0,00 \\ 0,26 & -0,71 & 1 & -0,35 & -0,63 \\ -0,91 & -0,25 & -0,35 & 1 & 0,78 \\ -0,49 & 0,00 & -0,63 & 0,78 & 1 \end{bmatrix}$
B	6,5	0,5000	0,0769	
C	5	0,7071	0,1414	
D	4	1,0000	0,2500	
E	6	1,1180	0,1863	

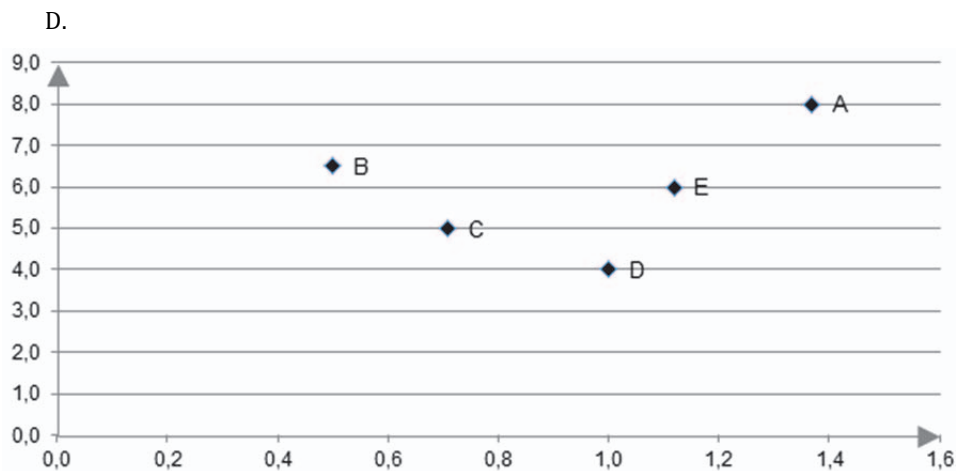
A. Najmniejszą zmienność ma walor B.

B. $\rho_{AB} = 0,18$, $\rho_{AC} = 0,26$, $\rho_{AD} = -0,91$, $\rho_{AE} = -0,49$, $\rho_{BC} = -0,71$, $\rho_{BD} = -0,25$, $\rho_{BE} \approx 0$, $\rho_{CD} = -0,35$, $\rho_{CE} = -0,63$, $\rho_{DE} = 0,78$.

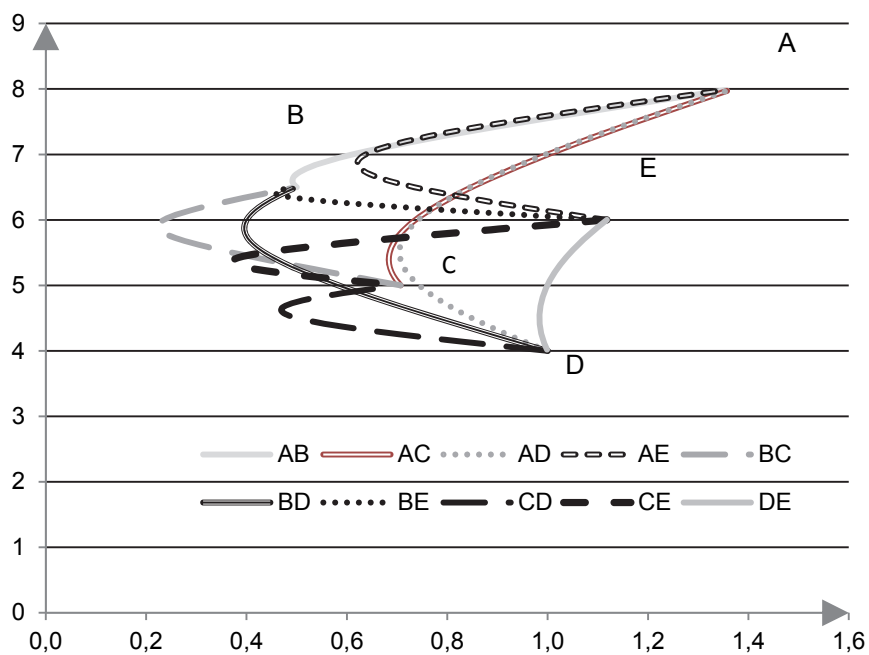
C. Na wykresie zmian stóp zwrotu w czasie walory A i D są najsilniej skorelowane ujemnie. Można sądzić, że walory B i E są nieskorelowane, ale w pierwszym okresie zmieniają się identycznie, potem przeciwnie, stąd brak liniowej zależności (zerowa korelacja) pomiędzy ich stopami zwrotu w rozpatrywanym okresie. Akcje D i E zmieniają się podobnie przez cały czas, stąd ich silna korelacja dodatnia.



Zmiany stóp zwrotu walorów w czasie



Walory A, B, C, D i E na płaszczyźnie (s, ER)



Portfele jedno- i dwuwalorowe bez krótkiej sprzedaży na płaszczyźnie (s, ER). Zaznaczenie pozostałych uczyni rysunek nieczytelny. Na podstawie wykresu dla 10 portfeli wnioskować można, że zbiór D przypomina kształtem parasol, którego granice są łukami.

E. Portfele $\omega = (x, 1 - x)$ zbudowane z walorów A i E mają stopę zwrotu $8x + 6(1 - x)$ i ryzyko $[1,36932x^2 + 1,1180^2(1 - x)^2 + 2x(1 - x) \cdot 1,3693 \cdot 1,1180 \cdot (-0,49)]^{1/2}$. Portfel o najmniejszym ryzyku będzie miał skład $\omega = (0,43; 0,57)^T$ i ryzyko $(0,385)^{1/2} = 0,62$. Dodanie waloru E skorelowanego ujemnie z walorem A zmniejszy ryzyko portfela. Stopa zwrotu tego portfela wyniesie 7,118%.

F. Portfel zawierający w swym składzie 80% walorów A i 20% walorów E ma oczekiwaną stopę zwrotu 7,6% oraz ryzyko 1,01%. Portfel po dołączeniu waloru bez ryzyka będzie zawierał $(0,8x)$ walorów A, $(0,2x)$ walorów E i $(1 - x)$ walorów bez ryzyka. Jego ryzyko wyniesie $(1,01x^2)^{1/2} \approx |x| \cdot 1,005$ i ma być równe $1,01/2 \approx 0,505$, stąd $|x| = 0,502$. Będą dwa takie portfele: $(0,4016; 0,1004; 0,498)$ i z krótką sprzedażą akcji $(-1,2016; -0,3004; 1,502)$.

2. $Var(R_i) = 62/3 \approx 20,6667$, $Var(R_M) = 40/9 \approx 4,4444$. Z akcji: 10 i 3,1623, z portfela rynkowego 2 oraz 1,4142.

3. Macierz Σ można zapisać w postaci $\Sigma = s^2[(1 - \rho)I + \rho J]$, gdzie I jest macierzą diagonalną, a J kwadratową macierzą o wszystkich elementach równych 1. Macierze Σ , I oraz J mają ten sam wymiar. W tym przypadku odwrotność macierzy Σ ma postać

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{s^2(1 - \rho^2)} [(1 + \rho)I - \rho J].$$

Macierz ta ma jednakowe sumy wierszy, dlatego możemy wnioskować, że portfel o minimalnej wariancji ma jednakowe wagi.

4. Macierz Σ jest macierzą diagonalną i można ją zapisać za pomocą elementów na głównej przekątnej jako $\Sigma = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2)$. Stąd wynika, że:

$$\Sigma^{-1} = \text{diag}(s_1^{-2}, \dots, s_k^{-2}).$$

5. $y = 5x + 2$, C i D są dobrze wycenione.

6. Tak. Dwa przypadki.

7. Dla $\rho < 5/7$.

8. A. $\frac{1}{k-1}$. B. Tak. C. $\frac{k-3}{k-1}$. D. $\frac{2}{k-1}$. E. Nie. Jest ofensywny.

9. A. $(0,2255; 0,7745)$. B. $(0,336; 0,664)$. C. $(0,32; 0,68)$.

10. Mogą charakteryzować się ryzykiem w wysokości $|8x - 3|$ dla $x \in [0, 1]$.

11. Efektywne: B, C oraz rynkowy i bez ryzyka.

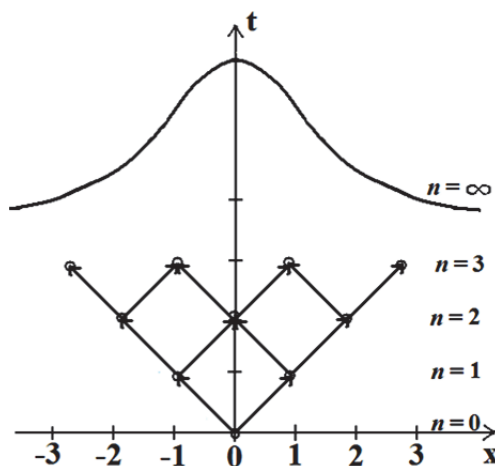
12. A.

6. Wycena w modelach dyskretnych

6.1. Własności błędzenia losowego

Jak podaje Dobiesław Bobrowski [1], terminu *random walk* (losowy spacer) użył po raz pierwszy Karl Pearson w liście do angielskiego czasopisma „Nature” z 27.07.1905 roku. Redaktor John Rayleigh wskazał, że już w 1880 roku oszacował, iż spacerujący poruszając się pojedynczymi krokami po prostej, po dużej liczbie n kroków, znajdzie się pomiędzy punktem x a $x + \Delta x$ (dla małych $\Delta x > 0$) z prawdopodobieństwem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} \cdot \Delta x.$$



Ryc. 6.1.1. Błądzenie losowe o jednostkę, startujące z zera, na prostej \mathfrak{R}

Dzisiaj posługujemy się następującą definicją procesu losowego zwanego błędzeniem losowym:

Definicja 6.1.1. Niech $\{X_n: n \geq 1\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) . Ciąg losowy $\{S_n: n \geq 1\}$, dla którego $S_n = \sum_{k=1}^n X_k + S_0$ dla $n \geq 1$ nazywamy **błądzeniem losowym**.

Wyrazy ciągu $\{S_n: n \geq 1\}$ interpretujemy jako kolejne pozycje ruchomego punktu na prostej. Ciąg ten, jak łatwo zauważyć, ma niezależne przyrosty. Zakłada się też, że $P(X_n \neq 0) > 0$ dla wszystkich $n \geq 0$.

Definicja 6.1.2. Błądzenie losowe nazywa się:

- a) **prostym**, gdy punkt przemieszcza się o jednostkę w każdym kroku,
- b) **Bernoulliego**, jeśli jest błędzeniem prostym i w każdym kroku prawdopodobieństwo ruchu w prawo wynosi p , a w lewo $q = 1 - p$, gdzie $p \in (0, 1)$,
- c) **symetrycznym**, jeśli jest błędzeniem Bernoulliego i $p = \frac{1}{2}$,
- d) **startującym z zera**, jeśli $P(S_0 = 0) = 1$.

Dowody wszystkich twierdzeń podanych w tym rozdziale można znaleźć w publikacji [1].

Twierdzenie 6.1.1. Błądzenie losowe Bernoulliego jest **jednorodne** w czasie i przestrzeni, tj. dla wszystkich $0 \leq k < n$ prawdopodobieństwo dojścia z punktu a do x w $(n - k)$ krokach jest równe prawdopodobieństwu dojścia z punktu 0 do $(x - a)$ w tej samej liczbie kroków, co można zapisać jako

$$P(S_n = x \mid S_k = a) = P(S_{n-k} = x - a \mid S_0 = 0).$$

Błądzenie losowe jest łańcuchem Markowa (patrz definicja 4.3.1), bo zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.1.2. Błądzenie losowe Bernoulliego ma własność Markowa, tj.

$$P(S_n = x_n \mid S_0 = x_0, S_1 = x_1, \dots, S_{n-1} = x_{n-1}) = P(S_n = x \mid S_{n-1} = x_{n-1})$$

dla wszystkich x_0, x_1, \dots, x_n .

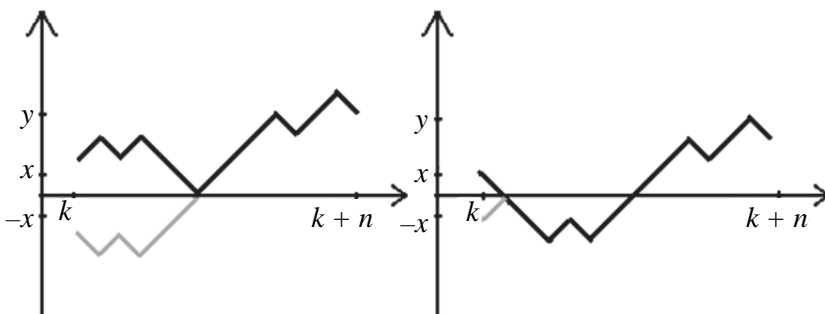
Powyższy zapis oznacza, że znajomość całej ścieżki, jaką przeszedł ruchomy punkt od chwili 0, nie jest konieczna do wskazania, gdzie znajdzie się w następnym kroku. Wystarczy tylko informacja o poprzednim położeniu.

W literaturze najczęściej rozważa się błądzenie losowe proste startujące z zera, ponieważ jeśli mamy dany ciąg $\{S_n^*\}$, gdzie $S_n^* = S_{n-1}^* + X_n^*$, będący błądzeniem losowym o y jednostek w każdym kroku, startujący z punktu $x \neq 0$, to przeskalowanie $X_n = \frac{X_n^*}{y}$ oraz przesunięcie $S_n = S_n^* - S_0$ przekształcają je w błądzenie proste startujące z zera $\{S_n\}$.

Oznaczmy przez (n, x) położenie ruchomego punktu po n krokach w pozycji $S_n = x$. Drogę ruchomego punktu (ścieżkę) można zaznaczać jako łamaną łączącą punkty kratowe płaszczyzny numer kroku-położenie. Poniższe twierdzenie opisuje ważną własność liczby ścieżek.

Twierdzenie 6.1.3. Dla dowolnych $n, k \in N$ oraz $x, y \in Z$ takich, że $x \cdot y > 0$ liczba ścieżek, po których może iść ruchomy punkt z (k, x) do $(k + n, y)$, dochodzących do osi odciętych lub ją przekraczających, jest taka sama, jak liczba ścieżek z punktu $(k, -x)$ do $(k + n, y)$.

Dowód twierdzenia 6.1.3, zwanego **zasadą odbicia** i sformułowanego przez Andrieja Kołmogorowa, opiera się na równoliczności zbioru ścieżek z punktu (k, x) do $(k + n, y)$, dochodzących do osi odciętych lub ją przekraczających ze zbiorem ich obrazów po pewnym przekształceniu. Transformacja ta odcinek każdej ścieżki od początku (punktu (k, x)) do pierwszego przecięcia z osią odciętych zastępuje odbiciem symetrycznym względem osi poziomej, a resztę ścieżki pozostawia bez zmian (ryc. 6.1.2).



Ryc. 6.1.2. Transformacja polegająca na odbiciu symetrycznym fragmentu ścieżki od początku do pierwszego punktu przecięcia z poziomą osią

Mamy też twierdzenia pozwalające policzyć ścieżki.

Twierdzenie 6.1.4. Dla dowolnych $n \in N$, $x \in Z$, $|x| \leq n$, liczba ścieżek $L(n, x)$ z punktu $(0, 0)$ do (n, x) jest równa

$$L(n, x) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+x}{2}}, & \text{gdy } (n+x) \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{gdy } (n+x) \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Wyróżnia się następujące rodzaje ścieżek.

Definicja 6.1.3. Ścieżkę nazywamy:

- a) **dodatnią**, gdy $S_n > 0$ dla wszystkich $n \geq 1$,
- b) **nieujemną**, gdy $S_n \geq 0$ dla wszystkich $n \geq 1$,
- c) **ujemną**, gdy $S_n < 0$ dla wszystkich $n \geq 1$,
- d) **niedodatnią**, gdy $S_n \leq 0$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Możemy policzyć ilość ścieżek każdego z tych rodzajów.

Twierdzenie 6.1.5. Dla dowolnych $n \in N$, $x \in Z$, $x > 0$, liczba dodatnich ścieżek z punktu $(0, 0)$ do (n, x) , jest równa

$$\frac{x}{n} L(n, x).$$

Z uwagi na symetrię jest tyle samo ścieżek ujemnych z punktu $(0, 0)$ do (n, x) (dla $n \in N$, $x \in Z$, $x < 0$). Liczba ścieżek nieujemnych z punktu $(0, 0)$ do (n, x) (dla $n \in N$, $x \in Z$, $x > 0$) jest równa

$$L(n, x) - L(n, x+2) = \frac{x+1}{n+1} L(n+1, x+1).$$

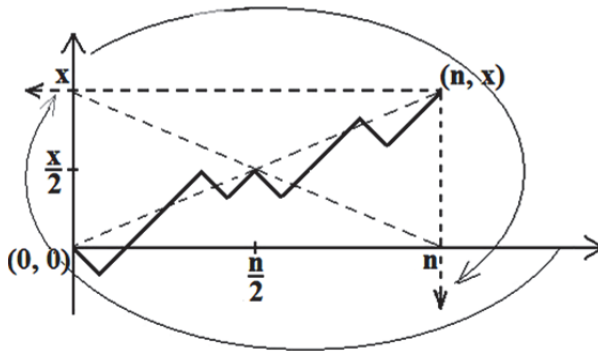
Jest to również liczba ścieżek niedodatnich, z punktu $(0, 0)$ do (n, x) , dla $n \in N$, $x \in Z$, $x \leq 0$.

Rozważa się też dotarcie ścieżki na ustalony poziom po raz pierwszy.

Definicja 6.1.4. Ścieżkami **osiągającymi** $x > 0$ **po raz pierwszy w n -tym kroku** nazywamy ścieżki z $(0, 0)$ do (n, x) takie, że wszystkie pośrednie położenia są w punktach $x_i < x$, dla $i = 1, \dots, n-1$.

Analogicznie określmy ścieżki osiągające $x < 0$ po raz pierwszy w n -tym kroku jako ścieżki, dla których położenia pośrednie $x_i > x$, dla $i = 1, \dots, n - 1$.

Twierdzenie 6.1.6. Liczba ścieżek wychodzących z $(0, 0)$ i osiągających położenie (n, x) , dla $x > 0$, po raz pierwszy w n -tym kroku jest równa liczbie dodatnich ścieżek z punktu $(0, 0)$ do (n, x) .



Ryc. 6.1.3. Obrót układu współrzędnych o kąt półpełny dookoła punktu $(\frac{n}{2}, \frac{x}{2})$

Dowód wynika z faktu, że ścieżki wychodzące z $(0, 0)$ i osiągające położenie (n, x) , dla $x > 0$, po raz pierwszy w n -tym kroku, po obrocie układu współrzędnych o kąt półpełny dookoła punktu $(\frac{n}{2}, \frac{x}{2})$ są ścieżkami dodatnimi z $(0, 0)$ do (n, x) w nowym układzie współrzędnych.

W przypadku modelu ze skończonym horyzontem czasowym (w n -tym kroku) będzie nam potrzebne poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.1.7. Liczba dodatnich ścieżek wychodzących z $(0, 0)$ i kończących się po n krokach, dla $n > 1$, jest równa $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Tyle samo jest ścieżek ujemnych, na mocy twierdzenia 6.1.3.

Znajomość liczby ścieżek określonego typu jest potrzebna do wyznaczenia prawdopodobieństw w produktowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, F, P)^n$. Każdej ścieżce przypisuje się prawdopodobieństwo dotarcia ruchomego punktu od jej początku do jej końca w błędzeniu losowym, w którym prawdopodobieństwo „kroku w prawo” wynosi p , a „kroku w lewo” $1 - p$ (gdzie $p \in (0, 1)$ jest parametrem charakteryzującym błędzenie losowe Bernoulliego). Liczba ście-

żek, które startując z pewnego punktu, docierają do tego samego celu w tej samej liczbie kroków, wynosi $\binom{n}{\frac{n+x}{2}}$, gdzie n jest liczbą kroków, a x różnicą między położeniem końcowym a położeniem początkowym. Wszystkie te ścieżki składają się z $\frac{n+x}{2}$ „kroków w prawo” oraz $n - \frac{n+x}{2} = \frac{n-x}{2}$ „kroków w lewo”, a różnią się kolejnością ich wykonania. Do identyfikacji ścieżki potrzebne jest określenie, które z kroków wykonano „w prawo”, bo pozostałe musiały być skierowane „w lewo”. Korzystamy przy tym z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 6.1.8. W błądzeniu losowym Bernoulliego, startującym z zera, prawdopodobieństwo dotarcia do punktu x w n krokach jest równe

$$\binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}},$$

jeśli $|x| \leq n$ i $(n+x)$ – parzyste, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$. W pozostałych przypadkach wynosi zero.

Dla ustalonego n suma prawdopodobieństw dotarcia do wszystkich punktów x jest równa 1, co można zapisać jako

$$\sum_{-n \leq x \leq n} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}} = 1.$$

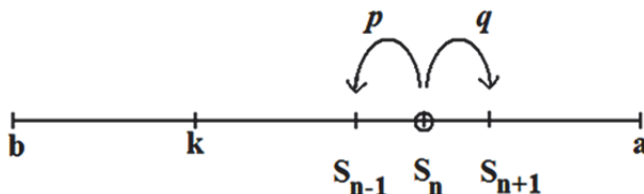
Zatem, liczby $\binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}}$ stanowią rozkład prawdopodobieństwa P^n na zbiorze Ω^n wszystkich ścieżek długości n . Ten rozkład, zwany dwumianowym, jest indukowany przez parametr p w rozkładzie Bernoulliego, któremu podlega prawdopodobieństwo P .

Możemy też rozważać nieskończony ciąg przestrzeni probabilistycznych $(\Omega, F, P)_{n=1}^{\infty}$. Wykorzystując własności miar probabilistycznych, można oszacować prawdopodobieństwo, że kiedykolwiek błądzenie losowe powróci do punktu startu.

Twierdzenie 6.1.9. W błądzeniu losowym Bernoulliego prawdopodobieństwo powrotu kiedykolwiek (tj. w nieograniczonym czasie) do punktu startu wynosi $1 - |p - q|$.

Wnioskując z powyższego twierdzenia, w błądzeniu symetrycznym ($p = \frac{1}{2}$) ruchomy punkt znajdzie się w położeniu wyjściowym z prawdopodobieństwem równym 1.

Ciekawym zagadnieniem jest obliczanie prawdopodobieństwa ruiny gracza, który rozpoczyna grę z kapitałem k jednostek pieniężnych i w każdej grze może wygrać dodatkową jednostkę pieniężną, z prawdopodobieństwem p , lub przegrać ze stratą jednostki kapitału, z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Gra kończy się z chwilą zdobycia przez gracza a ($a > 0$) jednostek pieniężnych lub osiągnięcia zadłużenia b jednostek ($b \leq 0$), czyli ruiny.



Ryc. 6.1.4. Zagadnienie ruiny gracza

Twierdzenie 6.1.10. Dla dowolnych $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq 0$ oraz $b \leq k \leq a$, w błędzeniu losowym Bernoulliego, startującym z punktu k , prawdopodobieństwo osiągnięcia punktu a (wygranej) przed osiągnięciem punktu b (ruina), wynosi:

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^b}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^b}, \text{ jeśli } p \neq q,$$

$$\frac{k - b}{a - b}, \text{ jeśli } p = q.$$

Prawdopodobieństwo ruiny przed satysfakcjonującym końcem gry to:

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^b}, \text{ jeśli } p \neq q,$$

$$\frac{a - k}{a - b}, \text{ jeśli } p = q.$$

Przykład 6.1.1. Obecna cena pewnej akcji wynosi 5 PLN. Zakładamy, że w każdym okresie może ona, z prawdopodobieństwem $p = 0,75$, zwiększyć swoją wartość o 1 w stosunku do wartości w poprzednim okresie lub zmniejszyć o 1 z prawdopodobieństwem $q = 0,25$. Wyznaczyć:

- (i) prawdopodobieństwo, że po 10 okresach cena wyniesie 9 PLN, przyjmując, że nigdy nie była mniejsza niż 6 PLN,
- (ii) liczbę ścieżek zmian wartości ceny akcji, która po 20 okresach osiągnie wartość 3 PLN, ale ani razu nie będzie ujemna,
- (iii) prawdopodobieństwo, że w każdym kroku liczba dotychczasowych wzrostów wartości ceny akcji była większa niż liczba spadków wartości, jeśli zdarzyło się a wzrostów i b ($b < a$) spadków wartości ceny akcji,
- (iv) prawdopodobieństwo, że po n okresach cena osiągnie poziom początkowy,
- (v) prawdopodobieństwo, że cena osiągnie poziom 10 PLN przed spadkiem do 2 PLN.

Rozwiązanie. (i) W podanych warunkach zmiana ceny musi nastąpić tylko na ścieżce dodatniej w modelu startującym z zera, w którym po 10 krokach ścieżka dociera do punktu 4. Oczywiście prawdopodobieństwo wzrostu o 1 wynosi $p = 0,75$, a spadku o $1 - q = 0,25$. Takich ścieżek dodatnich z $(0, 0)$ do $(10, 4)$ jest $\frac{4}{10} \binom{10}{\frac{10+4}{2}} = \frac{4}{10} \binom{10}{7}$. Idąc taką ścieżką, wykonamy 7 kroków w górę i 3 kroki w dół. Zatem, szukane prawdopodobieństwo wyniesie $\frac{4}{10} \binom{10}{7} \cdot p^7 \cdot q^3$.

(ii) Stosujemy zasadę odbicia. Od liczby wszystkich ścieżek z punktu $(0, 5)$ do punktu $(20, 3)$ odejmujemy ścieżki z $(0, -5)$ do punktu $(20, 3)$. Zatem, liczba szukanych ścieżek wynosi

$$L(20, -2) - L(20, 8) = \binom{20}{9} - \binom{20}{14} = 83\,950 - 38\,760 = 45\,190.$$

(iii) Zagadnienie to w literaturze zwane jest „problemem balotacji”. Frakcja liczby wszystkich ścieżek dodatnich, które z $(0, 0)$ dochodzą do $(a - b)$ w $(a + b)$ krokach, w stosunku do liczby wszystkich ścieżek, które z $(0, 0)$ dochodzą do $(a - b)$ w $(a + b)$ krokach, jest równa

$$\frac{a - b}{a + b} L(a + b, a - b) : L(a + b, a - b) = \frac{a - b}{a + b}.$$

(iv) Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo powrotu do zera w n krokach. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to prawdopodobieństwo to jest równe 0. Jeśli n jest liczbą parzystą, to liczba wzrostów i spadków ceny musi być taka sama. Zatem, szukane prawdopodobieństwo wyniesie

$$L(2k, 0) \cdot p^k \cdot q^k = \binom{2k}{k} p^k \cdot q^k,$$

gdzie $n = 2k$.

(v) Mamy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że błędzenie losowe startujące z zera osiągnie wartość $a = 10 - 5 = 5$ przed spadkiem do $b = 2 - 5 = -3$, czyli

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \approx 0,963.$$

6.2. Podstawowe informacje o opcjach

Instrumenty finansowe, przedmiot obrotu na rynkach finansowych, dzielą się na trzy kategorie: **instrumenty podstawowe**, zwane też prostymi lub bazowymi, **instrumenty pochodne**, inaczej derywaty, oraz **instrumenty hybrydowe**. Do pierwszej grupy zaliczamy: akcje, obligacje, dewizy, bony skarbowe oraz indeksy rynku, które, choć są pozbawione formalnego bytu, zalicza się do tej grupy. Derywaty są oparte na instrumentach bazowych. Do nich zaliczamy kontrakty terminowe (*forward* i *futures*), opcje, transakcje wymiany (*swapy*) oraz *interest rate agreements*. W ostatniej grupie są obligacje zamienne i derywaty od derywatów (na przykład opcje na opcje, kontrakty na opcje, opcje na kontrakty itp.).

Akcja (*share*) to papier wartościowy stwierdzający udział właściciela w kapitale spółki akcyjnej, dający określone prawa w zamian za wkład w kapitał spółki. Jest instrumentem obciążonym ryzykiem związanym z koniunkturą na giełdzie.

Obligacja (*bond*) jest dokumentem, w którym jego wystawca (emitent) potwierdza zaciągnięcie pożyczki u właściciela obligacji w określonej kwocie i zobowiązuje się jednocześnie do zwrotu tej kwoty w ustalonym z góry terminie, a także do zapłaty odsetek określonych w momencie emisji i liczonych w stosunku do nominalnej kwoty pożyczki. Obligacje (państwowe) uznawane są za instrumenty bez ryzyka.

Bony skarbowe (*treasury bills*) są krótkoterminowymi papierami wartościowymi umożliwiającymi zaciągnięcie przez Skarb Państwa kredytu na sfinansowanie deficytu budżetu państwa. W Polsce są papierami wartościowymi na okaziciela, sprzedawanymi z dyskontem, o terminie wykupu 2, 3 dni lub 1, 2, ..., 52 tygodnie.

Kontrakty futures (notowane na giełdzie) i *forward* (pozagiełdowe) to umowy kupna lub sprzedaży określonych instrumentów finansowych lub towarów w ustalonym momencie w przyszłości, po określonej cenie.

Swap jest kontraktem zamiany długów, czyli operacją wymiany strumieni finansowych, których wartość i terminy są z góry ustalone. Mogą to być kredyty konsolidacyjne, zmiana stałej stopy procentowej lokaty na zmienną itp.

Opcja to umowa między nabywcą (posiadaczem) a sprzedawcą (wystawcą) opcji dająca nabywcy **prawo** do kupna (w przypadku **opcji kupna**) lub prawo sprzedaży (dla **opcji sprzedaży**) instrumentu bazowego w określonym dniu (dla **opcji europejskiej**) lub przed ustalonym dniem (dla **opcji amerykańskiej**) po ustalonej cenie (zwanej **ceną wykonania**) w zamian za pewną opłatę (zwaną **ceną opcji** lub **premią za opcję**). **Termin wygaśnięcia** opcji to termin jej ważności. Po tym terminie opcja nie może być wykonana, więc staje się bezwartościowa.

Celem stochastycznych modeli jest wycena premii za opcję, której wartość zależy od popytu i podaży na rynku, czyli jest obciążona ryzykiem rynkowym. Zajęcie **długiej pozycji** (*long position*) oznacza kupno opcji, a **krótkiej pozycji** (*short position*) – sprzedaż opcji. Nabywca opcji (*seller*) płaci sprzedawcy premię za opcję w zamian za prawo decyzji, czy zrealizować tę opcję (tj. wykonać zapisaną w niej transakcję kupna albo sprzedaży), czy nie. Sprzedawca (*writer*) otrzymuje premię opcyjną w zamian za obowiązek kupna albo sprzedaży instrumentu bazowego, gdy właściciel opcji chce ją zrealizować.

Opcja jest **w cenie** (*in the money*), gdy opłaca się ją wykonać; jest **po cenie** (*at the money*), gdy cena wykonania opcji i cena instrumentu bazowego na rynku w momencie wykonania opcji są równe; wreszcie, opcja **nie jest w cenie** (*out of the money*), gdy nie opłaca się jej wykonać.

Stosuje się następujące oznaczenia: T – termin ważności opcji, K – cena wykonania opcji, S_t – cena instrumentu bazowego w chwili t ($0 \leq t \leq T$), C – cena opcji kupna C_0 zakumulowana na chwilę T , P – cena opcji sprzedaży P_0 zakumulowana na chwilę T .

Tabela 6.2.1. Transakcje na rynku opcji europejskich

Nazwa dla opcji	Zysk z opcji europejskiej w zależności od ceny instrumentu pierwotnego	Zysk/strata inwestora z opcji europejskiej	Nazwa dla opcji	Zysk z opcji europejskiej w zależności od ceny instrumentu pierwotnego	Zysk/strata inwestora z opcji europejskiej
Kupno opcji kupna, długa opcja kupna (<i>long call</i>)		$-C_0$ w chwili 0, $(S_T - K)^+$ w chwili T	sprzedaż opcji sprzedaży, krótka opcja sprzedaży (<i>short put</i>)		$+P_0$ w chwili 0, $-(K - S_T)^+$ w chwili T
Kupno opcji sprzedaży, długa opcja sprzedaży (<i>long put</i>)		$-P_0$ w chwili 0, $(K - S_T)^+$ w chwili T	sprzedaż opcji kupna, krótka opcja kupna (<i>short call</i>)		C_0 w chwili 0, $-(S_T - K)^+$ w chwili T

Inżynieria finansowa (patrz np. [20], [21]) zajmuje się konstrukcją nowych instrumentów finansowych będących kombinacją derywatów lub instrumentów bazowych z różnymi terminami wykonania, różnymi cenami itp. Rozróżnia się cztery rodzaje transakcji na rynku opcji. Z każdą transakcją związany jest zysk, dodatni dla kupującego i ujemny dla sprzedającego, równy wypłacie uzyskanej z opcji pomniejszonej o jej cenę. Do zapisu zysku z opcji stosuje się oznaczenie $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ dla obcięcia funkcji x do jej części nieujemnej i zastąpienia części ujemnej wartościami zerowymi. W tabeli 6.2.1 liczba C jest ceną opcji kupna C_0 przeliczoną na moment T , a P jest ceną opcji sprzedaży P_0 w chwili T .

Przykład 6.2.1. [E05.12.2005] Bieżące ceny rocznych europejskich opcji na akcje spółki X

Cena wykonania	50	60	70
Cena opcji kupna	15	9	5
Cena opcji sprzedaży	13	20	28

Inwestor chce nabyć instrument wypłacający za rok kwotę: $(120 - 2 \cdot \text{cena akcji za rok})$, jeśli cena akcji będzie mniejsza od 50 $(220 - 4 \cdot \text{cena akcji za rok})$, jeśli cena akcji znajdzie się w przedziale $[50, 60)$ $(100 - 2 \cdot \text{cena akcji za rok})$, jeśli cena akcji znajdzie się w przedziale $[60, 70)$ $(\text{cena akcji za rok} - 110)$, jeśli cena akcji będzie większa lub równa 70. Ile wynosi cena takiego instrumentu przy założeniu braku kosztów transakcyjnych oraz braku możliwości arbitrażu?

Rozwiązanie. Zapisujemy wypłaty z instrumentu za pomocą opcji kupna i opcji sprzedaży:

$$\begin{aligned}
 120 - 2 \cdot S_T &= 2 \cdot (60 - S_T), \\
 220 - 4 \cdot S_T &= 2 \cdot (60 - S_T) - 2 \cdot (S_T - 50), \\
 100 - 2 \cdot S_T &= -2 \cdot (S_T - 50), \\
 S_T - 110 &= -2 \cdot (S_T - 50) + 3 \cdot (S_T - 70).
 \end{aligned}$$

Teraz odtwarzamy konstrukcję instrumentu, korzystając z wykresów lub wzorów zamieszczonych w tabeli 6.2.1 jako $2 \cdot (60 - S_T) - 2 \cdot (S_T - 50) + 3 \cdot (S_T - 70)$. Stąd cena w chwili 0 powinna wynosić $2 \cdot 20 - 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 = 25$.

Przykład 6.2.2. [E01.10.2012] Cena jednej akcji spółki α wynosi 50. Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki za rok ma rozkład jednostajny na przedziale $(20, 100)$. Inwestor konstruuje dwa portfele:

- 1) zawierający w 100% akcje spółki α ,
- 2) zawierający w 100% długie pozycje w europejskich opcjach *call* na akcje spółki α z ceną wykonania 50 i rocznym terminem wykonania.

Cena opcji wynosi 10. Przy powyższych założeniach obliczyć stosunek wariacji rocznej stopy zwrotu z portfela 2 do wariacji rocznej stopy zwrotu z portfela 1.

Rozwiązanie. Niech X będzie zmienną losową modelującą cenę akcji spółki α za rok. Ta zmienna losowa podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale $(20, 100)$ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 1/80 & \text{dla } x \in (20, 100). \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej może być obliczona za pomocą całki

$$\int_{20}^{100} x \frac{1}{80} dx = 60,$$

a wariacja ze wzoru

$$\int_{20}^{100} (x - 60)^2 \frac{1}{80} dx = \frac{(100 - 20)^2}{12}.$$

Wartość drugiego portfela po upływie roku reprezentuje zmienna losowa $Y = (X - 50)^2$, ponieważ zawiera on tylko opcje *call* o cenie wykonania 50. Mamy dalej

$$EY = \int_{20}^{100} (x - 50) \frac{1}{80} dx = 15,625,$$

$$EY^2 = \int_{20}^{100} (x - 50)^2 \frac{1}{80} dx = 520,8(3),$$

więc $Var(Y) = 520,8(3) - 15,625^2 \approx 276,693$. Kapitał początkowy potrzebny na zakup pierwszego portfela to 50 jednostek pieniężnych na każdą akcję, a na zakup drugiego po 10 jednostek na każdą opcję.

Wariacja stopy zysku (zwrotu) z portfela 1 wynosi $Var((X - 50)/50) = Var(X)/2500 \approx 0,213$, dla portfela 2 mamy $Var((X - 10)/10) = Var(X)/100 \approx 2,767$, a szukany iloraz wariacji wynosi, w przybliżeniu, 12,97.

6.3. Model CRR

Model wyceny europejskich opcji kupna i sprzedaży sformułowali John Cox, Stephen Ross i Mark Rubinstein w pracy pt. *Option pricing. A simplified approach*, zamieszczonej w „Journal of Financial Economics” w 1979 roku. Będziemy oznaczać go skrótem CRR.

Model zakłada, że na rynku dostępne są dwa walory: obligacja zerokuponowa, czyli walor bez ryzyka, ze stałą w okresie stopą zwrotu bez ryzyka $R \geq 0$, niezależną od czasu i stanu rynku, oraz walor ryzykowny, czyli akcja niewypłacająca dywidendy. Jest to model z czasem dyskretnym i skończonym, choć odległym, horyzontem czasowym $T^* = N$, czyli $t \in \{0, 1, \dots, N\}$.

W chwili $t = 0$ wartość obligacji wynosi $B_0 > 0$ i ewoluuje w ten sposób, że w momencie n ($0 < n \leq N$) wartość obligacji wzrasta do $B_0(1 + R)^n$, tworząc deterministyczny proces $\left\{\frac{B_n}{B_0}\right\}$, zwany też procesem konta bankowego. Jednokresowa stopa zwrotu dla akcji może wynieść u z prawdopodobieństwem p ($p \in (0, 1)$) lub d z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$, w każdym okresie. Z tego wynika, że cena akcji podlega pewnego rodzaju błędzeniu losowemu. W chwili $n = 1$ cena akcji w przypadku hossy wzrośnie (up – stąd oznaczenie u) do $S_1^u = uS_0$ albo w przypadku bessy ($down$) spadnie do $S_1^d = dS_0$. W drugim kroku mamy trzy możliwe do osiągnięcia wartości ceny akcji: $S_2^{uu} = uS_1^u = u^2S_0$, z prawdopodobieństwem p^2 , $S_2^{ud} = S_2^{du} = dS_1^u = uS_1^d = udS_0$, z prawdopodobieństwem $2pq$, oraz $S_2^{dd} = dS_1^d = d^2S_0$, z prawdopodobieństwem q^2 . W momencie n cena zmienna losowa reprezentująca cenę akcji przybiera jedną z $(n + 1)$ wartości $u^j d^{n-j}S_0$, z prawdopodobieństwem $\binom{n}{j} p^j q^{n-j}$ dla wszystkich $n = 0, 1, \dots, N$, czyli podlega rozkładowi dwumianowemu.

Przytoczmy teraz kilka niezbędnych definicji i twierdzeń dotyczących arbitrażu. Więcej informacji zamieszczono w publikacji [16].

Definicja 6.3.1. Rynek finansowy nazywamy **zupełnym** (*complete*), gdy dla każdego instrumentu finansowego istnieje strategia generująca ten instrument. W przeciwnym wypadku rynek nazywamy **niezupełnym** (*incomplete*).

Strategia inwestycyjna jest to wektor opisujący skład portfela zakupionego w chwili $t = 0$. Wartości ujemne tego wektora traktujemy jak pożyczkę lub krótką sprzedaż waloru. Wartości tego portfela w kolejnych chwilach $n = 0, 1, \dots, N$ opisuje proces portfelowy $\{V_n\}$.

Twierdzenie 6.3.1. Rynek finansowy jest zupełny, gdy istnieje na nim jednoznacznie wyznaczona miara bez ryzyka, przy której nie ma możliwości arbi-

trażu, tzn. z zainwestowanego zerowego kapitału nie można uzyskać dodatniego zysku.

Miara ta zwana jest również miarą obojętną wobec ryzyka, miarą arbitrażową (*risk-free measure, risk-neutral measure*).

Twierdzenie 6.3.2. W modelu CRR nie ma arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0 < d < 1 + R < u < 1.$$

W tym modelu miara bez ryzyka spełnia warunki $p = \frac{1-d+R}{u-d}$ i $q = \frac{u-1-R}{u-d}$, co wykazemy później.

Model CRR zakłada, że na rynku można obracać europejskimi opcjami kupna i europejskimi opcjami sprzedaży na jedną akcję. Opcje wygasają w chwili N , a cena ich realizacji wznosi K (musi być $S_1^d < K < S_1^u$, inaczej opcje nie mają sensu). Kupujący europejską opcję kupna na tę akcję płaci sprzedającemu opcję kwotę C_0 w chwili $t = 0$, a w zamian otrzymuje prawo do kupna 1 akcji w chwili $t = N$ po cenie wykonania K zamiast na rynku po cenie S_N . Może się zdarzyć jedna z trzech możliwości (stąd nazwa instrumentu finansowego – opcja):

$$\begin{aligned} S_N > K &\Rightarrow (S_N - K)^+ > 0 \text{ opcja kupna jest w cenie} \\ S_N = K &\Rightarrow (S_N - K)^+ = 0 \text{ opcja kupna jest po cenie} \\ S_N < K &\Rightarrow (S_N - K)^+ = 0 \text{ opcja kupna nie jest w cenie.} \end{aligned}$$

Europejska opcja sprzedaży daje ją kupującemu prawo do sprzedaży 1 akcji po cenie wykonania K w chwili $t = N$. Wypłata z opcji sprzedaży będzie dodatnia, jeśli opcja kupna nie będzie w cenie, i na odwrót:

$$\begin{aligned} S_N > K &\Rightarrow (K - S_N)^+ > 0 \text{ opcja sprzedaży nie jest w cenie} \\ S_N = K &\Rightarrow (K - S_N)^+ = 0 \text{ opcja sprzedaży jest po cenie} \\ S_N < K &\Rightarrow (K - S_N)^+ = 0 \text{ opcja sprzedaży jest w cenie.} \end{aligned}$$

Rozważmy portfel (α, β) składający się w chwili $n = 0$ z α obligacji i β akcji. Wartość tego portfela wynosi $V_0 = \alpha \cdot B_0 + \beta \cdot S_0$. Po jednym okresie jego wartość albo wzrośnie do $V_1^u = \alpha \cdot B_0(1 + R) + \beta \cdot S_1^u > 0$, albo zmaleje do $V_1^d = \alpha \cdot B_0(1 + R) + \beta \cdot S_1^d \geq 0$. Oczekiwana wartość portfela, liczona względem miary bez ryzyka, w chwili $n = 1$ wyniesie

$$\begin{aligned} pV_1^u + qV_1^d &= p \cdot \alpha B_0(1 + R) + p \cdot \beta S_1^u + (1 - p) \cdot \alpha B_0(1 + R) + (1 - p) \cdot \beta S_1^d = \\ &= \alpha \cdot B_0(1 + R) + \beta \cdot [pS_1^u + (1 - p)S_1^d] > 0. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej S_1 względem miary probabilistycznej $\{p, q\}$, co będziemy oznaczać jako $E_p(S_1)$. Oczekiwana wartość portfela jest dodatnia jako suma liczby dodatniej i nieujemnej.

Ze względu na zmienność wartości kapitału w czasie wygodniej jest posługiwać się zdyskontowanymi wersjami procesów cen walorów zamiast ich wartościami nominalnymi. Taka normalizacja polega na podzieleniu cen wszystkich walorów przez cenę jednego z nich, który zwany jest *numéraire*. Tutaj rolę *numéraire* pełnić będzie funkcja określająca wartość złotówki w modelu dyskretnym, czyli funkcja akumulacji w kapitalizacji złożonej ze stałą stopą R w każdym okresie od $n - 1$ do n ($n = 0, 1, \dots, N$). Dyskontujemy wartość oczekiwaną zmiennej losowej V_1 na chwilę 0, dzieląc przez $a(1) = 1 + R$.

$$\frac{1}{1+R} [p \cdot V_1^u + q \cdot V_1^d] = \alpha \cdot B_0 + \beta \left[\frac{1}{1+R} E_p(S_1) \right] > 0.$$

Jeżeli nie ma możliwości arbitrażu (zysku bez ryzyka), to musi zachodzić warunek

$$E_p \left(\frac{S_1}{1+R} \right) = S_0.$$

Warunek ten wynika stąd, że dodatni zdyskontowany oczekiwany zysk z portfela w chwili 1 może powstać tylko z dodatniego kapitału początkowego $V_0 = \alpha \cdot B_0 + \beta \cdot S_0$.

Powróćmy do warunku $E_p(S_1/(1+R)) = S_0$. Ponieważ zmienna losowa S_1 ma rozkład dwupunktowy z prawdopodobieństwami

$$p = P(S_1 = uS_0) = 1 - q = 1 - P(S_1 = dS_0),$$

więc

$$E_p \left(\frac{S_1}{1+R} \right) = p \cdot \frac{u}{(1+R)} S_0 + p \cdot \frac{d}{(1+R)} S_0,$$

stąd otrzymujemy

$$p \cdot u + q \cdot d = 1 + R.$$

Uwzględniając, że $q = 1 - p$, dostajemy wzór określający miarę bez ryzyka w modelu CRR:

$$p = \frac{1 - d + R}{u - d}, q = \frac{u - 1 + R}{u - d}.$$

Ponadto, model CRR oparty jest na błędzeniu losowym, w którym ciąg zmian wartości jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z prawdopodobieństwami:

$$p = P(S_n = u \cdot S_{n-1}) = 1 - q = 1 - P(S_n = d \cdot S_{n-1}).$$

Proces ten jest jednorodny w czasie i przestrzeni (patrz twierdzenie 6.1.1), więc aby w żadnym momencie nie pojawiła się możliwość arbitrażu, prawdo-

podobieństwa p i q muszą być takie same dla każdej chwili n i muszą stanowić miarę bez ryzyka.

Przykład 6.3.1. [E03.10.2011] Obecnie cena niepłacącej dywidendy akcji wynosi 18. Wiadomo, że za 6 miesięcy cena tej akcji wzrośnie do wysokości 22 lub spadnie do wysokości 14. Cena europejskiej opcji kupna na tę akcję, z terminem wykonania za 6 miesięcy i ceną wykonania 20, wynosi 1,25. Ponadto, roczna stopa wolna od ryzyka to 6%. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe przy założeniu, że nie istnieją koszty transakcji, aktywa są idealnie podzielne, a oprocentowanie depozytów i pożyczek jest takie samo i równe stopie wolnej od ryzyka?

- A. Nie istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego.
- B. Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0,15, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0,25 akcji i złożymy depozyt w wysokości 3,40.
- C. Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0,15, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0,25 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 3,40.
- D. Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0,30, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0,5 akcji i złożymy depozyt w wysokości 9,05.
- E. Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0,30, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0,5 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 9,05.

Rozwiązanie. Zbadajmy najpierw istnienie miary bez ryzyka. Ze wzoru $E_p\left(\frac{S_1}{1+R}\right) = S_0$ mamy $p \cdot S_1^u + (1-p)S_1^d = S_0(1+0,03)$, skąd wyznaczamy $p = 0,5675$. Wyceniamy opcję na podstawie wzoru

$$C_0 = \frac{pC_1^u + (1-p) \cdot C_1^d}{1,03}$$

i otrzymujemy wynik $C_0 = 1,2875 \neq 1,25$. Okazało się, że arbitraż jest możliwy. Oceńmy strategię B, C, D i E:

Strategia	$t = 0$	$t = N$ hossa	$t = N$ bessa
B	$-C_0 + \frac{S_0}{4} - 3,4 = -0,15$	$(S_N - K)^+ - \frac{S_0}{4} + 3,5 = 0$	$-\frac{S_0}{4} + 3,5 = 0$
C	$C_0 - \frac{S_0}{4} + 3,4 = 0,15$	$-(S_N - K)^+ + \frac{S_0}{4} - 3,5 = 0$	$\frac{S_0}{4} - 3,5 = 0$
D	$-C_0 + \frac{S_0}{2} - 9,05 = -1,3$	$(S_N - K)^+ - \frac{S_0}{2} + 9,32 = 2,32$	$-\frac{S_0}{2} + 9,32 = 0,32$
E	$C_0 - \frac{S_0}{2} + 9,05 = 1,3$	$-(S_N - K)^+ + \frac{S_0}{2} - 9,32 = -2,32$	$\frac{S_0}{2} - 9,32 = -0,32$

Zysk arbitrażowy jest dodatnią różnicą pomiędzy oczekiwanym kapitałem końcowym i kapitałem początkowym. Strategia B z ujemnym kapitałem początkowym $-0,15$ ma zerowy kapitał końcowy, więc zysk z niej wynosi $0,15$. Strategia C przyniesie stratę $(-0,15)$ zamiast zysku. W przypadku strategii D zysk może wynieść $2,32 - (-1,3) = 3,62$ z prawdopodobieństwem $p = 0,5675$ lub $0,32 - (-1,3) = 1,62$ z prawdopodobieństwem $q = 0,4325$, czyli oczekiwany zysk z D jest równy $3,62 \cdot 0,5675 + 1,62 \cdot 0,4325 = 2,755$. Podobnie stwierdzamy, że oczekiwany zysk dla E jest ujemny, nie może więc wynieść $0,3$. Prawdziwa jest jedynie odpowiedź B.

Definicja 6.3.2. Portfel albo strategię nazywamy **samofinansującym/ca** (*self-financial strategy*), jeśli nie dokłada się ani nie wycofuje pieniędzy z portfela w innych momentach niż $n = 0$ i $n = N$, a w każdym pośrednim momencie zyski z jednych walorów są reinwestowane w inne walory w portfelu.

Możemy skonstruować portfel, zaczynając od zerowego kapitału, gdy za pożyczkę w wysokości $|\alpha| \cdot B_0$ w chwili 0 kupujemy β akcji po S_0 za sztukę. Wtedy $\alpha < 0$ (pożyczka), $\beta > 0$ (zakup), a początkowa wartość portfela wynosi zero,

$$V_0 = \alpha \cdot B_0 + \beta \cdot S_0 = 0.$$

Wartość końcowa takiego portfela w warunkach braku możliwości arbitrażu też będzie równa zero, tak samo jak wartość oczekiwana portfela liczona względem miary bez ryzyka.

Definicja 6.3.3. Mówimy, że portfel **replikuje** instrument finansowy, jeśli wartości obu są identyczne w każdej chwili.

Założmy teraz, że portfel (α, β) składający się w chwili $n = 0$ z α obligacji i β akcji replikuje europejską opcję kupna na te akcje. Zatem, w chwili $n = 0$ wartość portfela V_0 jest równa cenie za te opcje, czyli $V_0 = C_0$. Jeśli na giełdzie zdarzy się hossa, to $V_1^u = \alpha \cdot B_0(1 + R) + \beta \cdot S_1^u = S_N^u - K$, jeśli bessa, to $V_1^d = \alpha \cdot B_0(1 + R) + \beta \cdot S_1^d = 0$.

Odejmujemy stronami te równania i wyznaczamy rozwiązanie całego układu w postaci:

$$\begin{cases} \beta = \frac{S_N^u - K}{S_N^u - S_N^d} > 0 \\ \alpha = \frac{-S_N^d(S_N^u - K)}{S_N^u - S_N^d} \cdot \frac{1}{B_0(1 + R)^N} < 0 \end{cases}.$$

Znaki wyrażeń $\beta > 0$ i $\alpha < 0$ oznaczają: aby zreplikować opcję, należy przyjąć długą pozycję w akcjach i wziąć pożyczkę na zakup obligacji. Sprawiedliwa cena (w chwili 0) za europejską opcję kupna powinna wynieść

$$C_0 = V_0 = \alpha \cdot B_0 + \beta \cdot S_0 = \\ = p \frac{S_N^u - K}{(1+R)^N} + (1-p) \frac{0}{(1+R)^N} = p \frac{C_N^u}{(1+R)^N} + (1-p) \frac{C_N^d}{(1+R)^N}.$$

Cena tej opcji w chwili 0 jest równa wartości oczekiwanej wypłaty z tej opcji względem miary bez ryzyka, czyli $C_0 = E_p(C_N \cdot \frac{1}{(1+R)^N})$. Dla opcji sprzedaży wzór jest analogiczny: $P_0 = E_p(P_N \cdot \frac{1}{(1+R)^N})$, ale w portfelu replikującym należy zająć długą pozycję w obligacjach, a krótką w akcjach.

Regułę obliczania wartości oczekiwanej wypłaty względem miary bez ryzyka stosuje się do sprawiedliwej wyceny każdego waloru.

||| **Twierdzenie 6.3.3.** Cena instrumentu finansowego w chwili n ($0 \leq n < N$) jest zdyskontowaną na tę chwilę wartością oczekiwaną zysku z tego instrumentu względem miary bez ryzyka.

Według powyższej zasady, cena europejskiej opcji kupna w chwili n ($0 \leq n < N$) dla modelu CRR wyraża się wzorem

$$C_n = \frac{1}{(1+R)^{N-n}} E_p[(S_N - K)^+] = \\ = \frac{1}{(1+R)^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} (S_n u^j d^{N-n-j} - K)^+.$$

Dla opcji sprzedaży wzór jest podobny:

$$P_n = \frac{1}{(1+R)^{N-n}} E_p[-(S_N - K)^+] = \\ = \frac{1}{(1+R)^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [-(S_n u^j d^{N-n-j} - K)^+].$$

Odejmując stronami te dwa wzory, otrzymujemy równanie **parytetu** europejskich opcji kupna i sprzedaży, czyli

$$C_n - P_n = S_n - \frac{K}{(1+R)^{N-n}}$$

dla wszystkich $0 \leq n < N$.

Przykład 6.3.2. [E14.05.2007] Cena europejskiej opcji sprzedaży, o terminie realizacji $T = 1$ rok, wynosi $P = 1,03$ w chwili 0. Aktualna (tj. w chwili 0) cena akcji niepłacącej dywidendy wynosi $S_0 = 42$, cena wykonania zaś $K = 40$. Roczna ciągła stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi $\delta = 10\%$. Wyznacz wartość rocznej opcji kupna C dla tego samego instrumentu podstawowego z ceną wykonania K przy założeniu braku arbitrażu.

Rozwiązanie. Skorzystamy z parytetu w chwili $t = 0$

$$C_0 = P_0 + S_0 - \frac{K}{e^{rt}} = 1,03 + 42 - 40 \cdot e^{-0,1} \approx 6,84.$$

Przykład 6.3.3. [E17.01.2005] Inwestor przyjmuje następujące założenia kształtowania się kursu akcji spółki X: obecna cena akcji wynosi 50 i w każdym z dwóch kolejnych okresów cena akcji może zmienić się o $+20\%$ (z prawdopodobieństwem 60%) lub -10% (z prawdopodobieństwem 40%) w odniesieniu do jej wartości z początku okresu.

Amerykańska opcja „kupna po cenie minimalnej” wypłaca w momencie realizacji (która jest możliwa zarówno na koniec pierwszego, jak i drugiego okresu) różnicę pomiędzy ceną akcji w chwili realizacji opcji a minimalną ceną akcji w okresie do momentu realizacji opcji (z uwzględnieniem ceny początkowej), o ile ta różnica jest dodatnia. Jaką maksymalną cenę zapłaciłby inwestor za amerykańską opcję „kupna po cenie minimalnej” na akcje spółki X, jeśli wymaga, aby oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w opcję wyniosła przynajmniej 10% w skali jednego okresu? Opcja jest ważna od chwili obecnej przez dwa okresy.

Rozwiązanie. Zaczniemy od wyznaczenia wypłat z opcji na końcu drugiego okresu, jeśli jej nie zrealizowano: ${}^A C_2^{uu} = 72 - 50 = 22$, ${}^A C_2^{ud} = 54 - 50 = 4$, ${}^A C_2^{du} = 54 - 45 = 9$, ${}^A C_2^{dd} = 40,5 - 40,5 = 0$. Przy wycenie we wcześniejszych okresach wyznaczamy większą z dwóch wartości. Pierwsza to zdyskontowana o jeden okres wartość oczekiwana (względem miary bez ryzyka) zmiennej losowej wskazującej możliwe wypłaty w następnym kroku ścieżki zmian ceny, jeśli teraz czekamy z realizacją opcji. Druga wartość to zysk lub strata z instrumentu podstawowego, gdyby w tej chwili zrealizować opcję. Stąd

$${}^A C_1^u = \max \left\{ \frac{22 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,4}{1,1}, (60 - 50)^+ \right\} = 13,45,$$

$${}^A C_1^d = \max \left\{ \frac{9 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4}{1,1}, (40 - 50)^+ \right\} = 4,91,$$

$${}^A C_0 = \frac{13,45 \cdot 0,6 + 4,91 \cdot 0,4}{1,1} = 9,12.$$

6.4. Martyngały dyskretne

Warunek $E_p(S_1/(1+R)) = E_p(S_0) = S_0$ można zapisać w ogólniejszej postaci jako $E_p(S_n/(1+R)) = E_p(S_{n-1})$, ze względu na jednorodność błędzenia losowego, albo wykorzystując rekurencję, jako $E_p(S_n/(1+R)^n) = E_p(S_0)$ dla $n = 1, 2, \dots$. Funkcjonał E_p występujący w tych wzorach można zastąpić warunkową wartością oczekiwaną.

Definicja 6.4.1. Warunkową wartością oczekiwaną całkowalnej zmiennej losowej X względem σ -algebry $G \subset F$ nazywamy zmienną losową $E_p(X|G)$ spełniającą warunki:

- a) $E_p(X|G)$ jest mierzalna względem σ -algebry G ,
- b) dla każdego zbioru $A \in G$ zachodzi równość $\int_A X dP = \int_A E_p(X|G) dP$.

Oto najważniejsze własności warunkowej wartości oczekiwanej, patrz na przykład [9].

1. Dla każdej całkowalnej zmiennej losowej X i każdej pod- σ -algebry G w F istnieje przynajmniej jedna całkowalna zmienna losowa $E_p(X|G)$. Jeśli Y_1 i Y_2 są warunkowymi wartościami oczekiwanymi zmiennej losowej X względem σ -algebry G , to $Y_1 = Y_2$ prawie wszędzie względem miary P .
2. Jeśli X i Y są całkowalnymi zmiennymi losowymi, to dla dowolnych $a, b \in \mathfrak{R}$ mamy

$$E_p(aX + bY | G) = a \cdot E_p(X | G) + b \cdot E_p(Y | G)$$

prawie wszędzie względem P .

3. Jeżeli zmienna losowa X jest mierzalna względem σ -algebry G , to

$$E_p(X | G) = X$$

prawie wszędzie względem P .

4. Jeżeli zmienna losowa X jest mierzalna względem σ -algebry G , zmienna losowa Y jest całkowalna i zmienna losowa $X \cdot Y$ jest całkowalna, to

$$E_p(X \cdot Y | G) = X \cdot E_p(Y | G)$$

prawie wszędzie względem P .

5. Jeśli pod- σ -algebry G_1 i G_2 w F są niezależne i zmienna losowa X jest mierzalna względem G_1 i całkowalna, to

$$E_p(X | G_2) = E_p(X)$$

prawie wszędzie względem P .

Przestrzeń probabilistyczną (Ω, F, P) ze wstępującym ciągiem σ -algebr (F_n) takich, że $F_n \subset F$ nazywamy bazą stochastyczną.

Definicja 6.4.2. Proces losowy $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ określony na bazie stochastycznej $(\Omega, (F_n), F, P)$ jest **martyngałem**, jeśli

- jest zaadaptowany do filtracji, tzn. zmienna losowa X_n jest F_n -mierzalna (mierzalna względem σ -algebry F_n) dla każdego $n \geq 0$,
- $E_p(|X_n|) < \infty$ dla każdego $n \geq 0$,
- $X_n = E_p(X_{n+1} | F_n)$ prawie wszędzie względem P , dla każdego $n \geq 0$.

Przykład 6.4.1. [E02.06.2008] Załóżmy, że cena pewnego instrumentu finansowego jest zmienną losową o pewnym rozkładzie ze średnią zero i wariancją 1. Rozważmy ciąg nieskończony takich wzajemnie niezależnych zmiennych losowych $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$. Niech $F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie σ -ciałem (σ -algebrą) generowanym przez X_1, X_2, \dots, X_n . Które spośród stwierdzeń są prawdziwe:

- Proces $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ jest martyngałem względem F_n .
- Proces $S_n^2 - n$ jest martyngałem względem F_n .
- Proces $E_p(X_{n+1} | F_n)$ jest martyngałem względem F_n .

Rozwiązanie. Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe. F_n jest naturalną filtracją procesu losowego $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, więc zmienna losowa S_n jest mierzalna względem F_n dla każdego n .

Dla każdego n wartość oczekiwana

$$E_p(|S_n|) \leq E_p(S_n^2) = \text{Var}_p(S_n) + [E_p(S_n)]^2 = n + 0 = n < \infty$$

oraz

$$E_p(S_{n+1} | F_n) = E_p(S_n | F_n) + E_p(X_{n+1} | F_n) = S_n + 0 = S_n,$$

czyli (i) jest prawdziwe.

Podobnie, dla każdego n ,

$$\begin{aligned} E_p(|S_n^2 - n|) &\leq E_p(|S_n^2|) + n = \text{Var}_p(|S_n|) + [E_p(|S_n|)]^2 + n = \\ &= n + n + 0 < \infty \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} E_p(S_{n+1}^2 - (n+1) | F_n) &= E_p(S_{n+1}^2 | F_n) - (n+1) = \\ &= E_p((S_n + X_{n+1})^2 | F_n) - (n+1) = \\ &= E_p(S_n^2 | F_n) + 2 \cdot S_n \cdot E_p(X_{n+1} | F_n) + E_p(X_{n+1}^2 | F_n) - (n+1) = \\ &= S_n^2 + 2 \cdot S_n \cdot E(X_{n+1}) + \left\{ \text{Var}_p(X_{n+1} | F_n) + [E_p(X_{n+1} | F_n)]^2 \right\} - (n+1) = \\ &= S_n^2 + 0 + 1 + 0 - n - 1 = S_n^2 - n, \end{aligned}$$

czyli (ii) jest prawdziwe.

W trzecim przypadku, dla każdego n , mamy $E_p(X_{n+1} | F_n) = E(X_{n+1}) = 0$.



Miara probabilistyczna, przy której proces losowy $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest martyngałem, nazywa się **miarą martyngałową**. Okazuje się, że miara bez ryzyka, względem której wyceniamy walory, jest równocześnie miarą martyngałową, a zdyskontowane procesy w modelu CRR: $\left\{\frac{S_n}{(1+R)^n}\right\}$, $\left\{\frac{C_n}{(1+R)^n}\right\}$ oraz $\left\{\frac{P_n}{(1+R)^n}\right\}$ dla $0 \leq n \leq N$ są martyngałami względem niej. Poniższe twierdzenie łączy twierdzenie 6.1.1 z własnościami martyngałów.

Twierdzenie 6.4.1. ([11], [19]) Jeśli nie ma możliwości arbitrażu oraz zdyskontowany proces ceny $\left\{\frac{S_n}{(1+R)^n}\right\}$ jest łańcuchem Markowa względem miary probabilistycznej P i generuje filtrację (F_n) , to istnieje miara martyngałowa Q , względem której zdyskontowany proces cen jest łańcuchem Markowa.

Przykład 6.4.2. [E13.12.2010] Pan Jan przystępuje do funduszu inwestycyjnego z kwotą początkową S_0 . Fundusz działa w następujący sposób: każdego dnia $n = 1, 2, \dots$ do kwoty początkowej może być dodana kwota $X_n = A$ PLN z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$ lub odjęta kwota $X_n = B$ PLN z prawdopodobieństwem $q \in [0, 1]$, gdzie $A, B > 0$. Każdego dnia ma miejsce albo powiększenie, albo pomniejszenie funduszu i zdarzenia te są niezależne. Załóżmy, że pan Jan każdego dnia otrzymuje informację o tym, czy kwota X_n została dodana, czy odjęta. Zdefiniujmy proces $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ stanu funduszu pana Jana na dzień n jako $S_n = \sum_{k=1}^n X_k + S_0$ i określmy, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe.

- (i) Proces $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$.
- (ii) Proces $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, jeżeli początkowa kwota wynosiłaby $S_0 = 0$ PLN.
- (iii) Proces $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, jeżeli początkowa kwota wynosiłaby $S_0 = 0$ PLN, a $p = q = \frac{1}{2}$ niezależnie od wysokości wpłat/wypłat A, B .
- (iv) Proces $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ zwrotów z funduszu określony jako $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ dla dowolnej kwoty początkowej i dowolnych $p, q > 0, p + q = 1$, jeżeli $A = B = 1$ PLN.
- (v) Proces $\{Z_n : n = 0, 1, \dots\}$ zwrotów z funduszu określony jako $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ dla dowolnej kwoty początkowej i $p = \frac{B}{A+B}, q = \frac{A}{A+B}$.

Rozwiązanie. Tylko ostatnie stwierdzenie jest prawdziwe. Proces $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, jeśli

$$E_p(S_{n+1} | F_n) = E_p(S_n | F_n) + E_p(X_{n+1} | F_n) = S_n + 0 = S_n,$$

czyli $E_p(X_{n+1}|F_n) = 0$ dla wszystkich n . Zatem musi być spełniony warunek $A \cdot p - B \cdot q = 0$. W pierwszych czterech przypadkach tak nie jest. W piątym

$$A \cdot p - B \cdot q = (A \cdot B - A \cdot B)/AB = 0.$$

6.5. Łańcuchy Markowa

Jak wspominaliśmy w rozdziale 4.3, dla jednorodnego łańcucha Markowa $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ można zdefiniować macierz przejścia \mathbf{P}_0 ze stanu i w n -tym kroku do stanu j w $(n + 1)$ -szym kroku, o elementach $\mathbf{P}_0(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Przykładem jednorodnego łańcucha Markowa jest zagadnienie ruiny gracza z rozdziału 6.1. Macierz przejścia w tym zagadnieniu jest kwadratową macierzą wymiaru $(a + 1 + |b|)$ postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.5.1. [E20.06.2011] Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystywany jest model oparty na ratingu kredytowym emitenta, w którym:

- a) możliwe są dwa ratingi kredytowe A lub B;
- b) macierz prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy ratingami to:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix};$$

- c) krok modelu jest roczny;
- d) jeśli na początku roku k emitent obligacji ma rating kredytowy A, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanej przez niego obligacji występujących w tym roku używamy czynnika dyskontującego $v_A = 0,9$. Jeżeli zaś emitent ma rating kredytowy B, to analogiczny czynnik dyskontujący v_B wynosi 0,8.

Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną na początku pierwszego roku przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nomi-

nale 1000, z kuponem w wysokości 5% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku. Znajdź cenę tej obligacji w momencie emisji przy użyciu opisanego modelu.

Rozwiązanie. Należy obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej, która reprezentuje cenę tej obligacji w momencie emisji.

Przebieg ratingu	Prawdopodobieństwo	Cena tej obligacji w momencie emisji
A → A → A	$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$	$50 \cdot 0,9 + 50 \cdot 0,9^2 + 1050 \cdot 0,9^3 = 850,95$
A → A → B	$0,7 \cdot 0,3 = 0,21$	$50 \cdot 0,9 + 50 \cdot 0,9^2 + 1050 \cdot 0,9^2 \cdot 0,8 = 765,9$
A → B → A	$0,3 \cdot 0,1 = 0,03$	$50 \cdot 0,9 + 50 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 1050 \cdot 0,9^2 \cdot 0,8 = 761,4$
A → B → B	$0,3 \cdot 0,9 = 0,27$	$50 \cdot 0,9 + 50 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 1050 \cdot 0,9 \cdot 0,8^2 = 685,8$

Cena tej obligacji wynosi $0,49 \cdot 850,95 + 0,21 \cdot 765,9 + 0,03 \cdot 761,4 + 0,27 \cdot 685,8 = 785,8125$.



Przykład 6.5.2. [E01.10.2012] Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nominale 1000, z kuponem w wysokości 4% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku. Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystujemy model oparty na ratingu kredytowym emitenta i mający następujące założenia:

- możliwe są trzy ratingi kredytowe A, B lub C;
- macierz prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy ratingami ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix};$$

- krok modelu jest roczny;
- jeśli na początku roku k emitent obligacji ma rating kredytowy A, B lub C, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanych przez niego obligacji, przypadających na dany rok, używamy odpowiednio czynnika dyskontującego $v_A = 0,95$, $v_B = 0,90$ lub $v_C = 0,85$.

Znajdź cenę tej obligacji w momencie emisji przy użyciu opisanego modelu.

Rozwiązanie. Należy obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej, która reprezentuje cenę tej obligacji w momencie emisji.

Przebieg ratingu	Prawdopodobieństwo	Cena tej obligacji w momencie emisji
$A \rightarrow A \rightarrow A$	$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,95^2 + 1040 \cdot 0,95^3 = 965,77$
$A \rightarrow A \rightarrow B$	$0,7 \cdot 0,2 = 0,14$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,95^2 + 1040 \cdot 0,9 \cdot 0,95^2 = 918,84$
$A \rightarrow A \rightarrow C$	$0,7 \cdot 0,1 = 0,07$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,95^2 + 1040 \cdot 0,85 \cdot 0,95^2 = 871,91$
$A \rightarrow B \rightarrow A$	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,9 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,9 \cdot 0,95^2 = 916,94$
$A \rightarrow B \rightarrow B$	$0,2 \cdot 0,5 = 0,10$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,9 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,9^2 \cdot 0,95 = 872,48$
$A \rightarrow B \rightarrow C$	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,9 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,85 = 828,02$
$A \rightarrow C \rightarrow A$	$0,1 \cdot 0,3 = 0,03$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,85 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,95^2 \cdot 0,85 = 868,11$
$A \rightarrow C \rightarrow B$	$0,1 \cdot 0,3 = 0,03$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,85 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,85 = 826,12$
$A \rightarrow C \rightarrow C$	$0,1 \cdot 0,4 = 0,04$	$40 \cdot 0,95 + 40 \cdot 0,85 \cdot 0,95 + 1040 \cdot 0,95 \cdot 0,85^2 = 784,13$

Cena tej obligacji wynosi $0,49 \cdot 965,77 + 0,14 \cdot 918,84 + 0,07 \cdot 871,91 + 0,06 \cdot 916,94 + 0,10 \cdot 872,48 + 0,04 \cdot 828,02 + 0,03 \cdot 868,11 + 0,03 \cdot 826,12 + 0,04 \cdot 784,13 = 920,48$.



Zadania do rozdziału 6

1. W błędzeniu losowym prostym symetrycznym obliczyć prawdopodobieństwo, że cena akcji o początkowej wartości a ($a > 0, a \in \mathbb{Z}$):
 - a) osiągnie wartość $(3a - 1)$ przed spadkiem do $(a - 1)$ w dowolnej liczbie kroków,
 - b) zawsze będzie osiągała wartości większe niż a (poza momentem startu) do kroku $(2n)$ włącznie, a w $(2n)$ -tym kroku osiągnie poziom $5a$ (dla $n \geq 2a, n \in \mathbb{Z}$).
2. Podać prawdopodobieństwo, że obecna cena akcji wynosząca a zł ($a > 0, a \in \mathbb{Z}$) i podlegająca błędzeniu losowemu prostemu niesymetrycznemu (Bernoulliego) po $2k$ krokach ($k \geq 2a, k \in \mathbb{Z}$):
 - a) potroi się,
 - b) osiągnie po raz pierwszy pięciokrotność swojej wartości.
3. Załóżmy, że stopa zwrotu kapitału w roku zainwestowania wynosi 10% i w kolejnych latach może zmienić się o 0,5% w następnym roku w stosunku do roku poprzedniego. Zakładamy, że prawdopodobieństwa wzrostu i spadku są jednakowe.
 - A. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje stóp zwrotu z inwestycji w kolejnych latach.
 - B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że stopa zwrotu z inwestycji po 5 latach wyniesie 7,5%, 9,5%, 10%?
 - C. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedykolwiek stopa zwrotu wyniesie 10% (nie licząc roku zainwestowania), jeśli liczba kroków nie jest ograniczona?
 - D. Z ilu różnych dodatnich ścieżek będzie składał się ten model (przy założeniu, że liczba kroków w błędzeniu losowym nie przekracza 20)?
 - E. Ile jest ścieżek takich, że wartość stopy zwrotu spadnie poniżej 5% po raz pierwszy przed 20. krokiem?
 - F. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana ścieżka nieujemna dochodząca do 15% w 20 krokach okaże się ścieżką dodatnią?
 - G. Obliczyć prawdopodobieństwo, że stopa zwrotu osiągnie poziom 17% przed spadkiem do poziomu 8,5%.
4. Przypuśćmy, że cena akcji w obecnej chwili wynosi 100 zł i w każdym okresie może wzrosnąć lub zmaleć o 10 zł, a prawdopodobieństwo $\{p = 1/3, q = 2/3\}$ jest miarą arbitrażową, neutralną względem ryzyka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cena akcji w k -tym okresie:
 - a) będzie dokładnie taka sama, jak na początku,
 - b) osiągnie poziom 130 zł po raz pierwszy?
5. [E17.03.2008] W uproszczonym modelu rynku papierów wartościowych zakładamy, że stan giełdy opisuje łańcuch Markowa czasu ciągłego o dwóch możliwych stanach – hossa (h) i bessy (b) o intensywnościach przejść podanych w następującej

macierzy

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{hh} & p_{hb} \\ p_{bh} & p_{bb} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 + 2e^{-5t} & 2 - 2e^{-5t} \\ 3 - 3e^{-5t} & 2 + 3e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

W chwili $t = 0$ inwestor lokuje 100 PLN na lokacie o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 5% i czeka pół roku. Jeśli po pół roku na giełdzie jest hossa, inwestor kupuje jednostki funduszu inwestycyjnego o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 20%, jeśli zaś bessy – pozostawia środki na tej samej lokacie. W chwili $t = 0$ prawdopodobieństwo hossy na giełdzie ocenia się na równe prawdopodobieństwu bessy. Wyznacz wartość oczekiwaną rachunku inwestora po roku, licząc od chwili $t = 0$.

6. Strategia *long condor* polega na nabyciu opcji kupna o cenie K_1 , wystawieniu dwóch opcji kupna o cenie realizacji K_2 i K_3 oraz nabyciu opcji kupna o cenie realizacji K_4 , przy czym $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$. Wszystkie opcje wystawione są na ten sam instrument bazowy, mają różne ceny realizacji oraz różne terminy wygaśnięcia. Zapisać wzór funkcji wypłaty i sporządzić jej wykres w zależności od cen instrumentu bazowego w chwili wygasania opcji.
7. [E16.05.2005] Inwestor realizuje strategię inwestycyjną typu *spread* (jednocześnie wystawia i kupuje opcje na tę samą akcję). Ma on możliwość zakupu (wystawienia) europejskich opcji *put* i *call* o identycznym terminie ważności, po cenach wykonania $0 < K_1 < K_2 < K_3$. Celem inwestora jest skonstruowanie strategii inwestycyjnej dającej funkcję wypłaty

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < K_1 \\ x - K_1 & \text{dla } K_1 \leq x \leq K_2 \\ 2K_2 - K_1 - x & \text{dla } K_2 \leq x \leq K_3 \\ 2K_2 - K_1 - K_3 & \text{dla } x \geq K_3 \end{cases},$$

gdzie x oznacza cenę akcji w chwili wygaśnięcia opcji. Która ze strategii charakteryzuje się powyższą wypłatą:

- długa pozycja *call* po cenie wykonania K_1 , dwie krótkie pozycje *call* po cenie wykonania K_2 , długa pozycja *call* po cenie wykonania K_3 ,
 - długa pozycja *put* po cenie wykonania K_1 , dwie krótkie pozycje *put* po cenie wykonania K_2 , długa pozycja *put* po cenie wykonania K_3 ,
 - długa pozycja *put* po cenie wykonania K_1 , dwie krótkie pozycje *call* po cenie wykonania K_2 , długa pozycja *put* po cenie wykonania K_3 ,
 - długa pozycja *call* po cenie wykonania K_1 , dwie krótkie pozycje *call* po cenie wykonania K_2 , długa pozycja *call* po cenie wykonania K_3 .
8. Przyjmijmy, że cena akcji wynosi obecnie 100 zł. Niech parametr wzrostu ceny pewnej akcji w każdym okresie wynosi $u = 1,5$, a parametr spadku ceny akcji $d = 0,7$. Niech cena realizacji europejskiej opcji kupna wygasającej po trzech okresach jest równa $K = 105$ zł. Załóżmy, że stopa kredytu/depozytu wynosi 20% w pierwszym, 10% w drugim i 5% w trzecim okresie. Wyznaczyć cenę opcji kupna wystawioną na tę akcję.

9. Początkowa cena akcji może po jednym okresie potroić się lub spaść do $1/3$ początkowej ceny.
 A. Czy miara $\{p = 1/3, q = 2/3\}$ może być miarą bez ryzyka?
 B. Jaka powinna być początkowa cena akcji, by w przypadku hossy (zwyżki) cena akcji wyniosła 120 zł?
10. Obecna cena akcji wynosi $S_0 = 100$ zł, w jednym okresie cena akcji może wzrosnąć $u = 1,5$ razy z prawdopodobieństwem 0,2 lub zmaleć $d = 0,7$ razy z prawdopodobieństwem 0,8. Niech cena realizacji opcji kupna $K = 110$ zł, a stopa procentowa depozytu/kredytu wynosi 20% w jednym okresie. Wyznaczyć cenę europejskiej opcji kupna i europejskiej opcji sprzedaży.
11. W modelu CRR wyznaczyć cenę europejskiej opcji kupna z ceną realizacji $K = 110$ zł ważnej 6 miesięcy, opartej na akcji o obecnej wartości 100 zł, przy założeniu, że cena akcji może z miesiąca na miesiąc albo wzrosnąć 1,2 razy, albo zmaleć 0,8 razy. Przyjąć, że miesięczna stopa bez ryzyka wynosi 0,0001%.
12. Rozważmy trzyokresowy model CRR z parametrami: $S_0 = 4, u = 2, d = 1/2, R = 1/4$. Znaleźć ceny:
 a) azjatyckiej opcji kupna akcji wygasającej w chwili $t = 2$ o wypłacie $C_2 = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} - 5\right)^+$,
 b) opcji typu *lookback* o wypłacie $V_3 = \max \{0 \leq n \leq 3: S_n - S_3\}$ w chwili $t = 3$,
 c) azjatyckiej opcji kupna o wypłacie $\left(\frac{Y_3}{4} - 4\right)^+$, gdzie $Y_n = S_0 + \dots + S_n$, wygasającej w chwili $t = 3$.
13. [E10.12.2012] Rozpatrujemy instrument finansowy wypłacający w chwili $t = 3$ kwotę $S_M - S_m$, gdzie S_i jest ceną akcji w chwili $t = i$, gdzie $i = 0, 1, 2, 3$, natomiast $S_M = \max \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ i $S_m = \min \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$. Inwestor wycenia instrument na drzewie dwumianowym przy następujących założeniach:
 a) $S_0 = 100$,
 b) w ciągu roku cena akcji rośnie o 25% lub spada o 20%,
 c) roczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 10\%$,
 d) rynek nie dopuszcza arbitrażu.
 Jaka będzie cena tego instrumentu?
14. Dla modelu CRR o parametrach $u = 2, d = 1/2, R = 0,1, S_0 = 100$ rozważmy następującą strategię inwestowania kwoty $K_0 = 1000$ zł:
 a) całą kwotę lokujemy w banku,
 b) za połowę kwoty kupujemy akcje, resztę lokujemy w banku,
 c) za kwotę 800 zł kupujemy akcje, resztę lokujemy w banku,
 d) całą kwotę przeznaczamy na zakup akcji,
 e) pożyczamy dodatkowo 1000 zł i za wszystko kupujemy akcje.
 Wyznaczyć oczekiwane stopy zwrotu. Która strategia jest strategią bez ryzyka? Która daje największy zysk w wybranych warunkach rynkowych?

15. Posługując się modelem CRR o parametrach $u = 2$, $d = 1/2$, $R = 0,25$, $S_0 = 50$ zł budujemy następujący portfel: krótka pozycja dla trzech europejskich opcji kupna po 20 zł za opcję, dwie akcje i pożyczka na brakującą kwotę. Czy portfel ten jest portfelem samofinansującym się (tzn. zakupy walorów finansowane są ze sprzedaży innych)?
16. Rozważmy dwa portfele:
- europejska opcja kupna oparta na akcji o bieżącej cenie 10, z ceną wykonania 12, terminem wygaśnięcia T oraz gotówka w wysokości 12, która bez ryzyka może być zainwestowana na 10%;
 - europejska opcja sprzedaży na ten sam instrument, co opcja kupna, z ceną wykonania 12, terminem wykonania T oraz z 1 akcji.
- Wykazać, że w terminie T wartość portfela A jest większa niż B.
17. Mamy następujące informacje:
- w chwili $n = 0$ wiemy, że rzucono kostką w kształcie ośmiościanu,
 - w chwili $n = 1$ wiemy, czy wypadła parzysta liczba oczek, czy nie,
 - w chwili $n = 2$ znamy resztę z dzielenia liczby wyrzuconych oczek przez 4,
 - w chwili $n = 3$ wiemy dodatkowo, czy liczba wyrzuconych oczek jest większa niż 4, czy nie.
- Opisać te informacje za pomocą filtracji.
18. Czy następujące zmienne losowe są mierzalne względem σ -algebr F_1 , F_2 i F_3 z zadania poprzedniego?

$$X(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{dla } \omega \in \{2, 6\} \\ e & \text{dla } \omega \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} \end{cases}$$

oraz

$$Y(\omega) = \begin{cases} \ln 3 & \text{dla } \omega \in \{1, 2\} \\ \pi & \text{dla } \omega \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

19. Który z procesów $\{X_t\}$ czy $\{Y_t\}$ jest adaptowany (definicja 6.4.2) do filtracji (F_t) z zadania 17? Który jest nieantycypujący (definicja 7.2.1)?

$$X_0(\omega) = 0 \text{ dla } \omega \in \Omega \text{ i } Y_0(\omega) = 0 \text{ dla } \omega \in \Omega$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 0 & \text{dla } \omega \in \{1, 3, 5, 7\} \end{cases} \quad Y_1(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \omega \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 1 & \text{dla } \omega \in \{1, 3, 5, 7\} \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 1 & \text{dla } \omega \in \{5, 6, 7, 8\} \end{cases} \quad Y_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega \in \{4, 8\} \\ 1 & \text{dla } \omega \in \{1, 5\} \\ 2 & \text{dla } \omega \in \{2, 6\} \\ 3 & \text{dla } \omega \in \{3, 7\} \end{cases}$$

$$X_3(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{dla } \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ e & \text{dla } \omega \in \{5, 6, 7, 8\} \end{cases} \quad Y_3(\omega) = k \text{ dla } \omega = \{k\}.$$

20. Udowodnić, że w błędzeniu losowym prostym symetrycznym martyngalami są:
- $(S_n)_{n=1}^{\infty}$,
 - $(S_n^2 - n)_{n=1}^{\infty}$.
21. Udowodnić, że w błędzeniu losowym prostym niesymetrycznym martyngalami są:
- $(S_n - n(p - q))_{n=1}^{\infty}$,
 - $\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.
22. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych (Y_n) taki, że $Y_n \geq 0$ i $E(Y_n) = 1$ dla $n \geq 1$. Niech $M_0 = 1$ oraz $M_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_n$ dla $n \geq 1$. Pokazać, że ciąg (M_n) jest martyngalem.

Odpowiedzi

- $\frac{1}{2a}$, b) $\frac{2a}{n} \binom{2n}{n+2a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.
 - a) $\binom{2k}{a+k} \cdot p^{k+a} \cdot q^{k-a}$, b) $\frac{2a}{k} \binom{2k}{a+k} \cdot p^{k+a} \cdot q^{k-a}$.
- A. $E(R_k) = 10$, $\text{Var}(R_k) = k/4$, B. $1/32$, $10/32$, 0 , C. 1 , D. $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dla ust. $n \leq 20$,
E. 2126 , F. $8/11$, G. $3/17$.
- $\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\sqrt{2}^k}{3^k}$, gdy k parzyste, b) $\frac{3}{8k} L(k, 3) \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
- Zastosować model kapitalizacji ciągłej względem czasu ze stałą stopą procentową $0,2$. Wymnożyć wektor $[0,5 \ 0,5]$ przez $\mathbf{P}(t)$. Odpowiedź: $\approx 109,96$.
- | | | | |
|------|-------------------------|-----|------------------------|
| 6. { | 0 | dla | $S_T \leq K_1$ |
| | $S_T - K_1$ | dla | $K_1 < S_T \leq K_2$ |
| | $K_2 - K_1$ | dla | $K_2 < S_T \leq K_3$. |
| | $K_2 + K_3 - K_1 - S_T$ | dla | $K_3 < S_T \leq K_4$ |
| | $K_2 + K_3 - K_1 - K_4$ | dla | $S_T > K_4$ |
- Odp. A. Skorzystać ze wzorów w tabeli 6.2.1.
- $C_0 = 31,29$ zł.
- A. Tak, jeśli $R = 2/9$, B. $S_0 = 40$ zł.
- $C_0 = 20,83$ zł, $P_0 = 12,50$ zł.
- $16,63$ zł.
- a) $1,28$, b) $172/125$, c) $76/125$.
- $C_2^{uu} = 74,86$, $C_2^{ud} = 28,45$, $C_2^{du} = 33,43$, $C_2^{dd} = 36,30$, $C_1^u = 54,21$, $C_1^d = 31,08$,
 $C_0 = 42,31$.

14. a) bez ryzyka, e) największy zysk i największe ryzyko. Wszystkie strategie przynoszą oczekiwany zysk w wysokości 10% kapitału początkowego.
15. Tak.
16. Wartość pierwszego portfela w terminie realizacji opcji T wynosi $(S_T - 12)^+ + 13,2$. Dla drugiego portfela mamy $(12 - S_T)^+ + S_T$.
17. F_0 – trywialna, F_1 – generowana przez zbiór $\{2, 4, 6, 8\}$, F_2 – generowana przez zbiory $\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{2, 6\}, \{4, 8\}$, $F_3 = 2^\Omega$.
18. $\{X_t\}$ – mierzalny względem F_2 i F_3 . $\{Y_t\}$ – mierzalny względem F_3 .
19. $\{Y_t\}$ jest adaptowany do filtracji, oba nie są prognozowalne.
20. Skorzystać z definicji 6.4.2 oraz sprawdzić warunki (b) i (c). Wzorować się na przykładzie 6.4.1.
21. Skorzystać z definicji 6.4.2 oraz sprawdzić warunki (b) i (c). Wzorować się na przykładzie 6.4.1.
22. Zauważyć, że $\ln(M_n) = \ln(Y_1) + \ln(Y_2) + \dots + \ln(Y_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_n$.
- Skorzystać z definicji 6.4.2 oraz sprawdzić warunki (b) i (c). Wzorować się na przykładzie 6.4.1.

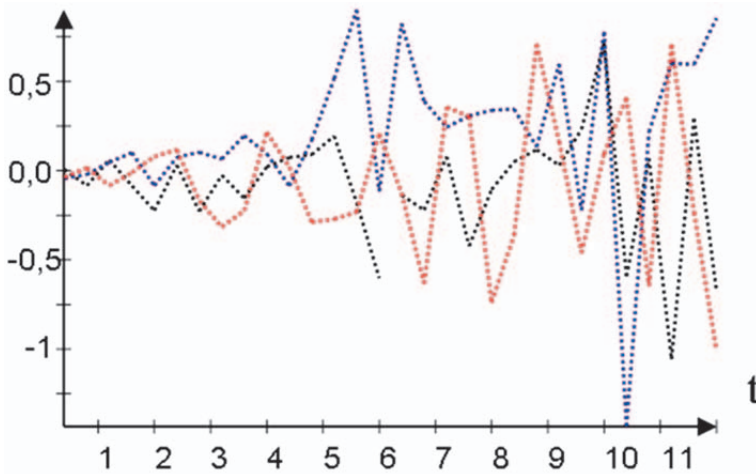
7. Wycena w modelach ciągłych

7.1. Proces Wienera

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną (Ω, F, P) oraz ciągły model czasu.

Definicja 7.1.1. Procesem Wienera nazywamy proces stochastyczny $\{W(t) : t \geq 0\}$ określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) spełniający warunki:

- a) $W(0) = 0$ z prawdopodobieństwem 1,
- b) przyrosty procesu $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ dla $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi,
- c) zmienne losowe $W(t) - W(s)$ mają rozkłady $N(0, t - s)$ dla $0 \leq s < t$,
- d) trajektorie $t \rightarrow W(\omega, t)$ procesu są ciągłe dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ względem miary P .



Ryc. 7.1.1. Trzy trajektorie procesu Wienera (w tym jedna nieciągła)

Proces Wienera ma wiele ciekawych własności. Niektóre z nich wymienimy.

1. Własność Markowa: przyrosty procesu $W(t) - W(s)$ dla $0 \leq s < t$ nie zależą od $W(u)$ dla $0 \leq u < s$.
2. Dla n parzystych n -ty moment zwykły dla przyrostu procesu $E[(W(t) - W(s))^n] = (n - 1)! \cdot \sqrt{(t - s)^n}$, ($0 \leq s < t$), a dla n -nieparzystych jest równy zeru.
3. $E[W(t) \cdot W(s)] = s$, $Cov[W(t) \cdot W(s)] = s$, $Var[W(t) - W(s)] = t - s$, $\rho = Corr(W(t), W(s)) = \sqrt{\frac{s}{t}}$.
4. Zmienna losowa $W(t)$ ma rozkład $N(0, t)$.
5. Trajektorie podstawowej wersji procesu są ciągłe, ale w żadnym punkcie nie są różniczkowalne, bo są funkcjami o nieograniczonym wahanu na dowolnym przedziale $[s, t]$ (dla $0 \leq s < t$). Dlatego nie istnieje całka Stieltjesa $\int_s^t W(t)dt$ (więc i różniczka). Trzeba ją zastąpić całką (i różniczką) stochastyczną (na przykład rachunkiem Itô, patrz podrozdz. 7.2).
6. Trajektorie są fraktalami (krzywymi samopodobnymi). Jeśli dowolną trajektorię pomnożymy przez c^2 w kierunku osi czasu OT i przez c w kierunku osi wartości procesu, to otrzymamy trajektorię nieodróżnialną od wyjściowej.

Przykład 7.1.1. Pokazać, że proces $\{W^2(t) - t\}$ jest martyngałem z czasem ciągłym względem naturalnej filtracji (F_t) procesu Wienera $\{W(t)\}$.

Rozwiązanie. Należy wykazać, podobnie jak w modelu dyskretnym, że $E(|W^2(t) - t|) < \infty$ oraz że $E(W^2(t) - t | F_s) = W^2(s) - s$ dla wszystkich $0 \leq s \leq t$. Mamy więc

$$\begin{aligned} E(W^2(t) - t | F_s) &= E((W(t) - W(s) + W(s))^2 - t | F_s) = \\ &= (t - s) + 2W(s) \cdot E(W(t) - W(s)) + W^2(s) - t = \\ &= -s + 2W(s) \cdot 0 + W^2(s) = W^2(s) - s \end{aligned}$$

oraz $E(|W^2(t) - t|) \leq E(W^2(t)) + t = t^2 + t < \infty$.



7.2. Całka Itô

Przedstawienie rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego podanego przez Fishera Blacka i Myrona Scholesa, o czym będzie mowa w następnym podrozdziale, wymaga zdefiniowania całki Itô.

Definicja 7.2.1. Niech $\{W(t) : t \geq 0\}$ będzie procesem Wienera określonym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) i niech (F_t) będzie naturalną filtracją dla $\{W(t)\}$. Dalej, niech $\{X(t) : t \geq 0\}$ będzie innym procesem losowym na tej samej przestrzeni, nieantycypującym (inaczej: prognozowalnym, tj. takim, że każda zmienna losowa $X(t)$ jest mierzalna względem σ -algebry generowanej przez (F_s) dla wszystkich $s < t$). Weźmy dowolny przedział $[a, b] \subset [0, \infty)$ i dokonajmy jego podziału punktami t_0, t_1, \dots, t_k takimi, że $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Rozważmy sumy częściowe $\sum_i X(t_{i-1}) \cdot [W(t_i) - W(t_{i-1})]$. Jeśli średnice podziału stają się coraz mniejsze przy $k \rightarrow \infty$ (czyli $\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leq i \leq k\} = 0$) oraz przy $k \rightarrow \infty$ istnieje granica według prawdopodobieństwa ciągu sum częściowych, to tę graniczną zmienną losową Y nazywamy **całką Itô** i zapisujemy jako $Y = \int_a^b X(t) dW(t)$.

W przeciwieństwie do całek oznaczonych z funkcji rzeczywistych, które są skalarami, całka Itô jest zmienną losową. Różniczkę procesu, który jest funkcją procesu Itô, obliczamy, stosując poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.2.1. (Lemat Itô) Załóżmy, że $X(t)$ jest procesem Itô, tzn.

$$dX(t) = A(X, t)dt + B(X, t)dW(t),$$

a proces $Y(t)$ ma postać $Y(t) = f(X(t), t)$. Wtedy

$$dY(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} A(X, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} B^2(X, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} B(X, t) dW(t).$$

Najprostszymi przykładami procesów Itô są: arytmetyczny (dla $A(X, t) = \mu$ i $B(X, t) = \sigma$) i geometryczny ruch Browna (dla $A(X, t) = \mu \cdot X$ i $B(X, t) = \sigma \cdot X$). Własności tych procesów podano na przykład w pozycji [21].

Przykład 7.2.1. Wyprowadzić rozwiązanie równania ewolucji cen akcji, która zmienia się zgodnie z równaniem $d \ln S(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$, gdzie μ oznacza stałą dryf procesu, a dodatnia stała σ określa tempo zmienności procesu.

Rozwiązanie. Zapiszmy równanie ewolucji cen akcji w równoważnej postaci

$$dS(t) = \mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dW(t).$$

Równanie to określa geometryczny ruch Browna.

Skorzystamy z lematu Itô, biorąc $f(S(t), t) = \ln S(t)$, $A(X, t) = \mu \cdot S(t)$ i $B(X, t) = \sigma \cdot S(t)$.

Wyznaczamy pochodne cząstkowe procesu cen akcji

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Rozwiązanie ma postać

$$d \ln S(t) = \left(\frac{1}{S} \mu \cdot S + 0 - \frac{1}{2} \frac{B^2}{S^2} \right) dt + \frac{B}{S} dW(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t),$$

będącą inną charakterystyką geometrycznego ruchu Browna z dryfem μ i zmiennością σ .



7.3. Model BS

Zakładamy, że na rynku nie ma arbitrażu i działa on w sposób ciągły, tzn. przyjmujemy model ciągły czasu z kapitalizacją ciągłą ze stałą (w czasie ważności opcji) stopą r bez ryzyka. Uczestnicy rynku mogą bez ograniczeń pożyczać i inwestować środki według stopy r . Akcje są nieskończenie podzielne, a ceny kupna i sprzedaży dla tego samego instrumentu są jednakowe. Nie uwzględnia się kosztów transakcji ani podatków. Dozwolona jest krótka sprzedaż walorów.

W modelu sformułowanym przez Fishera Blacka i Myrona Scholesa w pracy pt. *The pricing of options and corporate liabilities*, opublikowanej w „Journal of Political Economy” w 1973 roku, rynek opisują dwa podstawowe równania: stochastyczne równanie różniczkowe przedstawiające zmiany cen akcji bazowej oraz nielosowe równanie różniczkowe prezentujące zmiany cen waloru bez ryzyka (zwanym obligacją lub rachunkiem konta bankowego). Ceny wszystkich instrumentów pochodnych są funkcjami zależnymi od cen akcji i obligacji.

Cena obligacji spełnia (nielosowe) równanie różniczkowe zwyczajnej postaci

$$d \ln B(t) = B dt,$$

z warunkiem początkowym $B(0) = B_0$. Rozwiązanie tego równania,

$$B(t) = B(0) \cdot e^{rt},$$

odpowiada kapitalizacji ciągłej ze stałą stopą procentową r w okresie bazowym.

Zmiany cen akcji określa stochastyczne równanie różniczkowe

$$d \ln S(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Lewa strona wzoru jest różniczką zmian logarytmów cen, μ oznacza stałą dryf procesu, dodatnia stała σ jest odchyleniem standardowym (miarą zmienności procesu), a $dW(t)$ jest różniczką Itô względem procesu Wienera. Jak przedstawiliśmy w poprzednim podrozdziale, rozwiązanie tego równania ma postać

$$d\ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t),$$

co można zapisać, równoważnie, jako proces Itô w postaci całkowej

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \mu du + \int_0^t S_s \sigma dW(s)$$

albo prościej w postaci procesu $\{S(t) : t \geq 0\}$, gdzie

$$S(t) = e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} + e^{\sigma} dW(t).$$

Jest to równanie określające geometryczny ruch Browna, w którym zmienna losowa $S(t)$ ma rozkład $LN(\ln S_0 + \mu \cdot t, \sigma^2 \cdot t)$.

Cenę instrumentu pochodnego $f(S, t)$ wystawionego na instrument bazowy, którego cena zmienia się zgodnie z równaniem $d\ln S(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$, określa stochastyczne równanie różniczkowe Blacka-Scholesa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf,$$

gdzie r jest stopą procentową bez ryzyka w kapitalizacji ciągłej.

Łatwo wykazać, podstawiając wzory do ostatniego równania, że całkami szczególnymi tego równania są dwie funkcje: $f(S, t) = S$ (proces ewolucji ceny akcji) oraz $f(S, t) = e^{rt}$ (proces zmian ceny obligacji, traktowanej jako *numeraire*). W pierwszym przypadku mamy $0 + 1 \cdot r \cdot S + 0 = r \cdot S$, a w drugim $r \cdot e^{rt} + 0 + 0 = r \cdot e^{rt}$. Zgodnie z teorią równań różniczkowych każde rozwiązanie nieosobliwe jest funkcją całek szczególnych.

Jeśli dodamy warunki brzegowe $f(0, t) = 0$ i $f(S, T) = (S - K)^+$, to otrzymamy równanie Blacka-Scholesa na wycenę w chwili t ($0 \leq t < T$) europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki niepłacącej dywidendy

$$C_t = S_t \cdot \Phi(d_t^+) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \Phi(d_t^-),$$

$$d_t^\pm = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Funkcja Φ we wzorze jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Przy warunkach brzegowych: $f(\infty, t) = 0$ i $f(S, T) = (K - S)^+$ dostajemy wzór na wycenę w chwili t ($0 \leq t < T$) europejskiej opcji sprzedaży wystawionej

na akcję spółki niepłacącej dywidendy

$$P_t = e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot \Phi(-d_t^-) - S_t \cdot \Phi(-d_t^+),$$

$$d_t^\pm = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Przy innych warunkach brzegowych równania Blacka-Scholesa nie można rozwiązać wprost. Stosuje się wtedy metody przybliżonych rozwiązań.

Podobnie jak w przypadku dyskretnym pomiędzy europejską opcją kupna i europejską opcją sprzedaży zachodzi, dla wszystkich $0 \leq t < T$, **paritet** opcji kupna i sprzedaży w postaci zależności

$$C_t - P_t = S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}.$$

Przykład 7.3.1. [E12.03.2012] Przy założeniach odnośnie rynku finansowego, zgodnych z modelem BS, dane są:

- (i) $S(t)$ oznaczające proces ceny akcji zależny od czasu t , dla $t \geq 0$,

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\{(r - \delta - 0,5\sigma^2)t + \sigma \cdot W(t)\},$$

- (ii) $S(0) = 1$,
 (iii) σ jest zmiennością procesu ceny akcji i jest stale równe 0,4,
 (iv) dla $t \geq 0$ akcja $S(t)$ płaci stopę dywidendy $\delta = 0,04$, kwota dywidendy wynosi $0,04 \cdot S(t)dt$ w okresie między t a $(t + \Delta t)$,
 (v) wyrażenie $r - \delta$ oznacza dryf procesu i jest stale równe 0,08, gdzie r oznacza wolną od ryzyka stopę procentową,
 (vi) wiadomo, że zmianę procesu ceny akcji opisuje równanie $dS(t) = 0,08 \cdot S(t)dt + 0,4 \cdot S(t)dW(t)$, dla $t \geq 0$, tzn. krótkoterminowy wzrost ceny akcji jest proporcjonalny do obecnego poziomu cen średnio w stosunku 0,08 oraz zmienność ceny jest proporcjonalna do jej obecnego poziomu.

Rozważmy instrument pochodny, który wypłaca kwotę $\{1 + S(1) \cdot \ln(S(1))^2\}$ w momencie $t = 1$ i nie wypłaca nic w każdym innym momencie. Zakładając kapitalizację ciągłą, wskaż, w którym przedziale mieści się oczekiwana obecna wartość PV_0 tego instrumentu:

- a) $PV_0 \leq 0,732$,
 b) $0,732 \leq PV_0 \leq 1,024$,
 c) $1,024 \leq PV_0 \leq 1,075$,
 d) $1,075 \leq PV_0 \leq 1,296$,
 e) $1,296 \leq PV_0 \leq 2,001$.

Rozwiązanie. Podstawiając dane, mamy

$$S(t) = 1 \cdot \exp\{(0,08 - 0,5 \cdot 0,16) \cdot t + \sigma \cdot W(t)\} = \exp\{\sigma \cdot W(t)\},$$

$$PV_0 = e^{-0,12} E\{1 + S(1) \cdot \ln(S(1))\}^2 = e^{-0,12} [1 + e^{\sigma E(W(1))} \cdot \sigma^2 \cdot E(W^2(1))] =$$

$$= e^{-0,12} [1 + \sigma^2] = 1,0288,$$

czyli oczekiwana obecna wartość instrumentu znajdzie się w przedziale c).

Przykład 7.3.2. [E17.05.2003] Przyjmijmy następujące oznaczenia: S – obecna cena akcji, K – cena wykonania opcji, C_K – cena europejskiej opcji kupna przy cenie wykonania K , P_K – cena europejskiej opcji sprzedaży przy cenie wykonania K , N – okres do wykonania opcji.

Dla pewnej opcji wiadomo, że $C_K = P_K$, dla $K = S$ oraz każdego $N > 0$. Ponadto, dla $N = N_0$ oraz $K = S$ cena opcji kupna (równa cenie opcji sprzedaży), wyliczona na podstawie wzoru BS, wynosi X . Jak zmieni się cena opcji, gdy:

- (i) natężenie oprocentowania wzrośnie dwukrotnie,
- (ii) wariancja natężenia oprocentowania zmaleje czterokrotnie,
- (iii) obecna cena akcji i cena wykonania wzrosną dwukrotnie,
- (iv) okres do wykonania opcji wzrośnie czterokrotnie.

Rozwiązanie. Z równania parytetu mamy $0 = C_{N_0} - P_{N_0}$, czyli $S_{N_0} = K_{N_0} e^{-rN_0}$ oraz

$$X = C_0 = S \cdot \Phi(d_0^+) - e^{-rN} K \cdot \Phi(d_0^-) = P_0.$$

Dalej, jeśli zajdą zmiany opisane w punktach (i)–(iv), to $2S = 2K e^{-2r \cdot 4N}$, czyli $\frac{S}{K} = e^{-8rN}$ i $\frac{S_{N_0}}{K_{N_0}} = e^{-rN_0}$. Wtedy

$$2S \cdot \Phi(d^+) - e^{-8rN} 2K \cdot \Phi(d^-) = 2 \cdot [S \cdot \Phi(d^+) - e^{-8rN} K \cdot \Phi(d^-)] =$$

$$= 2 \cdot [S \cdot \Phi(d_0^+) - e^{-rN} K \cdot \Phi(d_0^-)] = 2X,$$

bo

$$d^\pm = \frac{\ln(\frac{2S}{2K}) + (8r \pm \frac{\sigma^2}{2})N}{\sigma\sqrt{N}} \text{ i } d_0^\pm = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})N}{\sigma\sqrt{N}}$$

różnią się tylko wartością chwilowej stopy zwrotu ($8r$ dla d^\pm i r dla d_0^\pm). Wniosujemy stąd, że cena opcji wzrośnie dwukrotnie.

Przykład 7.3.3. [E10.12.2012] Niech $S(t)$ będzie ceną akcji w chwili (roku) t . Akcja ta nie wypłaca dywidendy. Intensywność oprocentowania r wynosi 4% w skali roku, a zmienność ceny σ 25%. Zakładamy ponadto, że proces ceny akcji dany jest wzorem

$$S(t) = A(t) \cdot \exp\{\sigma\sqrt{t} dZ\}$$

dla $t > 0$, gdzie zmienna losowa Z ma rozkład normalny standaryzowany $N(0, 1)$ oraz $A(t) > 0$ dla $t > 0$ jest pewną funkcją rzeczywistą. Rynek nie dopuszcza arbitrażu. Wyznaczyć cenę, w chwili 0, kontraktu, który wypłaca po roku kwotę $K = \max\{S(0), S(1)\}$.

Rozwiązanie. Zasadniczo kontrakt różni się od opcji tym, że opcji można nie wykonać, natomiast wykonanie kontraktu jest obligatoryjne. Zatem cena kontraktu K_0 w chwili 0 wynosi

$$\begin{aligned} K_0 &= e^r E\left(\max\{S(0), S(1)\}\right) = e^r E\left(\max\{S(0), A(1) \cdot e^{0,25 \cdot EZ}\}\right) = \\ &= e^r \max\{S(0), A(1) \cdot e^0\} = e^r \max\{S(0), S(0) \cdot e^r\} = S(0) \cdot e^{2r} = \\ &= S(0) \cdot e^{0,08} \approx 1,08 \cdot S(0). \end{aligned}$$

Więcej informacji na temat wyceny rozmaitych instrumentów finansowych podano na przykład w [9].

7.4. Parametry „greckie”

Według modelu BS, opisanego w poprzednim podrozdziale, wartość każdej opcji zależy od pięciu czynników: ceny wykonania, ceny instrumentu podstawowego, długości okresu do terminu wygaśnięcia, stopy wolnej od ryzyka oraz zmienności cen instrumentu podstawowego. Wrażliwość ceny opcji na zmianę któregoś czynnika opisują pochodne względem tych czynników (poza ceną wykonania, która jest stała). W tabeli 7.4.1 zamieszczono wzory pozwalające wyliczyć wartość tych współczynników, które oznaczane są greckimi literami. Przyjęto, że $\varphi(x)$ jest gęstością rozkładu normalnego standaryzowanego $N(0, 1)$ o dystrybuancie $\Phi(x)$.

Tabela 7.4.1. Współczynniki „greckie”

Nazwa współczynnika	Określenie	Wartość współczynnika dla opcji kupna	Wartość współczynnika dla opcji sprzedaży
<i>Delta</i>	pochodna I rzędu względem ceny instrumentu bazowego S_t	$\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \Phi(d_t^+)$	$\Delta_t = \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = -\Phi(-d_t^+)$
<i>Gamma</i>	pochodna II rzędu względem ceny instrumentu bazowego S_t	$\Gamma_t = \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = \frac{\phi(d_t^+)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$	$\Gamma_t = \frac{\partial^2 P_t}{\partial S_t^2} = \frac{\phi(d_t^+)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$
<i>Vega (kappa)</i>	pochodna I rzędu względem zmienności cen instrumentu bazowego σ_t	$V_t = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} = S_t \phi(d_t^+) \sqrt{T-t}$	$V_t = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma_t} = S_t \phi(d_t^+) \sqrt{T-t}$
<i>Theta</i>	minus pochodna I rzędu względem długości okresu do terminu wygaśnięcia $(T-t)$	$\theta_t = \frac{-\partial C_t}{\partial (T-t)} = \frac{1}{2\sqrt{T-t}} S_t \phi(d_t^+) \sigma + r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_t^-)$	$\theta_t = \frac{-\partial P_t}{\partial (T-t)} = \frac{1}{2\sqrt{T-t}} S_t \phi(d_t^+) \sigma - r K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_t^-)$
<i>Rho</i>	pochodna I rzędu względem stopy r wolnej od ryzyka	$\rho_t = \frac{\partial C_t}{\partial r} = T K e^{-rT} \Phi(d_t^-)$	$\rho_t = \frac{\partial P_t}{\partial r} = -T K e^{-rT} \Phi(-d_t^-)$

Przykład 7.4.1. [E08.01.2007] Oblicz dla $t = 0$ iloczyn parametrów greckich *delta* i *vega* europejskiej opcji kupna w modelu Blacka-Scholesa z bieżącą ceną akcji S (akcja nie wypłaca dywidendy), stopą wolną od ryzyka r , zmiennością cen akcji σ , czasem zapadalności opcji T i ceną wykonania K .

Rozwiązanie. $\Delta_0 \cdot V_0 = \Phi(d_0^+) \cdot S_0 \cdot \phi(d_0^+) \sqrt{T}$.

Przykład 7.4.2. [E28.05.2012] W chwili $t = 0$ na rynku dostępna jest akcja $S(t)$ o obecnej cenie 32 PLN oraz trzymiesięczna europejska opcja kupna wystawiona na akcję $S(t)$ o cenie wykonania $X = 32$ PLN. Wiadomo, że parametr zmienności akcji $S(t)$ ma wartość $\sigma = 0,3$ oraz parametr *delta* opcji kupna wynosi 0,5567. Wiedząc, że roczna intensywność stopy wolnej od ryzyka jest stała i równa $r = 0,04$ (kapitalizacja ciągła) oraz parametr dla opcji kupna $d_0^+ = 0,0175$, zapisz wzór pozwalający wyznaczyć cenę opcji kupna w chwili $t = 0$ wystawioną na akcję $S(t)$ zgodnie z modelem BS.

Rozwiązanie.

$$C_0 = S_0 \cdot \Phi(d_0^+) - e^{-rT} K \cdot \Phi(d_0^-) = 17,81 - 12,64 \int_{-\infty}^{0,0175} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Przykład 7.4.3. [E25.03.2013] Cena pewnej opcji sprzedaży na akcję S niewypłacająca dywidendy, wyznaczona przy użyciu modelu BS, w chwili $t = 0$ wynosi $C_0 = 3$. Cena akcji S w chwili $t = 0$ wynosi 40, natomiast parametr zmienności ceny tej akcji $\sigma = 0,1$. Czas do zapadalności opcji to $T = 1$. W chwili $t = 0$ znana jest wartość dwóch parametrów greckich *delta* i *vega* dla tej opcji sprzedaży, mianowicie $\Delta_0 = -0,69$, $V_0 = 14,11$. Oszacować, o ile zmieniłaby się cena opcji sprzedaży, gdyby cena akcji S nagle wzrosła o 1.

Rozwiązanie. Z warunków zadania wynika, że

$$\Delta_0 = -\Phi(-d_0^+) = -0,69 \text{ oraz } V_0 = S_0 \cdot \varphi(d_0^+) \sqrt{T} = 40 \varphi(d_0^+) = 14,11.$$

Wartość parametru *gamma* wskazuje, jaki będzie przyrost parametru *delta* opcji, jeśli cena S wzrośnie o 1,

$$\Gamma_0 = \frac{\varphi(d_0^+)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = \frac{\varphi(d_0^+)}{4} = \frac{14,11/40}{4} \approx 0,088,$$

$$\Gamma_0 \approx \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{S_1 - S_0} = \Delta_1 - \Delta_0 = \Delta_1 + 0,69.$$

Stąd otrzymujemy $\Delta_1 = -0,602$.



Zadania do rozdziału 7

1. Wycenić europejską opcję kupna o terminie do wygaśnięcia 6 miesięcy, cenę wykonania 30 zł, opartą na akcji o aktualnej cenie 25 zł, jeśli odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji wynosi 20%, a w czasie ważności opcji nie będzie wypłacana dywidenda. Stopa w kapitalizacji ciągłej wolna od ryzyka wynosi 12%.
 2. Wycenić europejską opcję sprzedaży dla danych z poprzedniego zadania.
 3. Cena pewnej akcji A nieprzynoszącej dywidendy w rozpatrywanym okresie jest zmienną losową o rozkładzie $LN(\mu, \sigma^2)$ ze zmiennością $\sigma^2 = 12\%$ w skali roku, niezależną od dryfu μ . Obecna cena akcji wynosi 96 zł. Wolna od ryzyka stopa procentowa to 8%. Obliczyć cenę trzymiesięcznej:
 - a) opcji kupna 1000 akcji A z ceną wykonania 100 tys. zł,
 - b) europejskiej opcji sprzedaży 1000 akcji A z ceną wykonania 100 tys. zł.
 4. [E17.03.2008] Rozważmy parametr grecki *vega* europejskich opcji kupna (o cenie C) i sprzedaży (o cenie P) na rynku Blacka–Scholesa, które to opcje mają czas trwania T . Załóżmy, że zmienność (σ) ceny instrumentu podstawowego (S) wzrosła w chwili t^* (licząc od chwili 0) o $\varepsilon > 0$. Ile wyniesie różnica między nowymi cenami opcji kupna i sprzedaży C_1 i P_1 ?
 5. [E17.06.2013] Na rynku Blacka–Scholesa w chwili 0 dostępna jest opcja wyboru (*chooser option*) na akcję A, niewypłacająca dywidendy. Cena tej opcji w chwili 0 wynosi 10 PLN. Nabywca opcji w chwili 1 ma prawo zdecydować, czy będzie to europejska opcja sprzedaży wystawiona na akcję A, czy europejska opcja kupna akcji A, realizowana w chwili 2 z ceną wykonania 100 PLN. Przez $C_t(A, K, T)$ oznaczmy cenę w chwili $t < T$ europejskiej opcji kupna na akcję A o terminie wykonania T i cenie wykonania K . Cena akcji A w chwili 0 wynosi 97 PLN, stopa wolna od ryzyka zaś 0 (tzn. jest to model bez dyskonta). Mając dane $C_0(A, 100, 1) = 3$ PLN, znaleźć $C_0(A, 100, 2)$.
- Wskazówka.* Opcja wyboru jest portfelem złożonym z długiej opcji kupna o terminie wygaśnięcia T i długiej opcji sprzedaży o terminie do chwili wyboru.
6. Wykazać, na podstawie definicji, że jeśli $\{W(t) : t \geq 0\}$ jest procesem Wienera, to procesami Wienera są również:
 - a) $W(t + s) - W(s)$, gdy $t, s \geq 0$ (jednorodność w czasie),
 - b) $c \cdot W\left(\frac{t}{c^2}\right)$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą, $t \geq 0$ (skalowanie),
 - c) $t \cdot W\left(\frac{1}{t}\right)$, gdzie $t \geq 0$ (odwrócenie czasu),
 - d) $-W(t)$, gdzie $t \geq 0$ (symetria).

7. Pokazać, że następujące procesy są martyngałami z czasem ciągłym względem procesu Wienera $\{W(t) : t \geq 0\}$ z naturalną filtracją (F_t) :

a) $\{W(t) : t \geq 0\}$,

b) $\exp\left\{\sigma \cdot W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}$ (eksponenta Doleans–Dade [9]).

8. Obliczyć całkę Itô:

$$\int_0^T dW(t).$$

Odpowiedzi

1. Wycenić, to przede wszystkim podać cenę w chwili 0. $C_0 = 0,40$ zł.

2. Z parytetu: $P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT} = 3,65$ zł.

3. 1450,72 zł, 3470,04 zł.

4. Zero, bo *vega* nie zależy od σ .

5. $C_0^{CH} = 10 = C_0^E(97,100,2) + P_0^E(97,100,1)$, stąd $C_0^E(97,100,2) = 4$.

6. Skorzystać z definicji 7.1.1.

7. Patrz przykład 7.1.1.

8. Należy najpierw zapisać wzór określający sumy częściowe. Zależy on tylko od końcowych punktów przedziału, po którym całkujemy, a nie zależy ani od t , ani od procesu Wienera. Granica według prawdopodobieństwa ciągu sum częściowych będzie równa $W(T)$.

Bibliografia

- [1] Bobrowski D., *Ciągi losowe*, Wyd. Nauk. UAM, Poznań 2002.
- [2] Bobrowski D., *Wprowadzenie do systemów dynamicznych z czasem dyskretnym*, Wyd. Nauk. UAM, Poznań 1998.
- [3] Doman R., *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2011.
- [4] Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelową i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- [5] Härdle W., Simar L., *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Springer, Berlin 2003.
- [6] <<http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.6.vi.html>> [tłum. z ang.].
- [7] <http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoksy_Zenona_z_Elei.html>.
- [8] Jajuga K. (red.), *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wyd. AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000.
- [9] Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł., *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.
- [10] Jondeau E., Poon S-H., Rockinger M., *Financial Modelling under Non-gaussian Distribution*, Springer, London 2007.
- [11] Karatzas I., Shreve S., *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York 2001.
- [12] Kellison S.G., *The Theory of Interest*, wyd. 2., Irwin, Homewood-Boston 1991.
- [13] Kryszwicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, t. 1, 2, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1995.
- [14] Luenberger D.G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2003.
- [15] Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin 1997.
- [16] Pliska S.R., *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa 2005.
- [17] Podgórska M., Klimkowska J., *Matematyka finansowa*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2005.
- [18] Pomorski M., *Nobel z ekonomii za wycenę aktywów*, „Głos Wielkopolski” z dnia 14 października 2013.
- [19] Steele J.M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, New York 2001.
- [20] Tarczyński W., Zwolankowski M., *Inżynieria finansowa. Instrumentarium, strategie, zarządzanie ryzykiem*, Agencja Wydawnicza „Placet”, Warszawa 1999.
- [21] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, wyd. 2., WNT, Warszawa 1999.

Strony internetowe, aktualne 10.08.2014, na których umieszczono zadania dla aktuariuszy

<<http://forum.actuary.pl/>> [strona Polskiego Stowarzyszenia Aktuariuszy].

<www.aktuariusze.net.pl/> [lata 2000–2013].

<www.knf.gov.pl/rynek_ubezpieczen/aktuariusze/egzamin_y_aktuarialne/index.html>
[strona Komisji Nadzoru Finansowego; lata 2004–2014].

<www.wne.uw.edu.pl/www.php?id_www=103> [lata 2000–2014].