RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok XLIV — zeszyt 2 — 1982

EGON KÖNZE

PROCEDURY TESTOWANIA W BADANIU STACJONARNOŚCI SZEREGÓW CZASOWYCH PROCESÓW EKONOMICZNYCH

I. PROBLEM

Punkt wyjścia dla poszukiwań stanowi paradoks, wynikający z jednej strony z istnienia wielu rozbudowanych modeli matematycznych, a z drugiej, z ich niedostatecznego wykorzystywania w praktyce. W znacznej mierze nieprzydatność praktyczna części tek zwanych stochastycznych modeli, nazywanych tutaj dalej krótko modelami, wynika stąd, iż niektóre parametry modelu, czy zmienne, mają charakter przypadkowy. W konstrukcjach modelowych, które na ogół są akceptowane, hipotezy oraz warunki przyjętych założeń, odnoszące się do modelu (bądź do danych empirycznych), przy opisywaniu procesów ekonomicznych rzadko bywają sprawdzane, a jeszcze rzadziej udowodnione. Najistotniejszą sprawą jest tutaj stochastyczna niezależność zmiennych oraz ocena zgodności ich rozkładów rzeczywistych z teoretycznymi funkcjami rozkładów.

Obecnie powinniśmy postawić pytanie dotyczące stacjonarności procesów ekonomicznych. Punktem wyjścia jest stwierdzenie, że wszystkie ekonomiczne zjawiska i procesy podlegające dialektycznej konieczności i przypadkowi mają stochastyczny charakter. Przypadek stacjonarności w modelowaniu ekonomiczo-matematycznym odgrywa szczególną rolę,, ponieważ pozwala w formie względnie nieskomplikowanego zapisu matematycznego przedstawić ekonomiczne procesy i zjawiska. To wyjaśnia dlaczego prawie wszystkie znane modele procesów stochastycznych zakładają stacjonarność. Jednakże poza względem praktycznym istotny jest jeszcze problem analizy szeregów czasowych. Stacjonarność jest znaczącą własnością procesów zmieniających się w czasie. Własność ta odgrywa dużą rolę przede wszystkim przy zapisie funkcji rozkładów średnich, ponieważ ważne jest, czy wspomniany rozkład zostaje zachowamy w poszczególnych okresach czy też zmienia się. Odnośnie do tego O. Anderson powiedział: „Przezornie [...], mogę tutaj zupełnie na początku stwierdzić, że obliczanie prawidłowości rozkładów dla takich społecznych zjawisk masowych, których częstotliwość rozkładu stale zmienia się w czasie, z pominięciem rzadkich wyjątków, jest niczym innym jak nieskomplikowaną zabawą liczbową bez jakiejkolwiek wartości poznawczej"[1].

II. PRZESŁANKI METODYCZNE

Proces stochastyczny nazywa się stacjonarnym, jeżeli rozkłady dwóch skończonych zbiorów zmiennych:

$$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m) \quad \text{i} \quad X(t_1+u), X(t_2+u), \ldots, X(t_m+u)$$

są identyczne, dla dowolnych u i t_1, t_2, ..., t_m.

Z powyższego wynika, iż:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1+u, t_2+u, \ldots, t_m+u).$$

Definicja ta jest równoznaczna ze spełnieniem warunków[2]:

1) Wartość oczekiwana procesu stochastycznego jest niezależna od czasu, a więc:

$$E[X(t)] = a = \text{const}.$$

2) Wariancja procesu jest niezależna od czasu, zatem:

$$\text{var}[X(t)] = s^2 = \text{const}.$$

3) Kowariancja jest tylko funkcją różnicy czasu u, czyli:

$$E\{[X(t+u) - E(X(t+u))][X(t) - E(X(t))]\} = R(u).$$

Z definicji stacjonarności wynika, iż odnośnie do konkretnego procesu należy zastosować procedurę testującą stacjonarność. Z literatury jest nam do tej pory znane tylko jedno badanie, i to pośrednio dotyczące stacjonarności. Klemm i Mikut w swoich badaniach związanych z wyodrębnianiem trendu z szeregów czasowych podnieśli, iż w niektórych artykułach prezentujących formalne obliczenia, związane z tendencją rozwojową, zawarta była analiza częstości występowania cech[3]. Istnienie trendu jest więc wyrazem niestacjonarności szeregu czasowego. Takie stwierdzenie można uznać za obiektywnie poprawne, jednakże pozostają jeszcze otwarte pytania:

— Jak „silny" może być trend, aby szereg czasowy był jeszcze stacjonarny? Od którego momentu jest on niestacjonarny? Te pytania wymagają określenia wyraźnych granic.

— Ozy wszystkie szeregi czasowe nie zawierające trendu są stacjo-

[1] O. Anderson, *Probleme der statistischen Methodenlehre,* Würzburg 1962, s. 119.

[2] B. W. Gnedenko, *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlin 1970, s. 307 oraz M. Fisz, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik,* Berlin 1971, s. 370 i 371.

[3] H. Klemm, M. Mikut, *Lagerhaltungsmodelle,* Berlin 1972, s. 192.

name? Czy poza trendem są inne czynniki, na podstawie których można by wnioskować o stacjonarności?

Poszukując odpowiedzi na postawione pytania, różnymi drogami dochodzimy do określenia testu na stacjonarność. Pierwszy sposób polega na tym, iż postępuje się według wskazówek płynących z definicji, tj. należy sprawdzić, czy wartość oczekiwana, wariancja i kowariancja spełniają wymagane warunki. W tym celu dzielimy szereg czasowy na połowy[4] i dla każdej z nich obliczamy wartość oczekiwaną i wariancję oraz przeprowadzamy odpowiedni test na zgodność. Odnośnie do kowariancji nie ma potrzeby poszukiwania testu z punktu widzenia dogodności rachunkowych, ponieważ jest ona przedstawiona tylko przez jedną funkcję przesuniętą w czasie. Proponowana procedura jest wynikiem następującego rozumowania: jeżeli wartości oczekiwane lub/i wariancje obu części szeregu znacznie się różnią, to znaczy że szereg czasowy nie jest stacjonarny. Jeżeli nie tylko między wartościami oczekiwanymi występuje niewielka różnica, lecz także nieznacznie zróżnicowane są wariancje, wówczas jest większe prawdopodobieństwo tego, że szereg czasowy jest stacjonarny. Aby stwierdzić istnienie stacjonarności, konieczne jest tylko zbadanie warunku 3, dotyczącego zachowania się kowariancji. Część definicji może więc być pominięta. Test zatem jest zadowalający jako dowód braku stacjonarności.

Przyjmiemy oznaczenia:
$\bar{x}_1$ — wartość średnia pierwszej części szeregu czasowego,
$\bar{x}_2$ — wartość średnia drugiej części szeregu czasowego,
s_1^2 — wariancja pierwszej części szeregu czasowego,
s_2^2 — wariancja drugiej części szeregu czasowego,
N_1 — liczebność pierwszej części szeregu czasowego,
N_2 — liczebność drugiej części szeregu czasowego,
N — ogólna liczebność szeregu czasowego, task że $N_1+N_2=N$ czyli dla rozpatrywanego przypadku podziału szeregu czasowego na połowy, zawsze zachodzi:

$$N_1=N_2=\tfrac{1}{2}N.$$

Jako pierwszy zastosujemy test F odnośnie do wariancji[5]. Hipoteza zerowa brzmi: wariancje s_1^2 i s_2^2 są równe, a więc $s_1^2=s_2^2$, zatem wielkości badane

[4] Oba powstałe szeregi czasowe zawierają wszystkie wartości starego szeregu. Testy są stosowane odnośnie do każdej jego części, np. każdej trzeciej lub innej części, jeżeli zdecydowano o takim podziale szeregu czasowego, ze względu na kilkakrotne występowanie poszczególnych wartości (jednakże nie należy dzielić szeregu czasowego na zbyt wiele części): Proponowany sposób nie zawiera żadnego ograniczenia dla ogólnej idei, a posiada korzyść nieznacznego wysiłku rachunkowego.

[5] Por. m. in. R. Storm, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathemtische Statistik und statistische Qualitätskontrolle,* Leipzig 1972, s. 153 i nast.

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2} \text{ dla } s_1^2>s_2^2 \quad \text{lub} \quad F=\frac{s_2^2}{s_1^2} \text{ gdy } s_2^2>s_1^2$$

porównujemy[6] z wartością $F_{\alpha,\, f1,\, f2}$, odczytaną z tablic (w związku z postawionym wyżej pytaniem), przy czym liczba stopni swobody wynosi $f_1=f_2=N_1—1=N_2—1$; a α=0,05.

Regułą rozstrzygającą jest, że:

dy $F>F_{0,05;\, f_1;\, f_2}$	hipotezę zerową należy odrzucić, czyli wariancje różnią się
la $F\leqslant F_{0,05;\, f_1;\, f_2}$	hipotezę zerową akceptujemy, tj. nie ma podstaw, by sądzie, że różnica między wariancjami jest statystycznie istotna.

Jako drugi zostanie zastosowany test *t*, w celu sprawdzenia istotności różnicy między średnimi[7]. Hipoteza zerowa brzmi tutaj: wartości średnie $\bar{x}_1$ i $\bar{x}_2$ są równe, $\bar{x}_1=\bar{x}_2$.

Dla przypadku, odnośnie do którego w oparciu o test *F* stwierdzono, że różnica między wariancjami nie jest znacząca, statystykę sprawdzającą liczymy według wzoru:

$$t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{(N_1-1)s_1^2+(N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}}}\cdot\sqrt{\frac{N_1\cdot N_2}{N_1+N_2}}$$

i porównujemy z wartością $t_{\alpha;\, f}$ odczytaną z tablic, gdzie $f=N_1+N_2—2=N—2$ oznacza liczbę stopni swobody przy a=0,05. Dla $N_1=N_2=\frac{1}{2}N$ powyższa formuła przybiera postać uproszczoną:

$$t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{s_1^2-s_2^2}}\,.$$

W sytuacji, gdy wariancje są zmacanie zróżnicowane, stosujemy również powyższą formułę, by obliczyć statystykę *t*, lecz porównujemy ją z inaczej ustaloną wartością krytyczną t_{α,f^*} pochodzącą z tablic. Udowodniono, że przy wykorzystaniu testu *t* dla przypadku podobnych wariancji, zawsze występuje strata liczby stopni swobody i z tego powodu zmniejszenie dokładności. Liczba stopni swobody f^* jest ustalana na podstawie wzoru[8]:

$$f^*=\frac{\frac{1}{2}N-1}{c^2+(1-c)^2}<f=N-2, \quad \text{gdzie } c=\frac{s_1^2}{s_1^2+s_2^2}$$

[6] N. W. Smirnow, I. W. Dunin-Barkowski, *Mathematische Statistik in der Technik,* Berlin 1963, s. 386 - 391.

[7] E. Weber, *Grundriß der biologischen Statistik,* wyd. 7, Jena 1972, s. 190 i nast.

[8] Por. J. Pfanzagl, *Allgemeine Methodenlehre der Statistik,* t. 2, Berlin 1960, s. 201 i nast.

jeżeli	$t > t_{0,05;f}$	hipotezę zerową odrzucamy, średnie różnią się
lub	$t > t_{0,05;f^*}$	
jeżeli	$t \leq t_{0,05;f}$	mie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, różnica między średnimi jest statystycznie nieistotna.
lub	$t \leq t_{0,005;f^*}$	

Obecnie odnośnie do stacjonarności szeregów czasowych możemy stwierdzić co następuje : jeżeli posługując się testem *F* lub *t* lub wykorzystując je oba odrzucamy hipotezę zerową, wówczas szereg czasowy jest niestacjonarny. Jeśli w wyniku powyższego postępowania nie odrzuca się weryfikowanej hipotezy, to można wtedy wprawdzie przypuszczać istnienie stacjonarności, jednakże nie musi ona występować. Z powodu tej niedogodności oraz faktu, że test *F* oraz *t* zakładają normalność rozkładów, poszukiwano innego sposobu. Polega on na tym, że nie sprawdza się równości rozkładów w obu częściach szeregu czasowego w momencie 1 i 2, lecz bezpośrednio porównuje się empiryczne rozkłady. Przesłanka ta opiera się na istnieniu empirycznych rozkładów cech lub na możliwości ich osiągnięcia w wyniku grupowania materiału. W tym celu przydatny jest test Kołmogorowa-Smirnowa oraz test zgodności χ^2.

Test Kołmogorowa-Smirnowa [9] będzie stosowany w celu porównania dwóch niezależnych prób "z punktu widzenia poszukiwanego rozkładu cech. Oba nadmienione założenia można uważać za spełnione. Zanim zostanie zapisany test, konieczne jest podanie jeszcze pewnych ogólnych uwag, dotyczących grupowania danych. W celu otrzymania rozkładu empirycznego a także teoretycznego należy utworzyć klasy. W statystyce matematycznej przez tworzenie klas rozumie się podział całej próby $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o liczebności *N* na poprawnie określone części[10]. Liczba klas i rozpiętość przedziałów klasowych zależy od liczebności próby *N* oraz od stopnia zróżnicowania cech. Na ustalenie liczby klas w pewnym stopniu ma wpływ własność rozkładu. Zbyt wiele klas prowadzi często do określenia typowego rozkładu, co może być niepoprawne, podczas gdy zbyt mało klas zaciera cechy charakterystyczne rozkładu. Na podstawie szerokich dotychczasowych doświadczeń [11] formułuje się następujące praktyczne wskazówki, dotyczące tworzenia przedziałów klasowych:

1) Przyjmuje się dla całej próby jednakową rozpiętość przedziałów klasowych: *d*. Wyjątki stanowią skrajne nie otwarte klasy.

2) Liczbę klas *k* ustala się na podstawie formuły podanej przez

[9] Zob. *Lexikon Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik,* Berlin 1970, s. 99.

[10] Ibidem, s. 98.

[11] R. Storm, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische,* s. 82.

Brooksa

$$k \leqslant 5 \lg N, \text{ przy czym } 6 \leqslant k \leqslant 20$$

lub przez Meyera i Vahle'a [12]:

$$k \leqslant \sqrt{N}, \quad \text{gdzie} \quad 5 \leqslant k \leqslant 25.$$

3) Po wyznaczeniu k oraz uwzględniając obszar zmienności, oblicza się rozpiętość przedziału klasowego d

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Oba rozkłady $F_1(x)$ i $F_2(x)$ powinny być porównane z testem Kołomogorowa-Smirnowa. W tym przypadku hipoteza zerowa brzmi: zmienne w obu częściach szeregu imają jednakowe rozikłady, czyli $F_1(x) = F_2(x)$. W związku z postawionym drugim pytaniem obliczamy wielkość kontrolną D

$$D = \max_{i=1}^{k} \left| F_{1i}(x) - F_{2i}(x) \right|. \tag{1}$$

$F_{1i}(x)$ i $F_{2i}(x)$ oznaczają kumulowane częstości względne i-tej klasy, odpowiednio w obu częściach próby tak, że D przedstawia absolutną wielkość różnicy między dworna (względnymi) funkcjami rozkładu. Wielkość kontrolną D porównujemy z wartością krytyczną

$$D_{\alpha;\, N_1;\, N_2} = \lambda_\alpha \sqrt{\frac{N_1 + N_2}{N_1 \cdot N_2}}.$$

Czynnik λ_α związany jest z rozkładem Kołmogorowa-Smirnowa, przy czym jest on tak określony, że $Q(\lambda) = 1 - \alpha$. Dla $\alpha = 0{,}05$ otrzymuje się $\lambda_{0,05} = 1{,}36$[13].

Przy $N_1 = N_2 = \frac{1}{2} N$ jest:

$$D_{0,05;\, N_1;\, N_2} = 1{,}36 \sqrt{\frac{4}{N}}.$$

Zasadami rozstrzygającymi są:

gdy $D > D_{0,05;\, N_1;\, N_2}$ hipotezę zerową należy odrzucić, rozkłady obu części szeregu czasowego są znacznie zróżnicowane

w przypadku $D \leqslant D_{0,05;\, N_1;\, N_2}$ hipotezy zerowej nie odrzucamy, można sądzić, iż rozkłady są jednakowe.

Zatem we wszystkich tych przypadkach, w których hipotezy zerowej nie odrzuca się, może być imputowana stacjonartność szeregu czasowego.

[12] R. Meyer, H. Vahle, *Mathematisch-statistische Methoden in der Landwirt" Schaft,* Berlin 1974, s. 78.

[13] M. Fisz, *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* s. 726.

Test zgodności χ^2 służy do sprawdzenia hipotezy, czy rozkłady dwu prób są jednakowe lub czy występuje zgodność (rozkładu próby z rozkładem założonym. Test tein nadaje się także dla rozkładów dyskretnych, a w porównaniu z testerai Kołmogorowa-iSmiirnowa posiada nieco wyższą moc, aczkolwiek wymaga trochę uciążliwszych zabiegów rachunkowych.

Szereg czasowy, jak podano, zostaje podzielony i obie jego części zawierają empiryczne rozkłady w postaci absolutnych częstości dla poszczególnych klas. Jeżeli $F_1(x)$ i $F_2(x)$ *są* sprawdzanymi rozkładami, wówczas hipoteza zerowa brzmi: oba rozkłady $F_1(x)$ i $F_2(x)$ są równe, czyli $F_1(x)=F_2(x)$.

W celu zweryfikowania hipotezy zerowej należy porównać parami częstości k klas. Oznaczymy:

h_{1i} — absolutna częstość i-tej klasy w pierwszej części szeregu czasowego,

h_{2i} — absolutna częstość i-tej klasy w drugiej części szeregu czasowego,

$Zi=hu+h_2i$ — absolutna częstość i-tej klasy ogólnego szeregu czasowego.

Wielkość sprawdzającą oblicza się według wzoru:

$$\chi^2=\frac{N^2}{N_1\cdot N_2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{h_{1i}^2}{z_i}-\frac{N_1^2}{N}\right) \tag{2}$$

i porównuje z wartością $\chi^2_{\alpha;f}$ odczytaną z tablic.

Powyższa formuła podana przez Brandta i Snedecora [14] zostaje uproszczona przy założeniu, że $N_1=N_2=\frac{1}{2}N$, wtedy bowiem:

$$\chi^2=4\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{h_{1i}^2}{z_i}-N=4\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{h_{2i}^2}{z_i}-N. \tag{3}$$

Vincze określa wielkość sprawdzającą za pomocą formuły [15]:

$$\chi^2=N_1\cdot N_2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(\frac{h_{1i}}{N_1}-\frac{h_{2i}}{N_2}\right)^2}{z_i}, \tag{4}$$

która przy $N_1=N_2=\frac{1}{2}N$ przybiera postać :

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(h_{1i}-h_{2i})^2}{z_i}. \tag{5}$$

Formuły (2) i (4) jak również (3) i (5) są identyczne, dają jednakże różnorakie korzyści metodyczne płynące z zastosowania testu χ^2 według

[14] E. Weber, *Grundriß,* s. 508.
[15] I. Vincze, *Mathematische Statistik mit industriellen Anwendungen,* Budapest 1971, s. 173 i nast.

wybranych zasad (sposób wykorzystatnia testu ma także znaczenie dla wyprowadzonej wielkości χ^2).

Wymaga się, aby liczebność żadnej z klas nie była mniejsza niż 1, a najwyżej w 20% klas może być ona mniejsza niż 5. W przeciwnym przypadku spełnienie tego warunku wymaga łączenia klas [16].

Wartość $\chi^2_{\alpha; f}$ odczytywana jest z tablic na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ i przy $f=k-1$ liczbie stopni swobody. Zasada rozstrzygająca wtedy brzmi:

jeżeli $\chi^2 > \chi^2_{0,05; k-1}$	hipotezę zerową należy odrzucić, różnica między rozikładami $F_1(x)$ i $F_2(x)$ jest znaczna
gdy $\chi^2 \leqslant \chi^2_{0,05; k-1}$	hipotezy zerowej nie odrzucamy, oba rozkłady można traktować jako jednakowe.

Dla przypadku, odnośnie do którego hipoteza zerowa nie zostaje odrzucona, można przyjąć stacjonarność szeregu czasowego. Omówione trzy sposoby postępowania testowego w zastosowaniu są względem siebie paralelne, stąd m. in. istnieje możliwość porównania, ich mocy testowej.

III. OMÓWIENIE WYNIKÓW TESTOWANIA STACJONARNOŚCI

Procedury testowania przeprowadzono na liczbowym materiale empirycznym. Poszukiwamia prowadzono na różnych poziomach, a więc przy różnych stopniach agregacji (przedsiębiorstwo, powiat, okręg, republika). Można zatem na podstawie rozważań porównawczych sformułować pewne uogólnienia. Powyższy podział wzbogacono jeszcze przez wybór rozmaitych branż.

Do badania przyjęto wystarczająco długi okres i dzięki temu utworzone szeregi czasowe zawierały dostatecznie dużą liczbę obserwacji. Stochastyczna analiza szeregu czasowego wymaga określenia jednostki czasu, za którą przyjęto tutaj miesiąc, jako najkrótszy stosowany w praktyce okres rozrachunkowy. Z tego powodu, iż dla uzyskanego szeregu czasowego można było przeprowadzić agregację (np. według kwartałów), możliwa była również analiza porównawcza z punktu widzenia dokonanej agregacji. Zbadano następujące szeregi czasowe:

— miesięczna wartość sprzedaży w handlu detalicznym według głównych grup towarowych w NRD w latach 1969 - 1973 (5 szeregów czasowych), $k=7$;

— miesięczna wartość sprzedaży obuwia i wyrobów skórzanych w przedsiębiorstwie handlowym SGB w Lipsku, dla 51 pozycji nomenklaturowych w latach 1972-1974, $k=6$;

— miesięczna wartość sprzedaży czternastu wybranych artykułów

[10] J. Pfanzagł, *Allgemeine,* s. 154*

w spółdzielczym przedsiębiorstwie handlowym GHG w Jenie w latach 1970-1972, k=6;

— miesięczna wartość sprzedaży towarów żywnościowych, przemysłowych i obroty zakładów gastronomicznych w okręgach i ośmiu powiatach okręgu Suhl w latach 1967-1970 (27 szeregów czasowych), k=6;

— czas obsługi przypadający na klienta i liczba obsłużonych klientów w ciągu 2 minut, dla badanego okresu, w hali towarowej na placu Lenina w Berlinie, Jenie-Lobedzie oraz „Bazarze" w Halle (13 szeregów czasowych), k kształtuje się między 5 a 8 stosownie do liczby klientów.

Wykorzystanie testów Kołmogorowa-Smirnowa i zgodności prezentuje przykład dotyczący obuwia i innych wyrobów ze skóry — tabela 1.

Tabela 1

Miesięczny obrót (1000 szt)	h_{1i}	h_{2i}	z_i	F_{1i}	F_{2i}	$F_{1i}-F_{2i}$
do 16	5	8	13	0,238	0,381	0,143
16 - 22	6	4	10	0,524	0,571	0,047
22 - 28	$\left.\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}5$	$\left.\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right\}5$	$\left.\begin{matrix}9\\1\end{matrix}\right\}10$	0,714	0,810	0,094
28 - 34				0,762	0,810	0,048
34 - 40	$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}5$	$\left.\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\}4$	$\left.\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right\}9$	0,857	0,952	0,095
40 i więcej				1,000	1,000	0
	21	21	42			

Test Kołmogorowa-Smirnowa.

Wielkość sprawdzającą

$$D=\max_{i=1}^{6}|F_{1i}-F_{2i}|=0{,}143,$$

należy porównać z wartością krytyczną

$$D_{0,05;\,21;\,21}=1{,}36\sqrt{\tfrac{4}{42}}=0{,}419;$$

ponieważ $D<D_{0,5;21;21}$ hipotezy zerowej nie odrzucamy, można zatem uważać, iż oba rozkłady są równe.

Test zgodności.

Wielkość sprawdzająca według formuły <3) z h_{1i}

$$\chi^2=4\left(\tfrac{25}{13}+\tfrac{36}{10}+\tfrac{25}{10}+\tfrac{25}{9}\right)-42=1{,}20$$

lub według formuły (5)

$$\chi^2=\tfrac{9}{13}+\tfrac{4}{10}+\tfrac{0}{10}+\tfrac{1}{9}=1{,}20$$

powinna zostać (porównana z wartością pochodzącą z tablic $\chi^2_{0,05;3}$=7,8 ($f=k—1=3$, gdyż klasy zostały połączone). Ponieważ $\chi^2<\chi^2_{0,05;\,3}$, to hipotezy zerowej nie odrzucamy, zatem także tutaj oba rozkłady mogą być traktowane jako jednakowe. Z punktu widzenia obu testów badany szereg czasowy jest stacjonarny. Tabela 2 ujmuje wyniki testowania.

Można zauważyć wyższy udział szeregów czasowych wykazujących stacjonarność, przy czym widoczne są różnice w zależności od zastosowanej procedury testowania i poziomu agregacji. Wobec trzech zastosowanych procedur testowania zarysowują się następujące prawidłowoś-

Tabela 2

Poziom badania	Organizacja handlowa	Liczba badanych szeregów czasowych	Liczba stacjonarnych szeregów czasowych					
			test *t* i *F*		test *t* i *F*		test *t* i *F*	
			absol.	wzgl.	absol.	wzgl.	absol.	wzgl.
NRD		5	0	0	0	0	0	0
Powiat		27	13	48,1	19	70,3	17	63,0
Przedsiębiorstwo	SGB	51	30		46		45	
	WtB	14	7		11		11	
	hale towarowe	13	8		11		11	
	razem	78	45	57,7	68	87,2	67	85,9
Ogółem		110	58	52,2	87	79,1	84	76,4

ci: instacjonarność jest również wynikiem zwiększonej agregacji przedmiotowej i terytorialnej. Prawdopodobieństwo znalezienia stacjonarności szeregu czasowego, przy małym stopniu zagregowania, jest względnie wysokie i spada wraz ze wzrostem agregacji według asortymentu oraz; obszaru. Objawia się to wyraźnie poprzez różnice występujące na poziomach: NRD, powiat, przedsiębiorstwo. Szeregi czasowe dotyczące obrotu w handlu detalicznym pięciu podstawowych grup towarowych charakteryzują się najwyższym stopniem agregacji w ujęciu przedmiotowym (asortymentowym) i terytorialnym. Porównawczo, agregacja terytorialna w zakresie: powiat i przedsiębiorstwo jest zdecydowanie mniejsza. Szeregi czasowe, odnoszące się do obrotu w handlu detalicznym w powiatach, cechują się w stosunku do obrotów przedsiębiorstw hurtowych wyższym stopniem agregacji przedmiotowej (asortymentowej), ponieważ te ostatnie są bardziej specjalistyczne. Powyżej sformułowane tendencje są dla założonego badania wyraźnie widoczne, czy jednak są one powszechne, można tylko stwierdzić na podstawie poniższych rozważań. Otóż w szeregach czasowych o wysokim stopniu agregacji systematyczny składnik „trendu" pokrywa wszystkie inne składniki, a w szczególności stochastyczny. Stąd te szeregi są instacjonarne. Natomiast w przypadku mniej zagregowanego szeregu czasowego trend jako systematyczny składnik jest zaledwie odczuwalny, stąd większy udział stacjonarnych szeregów czasowych. Odnośnie do przedsiębiorstw lub niedużego asortymentu można przeprowadzić obliczenia.

W związku z zastosowanymi postępowaniami testowymi stwierdza się, iż testy Kołmogorowa-Smirnowa i zgodności prawie we wszystkich przypadkach dają jednakowe orzeczenia (zanotowano tylko 3 rozbieżności). Można więc je traktować jako równowartościowe.

Obie powyższe procedury są w tym sensie przeciwstawne testom *t* i *F*, opierającym się na stwierdzaniu stałości w okresach 1 i 2, że te ostatnie wykazują znacznie mniej szeregów czasowych jako stacjonarne. Na ogół przyczyną tego jest większa moc testów parametrycznych w stosunku do nieparametrycznych. Jednakże należałoby przeprowadzić jeszcze dokładniejszą obserwację z punktu widzenia konsekwencji, jakie wynikają z zastosowania różnych technik. Według testu zgodności określono o 26 szeregów czasowych więcej jako stacjonarne niż przy użyciu testu stałości w okresach 1 i 2. Spośród tych 26 szeregów czasowych, 20 może występować jako instacjonarne, ponieważ test *F* wykazał znacznie zróżnicowanie wariancji, podczas gdy zgodnie z testem *t* wartości średnie niezbyt; się różniły.

W nawiązaniu do tej obserwacji pożyteczne wydaje się przytoczenie spostrzeżenia Königa i Wolterisa, rozróżniających procesy „silnie stacjonarne" i „słabo stacjonarne". Definicja procesów silnie stacjonarnych, podana przez wyżej wymienionych autorów, pokrywa się z definicją podaną przez Gnedenko, którą posługiwano się powyżej. Słabo stacjonarne procesy odróżniają się od silnie stacjonarnych tym, że odnośnie do wariancji stawia się słabsze warunki: wariancja powinna być jedynie skończona, a nie wymaga się, by była niezmienna w czasie[17]. Przy testach stałości w okresach 1 i 2 odpada test *F* dla wariancji, a na podstawie testu *t* dla wartości średnich rozstrzyga się występowanie stacjonarności lub instacjonarności. Słaba stacjonarność występuje w przypadku tych wszystkich szeregów czasowych, dla których test t nie odrzuca hipotezy zerowej, natomiast odrzuca ją test *F*. Biorąc pod uwagę tenże aspekt, ma miejsce zwiększenie liczby szeregów — obecnie określanych jako słabo stacjonarne — od 58 do 79, co stanowi 71,8% badanych szeregów. Porównując test na słabą stacjonarność z testem zgodności, występuje zbieżność orzeczeń w przypadku 98 szeregów czasowych, co stanowi 89%.

Klemm i Mikut przy okazji prowadzonych badań nad optymalnym poziomem utrzymywanych zapasów stwierdzili, że na 139 artykułów analizowane miesięczne zużycie materiałów w okresie od 3 do 5 lat (co dawało od 36 - 60 wartości w szeregu czasowym), w 102 przypadkach nie charakteryzuje się tendencją rozwojową i przeto może być traktowane jako stacjonarne. Wypadający udział 73,4% szeregów czasowych stacjonarnych odpowiada wynikom otrzymanym przez nas na skutek przepro-

[17] A. König, B. Wolters, *Einführung in die Spektralanalyse ökonomischer Zeitreihen,* Meisenheim am Glahn 1972, s. 20.

wadzonego postępowania testowego odnośnie do porównywanych szeregów.

Reasumując, można stwierdzić, że stacjonarność szeregów czasowych wyrażających procesy związane z handlem, może być imputowana wówczas, gdy:

— szeregi czasowe dotyczą okresów miesięcznych lub krótszych,

— stopień przedmiotowej i terytorialnej agregacji w szeregach czasowych nie jest zbyt wysoki.

W przypadku, odnośnie do którego powinny być zastosowane testy na stacjonarność, zaleca się następujące postępowanie:

— posiadając już pogrupowany materiał, należy zastosować test Kołmogorowa-Smirnowa lub test zgodności,

— jeżeli materiał nie jest pogrupowany, powinno się zastosować dwukrotnie test *t* dla wartości średnich, ponieważ jak to szeroko wyżej uzasadniano, technika opierająca się na obu rozkładach przynosi prawie jednakowe orzeczenia w sytuacji nie pogrupowanego materiału statystycznego.

Z języka niemieckiego tłumaczyła Iwona Roeske-Słomka

TESTING IN STATIONARITY ANALYSIS OF TIME — SERIES OF ECONOMIC PROCESSES

Summary

The aim of this paper is to present some useful techniques of stationarity analysis of time — series concerning economic processes. According to the first technique time — series is divided into two parts and then t-test and F-test are used for each of them. If a zero-hypothesis of statistically nonessential differences between compared parameters accepted, stationarity of time — series is proved. It means that mean value and variance of this stochastic process are time — independent.

... According to the second proposed technique a hypothesis of consistency of distributions in both parts of time — serie is verified by means of χ^2 — test and Kolomogorov-Smirnov-test. Testing procedures are based on the empirical data on market processes in the GDR

Tłumaczył Tadeusz Kowalski