RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok LXIII — zeszyt 3 — 2001

MAŁGORZATA DOMAN

OCENA CHARAKTERU ZMIENNOŚCI POLSKIEGO RYNKU AKCJI

1. WSTĘP

Założenia dotyczące typu zmienności występującej na badanym rynku finansowym determinują możliwe do zastosowania metody modelowania i prognozowania. Tradycyjne pochodzące od Louisa Bacheliera podejście związane z hipotezą efektywności rynku traktuje zmiany stóp zwrotu akcji i indeksów jako procesy błądzenia przypadkowego. Badacze przyjmujący hipotezę efektywności rynku zakładają zwykle, że zmiany cen akcji mogą być dobrze opisane za pomocą niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym. Jednak analiza tych zmian na realnie funkcjonujących rynkach wydaje się przeczyć temu założeniu. Próbą alternatywnego podejścia do analizy rynków finansowych jest sformułowana przez E. E. Petersa hipoteza rynku fraktalnego. W swoich książkach Peters zwraca uwagę na istotny składnik deterministyczny zmian cen akcji i proponuje zastosowanie do ich badania teorii chaotycznych układów dynamicznych. W pracy [2] przeprowadzona została analiza dynamiki polskiego rynku akcji pod kątem jego losowości, bądź chaotycznego determinizmu.

Uzyskane wartości parametrów sugerują pewną niejednorodność występującej na nim zmienności ze wskazaniem na istnienie istotnej chaotycznej składowej deterministycznej.

W niniejszej pracy została podjęta próba oceny poszczególnych segmentów tego rynku ze względu na charakteryzujące je typy zmienności w wyżej rozumianym sensie. Jako materiał empiryczny przyjęto notowania indeksów Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych z okresu do 23.02.2001 r. Wszystkie obliczenia zostały wykonane za pomocą programów Excel 97 i DMC.

2. HIPOTEZA RYNKU FRAKTALNEGO

Hipoteza efektywności rynku zakłada, że bieżące ceny są odbiciem wszystkich dostępnych publicznie informacji, do których wszyscy inwestorzy mają jednakowy dostęp, a ponieważ działają racjonalnie, więc wyceniają akcje jednakowo. Nie ma zatem możliwości uzyskania na rynku nadzwyczajnych zysków. Hipoteza rynku fraktalnego przedstawiona w 1994 roku przez Petersa opiera się przede wszystkim na obserwacji, że długość horyzontu czasowego ma znaczący wpływ na zachowanie inwestora tzn. inne decyzje podejmuje osoba dążąca do osiągnięcia zysku w krótkim czasie, a inne podejmująca inwestycje długoterminowe. W [9] założenia hipotezy rynku fraktalnego sformułowane są następująco:

1) globalny rynek składa się z dużej liczby uczestników o różnych globalnych horyzontach czasowych;
2) informacja ma różny wpływ na decyzje inwestorów o różnych horyzontach czasowych;
3) stabilność rynku jest głównie rezultatem jego płynności. Rynek złożony z wielu inwestorów o różnych horyzontach czasowych gwarantuje płynność;
4) ceny walorów odzwierciedlają kombinację handlu krótkoterminowego (opisywanego przez analizę techniczną) i długoterminowego (analiza fundamentalna).

Długotrwałe trendy instrumentów finansowych są wynikiem ich powiązań z cyklami koniunkturalnymi.

Ponadto, przyjmuje się, że rynki finansowe mają naturę fraktalną związaną jednak z długoterminowym trendem deterministycznym. Matematycznym narzędziem opisu modeli opartych na hipotezie rynku fraktalnego jest teoria układów dynamicznych, w szczególności teoria chaosu.

3. CHAOTYCZNE UKŁADY DYNAMICZNE

Dyskretnym układem dynamicznym nazywamy parę (M, f), gdzie M jest pewnym podzbiorem przestrzeni R^n nazywanym przestrzenią stanów układu, a $f : M \to M$ *dyfeomorfizmem*, czyli wzajemnie jednoznacznym przekształceniem gładkim z gładką odwrotnością. Ewolucję układu w czasie opisuje parametryzowana momentami czasu rodzina punktów określających kolejne stany. Nazywamy ją *trajektorią* tego stanu. Elementami trajektorii stanu x są obrazy tego punktu w kolejnych iteracjach przekształcenia f, a zatem jest ona zbiorem $\{y \in M: y = f^n(x), n \geq 0\}$.

Chaotycznymi układami dynamicznymi nazywa się takie układy dynamiczne, w których zachowanie trajektorii jest bardzo wrażliwe na niewielkie nawet zmiany punktu początkowego, tzn. że bliskie na początku trajektorie odchodzą od siebie na daną odległość po pewnej określonej, skończonej liczbie kroków. Inną z charakterystyk chaotycznego układu dynamicznego jest posiadanie tzw. „dziwnego" atraktora.

Atraktor układu dynamicznego jest to podzbiór przestrzeni stanów, do którego zmierzają (są przyciągane) punkty z pewnego otoczenia tego podzbioru, nazywanego obszarem przyciągania atraktora. Jeśli trajektoria punktu wejdzie do atraktora, to już go nigdy nie opuści. Podane wyżej określenie nie jest ścisłe, ale wystarcza na potrzeby tej pracy. Dokładną definicję można znaleźć w [8], [4].

Atraktor A układu dynamicznego (M, f) nazywa się *„dziwnym"*, jeżeli układ jest w zbiorze A *wrażliwy na zmianę warunków początkowych* oraz zbiór A ma skomplikowaną strukturę geometryczną (np. jest fraktalem). Jednym ze wskaźników złożoności struktury geometrycznej atraktora jest jego *wymiar pojemnościowy* Kołmogorowa. Mówimy, że zbiór ograniczony $S \subset R^p$ ma wymiar pojemnościowy Kołmogorowa D, jeśli

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest minimalną liczbą kul o promieniu ε w R^p potrzebną do pokrycia zbioru S.

Dla „regularnych" obiektów geometrycznych wymiar pojemnościowy pokrywa się ze zwykłym wymiarem euklidesowym, w szczególności jest liczbą całkowitą. Ogólnie jednak nie musi być liczbą całkowitą. Wymiar pojemnościowy nie będący liczbą całkowitą wskazuje na skomplikowaną strukturę geometryczną obiektu.

Wyliczenie zdefiniowanego powyżej wymiaru pojemnościowego jest zazwyczaj trudne. W związku z tym Grassberger i Procaccia zaproponowali w roku 1983 [3] inne podejście do badania wymiaru atraktora. Wyznaczanie liczby $N(\varepsilon)$ zastąpili mierzeniem odległości pomiędzy punktami pewnej zawartej w atraktorze trajektorii. Zmiana ta prowadzi do pojęcia tzw. wymiaru korelacyjnego D_C.

Załóżmy, że atraktor zanurzony jest w przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru i niech $\{x_i\}$ będzie trajektorią gęstą w atraktorze. Dla każdego $r > 0$ możemy zdefiniować *całkę korelacyjną* $C(r)$ wzorem

$$C(r) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} \Theta\left(r - |x_i - x_j|\right),$$

gdzie $| \ |$ oznacza długość wektora, a $\Theta(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$

Według Grassbergera i Procaccii, dla małych wartości r, $C(r)$ zachowuje się jak potęga r. Możemy zatem napisać $C(r) \approx r^{D_C}$. Występujący tu wykładnik D_C nazywa się *wymiarem korelacyjnym*.

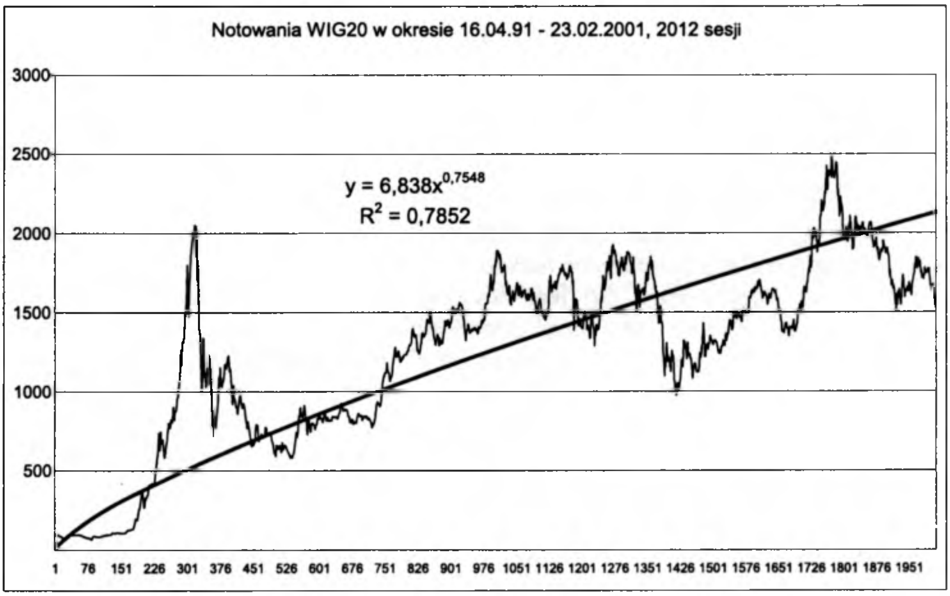
Wymiar korelacyjny D_C jest wymiarem probabilistycznym, tzn. $C(r)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że odległość dwóch punktów trajektorii nie jest większa od r. Jeśli punkty x_i pokrywają atraktor równomiernie, to $D_C = D$. W ogólnym przypadku prawdziwa jest nierówność $D_C \leq D$. Dla wielu znanych atraktorów, nawet jeśli wyliczone dla nich wymiary D i D_C nie są równe, to różnią się nieznacznie. Wymiar korelacyjny jest zatem dobrym oszacowaniem wymiaru Kołmogorowa.

Ocena czy układ dynamiczny jest układem chaotycznym opiera się na stwierdzeniu wrażliwości trajektorii układu na zmianę warunków początkowych. Dobrą miarę tej wrażliwości stanowią parametry nazywane wykładnikami Lapunowa. Opisują one geometryczne własności „dziwnych" atraktorów polegające na jednoczesnym ściskaniu i rozciąganiu trajektorii układu w różnych kierunkach we wnętrzu atraktora. Dodatnia wartość tzw. pierwszego wykładnika Lapunowa w obszarze atraktora oznacza, że układ jest w atraktorze wrażliwy na zmianę warunków początkowych.

Używane w pracy jako alternatywa chaotycznego układu deterministycznego pojęcie *układu losowego* oznacza tutaj taki układ, dla którego w danym momencie czasu wartości współrzędnych wektora stanu określone są jedynie przez rozkład prawdopodobieństwa, a zatem wektor ten jest wektorem losowym.

4. ANALIZA CHARAKTERU ZMIENNOŚCI SZEREGÓW CZASOWYCH

Jeśli przyjmiemy założenia teorii rynku fraktalnego, to na rynek akcji możemy patrzeć jak na pewien układ dynamiczny. Stan tego układu w każdej chwili jest opisany przez wektor z przestrzeni R^n, którego współrzędne stanowią wartości charakteryzujących go parametrów. Wszystkie możliwe takie wektory tworzą przestrzeń stanów M. Niestety nie wiemy, ani jakie to są parametry, ani ile ich jest. Możemy obserwować tylko pewne sygnały zależne od realizowanych stanów, które można traktować jako wartości obcięcia pewnych funkcji określonych na rozważanej przestrzeni do realizowanej trajektorii. Ponieważ punkty orbity parametryzowane są czasem, to w istocie otrzymujemy różnego rodzaju *szeregi czasowe*. Przykładami takich sygnałów opisujących rynek akcji mogą być szeregi czasowe notowań indeksów giełdowych.



Źródło: Opracowanie własne.

Ponieważ nie znamy liczby opisujących rynek parametrów, więc nie znamy wymiaru przestrzeni stanów rynku, ani zmiennych opisujących poszczególne współrzędne punktów będących jej elementami. Tym bardziej nie mamy informacji o odwzorowaniu ani o realizowanej trajektorii. Mimo tego możemy za pomocą pewnych narzędzi matematycznych [6], [2] podjąć próbę oceny tego, czy zmienność występująca na badanym rynku ma charakter chaotyczny, czy też losowy. W przypadku potwierdzenia hipotezy o deterministycznym charakterze zmienności możemy oszacować minimalną liczbę parametrów potrzebnych do jej opisu.

Narzędzi do analizy układów dynamicznych na podstawie generowanych przez nie szeregów czasowych dostarcza teoria stworzona przez F. Takensa [7]. Udowodnione przez niego twierdzenie umożliwia zrekonstruowanie przestrzeni fazowej w takim stopniu, że jest możliwe określenie pewnych jej istotnych własności.

Rozważmy ciąg wszystkich możliwych układów n kolejnych elementów szeregu czasowego $\{Y(i)\}$ zawierającego N obserwacji:

$$[Y(1), Y(2), Y(3),..., Y(n)],$$
$$[Y(2), Y(3), Y(4),..., Y(n+1)],$$
$$[Y(3), Y(4), Y(5),..., Y(n+2)],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[Y(N - n + 1), Y(N - n + 2), Y(N - n + 3),..., Y(N)].$$

Możemy go traktować jako ciąg $N - n + 1$ wektorów w R^n. Każdy taki wektor będziemy nazywać *n-historią* szeregu czasowego $\{Y(i)\}$.

Twierdzenie Takensa [7] mówi, że poza wyjątkowymi sytuacjami, jeśli n jest dostatecznie duże w stosunku do wymiaru przestrzeni stanów, tzn. $n \geq 2m + 1$, to n-wymiarowy obraz przestrzeni stanów, którego częścią jest ciąg n-historii, oddaje w poprawny matematycznie sposób jej własności. W szczególności, trajektoria w przestrzeni R^n skonstruowana za pomocą ciągu n-historii jest poprawną rekonstrukcją trajektorii generującej badany szereg czasowy $\{Y(i)\}$.

Niech dany będzie szereg czasowy $\{Y(i)\}$, o którym zakładamy, że jest sygnałem pochodzącym z trajektorii gęstej w pewnym atraktorze deterministycznego układu dynamicznego. Korzystając z twierdzenia Takensa rekonstruujemy ten atraktor w pewnej przestrzeni zanurzenia R^n. Gdy nie znamy wymiaru oryginalnej przestrzeni fazowej układu, to odpowiednią wartość wymiaru przestrzeni zanurzenia znajdujemy, obliczając wymiar korelacyjny dla coraz większych wartości n, aż do jego ewentualnej stabilizacji.

Ponieważ punkty atraktora są silnie powiązane i zagęszczają się w określonych miejscach niezależnie od wymiaru przestrzeni zanurzenia, więc jeśli wymiar korelacyjny atraktora rekonstruowanego osiągnie wymiar atraktora „prawdziwego", to dalsze zwiększanie wymiaru przestrzeni zanurzenia nie powinno zwiększać wymiaru atraktora rekonstruowanego.

Jeśli teza o deterministycznym charakterze układu nie jest uzasadniona, czyli jeśli układ jest losowy, to punkty rekonstruowanej trajektorii wypełniają przestrzeń zanurzenia we wszystkich kierunkach i wymiar korelacyjny rośnie nieograniczenie ze wzrostem wymiaru przestrzeni zanurzenia.

Tak więc, gdy szereg czasowy generowany jest przez układ deterministyczny, wymiar korelacyjny stabilizuje się począwszy od pewnego wymiaru przestrzeni zanurzenia. W przypadku, gdy sygnał pochodzi od układu losowego i jest realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, otrzymywany dla kolejnych wartości n wymiar korelacyjny w praktyce powinien być bliski n.

Rekonstrukcja tego typu została wykorzystana w pracy [2] do analizy charakteru zmienności polskiego rynku akcji na podstawie dziennych notowań indeksu WIG. Uzyskane tam wyniki sugerują, że polski rynek akcji jest w znacznym stopniu chaotyczny. Obecnie za pomocą tej samej metody przeanalizujemy szeregi czasowe indeksów WIG20, MIDWIG, TECHWIG, WIRR oraz subindeksów WIG-banki, WIG-budownictwo, WIG-informatyka, WIG-spożywczy, WIG-telekomunikacja. Rezultatem powinna być odpowiedź na pytanie o charakter zmienności, jaką charakteryzują się poszczególne segmenty analizowanego rynku akcji.

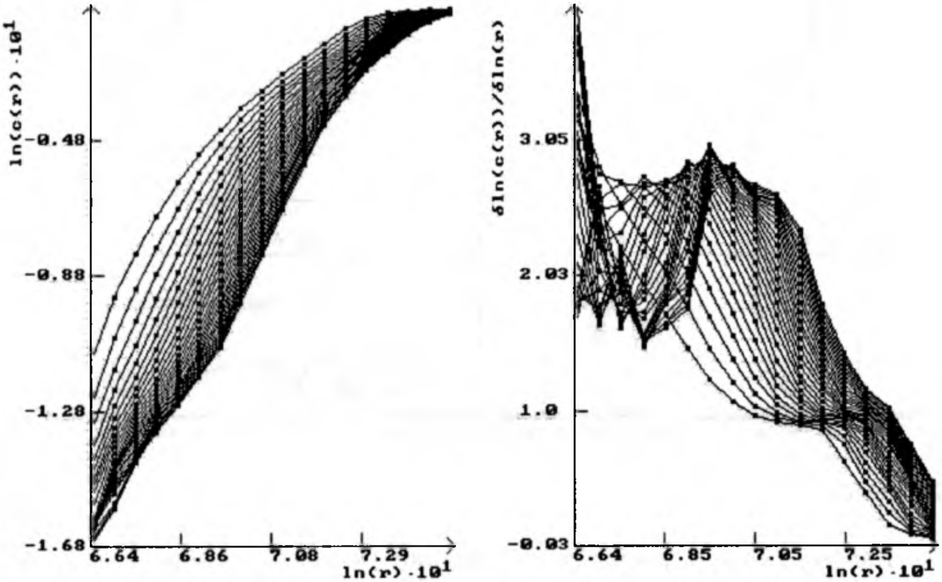
5. ZMIENNOŚĆ POLSKIEGO RYNKU AKCJI

Analiza rozważanych szeregów czasowych będzie przebiegała następująco. Najpierw za pomocą narzędzi pochodzących z pracy Takensa [7] dokonamy w każdym przypadku rekonstrukcji przestrzeni fazowej. Następnie dla odtworzonych przestrzeni wyliczymy wymiary korelacyjne. Stabilizowanie się wymiaru korelacyjnego ze wzrostem wymiaru zanurzenia sugeruje chaotyczność badanego układu. Potwierdzeniem tej tezy będzie uzyskanie dodatniej wartości pierwszego wykładnika Lapunowa. Wykładniki Lapunowa dla danych eksperymentalnych stosunkowo łatwo dają się wyznaczyć numerycznie.

W pracy [2] uzyskano wartość wymiaru korelacyjnego 2,7 i dodatnią wartość pierwszego wykładnika Lapunowa dla szeregu czasowego WIG. Zastosowane tam metody zostaną wykorzystane obecnie do ustalenia typu zmienności różnych segmentów polskiego rynku akcji.

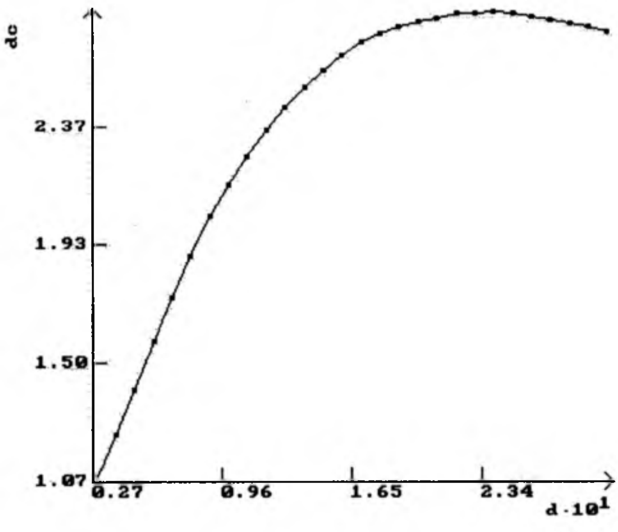
Jednym z podstawowych problemów powstających przy badaniu charakteru zmienności eksperymentalnych szeregów czasowych jest typ szeregu, jaki należy poddać analizie. Większość szeregów uzyskiwanych jako obserwacje rynków finansowych charakteryzuje się bardzo silną autokorelacją spowodowaną istnieniem trendu deterministycznego. W literaturze przedmiotu [5], [1] sugeruje się zatem badanie zmienności szeregu dopiero po usunięciu trendu. Metoda ta została zastosowana również w [2]. Podobnie, w obliczeniach przeprowadzanych w niniejszej pracy z rozpatrywanych szeregów usunięto trend deterministyczny.

Rysunek poniżej przedstawia procedurę wyznaczania wymiaru korelacyjnego dla szeregu czasowego indeksu WIG20 z usuniętym trendem potęgowym. Po lewej stronie znajduje się 28 wykresów przedstawiających w skali logarytmicznej (podstawą logarytmu jest 2) zależność całki korelacyjnej $C(r)$ od r dla zanurzeń trajektorii generującej badany szereg czasowy w przestrzenie R^n, n = 3, 4, ..., 30. Dla każdej z 28 krzywych można dobrać metodą regresji liniowej prostą przybliżającą ją na pewnym przedziale. W myśl definicji wymiaru korelacyjnego, przy założeniu, że na rozważanym przedziale całka korelacyjna zachowuje się jak potęga *r*, współczynnik kierunkowy takiej prostej jest równy odpowiedniemu wymiarowi korelacyjnemu. Po prawej stronie przedstawiono 28 wykresów „ pochodnych" odpowiednich funkcji z rysunku po lewej. Stabilną w sensie zależności od *r* i *n* wartość tych pochodnych przyjmujemy za oszacowanie wymiaru korelacyjnego atraktora zrekonstruowanego, a więc, na mocy twierdzenia Takensa, również atraktora „prawdziwego". Z obliczeń przedstawionych na powyższych wykresach wynika, że jako wartość wymiaru korelacyjnego możemy przyjąć $D_C \approx 2{,}7$.



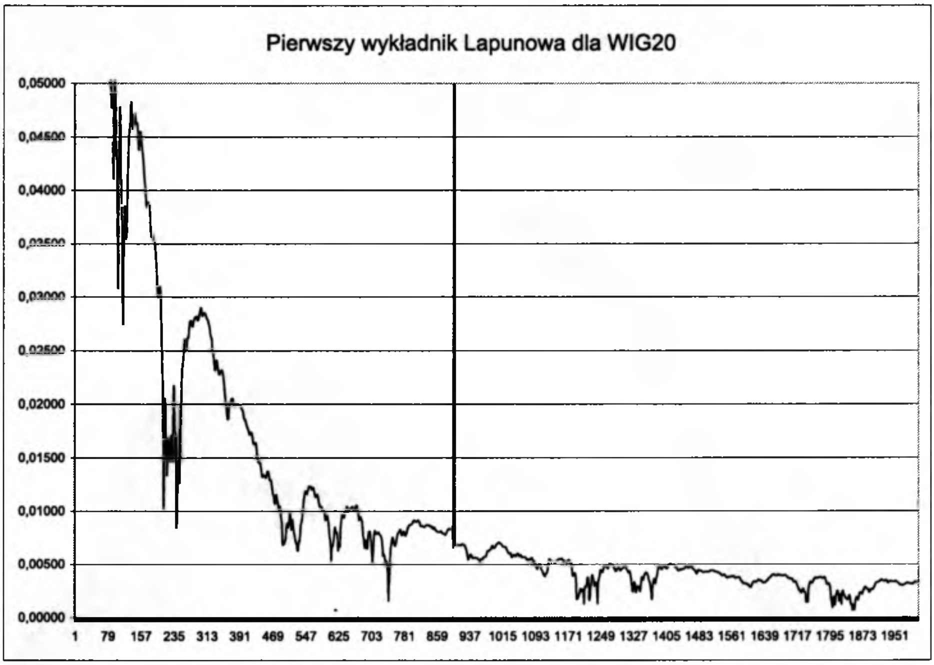
Źródło: Opracowanie własne.

Kolejny wykres przedstawia zależność wymiaru korelacyjnego od wymiaru zanurzenia. Stabilizacja następuje na poziomie 2,7.



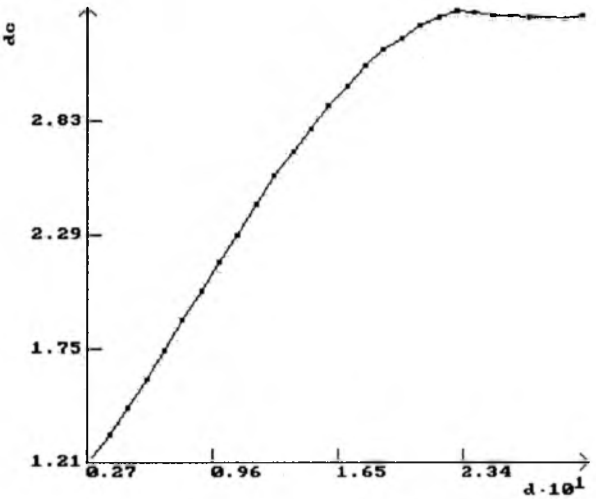
Źródło: Opracowanie własne.

Uzyskana wartość wykładnika Lapunowa jest dodatnia. Zatem można dopuścić możliwość, że szereg czasowy WIG20 jest generowany przez chaotyczny układ dynamiczny.

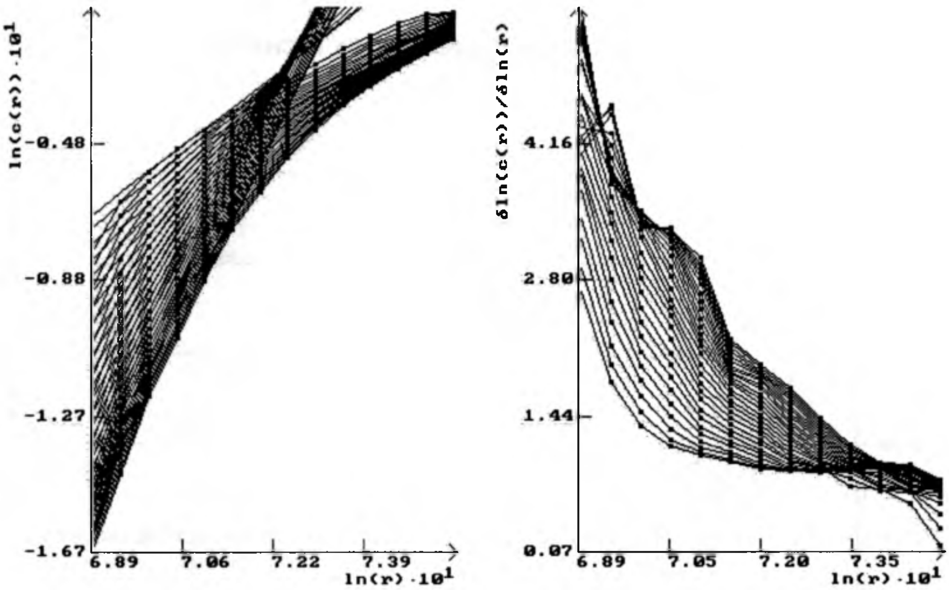


Źródło: Opracowanie własne.

Kolejne rysunki pokazują wyznaczanie wymiaru korelacyjnego i wykładnika Lapunowa dla indeksu WIRR. Wymiar korelacyjny stabilizuje się na poziomie 3,3, pierwszy wykładnik Lapunowa jest również dodatni. Oznacza to, że szereg ten jest generowany przez chaotyczny układ deterministyczny, do którego opisu potrzeba co najmniej czterech zmiennych.

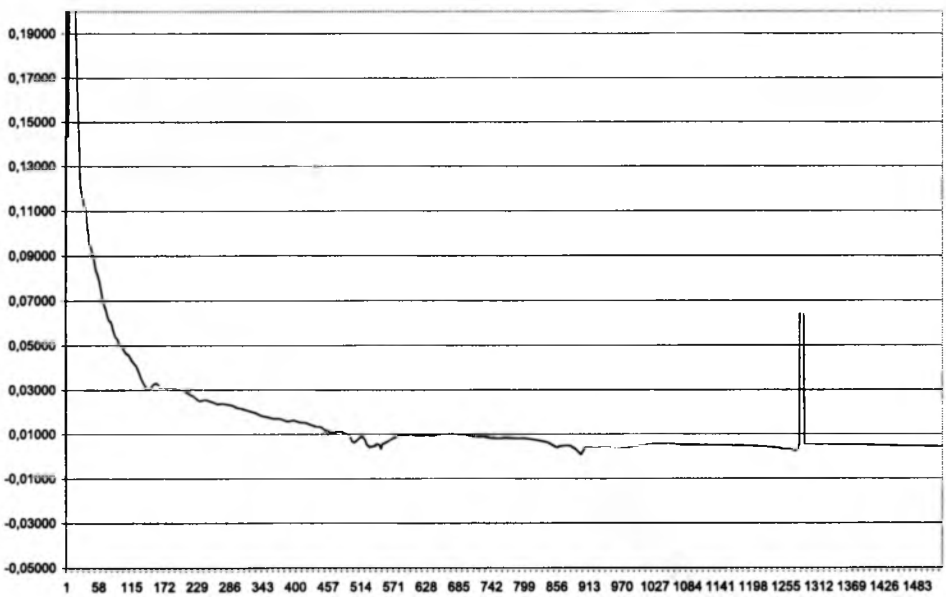


Źródło: Opracowanie własne.



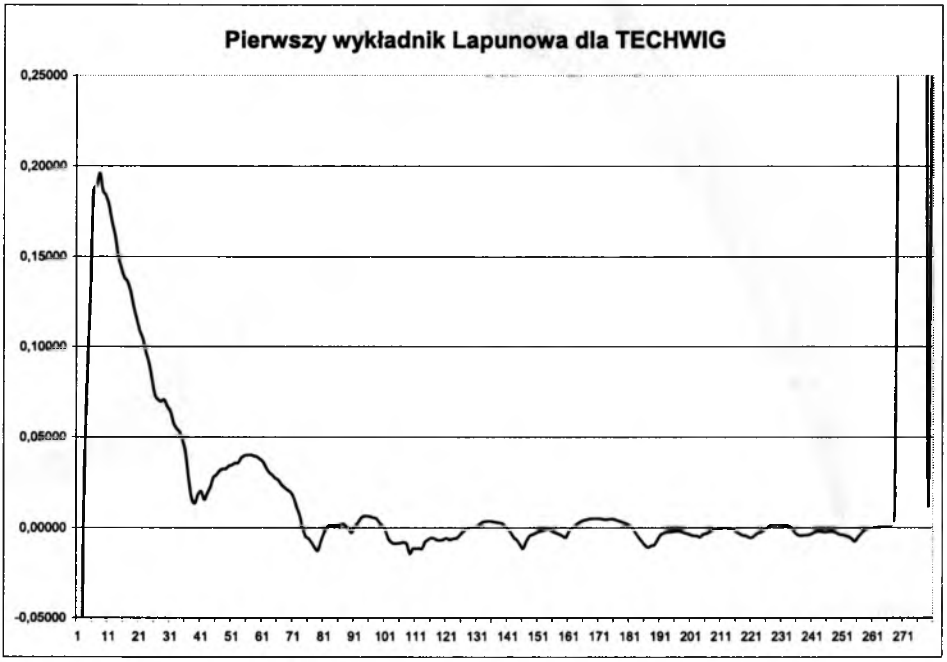
Źródło: Opracowanie własne.

Pierwszy wykładnik Lapunowa dla WIRR



Źródło: Opracowanie własne.

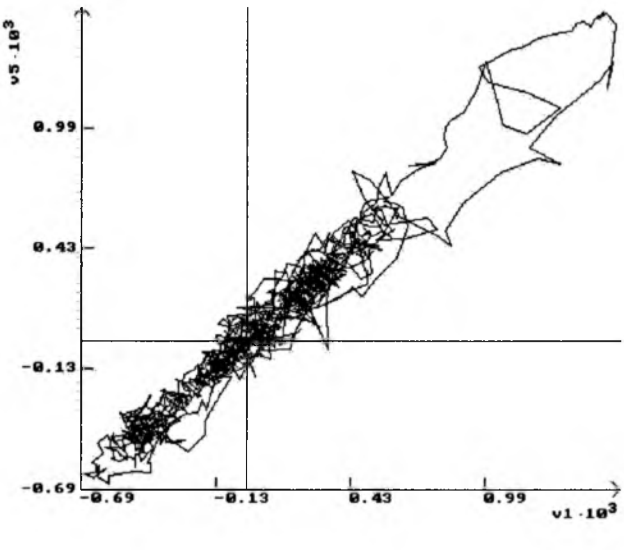
Szereg czasowy indeksu TECHWIG charakteryzuje się wykładnikiem Lapunowa oscylującym wokół 0.



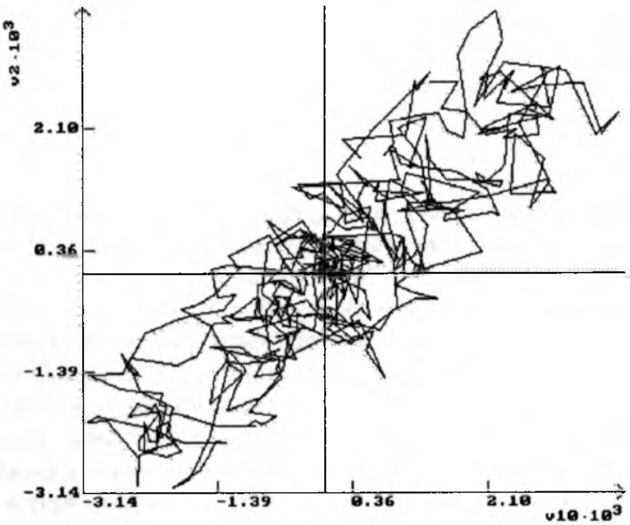
Źródło: Opracowanie własne.

Powyższy wykres wskazuje, że układ generujący indeks TECHWIG nie jest chaotyczny.

Twierdzenie Takensa pozwala na rekonstrukcję atraktora generującego szereg czasowy układu dynamicznego za pomocą ciągów n-historii. Poniżej przedstawione są rzuty na płaszczyzny dwuwymiarowe zrekonstruowanych w przestrzeni R^{15} atraktorów dla układów generujących szeregi czasowe indeksu WIG20 oraz subindeksu WIG-banki.



Źródło: Opracowanie własne.



Źródło: Opracowanie własne.

Zestawienie uzyskanych rezultatów dla wszystkich badanych szeregów przedstawia poniższa tabela.

Indeks	Wymiar korelacyjny	Wykładnik Lapunowa
WIG20	2,7	dodatni
MIDWIG	3,4	0
TECHWIG	3,4	oscyluje wokół 0
WIG-banki	4,2	dodatni
WIG-budownictwo	2,5	dodatni
WIG-telekomunikacja	2,7	dodatni
WIG-spożywczy	2,8	dodatni
WIG-informatyka	2,6	dodatni
WIRR	3,3	dodatni

Źródło: Opracowanie własne.

6. PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że szereg czasowy indeksu WIG20 zachowuje się podobnie jak szereg WIG-u [2]. Jego zmienność zawiera istotną składową deterministyczną. Wymiar korelacyjny stabilizuje się na poziomie 2,7. Oznacza to, że generujący ten szereg układ dynamiczny nie może być opisany przez liczbę zmiennych mniejszą niż 3. Wykładnik Lapunowa przyjmuje wartości dodatnie, co oznacza chaotyczność układu dynamicznego. Podobnymi parametrami charakteryzują się również subindeksy WIG-budownictwo, WIG-informatyka i WIG-telekomunikacja. Szereg czasowy opisujący zmienność notowań akcji sektora bankowego ma wymiar korelacyjny 4,2 i dodatni pierwszy wykładnik Lapunowa. Do opisu generującego go układu dynamicznego potrzeba co najmniej pięciu zmiennych. Wymiary korelacyjne dla szeregów indeksów MIDWIG, TECHWIG oraz WIRR przekraczają 3. Zatem notowania średnich spółek, spółek segmentu innowacyjnych technologii oraz rynku równoległego również wykazują bardziej złożony typ zmienności wymagający do opisu co najmniej czterech zmiennych. Wykładnik Lapunowa indeksu TECHWIG przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Mogłoby to wskazywać na brak chaotycznej składowej jego zmienności. Jednak wynik ten może być również skutkiem stosunkowo niewielkiej liczby obserwacji (290). Wartości rozważanych parametrów uzyskane dla MIDWIG-u także sugerują brak składowej chaotycznej.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy potwierdzają tezy Petersa dotyczące chaotycznego determinizmu układów opisujących rynek akcji. Otrzymane wartości wymiarów korelacyjnych są podobne do tych charakteryzujących rynki w państwach Europy Zachodniej, USA i Japonii (wymiar korelacyjny zawarty między 2 a 3) [6], [4]. Jednak parametry dotyczące niektórych sektorów rynku wskazują na bardziej złożony charakter ich zmienności w porównaniu z sytuacją na rynkach bardziej rozwiniętych.

LITERATURA

[1] Broomhead D. S., King G. P., *Extracting qualitative dynamics from experimental data*, Physica, 20D (1986), 217 - 236.

[2] Doman M., Doman R., *Analiza dynamiczna polskiego rynku akcji na podstawie notowań indeksu WIG*, Prace z ekonometrii finansowej, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu (w druku).

[3] Grassberger P., Procaccia I., *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica 9D (1983), 189 - 208.

[4] Lorenz H.-W., *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Springer, Berlin 1997.

[5] Medio A., *Chaotic dynamics. Theory and applications to economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[6] Peters E. E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.

[7] Takens F., *Detecting strange atractors in turbulence*, w: *Dynamical systems and turbulence*, Lecture Notes in Mathematics 898, Springer, Berlin 1981, 366 - 381.

[8] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1999.

[9] Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 1996.

DIAGNOSING THE POLISH STOCK MARKET VOLATILITY

Summary

The paper presents an attempt to diagnose the Polish stock market volatility by testing for the presence of chaotic deterministic generators of stock index returns of selected sectors of the market. Some evidence is provided for the existence of such generators in the low dimensions for most of the tested sectors.