MYŚLENIE MATEMATYCZNE

Drobne eseje przedemerytalne

Jerzy Pogonowski

MYŚLENIE MATEMATYCZNE

Drobne eseje przedemerytalne

Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM
Poznań 2020

RECENZENTKA
dr hab. Zofia Kostrzycka

Wydanie pierwsze

PROJEKT OKŁADKI
Robert Domurat

AUTOR RYSUNKU NA STRONIE 4 OKŁADKI
Jerzy Pogonowski

REDAKCJA
Jerzy Pogonowski, Michał Staniszewski

Publikacja finansowana w ramach projektu 2015/17/B/HS1/02232
Narodowego Centrum Nauki

ISBN 978-83-64902-83-3
ISBN 978-83-7589-005-1

WYDAWNICTWO NAUK SPOŁECZNYCH I HUMANISTYCZNYCH
UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
60-568 Poznań, ul. Szamarzewskiego 89c
www.wnsh.amu.edu.pl, wnsh@amu.edu.pl, tel. (61) 829 22 54

WYDAWNICTWO FUNDACJI HUMANIORA
60-682 Poznań, ul. Biegańskiego 30A
www.funhum.home.amu.edu.pl, drozd@amu.edu.pl, tel. 519 340 555

DRUK: Drukarnia Scriptor Gniezno

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy zbiór esejów opracowany został w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*. Zawiera cztery dotąd niepublikowane eseje napisane w trakcie trwania projektu:

Zasada permanencji form. Omawiam znaczenie sformułowanej w XIX wieku zasady heurystycznej znanej pod nazwą *zasada permanencji form*. Staram się pokazać, jaką rolę odegrała w rozwoju matematyki. Zastanawiam się nad jej ewentualną użytecznością we współczesnych badaniach logicznych. Dyskutuję krótko jej rolę w dydaktyce matematyki.

Odkrywanie czy tworzenie? Pytanie o to, czy matematyka jest tworzona, czy odkrywana, stale powraca w refleksji filozoficznej nad matematyką. W tym eseju zastanawiam się nad związkami tego pytania z innymi problemami ontologii oraz epistemologii matematyki. Deklaruję, które z przyjmowanych stanowisk są mi bliskie. Dodaję uwagi dotyczące miary dostępności poznawczej do obiektów matematyki.

O błądzeniu w matematyce. Omawiam niektóre sytuacje z dziejów matematyki, w których mieliśmy do czynienia z różnego typu błędami: nietrafnymi stwierdzeniami, niekompletnymi bądź błędnymi dowodami, deklarowanymi przekonaniami za słusznością hipotez, które okazały się nieprawdziwe itp. Wskazuję na korzyści, które uzyskano, diagnozując tego typu błędy. Dodaję krótki komentarz dydaktyczny.

Zagadki matematyczne w dydaktyce. Omawiam treść oraz sposób prowadzenia wykładu *Zagadki*, poświęconego matematycznym metodom rozwiązywania problemów i przeznaczonego dla słuchaczy studiów kognitywistycznych. Celem wykładu jest wykształcenie u studentów umiejętności rozwiązywania problemów metodami matematycznymi, poprzez nakłonienie ich do spontanicznej intelektualnej kreatywności, ujarzmianej jedynie zasadami matematycznej poprawności. Omawiam zagadki matematyczne, których rozwiązania ukazują złudność bezrefleksyjnych przekonań intuicyjnych, żywionych na podstawie doświadczenia potocznego lub wspieranych jedynie myśleniem życzeniowym. Często ważniejszy od samego rozwiązania zagadki jest sposób dochodzenia do niego. Istotne są zatem pomysły, metody, techniki, heurystyki itp. stosowane w rozwiązywaniu zagadek. Wspólnie ze studentami przyglądamy się, w jaki sposób myśl poczęta przez postawienie zagadki rozwija się w kierunku podania jej rozwiązania. Podaję przykłady takich problemów, z krótkimi komentarzami. Dla wybranych zagadek podaję szkic rozwiązania. Oprócz zagadek czysto matematycznych wspominam także o innych typach problemów: zagadkach logicznych, paradoksach, sofizmatach, iluzjach.

Angielska wersja eseju o zasadzie permanencji form przyjęta została do druku w *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* i ukaże się w tomie 11 tego czasopisma.

Eseje w tym tomie są rozszerzonymi wersjami odczytów wygłoszonych na kilkunastu konferencjach:

1. *Zasada permanencji form*

   (a) *Zasada permanencji form*. 65 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 5–6 listopada 2019.

   (b) *Uwagi o zasadzie permanencji form*. Seminarium Zakładu Logiki i Kognitywistyki UAM, Poznań, 30 października 2019.

2. *Odkrywanie czy tworzenie?*

   (a) *Agnostycyzm matematyczny*. VI Konferencja Filozofia Matematyki i Informatyki, Wydział Matematyki i Informatyki UAM, Poznań, 19–20 października 2018.

   (b) *On the invention-discovery dilemma*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XXII, Zakopane, 5–11 marca 2018.

   (c) *Stopnie dostępności obiektów matematycznych*. Problem granic w filozofii i nauce XVIII, Instytut Filozofii i Instytut Fizyki, Uniwersytet Śląski, Katowice, 22 listopada 2017.

   (d) *Dostęp do obiektów matematycznych*. 63 Krakowska Konferencja Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 9–10 listopada 2017.

   (e) *Cognitive accessibility of mathematical objects*. Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics, XXII, Szklarska Poręba, 8–13 maja 2017.

3. *O błądzeniu w matematyce*

   (a) *Famous mistakes in mathematics*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XX, Zakopane, 7–13 marca 2016.

(b) *O błądzeniu w matematyce*. 13 ArgDiaP „Siła argumentu: racja, przekonanie, konsensus", Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 20–21 listopada 2015.

(c) *Błędy matematyczne*. 61 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 20–21 października 2015.

(d) *O błądzeniu w matematyce*. Seminarium Zakładu Logiki i Kognitywistyki UAM, Poznań, 14 października 2015.

4. *Zagadki matematyczne w dydaktyce*

(a) *Mathematical therapy (for adults)*. Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics, XX, Szklarska Poręba, 4–8 maja 2015.

(b) *Paradox resolution as a didactic tool*. Mathematical Transgressions, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN, Kraków, 15–19 marca 2015.

(c) *Odyssey of the mathematical mind*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XIX, Zakopane, 9–15 marca 2015.

(d) *Matematyka i Humanistki*. IV Konferencja z Filozofii Matematyki i Informatyki, UAM, Poznań, 5–6 grudnia 2014.

(e) *Urok zagadek matematycznych*. Spotkanie Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Młodzieżowego Towarzystwa Przyjaciół Nauk i Sztuk w Centrum Młodzieży w Krakowie im. dr. Henryka Jordana, Kraków, 24 października 2013.

(f) *Zagadki matematyczne*. 59 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 22–23 października 2013 roku.

(g) *Enigmatologia zamiast katechezy*. Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, Poznań, 16 października 2013.

(h) *Wesołe zagadki*. Spotkanie Grupy Logiki, Języka i Informacji, Uniwersytet Opolski, Opole, 14 maja 2013.

Projekt badawczy *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne* dotyczył pojęcia *modelu zamierzonego* teorii matematycznej oraz aksjomatów ekstremalnych formułowanych w celu jednoznacznej charakterystyki takich modeli. Przykładami aksjomatów tego typu są m.in.: aksjomat zupełności w *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta, aksjomat ciągłości w algebrze i analizie, aksjomat indukcji w arytmetyce, aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości (aksjomat ograniczenia Fraenkla, aksjomat konstruowalności Gödla, aksjomat kanoniczności Suszki) oraz aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych. Problematyce tej poświęciłem monografię *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects* (Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań 2019).

Niniejsze eseje nawiązują do trzeciego aspektu wymienionego w projekcie. Staram się przedstawić myślenie matematyczne zarówno w odniesieniu do twórczości profesjonalnych matematyków (pierwsze trzy eseje), jak też w odniesieniu do kształtowania takiego myślenia uczniów i studentów (czwarty esej).

W trakcie trwania projektu powstały inne jeszcze eseje, poświęcone m.in.: intuicji matematycznej, stopniom dostępności do obiektów matematycznych, krytycznym uwagom dotyczącym koncepcji matematyki ucieleśnionej, obiektom patologicznym w matematyce.

Eseje adresowane są przede wszystkim do przedstawicieli nauk kognitywnych, interesujących się poznaniem matematycznym. Dla samych matematyków poruszana problematyka jest z pewnością dobrze znana i trudno powiedzieć, czy ich zaciekawi. Starałem się unikać ogólnikowego filozofowania, skupiając się na przedstawieniu konkretnych sytuacji, w których można mówić o specyfice myślenia matematycznego.

Projekt 2015/17/B/HS1/02232 realizowany był w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM (Wydział Psychologii i Kognitywistyki UAM). Jestem bardzo wdzięczny Koleżankom i Kolegom z tego znakomitego zespołu za życzliwe przyjęcie do swojego grona leciwego już wszak człeka. Kompetentnej oraz bezinteresownej pomocy w składzie w systemie LaTeX zarówno tego tomu, jak i wspomnianej wyżej książki *Extremal axioms* udzielał wielokrotnie Pan prof. Paweł Łupkowski, za co jestem mu wielce wdzięczny. Pani mgr Arlecie Borowiak z Centrum Wsparcia Projektów UAM uprzejmie dziękuję za bezcenne profesjonalne wskazówki dotyczące zarządzania projektem. Pani prof. Zofii Kostrzyckiej dziękuję za istotne uwagi przekazane w recenzji wydawniczej, a Panu redaktorowi Michałowi Staniszewskiemu za współpracę przy redakcji tego tomu.

Rozdział 1

Zasada permanencji form

Wiele cech typowych dla matematyki współczesnej zaobserwować można już w badaniach matematycznych prowadzonych w wieku XIX. Okres ten stał się dla matematyki przełomowy z różnych powodów, a do przejawów tego przełomu zaliczyć można m.in.: rozwój algebry symbolicznej (odejście od rozumienia algebry jako metod rozwiązywania równań i początek traktowania jej jako dyscypliny zajmującej się strukturami), powstanie geometrii nieeuklidesowych, propozycje bazowania rozważań w analizie matematycznej na strukturach arytmetycznych (z porzuceniem intuicji odwołujących się do geometrii lub kinematyki), charakterystyki najważniejszych systemów liczbowych (prace Dedekinda, Peana, Grassmanna, Webera, Cantora i in.) itd. Poniżej skupimy się tylko na jednym z wątków, dotyczącym rozwoju symbolicznego uprawiania algebry.

Warto może zauważyć, że do początku XIX wieku matematycy w dalszym ciągu wyrażali zastrzeżenia co do przyznania liczbom ujemnym (oraz urojonym) pełnego obywatelstwa w matematyce. Gdy napotykano je w obliczeniach, to uzyskiwały status jedynie środków, a nie pełnowartościowych obiektów matematycznych. Uważano czasem, że jeśli w wyniku obliczeń uzyskuje się takie liczby, to sam badany problem został źle postawiony. Argumenty przeciw uznaniu liczb ujemnych wysuwali w XVII wieku np. Francis Maseres i William Frend. Odmienne argumenty znaleźć można np. w pracach Johna Playfaira, Williama Greenfielda, Roberta Woodhouse'a, Adriena-Quentina Buée.

Wśród pierwszych autorów, którzy przyczynili się do rozumienia wyrażeń algebraicznych jako niekoniecznie odnoszących się wyłącznie do konkretnych liczb wymienia się Roberta Woodhouse'a oraz Charlesa Babbage'a oraz ich prace: Woodhouse 1803 i Babbage 1821. Jest oczywiście niezwykle trudno uwzględnić w krótkim przedstawieniu wszystkich autorów, którzy zasłużyli się w tym względzie, ale niniejszy tekst poświęcony jest głównie zasadzie permanencji form, a nie przeglądowi wszystkich dokonań w początkach algebry symbolicznej.

1.1. Zasada permanencji form: Peacock i Hankel

George Peacock (1791–1858) jest autorem rozprawy *A treatise on algebra*, po raz pierwszy wydanej w 1830 roku, której drugie wydanie ukazało się w 1845 roku. W 1833 roku przedstawił on środowisku matematycznemu w Cambridge pracę *Report on recent progress and present state of certain branches of analysis* (Peacock 1834). Opracowania te uważane są za jedne z pierwszych, które postulują nadanie algebrze statusu nauki symbolicznej. Algebra miałaby być nauką, która traktuje o kombinacjach dowolnych znaków, rządzonych przez zdefiniowane, choć dowolne, prawa. Ponadto, algebra miałaby być nauką dedukcyjną, tak jak znana dotąd geometria.

Peacock odróżniał algebrę arytmetyczną i algebrę symboliczną. Ta pierwsza opierała się na prawdach dotyczących liczb (naturalnych), a ta druga zawierać miałaby użyteczne poznawczo założenia i konwencje. Algebra arytmetyczna to, wedle Peacocka, *a suggesting science* dla algebry symbolicznej (taką „sugerującą" rolę mogły też pełnić inne dyscypliny, np. mechanika). Algebra arytmetyczna zaczyna od definicji, które określają znaczenie operacji algebraicznych, natomiast algebra symboliczna zaczyna od warunków lub praw, dotyczących kombinacji znaków. Peacock charakteryzował związki między obiema dyscyplinami m.in. tak:

> In arithmetical algebra, the definitions of the operations determine the rules; in symbolical algebra, the rules determine the meanings of the operations, or more properly speaking, they furnish the means of interpreting them.... We call those rules ... *assumptions*, in as much as they are not deducible as conclusions from any previous knowledge of those operations which have corresponding names: and we might call them *arbitrary* assumptions, in as much they are *arbitrarily* imposed upon a science of symbols and their combinations, which might be adapted to any other assumed system of consistent rules. (Peacock 1834, 200–201; cyt. za: Detlefsen 2005, 276)

Peacock sformułował (już w 1830 roku) zasadę, którą nazywał Principle of Permanence of Equivalent Forms. W rozprawie z 1845 roku zasada ta przyjmuje następujące sformułowanie:

> Whatever algebraic forms are equivalent when the symbols are general in form, but specific in value, will be equivalent likewise when the symbols are general in value as well as in form. (Peacock 1845, 59)

Powyższą zasadę Peacock nazywał również Law of the Permanence of Algebraic Forms. Tłumaczymy zasadę Peacocka jako „zasadę permanencji form"', choć zamiast „permanencji" można byłoby chyba używać terminów takich jak „stałość" lub „stabilność".

Przykładami praw arytmetycznych, które miałaby zachowywać zasada permanencji form (w jej pierwotnej postaci) są:

przemienność	$a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
łączność	$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
rozdzielność	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
potęgowanie	$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

Jak wiadomo, wymienione wyżej prawa zachowują swoją ważność dla liczb rzeczywistych oraz zespolonych.

Rozwój symbolizmu algebraicznego widoczny jest w pracach takich matematyków, jak: George Boole, Augustus De Morgan, Duncan Gregory, William Hamilton, Arthur Cayley, John Graves, Hermann Grassmann, William Clifford, Benjamin Pierce, Ernst Schröder. Propozycje Peacocka były im znane, ale każdy z nich swoimi wynikami wzbogacił algebrę symboliczną o nowe treści. Nie jest moim zamierzeniem omawianie tych wyników, istnieje na ten temat obszerna literatura.

Zasadę permanencji form sformułował także nieco później Hermann Hankel (das Princip der Permanenz der formalen Gesetze):

> Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen. (Hankel 1867, 11)

Trzeba podkreślić, że Hankel formułował wspomnianą zasadę w sytuacji, gdy algebra symboliczna różniła się już od tej swojej postaci, do której odwoływał się Peacock. Sam Hankel pisze w cytowanej pracy, iż zasadę Peacocka zna z raportu Peacock 1934, przyznaje natomiast, że nie zna ani Peacocka *A treatise on algebra*, ani rozprawy Augustusa De Morgana *On the foundations of algebra* (De Morgan 1842), zna jednak krótką pracę Duncana Gregory'ego *On the real nature of symbolical algebra* (Gregory 1840). Krytycznie wypowiada się o uwagach Augustina Cauchy'ego dotyczących liczb zespolonych, natomiast z uznaniem pisze o *Die lineale Ausdehnungslehre* Hermanna Grassmanna (Grassmann 1844) oraz o tegoż *Lehrbuch der Arithmetik für hohöre Lehranstalten* (Grassmann 1861). Zauważa również prace Williama Hamiltona, dotyczące liczb zespolonych oraz kwaternionów.

Po krótkim omówieniu własności kilku operacji arytmetycznych na liczbach całkowitych (jako ciekawostkę dodajmy tutaj, że Hankel rozważa także operację iterowanego potęgowania: a^a, $a^{(a^a)}$, $a^{(a^{(a^a)})}$ itd.) Hankel podaje definicję pojęcia liczby:

> Die Zahl ist der begriffliche Ausdruck der gegenseitigen Beziehung zweier Objekte, soweit dieselbe quantitativen Messungen zugänglich ist. (Hankel 1867, 6)

Nieco dalej w tekście Hankel stanowczo stwierdza, że po podaniu geometrycznej interpretacji liczb o postaci $a + b\sqrt{-1}$ oraz działań arytmetycznych na takich liczbach nie można już mówić, że są one niemożliwe: mają one taką samą realność, jak liczby całkowite dodatnie i ujemne.

Hankel uważa zasadę permanencji form za przewodnią zasadę w swojej ekspozycji:

> Es hat die Formenlehre nicht allein den engen Zweck, die gewöhnliche arithmetica universalis mit ihren ganzen, gebrochenen, irrationalen, negativen und imäginaren Grössen zu erläutern und streng zu deduciren, sondern sie erweist sich mit ihrem Principe der Permanenz zugleich als eminent fruchtbar für den ganzen Organismus der Mathematik. (Hankel 1867, 12)

W uzupełnieniu do tej deklaracji Hankel pisze, iż prezentowana przez niego *Formenlehre* odniesiona może być również do obiektów przestrzennych (takich jak: punkty, odcinki, powierzchnie, bryły) oraz do zagadnień mechanicznych (siły, momenty).

Ważnym wynikiem, który ustalił Hankel, było to, że ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest jedynym ciałem przemiennym, otrzymanym przez dołączenie pierwiastków wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{C}$. Uogólnienia wykraczające poza $\mathbb{C}$ muszą zatem skutkować naruszeniem zasady permanencji (np. prawa przemienności lub łączności mnożenia). W tym sensie wynik Hankela jest twierdzeniem o swoistej zupełności $\mathbb{C}$. Ciało liczb zespolonych jest strukturą maksymalną (wśród liczb wielowymiarowych) w tym rozumieniu, że zachowuje największą liczbę standardowych praw o liczbach. $\mathbb{C}$ jest maksymalne ze względu na żądania wyrażone przez aksjomat rozwiązywalności Hilberta (zobacz niżej) oraz maksymalne jako dozwolone przez zasadę permanencji.

Jak się wydaje, zasada permanencji form miałaby gwarantować m.in., iż rozwój matematyki symbolicznej (ograniczony jedynie wymogiem niesprzeczności) byłby chroniony przed potencjalną bezsensownością, przed wprowadzaniem obiektów matematycznych o „dziwacznych" własnościach, które odbiegałyby zbyt daleko od standardowych (normalnych, naturalnych) własności.

Zasada permanencji form była również krytykowana, zarówno przez matematyków, jak i filozofów. Giuseppe Peano pisał krytycznie o dziele Hermanna

Schuberta *Grundlagen der Arithmetik*, w którym zasadę permanencji form postulowano tak, iż w rezultacie o „nowych" liczbach miałyby być prawdziwe dokładnie te same twierdzenia, które prawdziwe były o „starych" liczbach. Zdaniem Peana natomiast, mamy zachowywać prawa nie całkowicie, ale tak daleko, jak to możliwe.

William Hamilton pisał o $\sqrt{-1}$ jako obiekcie absurdalnym w kontekście pojedynczych liczb, zaś sensownym w kontekście par liczb (czyli liczb dwuwymiarowych) – przypomnijmy, że podał on algebraiczną interpretację liczb zespolonych właśnie jako par liczb rzeczywistych, ze stosownie określonymi działaniami. Hamilton przedstawiał też pewne idee dotyczące powiązania liczb z intuicją czasu. Jak pisze Helena Pycior (1981), Hamilton nie był skłonny zaakceptować propozycji algebry symbolicznej Peacocka jako nauki o właściwie dowolnych znakach i prawach. Dla Hamiltona (a także wielu współczesnych mu matematyków), algebra miałaby być nauką o symbolach wyposażonych w znaczenie, a jej prawa miałyby być ugruntowane w intuicji.

W pracy Iuliana Toadera (2019), porównującej propozycje teoretyczne Ernsta Macha i Edmunda Husserla, mówi się o zasadzie permanencji form jako o zasadzie teoretycznej racjonalności (niezbędnej dla rozwoju autentycznej teorii), zasadzie praktycznej racjonalności (oszczędności w pracy umysłowej) oraz (metafizycznej) zasadzie związanej z intuicją matematyczną, a także zasadzie semantycznej, ustalającej związek między formalną teorią a jej nieformalną interpretacją. Autor odnosi swoje rozważania również do obecnej sytuacji w mechanice kwantowej, w związku z wykorzystywanym w niej aparacie matematycznym.

W pracy Zvonimira Šikića (1984) pokazuje się, że definicja potęgowania w ciele liczb zespolonych ($e^{i\alpha} = cos\alpha + i\sin\alpha$) jest niejako wymuszona poprzez zasadę permanencji form, jeśli bierzemy pod uwagę zarówno wspomniane wyżej (po sformułowaniu tej zasady) prawa arytmetyczne, jak też prawa dotyczące różniczkowania.

Meir Buzaglo (2002) bada logiczne aspekty procesu rozszerzania pojęć. Rozważa liczne przykłady z historii matematyki, ukazujące m.in. zmianę rozumienia pojęcia liczby, rozszerzanie znaczeń operacji arytmetycznych, rolę paradoksów w teorii mnogości. O roli zasady permanencji form pisze m.in.:

> During the nineteenth century, when rigor gradually resumed a place of importance in mathematics, there was a systematic attempt to conceptualize the idea of expansions, as presented in Peacock's "principle of permanence of equivalent forms." This attempt transferred the issue from the products of the expansion to the *process* of expansion itself. Peacock claimed that the symbolic algebra obtained from the expansion of arithmetic is logically independent of arithmetic, yet suggested by it. How

> an expansion of a realm can be "suggested" by the existing realm has not, however, been analyzed properly. Apparently this lack is due to the fact that discussions in logic are generally centered on deduction, which involves closed realms, thus marginalizing the issue of the expansion of concepts. But the most cursory survey shows that there is an abundance of logical, mathematical, and philosophical material that is continually raising the idea of expansions as logical and philosophical issue which naturally invites a more comprehensive discussion. (Buzaglo 2002, 3)

1.2. Hilbert: aksjomat rozwiązywalności

Zasada permanencji form była aprobowana w drugiej połowie XIX wieku przez wielu wybitnych matematyków. Jeśli chodzi o rozszerzanie znaczenia pojęcia liczby (tworzenie nowych uniwersów liczbowych), to odbywało się ono zarówno metodą genetyczną, jak i metodą aksjomatyczną, przy czym ta druga możliwość w sposób wyraźny była wykorzystywana później niż pierwsza. Liczby naturalne scharakteryzowane zostały w pracach Hermanna Grassmanna, Richarda Dedekinda, Giuseppe Peana (Grassmann 1861, Dedekind 1888, Peano 1889). Konstrukcje liczb rzeczywistych podało wielu matematyków w omawianym okresie, najbardziej znane były propozycje Georga Cantora i Richarda Dedekinda (Cantor 1872, Dedekind 1872), aksjomatyczny opis liczb rzeczywistych podał David Hilbert (Hilbert 1900). O niektórych typach liczb hiperzespolonych wprowadzonych w XIX wieku napiszę jeszcze krótko poniżej.

Michael Detlefsen w swoim artykule *Formalism* (2005), omawiając zasadę permanencji form, wspomina również o aksjomacie rozwiązywalności Davida Hilberta, sformułowanym na początku XX wieku (Hilbert 1901) i wyrażającym optymizm poznawczy Hilberta, często krótko oddawany jako opinia, iż w matematyce nie ma *ignorabimus*. Deklaracja Davida Hilberta (nazywana aksjomatem rozwiązywalności), iż każdy problem matematyczny może zostać, po precyzyjnym sformułowaniu, rozwiązany (lub podany może być dowód, iż rozwiązanie przy danych założeniach nie istnieje), była odpowiedzią na pesymistyczne wypowiedzi dotyczące ograniczeń ludzkiej wiedzy formułowane ówcześnie (tzw. *Ignorabimusstreit*) przez Emila i Paula Du Bois-Reymonda oraz Rudolpha Virchowa. Dla przykładu, Paul Du Bois-Reymond argumentował, iż istnieją obiektywne ograniczenia naszej wiedzy o kontinuum. Detlefsen przywołuje również wcześniejsze wypowiedzi kilku znanych matematyków, wyrażające optymizm poznawczy (np.: François Viète, Kartezjusz, John Wallis). Hilbert podzielał ten optymizm, m.in. w swoich wypowiedziach krytycznych dotyczących poglądów Leopolda Kroneckera i Luitzena Brouwera.

Udowodnione w wieku XX twierdzenia limitacyjne ukazały pewne ograniczenia w tym zakresie, wskazując na fenomen niezupełności (oraz nierozstrzygalności) nieodłącznie związany z bogatszymi teoriami matematycznymi.

Detlefsen tak oto pisze o współdziałaniu aksjomatu rozwiązywalności oraz zasady permanencji form:

> Together, the Axiom of Solvability and the Principle of Permanence guided the progressive extension of the number-concept. The Axiom of Solvability expressed the mathematician's goal to solve problems. The Principle of Permanence acted as a constraint upon the applicability of this axiom. It required that newly introduced numbers preserve the basic laws of arithmetic. More precisely, it required that the laws governing new numbers be *consistent with* the laws governing the old ones. (Detlefsen 2005, 279)

David Hilbert w słynnej pracy *Über das Unendliche* (1926) pisze o metodzie elementów idealnych w matematyce. Wprowadzanie takich elementów jest jedną z podstawowych czynności badawczych, a ich rola okazuje się być niezastąpiona. I tak, wprowadzenie punktów w nieskończoności w geometrii pozwala na uzyskanie pewnych symetrii między punktami i prostymi (każde dwie proste przecinają się w jakimś punkcie, każde dwa punkty wyznaczają jedną prostą). W algebrze wprowadzenie liczb zespolonych pozwala na uproszczenie twierdzeń o istnieniu oraz liczbie pierwiastków równań. Liczby idealne Ernsta Kummera pozwalają na utrzymanie jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze. Także ideały Dedekinda pełnią podobną rolę. Wszystkie te przypadki są powiązane z aksjomatem rozwiązywalności Hilberta.

David Hilbert sformułował również *das schöpferische Princip*, zasadę głoszącą wolność w tworzeniu pojęć i metod wnioskowania. Metody symboliczne w matematyce mają być: niesprzeczne i owocne. Znane *dictum* Hilberta, iż na początku był znak, zwięźle wyraża jego formalistyczne podejście do matematyki. W tym podejściu podstawowa rola przypada metodzie aksjomatycznej. Warto zwrócić uwagę, że w swej pracy Hilbert (1900), podającej aksjomatykę dla liczb rzeczywistych, używa raczej zwrotu *denken* (myślimy) niż *anschauen* (w znaczeniu: przedstawiamy sobie, wyobrażamy, rozważamy intuicyjnie). Wreszcie, Hilbert podkreśla także, że ważną własnością (niektórych) systemów aksjomatycznych jest jakiś rodzaj ich zupełności, oddający to, iż system określa badane obiekty w sposób (w ustalonym sensie) jednoznaczny. Owa jednoznaczność może być kategorycznością (istnienie jednego tylko modelu, z dokładnością do izomorfizmu), zupełnością semantyczną (polegającą na tym, iż wszystkie modele teorii są elementarnie równoważne), może też przybierać postać zupełności hilbertiańskiej, czyli własności modelu polegającej na tym, iż jest on (w ustalonym sensie) maksymalny lub minimalny.

Tę ostatnią rolę miał pełnić np. aksjomat zupełności w pierwszym wydaniu *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899). W późniejszych wydaniach ten aksjomat zastąpiony został przez aksjomat zupełności liniowej, a np. aksjomatyka podana w monografii Borsuk i Szmielew 1975 uwzględnia już aksjomat zupełności dla liczb rzeczywistych. Jak pamiętamy, ciało liczb rzeczywistych jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) ciałem uporządkowanym w sposób zupełny. Jest też maksymalnym ciałem archimedesowym.

1.3. Dygresja: liczby hiperzespolone

„Oswajanie" liczb ujemnych oraz zespolonych trwało stosunkowo długo. Inaczej rzecz się miała w przypadku wielu rodzajów liczb hiperzespolonych, wprowadzonych w wieku XIX. Dla ilustracji, podam trochę wybranych informacji o tego rodzaju strukturach. Przypomnę, w największym skrócie, kilka faktów związanych z „oswajaniem" liczb zespolonych.

Rozważania algebraiczne dotyczące rozwiązywania równań prowadzono w Europie już od XII wieku, w wieku XIV wiedziano, iż ogólne równanie trzeciego stopnia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ można sprowadzić do równania $x^3 + px + q = 0$. Scipione del Ferro, Antonio Maria Fiore, Niccoló Fontana (Tartaglia) i Gerolamo Cardano pracowali nad ogólnym rozwiązaniem równań trzeciego stopnia – ten ostatni opublikował je w *Ars Magna* w 1545 roku. Rafael Bombelli w drugiej połowie XVI wieku wprowadził znak dla $\sqrt{-1}$.

Kartezjusz wprowadził termin *liczby urojone* i wiązał je z niemożliwościami geometrycznymi. Geometryczną reprezentację liczb dodatnich i ujemnych proponował John Wallis, próbując również podać taką reprezentację dla $\sqrt{-1}$. Oznaczenie $i = \sqrt{-1}$ wprowadził Leonhard Euler. Wykorzystywał wzór $x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, a także przedstawiał graficznie pierwiastki równania $z^n = 1$ jako wierzchołki wielokąta foremnego.

W 1797 roku interpretację liczb zespolonych jako wielkości skierowanych podał Caspar Wessel – jest ona zbliżona do dzisiejszego rachunku na wektorach. Geometryczną reprezentację liczb zespolonych zaproponował również Jean-Robert Argand w 1806 roku. Z kolei algebraiczną charakterystykę liczb zespolonych (jako par liczb rzeczywistych, na których określone były działania arytmetyczne) podał w 1831 roku William Hamilton. Uważa się, że Karl Friedrich Gauss również dysponował geometryczną reprezentacją liczb zespolonych już w 1797 roku, chociaż opublikował pracę na ten temat dopiero w 1831 roku. To właśnie Gauss wprowadził termin *liczby zespolone*, dodając w komentarzu, jak niefortunne było używanie terminu *liczby urojone*. Przypomnijmy, że Gauss udowodnił Podstawowe Twierdzenie Algebry w 1799 roku;

był to jeden z najważniejszych momentów w historii „oswajania” liczb zespolonych. W początkach XIX wieku prowadzono intensywne badania nad funkcjami zmiennej zespolonej. Pojawiają się wtedy całki krzywoliniowe (Poisson, Cauchy).

Zasada Lefschetza głosi, że dowolne zdanie w języku pierwszego rzędu teorii ciał, które jest prawdziwe w dziedzinie liczb zespolonych, jest prawdziwe w każdym ciele algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. Ciało liczb zespolonych jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) jako ciało algebraicznie domknięte charakterystyki zero, którego stopień przestępności (tj. największa moc zbioru algebraicznie niezależnego) nad ciałem liczb wymiernych jest równy kontinuum. Do „oswojenia” liczb zespolonych w znacznej mierze przyczyniły się ich liczne zastosowania w fizyce. Wiele zjawisk fizycznych znajduje precyzyjny opis dopiero przy użyciu liczb zespolonych.

Najbardziej znane wśród liczb hiperzespolonych są kwaterniony, wprowadzone w 1843 roku przez Hamiltona (1853). Przykłady liczb hiperzespolonych to:

Kwaterniony. Liczby zespolone $\mathbb{C}$ reprezentował Hamilton jako pary liczb rzeczywistych, dla których dodawanie i mnożenie określone były warunkami (po prawych stronach równości występuje dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych):

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+b, c+d) \qquad (a,b) \otimes (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Używa się również zapisu (a, b) w postaci $a + bi$, gdzie a oraz b są liczbami rzeczywistymi, zaś i jednostką urojoną, dla której $i^2 = -1$. Hamilton zamierzał także określić działania arytmetyczne dla dowolnych n-tek liczb rzeczywistych. W przypadku $n = 3$ nie można określić mnożenia w taki sposób, aby definiowana przez nie norma była multiplikatywna. Dla $n = 4$ Hamilton uzyskał algebrę kwaternionów $\mathbb{H}$, reprezentowanych przez czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d), zwykle zapisywane (w konwencji przyjętej dla przestrzeni wektorowych) jako $a + bi + cj + dk$, gdzie i, j, k są jednostkami urojonymi (czyli 1, i, j, k są wektorami bazy przestrzeni). Jeśli kwaterniony rozumiemy jako czterowymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych, to określone są: ich dodawanie, mnożenie przez skalar oraz mnożenie. Pierwsze dwie z tych operacji definiujemy tak, jak zwykle robi się to w wielowymiarowych przestrzeniach wektorowych. Mnożenie kwaternionów jest natomiast w pełni określone, gdy podamy tabliczkę mnożenia dla wektorów bazy przestrzeni $\mathbb{H}$. Mnożenie jest jednoznacznie wyznaczone przez równania:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Oczywiście można też określić mnożenie stosowną tabelką:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Myślimy o kwaternionach także jako o czterowymiarowej unormowanej algebrze z dzieleniem nad liczbami rzeczywistymi. Jak widać, mnożenie kwaternionów nie jest przemienne. Kwaterniony mają reprezentację macierzową. Znajdują liczne zastosowania, np. w opisie obrotów w przestrzeni trójwymiarowej.

Liczby dualne. To pary liczb rzeczywistych, dla których dodawanie i mnożenie zdefiniowano następująco:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d) \qquad (a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + bc).$$

Elementem neutralnym mnożenia jest $(1, 0)$. Ponadto, $(0, 1) \otimes (0, 1) = (0, 0)$. Liczby te tworzą pierścień przemienny, w którym występują dzielniki zera. Mają reprezentację macierzową.

Liczby podwójne. To pary liczb rzeczywistych, dla których dodawanie oraz mnożenie zdefiniowano następująco:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d) \qquad (a, b) \otimes (c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Elementem neutralnym mnożenia jest $(1, 0)$. Ponadto, $(0, 1) \otimes (0, 1) = (1, 0)$. Liczby te tworzą pierścień przemienny, w którym występują dzielniki zera. Mają reprezentację macierzową.

Oktoniony. Powszechnie używa się oznaczenia $\mathbb{O}$ dla oktonionów. Tworzą one (ośmiowymiarową) unormowaną algebrę z dzieleniem nad zbiorem liczb rzeczywistych. Elementy zbioru $\mathbb{O}$ można zatem przedstawiać jako ósemki uporządkowane (oktawy, oktety) liczb rzeczywistych. Mnożenie oktonionów nie jest ani przemienne, ani łączne. Ze względu na brak łączności mnożenia oktoniony – w odróżnieniu od kwaternionów – nie mają reprezentacji macierzowej. Oktoniony zostały wprowadzone niezależnie przez Johna Gravesa w 1844 roku oraz Arthura Cayleya w 1845 roku. Podobnie jak kwaterniony, oktoniony były popularne pod koniec XIX wieku, a później przez długi czas były traktowane jedynie jako ciekawostka matematyczna. Dopiero stosunkowo niedawno wskazano na ich istotną rolę, np. w teorii grup Lie oraz w topologii. Odkrywane są coraz to nowe zastosowania oktonionów, także w naukach empirycznych.

Sedeniony. Można je reprezentować jako szesnastki liczb rzeczywistych, dla których stosownie określamy dodawanie i mnożenie. Operacja mnożenia sedenionów $\otimes$ nie jest przemienna, nie jest łączna, nie spełnia też warunku alternatywności, czyli warunku:

$$x \otimes (x \otimes y) = (x \otimes x) \otimes y \quad (y \otimes x) \otimes x = y \otimes (x \otimes x).$$

Sedeniony mają jednak własność łączności potęgowej, którą ma dana algebra wtedy, gdy dowolna jej podalgebra generowana przez jeden element jest łączna. Konsekwencją tego warunku jest to, że gdy dany element jest wielokrotnie mnożony przez siebie, to kolejność wykonywania tych mnożeń nie jest istotna (zachodzi zatem $x^{m+n} = x^m \otimes x^n$). W algebrze $\mathbb{S}$ sedenionów występują dzielniki zera.

Konstrukcja Cayleya-Dicksona. To ogólna konstrukcja, która daje nieskończony ciąg algebr nad ciałem liczb rzeczywistych, z których każda ma wymiar dwukrotnie większy od poprzedniej. Pięć pierwszych elementów tego ciągu to: liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$, liczby zespolone $\mathbb{C}$, kwaterniony $\mathbb{H}$, oktoniony $\mathbb{O}$, sedeniony $\mathbb{S}$. W tej konstrukcji liczby zespolone to pary liczb rzeczywistych, kwaterniony to pary liczb zespolonych itd.

Algebry Clifforda. Są to algebry izomorficzne z pierścieniem macierzy nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ lub sumy proste takich algebr. Ta jednolita konstrukcja uwzględnia jako przypadki szczególne wiele typów liczb hiperzespolonych.

To tylko niektóre z bardzo wielu liczb hiperzespolonych, badanych w matematyce od XIX wieku. Dodajmy też, że w niniejszym omówieniu nie odnosimy się do innych ważnych wątków w rozwoju algebry, np. do propozycji Gaussa, rozwijanych później także przez innych wybitnych matematyków (zob. np. Kolmogorov i Yushkevich 2001).

Warto wspomnieć, że udowodniono szereg twierdzeń charakteryzujących (z dokładnością do izomorfizmu) wybrane struktury algebraiczne. Przykładami takich twierdzeń są:

Twierdzenie Frobeniusa. Każda łączna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych jest izomorficzna albo z ciałem liczb rzeczywistych, albo z ciałem liczb zespolonych, albo z algebrą kwaternionów. Istnieje też uogólnienie tego twierdzenia (podane przez Hurwitza), dodające w tezie oktoniony.

Twierdzenie Ostrowskiego. Każde ciało zupełne w metryce odpowiadającej normie archimedesowej jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną.

Twierdzenie Pontriagina. Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub ciałem topologicznym kwaternionów.

1,2,4,8–twierdzenie (Bott, Milnor, Kervaire). Każda algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych ma wymiar 1, 2, 4 lub 8.

Twierdzenie Hopfa. Każda przemienna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych ma wymiar $\leqslant 2$.

Twierdzenia o izomorfizmie ukazują wyróżnioną rolę czterech ciał liczbowych: liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, liczb zespolonych $\mathbb{C}$, kwaternionów $\mathbb{H}$ oraz oktonionów $\mathbb{O}$. Przechodząc od liczb rzeczywistych do zespolonych, tracimy liniowe uporządkowanie (nie można liniowo uporządkować $\mathbb{C}$ w sposób zgodny z działaniami arytmetycznymi). Przejście do kwaternionów skutkuje utratą przemienności mnożenia. Przejście do oktonionów powoduje, że tracimy też łączność mnożenia. Kolejna algebra o 2^n elementach, czyli sedeniony (algebra szesnastowymiarowa) nie ma już własności alternatywności, co więcej, zarówno sedeniony, jak i wszystkie struktury o 2^n elementów ($n \geqslant 4$) mają już dzielniki zera, a więc są strukturami bardzo daleko odbiegającymi od „w miarę normalnych" struktur, w których dysponujemy wszystkimi podstawowymi działaniami arytmetycznymi o „naturalnych" własnościach. Oczywiście takie określenia, jak „normalny" i „naturalny" nie odnoszą się do jakichś obiektywnych własności struktur matematycznych, lecz nawiązują zarówno do tradycji, jak i do czynników psychologicznych. Porównanie własności kilku pierwszych elementów ciągu algebr otrzymywanych w konstrukcji Cayleya-Dicksona podaje poniższe zestawienie (źródło: Cayley-Dickson construction, Wikipedia):

struktura	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{S}$	...
wymiar	1	2	4	8	16	> 16
porządek	tak	nie	nie	nie	nie	nie
przemienność mnożenia	tak	tak	nie	nie	nie	nie
łączność mnożenia	tak	tak	tak	nie	nie	nie
alternatywność	tak	tak	tak	tak	nie	nie
łączność potęgowania	tak	tak	tak	tak	tak	tak
dzielniki zera	nie	nie	nie	nie	tak	tak

We współczesnej algebraicznej teorii liczb rozważa się wielkie mnóstwo struktur, które wyposażone są w operacje arytmetyczne. W czasie dwustu lat, które upłynęły od publikacji (w 1801) słynnej monografii Gaussa *Disquisitiones arithmeticae* (zob. angielski przekład Gauss 1966) dyscyplina ta stała się jednym z najważniejszych obszarów badań matematycznych. Można zastanawiać się, czy współcześnie zasada permanencji form w algebrze spełnia taką samą rolę, jaką pełniła w jej początkach.

Dodajmy, że intensywnie badane są także inne jeszcze rozszerzenia pojęcia liczby, które nie podpadają pod schemat tworzenia liczb hiperzespolonych. Należą do nich np. liczby p-adyczne oraz liczby hiperrzeczywiste. Obie te struktury odgrywają coraz większą rolę np. w analizie matematycznej.

1.4. Zasada permanencji form w logice współczesnej

Czy zasada permanencji form może mieć swój odpowiednik w logice? To pytanie może odnosić się do kwestii, w jakim sensie nowe systemy logiczne zachowują prawa obowiązujące w innych, wcześniej już „oswojonych" takich systemach. Brane pod uwagę mogą być również pewne metalogiczne własności systemów logicznych. Nowe systemy logiczne wprowadzane były z różnych powodów: inspiracje dla ich tworzenia pochodziły z rozważań filozoficznych, lingwistycznych, a także *stricte* matematycznych oraz pochodzących z nauk empirycznych. W większości przypadków punktem odniesienia był klasyczny rachunek zdań oraz klasyczna logika pierwszego rzędu, jako systemy wzorcowe, dobrze zbadane i charakteryzujące się szeregiem „dobrych" własności dedukcyjnych. Sądzimy, że pewne analogie z zasadą permanencji form znaleźć można m.in. w następujących sytuacjach w logice:

Finitarność języka. To, że języki systemów logicznych wykorzystują wyrażenia będące obiektami skończonymi (skończonymi ciągami symboli), jest uważane za najbardziej naturalne. Rozważa się oczywiście także języki, które dopuszczają formuły nieskończone (np. nieskończone alternatywy i koniunkcje oraz nieskończone prefiksy kwantyfikatorowe), ale w takich przypadkach składnia języka zakładać musi pewne ustalenia z teorii mnogości. Podobnie rzecz ma się z zakładaniem istnienia nieprzeliczalnej liczby stałych indywidualnych w języku systemu logicznego.

Finitarność operacji konsekwencji. Jeśli chodzi o reguły inferencji, to założenie ich finitarnego charakteru również traktowane jest jako najbardziej adekwatnie oddające rozumowania. Języki z niefinitarnymi regułami wnioskowania (np. z ω-regułą) mają oczywiście dużą moc wyrażania, jednak dowody w takich językach przestają być obiektami skończonymi i można wyrażać obiekcje, czy takie rozumienie dowodu adekwatnie odzwierciedla ludzkie wnioskowania.

Niewyróżnianie stałych pozalogicznych. Pogląd na to, czym są stałe logiczne, ulegał zmianie w historii logiki. Obecnie ani relacja bycia częścią, ani relacja bycia elementem nie są uważane za stałe logiczne. Niewątpliwie stałymi logicznymi są funktory prawdziwościowe oraz klasyczne kwantyfikatory. Pojęcie stałej logicznej może być egzemplifikowane prostym wyliczeniem takich stałych (dla danego języka), znane są także próby podania ich ogólnej definicji (np. Tarski 1986). W klasycznej logice pierwszego rzędu zachodzi twierdzenie Grzegorczyka o niewyróżnianiu predykatów, symboli funkcyjnych oraz stałych indywiduowych. Dyskutowano, czy konieczność i możliwość są stałymi logicznymi – niektórzy uważali, że logiki modalne nie są systemami logicznymi, ale jedynie teoriami dotyczącymi tych terminów.

Niesprzeczność i parakonsystencja. Niesprzeczność była od zawsze ideałem metodologicznym w logice i matematyce (w tej ostatniej bywała też przyjmowana jako kryterium istnienia). Systemy sprzeczne, w których można udowodnić wszystko, są bezwartościowe poznawczo. Konstruuje się jednak również systemy, które tolerują sprzeczność, jako reprezentacje pewnych systemów przekonań.

Logika niefregowska. Logika niefregowska Romana Suszki zajmuje szczególne miejsce wśród systemów logicznych. Jest logiką dwuwartościową (logicznie), przyjmuje jednak, że oprócz wartości logicznych jej zdaniom przypisać można korelaty semantyczne (sytuacje, o których mowa w tych zdaniach). Jej ontologia jest zatem bogatsza od ontologii logiki klasycznej. Jednocześnie logika niefregowska unika wszelkich konstrukcji intensjonalnych (występujących np. w logikach modalnych różnych rodzajów).

Prawda i dowód. Do najważniejszych twierdzeń o systemach logicznych należą niewątpliwie twierdzenia o trafności (każda teza jest tautologią) oraz pełności (każda tautologia jest tezą). Dla pewnych systemów logicznych (np. logiki drugiego rzędu ze standardową semantyką) nie jest możliwe istnienie efektywnego systemu dowodowego. W systemach takich jak logika intuicjonistyczna za kryterium prawdziwości przyjmuje się dowód. Znane twierdzenia limitacyjne ustalają możliwości oraz ograniczenia metody dedukcyjnej i ukazują różnice między pojęciami prawdy (prawdziwości w modelu) oraz dowodu.

Teza pierwszego rzędu. W filozofii logiki przedstawia się argumenty na rzecz tezy pierwszego rzędu, która głosi, iż to właśnie logika pierwszego rzędu jest „prawdziwą" logiką, *the logic* (np. Woleński 2004). Wśród tych argumentów wymienić można na przykład takie: logika pierwszego rzędu ma dobre własności dedukcyjne, nie odróżnia mocy nieskończonych (na mocy twierdzenia Löwenheima-Skolema-Tarskiego), ma własność uniwersalności (w zastosowaniach). Teoria mnogości Zermela-Fraenkla, uważana obecnie za podstawową teorię matematyczną, sformułowana jest w języku pierwszego rzędu. Przywołuje się także twierdzenia Lindströma (pierwsze z nich ustala, że logika pierwszego rzędu jest maksymalną logiką, która ma własność zwartości oraz spełnia twierdzenie Löwenheima-Skolema) jako metalogiczny argument na rzecz tej tezy. Spotykamy jednak także odmienne argumenty (np. Barwise 2005), odwołujące się do praktyki matematycznej.

Omijanie paradoksów. Konstruuje się systemy logiczne, które nie mają pewnych własności logiki klasycznej, określanych czasem jako paradoksalne (np. paradoksy implikacji materialnej). W takich przypadkach staramy się zachować możliwie najwięcej tego, co obowiązuje w logice klasycznej. Tworzy się również systemy logiczne, które mają modelować rozumowania, wymykające się opisowi w ramach logiki klasycznej (np. różne rodzaje intensjonalności lub wyrażanie stopni prawdziwości).

Punkty widzenia. Wyrażany jest pogląd (np. Friedman 1992), że za niezupełność bogatszych teorii matematycznych odpowiedzialne jest dopuszczanie rozważania „całkiem dowolnych" obiektów, zamiast ograniczania się jedynie do obiektów o dobrze rozpoznanych własnościach. Dla przykładu, hipoteza kontinuum, która jest nierozstrzygalna na gruncie teorii mnogości Zermela-Fraenkla, jest prawdziwa w odniesieniu do uniwersum złożonego jedynie ze zbiorów borelowskich. Friedman w cytowanym artykule rozważa szereg takich punktów widzenia w matematyce (np. borelowski, konstruktywny, predykatywny), ukazując, jak ich przyjęcie wpływa na fenomen niezupełności.

We wszystkich omawianych wyżej przypadkach mamy do czynienia z zachowywaniem (permanencją) pewnych własności, a także z aspektami twórczymi, określającymi charakter poszczególnych systemów logicznych. Zasadne więc wydaje się mówienie o pewnej analogii z funkcjonowaniem zasady permanencji form w algebrze. Rozumowania przez analogię obarczone są pewnym ryzykiem – zdarza się, że nietrafnie przyjmujemy podstawę analogii, przez co samo rozumowanie traci poprawność. W podanych wyżej przykładach po części mamy do czynienia z analogią, jednak wchodzą w grę także inne zależności, np. uogólnianie.

1.5. Zasada permanencji form w dydaktyce matematyki

Sądzę, że zasada permanencji form jest wykorzystywana w dydaktyce matematyki, przynajmniej w tych przypadkach, gdy przy rozszerzaniu uniwersów liczbowych nowe operacje arytmetyczne zachowują się tak samo jak dotychczas na „starych" liczbach, pozwalając jednocześnie wykonywać „nowe" działania. W dydaktyce szkolnej uniwersa liczbowe wprowadzane są metodą genetyczną, aksjomatyczne ujęcie systemów liczbowych nauczane jest dopiero na poziomie uniwersyteckim.

Dydaktycy matematyki zwracali wielokrotnie uwagę na to, że uczniowie czasem prowadzą „ślepe" (niepotrzebne) obliczenia, zamiast zauważyć, że rozwiązanie problemu można uzyskać natychmiast, uważnie przypatrując się formie algebraicznej wyrażeń. Dla przykładu, w pracy Menghini 1994 przytacza się wyniki testu dla szesnastoletnich uczniów:

> Find the value of the following expression:
>
> $\frac{z^4}{c^2} \cdot (b-a) + \frac{z^4}{c^2} \cdot (a-b)$
>
> For this exercise most of the students carried out very detailed calculations.
>
> For which values of x is the following inequality true?
>
> $x^2 + x < x^2 + x + 1$
>
> In the best answers students carried out a comparison of the two parabolas represented by the two parts of the inequality.
>
> Express each of a, b, c in terms of the other two values:
>
> $a - 4c^2 = \frac{1}{b}$
>
> Only 50% of the students gave three correct answers.
>
> If m, n, p, q are natural numbers, the following equalities are true (always, never, sometimes):
>
> $(2n+1)(2m+3) = 2p$
>
> $(2n+5)(2m+a) = 2p+3$
>
> $(2n+1)(2m+1) = 4pq$
>
> This last exercise was set for university students (in the Mathematics Department, of course!) and very few answered correctly, most of them saying things like: "The first equality is true when $2p$ is an odd number". (Menghini 1994, 12)

Jak widać z powyższych przykładów, odpowiedzi można udzielić natychmiast, śledząc jedynie formę podanych wyrażeń.

Objaśnianie wzoru $a^0 = 1$, który sprawia uczniom pewne kłopoty, może polegać np. na odwołaniu się do zasady $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, bowiem $a^n = a^{0+n} = a^0 \cdot a^n$, a stąd $a^0 = 1$. Jeśli w szkole mówiono wcześniej o potęgowaniu jako iterowanym mnożeniu, to mogło to utrudnić rozumienie przez uczniów rozważanego wzoru.

Trudności sprawia uczniom także przyswojenie faktu, iż wynik mnożenia dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią. W tym przypadku pomocne w dydaktyce może być odwołanie się do zachowania prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, wsparte stosownymi przykładami.

Bibliografia

Babbage, C. (1821). Philosophy of analysis. *British Library Additional Manuscripts 37202*.

Barwise, J. (1985). Model-theoretic logics: background and aims. W: J. Barwise, S. Feferman, editors (1985). *Model-Theoretic Logics*. New York: Springer-Verlag, 3–23.

Borsuk, K., Szmielew, W. (1975). *Podstawy geometrii*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Buzaglo, M. (2002). *The logic of concept expansion*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cantor, G. (1872). Über der Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5: 123–132.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn.

De Morgan, A. (1842). On the foundations of algebra. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 7: 287–300.

Detlefsen, M. (2005). Formalism. W: S. Shapiro, editor (2005). *Philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press, 236–317.

Friedman, H. (1992). The incompleteness phenomena. *Proceedings of the AMS Centennial Symposium, August 8–12, 1988*. American Mathematical Society, 49–84.

Gauss, C.F. (1966). *Disquisitiones arithmeticae*. Translated by Arthur A. Clarke, S.J. New Haven and London: Yale University Press.

Grassmann, H. (1844). *Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: Wiegand.

Grassmann, H. (1861). *Lehrbuch der Arithmetik*. Berlin: Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.

Gregory, D. (1840). On the real nature of symbolical algebra. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14: 208–216.

Hamilton, W. (1853). *Lectures on quaternions*. Dublin: Hodges and Smith.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen. I Teil: Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*. Leipzig: Leopold Voss.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1900). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8: 180–194.

Hilbert, D. (1901). Mathematische Probleme. *Archiv der Mathematik und Physik*, seria 3 (1): 44–63, 213–237.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95 (1): 161–190.

Kolmogorov, A.N., Yushkevich, A.P., editors (2001). *Mathematics of the 19th century. Mathematical logic. Algebra. Number theory. Probability theory*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag.

Menghini, M. (1994). Form in algebra: reflecting, with Peacock, on upper secondary school teaching. *For the Learning of Mathematics*, 14 (3): 9–14.

Peacock, G. (1834). Report on recent progress and present state of certain branches of analysis. *British Association for the Advancement of Science* Rept. 3: 185–352.

Peacock, G. (1845). *A treatise on algebra* (second edition, volume II), Cambridge: J.J. Deighton.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Torino: Bocca.

Pycior, H. (1981). George Peacock and the British origins of symbolical algebra. *Historia Mathematica*, 8: 23–45.

Shapiro, S., editor (2005). *Philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press.

Šikić, Z. (1984). Euler's formula is almost unique. Proceedings of the conference "Algebra and logic". Zagreb, 165–170. Dostępne również na:

https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_eulers_formula.pdf

Tarski, A. (1986). What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, 7: 143–154.

Toader, I.D. (2019). Talking past each other: Mach and Husserl on thought economy. W: Stadler, F., editor, *Ernst Mach – life, work, influence*. Vienna Circle Institute Yearbook (Institute Vienna Circle, University of Vienna, Vienna Circle Society, Society for the Advancement of Scientific World Conceptions), vol 22. Cham: Springer, 213–221.

Woleński, J. (2004). First-order logic: (philosophical) pro and contra. W: V. Hendricks, F. Neuhaus, S.A. Pedersen, U. Scheffer, H. Wansing, editors, *First-order logic revisited.* Berlin: Logos, 369–398.

Woodhouse, R. (1803). *Principles of analytical calculation*. Cambridge: J.J. Deighton.

Rozdział 2

Odkrywanie czy tworzenie?

2.1. Wstęp. Charakterystyka problemu

Próba rozstrzygnięcia tytułowego dylematu (czy matematyka jest odkrywana, czy tworzona) automatycznie zmusza do rozważenia szeregu nieco bardziej szczegółowych pytań, np.:

1. Czym są i jak istnieją obiekty matematyczne?
2. Jaki mamy dostęp poznawczy do obiektów matematyki?
3. Jak wytłumaczyć skuteczność matematyki w nauce?
4. Czy (i w jakim sensie) świat jest matematyczny?
5. Jakie są mechanizmy wykształcania się umiejętności matematycznych?

Odpowiedzi na te (oraz podobne) pytania skłaniają do przyjęcia – mniej lub bardziej zdecydowanego – stanowiska również w kwestii tego, czy matematyka jest tworzona, czy odkrywana. Możliwe są też stanowiska proponujące swoiste kompromisy, uznające, że w pewnych aspektach matematykę odkrywamy, w innych zaś tworzymy. Wyróżnikiem niektórych stanowisk jest oddzielenie matematyki tworzonej przez ludzi od istniejącej – w jakimś sensie transcendentalnej – matematyki, której ta tworzona przez ludzi byłaby pewnym przybliżeniem.

Narażamy się na niebezpieczeństwo mówienia banałów, gdy usiłujemy scharakteryzować matematykę w kilku jedynie zdaniach. Zwykle otrzymujemy w ten sposób jakieś określenie po części metaforyczne, czasem zabawne *dictum*, a najczęściej grube uproszczenie. Z perspektywy historycznej badania matematyczne zmieniały się, choć oczywiście można wskazać pewne niezmienniki tych badań. Matematyka współczesna zaczęła przybierać obecną postać w wieku XIX. Wydaje się, że można ją uznać za swoiste połączenie nauki i sztuki, w następującym sensie:

Nauka o wzorcach. Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia używane w analizie matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna) itd.

Sztuka rozwiązywania problemów. Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, przeprowadzanie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy z dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk.

Oczywiście, metody stosowane w matematyce to metody specyficzne dla nauki formalnej. Mają one jednak, w naszym przekonaniu, także walory artystyczne. Dlatego właśnie użyliśmy powyżej terminu *sztuka* (rozwiązywania problemów).

2.1.1. Argumenty za odkrywaniem

Argumenty tej grupy siłą rzeczy zakładać muszą istnienie rzeczywistości matematycznej, świata matematycznych obiektów istniejących niezależnie od podmiotu poznającego. Ta rzeczywistość może być światem Platońskich idei, może być częścią trzeciego świata Karla R. Poppera, może wreszcie stanowić ontyczną podstawę rzeczywistości fizycznej. Wśród przedstawicieli tego typu stanowisk (różnych odmian platonizmu) znajdują się:

1. *Kurt Gödel*. Przedstawiciel platonizmu w jego skrajnej postaci. Wypowiadał się na rzecz istnienia świata obiektów matematycznych, do którego mamy pewien dostęp, miedzy innymi poprzez nasze intuicje matematyczne.

2. *Jan Łukasiewicz*. Ten znakomity polski logik uważał, że w trakcie swoich dociekań logicznych docierał do świata obiektów matematycznych, które istniały niezależnie od niego, których nie mógł zmieniać, a jedynie mógł je opisywać.

3. *Michał Heller*. Ten polski filozof i fizyk zdecydowanie argumentuje na rzecz tezy, że świat (przyroda) ma pewną cechę, która umożliwia nam stosowanie matematyki w jego opisie, a więc sam musi być w jakiś sposób matematyczny.

4. *Max Tegmark*. Głosi on dość skrajny pogląd, że w ostatecznym rozrachunku świat jest obiektem matematycznym.

Zacytujmy samego Gödla, który powszechnie uważany jest za najbardziej zadeklarowanego zwolennika platonizmu:

> The truth, I believe, is that these concepts form an objective reality of their own, which we cannot create or change, but only perceive and describe. (Gödel 1995, 320) [. . .]
>
> Thereby [by a Platonistic view – J.P.] I mean the view that mathematics describes a non-sensual reality, which exists independently both of the acts and the dispositions of the human mind and is only perceived, and probably perceived very incompletely, by the human mind. (Gödel 1995, 320)

2.1.2. Argumenty za tworzeniem

Argumenty tej grupy mają oczywiście silnie antropocentryczny charakter. Odwołują się do praktyki badawczej matematyków, podkreślają fakt osadzenia matematyki w kulturze, biorą pod uwagę czynniki psychologiczne oraz socjologiczne. Do przedstawicieli tego typu stanowisk zaliczają się:

1. *Intuicjonizm matematyczny*. Wielu przedstawicieli tego kierunku w filozofii matematyki przedstawiało liczne argumenty na rzecz pierwotności intuicji matematycznej oraz uważało, że matematyka jest twórczością człowieka.

2. *Stanislas Dehaene*. W swojej znanej monografii *The number sense* (Dehaene 1997) Dehaene argumentuje za tym, że matematyka jest właściwie wyłącznie działalnością ludzkiego intelektu.

3. *George Lakoff i Rafael Núñez*. Argumentują oni na rzecz koncepcji matematyki ucieleśnionej w swojej znanej książce *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being* (Lakoff i Núñez 2000). Twierdzą, że matematyka jest ludzkim wytworem i stanowczo odrzucają istnienie jakiejkolwiek transcendentalnej matematyki w stylu platońskim.

2.1.3. Kompromisy

Znany astrofizyk, Mario Livio proponuje przyjąć, że tworzymy pojęcia matematyczne, natomiast odkrywamy relacje między nimi. Przy tym, podstawę do tworzenia pojęć upatruje w procesach abstrakcji, zaś twierdzenia matematyki traktuje jako zapis owych odkrytych zależności:

> Personally, I believe that by asking simply whether mathematics is discovered or invented, we forget the possibility that mathematics is an intricate combination of inventions and discoveries. Indeed, I posit that humans invent the mathematical concepts – numbers, shapes, sets, lines, and so on – by abstracting them from the world around them. They then go on to discover the complex connections among the concepts that they had invented; these are the so-called theorems of mathematics.
>
> I must admit that I do not know the full, compelling answer to the question of what is it that gives mathematics its stupendous powers. That remains a mystery. (Livio 2015, data dostępu: 25 lutego 2020)
>
> http://www.pbs.org/wgbh/nova/blogs/physics/2015/04/great-math-mystery/

Często spotykanym (wśród matematyków) poglądem jest uznanie, że niektóre z najbardziej fundamentalnych pojęć matematycznych odkrywamy, natomiast tworzymy bardziej skomplikowane pojęcia. Dla przykładu, Roman Duda pisze w *„Matematyczność przyrody” czy „przyrodniczość matematyki”?* o dwóch postawach obserwowanych w historii matematyki:

Postawa skierowana do wewnątrz. Polega na upraszczaniu, porządkowaniu i uzupełnianiu uzyskanego materiału, przy czym istotną rolę pełnią też czynniki estetyczne.

Postawa skierowana na zewnątrz. Polega na przyjmowaniu bodźców ze świata oraz weryfikowaniu uzyskanych wyników matematycznych ze światem zewnętrznym.

Związek tych postaw z omawianym tu problemem widzi Duda następująco:

> Postawy, do wewnątrz i na zewnątrz, wiążą się też z problemem: matematykę tworzymy czy odkrywamy? Także i tutaj odpowiedź jest niejednoznaczna. Przy badaniu ciągu 1, 2, 3,... mamy silne wrażenie odkrywania, budując natomiast np. spektralną teorię homologii chyba matematykę tworzymy. (Duda 2010, 43)

Odwołując się do przywołanego wcześniej poglądu, uznającego matematykę za naukę o wzorcach oraz sztukę rozwiązywania problemów, można też zaproponować pogląd, że owe wzorce zarówno odkrywamy, jak i tworzymy, natomiast w przypadku metod używanych w matematyce ich twórczy charakter odgrywa rolę dominującą.

Kompromisowe jest także stanowisko Leopolda Kroneckera, zwięźle wyrażone w jego znanym dictum: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* (Bóg stworzył liczby całkowite, cała reszta jest dziełem człowieka). Pomijając aspekt teologiczny tej wypowiedzi, należy przypomnieć, że Kronecker, który jako matematyk zajmował się algebraiczną teorią liczb oraz innymi abstrakcyjnymi dziedzinami matematyki, w swoich poglądach filozoficznych odnoszących się do matematyki należał do reprezentantów stanowiska intuicjonistycznego.

Można przywołać jeszcze cały szereg innych kompromisowych rozwiązań, dla przykładu (niektóre z nich omawiane są na portalu MathStackExchange):

1. Tworzymy aksjomaty oraz metody dowodowe, odkrywamy zaś fakty wyrażone w twierdzeniach. Warto pamiętać, że dochodzenie do danego twierdzenia należy do kontekstu odkrycia, zaś jego dowód rozważany jest w kontekście uzasadnienia.

2. Odkrywamy obiekty tylko do pewnego stopnia ich złożoności, natomiast obiekty przekraczające ową złożoność tworzymy, wymyślamy. Taką granicą może być np. liczba porządkowa Churcha-Kleenego ω_1^{CK}, czyli – mówiąc w uproszczeniu – najmniejsza liczba porządkowa, która nie jest osiągalna środkami rekurencyjnymi. Może to być też np. pierwsza liczba mocno nieosiągalna albo inna duża liczba kardynalna.

2.2. Tradycja filozoficzna

Nie zamierzam w tym krótkim eseju rozwodzić się nad dziejami refleksji w filozofii matematyki – ewentualny czytelnik tego tekstu może znaleźć te wiadomości w wielu znakomitych opracowaniach, np.: Murawski 2002, 2003, 2008. Ograniczę się do kilku zwięzłych uwag.

2.2.1. Stanowiska w filozofii matematyki

Wielu matematyków współczesnych podziela poglądy związane z tradycją pitagorejską i platońską, uznającą istnienie abstrakcyjnej rzeczywistości matematycznej. Nazywamy takie podejście postawą platońską, przejawem realizmu w filozofii matematyki. Reprezentowane są jednak również inne postawy, np. uznawanie, że matematyka to wytwór ludzkiego umysłu i tylko jako taki wytwór istnieje.

Stanowiska w filozofii matematyki ulegały ewolucji. Stary spór filozoficzny między realizmem, nominalizmem i konceptualizmem znalazł swoje odzwierciedlenie w pierwszych refleksjach prowadzonych w filozofii matematyki. Wykształciły się stanowiska: logicyzmu, formalizmu oraz intuicjonizmu. Bardziej współcześnie zainteresowaniem cieszą się także stanowiska wiązane z empiryzmem. Przypomnijmy hasłową informację na temat wybranych stanowisk w filozofii matematyki:

1. *Platonizm*. Stanowisko realistyczne w filozofii matematyki, uznające istnienie idealnego świata obiektów matematycznych. Uznawane np. przez: Platona, Pitagorasa, Georga Cantora, Kurta Gödla, Paula Erdősa.

2. *Logicyzm*. Wedle tego stanowiska, matematykę zredukować można do logiki. Poglądu tego bronił Gottlob Frege, Bertrand Russell i Rudolf Carnap.

3. *Formalizm*. Ten kierunek w filozofii matematyki zakłada, że uprawianie matematyki wiąże się przede wszystkim z operacjami na symbolach. Do jego przedstawicieli zaliczamy: Davida Hilberta, Haskella Curry'ego, być może także Alfreda Tarskiego i Johna von Neumanna.

4. *Intuicjonizm*. Matematyka intuicjonistyczna uznaje pierwotną intuicję liczb naturalnych. Odrzuca możliwość operowania na nieskończonościach aktualnych. Nie uznaje za uprawomocnione dowodów niekonstruktywnych, odwołujących się np. do prawa wyłączonego środka. Przedstawicielami są: Luitzen Brouwer, Arendt Heyting, Hermann Weyl.

5. *Konstruktywizm*. To kierunek będący swego rodzaju intuicjonizmem. Kładzie nacisk na stosowanie metod efektywnych w matematyce. Do jego przedstawicieli zaliczamy: Nikolaia A. Shanina, Andrieja A. Markova, Pera Martina-Löfa, Paula Lorenzena, Erreta Bishopa.

6. *Konwencjonalizm*. Uznaje, że matematyka polega na przyjmowaniu użytecznych konwencji. Pogląd taki był przypisywany Henri Poincarému.

7. *Psychologizm*. Ten pogląd, proponowany ongiś w refleksji nad logiką i uznający logikę za badającą prawa myślenia, obecnie jest już zarzucony. Za jego przedstawicieli uważa się np. Johna Stuarta Milla i Christopha Sigwarta.

8. *Strukturalizm*. Matematyka jest nauką o strukturach, obiekty matematyczne to jedynie „miejsca" w takich strukturach. Poglądy strukturalistyczne głoszą np.: Michael Resnik, Stewart Shapiro, Paul Benacerraf.

9. *Empirycyzm*. Jest wiele odmian empiryzmu w filozofii matematyki, łączy je to, iż traktują matematykę jako naukę po części (a nawet w dużym stopniu) empiryczną. Z kierunkami tego typu związani są tacy matematycy i filozofowie, jak: Willard V.O. Quine, Hilary Putnam, Imre Lakatos, Gregory Chaitin.

10. *Fikcjonalizm*. Wedle tego poglądu matematyka jest zestawem (użytecznych) fikcji. Broni takiego stanowiska Hartrey Field.

11. *Konstruktywizm społeczny*. Matematyka miałaby być – wedle zwolenników tego stanowiska – konstruktem społecznym. Zalicza się do jego zwolenników Paula Ernesta oraz Reubena Hersha i Philippa Davisa.

12. *Poznanie ucieleśnione*. Poglądy wiązane z tym stanowiskiem podkreślają, iż matematyka w sposób naturalny wyłania się z ludzkich zdolności poznawczych oraz że istnieje jedynie jako ludzkie wytwory mentalne. Bronią takiego stanowiska George Lakoff i Rafael Núñez (a także, do pewnego stopnia, David Tall).

13. *Agnostycyzm matematyczny*. Charakterystyczny dla tego stanowiska jest pogląd, iż (ewentualne) istnienie świata platońskiego (obiektów poza czasoprzestrzenią i poza związkami przyczynowo-skutkowymi) nie ma wpływu na pracę badawczą zawodowych matematyków. Pogląd taki wyznają np. Jody Azzouni, Mark Balaguer, Stefano Boscolo.

Można sympatyzować z którymś z tych stanowisk lub proponować inne jeszcze, własne stanowisko. Można też przyjmować postawę eklektyczną, wybierając z poszczególnych stanowisk przemawiające do nas argumenty. Moim zdaniem najbardziej atrakcyjne jest stanowisko, które polega jedynie na badaniu konsekwencji poszczególnych poglądów oraz usiłowaniu dokonania ewentualnej ich falsyfikacji na podstawie niezgodności tych konsekwencji z innymi, uznanymi bez zastrzeżeń stwierdzeniami. W tym ujęciu dopuszczamy komplementarność omawianych stanowisk filozoficznych, a za ważne uważamy to, jakie są ich implikacje.

2.2.2. Matematyczność przyrody

Z tytułowym pytaniem wiąże się zagadnienie stosowalności matematyki w badaniu przyrody. O tej problematyce również napisano niezliczone rozprawy i nie jest moim zamierzeniem dokonywać nawet pobieżnego przeglądu stanowisk. I w tym przypadku ograniczę się zatem do zdawkowych uwag.

Już Archimedes wyraźnie i całkiem świadomie odróżniał heurystyki używane w kontekście odkrycia od metod wykorzystywanych w kontekście uzasadniania. Do tych pierwszych należało (w przypadku jego własnych badań) stosowanie modeli mechanicznych, wykorzystanie dźwigni, punktów oparcia itd. w ukazywaniu wartości miarowych pól oraz objętości tworów geometrycznych. Natomiast ścisłą metodą była w tych przypadkach metoda wyczerpywania, pochodząca od Eudoksosa. Zacytujmy słowa samego Archimedesa z jego rozprawy o metodzie:

> This procedure is, I am persuaded, no less useful even for the proof of the theorems themselves; for certain things first became clear to me by a mechanical method, although they had to be demonstrated by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual demonstration. But it is of course easier, when we have previously acquired, by the method, some knowledge of the questions, to supply the proof than it is to find it without any previous knowledge. This is a reason why, in the case of the theorems the proof of which Eudoxus was the first to discover, namely that the cone is a third part of the cylinder, and the pyramid of the prism, having the same base and equal height, we should give no small share of the credit to Democritus who was the first to make the assertion with regard to the said figure. I am myself in the position of having first made the discovery of the theorem to be published [by the method indicated], and I deem it necessary to expound the method partly because I have already spoken of it and I do not want to be thought to have uttered vain words, but equally I am persuaded that it will be of no little service to mathematics; for I apprehend that some, either of my contemporaries or of my successors, will, by means of the method when once established, be able to discover other theorems in addition, which have not yet occurred to me. (*The method*, Heath 2002, 13–14)

Po tym wstępie Archimedes przedkłada argumentację odwołującą się do mechaniki i pozwalającą ustalić pole powierzchni ograniczonej odcinkiem paraboli. Stwierdza następnie:

> Now the fact here stated is not actually demonstrated by the argument used; but that argument has given a sort of indication that the conclusion is true. Seeing then that the theorem is not demonstrated, but at the same time suspecting that the conclusion is true, we shall have recourse to the geometrical demonstration which I myself discovered and have already published.

Dodajmy jeszcze krótkie uwagi na temat kilku innych wybranych zastosowań matematyki w badaniach przyrody (wyniki Keplera, Galileusza, Newtona, Gaussa, Riemanna, Einsteina, Penrose'a):

Kepler. Prawa Keplera, dotyczące ruchu planet zakładają, że planety poruszają się nie po orbitach kołowych, lecz eliptycznych. Ustalając te prawa, Kepler porzucił więc dotychczasowe powszechne (wśród filozofów) mniemanie, iż to orbity kołowe są prawidłową reprezentacją ruchu planet, ponieważ taki kształt jest (w owym mniemaniu) „doskonały". Kepler wykorzystywał pomysły matematyczne Apoloniusza z Pergi, którego rozważania na temat stożkowych okazały się w tym kontekście wielce przydatne.

Galileusz. Często cytowane jest *dictum* Galileusza, że Księga Natury pisana jest językiem matematyki. Ważne jest – na co zwraca uwagę Michał Heller – aby stwierdzenie to rozumieć w sposób właściwy: nie chodzi jedynie o zewnętrzną szatę symboliczną języka matematyki, lecz o informacje, przekazywane w tym języku.

Newton. Jak głosi jedna z anegdot, Newton, zapytany jak ustalił tor ruchu ciała niebieskiego, miał odpowiedzieć: „Obliczyłem to". Taka postawa świadczy o przekonaniu, że istota zjawisk fizycznych reprezentowana może być na drodze dedukcji oraz obliczeń matematycznych.

Gauss. Przypomnijmy, że Gauss był pierwszym twórcą (odkrywcą) geometrii nieeuklidesowych. Próbował także na drodze empirycznej ustalić, jaka jest geometria przestrzeni fizycznej, poprzez pomiary kątów trójkąta wyznaczonego przez punkty na wierzchołkach wzniesień, co nie dało jednak rozstrzygających rezultatów. Warto również przypomnieć rewolucyjny pojęciowo pomysł Gaussa, aby rozważać wewnętrzną geometrię powierzchni (w odróżnieniu od rozważania powierzchni jako „zanurzonej" w otaczającej ją przestrzeni). Gauss udowodnił w 1827 roku *theorema egregium*, charakteryzujące krzywiznę powierzchni i pozwalające na zdefiniowanie na nich różnych pojęć, dotyczących owej wewnętrznej geometrii.

Riemann. Oryginalne rozwinięcie idei Gaussa napotykamy w propozycjach Riemanna dotyczących badania ogólnych (wielowymiarowych) rozmaitości. Twory te mają wewnętrzną geometrię, wyposażone są w pewną strukturę metryczną.

Einstein. Aparatura pojęciowa stworzona przez Riemanna posłużyła z kolei Einsteinowi do interpretacji pojęć fizycznych w terminach geometrycznych (np. jako zakrzywienia przestrzeni).

Penrose. Ten wybitny fizyk i matematyk deklaruje wyraźnie swoją postawę platońską w filozofii matematyki. Interesujące, choć chyba w dalszym ciągu czekające na empiryczną weryfikację są też jego uwagi dotyczące przypisywania rozumowaniom matematycznym charakteru w dużej mierze nieuświadomionego.

Zwolennikami tezy o matematyczności przyrody są np. Józef Życiński i Michał Heller. Obaj przywoływali taką tezę wielokrotnie w swoich pracach. Przedstawię pewne aspekty tych poglądów, odwołując się do artykułów z pracy zbiorowej pod ich redakcją (Heller i Życiński 2010). W otwierającym ten zbiór prac artykule *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?* Heller przypomina znane *dictum* Galileusza, wedle którego księga przyrody napisana jest językiem matematyki, ale zwraca przy tym uwagę, że nie chodzi tu jedynie o stwierdzenie, iż język matematyki nadaje się do opisu prawidłowości funkcjonowania przyrody – o wiele istotniejsza jest informacja, którą zawiera owa księga:

> Nośnikiem informacji musi być jakaś struktura; bez struktury nie ma informacji. Okazuje się, że struktura wszechświata jest przedziwnie podobna do tych struktur, których studiowaniem zajmuje się matematyka. Podobieństwo jest tak zadziwiające, że niektórzy myśliciele są skłonni traktować je jako coś w rodzaju identyczności. Chcąc to podkreślić, powiadają oni, że *przyroda jest matematyczna*, lub że jest zbudowana z matematyki. Eugene Wigner w tym kontekście mówił o *niezrozumiałej skuteczności matematyki w naukach empirycznych*. Ta własność świata była również źródłem nieustannego podziwu Einsteina. (Heller 2010, 8)

Pytanie o matematyczność przyrody ma, wedle Hellera, trzy składowe, wiążące się, odpowiednio, z matematyką, przyrodą oraz ludzkim umysłem, który tworzy matematykę oraz skutecznie korzysta z niej w procesie badania świata. Pierwsza składowa, dotycząca natury matematyki, zawiera w sobie cały szereg dalszych pytań ontologicznych, epistemologicznych i odwołujących się do gromadzonej wiedzy matematycznej. Heller podkreśla przy tym – wedle niego niedoceniany – fakt, iż badanie świata metodami matematycznymi wnosi wiele do lepszego rozumienia samej matematyki.

Drugą składową owego pytania omawia Heller, postulując, że świat (zamiennie – przyroda) musi posiadać pewną własność, nazwijmy ją M, skoro jest tak podatny na badania metodami matematycznymi. Aby bliżej scharakteryzować ową własność, Heller proponuje rozważyć hierarchię możliwych światów, które byłyby własności M pozbawione, w mniejszym lub większym stopniu. Używa przy tym następującej terminologii (cytuję wybrane zdania ze stron 12–15 wspomnianego artykułu, numeracja dodana):

1. Przede wszystkim, można by puścić wodze wyobraźni i wyimaginować sobie świat całkowicie amatematyczny. Powszechnie sądzi się, że ludzkie uczucia (takie jak miłość czy nienawiść) nie dadzą się zmatematyzować. Świat, który byłby podobny do ludzkich namiętności, nazwijmy *irracjonalnym światem*.
2. Opierając się na naszej znajomości matematyki, można sobie wyobrazić świat, który byłby zasadniczo matematyczny, ale jego matematyczna struktura byłaby dla nas niepoznawalna. Powód tej niepoznawalności nie leżałby w prymitywnym stanie naszej matematyki, lecz w matematycznie złośliwej strukturze samego świata.
    (a) Dla celów dalszej dyskusji nazwijmy świat, który byłby zbudowany z funkcji dla nas niepoznawalnych, *światem bardzo złośliwym*, a świat zbudowany z funkcji, których nie da się przybliżać prostszymi funkcjami – *światem złośliwym*.
    (b) *Świat łagodnie złośliwy*, jak będziemy go nazywać, jest zbudowany z funkcji, które chociaż zasadniczo są dla nas poznawalne, to jednak są zbyt trudne, by dało się nimi względnie prosto operować.
3. Widzimy więc, że świat mógłby nie mieć własności M na wiele różnych sposobów. Najprawdopodobniej irracjonalny świat (całkowicie amatematyczny) w ogóle nie mógłby istnieć. Sądzę, że pewien stopień zgodności z matematyką jest warunkiem koniecznym istnienia. Irracjonalny świat zasługuje na to, by go traktować jako ontologiczną sprzeczność, wyłączającą z istnienia. Ale pozostałe rodzaje złośliwych światów są w pełni możliwe, a nawet – w pewnym sensie – wydają się bardziej prawdopodobne niż świat, który nam został dany do badania. Dlaczego więc nasz świat jest dla nas aż tak łaskawy? Bóg jest subtelny, gdyż użył subtelnej matematyki do zaprojektowania naszego wszechświata, ale nie jest złośliwy, ponieważ dał nam świat, którego subtelności możemy skutecznie rozwikływać. (Heller 2010, 12–15)

Powyższym konstrukcjom pojęciowym można nadać nawet pewną formę matematyczną, reprezentując światy poprzez ciągi losowe i oddając ów „stopień złośliwości” poprzez skomplikowanie opisu takich ciągów, co Heller czyni w innych swoich pracach.

W artykule Józefa Życińskiego *Jak rozumieć matematyczność przyrody?* (Życiński 2010) autor zwraca uwagę na znany fakt, że formuły matematyki, twierdzenia uzyskane w niej niezależnie od jakiejkolwiek interpretacji fizycznej okazują się jednak stosowne do wyrażania treści fizycznych i pisze:

> Specyficzny sens matematyczności przyrody przejawia się więc w tym, iż abstrakcyjnym formułom matematyki można przyporządkować modele niezamierzone w dziedzinie konkretnych procesów fizycznych. Próby rozwijania matematyki jako czystej syntaktycznej gry symboli kończą się niepowodzeniem, gdy okazuje się, iż wprowadzone symbole mają swe semantyczne korelaty na poziomie zjawisk fizycznych. Cecha ta różni istotnie matematykę od literatury czy sztuki. (Życiński 2010, 24)

2.3. Praktyka matematyczna

Stanowisko agnostycyzmu matematycznego polegające na powstrzymaniu się od rozstrzygania tytułowego dylematu wydaje się chyba dość atrakcyjne dla samych matematyków. Sprowadza się ono do zwykłego uprawiania matematyki, kontynuowania praktyki badawczej wedle przyjętych w tej dyscyplinie wzorców metodologicznych i ograniczenia się do komunikowania rezultatów otrzymanych badań, bez opatrywania ich komentarzami filozoficznymi. Czasami stanowisko takie określane jest krótko i kolokwialnie: *shut up and calculate*. Należy skupić się na własnym rzemiośle, pozostawiając filozofom refleksje, dywagacje i spekulacje na temat tego, czy matematykę tworzymy, czy też odkrywamy.

2.3.1. Metafory matematyków

Matematycy bywają wstrzemięźliwi w swoich wypowiedziach na tematy filozoficzne związane z matematyką. W dyskursie naukowym oraz potocznym funkcjonują jednak niektóre ich metafory, deklaracje i powiedzonka, za którymi nieraz kryją się głębsze refleksje dotyczące genezy, funkcjonowania oraz natury matematyki. Podobnie zresztą rzecz ma się z filozofami o nastawieniu analitycznym. Podajemy dla przykładu niektóre z tych wypowiedzi:

1. Georg Cantor: Istota matematyki leży w jej wolności.

2. Wiele sentencji Alberta Einsteina o związku między matematyką a światem fizycznym jest często cytowanych, np.:

    (a) Jeśli twierdzenia matematyki mówią coś o rzeczywistości, to nie są pewne, a jeśli są pewne, to nie mówią o rzeczywistości.

   (b) Najbardziej niepojętą rzeczą dotyczącą świata jest to, że jest on pojmowalny.
   (c) Pan Bóg nie gra w kości.

3. John von Neumann: W matematyce nie staramy się osiągać rozumienia, ale raczej przyzwyczajamy się do jej uprawiania.

4. Henri Poincaré: Matematyka jest sztuką nadawania tych samych nazw różnym rzeczom.

5. Ludwig Wittgenstein: Matematyk jest twórcą, a nie odkrywcą.

6. Monteskiusz: Twierdzenia matematyczne uważane są za prawdziwe, ponieważ w niczyim interesie nie leży, by uważać je za fałszywe.

Oczywiście tego typu *dicta* nie mają ani statusu twierdzeń ani nie są należycie dobrze uzasadnionymi przesądzeniami metateoretycznymi. Często jednak celnie oddają – nazwijmy to tak – nastroje towarzyszące uprawianiu matematyki.

Za ciekawe uważam rozważenie możliwości zastosowania pojęcia *anamorfozy* w modelowaniu poznania matematycznego, a nawet ogólniej, w rozważaniach epistemologicznych. W formalnych ujęciach epistemologii jako reprezentacje relacji między podmiotem poznającym a przedmiotem poznania można stosować takie pojęcia, jak izomorfizm lub homomorfizm, dla podkreślenia tego, że między obydwiema tymi sferami (podmiotu i przedmiotu poznania) zachodzi jakieś podobieństwo, jakieś odzwierciedlenie struktury jednego w drugim. Przekształcenia wykorzystujące efekt anamorfozy są pewnego rodzaju morfizmami, ich cechą charakterystyczną jest m.in. to, że obiekt, który łatwo rozpoznajemy i kategoryzujemy w jednym ujęciu, w drugim wydaje się być zniekształcony, jakoś nienaturalny. Tu rzecz jasna istotną rolę odgrywa czynnik pragmatyczny, związany z tym, że mamy jakieś intuicyjne przeświadczenia potoczne, jak przedstawiają się nam obiekty. A zatem do diady podmiot poznania – przedmiot poznania dochodzi trzeci czynnik, a mianowicie punkt widzenia.

Można zastanawiać się, w jaki sposób tytułowy dylemat wiąże się z błądzeniem w matematyce. Nie mamy przy tym na myśli trywialnej konstatacji, że w obliczeniach oraz dowodach pojawiają się błędy, będące wynikiem niekompetencji, lenistwa, roztargnienia itp. Chodzi natomiast o sytuacje, które można nazwać *„ślepymi uliczkami”* w matematyce, a więc drogami w jej rozwoju, które zostają porzucone, z rozmaitych powodów. W literaturze znajdujemy opracowania wyliczające błędy matematyków, np.: Lecat 1935, Posamentier i Lehmann 2013. Dyskutuje się także „zaprzepaszczone możliwości” w jej rozwoju, np. Dyson 1972. Interesujące wydaje się być rozważenie konsekwencji (dla filozofii matematyki) odpowiedzi na pytanie, na czym polega błądzenie w matematyce przy każdym z założeń: że matematyka jest tworzona lub że matematyka jest odkrywana.

2.3.2. Miary dostępności obiektów matematycznych

W podejściu realistycznym (platonizm) dopuszcza się, że być może nie do wszystkich obiektów matematycznych mamy dostęp (poznawczy). Zauważmy w związku z tym dwie rzeczy:

1. Także w przypadku obiektów fizycznych nasz (poznawczy) dostęp do nich może być jedynie częściowy, co ilustrowane jest zwykle przykładami zaczerpniętymi z kosmologii (np. ciemna materia i ciemna energia) lub mechaniki kwantowej.

2. Można chyba zasadnie pytać, czy ów dostęp (poznawczy) jest jakkolwiek stopniowalny. Czy pewne obiekty matematyczne są łatwiej dostępne niż inne? Czy możemy ustalić jakieś miary takiej dostępności – zarówno w samej matematyce, jak i poza nią?

Drugi z powyższych punktów odnosi się także do stanowiska głoszącego, iż matematyka jest tworzona (a nie odkrywana), że należy wyłącznie do sfery konstruktów mentalnych.

Sądzę, że następujące czynniki mogą być brane pod uwagę w charakterystyce stopnia dostępności obiektów matematycznych:

Złożoność logiczna. Obiekt jest tym trudniej dostępny, im bardziej skomplikowana pod względem logicznym (mierzonym np. liczbą użytych kwantyfikatorów) jest jego definicja. Przykładami takich skal złożoności są m.in.: hierarchia arytmetyczna i analityczna.

Efektywność opisu lub konstrukcji. Obiekty, których istnienie uzasadniamy z wykorzystaniem środków nieefektywnych (np. z użyciem aksjomatu wyboru) są trudniej dostępne od obiektów uzyskanych na drodze konstruktywnej. Dla przykładu, niemierzalne (w sensie Lebesgue'a) zbiory Vitalego definiujemy, korzystając z aksjomatu wyboru.

Definiowanie a opisywanie. Pewne obiekty mają opis językowy – w sensie istnienia dla nich efektywnej notacji (w języku o co najwyżej przeliczalnej liczbie symboli oraz wyrażeń), inne natomiast mogą być jedynie definiowane. Dla przykładu, pewne przeliczalne liczby porządkowe reprezentować można za pomocą rekurencyjnej notacji, a inne jedynie definiować.

Wielość reprezentacji. Im więcej reprezentacji ma dany obiekt matematyczny, tym łatwiej jest poznawczo dostępny. Dla przykładu, liczby wymierne mają wiele dobrze rozpoznanych reprezentacji (ułamki, kierunki wyznaczone przez proste przechodzące przez środek układu współrzędnych oraz punkty kratowe płaszczyzny, drzewo Sterna-Brocota, drzewo Calkina-Wilfa itd.).

Kategoryczność i zupełność. Obiekt możemy uważać za łatwiej dostępny, jeśli dysponujemy jego kategorycznym opisem, czyli jego jednoznaczną (z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyką. Obiekty izomorficzne są nieodróżnialne pod względem swojej budowy. Innym typem nieodróżnialności jest elementarna równoważność – obiekty pozostające w tej zależności są nieodróżnialne semantycznie (w języku rozważanej teorii).

Stopień oswojenia. Pewne obiekty, które początkowo uważane były za trudne (patologiczne, dziwaczne), z czasem okazują się niezwykle przydatne, występują w tak wielu kontekstach i zastosowaniach, że uznajemy je za już „oswojone". Przykładem może być tu zbiór Cantora.

W innym miejscu (Pogonowski 2019) pisałem o różnych typach obiektów matematycznych: standardowych, wyjątkowych, ekstremalnych, prototypowych, typowych, patologicznych, zdegenerowanych itp. Poddawałem analizie często używane przez matematyków określenie, iż dany obiekt „dobrze się zachowuje" (*is well behaving*) oraz przykłady pokazujące „oswajanie" obiektów matematycznych, początkowo uważanych za trudne lub patologiczne. Dla badania tej problematyki istotne zdają się być między innymi ważne opozycje: skończony–nieskończony, dyskretny–ciągły, obliczalny–nieobliczalny, regularny–nieregularny. Pierwsze człony tych opozycji związane są, jak sądzimy, z obiektami łatwiej dostępnymi, drugie zaś z tymi, które dostępne są trudniej. Przekonanie takie opatrzone musi być jednak pewnymi zastrzeżeniami. Czasem duży zbiór skończony ma opis o wiele bardziej skomplikowany niż zbiór nieskończony, wyznaczony przez prostą w opisie własność. Ciągłość reprezentowana może być przez konstrukty w ostatecznym rozrachunku dyskretne (ciągi i ich granice), ale może być także ujmowana jako pojęcie pierwotne (jak to ma miejsce np. w *smooth infinitesimal analysis*). Opozycja regularny–nieregularny sprawia osobne trudności i powiemy niżej kilka słów na ten temat.

Przykładami regularności są oczywiście wszelkiego rodzaju symetrie, badane w ogólności w teorii grup. Twierdzenia o klasyfikacji, rozważane w wielu działach matematyki, dostarczają przykładów ustalania katalogów wzorców występujących w badanej dziedzinie obiektów. Pewne funkcje wyrażają regularności, każda struktura relacyjna jest, w pewnym sensie, wiązką regularności (zależności łączących elementy jej dziedziny). Samo pojęcie *regularności* jest jednak zbyt ogólne, aby można byłoby pokusić się o jego precyzyjną charakterystykę. Oczywiście tym samy trudno uchwytne jest ogólne pojęcie *nieregularności*.

Za szczególny przypadek tego ostatniego pojęcia uważa się pojęcie *losowości*, badane w rachunku prawdopodobieństwa, ale także w teorii liczb oraz w innych dziedzinach matematyki. Co to znaczy, że ciąg (liczb naturalnych) jest losowy? Chcielibyśmy, aby nazywać tak ciąg, w którym nie występują żadne regularności. Istnieją różne możliwości matematycznej charakterystyki takiej własności. Dodajmy, że skoro odnosimy ją do ciągu liczb naturalnych, to automatycznie stosuje się ona także do liczb rzeczywistych, które reprezentowane są przez ciągi liczb naturalnych (lub ciągi zero-jedynkowe, lub ciągi w ustalonej innej podstawie liczbowej).

Owymi środkami matematycznymi charakteryzującymi pojęcie losowości są m.in. złożoność w sensie Kołmogorowa, normalność, losowość w sensie Martina-Löfa. Przypomnę tu pojecie liczby normalnej i pokażę parę przykładów związanych z tym pojęciem. W szczególności podam konstrukcję przedstawioną w znakomitej pracy Grega Martina *Absolutely abnormal numbers* (Martin 2001).

Intuicyjnie rzecz ujmując, liczba rzeczywista jest normalna, jeśli jej rozwinięcie (dziesiętne lub przy innej podstawie) zawiera wszelkie możliwe kombinacje cyfr tej podstawy z oczekiwanymi dla nich prawdopodobieństwami. To określenie można precyzować następująco. Niech $b \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną (podstawą rozwinięcia). Przez $N_m(\alpha, b, a)$ rozumieć będziemy moc zbioru:

$$\{n : 1 \leqslant n \leqslant m \text{ oraz } a \text{ jest } n - \text{tą cyfrą rozwinięcia } \alpha \text{ przy podstawie } b\}.$$

Funkcja ta wylicza więc wystąpienia cyfry a (gdzie $0 \leqslant a \leqslant b$) w rozwinięciu przy podstawie b liczby rzeczywistej α (aż do miejsca m). Definiujemy:

$$\delta(\alpha, b, a) = \lim_{m\to\infty} \frac{N_m(\alpha, b, a)}{m}$$

(o ile ta granica istnieje).

Mówimy teraz, że α jest liczbą *prosto normalną* przy podstawie b, jeśli istnieje granica definiująca $\delta(\alpha, b, a)$ oraz jest ona równa $\frac{1}{b}$ dla każdej liczby $a \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Liczba α jest *normalna* przy podstawie b, jeśli jest prosto normalna przy każdej z podstaw: b, b^2, b^3,... Tak więc, liczba α jest normalna przy podstawie b, jeśli dla dowolnego ciągu $a_1 a_2 \ldots a_k$ granica zdefiniowana wyżej istnieje i jest równa $\frac{1}{b^k}$ (przy czym liczymy wystąpienia tego całego ciągu, jako podsłowa ciągu początkowego rozwinięcia przy podstawie

b^k liczby α). Wreszcie, liczba α jest *absolutnie normalna*, jeśli jest ona normalna przy wszystkich podstawach $b \geqslant 2$. Jeśli α nie jest normalna przy podstawie b, to mówimy, że jest *nienormalna* przy tej podstawie, a jeśli α jest nienormalna przy każdej podstawie $b \geqslant 2$, to mówimy, że jest ona *absolutnie nienormalna*.

Różne wersje normalności, o których mowa była powyżej, reprezentują zatem różne aspekty losowości rozważanych ciągów, czyli brak występowania jakichś regularności. Dwoiście różne wersje nienormalności odpowiadają występowaniu określonych regularności, są więc niejako zaprzeczeniami losowości.

O wprowadzonych właśnie pojęciach wiadomo m.in., że:

1. Każda liczba wymierna jest jest absolutnie nienormalna.

2. Prawie wszystkie liczby rzeczywiste są absolutnie normalne (czyli zbiór liczb rzeczywistych, które nie są absolutnie normalne, jest miary zero).

3. Zbiór liczb absolutnie nienormalnych, choć jest przekrojem przeliczalnie wielu zbiorów miary zero, sam jest nieprzeliczalny i gęsty w $\mathbb{R}$.

4. Jeśli x jest niewymierną liczbą algebraiczną w bazie $b \geqslant 2$, to x jest normalna w bazie b.

5. Nie wiadomo, czy są liczbami normalnymi np.: π, e, $\sqrt{2}$.

6. Liczba Champernowne'a zapisana przy podstawie dziesiętnej w postaci:

   $$C_{10} = 0.12345678910111213141516\ldots_{10}$$

   jest normalna w tej bazie. Można rozważać zapisy tej liczby w innych bazach, np.:

   $$C_2 = 0.11011100101110111\ldots_2$$

   $$C_3 = 0.12101112202122\ldots_3$$

   Udowodniono, że C_{10} jest normalna przy podstawie 10, a nawet, że C_b jest normalna przy podstawie b. Liczba Champernowne'a jest przestępna.

7. Stała Copelanda-Erdősa $0.235711131719232931\ldots$ (piszemy kolejno wszystkie liczby pierwsze) jest normalna przy podstawie 10.

W cytowanej pracy Martin 2001 konstruuje się liczbę absolutnie nienormalną α w sposób następujący: $\alpha = \prod_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{a_n})$, $a_2 = 4$, $a_n = n^{\frac{a_{n-1}}{n-1}}$ dla $n \geqslant 3$. Autor dowodzi, że jest ona liczbą Liouville'a, a więc jest też liczbą przestępną. Jak pamiętamy, liczba Liouville'a to każda liczba niewymierna x taka, że dla wszystkich $n > 0$ istnieją liczby całkowite p oraz q, $q > 1$, dla których: $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$. Liczby Liouville'a mogą więc być dowolnie dokładnie przybliżane liczbami wymiernymi. Należy to rozumieć w następujący sposób. Przez *miarę niewymierności* liczby rzeczywistej x rozumiemy kres górny zbioru liczb rzeczywistych μ takich, że nierówność:

$$0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\mu}}$$

jest spełniona przez nieskończenie wiele par liczb całkowitych (p, q), gdzie $q > 0$. Miarą niewymierności każdej liczby wymiernej jest wtedy 1, a jeśli x jest rzeczywistą niewymierną liczbą algebraiczną, to jej miara niewymierności wynosi 2. Prawie wszystkie liczby (niewymierne) mają miarę niewymierności równą 2. Ale miarą niewymierności np. π jest co najwyżej 7.60630853. Natomiast liczby Liouville'a to dokładnie te liczby, których miara niewymierności jest nieskończona (co właśnie jest innym sposobem powiedzenia, że są one dowolnie dobrze aproksymowane przez liczby wymierne). Liczba α skonstruowana w pracy Martin 2001 ma zatem tę własność. Dodatkowo – jako liczba absolutnie nienormalna – wykazuje pewne regularności w swoich rozwinięciach przy dowolnej bazie, a więc umyka wszelkiej losowości, chciałoby się nieformalnie powiedzieć. Oczywiście stwierdzeń tych dowodzi się w precyzyjny sposób w Martin 2001. Ograniczę się do wyraźnego zapisu kilku pierwszych wyrazów ciągu a_n, wykorzystywanego w konstrukcji owej liczby. Patrząc na ich postać, powinniśmy uzyskać pewien intuicyjny wgląd w to, dlaczego liczba ta jest absolutnie nienormalna. Mamy mianowicie:

$a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 4^3$, $a_5 = 5^{16}$, $a_6 = 6^{30517578125}$,...

Możemy te wyrazy zapisać również w następujący sposób, wskazujący jak tworzymy je kolejno:

$a_4 = 4^{3^2-1}$, $a_5 = 5^{4^{(3^2-1)}-1}$, $a_6 = 6^{5^{(4^{(3^2-1)}-1)}-1)}$,...

Elementy tego ciągu wykorzystamy do zdefiniowania ciągu liczb wymiernych:

$$\alpha_k = \prod_{n=2}^{k}(1 - \frac{1}{a_n}).$$

Mamy wtedy: $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, $\alpha_3 = \frac{2}{3}$, $\alpha_4 = \frac{21}{32}$, $\alpha_5 = \frac{100135803222}{152587890625}$,...

Zgodnie z podaną wcześniej definicją, mamy:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{a_n}).$$

Początek rozwinięcia dziesiętnego liczby α wygląda następująco:

$$\alpha = 0,6562499999956991\underline{9\ldots 9}8528404201690728\ldots,$$

przy czym fragment $\underline{9\ldots 9}$ zawiera 23747291559 cyfr 9. Widać teraz, iż fakt, że ciąg a_n rośnie bardzo szybko, ma m.in. tę konsekwencję, iż w rozwinięciu liczby α występują dowolnie długie ciągi złożone z cyfr 9, co skutkuje absolutną nienormalnością tej liczby.

2.4. Propozycje nauk kognitywnych

W naukach kognitywnych omawianym w tym eseju problemem zajmować można się w dwóch aspektach. Pierwszy dotyczy wykształcania się umiejętności matematycznych w rozwoju osobniczym, drugi natomiast odnosi się do genezy i funkcjonowania matematyki w kulturze i nauce.

Jeśli chodzi o pierwszy z tych aspektów, który można nazywać ontogenetycznym, to stwierdzić należy, że funkcjonuje wiele teorii opisujących rozwój umiejętności matematycznych, np.:

1. *Stadia w rozwoju inteligencji*. Znana już od dawna koncepcja Jeana Piageta (Piaget 1977), która postuluje wyodrębnienie kilku stadiów w takim rozwoju (stadium inteligencji sensoro-motorycznej, stadium inteligencji przedoperacyjnej, stadium inteligencji konkretno-operacyjnej, stadium inteligencji formalno-operacyjnej). Koncepcja Piageta w dalszym ciągu wykorzystywana jest w zaleceniach dotyczących dydaktyki szkolnej.

2. *Zmysł liczby*. Do nowszych koncepcji należy propozycja Stanislasa Dehaene'a (Dehaene 1997), w której twierdzi się, że nasze umiejętności matematyczne są tak samo wynikiem ewolucji biologicznej, jak inne zdolności poznawcze człowieka. Dehaene uważa liczby za konstrukty czysto mentalne.

3. *Trzy światy matematyki*. David Tall proponuje z kolei triadyczną stratyfikację w rozwoju umiejętności matematycznych (Tall 2013). Od poznania ucieleśnionego, poprzez operacje symboliczne docieramy wreszcie do czysto sformalizowanej matematyki.

Drugi z omawianych wyżej aspektów, który nazywać możemy filogenetycznym, dotyczy genezy samej matematyki jako dyscypliny naukowej oraz jej funkcjonowania. Jedną z modnych ostatnio w rozważaniach prowadzonych w naukach kognitywnych koncepcji jest propozycja matematyki ucieleśnionej (Lakoff i Núñez 2000). Obszernie (i dość krytycznie) pisałem o tej koncepcji w innym miejscu (Pogonowski 2011). Lakoff i Núñez opowiadają się wyraźnie za poglądem, że matematyka jest ludzkim wytworem intelektualnym, że nie istnieje nic takiego jak transcendentalna matematyka, niezależna od umysłów poznających. Za podstawowy mechanizm, odpowiedzialny za genezę i funkcjonowanie matematyki uważają tworzenie metafor poznawczych oraz bazujących na nich bardziej złożonych konstruktach teoretycznych.

2.5. Konkluzje

Podsumowując powyższe uwagi i refleksje, przypomnijmy najważniejsze ustalenia i deklaracje:

1. *Agnostycyzm matematyczny*. Problem, czy matematyka jest tworzona, czy też odkrywana nie jest problemem matematycznym. Zajmować się nim można na gruncie epistemologii lub nauk kognitywnych. Sądzę, że opowiedzenie się za jednym bądź drugim rozwiązaniem tytułowego dylematu nie ma istotnego wpływu na praktykę badawczą profesjonalnych matematyków.

2. *Strukturalizm*. Z obecnie funkcjonujących poglądów w filozofii matematyki za atrakcyjny uważam również strukturalizm, traktujący matematykę jako naukę o różnego rodzaju strukturach. W podejściu tym nie pytamy zatem o naturę obiektów matematycznych. Nie pozostaje też ono w konflikcie z omówionym wcześniej matematycznym agnostycyzmem.

3. *Matematyka jako: nauka o wzorcach i sztuka rozwiązywania problemów*. Wzorce bywały abstrahowane z regularności obserwowanych w świecie zewnętrznym, w miarę rozwoju matematyki, coraz to nowe wzorce wykrywane bądź tworzone były wewnątrz samej rzeczywistości matematycznej. Natomiast to, że matematyka ma również cechy charakterystyczne dla sztuki, potwierdzane jest chociażby przez wypowiedzi profesjonalnych matematyków, wskazujące na wartości estetyczne jako jeden z najważniejszych czynników motywujących ich pracę. Warto przy tym zauważyć, że matematycy z reguły są między sobą zgodni w ocenie tych wartości, a więc nie mają one natury wyłącznie subiektywnej.

4. *Matematyczna osnowa świata*. Myślimy o problemie matematyczności przyrody oraz o kwestii owej słynnej niewytłumaczalnej skuteczności matematyki w badaniach przyrody jako o problemach epistemologicznych. Matematyczne modele zjawisk niosą ze sobą także informacje na temat naszych możliwości i ograniczeń poznawczych.

Bibliografia

Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Devlin, K. (2003). *Mathematics: the science of patterns. The search for order in life, mind and the universe*. New York: Henry Holt and Company.

Dębiec, J. (2002). *Mózg i matematyka*. Kraków: OBI, Tarnów: BIBLOS.

Duda, R. (2010). „Matematyczność przyrody" czy „przyrodniczość matematyki"? W: M. Heller, J. Życiński, redakcja, *Matematyczność przyrody*. Kraków: Wydawnictwo Petrus, 43–50.

Dyson, F.J. (1972). Missed opportunities. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 78, Number 5: 635–652.

Gödel, K. (1986–2003). S. Feferman *et al.*, editors, *Kurt Gödel: collected works, Volume I 1986, Volume II 1990, Volume III 1995, Volume IV 2003, Volume V, 2003*. New York: Oxford University Press.

Grattan-Guinness, I. (2008). Solving Wigner's mystery: the reasonable (though perhaps limited) effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Mathematical Intelligencer*, 30 (3): 7–17.

Heath, T.L., editor (2002). *The works of Archimedes*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Heller, M. (2010). Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna? W: M. Heller, J. Życiński, redakcja, *Matematyczność przyrody*. Kraków: Wydawnictwo Petrus, 9–22.

Heller, M., Życiński, J., redakcja, (2010). *Matematyczność przyrody*. Kraków: Wydawnictwo Petrus.

Lakoff, G., Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lecat, M. (1935). *Erreurs de mathematiciens des origines à nos jours.* Brüssel: Castaigne.

Livio, M. (2015). Math: discovered, invented, or both? Dostępne na (25 lutego 2020):

http://www.pbs.org/wgbh/nova/blogs/physics/2015/04/great-math-mystery/

Martin, G. (2001). Absolutely abnormal numbers. *The Mathematical Association of America*, 108: 746–754.

Michniowski, T. (2004). *Wszechświat matematyczny*. Lublin: Wydawnictwo KUL.

Murawski, R. (2002). *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Murawski, R. (2003). *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Murawski, R. (2008). *Filozofia matematyki. Zarys dziejów.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Pogonowski, J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae*, 23: 106–147.

Pogonowski, J. (2019). *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.

Posamentier, A.S., Lehmann, I. (2013). *Magnificent mistakes in mathematics*. Amherst (New York): Prometheus Books.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically. Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wigner, E.P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on pure and applied mathematics*, 13: 222–237.

Życiński, J. (2010). Jak rozumieć matematyczność przyrody? W: M. Heller, J. Życiński, redakcja, *Matematyczność przyrody*. Kraków: Wydawnictwo Petrus, 19–36.

Rozdział 3

O błądzeniu w matematyce

3.1. Uwagi wstępne

Na dzieje matematyki składają się nie tylko małe i wielkie sukcesy, ale także ponoszone co pewien czas porażki. Nie ma jednak oczywiście symetrii, jeśli chodzi o znajomość pierwszych i drugich. Sukcesy stają się znane, natomiast porażki przepadają w zapomnieniu. Jedynie w wyjątkowych przypadkach porażka uzyskuje rozgłos, a spektakularny błąd przechodzi do poświadczonej pisemnie historii. Czasami z takiej katastrofy odnieść można spore pożytki, co poświadczają dzieje matematyki.

Badać możemy jedynie błędy udokumentowane, odkryte. Wedle współcześnie uznawanych standardów, opublikowane rezultaty nie objaśniają szczegółowo kontekstu odkrycia i popełnianych po drodze błędów. Większość rzeczywiście popełnionych błędów na drodze do uzyskania poprawnego wyniku pozostaje więc ukryta. Dokładniej mówiąc, błędy wykryte w procesie dochodzenia do wyniku zostają eliminowane. Z reguły nikt o nich nie wspomina, z wyjątkiem rzadkich zwierzeń autobiograficznych.

Współczesny styl publikowania wyników matematycznych badań przypomina metodę stosowaną przez Carla Friedricha Gaussa: dostarczenie gotowego wyniku, z zatarciem wszelkich śladów wskazujących, w jaki sposób autor do niego dochodził. Inaczej postępował Leonhard Euler, w wielu przypadkach jawnie ukazując przeróżne rozważania indukcyjne, które prowadziły go do postawienia stosownej hipotezy. Euler czasem otwarcie zresztą przyznawał, że jakaś hipoteza nie jest poprawnie udowodniona, ale uzyskane obliczenia, przeprowadzane różnymi metodami, zdają się ją dobrze potwierdzać.

Kiedy więc błędy stają się znane, a dokładniej, sławne? Wykluczyć należy przypadki błędów znajdowanych przez recenzentów prac przysyłanych do publikacji, informacja o nich raczej nie przedostaje się do powszechnej wiadomości. Natomiast w następujących sytuacjach błędy matematyczne zyskują swoistą sławę:

Chwiejne podstawy. Dana dyscyplina matematyczna nie ma dobrze ugruntowanych podstaw logicznych. Przeprowadzane w niej rozumowania są akceptowane przez ogół matematyków, ale narasta przekonanie, że „coś trzeba zrobić" z podstawami tej dyscypliny. Dopiero po ustaleniu nowych zasad poprawności rozumowań, podaniu precyzyjnych definicji używanych pojęć, zastąpieniu intuicyjnych odwołań do rzeczywistości pozamatematycznej okazuje się, że pewne wcześniej aprobowane uzasadnienia trzeba skorygować lub wręcz odrzucić. Przykład: początki rachunku różniczkowego i całkowego w wieku XVII, rozważania dotyczące nieskończonych szeregów w wieku XVIII.

Entymematyczne analogie. Przeprowadza się dowód, czyniąc pewne milczące (choć nieuzasadnione) założenia, opierając się na rzekomych analogiach lub bezrefleksyjnie przenosząc własności z przypadku szczególnego na bardziej ogólny. Przykład: nieuprawnione założenie o jednoznaczności rozkładu w niektórych próbach dowodu wielkiego twierdzenia Fermata.

Sugestie fizyczne. Czyni się założenia sugerowane przez model fizyczny lub uznaje się za oczywiste pewne stwierdzenia o takim modelu. Przykład: wykorzystywanie rysunków w systemie geometrii Euklidesa.

Poniżej rozpatrzę szereg konkretnych przykładów błądzenia w dziejach matematyki, zarówno już dzisiaj klasycznych, jak i tych bardziej współczesnych.

Proklos pisze, że Euklides był twórcą nie tylko *Elementów* (które dotrwały do naszych czasów), ale także innych, uznanych za zaginione, ksiąg. Wśród nich znajdować miała się księga *Pseudaria*, zawierająca przykłady fałszywych, niepoprawnych dowodów, zebranych dla przestrogi uczących się matematyki. O księdze tej wspomina się także w różnych opracowaniach historii matematyki, ale szczegóły jej treści pozostają nieznane (zob. Acerbi 2008).

Omówienie błędnych rozumowań matematycznych znajdujemy w wielu pracach, np.: De Morgan 1915, 2008, Bradis, Minkovskii i Kharcheva 1999, Maxwell 1959, Barbeau 2000. Błędy popełnione przez wybitnych matematyków wyliczają książki Lecat 1935 oraz Posamentier i Lehmann 2013. Dyskutuje się o nich także na forach matematycznych (np. math.stackexchange.com/). W monografiach oraz podręcznikach rozproszone są przestrogi, mające uczynić czytelnika ostrożnym w operowaniu określonymi pojęciami oraz metodami. Istnieją również całe monografie poświęcone listom kontrprzykładów, np.: Gelbaum i Olmsted 2003, Steen i Seebach 1995, Wise i Hall 1993. Godna polecenia jest klasyczna monografia Lakatos 1976, w której poddaje się drobiazgowej analizie proces dochodzenia do sformułowania wzoru Eulera dla wielościanów. W polskiej literaturze przedmiotu warto przypomnieć książkę Lietzmann 1958, będącą tłumaczeniem opracowania, którego początki liczą sobie już ponad sto lat, a także wiele innych opracowań, np.: Krygowska 1998, Gruszczyk-Kolczyńska 1989, Ciosek 1992, Dybiec 1996.

O błędach matematycznych pisuje się sporadycznie w podręcznikach matematyki (oraz zestawach ćwiczeń). Wiele ciekawych błędów matematycznych omawia się w różnego rodzaju opracowaniach popularyzujących matematykę, zachęcając czytelników do ich rozpoznawania. Są to więc przykłady podawane ku uciesze i przestrodze, mają pełnić funkcję dydaktyczną.

Nie będę zajmował się tutaj przypadkami oszustw matematycznych. Inaczej niż np. w medycynie, naukach społecznych, ekonomii, a nawet fizyce, takie mistyfikacje są w matematyce niezwykle rzadkie.

Sygnałem błędu jest wykrycie sprzeczności. Pojawienie się antynomii zmusza nas zawsze do rewizji przyjmowanych założeń, z oczywistych względów. Natomiast wykrycie (skonstruowanie) paradoksu skutkuje nieco inaczej: zmusza nas mianowicie do rewizji żywionych dotąd przekonań intuicyjnych.

3.2. Typy i przyczyny błędów

Błędy matematyczne przejawiać się mogą m.in. jako: fałszywe wyniki (stwierdzenia), błędne dowody (zawierające błąd formalny), błędne założenia (błąd materialny), niekompletne dowody, błędy rachunkowe, poprawne wyniki, które społeczność matematyków uważa za błędne (myląc się zatem, czyli popełniając błąd).

Należy przypomnieć o subtelnych różnicach między dowodami w sensie logicznym a dowodami matematycznymi:

Dowód w sensie logicznym jest dobrze określonym skończonym obiektem syntaktycznym. Własność bycia dowodem jest obliczalna: można w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków ustalić, czy dany ciąg formuł jest czy też nie jest dowodem. Własność bycia twierdzeniem jest rekurencyjnie przeliczalna: być twierdzeniem (danego systemu) oznacza posiadać dowód (w tym systemie).

Dowody matematyczne są prawie zawsze niekompletne. Z reguły nie zapisuje się dowodów matematycznych w postaci dowodów logicznych, pomijając pewne kroki (uznawane za oczywiste). Uważa się, że każdy poprawny dowód matematyczny można poddać rekonstrukcji, przekształcając go w kompletny dowód w sensie logicznym, w odpowiednim systemie logicznym. W praktyce jest to zwykle niewykonalne, z powodu ograniczeń natury biologicznej oraz technicznej.

Dowody matematyczne zawierają komponent pragmatyczny. Uznanie dowodu za poprawny oparte jest na jego akceptacji przez społeczność matematyków. Nie jest oczywiście tak, że ową akceptację uzyskujemy np. na drodze głosowania, większością głosów. Poprawność dowodu matematycznego oceniana jest przez ekspertów, ich opinia przyjmowana jest przez społeczność matematyków. Jednak każda osoba matematycznie kompetentna może samodzielnie próbować przekonać się o poprawności przedstawionego dowodu.

Wspomniane wyżej fakty wskazują na trudności w procesie wykrywania błędów w dowodach i twierdzeniach matematycznych. Warto dodać, że opracowuje się systemy automatycznego sprawdzania (a nawet, w ograniczonym zakresie, tworzenia) dowodów matematycznych. Uważam za ciekawe to, że pokładamy ufność w tego typu technikach.

Błąd matematyczny musimy traktować jako zrelatywizowany historycznie. Nie należy zatem np. dogmatycznie uważać za błędne odrzucanie przez matematyków ujemnych rozwiązań pewnych równań w czasie, gdy matematyka nie „oswoiła" jeszcze liczb ujemnych (podobnie w przypadku liczb urojonych oraz operowania wielkościami nieskończenie małymi).

Błędne w matematyce mogą być: wykonywane działania lub żywione przekonania. Przy czym te pierwsze są niejako wtórne wobec tych drugich. Wykonujemy bowiem określone działania mając ku temu jakieś uzasadnienie, czyli żywiąc stosowne przekonania intuicyjne.

W następnej części omówimy wybrane błędy znanych matematyków. Będą one różnych typów, dotyczyły będą mianowicie m.in.: rozumowań przez analogię, rozumowań przez indukcję, uogólnień, sugestii rysunkowych, sugestii fizycznych, iluzji percepcyjnych, wykorzystywaniu znaczeń nieprawomocnie przydanych pojęciu, kłopotów z rozumieniem pojęcia nieskończoności, kłopotów związanych z intuicjami odróżniającymi miarę od liczebności.

Należy wyraźnie podkreślić, że nie jest możliwa jakakolwiek kompletna oraz adekwatna typologia błędów matematycznych. Jednym z podstawowych przedsięwzięć podejmowanych w matematyce oraz logice jest ustalanie procedur poprawnych. Te procedury możemy katalogować. Naruszenie poprawnej procedury generuje błąd. Nie ma jednak żadnej możliwości przewidzenia z góry, w jaki sposób błąd popełniamy. Możemy jedynie podawać przykładowe, „wzorcowe" typy błędów, po ich odnalezieniu, ustaleniu ich natury oraz zdiagnozowaniu ich przyczyn.

Jeśli chodzi o same przyczyny popełniania błędów matematycznych, to można wskazać m.in. następujące:

1. Błędy nieuwagi (zdarzają się każdemu).

2. Błędy niekompetencji (o *mathematical cranks* ciekawie traktują książki: Dudley 1992, 1994, 1997).

3. Błędy powodowane intuicjami fizycznymi (np. próba przenoszenia twierdzenia Jordana o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie na rzekomo analogiczny przypadek powierzchni dwuwymiarowej w trzech wymiarach).

4. Błędy powodowane brakiem podstaw logicznych danej dyscypliny (np. fantazje na temat szeregów nieskończonych bez ustalonych kryteriów ich zbieżności).

5. Błędy powodowane dużą złożonością badanego problemu (np. szereg nieudanych prób udowodnienia wielkiego twierdzenia Fermata).

Warto wyraźnie podkreślić, że nie są błędami matematycznymi próby ustalenia, że w świat fizyczny daje się opisać pewnymi strukturami matematycznymi, który to opis okazuje się potem błędny:

Model kosmologiczny Keplera. Każdy wielokąt foremny wyznacza oczywiście swoisty stosunek średnicy okręgu opisanego na nim do średnicy okręgu weń wpisanego. Kepler zauważył (*Mysterium Cosmographicum*, 1596), że jeśli ustawić w odpowiedniej kolejności wielościany foremne (ośmiościan, dwudziestościan, dwunastościan, czworościan, sześcian), wraz z wpisanymi w nie oraz opisywanymi na nich sferami, to można, z dobrym przybliżeniem, traktować te sfery jako model ówcześnie znanego systemu słonecznego, ze Słońcem w centrum oraz sześcioma okrążającymi je planetami (Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn). Kepler dokładał do zaproponowanego modelu komentarze teologiczne. Refleksja nad nim naprowadziła go do sformułowania jego praw ruchu planet.

Eter, flogiston itp. Przekonanie, że fale muszą rozchodzić się w jakimś ośrodku materialnym, było podstawą założenia istnienia eteru – ośrodka, w którym miałyby rozchodzić się fale elektromagnetyczne. Eksperyment Michelsona-Morleya ukazał bezzasadność tego założenia.

Metafory Wszechświata. W zależności od stanu nauki w danej epoce, każe nam się widzieć Wszechświat a to jako mechanizm podobny do zegara, a to znów jako komputer, który coś oblicza.

Systemy geometrii. Porzucenie przekonania, że geometria Euklidesa jest prawdziwa w tym sensie, że odpowiada strukturze świata fizycznego, dokonało się poprzez zauważenie, że możliwe jest skonstruowanie innych systemów geometrii, a więc działania wewnątrz samej matematyki.

Problem odpowiedniości między światem fizycznym a strukturami matematycznymi używanymi w jego opisie nie jest tematem tego eseju. Niżej podam jedynie przykłady błędów matematycznych powodowanych intuicjami związanymi z empirią.

3.3. Przykłady z dziejów matematyki

Niekiedy sławne błędy matematyczne stają się znane także poza społecznością matematyków. Nie chcę przez to powiedzieć, że takie błędy trafiają regularnie na strony tabloidów lub że – wcześniej – były tematem żywo dyskutowanym w maglach i na jarmarkach. Jednak niektóre z nich znajdowały szerszy oddźwięk społeczny, chociażby za przyczyną zainteresowania się nimi filozofów. Do najbardziej znanych przykładów należą:

Próby udowodnienia V postulatu Euklidesa. Próby udowodnienia postulatu o równoległych liczą sobie wiele stuleci. Początkowo żywiono błędne przekonanie, że postulat ten można udowodnić na gruncie pozostałych postulatów systemu Euklidesa. Nie będę dokładnie omawiać tej sprawy, ponieważ jest ona doskonale znana z licznych opracowań. W największym skrócie przypomnę jednak podejmowane próby:

Proklos (410–485). Sformułował komentarze dotyczące błędnych dowodów, a potem podał swój, także błędny dowód, a właściwie znalazł postać równoważną aksjomatowi o równoległych.

Alhazen (965–1040). Badał V postulat, wprowadził pojęcie *równoległoboku Lamberta*, używał pojęć związanych z ruchem w geometrii, sformułował pierwsze twierdzenia geometrii eliptycznej i hiperbolicznej.

Omar Chajjiam (1048–1131). Jako pierwszy nie popełnił błędu *petitio principii* w swoich rozważaniach dotyczących aksjomatu o równoległych, lecz proponował wyprowadzić go z bardziej intuicyjnej zasady. Nie akceptował korzystania z pojęcia ruchu w geometrii. Wprowadził pojęcie *równoległoboku Saccheriego*. Rozpoznał trzy możliwości powstające poprzez pominięcie postulatu o równoległych z geometrii Euklidesa.

Nasir ad-Din Tusi (1201–1274). Usiłował udowodnić aksjomat równoległych poprzez dowód nie wprost. Rozważał, ale odrzucał geometrię typu eliptycznego lub hiperbolicznego.

Giordano Vitale (1633–1711). Zauważył, że jeden ze wcześniejszych dowodów zależał od założenia, iż linia, której wszystkie punkty są równoodległe od danej prostej sama też musi być linią prostą.

Girolamo Saccheri (1667–1733). Próbował udowodnić aksjomat o równoległych przez dowód nie wprost. Ponieważ aksjomat ten jest równoważny stwierdzeniu, iż suma kątów w trójkącie wynosi π, więc rozważał oba przypadki: gdy suma ta byłaby większa od π oraz gdy byłaby mniejsza od π. Konsekwencją pierwszego przypadku byłaby skończoność linii prostych, co jest sprzeczne z postulatem Euklidesa, mówiącym iż linię prostą można dowolnie przedłużać (jednak taka właśnie jest sytuacja w geometrii eliptycznej). W drugim przypadku Saccheri otrzymał szereg konsekwencji, które uznał za wykluczone, gdyż sprzeczne z intuicjami. Między innymi, konsekwencją taką było istnienie trójkątów o maksymalnej powierzchni (jednak taka właśnie jest sytuacja w geometrii hiperbolicznej).

Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Używał *równoległoboku Lamberta*, czyli równoległoboku o trzech kątach prostych. Wyeliminował możliwość, że pozostały z czterech kątów jest rozwarty i udowodnił szereg twierdzeń przy założeniu, iż jest on ostry, m.in. twierdzenie głoszące, że suma kątów w trójkącie wzrasta, gdy zmniejsza się jego pole. Nie uważał, że otrzymane wyniki przeczą intuicji, spekulował nawet na temat możliwego dla nich modelu.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Rozważał system geometrii z zaprzeczeniem aksjomatu o równoległych, ale nigdy nic na ten temat nie opublikował.

Mikołaj Łobaczewski (1792–1856). W 1829 roku opublikował rozprawę o geometrii, w której czwarty kąt w równoległoboku Lamberta jest ostry.

János Bolyai (1802–1860). Niezależnie od Łobaczewskiego, opublikował w 1831 roku pracę o takiej samej geometrii.

Łobaczewski, Bernhard Riemann (1826–1866) i *Henri Poincaré* (1854–1912) rozwinęli geometrię eliptyczną i hiperboliczną.

Eugenio Beltrami (1835–1899). Udowodnił w 1868 roku niezależność aksjomatu o równoległych od pozostałych aksjomatów geometrii Euklidesa.

W tych zmaganiach widoczne zatem jest uwalnianie się od złudnych podszeptów intuicji oraz zasadnicza zmiana perspektywy, polegająca na przyjęciu, iż rozważany postulat może być niezależny od pozostałych. Potwierdzenie tej możliwości zaowocowało opracowaniem całkiem nowego spojrzenia na geometrię.

Antynomie logiczne i matematyczne. Dobrze znane z licznych opracowań są też błędy, które doprowadziły do antynomii w podstawach matematyki. Te również wyliczymy jedynie hasłowo:

Antynomia Russella. Nieograniczone stosowanie aksjomatu wyróżniania prowadzi do sprzeczności: nie jest tak, iż dowolna własność wyznacza zbiór. Antynomię Russella otrzymujemy, gdy zapytamy, czy jest zbiorem ogół tych wszystkich elementów, które nie są swoimi elementami.

Paradoks Berry'ego. Rozważmy określenie: „Najmniejsza liczba naturalna, której nie można jednoznacznie określić wyrażeniem o mniej niż stu wyrazach”. Wydaje się, że określenie to prowadzi do kolizji semantycznej, gdyż ma mniej niż sto wyrazów, a dla dowolnej własności liczb naturalnych istnieje najmniejsza liczba o tej własności. Nieporozumienie wynika tu oczywiście z tego, że pojęcie definiowalności musi być zrelatywizowane do języka.

Antynomia Nelsona-Grellinga. Nazwijmy przymiotnik *autologicznym*, gdy ma cechę, którą orzeka (np.: polski, wielosylabowy, ale nie: zielony). Natomiast *heterologicznym* nazwiemy przymiotnik, który nie ma cechy, którą orzeka (np.: dwusylabowy). Wydaje się, że każdy przymiotnik jest albo autologiczny, albo heterologiczny. Kłopot jednak powstaje, gdy zapytamy o to, czy przymiotnik *heterologiczny* jest, czy nie jest heterologiczny, jak zechce się samodzielnie przekonać czytelnik. Gdzie zatem tkwi przyczyna sprzeczności? Definicje wyrazów *autologiczny* oraz *heterologiczny* wykorzystują relacje semantyczne, związki między wyrażeniami a tym, co owe wyrażenia znaczą. Są to więc definicje, które podaliśmy w metajęzyku. Wyrazy: *autologiczny* i *heterologiczny* musiałyby więc należeć zarówno do języka przedmiotowego, jak i do metajęzyka. Rozszerzenie zasobu przymiotników języka polskiego o termin *heterologiczny*, zdefiniowany wedle podanego sposobu, nie jest możliwe bez popadnięcia w sprzeczność.

Paradoks Richarda. Rozważmy wszystkie wyrażenia języka polskiego, które określają własności liczb naturalnych, np.: być liczbą parzystą, być liczbą pierwszą, być liczbą większą od 7 itp. Takich wyrażeń jest nieskończenie wiele, możemy je wszystkie ustawić w ciąg uporządkowany (powiedzmy) leksykograficznie:

$$(\dagger) \qquad W_1, W_2, W_3, \ldots$$

Gdy weźmiemy pod uwagę dowolne liczby naturalne n oraz q, to możliwe są dwa przypadki:

1. q ma własność, określoną wyrażeniem W_n
2. q nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n.

W szczególności, dla każdej liczby n: albo n ma własność, określoną wyrażeniem W_n, albo n nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n. Rozważmy teraz wyrażenie (języka polskiego; n jest tu liczebnikiem):

$$(\ddagger) \qquad n \text{ nie ma własności, określonej wyrażeniem } W_n.$$

Wyrażenie $(\ddagger)$ musi być którymś z elementów ciągu $(\dagger)$, gdyż ciąg ten z definicji zawiera wszystkie takie wyrażenia. Niech p będzie liczbą taką, że $(\ddagger)$ jest identyczne z W_p.

Tak więc, dla każdej liczby n: n ma własność określoną wyrażeniem W_p dokładnie wtedy, gdy n nie ma własności, określonej wyrażeniem W_n.

W szczególnym przypadku, dla n równej p otrzymujemy z tego równoważność następujących dwóch zdań:

1. p ma własność, określoną wyrażeniem W_p

2. p nie ma własności, określonej wyrażeniem W_p.

Ponieważ żadne zdanie nie jest równoważne swojemu zaprzeczeniu, otrzymaliśmy sprzeczność. Również w tym przypadku przyczyna sprzeczności tkwi w tym, że język polski zawiera własny metajęzyk. To właśnie pozwala na przyjęcie, że wyrażenie $(\ddagger)$ jest jednym z wyrażeń w ciągu $(\dagger)$. W przypadku języków sformalizowanych, gdzie wyrażenia języka przedmiotowego odróżniamy od wyrażeń jego metajęzyka, to ostatnie przejście nie byłoby uzasadnione.

Przypomnę teraz w skrócie wybrane przykłady sytuacji, w których mieliśmy do czynienia z błędami popełnionymi przez znanych matematyków (wykorzystuję tu m.in. przykłady omówione w Posamentier i Lehmann 2013):

Galileusz: brachistochrona. Brachistochrona to krzywa najszybszego spadku: to krzywa, jaką zakreśli punkt materialny poruszający się pod wpływem siły grawitacji (bez uwzględnienia tarcia) w możliwie najkrótszym czasie. Rozwiązanie problemu brachistochrony zaproponowane przez Galileusza w 1638 roku było błędne: próbował on wykazać, że taką krzywą będzie łuk okręgu (a nie, jak argumentował, żadna łamana, złożona z cięciw tego okręgu). Brachistochrona nie jest jednak łukiem okręgu, ale fragmentem cykloidy. Johann Bernoulli w 1696 roku postawił problem brachistochrony i opublikował rozwiązanie w następnym roku. Także inni współcześni mu matematycy rozwiązali ten problem (Jakob Bernoulli, Izaak Newton, Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus oraz Guillieme de l'Hôspital). Już Johann Bernoulli zauważył, że brachistochrona jest tautochroną: krzywą, po której czas staczania się masy punktowej, pod wpływem stałej siły ciężkości, do najniższego jej punktu jest taki sam, niezależnie od punktu startowego owej masy na tej krzywej. Huyghens wykazał, że ewolwentą cykloidy jest przystająca cykloida. Badania tych krzywych przyczyniły się do rozwoju rachunku wariacyjnego.

Euler: sumowanie szeregów. Leonhard Euler był mistrzem w operowaniu szeregami nieskończonymi. W 1735 roku Euler podał argumentację za tym, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Zakładał, że pewne wyniki dotyczące skończonych wielomianów mają zastosowanie także w przypadku szeregów nieskończonych. Dopiero twierdzenie o faktoryzacji Weierstrassa dostarcza poprawnych podstaw teoretycznych dla wchodzących w grę rozważań.

Jaką liczbą jest ∞? Euler (który traktował ∞ jak liczbę), uzasadniał, iż $\infty < -1$, ponieważ:

1. $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \frac{1}{1-2x}$; podstawiając $x = 1$ mamy: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1$
2. Skoro $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = \infty$, a kolejne wyrazy tego szeregu są nie większe od odpowiadających im wyrazów szeregu $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, to $\infty < -1$.

Czytelnik pamiętający warunki, przy których suma nieskończonego szeregu geometrycznego jest zbieżna, z łatwością zauważy nieprawidłowość w powyższym rozumowaniu.

Euler: 36 oficerów. Rozważmy grupę 36 oficerów z 6 różnych regimentów, o 6 różnych stopniach (w każdym z regimentów). Czy można ich ustawić w czworobok w ten sposób, aby żaden rząd ani żadna kolumna nie zawierała oficerów z tego samego regimentu lub tego samego stopnia? Euler postawił hipotezę, że nie istnieją kwadraty grecko-łacińskie rzędu $n = 4k + 2$ dla wszystkich $k \geqslant 1$. Istotnie, nie istnieje taki kwadrat rzędu 6 (czyli wspomniany problem 36 oficerów nie ma pozytywnego rozwiązania), ale w 1959 roku udowodniono, że można znaleźć takie kwadraty dla wszystkich liczb o postaci $4k + 2$, różnych od 6.

Pierwiastniki. Rozwiązania równań algebraicznych pierwszego oraz drugiego stopnia znane są od czasów zamierzchłych. Rozwiązania takich równań stopnia trzeciego i czwartego znane były już w XVI wieku. Mogło to sugerować, że równanie dowolnego stopnia daje się rozwiązać przez pierwiastniki. W 1799 roku Paolo Ruffini podał niekompletny dowód niemożliwości rozwiązania dowolnych równań stopnia piątego przez pierwiastniki. Pełny dowód podał Niels Abel w 1823 roku. Évariste Galois także tego dowiódł, przy czym jego wyniki opublikowano pośmiertnie w 1846 roku.

Cauchy: zbieżność ciągów funkcyjnych. Augustin Cauchy ma niezwykłe zasługi dla rozwoju analizy matematycznej, którą opierał na pojęciach granicy oraz ciągłości. Posługiwał się nieskończenie małymi w charakterystyce ciągłości i zbieżności. Wciąż żywe są dyskusje czy Cauchy popełnił poważne błędy w niektórych ze swoich twierdzeń (np. dotyczących ciągłości granicy ciągu funkcyjnego), czy też chodzi w tych przypadkach o swoiste i niezbyt precyzyjne rozumienie pewnych pojęć (np. wielkości nieskończenie małych).

Lebesgue: rzuty zbiorów borelowskich. Henri Lebesgue przyjął za oczywiste w jednej ze swoich prac, że rzuty zbiorów borelowskich są borelowskie. Nie jest to w ogólności prawdą i wykrycie tego faktu przyczyniło się do rozwoju teorii zbiorów rzutowych oraz, ogólniej, deskryptywnej teorii mnogości.

Wielkie Twierdzenie Fermata i jednoznaczność rozkładu. Jedna z nieudanych prób udowodnienia Wielkiego Twierdzenia Fermata zawdzięcza swoją porażkę nieuprawnionemu założeniu jednoznaczności rozkładu na czynniki w pewnych strukturach. Jednak wydaje się, że to nie Wielkie Twierdzenie Fermata zainspirowało Ernsta Kummera do wprowadzenia jego liczb idealnych, które umożliwiały uzyskanie jednoznaczności rozkładu. Dalsze uogólnienie otrzymuje się w teorii ideałów Richarda Dedekinda. Uważam za niezwykle ważne to, że Ernst Kummer odważnie zaproponował istnienie całkiem nowych bytów matematycznych (właśnie swoich *liczb idealnych*). Ich wprowadzenie gwarantowało możliwość korzystania z (jakże istotnej dla wielu rozważań algebraicznych) własności jednoznaczności rozkładu. Zachodzenie ważnej zasady stanowiło tu zatem wartość nadrzędną, dla której warto było postulować istnienie nowego rodzaju obiektów matematycznych.

Cantor: pojęcie granicy. Georg Cantor trafnie zwracał uwagę na pewne błędy logiczne popełniane wcześniej przy charakteryzowaniu liczb rzeczywistych (Cantor 1883, 565–566, tłum. J.P.):

> Przy *pierwszej* postaci definicji u podstaw leży zbiór dodatnich liczb wymiernych a_ν, oznaczany przez (a_ν) i spełniający warunek, że jakąkolwiek skończoną liczbę którychkolwiek z tych a_ν zsumujemy, to ta suma zawsze pozostaje poniżej podanej granicy. Jeśli mamy teraz dwa takie agregaty (a_ν) oraz (a'_ν), to pokazuje się w sposób ścisły, że mogą one przedstawiać trzy przypadki; albo każda część jest ciągle równie często występującą $\frac{1}{n}$-tą jedności w obu agregatach, o ile sumuje się w wystarczającej, wzrastającej skończonej liczbie ich elementy; albo jest to $\frac{1}{n}$, począwszy od pewnej ustalonej n, ciągle częściej w pierwszym agregacie niż w drugim, albo, po trzecie, jest to $\frac{1}{n}$, począwszy od pewnej ustalonej n, ciągle częściej w drugim agregacie niż w pierwszym. Zdarzeniom tym odpowiadają, gdy b oraz b' są liczbami mającymi zostać zdefiniowanymi przez agregaty (a_ν) oraz (a'_ν), ustalenia, że: w pierwszym przypadku $b = b'$, w drugim $b > b'$, w trzecim $b < b'$. Jeśli połączy się oba agregaty w nowy (a_ν, a'_ν), to daje to podstawy do definicji $b+b'$; jeśli jednak z obu agregatów (a_ν) oraz (a'_ν) utworzy się nowy $(a_\nu \cdot a'_\mu)$, w którym elementy są iloczynami wszystkich (a_ν) z wszystkimi (a'_μ), to ten nowy agregat zostaje przyjęty jako podstawa definicji iloczynu bb'.
>
> Widać, że tutaj moment tworzenia, który łączy zbiór z definiowaną przez niego liczbą, leży w *tworzeniu sumy*; musi jednak zostać podkreślone jako *istotne*, że stosuje się tylko sumowanie zawsze *skończonej* liczby elementów wymiernych, a *nie*, iż raczej najpierw mająca zostać zdefiniowaną liczba b ustalona jest jako suma $\sum a_\nu$ nieskończonego szeregu (a_ν); kryłby się tu *błąd logiczny*, ponieważ to raczej definicja sumy $\sum a_\nu$ zostaje otrzymana dopiero poprzez przyrównanie do z konieczności wprzódy zdefiniowanej *gotowej* liczby b. Sądzę, że ten dopiero przez Pana WEIERSTRASSA uniknięty błąd wcześniej popełniany był

> prawie powszechnie i z zasady nie był zauważany, ponieważ należy on do rzadkich przypadków, w których rzeczywiste błędy nie mogą wyrządzać żadnych bardziej znaczących szkód w rachunku. – Mimo to, w moim przekonaniu, z określonym wyżej błędem wiążą się wszystkie trudności, które odnajdywane są w pojęciu niewymierności, podczas gdy uniknięcie tego błędu osadza liczbę niewymierną w naszym umyśle z tą samą określonością, wyraźnością i jasnością, jak liczbę wymierną.

Cantor: nieskończenie małe. Georg Cantor był przeciwnikiem nieskończenie małych, choć stworzone w jego teorii mnogości wielkości nieskończenie wielkie w pełni akceptował (Cantor 1887). Jednak krytyka Cantora jest błędna, na co zwrócił uwagę już Ernst Zermelo, redagując w 1932 roku *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* Cantora. Pisze tam bowiem Zermelo (s. 439, tłum. J.P.):

> Nieistnienie „aktualnych nieskończenie małych wielkości" równie mało daje się udowodnić, jak nieistnienie Cantorowskich pozaskończonych, a błędny wniosek jest w obu przypadkach ten mianowicie, że nowym wielkościom przypisane zostają pewne własności zwykłych „skończonych", które nie mogą im przysługiwać. Chodzi tu o tak zwane *„niearchimedesowe"* systemy liczbowe, ciała, których istnienie może być dzisiaj uważane za bez zarzutu udowodnione. Por. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, rozdział X. W niearchimedesowym ciele uporządkowanym, w którym np. $n\zeta < 1$ dla każdej skończonej liczby całkowitej n, nie istnieje też żadna „górna granica" γ tych wielkości $n\zeta$, która mogłaby być oznaczana przez $\omega\zeta$, ponieważ przedział $(\gamma - \zeta, \gamma)$ mógłby zawierać co najwyżej *jedną* wielkość $n\zeta$ i mnożenie przez dalsze pozaskończone $\alpha > \omega$ staje się bezprzedmiotowe. Jednocześnie z „aksjomatem Archimedesa" upada nawet „aksjomat ciągłości", jak podkreślone to zostało w „Grundlagen der Geometrie" D. Hilberta. To, czy zdanie jest „aksjomatem", czy też nie jest, nie zależy od jego treści, lecz od budowy całego systemu, od definiujących system własności lub aksjomatów. Zakładając *aksjomat ciągłości* jako prawomocny, Cantor wyklucza w istocie wszystkie niearchimedesowe systemy liczbowe, nie dowodzi jednak niczego przeciw istnieniu takich „ciał uporządkowanych", w których nie zachodzi *ani* aksjomat Archimedesa, *ani* aksjomat ciągłości.

Poincaré: problem trzech ciał. Problem znalezienia opisu matematycznego ruchu trzech ciał pod wpływem ich wzajemnych zależności grawitacyjnych znajdujemy już u Newtona. Był on później intensywnie badany przez wielu znakomitych matematyków XVIII i XIX wieku. W 1887 roku król Szwecji Oskar II ufundował nagrodę za znalezienie rozwiązania problemu n ciał we wzajemnych zależnościach grawitacyjnych, spełniającego pewne warunki. Nagrodę (na wniosek Weierstrassa) otrzymał Henri Poincaré, choć jego praca nie podawała rozwiązania problemu w pełnej ogólności. W dodatku pierwsza wersja tej pracy zawierała błędy, które Poincaré poprawił w wersji pracy, która ostatecznie ukazała się drukiem. Problem trzech ciał rozwiązał w 1912 roku Karl Sundman. Praca Poincaré'go zawierała ważne idee, które przyczyniły się później do powstania teorii chaosu.

Paradoks Bertranda. Przypomnijmy następujące znane zadanie: jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana cięciwa okręgu jednostkowego jest dłuższa od boku trójkąta wpisanego w ten okrąg? Dopóki nie określimy wyraźnie, jaką przestrzeń zdarzeń elementarnych rozważamy, zadanie nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Możemy uzyskać wyniki: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{4}$, w zależności od wyboru tej przestrzeni. Prawdopodobieństwo zależy od wprzódy przyjętej miary. Podobnie, niezależność zdarzeń nie jest jakąś inherentną własnością samych zdarzeń, ale zależy od przyjętej miary.

Kawaler de Méré, Monty Hall problem, truel. Błędne oszacowania szans zajścia zdarzeń mogą prowadzić do uszczerbku na dobrej opinii lub zdrowiu, a nawet do utraty życia.

Nieskomplikowanego, a często popełnianego błędu probabilistycznego dotyczy zagadka zwana *Monty Hall Problem*. Mamy trzy pudełka, dokładnie jedno zawiera nagrodę, dwa pozostałe są puste. Ja wiem, w którym pudełku jest nagroda, ty nie. W pierwszym ruchu masz wybrać pudełko. Nie pokazuję ci jego zawartości, ale otwieram jedno z pozostałych pudełek, pokazując, iż jest ono puste (oczywiście zawsze mogę to zrobić, niezależnie od tego, czy twój pierwszy wybór padł na pudełko z nagrodą, czy też pudełko puste). Pytam teraz, co jest dla ciebie bardziej korzystne w drugim ruchu: pozostać przy pierwszym wyborze czy też zmienić swój pierwotny wybór na pozostałe, dotąd zamknięte pudełko. A może oba te wybory dają równe szanse trafienia wygranej w drugim ruchu? Tak właśnie sądzi, bezrefleksyjnie, większość populacji. Jednak prostym rachunkiem można przekonać się, że zmiana pierwotnego wyboru daje szanse wygranej równe $\frac{2}{3}$, a nie $\frac{1}{2}$.

Kawaler de Méré przedstawił Blaise Pascalowi w 1654 roku problem (rozważany już wcześniej przez Lukę Pacciolego oraz Nicolo Tartaglię, jednak z błędami bądź ograniczeniami) jak podzielić wygraną w grze między dwoma graczami, gdy została ona przerwana przed rozstrzygnięciem, polegającym na tym, że wygrywa gracz, który wygra określoną liczbę rund z przewidywanej całkowitej ich liczby. Pascal korespondował na temat tego problemu z Fermatem. Uzyskali oni obaj poprawne matematycznie rozwiązania, co dało znaczący impuls rozwojowi rachunku prawdopodobieństwa.

Trzy osoby A, B i C przeprowadzają pojedynek w trójkącie (po angielsku: *truel*). Strzelają po kolei (wedle wylosowanego wprzódy porządku). Celność

A to 100 procent, B 80 procent, a C 50 procent. Pojedynek trwa tak długo, aż przy życiu zostanie tylko jedna osoba. Wbrew pochopnym oszacowaniom, to właśnie C ma największe szanse przeżycia pojedynku (o ile wybierze trafną strategię).

Twierdzenie o czterech barwach. Jaka jest liczba kolorów wystarczająca do pokolorowania dowolnej mapy na płaszczyźnie? Hipotezę, że wystarczą cztery kolory, postawił w 1840 roku August Möbius (a niezależnie od niego w 1852 Francis Guthrie). Próbował to udowodnić Alfred Kempe w 1879 roku, a także Peter Guthrie Tait w 1880 roku. Niepoprawność pierwszego z tych dowodów wykazał Percy Heawood w 1890 roku, a drugiego Julius Petersen w 1891 roku. Heawood udowodnił w 1891 roku, że wystarczy pięć kolorów oraz rozważał problem dla różnych powierzchni. Heinrich Heesh próbował na początku drugiej połowy XX wieku rozwiązać problem metodami komputerowymi. Dowód twierdzenia o czterech barwach podany został w 1976 roku przez Kennetha Appela i Wolfganga Hakena. Był to dowód opracowany na podstawie programu komputerowego. W 1989 roku autorzy ci przedstawili bardziej szczegółowy dowód. W 2005 roku dowód twierdzenia o czterech barwach został poddany formalizacji z użyciem systemu Coq.

Błędne hipotezy w teorii liczb. Wskazówki oparte na rozumowaniach przez indukcję niezupełną stanowić mogą inspirację dla niektórych twierdzeń i hipotez w teorii liczb. Wydaje się całkiem naturalne, że zauważając jakąś regularność dla wielu przypadków, skłonni jesteśmy ryzykować przypuszczenie, że owa regularność jest bezwyjątkowa. Oczywiście potem trzeba jednak poddać taką hipotezę próbom udowodnienia jej. Oto kilka przykładów zwodniczych regularności, które doprowadziły do błędnych hipotez:

Liczby Mersenne'a. Są to liczby pierwsze o postaci $2^n - 1$. Popełniono wiele omyłek, w ustalaniu dla których n istnieją liczby Mersenne'a.

Liczby Fermata. Są to liczby o postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$. Fermat twierdził, że wszystkie liczby tej postaci są pierwsze, jednak już Euler pokazał w 1732 roku, że F_5 jest liczbą złożoną:

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Sumy potęg. Euler twierdził, że żadne z równań:

$$a^3 + b^3 = c^3,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4,$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$$

(itd., przez analogię) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Znaleziono jednak kontrprzykłady (dla sum czwartych i sum piątych potęg), a nawet pokazano, że istnieje nieskończenie wiele kontrprzykładów w przypadku czwartych potęg.

Słynne nierozwiązane problemy matematyczne przyciągają uwagę nie tylko profesjonalistów, ale także mniej lub bardziej kompetentnych amatorów. Pojawiają się więc liczne niepoprawne dowody np. hipotezy Goldbacha lub hipotezy Riemanna, a wcześniej podobnie było z Wielkim Twierdzeniem Fermata.

Spójrzmy na kilka wybranych sytuacji z bardziej współczesnych dziejów matematyki, w których proponowano błędne rozwiązania problemów.

Hipoteza Borsuka. Karol Borsuk postawił w 1933 roku pytanie (Borsuk 1933): Czy każdy zbiór o średnicy 1, w przestrzeni euklidesowej wymiaru n, można rozbić na $n + 1$ zbiorów o średnicach mniejszych od 1? Łatwo zauważyć, że w przestrzeni trójwymiarowej kulę można pokryć czterema zbiorami o średnicy mniejszej od średnicy tej kuli (podobnie w wyższych wymiarach). Odpowiedź dla dowolnych zbiorów w przestrzeni trójwymiarowej jest pozytywna. Hipoteza, że jest tak dla dowolnego n jest jednak fałszywa: dla wystarczająco dużych n odpowiedź jest negatywna (Kahn i Kalai 1993). Obecnie wiadomo, że jest taka dla wszystkich $n > 297$. Dodam na marginesie, że stale (2020) nierozstrzygnięta jest hipoteza Hadwigera: czy każdą n-wymiarową bryłę wypukłą można pokryć 2^n jej mniejszymi kopiami.

Hipoteza Mertensa. Przypomnę definicję funkcji Möbiusa $\mu(x)$. Dla dowolnej liczby naturalnej x jej wartość związana jest w następujący sposób z rozkładem x na czynniki pierwsze:

1. Jeśli jakiś czynnik w tym rozkładzie liczby x się powtarza, to przyjmujemy $\mu(x) = 0$.

2. Jeśli wszystkie czynniki rozkładu są różne, to gdy jest ich parzysta liczba, to niech $\mu(x) = -1$.

3. Jeśli wszystkie czynniki rozkładu są różne, to gdy jest ich nieparzysta liczba, to niech $\mu(x) = 1$.

Niech teraz $M(x)$ (funkcja Mertensa) będzie równe sumie wszystkich $\mu(y)$ dla $y \leqslant x$. Hipoteza Mertensa głosiła, że dla wszystkich $n > 1$ zachodzi: $|M(n)| < \sqrt{n}$. To, że hipoteza Mertensa jest fałszywa, pokazano w Odlyzko i Riele 1985. Jednak liczby, które stanowią kontrprzykłady, są bardzo duże: wiadomo obecnie, że taki kontrprzykład musi być większy od 10^{14}, znane jest także ograniczenie górne dla pierwszego takiego kontrprzykładu (wynosi ono $\exp(1.59 \times 10^{40})$).

Hipoteza Mertensa ważna jest m.in. z tego względu, że jest związana z hipotezą Riemanna: mianowicie ta ostatnia jest równoważna temu, że $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ dla wszystkich $\varepsilon > 0$. Dodam na marginesie, że własności funkcji $M(n)$ wykorzystywane są w heurystycznych, intuicyjnych argumentacjach na rzecz *prawdziwości z prawdopodobieństwem 1* hipotezy Riemanna – zob. np. omówienie w Davis i Hersh 1994.

Problem Malfattiego. Gian Francesco Malfatti (1731–1807) sformułował zadanie dotyczące wycięcia trzech cylindrycznych kolumn z bloku marmuru będącego prostopadłościanem o podstawie trójkątnej w taki sposób, aby całkowita objętość tych kolumn była największa. Problem redukuje się do zadania z planimetrii, gdyż (przy stałej wysokości owego bloku marmuru) wystarczy rozważyć przekroje tych kolumn i ich położenie w trójkącie. *Okręgami Malfattiego* (w danym trójkącie) nazywa się trzy okręgi wzajemnie styczne, z których każdy jest styczny do dwóch boków rozważanego trójkąta. Malfatti uważał, że takie okręgi stanowią rozwiązanie omawianego problemu. Hipoteza ta jest błędna. W przypadku niektórych trójkątów (w szczególności: trójkątów równoramiennych o małym kącie w wierzchołku naprzeciw podstawy) taki układ trzech okręgów nie spełnia warunku maksymalności, jak pokazano w Lob i Richmond 1930.

Grafy Perko. Węzły 10_{161} oraz 10_{162} zwane są *parą Perko*. W istocie reprezentują one ten sam węzeł, co dość długo umykało uwadze matematyków. W 1973 roku Kenneth Perko ustalił, że opracowanym wcześniej katalogu węzłów 10_{161} oraz 10_{162} są tym samym węzłem. Dodam, że nawet w niektórych współczesnych źródłach przywołuje się błędne rysunki dla pary Perko. Katalogowanie węzłów w przestrzeni trójwymiarowej jest zadaniem trudnym (w czterech wymiarach każdy węzeł daje się rozsupłać). Używa się do tego specjalnych niezmienników, zaawansowanych środków z topologii algebraicznej. Czytelnika zachęcam do zastanowienia się, czym jest dopełnienie węzła (względem całej przestrzeni).

Zadanie Freudenthala. Ta znana zagadka (Freudenthal 1969) była popularyzowana m.in. przez Martina Gardnera (Gardner 1979). Pierwsza wersja podana przez Gardnera zawierała jednak uproszczenie, przy którym zagadka nie ma jednoznacznego rozwiązania. Niech osoby S oraz P wiedzą, że: liczby naturalne x oraz y są obie większe od 1, natomiast ich suma jest mniejsza od 100. Ponadto, S zna tylko sumę $x + y$ tych liczb, zaś P zna tylko ich iloczyn $x \cdot y$. Wreszcie, S wie, że P zna iloczyn $x \cdot y$, a P wie, że S zna sumę $x + y$. Przypuśćmy teraz, że miał miejsce następujący dialog:

P: Nie wiem, jakimi liczbami są x oraz y.
S: Wiem, że tego nie wiesz.
P: Teraz już wiem, jakie to liczby.
S: Teraz ja też już wiem, jakie to liczby.

Wiedząc, że ów dialog miał miejsce, my także możemy ustalić, o jakie liczby x oraz y chodzi. Ponadto, możemy pokazać, że zagadka ma dokładnie jedno rozwiązanie (przy podanych warunkach). Wreszcie, można także ustalić rolę poszczególnych warunków, jeśli chodzi o jednoznaczność rozwiązania. Rozwiązaniem jest para $(4, 13)$, natomiast błąd Gardnera polegał na żądaniu, aby suma szukanych liczb była mniejsza od 20, co czyniło rozwiązanie niejednoznacznym.

3.4. Przykłady z dziejów logiki

Dodam jeszcze kilka – dobranych trochę *ad hoc* – znanych błędów logicznych. Wybrałem te z nich, z którymi zetknąłem się przy okazji wcześniejszego omawiania odnośnych problemów.

Lewis Carroll: rozwiązywanie łańcuszników. Podręcznik Carroll 1896 zawiera niezliczone przykłady łańcuszników, z których większość jest nawet bardzo zabawna pod względem fabuły. Carroll pokazuje jednak pewne ogólne metody rozwiązywania problemów z łańcusznikami. Po pierwsze, zauważa następujące prawo rachunku zbiorów:

$$(\bigstar) \quad (A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C' = \emptyset) \rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Wzór $(\bigstar)$ jest oczywisty: poprzednik implikacji $(\bigstar)$ głosi, że $A \subseteq C'$ oraz $B \subseteq C$. Wzór $(\bigstar)$ to po prostu wersja reguły rezolucji w języku algebry zbiorów. Carroll znał zatem tę regułę. Przyjmował jednak początkowo pewne dalsze reguły, natury czysto heurystycznej, które już poprawne nie były, albowiem chociaż w pewnych przypadkach sprawdzały się dobrze, to w ogólności nie stanowiły poprawnego algorytmu. Carroll twierdził mianowicie początkowo, że stosowanie reguły $(\bigstar)$ wystarcza, aby znaleźć konkluzję dla wszystkich ciągów ogólnych zdań kategorycznych, zawierających różne nazwy ogólne. Jeśli w takim ciągu nazwa X występuje zarówno pozytywnie (niezaprzeczona), jak i negatywnie (z negacja przynazwową), to na mocy $(\bigstar)$, może zostać wyeliminowana: nie wystąpi w konkluzji. Pozostałe nazwy w konkluzji wystąpią. Ta heurystyczna procedura nie zawsze jednak prowadzi do poprawnych wyników. Carroll odkrył tę trudność i poradził sobie z nią w ten sposób, że zaczął rozważać dowody nie wprost, które nazywał *metodą drzew*. Istotnie, był to pierwowzór metody tablic analitycznych, która – w różnych postaciach – zaczęła być popularna w logice od połowy XX wieku. Pisałem o tych dokonaniach Carrolla w Pogonowski 2008.

Ernst Zermelo: korespondencja z Gödlem. Zachowała się niewielka korespondencja między Zermelą a Gödlem. Wiadomo też, że spotkali się i dyskutowali w Bad Elster w 1931 roku. Gödel odpiera zarzuty Zermela dotyczące konstrukcji jego zdania nierozstrzygalnego w arytmetyce, wskazując, że ten drugi myli wyrażenia z nazwami wyrażeń. W tym Gödel ma rację. Pozostaje jednak jeszcze sprawa samego rozumienia pojęcia dowodu. U Gödla dowody są konstrukcjami finitarnymi, natomiast Zermelo starał się zaproponować takie rozumienie dowodu, aby uchwycić także konstrukcje infinitarne (we współczesnej terminologii: w języku $L_{\infty\omega}$). Zermelo stał na stanowisku, że wszystkie problemy matematyczne są rozstrzygalne, co oczywiście musi przekładać się na stosowną moc dedukcyjną logiki, w której dowody przeprowadzamy. O korespondencji Zermela z Gödlem krótko piszę w Pogonowski 2006.

Ernst Zermelo: paradoks Skolema. W swojej drugiej aksjomatyce dla teorii mnogości (Zermelo 1930) Zermelo postulował istnienie pozaskończonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych, które były dla niego w sposób naturalny związane z jego *dziedzinami normalnymi*. Ponieważ ta wersja teorii mnogości była sformułowana w języku drugiego rzędu, Zermelo mógł dowodzić twierdzeń ustalających jednoznaczność (z dokładnością do izomorfizmu) swoich dziedzin. Ze wstrętem wypowiadał się o pomysłach rozważania przeliczalnych modeli teorii mnogości. W szczególności, krytykował *paradoks Skolema* – zob. np. van Dalen i Ebbinghaus 2000, gdzie przedrukowano tekst Zermela *Der Relativismus in der Mengenlehre und der sogenannte Skolem'sche Satz*, który znajduje się w *Nachlaß* Zermela w bibliotece Universität Freiburg. Wedle Dirka van Dalena i Heinza-Dietera Ebbinghausa, błąd Zermela polegał na nieuprawnionym założeniu, dotyczącym domkniętości modelu na dowolne sumy i iloczyny. Zermelo dowiódł w istocie, że dla danego zbioru przeliczalnego M, każdy podzbiór zbioru potęgowego $\wp(M)$, który jest domknięty na dowolne sumy oraz iloczyny (oraz dopełnienia względem M) i którego sumą jest M, musi być albo skończony, albo równoliczny z $\wp(M)$. Warto przy okazji przypomnieć, że każda nieskończona σ-algebra Boole'a jest nieprzeliczalna (a dokładniej, mocy kontinuum).

Aksjomat ograniczenia Fraenkla. Abraham Fraenkel sformułował w 1922 roku aksjomat ograniczenia, głoszący, że istnieją tylko te zbiory, których istnienie można udowodnić w teorii mnogości. Nie był to oczywiście aksjomat języka przedmiotowego, był natomiast jednym z *aksjomatów ekstremalnych*, które miałyby gwarantować jednoznaczność odniesienia przedmiotowego teorii. Fraenkel rozważał różne rodzaje takiej ewentualnej jednoznaczności (odpowiadające, w dzisiejszej terminologii, zupełności i kategoryczności). Trzeba oczywiście pamiętać, że te rozważania prowadzone były jeszcze przed wynikami Gödla dotyczącymi niezupełności. Aksjomaty ograniczenia były krytykowane od samego początku ich sformułowania (choć trochę inaczej rzeczy miały się z aksjomatem konstruowalności Gödla), bodaj najbardziej wnikliwa krytyka zawarta jest w Fraenkel, Bar-Hillel i Levy 1973. Warto jednak zwrócić uwagę, że owa krytyka używa po części argumentów natury pragmatycznej: odrzucamy aksjomaty ograniczenia, a przyjmujemy np. aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych, ponieważ chcemy, aby uniwersum teorii mnogości było możliwie najbogatsze.

Gabelbarkeitssatz Rudolfa Carnapa. Problemu jednoznaczności odniesienia przedmiotowego teorii dotyczyło też twierdzenie (sformułowane w języku teorii typów), które próbował udowodnić Carnap i wedle którego pojęcia *kategoryczności* i *zupełności* miałyby być tożsame zakresowo (Carnap 1930). Oczywiście kategoryczność implikuje zupełność, ale nie na odwrót. Warunek wystarczający dla zachodzenia implikacji odwrotnej podano w Lindenbaum i Tarski 1936. Obecnie prowadzi się badania dotyczące związków między kategorycznością a zupełnością (a dokładniej, dotyczące liczby wzajemnie nieizomorficznych modeli teorii). Krytyczną analizę wspomnianych pomysłów Carnapa zawiera praca Awodey i Carus 2001.

König: hipoteza continuum. Już Georg Cantor podejmował wielokrotne, nieudane próby udowodnienia hipotezy continuum. Na III Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Heidelbergu w 1904 roku Julius König ogłosił, że udowodnił tę hipotezę. W swojej argumentacji wykorzystywał jednak pewne twierdzenie Bernsteina dotyczące potęgowania alefów, które w pełnej ogólności nie zachodziło. Ernst Zermelo wskazał (następnego dnia) na tę lukę w dowodzie. W *Mathematische Annalen* znaleźć można artykuły Königa oraz Bernsteina, komentujące tę sprawę (Bernstein 1905, König 1905).

Program Hilberta i jego ograniczenia. W oryginalnym programie Hilberta chodziło m.in. o możliwość oparcia całości matematyki na podstawach aksjomatycznych, udowodnienie jej niesprzeczności oraz zupełności, w dodatku środkami finitystycznymi. Twierdzenia limitacyjne, udowodnione w pierwszej połowie XX wieku, ukazały pewne ograniczenia, jeśli chodzi o realizację tego programu. Istnieje na ten temat olbrzymia literatura, nie ma powodu, aby dodawać w tym miejscu jakiekolwiek kompilacyjne uwagi. Podkreślmy jedynie, że nie twierdzimy, iż program Hilberta był błędny: może on być realizowany częściowo, z dobrze określonymi ograniczeniami.

Rzekoma rozstrzygalność KRP. Alonzo Church udowodnił w 1936 roku nierozstrzygalność klasycznej logiki pierwszego rzędu. Leon Gumański argumentował jednak za rozstrzygalnością węższego rachunku funkcyjnego (Gumański 1983). Argumentacja ta nie znalazła akceptacji środowiska logików (zob. np. Mycka i Rosa 2018).

3.5. Dydaktyka matematyki

Dla dydaktyki matematyki ważne jest rozpoznanie typowych błędów uczniowskich i powodów ich popełniania. Istotne jest również to, czy nauczyciele nie popełniają błędów w nauczaniu matematyki. Wreszcie, refleksji wymaga także to, jak uczniowie nabywają podstawowe intuicje matematyczne i jak wiele z ich kreatywności intelektualnej, z którą przychodzą do szkoły, można nie utracić bezpowrotnie oraz wykorzystać dla lepszego rozumienia nauczanej matematyki. Podam przykłady typowych błędów uczniowskich. Dodam też nieco błędów popełnianych przez studentów (nawet studentów matematyki). Przywołam także wybrane komentarze dydaktyków matematyki, dotyczące: diagnozowania, profilaktyki, metod naprawiania błędów matematycznych.

3.5.1. Błędy uczniowskie

Podzielę błędy uczniowskie wedle dyscyplin matematycznych, nauczanych w szkole.

Błędy arytmetyczne

1. Dodawanie ułamków. Zdarzają się takie próby: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$. Przy okazji omawiania takiego błędu można wspomnieć na przykład o drzewie Sterna-Brocota, będącym ciekawą reprezentacją liczb wymiernych.

2. Kłopoty z liczbami ujemnymi. Jak przystępnie wytłumaczyć dziecku, że iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni? Najlepszym rozwiązaniem jest chyba odwołanie się do prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania i posłużenie się stosownie dobranymi przykładami.

3. Błędy związane z obliczaniem procentów. Na przykład: cena towaru została najpierw obniżona o 10 procent, a następnie obniżono nową cenę o 5 procent. Jakim procentem ceny wyjściowej jest cena ostateczna? Wielu uczniów ma problemy z tym rachunkiem.

4. Błędy liczenia średniej. Podróż w jedną stronę odbyła się z prędkością 60 km/h, a podróż powrotna z prędkością 30 km/h. Jaka była średnia

prędkość podróży w obie strony? Złą odpowiedzią jest średnia arytmetyczna podanych prędkości, czyli 45 km/h. Trzeba brać pod uwagę czas obu podróży. Skoro podróż powrotna odbywała się z prędkością 30 km/h, to czas tej podróży był dwa razy dłuższy niż podróży z prędkością 60 km/h. Właściwą odpowiedzią jest zatem $\frac{60+30+30}{3} = 40$ km/h. Tak naprawdę szukamy średniej harmonicznej obu podanych wartości.

Błędy algebraiczne

1. Dzielenie przez zero. Prowadzi do katastrofy. Jak przystępnie tłumaczymy uczniom, że dzielenie przez zero nie jest możliwe?

2. Nieuprawnione założenia o własnościach operacji, np. założenie, iż branie średniej arytmetycznej jest operacją łączną.

3. Kłopoty w odróżnianiu typów układów równań: niezależnych, zależnych, sprzecznych. Weźmy np. układ równań:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \qquad x - y = 4$$

   Mnożąc pierwsze równanie przez xy i stosownie porządkując, otrzymujemy: $(x-y)^2 = 0$. Jeśli przyjmiemy, że z tego wynika $x - y = 0$, to biorąc pod uwagę drugie równanie, otrzymamy absurd: $0 = 4$. Czytelnik zechce wskazać błąd w tym rozumowaniu.

Błędy geometryczne

1. Wyobrażanie sobie punktów jako obszarów. Czasami uczniowie „widzą" punkty jako mniejsze lub większe – np. w sytuacji, gdy przez punkt przechodzi mniej lub więcej prostych, rozważanych w zadaniu.

2. Ile przecięć tworzą przekątne sześciokąta wypukłego? Jeśli uczeń narysuje „prototypowy" sześciokąt wypukły, z którym najczęściej się spotyka, to poda jako rozwiązanie 13. Dopiero rozważenie całkiem dowolnego, a nie regularnego sześciokąta foremnego ukazuje, że w takim przypadku szukanych przecięć jest 15.

Błędy analizy

1. Utrzymywanie, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Ta implikacja jest fałszywa, natomiast prawdziwa jest implikacja do niej odwrotna.

2. Błędy przechodzenia do granicy. Dość popularnym trikiem jest próba wykazania, że suma długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym równa jest długości przeciwprostokątnej. Niech wierzchołek przy kącie prostym naszego trójkąta będzie początkiem układu współrzędnych, a przyprostokątne niech leżą na osiach współrzędnych. Aproksymujemy przeciwprostokątną przez szereg łamanych, których odcinki są równoległe do osi współrzędnych, czyli – mówiąc obrazowo – budujemy schody o coraz krótszych i niższych stopniach (oparte na przeciwprostokątnej; można też aproksymować „z góry" oraz „z dołu"). Odcinki poziome każdej takiej łamanej dają w sumie jedną przyprostokątną, zaś odcinki pionowe dają w sumie drugą przyprostokątną. Ponadto, coraz „drobniejsze" schody różnią się coraz mniej od odcinka, którym jest przeciwprostokątna. Zatem granicą tych łamanych jest przeciwprostokątna. Dowiedliśmy twierdzenia przeczącego twierdzeniu Pitagorasa. Zakładaliśmy przy tym, że co jest prawdą dla wszystkich elementów ciągu, jest też prawdą dla jego granicy. Oczywiście, rozumowanie to zawiera błąd, podane przejście graniczne nie jest uprawnione.

Błędy probabilistyczne

1. Rzucamy jednocześnie trzema kostkami do gry. W jednym takim rzucie uzyskano sumę oczek równą 11, a w innym sumę równą 12. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Można popełnić błąd w odpowiedzi, przyjmując, że 11 i 12 można na tyle samo sposobów rozłożyć jako sumę oczek na trzech kostkach:

suma 11	suma 12
$1+4+6$	$1+5+6$
$1+5+5$	$2+4+6$
$2+3+6$	$2+5+5$
$2+4+5$	$3+3+6$
$3+3+5$	$3+4+5$
$3+4+4$	$4+4+4$

   Pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie znalezienie poprawnego rozwiązania (trzeba oczywiście brać pod uwagę, ile razy wystąpić może dany rozkład).

2. Rodzice mają syna i spodziewają się drugiego dziecka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to córka? Czasem uczniowie udzielają błędnej odpowiedzi, że prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{2}{3}$, ponieważ mamy

trzy możliwości, w których jest już jeden chłopiec. Poprawną odpowiedzią jest $\frac{1}{2}$.

Błędy indukcji

1. Częstym błędem indukcji jest nieuwzględnienie kroków początkowych. Dla przykładu, chcemy udowodnić, że $2^n > 2n + 1$. Przypuszczamy, że równość ta zachodzi dla $n = k$ i wykazujemy, że wtedy zachodzi także dla $n = k+1$. Ponieważ dla każdego $k > 0$ mamy $2^k \geqslant 2$, więc dodając stronami nierówności $2^k > k+1$ oraz $2^k \geqslant 2$ mamy $2^k+2^k > 2k+1+2$, czyli $2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$, a więc pokazaliśmy zachodzenie kroku następnikowego indukcji. Jednak badana nierówność nie zachodzi dla $n = 0, 1, 2$, a przyczyną błędu jest zły początek dowodu.

2. Podobnie jest z próbą dowodu, że np. wszystkie konie są tego samego koloru. Przypuszczamy, że twierdzenie zachodzi dla n koni. Dodajemy do stada n koni nowego konia (a więc stado liczy $n + 1$ koni). Z tego większego stada usuwamy jednego ze „starych” koni i otrzymujemy stado n koni, a więc wszystkie one są tego samego koloru, na mocy założenia indukcyjnego. Możemy teraz znowu dodać chwilowo usuniętego starego konia (pamiętajmy, że jest on tego samego koloru, co wszystkie pozostałe w stadzie n-elementowym). Dostajemy zatem $n + 1$ koni, z których wszystkie są tego samego koloru. Zachęcam czytelnika do samodzielnego znalezienia błędu w tej argumentacji.

Różne dalsze błędy

1. *Szukanie symetrii*. Nie pamiętając stosownych faktów, uczniowie czasem konfabulują, „na siłę” próbując odnajdywać różnego rodzaju symetrie, popełniając np. takie błędy:

   (a) Kwadrat sumy liczb to suma kwadratów tych liczb.

   (b) Skoro logarytm ilorazu jest równy różnicy logarytmów, to iloraz logarytmów jest równy różnicy logarytmów.

   (c) Pierwiastek sumy (różnicy) dwóch liczb to suma (różnica) pierwiastków z tych liczb.

   (d) Bezwzględna wartość sumy dwóch liczb to suma bezwzględnych wartości tych liczb.

2. *Zbiory kolektywne i dystrybutywne*. Każemy w szkole rozumieć kolekcje w sposób dystrybutywny, tak jak w rachunku zbiorów. Uczniowie

mogą mieć kłopoty z odróżnieniem tego rozumienia od kolektywnego rozumienia, np. tworów geometrycznych.

3. *Funkcje odwrotne*. Znany kłopot: zapominanie o tym, że operacja $\sqrt{}$ daje dwie wartości: dodatnią i ujemną.

4. *Równanie jako polecenie wykonania działania*. Uczniowie mogą nie traktować symetrycznie obu stron równania, przyjmując np. stronę lewą jako polecenie obliczenia czegoś.

5. *Howlers*. To błędy, w których wykonuje się jakieś niepoprawne, a nawet bezsensowne działania, otrzymując poprawny wynik. Na przykład skracanie cyfry 6 w ułamku $\frac{16}{64}$ daje poprawną wartość $\frac{1}{4}$.

Błędy nauczycieli

1. Błędy w zadaniach maturalnych. Kilka lat temu kazano uczniom wykonać obliczenia przy założeniu, że małpa skacze z palmy na ziemię po odcinku linii prostej. Błąd ten pokazuje, jakie szkody w obrazie świata mogą powstawać, gdy wyrzucamy z programów szkolnych osiągnięcia matematyki. Skok małpy odbywa się oczywiście po paraboli (z pominięciem oporu powietrza).

2. Pytanie egzaminacyjne dotyczyło liczby ścian bryły powstającej ze zlepienia czworościanu jednostkowego jedną z jego ścian ze ścianą boczną piramidy o podstawie kwadratowej oraz długości wszystkich krawędzi równej 1. Przez długi czas akceptowano błędną odpowiedź: ponieważ przy takim zlepieniu znikają dwie ściany, więc liczba ścian powstałej bryły wynosi pięć plus cztery minus dwa, czyli siedem. Błąd naprawiono, gdy jeden ze studentów, który podał poprawne rozwiązanie (czyli pięć ścian) uparł się, że ma rację. Przy omawianiu tego błędu można w sprytny sposób pokazać poprawne rozwiązanie (przez rozważenie czworościanu foremnego o długości boku równej dwa i obcięciu jego wszystkich narożników jednostkowymi czworościanami foremnymi – resztą powstałej bryły będzie ośmiościan foremny, a zlepienie jednej z jego połówek, czyli piramidy o podstawie kwadratowej, z jednym z odcinanych naroży daje rozwiązanie dla wyjściowego problemu).

3.5.2. Błędy studenckie

Przykłady Zbigniewa Skoczylasa. W sieci znaleźliźć można liczne przykłady błędów popełnianych przez studentów zarówno podczas kolokwiów zaliczeniowych, jak i na egzaminach z matematyki. Ciekawy ich zestaw podany został w Skoczylas 2018. Oto niektóre z nich:

1. Studenci przyjmują błędnie, że rozważane funkcje są liniowe i piszą np.: $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
2. Przy obliczaniu granic ciągów i funkcji studenci czasem przechodzą do granicy z częścią zmiennych, a potem z pozostałymi zmiennymi, np.: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+0)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
3. Ponieważ cały okrąg ma równanie $x^2+y^2 = r^2$, więc jego dolna połowa jest opisana wzorem $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = r^2$, a górna wzorem $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = r^2$.
4. Funkcja f jest monotoniczna w przedziale (a, b), gdy wszystkie punkty z tego przedziału dają się połączyć prostą lub krzywą.
5. Po pomnożeniu obu stron równania przez x otrzymam: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin} + \frac{1}{\cos} = x$.
6. Wyobraźmy sobie sześcian, który ma sześć tysięcy ścian.
7. Niech zdarzenie A oznacza, że czerwony tramwaj jedzie z prawej strony. Wtedy zdarzenie przeciwne do A oznacza, że niebieski tramwaj jedzie z przeciwnej strony.
8. Z niemożliwości matematycznego rozwiązania posłużyłam się logiką.
9. Prawie wszystkie oznacza wszystkie, oprócz tych co nie należą.

3.5.3. Sofizmaty matematyczne

Powyżej ograniczyłem się do przykładów błędów rzeczywiście popełnianych przez uczniów. Na osobną uwagę zasługują sofizmaty matematyczne, które są specjalnie konstruowane, ku przestrodze uczniów:

Igraszki z nieskończonością

Szereg Grandiego. $S = 1-1+1-1+1-1+\ldots$ Jeśli pogrupujemy składniki tej nieskończonej sumy w ten sposób: $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, to otrzymamy: $S = 0+0+0+\ldots = 0$. Jeśli natomiast dokonamy pogrupowania: $S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots$, to otrzymamy: $S = 1-0-0-\ldots = 1$.

Zamiast 1 możemy też rozważać dowolną liczbę n, otrzymując w podobny sposób paradoksalny wynik $n = 0$.

Próbowano także argumentować, że $S = \frac{1}{2}$ w następujący sposób. Mamy z jednej strony:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+0+\ldots = 0,$$

ale z drugiej strony także:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1.$$

Jeśli S miałaby być sumą rozważanego szeregu, to:

$$S = 1-1+1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1+1-1+1-1+\ldots) = 1-S,$$

czyli $2S = 1$, a zatem $S = \frac{1}{2}$.

Suma rozważanego szeregu nie istnieje, ponieważ ciąg sum częściowych nie jest zbieżny. Przypomnę, że Riemann udowodnił, iż jeśli szereg jest jedynie warunkowo zbieżny, to można jego wyrazy przegrupować w taki sposób, aby nowo utworzony szereg był zbieżny do dowolnej wielkości skończonej, a nawet aby był rozbieżny.

Sofizmaty probabilistyczne i statystyczne

Lot z własną bombą. To raczej anegdota niż sofizmat. Pewna osoba mając podróżować samolotem, upewnia się, jakie jest prawdopodobieństwo, że na pokładzie samolotu jest bomba. Dowiaduje się, iż jest ono stosunkowo małe, ale dla zwiększenia bezpieczeństwa lotu postanawia zabrać ze sobą własną bombę, ponieważ prawdopodobieństwo, że na pokładzie znajdą się dwie bomby jest naprawdę niewielkie.

Test zdrowotności. Powiedziano nam, że w pewnej populacji liczącej tysiąc osób, jedna osoba ma określoną chorobę. Wykryć to można testem, który w przypadku osoby chorej przyniesie wynik pozytywny. Jednak test nie jest doskonały: daje wynik pozytywny także w przypadku osób zdrowych: na tysiąc osób dziesięć z wynikiem pozytywnym testu jest mimo to zdrowych. Mamy ustalić, jaka część osób poddanych testowi jest naprawdę chora. Rozważmy dwie argumentacje.

Pierwsza argumentacja. Ponieważ w tysiącu osób dziesięć otrzyma pozytywny wynik, będąc zdrowymi, a jedna osoba chora otrzyma wynik pozytywny, więc z jedenastu osób o pozytywnym wyniku tylko jedna jest chora, czyli $\frac{1}{11}$ liczby osób o wyniku pozytywnym jest chora.

Druga argumentacja. Rozważmy populację stu tysięcy osób. Wtedy sto osób w tej populacji jest chorych. Zdrowych jest zatem 99 900 osób. Jeden procent osób zdrowych ma pozytywny wynik testu, czyli w tym przypadku 999 osób. Łącznie 1099 osób ma więc wynik pozytywny, a zatem $\frac{100}{1099}$ liczby osób o wyniku pozytywnym jest chora.

Zauważmy, że $\frac{1}{11} = 0,090909$, natomiast $\frac{100}{1099} = 0,0909918$, a więc otrzymujemy różne odpowiedzi. Pierwsza argumentacja jest błędna. Skoro w populacji tysiąca osób jedna jest chora, to 999 jest zdrowych. Jeden procent z tych zdrowych, czyli $\frac{999}{100} = 9,99$ osób ma wynik pozytywny (a nie 10, jak w pierwszej argumentacji). $1 + \frac{999}{100}$ osób ma więc wynik pozytywny. Poszukiwana część wynosi zatem:

$$\frac{1}{1+\frac{999}{100}} = \frac{1}{\frac{1099}{100}} = \frac{100}{1099}.$$

3.5.4. Opinie dydaktyków matematyki

Błędom w uczeniu się oraz nauczaniu matematyki poświęcone są liczne opracowania, zawierające typologie błędów, przyczyny ich popełniania, zalecenia mające umożliwić ich eliminację, komentarze dotyczące ich natury itp. Dla przykładu, Bernadeta Bech wylicza następujące rodzaje błędów (Bech 2015, cytuję za stroną internetową):

1. w ogólnym aspekcie procesu nauczania i metod jego organizacji można mówić o błędach matematycznych, dydaktycznych, psychologicznych, diagnostycznych, heurystycznych, prakseologicznych
2. w aspekcie dziedzin wiedzy matematycznej – o błędach arytmetycznych, algebraicznych, geometrycznych
3. w aspekcie metody matematycznej – o błędach definicji, twierdzeń, dowodów, błędach obliczeniowych i logicznych
4. w aspekcie czynności umysłowych pojawiających się w trakcie rozpatrywania określonego problemu – spotykamy błędy abstrahowania, uogólniania, klasyfikowania, porównywania, porządkowania itp.
5. w aspekcie hipotetycznych przyczyn – błędy spowodowane trudnościami językowymi, brakiem wiedzy, niepoprawnymi skojarzeniami, sztywnością myślenia itp.
6. w aspekcie wykorzystania błędu w procesie uczenia – błędy kształcące inspirujące i błędy obojętne
7. w aspekcie częstości występowania – błędy przypadkowe i błędy systematyczne

8. w aspekcie odtwarzania czy tworzenia reguł postępowania – błędy patologiczne i błędy normalne.

Cytowana autorka przywołuje też m.in. ustalenia Marianny Ciosek, Zdzisławy Dybiec oraz Zofii Krygowskiej (Ciosek 1992, Dybiec 1996, Krygowska 1998) dotyczące przyczyn popełniania błędów. Niektórymi z tych przyczyn są: styl nauczania, wzmocnienie tendencji algorytmicznych, języki opisów, w tym sugestie płynące z wizualizacji problemu, kontekst pojawienia się problemu, przeciążenie informacyjne, słabo wyćwiczone sprawności regulacyjne. To tylko jeden z wielkiej liczby omawianych w literaturze przedmiotu przykładów diagnostyki błędów matematycznych popełnianych przez uczniów oraz nauczycieli.

W pracy Bradis, Minkovskii i Kharcheva 1999 wspomina się o typologiach błędów matematycznych, opracowanych przez różnych autorów:

V. I. Obreimow (1843–1910): błędy porównywania wielkości, absurdy geometryczne, niewłaściwe traktowanie liczb zespolonych.

Herman Schubert (1848–1911): błędy dzielenia przez zero, błędy niejednoznaczności pierwiastkowania, błędy w konstrukcjach geometrycznych, błędy przypisywania nieskończonej wartości sumie nieskończonego zbioru liczb.

E. Fourier: błędy geometryczne dotyczące konstrukcji lub argumentacji; w tych drugich – błędy związane z nieprecyzyjną definicją oraz błędy związane z niedozwolonymi operacjami na liczbach.

Autorzy powołują się na kilka, obecnie trudno dostępnych (nie miałem ich w ręku) prac w języku rosyjskim (podaję angielskie tłumaczenia tytułów):

Obreymov, V.I. 1898. *Mathematical sophisms*. Petersburg.

Goryachev, D.N, Voronetz, A.M. 1903. *Problems, Questions, and Sophism for Mathematics Lovers*. Moscow.

Lyamin, A.A. 1911. *Mathematical Paradoxes and Interesting Problems*. Moscow.

Autorzy podają także własną klasyfikację typowych błędów matematycznych:

1. Błędy werbalne (np. wszystkie kąty trójkąta są równe dwóm kątom prostym).
2. Nieuprawnione stosowanie działań.
3. Przypisywanie własności szczególnego przypadku wszystkim obiektom danej klasy.

4. Błąd odwracania zdań ogólno-twierdzących (poprawne: jeśli podstawy są równe, to potęgi są równe, jeśli kąty są równe, to sinusy kątów są równe; implikacje odwrotne nie zachodzą).

5. Zastępowanie precyzyjnych definicji intuicjami geometrycznymi (suma przyprostokątnych jest równa przeciwprostokątnej).

6. Błędy konstrukcji: różne punkty uznane za identyczne (lub na odwrót), punkt miałby znajdować się tam, gdzie to niemożliwe, rzekome istnienie punktów przecięcia linii, linia prosta uznana za łamaną (lub na odwrót).

7. Złe zastosowania praw (np. rzekomy dowód, że dowolna cięciwa okręgu jest równa jego średnicy, oparty na niewłaściwym zastosowaniu prawa przystawania trójkątów [dwa kąty i bok]).

3.6. Konkluzje

Nie było moim zamiarem podanie jakiejkolwiek typologii błędów matematycznych – jak już wspomniałem, nie jest to zadanie możliwe do wykonania. Nie chciałem też być w żadnej mierze złośliwy wobec autorytetów matematycznych, którym przydarzyły się błędy. Jak było zapewne widoczne z omawianych wyżej przykładów, wykrycie błędu popełnionego przez wybitnego matematyka owocowało zwykle nowymi pomysłami, ciekawymi uogólnieniami, głębszą refleksją metodologiczną itd.

3.6.1. Anegdoty

Błędy przytrafiają się (prawie) każdemu. Znane są liczne anegdoty dotyczące błędów matematycznych popełnionych przez Einsteina (wylicza się nawet, ile błędów popełnił w poszczególnych pracach). Znane są omyłki autorytetów oceniających prace innych matematyków – często przywołuje się w tym kontekście niesprawiedliwe oceny wystawiane pomysłom Évariste Galois, do czasu gdy pomysły te zostały uznane za genialne.

Alfred Tarski

Znana anegdota dotyczy odrzucenia przez recenzentów ważnego wyniku Alfreda Tarskiego, dotyczącego równoważnika aksjomatu wyboru: takim równoważnikiem jest twierdzenie, że dla dowolnego zbioru nieskończonego A, zbiory A oraz $A \times A$ są równoliczne. Jan Mycielski wspomina, że Tarski mówił mu o odrzuceniu jego pracy przez *Comptes Rendus de l'Académie des*

Sciences w Paryżu przez recenzentów, którymi byli Fréchet oraz Lebesgue. Ten pierwszy napisał w recenzji, że implikacja między dwoma znanymi wynikami nie jest nowym wynikiem, natomiast ten drugi stwierdził, że implikacja między dwoma fałszywymi stwierdzeniami nie jest interesująca.

Rejecta Mathematica

Przez pewien czas w sieci dostępne było czasopismo *Rejecta Mathematica*, które przyjmowało artykuły odrzucone przez inne czasopisma. Opowiada się o nim różne anegdoty, m.in. taką, iż pewien artykuł jednego z autorów uzyskał o wiele więcej cytowań niż inny artykuł tego samego autora, opublikowany w czasopiśmie poważnym.

Zwróćmy uwagę, że od recenzentów nie wymaga się odróżnienia błędu matematycznego (popełnionego bez intencji, przez nieuwagę, lenistwo, niekompetencję itp.) od matematycznego oszustwa (popełnionego celowo, z intencją wprowadzenia w błąd). O oszustwach matematycznych mówi się zresztą nie w samej matematyce, lecz raczej w jej zastosowaniach, np. statystyce, podejmowaniu decyzji, interpretacji danych ilościowych itp.

Monty Hall Problem

Paul Erdős był zirytowany rozwiązaniem Monty Hall Problem i go nie akceptował. Dopiero po rozmowie z Ronaldem Grahamem został przez niego przekonany. Poinformował o tym autora tej anegdoty, dla którego rozwiązanie Erdősa, otrzymane w porozumieniu z Grahamem, było całkowicie niezrozumiałe – było tak jakby Erdős i Graham posługiwali się własnym językiem matematyki, który dla nich był oczywisty, natomiast dla pozostałych niezrozumiały.

Wielkie Twierdzenie Fermata

Wielkie Twierdzenie Fermata (dalej: WTF) cieszyło się ogromnym powodzeniem wśród amatorów, zanim Andrew Wiles podał jego ostateczny poprawny dowód. Na stronie internetowej (dostęp 26 lutego 2020):

http://www.sciteclibrary.ru/eng/catalog/pages/6253.html

znaleźć można propozycję uzasadnienia WTF metodami probalistycznymi, autorstwa K.A. Sytina, który podaje 6 października 2003 roku jako datę powstania tekstu. Argument ma następującą postać: WTF jest twierdzeniem, że równanie $x^n + y^n = z^n$, gdzie $z \neq 0$, $x < z$, $y < z$, $n \geqslant 3$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych x, y, z. Podzielmy obie strony tego równania przez z^n, otrzymując: $(\frac{x}{z})^n + (\frac{y}{z})^n = 1$.

Pomyślmy teraz (sic! J.P.) o zdarzeniach A i B, których prawdopodobieństwa wynoszą: $P(A) = (\frac{x}{z})^n$ oraz $P(B) = (\frac{y}{z})^n$, a ponadto $P(A \cup B) = 1$. Wtedy $P((A \cup B)^c) = 0$ (gdzie X^c oznacza zdarzenie przeciwne do X). Na mocy praw De Morgana mamy:

$$0 = P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) = (1 - (\frac{x}{z})^n) \cdot (1 - (\frac{y}{z})^n).$$

Tak więc, albo $x = z$, albo $y = z$. Równanie omawiane w WTF ma zatem jedynie trywialne rozwiązania, czyli WTF zostało udowodnione. Jak pisze Alexander Bogomolny (na stronie http://www.cut-the-knot.org/ctk/ErrDisc.shtml, dostęp 26 lutego 2020), autor proponowanego „dowodu" zauważa co prawda, że jego wywód obejmuje także przypadki $n = 1$ oraz $n = 2$, ale poza tym uważa swoją argumentację za poprawną. Spekuluje, że Fermat mógł mieć na myśli tego typu rozumowanie, gdy sformułował swoją słynną uwagę na marginesie tekstu Diofantosa. Ponadto, autor przytoczonego wywodu sugeruje, że wywód ten ukazuje sprzeczność między aksjomatami arytmetyki oraz aksjomatami teorii prawdopodobieństwa.

3.6.2. Co dalej?

Skłonność do popełniania błędów może wiązać się z różnego typu upośledzeniami poznawczymi. Pedagogika szkolna bierze już pod uwagę ustalenia dotyczące np. dysleksji lub dyskalkulii. Przypomnę, że bada się również tzw. *dysracjonalię* (nie jestem pewien, czy jest to dobry odpowiednik będącego już w użyciu angielskiego terminu *dysrationalia*). To upośledzenie ma polegać na niemożności racjonalnego myślenia i działania mimo posiadania odpowiedniej inteligencji (Stanovich 2009). W sformułowaniu tym nie ma wewnętrznej sprzeczności. Znane są zarówno poważne kłopoty z określeniem samego pojęcia racjonalności, jak też różnice zdań na temat tego, w jaki sposób trafnie mierzyć inteligencję.

Występowanie błędów jest problemem epistemologicznym. W psychologii poznawczej bada się różne błędy poznawcze (których lista jest naprawdę bardzo długa). Wydaje nam się interesujące skupienie uwagi na tych błędach poznawczych, które wiążą się z poznaniem matematycznym.

Opracowania z historii matematyki omawiają różne momenty przełomowe w jej dziejach, ukazując w jaki sposób tworzona (odkrywana?) jest nowa rzeczywistość matematyczna. Często mówi się przy tym o naprawianiu zauważonych w dotychczasowej praktyce badawczej błędów (Byers 2007). Aby należycie ocenić poprawność rozumowań matematycznych danej epoki, trzeba jednak, moim zdaniem, analizować też bezpośrednio oryginalne teksty źródłowe, pamiętając o kontekście historycznym oraz o tym, że terminy matematyczne zmieniają swoje znaczenie.

Błędami uczniowskimi (oraz nauczycielskimi) zajmuje się dydaktyka matematyki. Nie posiadając żadnych doświadczeń w dydaktyce matematyki szkolnej, nie będę się na ten temat wypowiadać.

Dodam może jedynie, że obecnie staram się pełnić rolę *terapeuty matematycznego dla dorosłych*, m.in. poprzez prowadzenie zajęć ze studentami (kierunków pozamatematycznych), poświęconych rozwiązywaniu problemów metodami matematycznymi. Więcej na ten temat piszę w następnym rozdziale.

Uważam, że edukacja matematyczna w Polsce zaniedbuje tę grupę docelową: większość prac z dydaktyki matematyki poświęcona jest (z oczywistych powodów) dzieciom, mniej uwagi poświęca się tym dorosłym, którzy jeszcze mogą się czegoś nauczyć (pozostając w murach uniwersyteckich), a którzy mając z reguły traumatyczne wspomnienia o matematyce szkolnej, boją się matematyki, uważają ją za nudną, trudną, zbędną.

Staram się zwalczać te ich lęki i uprzedzenia, próbując pokazywać, że matematyka jest twórczością, dostarcza satysfakcji intelektualnej oraz naprawdę ciekawej zabawy.

Bibliografia

Acerbi, F. (2008). Euclid's Pseudaria. *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (5): 511–551.

Awodey, S., Carus, A.W. (2001). Carnap, completeness, and categoricity: the *Gabelbarkeitssatz* of 1928. *Erkenntniss*, 54: 145–172.

Barbeau, E.J. (2000). *Mathematical fallacies, flaws, and flimflam*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Bech, B. (2015). Błędy w procesie nauczania matematyki w gimnazjum. Dostępne na (26 lutego 2020):

http://www.szkolnictwo.pl/index.php?id=PU4568

Bernstein, F. (1905). Zum Kontinuumproblem. *Mathematische Annalen*, 60: 463–464.

Borsuk, K. (1933). Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, 20: 177–190

Bradis, V.M., Minkovskii, V.L., Kharcheva, A.K. (1999). *Lapses in mathematical reasoning*. Mineola, New York: Dover Publications.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think. Using ambiguity, contradiction and paradox to create mathematics*. Princeton and Toronto: Princeton University Press.

Cantor, G. (1883). Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. § 9–10. *Mathematische Annalen*, 21: 545–586.

Cantor, G. (1887). Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, VI. W: Georg Cantor *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, (redaktor: Ernst Zermelo), Berlin: Verlag von Julius Springer, (1932), 407–409.

Carnap, R. (1930). Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. *Erkenntnis*, 1: 303–307.

Carroll, L. (1896). *Symbolic logic*. London: Macmillan.

Ciosek M. (1992). Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny. *Dydaktyka Matematyki*, 13: 65–162.

Dalen, D. van, Ebbinghaus, H.D. (2000). Zermelo and the Skolem paradox. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6 (2): 145–161.

Davis, J.P., Hersh, R. (1994). *Świat matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

De Morgan, A. (1915). *A budget of paradoxes*. Volume I. Chicago London: The Open Court Publishing Co.

De Morgan, A. (2008). *A budget of paradoxes*. Volume II. Edited by David Eugene Smith. Manybooks.net (Project Gutenberg).

Dudley, U. (1992). *Mathematical cranks*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Dudley, U. (1994). *The trisectors*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Dudley, U. (1997). *Numerology: or, what Pythagoras wrought*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Dybiec Z. (1996). *Błędy w procesie uczenia matematyki: próba syntezy*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A. (1973). *Foundations of set theory*. Amsterdam London: North-Holland Publishing Company.

Freudenthal, H. (1969). No. 223. *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, 3 (17): 152.

Gardner, M. (1979). Mathematical games. *Scientific American*, 241: 20–24.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. (1990). *Theorems and counterexamples in mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. (2003). *Counterexamples in analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1989). *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki*. Warszawa: Instytut Wydawniczy Związków Zawodowych.

Gumański, L. (1983). The decidability of the first-order functional calculus. *Ruch Filozoficzny*, 57: 411–438.

Kahn, J., Kalai, G. (1993). A counterexample to Borsuk's conjecture. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29: 60–62.

König, J. (1905). Zum Kontinuum-Problem. *Mathematische Annalen*, 60: 177–180.

Krygowska Z. (1998). Zrozumieć błąd w matematyce. *Dydaktyka Matematyki*, 10: 141–147.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.

Lecat, M. (1935). *Erreurs de mathematiciens des origines à nos jours.* Brüssel: Castaigne.

Lietzmann, W. (1958). *Gdzie tkwi błąd? Sofizmaty matematyczne i sygnały ostrzegawcze.* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Lindenbaum, A., Tarski, A. (1936). Über die Beschränkheit der Ausdruckmittel deduktiver Theorien. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, 1934–1935: 15–22.

Lob, H., Richmond, H. W. (1930). On the solutions of Malfatti's problem for a triangle. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd ser. 30 (1): 287–304.

Maxwell, E.A. (1959). *Fallacies in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mycka, J., Rosa, W. (2018). Związki problemu rozstrzygalności logiki predykatów pierwszego rzędu z zagadnieniami złożoności. W: R. Murawski, J. Woleński, redakcja, *Problemy filozofii matematyki i informatyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, 191–204.

Odlyzko, A. M., Riele, H.J.J. te (1985). Disproof of the Mertens conjecture. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 357: 138–160.

Pogonowski, J. (2006). Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela. *Investigationes Linguisticae*, 14: 18–49.

Pogonowski, J. (2008). Metoda rezolucji i tablice analityczne w *Symbolic logic* Lewisa Carrolla. *Investigationes Linguisticae*, 16: 195–218.

Posamentier, A.S., Lehmann, I. (2013). *Magnificent mistakes in mathematics*. Amherst (New York): Prometheus Books.

Skoczylas, Z. (2018). Błędy studentów na egzaminach z matematyki. Dostępne na (26 lutego 2020):

http://prac.im.pwr.wroc.pl/∼skoczylas/typowe_bledy_studentow.pdf

Stanovich, K.E. (2009). Rational and irrational thought: the thinking that IQ tests miss. *Scientific American Mind*, November-December 2009, 34–39.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. (1995). *Counterexamples in topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Wise, G.L., Hall, E.B. (1993). *Counterexamples in probability and real analysis*. New York: Oxford University Press.

Zermelo, E. (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae*, 16: 29–47.

Rozdział 4

Zagadki matematyczne w dydaktyce

4.1. Uwagi wstępne

Każda zagadka zawiera pytanie. Każda zagadka jest żądaniem podania jej rozwiązania. Czasami ważniejszy od samego rozwiązania jest sposób dochodzenia do niego. Istotne są zatem pomysły, metody, techniki itp. stosowane w rozwiązywaniu zagadek. Będziemy wspólnie przyglądać się, w jaki sposób *myśl poczęta* przez postawienie zagadki rozwija się w kierunku podania jej rozwiązania. Można więc traktować ten wykład jako intelektualny odpowiednik przebywania na basenie, w siłowni, na bieżni itp. Krótko mówiąc: można uważać uczestnictwo w tym wykładzie za trening intelektualny w rozwiązywaniu problemów. Ponadto interesować nas będzie również to, jak poprawnie (pod względem formalnym i merytorycznym) formułować problemy.

Czym właściwie są zagadki? Jakie są podstawowe typy zagadek? Które zagadki są ważne, a które błahe? Wyróżnimy dwa typy zagadek:

1. *Zagadki typu analitycznego*. Wszystkie informacje potrzebne do rozwiązania tego typu zagadki są zawarte w jej sformułowaniu (oraz w teorii, która jest zakładana, niejako „w tle").

2. *Zagadki typu syntetycznego*. Aby rozwiązać tego typu zagadkę, musisz przywołać jakieś hipotezy, założenia, domysły, które nie wynikają bezpośrednio z treści samej zagadki.

Będziemy zajmować się głównie zagadkami typu analitycznego. W omawianych przez nas zagadkach sama ich treść będzie stanowiła wskazówki do ich rozwiązania. Rozważmy przykład. Niech ciotka Matylda lubi dokładnie wszystkich niesamolubów oraz nie lubi dokładnie żadnego samoluba. *Samolub* to ktoś, kto lubi siebie, a *niesamolub* to ktoś, kto nie jest samolubem. Zagadka polega na ustaleniu, czy w jakiejś suterenie na Rynku Łazarskim w Poznaniu mieszka ciotka Matylda. Aby to ustalić, nie musisz włóczyć się po suterenach na Rynku Łazarskim, wystarczy pomyśleć. Dane zawarte w treści zagadki przesądzają, że ciotka Matylda nie istnieje, a to za sprawą logiki. Potrafisz podać stosowną argumentację?

Rozważane w wykładzie zagadki będą dotyczyły analizy pojęć. Pochylimy się zatem nad zagadnieniami: rozumienia pojęć, właściwego nimi operowania, rozpoznawania i unikania błędów w sformułowaniach i argumentacjach. Krótko mówiąc, wykład kierujemy do osób pragnących doskonalić się w samodzielnym myśleniu krytycznym. Do dziś z podziwem i uznaniem wspominam pewnego studenta, który na zajęciach z logiki podał płynną mową żądaną definicję, po czym dodał: „Ale ja nie rozumiem tego, co mówię". To był szczery, odważny facet, z taką postawą na pewno odniósł później sukces, a co najmniej uniknął przykrości związanych z samooszukiwaniem siebie i oszukiwaniem innych.

Nie będę zajmował się w tym tekście wszelkiego typu zagadkami. Ludzka inwencja w tworzeniu zagadek, łamigłówek, paradoksów, tajemnic, itd. zdaje się nieograniczona. Lubimy się tym bawić, po prostu. Dla celów tego wykładu dokonano świadomego wyboru pewnych zagadek, pomijając wiele rodzajów innych. Nie będę zajmował się np.: rebusami, sztuczkami karcianymi, układankami figur itp. Nie będziemy też analizować różnego rodzaju gier. Nie przewiduję omawiania zagadek kryminalnych. Mogę natomiast obiecać, że postaram się nie przesadzać z powagą i formułować zagadki w taki sposób, aby ich analiza dostarczała również wartości estetycznych i zabawowych.

Można zadać pytanie, czy istnieje osobna nauka zajmująca się rozwiązywaniem zagadek. W terminologii angielskiej używa się określeń: *enigmatology*, *metagrobology* oraz *mathematical problem solving*, przy czym oznaczają one różne rzeczy.

Merriam-Webster Dictionary objaśnia termin *enigmatology* jako *the investigation or analysis of enigmas*. William F. Shortz jest podobno (według Wikipedii) jedyną osobą, która uzyskała tytuł licencjata *enigmatology*. Shortz jest znanym twórcą krzyżówek. O ile zdołałem się zorientować, enigmatologia dotyczy głównie krzyżówek, gier słownych, puzzli mechanicznych itp.

Ponury w brzmieniu termin *metagrobologia* również odnosi się do zagadek. Termin *metagrobology* w powyższym znaczeniu wprowadził (według Wikipedii) Rick Irby około 40 lat temu. Francuskiego słowa *metagraboliser* użył w 1534 roku François Rabelais w jednej ze swoich opowieści o przygodach Gargantui. Angielski termin *metagrobolise* wprowadził Peter Motteux w 1693 roku przy okazji opublikowania tłumaczenia Thomasa Urquharta słów Rabelais: *I have been these eighteen days in metagrabolising this brave speech*. Następował tu przypis, wyjaśniający że *metagrobolise* to: *a word forged at ple-*

asure, which signifies the studying and writing of vain things. W innym miejscu znaczenie tego słowa określano jako: *to give a lot of trouble for nothing, to bore and annoy others*. Słowo użyte pierwotnie przez Rabelais ma pochodzenie grecko-łacińskie. Przypomnę, że łacińskie *cribrum* oznacza „sito". Francuskie *grabeler* oznacza „przesiewać"; w czasach Rabelais oznaczało „badać coś dokładnie". Na marginesie dodam, że angielskie *to garble* oznacza „przekręcać" (słowa, fakty, informacje, wersje, cytaty), natomiast *garbology* oznacza „badania socjologiczne oparte na analizie domowych odpadków".

Rozważanymi tu zagadkami zajmuje się dyscyplina określana jako *mathematical problem solving*, czyli rozwiązywanie problemów matematycznych. Będę rozważał głównie zagadki w istocie logiczne i matematyczne, często podawane jednak w takiej formie, aby ukazać ułudę naszych przekonań zdroworozsądkowych, odnoszących się do doświadczenia potocznego. Stwierdzam dogmatycznie: Potoczność jest obmierzła! I pełen optymizmu dodaję: Logic is fun! Math is sexy!

W tym miejscu dodajmy parę słów dotyczących dość rozpowszechnionego (choć moim zdaniem dziwnego i nietrafnego) poglądu, że bycie humanistką wyklucza rozumienie matematyki. Celem wykładu jest m.in. próba przekonania humanistek, że w gruncie rzeczy lubią matematykę. Za dziwaczny, obłudny i pełen hipokryzji uważam głoszony przez niektóre studentki pogląd: „Nie lubię (nie umiem, boję się, itd.) matematyki, ponieważ jestem humanistką". To bzdura, trudno twierdzić coś bardziej nieroztropnego. Po pierwsze, uprawianie matematyki jest właśnie tym, co odróżnia nas, ludzi (z włączeniem humanistek), od naszych Braci Mniejszych, jak osły, małpy, ślimaki, pierwotniaki, nie mówiąc już o niższych jeszcze w Wielkim Łańcuchu Bytów – kaktusach. To działalność specyficznie ludzka, głęboko zatem humanistyczna. Po drugie, jak głosi niegłupie powiedzenie: „Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki" (Immanuel Kant). Po trzecie, jak głosi inne również niegłupie powiedzenie: „Księga Natury napisana jest w języku matematyki" (Galileusz). Po czwarte, żadna z humanistek nie potrafiłaby dłużej utrzymać się na szczycie Wielkiego Łańcucha Pokarmowego planety bez znajomości pewnych rudymentów matematyki – spróbuj bez niej np.: zrobić zakupy, ustalić prostą drogę z imprezy do domu, dokonać wyboru partnera, porównując go z innymi kandydatami itd. Jeśli sądzisz, że nie ma w takich działaniach i decyzjach żadnej ingerencji matematyki, to mylisz się głęboko. Możesz jej nie dostrzegać świadomą uwagą, ale ona tam jest! I jej wydobycie zawsze pozwala na lepsze rozumienie zarówno tego, co dzieje się dookoła ciebie, jak i tego, co dzieje się między twoimi uszami, w twoim prywatnym siedlisku rozumu. Po piąte, obecna postać świata, jego szata technologiczna, nie mogłaby powstać bez istotnego udziału matematyki. Dotyczy to praktycznie każdego wynalazku, każdego odkrycia, każdej innowacji. Matematyka rządzi też w ostatecznym rozrachunku wartościami i ocenami, jest obecna w sztuce i filozofii, jest obecna wszędzie. Często nie jest łatwo dostrzegalna, ale Dobra Księga przecież tego nie obiecywała. Twierdzi się, że niewiarygodna (i tajemnicza) użyteczność matematyki w nauce jest podarunkiem, na który nie zasłużyliśmy. Pognębimy jeszcze na koniec te humanistki głoszące niemądry slogan z początku tego akapitu, które są wierzące, które uznają Wszechświat za rezultat twórczego aktu Bóstwa, które sympatyzują z teorią inteligentnego projektu. Gdyby bycie humanistką implikowało nieznajomość matematyki (lub brzydzenie się nią), to Bóstwo kreujące Wszechświat rządzony matematyką z pewnością nie mogłoby być humanistką. Sądzę, że powoduje to dyskomfort w poglądach wierzących co najmniej tej rangi co np. niesmaczny i okrutny (w moim odczuciu) nakaz zawarty w nawoływaniu Abrahama do poświęcenia własnego syna, dla kaprysu Bóstwa.

Szczególną uwagę poświęcę zagadkom, których rozwiązanie pozwala na skorygowanie niektórych naszych pochopnych poglądów, żywionych na podstawie mniej lub bardziej precyzyjnie określonych intuicji. Jesteśmy np. przekonani, że potrafimy bezrefleksyjnie oceniać szanse zajścia pewnych zdarzeń. Eksperymenty wyraźnie pokazują, że jest całkiem inaczej. Zabawny przykład to *Monty Hall Problem*. Mam trzy pudełka, dokładnie w jednym z nich jest nagroda, pozostałe są puste. Ja wiem, w którym jest nagroda, ty nie. Chcesz dostać tę nagrodę. Gra odbywa się w dwóch ruchach. W pierwszym masz wybrać pudełko. Gdy to uczynisz, pokazuję ci, że jedno z pozostałych pudełek jest puste (co oczywiście mogę uczynić). W drugim ruchu masz podjąć decyzję co jest bardziej korzystne w celu uzyskania nagrody: 1) Pozostać przy pierwotnym wyborze. 2) Zmienić swój pierwszy wybór. Część osób wybiera 1), zwykle mamrocząc coś o konsekwencji w działaniu. Inni wybierają 2), podając za uzasadnienie, że czynią to z przekory. Znakomita większość twierdzi jednak, że 1) i 2) dają równe prawdopodobieństwa otrzymania nagrody. I ci obywatele głęboko się mylą – zmiana pierwotnego wyboru skutkuje prawdopodobieństwem otrzymania nagrody równym $\frac{2}{3}$, a nie $\frac{1}{2}$. Wystarczy uważnie policzyć, aby się o tym przekonać.

Nasz obraz świata wypaczamy na najprzeróżniejsze sposoby. Mylimy czasem wielkości wektorowe (np. ciężar) z wielkościami skalarnymi (np. masa). Wierzymy w różne rzeczy, ponieważ wszyscy tak sądzą, ksiądz, rabin, pastor, pop tak mówią, „tak mówili w telewizji” itp. Ulegamy stereotypom myślenia, łatwo i bezwiednie. Niektórzy budują swój obraz świata na „mądrościach” zawartych w przysłowiach, porzekadłach, aforyzmach. Sądzą więc, że „od przybytku głowa nie boli", ale jednocześnie „co za dużo, to niezdrowo". Jak pisał Kornel Makuszyński: „Jeśli na św. Prota jest pogoda albo słota, to na św. Hieronima jest deszcz, albo go ni ma". Hołubimy „przesądy". Wychwalamy tzw. zdrowy rozsądek jako probierz trafności przekonań. Kierujemy się myśleniem życzeniowym w refleksji i działaniu, jak mieszkańcy akwarium: „Jeśli Boga nie ma, to kto zmienia wodę w akwarium?" Jesteśmy nieobiektywni w ocenach: „Jeśli mnie coś się udało, to dlatego, że mam zalety, jeśli udało się tobie, to dlatego, że okoliczności ci sprzyjały". I na odwrót: „Jeśli mnie coś się nie powiodło, to z powodu niesprzyjających okoliczności, a jeśli nie udało się tobie, to dlatego, żeś cymbał". Pozostajemy (najczęściej nieświadomie) pod działaniem różnych mechanizmów wpływu społecznego, wykształconych w sposób naturalny, ewolucyjnie. I tak dalej, ludzkie skłonności do błądzenia ugruntowane bywają rozmaicie i są wszechobecne. Przesądy, stereotypy, myślenie życzeniowe, myślenie stadne itd. zwalniają od strat energetycznych związanych z krytycznym myśleniem, dają poczucie bezpieczeństwa. Poczucie to jest złudne. Wartością nadrzędną dla człowieka (z włączeniem humanistek) jest racjonalność. Wybitny matematyk i filozof William Kingdon Clifford pisał: *it is wrong always, everywhere, and for anyone, to believe anything upon insufficient evidence.* (*The ethics of belief*, 1877).

Sądzę, że wykład może – choćby w niewielkim stopniu – przysłużyć się słuchaczom w nabieraniu wprawy w samodzielnym świadomym myśleniu krytycznym. To właśnie traktuję jako główny cel powierzonej mi uniwersyteckiej posługi dydaktycznej. Mam też nadzieję, że nieco swobodniejszy język niniejszej notatki nie razi ewentualnych czytelników.

4.1.1. Zagadki matematyczne: historia

Historia zagadek matematycznych jest równie długa, jak historia samej matematyki. Można chyba zasadnie mniemać, że przed systematyzacją wiedzy matematycznej rozważania matematyczne miały właśnie postać zagadek frapujących myślicieli. Nie jest celem tej notatki sprawozdanie historii zagadek matematycznych. Ograniczymy się do wyliczenia niektórych postaci, których zagadki matematyczne zyskały w swoim czasie sporą popularność.

Papirus Rhinda. Papirus Rhinda to zabytek matematyki egipskiej (około -1850 roku). Zawiera zagadkę pojawiającą się także później w kilku miejscach:

W siedmiu domach jest siedem kotów. Każdy kot zjada siedem myszy. Każda mysz zjada siedem porcji ziarna. Z każdej porcji ziarna można byłoby otrzymać siedem porcji mąki. Ile jest tego wszystkiego?

Dzisiaj ta zagadka nie sprawia oczywiście żadnych trudności uczniom: wystarczy pamiętać tabliczki dodawania i mnożenia.

Archimedes. Archimedes $(-280, -220)$, największy matematyk starożytności greckiej jest autorem zagadek, które stały się sławne w dziejach matematyki. Wymienić warto trzy z nich:

Liczba ziaren piasku. Archimedes oszacował liczbę ziaren we Wszechświecie na 10^{63}. Był bodaj pierwszym z greckich matematyków, który posłużył się wielkimi liczbami naturalnymi.

Stado. To zadanie dotyczyło obliczenia wielkości stada złożonego z różnych rodzajów bydła, przy czym podane były warunki wiążące liczby zwierzaków każdego rodzaju. Zagadka ma postać szeregu równań diofantycznych, jej rozwiązanie wymaga posługiwania się stosunkowo dużymi liczbami. Problem ten wiąże się też z równaniem Pella.

Ostomachion. To łamigłówka geometryczna, polegająca na ułożeniu kwadratu z podanych figur geometrycznych (w oryginale było ich 14). Zabawiano się również układaniem z tego zestawu figur podobizn zwierząt, roślin, budynków itp.

Archimedes ma oczywiście także „poważne" zasługi matematyczne: w pomysłowy sposób obliczał pola obszarów ograniczonych krzywymi, rozwiązywał problemy mechaniczne, zajmował się astronomią oraz inżynierią.

Sissa ben Dahir. Wedle legendy, wynalazca gry w szachy, Sissa ben Dahir, zażyczył sobie od władcy nagrody w postaci ziaren zboża, zgromadzonej w następujący sposób:

1. Na pierwszym polu szachownicy (powiedzmy lewym górnym) niech znajdzie się jedno ziarno.

2. Przechodzimy teraz kolejno wszystkie pola szachownicy, np. metodą *bustrafedon*, czyli wół orzący pole: poruszamy się w prawo do (górnego lewego) rogu szachownicy, potem rząd niżej w lewo, potem znowu rząd niżej w prawo itd., aż przejdziemy przez wszystkie pola szachownicy. Na każdym kolejnym polu szachownicy stawiamy dwa razy tyle ziarna, co na poprzedzającym je w tym porządku. Umieszczamy więc kolejno: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ ziarna.

3. Pierwsze pytanie to: ile ziaren umieścimy na ostatnim polu? Drugie pytanie to: ile będzie razem wszystkich ziaren?

Pomijamy oczywiście komplikacje natury fizycznej: możesz myśleć o tych porcjach ziarna jako przyporządkowanych kolejno liczbom od 1 do 64, a nie umieszczanych na rzeczywistej szachownicy. To zadanie nie sprawia dziś kłopotu uczniom, gdyż potrafią policzyć sumę kolejnych potęg 2^n, od $n = 0$ do $n = 63$, korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Prostym rozwiązaniem tego zadania jest rozumowanie następujące. Niech S oznacza sumę kolejnych potęg 2^n, dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 63$:

$$(*) \qquad S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63}.$$

Udowodnimy, że $S = 2^{64} - 1$. Pomnóżmy strony równania $(*)$ przez 2:

$$2S = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{64},$$

a następnie odejmijmy otrzymane równanie stronami od równania $(*)$:

$$2S - S = -2^0 + 2^{64},$$

czyli $S = 2^{64} - 1$. Dodajmy jeszcze, że: $S = 18446744073709551615$.

Alkuin z Yorku. Błogosławiony Alkuin z Yorku (735–804) był teologiem, filozofem, poetą, dydaktykiem, doradcą Karola Wielkiego. Napisał m.in. *Propositiones ad acuendos iuvenes*, bodajże pierwszy łaciński tekst zawierający zagadki matematyczne. Znalazły się tam m.in. następujące zagadki:

Wilk, koza, kapusta. Rybak ma przewieźć na drugi brzeg rzeki wilka, kozę i kapustę. Łódka może zabrać oprócz niego samego tylko jedno z pozostałych. Jak tego dokonać, aby nie zostawiać wilka samego z kozą, a kozy samej z kapustą?

Małżeństwa wdów i wdowców. Wdowiec z synem spotyka wdowę z córką. Wdowiec żeni się z córką, a syn żeni się z wdową. W jakich są teraz relacjach rodzinnych?

Fibonacci. Leonardo Pisano (Fibonacci, 1170–1250) to jeden z najbardziej twórczych matematyków średniowiecznych. Jego *Liber abaci* odegrała wielce istotną rolę w edukacji wielu pokoleń. Wśród zagadek Fibonacciego największą popularność zyskała ta dotycząca (nieśmiertelnych?) kazirodczych królików, które mnożyły się, nie bacząc na stosunki pokrewieństwa. Pewien człowiek miał na początku parkę królików (samca i samiczkę). Po miesiącu każda para królików wydaje na świat potomstwo w postaci jednej pary (samca i samiczki), która jest zdolna do reprodukcji także po miesiącu. Ile jest par królików w kolejnych miesiącach? Rozwiązanie tej zagadki prowadzi do *liczb Fibonacciego*, mających wielkie znaczenie w wielu działach matematyki. Liczbę F_n par królików w kolejnych miesiącach określić można rekurencyjnie:

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geqslant 3.$$

Inne zagadki Fibonacciego również znajdujemy w wielu współczesnych opracowaniach, np.:

Fontanna. Dwa ptaki wylatują w tym samym momencie ze szczytów dwóch wież, odległych od siebie o 50 metrów. Wysokość jednej wieży wynosi 30 metrów, a drugiej 40 metrów. Lecąc po odcinkach linii prostych z tą samą jednostajną prędkością, dolatują w tym samym momencie do fontanny, usytuowanej na prostej pomiędzy dwiema wieżami (na poziomie gruntu). W jakiej odległości od podstawy każdej wieży znajduje się fontanna?

Sakiewka. Trzech mężczyzn znalazło sakiewkę zawierającą 23 denary. Pierwszy powiedział do drugiego: „Jeżeli dodam te pieniądze do swoich, to będę miał dwa razy więcej od ciebie". Drugi powiedział podobnie do trzeciego: „Jeżeli ja wezmę te pieniądze, będę miał trzy razy więcej od ciebie". Trzeci powiedział do pierwszego: „Ja dodając te pieniądze do swoich, będę miał cztery razy więcej niż ty". Ile denarów miał każdy z nich?

Spadek. Pewien człowiek na łożu śmierci wezwał wszystkich swych synów i powiedział do najstarszego: „Weź jednego denara z mego majątku i siódmą część tego, co zostanie". Do drugiego powiedział: „Weź dwa denary i siódmą część tego, co zostanie". Do trzeciego: „Weź trzy denary i siódmą część tego, co pozostanie". Każdemu kolejnemu synowi zapisywał więc jednego denara więcej od poprzedniego i siódmą część reszty. Po podziale majątku okazało się, że każdy z synów dostał tyle samo. Ilu było synów i jak duży był spadek?

Euler. Leonhard Euler (1707–1783) był niezwykle twórczym matematykiem, zajmującym się prawie każdą z dziedzin matematyki mu współczesnej. Pozostawił tak bogatą spuściznę naukową, że bodaj do dzisiaj nie wydrukowano wszystkich jego rękopisów. Sformułował m.in. następujące zagadki:

Mosty w Królewcu. W rozwidleniach rzeki Pregoły znajdują się dwie wyspy. System siedmiu mostów na tej rzece zawierał: jeden most łączący obie wyspy, dwa mosty łączące jedną z wysp z przeciwległymi brzegami rzeki oraz dwie pary mostów, łączące drugą z wysp z przeciwległymi brzegami rzeki. Euler pytał, czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty, odwiedzając każdy tylko raz. Euler wykazał, że jest to niemożliwe. Problem ten uważać można za początek teorii grafów.

36 oficerów. Czy jest możliwe ustawienie w kwadrat 36 oficerów sześciu różnych rang z sześciu różnych regimentów, tak, aby w żadnym rzędzie ani w żadnej kolumnie nie powtórzył się ten sam regiment ani ta sama ranga?

Lucas. Edouard Lucas (1842–1891) jest autorem czterotomowego dzieła *Recréations mathématiques* poświęconego rozrywkom matematycznym, które uważane jest za klasykę gatunku. Popularność zyskała w szczególności jego zagadka *Wieże Hanoi*.

Chapman. Noyes Palmer Chapman (1811–1889) był urzędnikiem pocztowym, autorem bardzo kiedyś popularnej gry matematycznej *15 puzzle* (podobno po raz pierwszy pokazanej w 1874 roku). Polega ona na umieszczeniu na kwadratowej tabliczce liczb od 1 do 15 oraz jednego pustego miejsca. Na początku gry liczby rozmieszczone są losowo, gra polega na takim przemieszczaniu liczb, aby uzyskać określoną ich kolejność (np. od najmniejszej do największej). Także później podobne mechaniczne gry matematyczne cieszyły się sporą popularnością – wspomnieć wystarczy np. o kostce Rubika, o której zapewne każdy słyszał.

Loyd. Samuel Loyd (1841–1911) zajmował się szachami oraz matematyką rozrywkową. W 1914 roku opublikowano jego *Cyclopedia of 5000 puzzles*, zawierającą łamigłówki i zagadki matematyczne. Jest to kolejna pozycja uważana za klasykę gatunku.

Dudeney. Henry Ernest Dudeney (1857–1930) specjalizował się w zagadkach logicznych oraz grach matematycznych. Jego dzieło *536 puzzles and curious problems* zawiera zagadki arytmetyczne, geometryczne, kombinatoryczne i topologiczn. Dudeney opublikował też kilka innych zbiorów zagadek, m.in. *The Canterbury puzzles and other curious problems*.

Carroll. Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) to matematyk, znany jednak bardziej pod swoim literackim pseudonimem jako Lewis Carroll. Jego zagadki logiczne do dzisiaj urzekają swoimi sformułowaniami i pomysłowością fabuły.

Małpa na linie. Przez bloczek pod sufitem przewieszona jest lina. Na jednym końcu liny znajduje się małpka, a na drugim końcu ciężarek, równoważący jej wagę. Jeśli małpka zacznie wspinać się po linie, to jak będzie poruszał się ciężarek?

Doublets. To zabawa polegająca na zapisaniu jakiegoś słowa, a następnie kolejnych, z których każde powstaje z poprzedniego przez wymianę jednej litery. Jak zmienić w ten sposób głowę (*head*) na ogon (*tail*)? Popatrzmy:

HEAD – heal – teal – tell – tall – TAIL

Dodajmy, że Lewis Carroll był prekursorem, jeśli chodzi o stosowanie pewnych ważnych technik logicznych (użycie tabliczek prawdziwościowych, metoda rezolucji, metoda tablic analitycznych).

Gardner. Martin Gardner (1914–2010) to jeden z najbardziej wybitnych i znanych współczesnych popularyzatorów matematyki. Kilka jego książek zostało przetłumaczonych na język polski (zob. bibliografia). Gardner był przez wiele lat redaktorem działu *Mathematical Games* w czasopiśmie *Scientific American*. Oprócz popularyzacji matematyki interesował się m.in. paranauką i demaskowaniem pseudonauki. Uczynił dość powszechnie znanymi m.in. następujące zagadki: *grę w życie* Conwaya, tangramy (układanki figur geometrycznych), *parkiet Penrose'a* (przykład niecyklicznego wypełnienia płaszczyzny), zagadki dotyczące kryptografii, grę planszową *Hex*, zagadki dotyczące obiektów fraktalnych.

Conway. John Horton Conway (ur. 1937) jest autorem niezliczonych zagadek matematycznych, a ponadto jest także znanym zawodowym matematykiem. Do bardziej popularnych jego zagadek należą m.in.:

The Game of Life. Gra odbywa się na nieskończonej płaszczyźnie, podzielonej na kwadratowe komórki. Każda komórka może być żywa lub martwa. Stany komórek zmieniają się w (dyskretnym) czasie, w zależności od bezpośredniego sąsiedztwa każdej komórki (każda komórka ma osiem komórek sąsiednich). Reguły tych zmian są następujące:

1. Martwa komórka, która ma dokładnie trzech żywych sąsiadów, staje się żywa w następnej jednostce czasu.

2. Żywa komórka z dwoma albo trzema żywymi sąsiadami pozostaje nadal żywa; przy innej liczbie sąsiadów staje się martwa w następnej jednostce czasu.

W trakcie gry powstawać mogą różnorakie struktury (wzorce) złożone z żywych komórek, np.:

1. *Struktury niezmienne*. Pozostają w tym samym kształcie w czasie gry.

2. *Oscylatory*. Zmieniają się okresowo, ale co pewien czas powracają do stanu wyjściowego.

3. *Struktury niestałe*. Zmieniają się, nie powracając do stanu wyjściowego. Są wśród nich struktury „nieśmiertelne".

4. *Statki*. Zmieniają się okresowo, ale jednocześnie przesuwają się po planszy.

5. *Działa*. To oscylatory, które co pewien czas emitują z siebie statek oddalający się od struktury wyjściowej.

Napisano wiele prac na temat matematycznych aspektów tej gry. Wiąże się ona m.in. z teorią automatów komórkowych oraz teorią badającą złożoność obliczeń.

Anioł i diabeł. Gra odbywa się na nieskończonej szachownicy. Są dwaj gracze – anioł i diabeł, których działania podlegają następującym regułom:

1. Na początku gry na szachownicy znajduje się anioł.
2. Ustalamy *moc* anioła: mówimy, że anioł ma moc $k \geqslant 1$, jeśli jeden jego ruch odpowiada k ruchom króla szachowego.
3. Ruch diabła polega na blokowaniu pól: można myśleć o tym jako o budowaniu murów, albo o robieniu dziur w szachownicy. Każdy ruch diabła to zablokowanie jednego pola szachownicy (z wyjątkiem pola aktualnie zajmowanego przez anioła).
4. Anioł i diabeł wykonują swoje ruchy na przemian.
5. Anioł nie może lądować na polu zablokowanym przez diabła.
6. Anioł mocy k może przeskakiwać przez układy zablokowanych pól o szerokości mniejszej od k.

Przyjmiemy, że modelem nieskończonej szachownicy jest zbiór punktów kratowych płaszczyzny kartezjańskiej i że anioł na początku gry znajduje się w początku układu współrzędnych.

Diabeł wygrywa grę, gdy uda mu się zablokować anioła, czyli uwięzić go na skończonym obszarze, poza który nie będzie mógł się wydostać. Anioł wygrywa, jeśli ma możliwość poruszania się w nieskończoność.

Na mocy stosownych twierdzeń topologii, gra jest zdeterminowana, czyli jeden z graczy ma strategię zwycięską. To, który z nich wygrywa, zależy od mocy anioła oraz od rodzaju ruchów wykonywanych przez graczy. Ustalono m.in. następujące fakty:

1. Jeśli anioł ma moc 1, to diabeł ma strategię wygrywającą.
2. Jeśli anioł nigdy nie zmniejsza rzędnej swojego położenia na szachownicy, to diabeł ma strategię wygrywającą.
3. Jeśli anioł zawsze zwiększa swoją odległość od początku układu współrzędnych, to diabeł ma strategię wygrywającą.

Rozważano także omawianą grę w trzech wymiarach, czyli na zbiorze wszystkich punktów kratowych przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej. Stosunkowo niedawno udowodniono, że anioł o wystarczającej mocy ma strategię wygrywającą w przypadku dwuwymiarowym: anioł o mocy 4 ma strategię wygrywającą (Bowditch 2007), anioł o mocy 2 ma strategię wygrywającą (Kloster 2007, Máthé 2007).

Conway's Army. Omawiam tę zagadkę dokładniej w dalszej części tekstu, w grupie zagadek dotyczących ruchu i zmiany.

Smullyan. Raymond Smullyan (1919–2017) jest uważany za mistrza zagadek logicznych. Wiele jego zbiorów zagadek i łamigłówek logicznych przetłumaczono na język polski (kilka tłumaczeń gotowych jest do druku), zob. bibliografia. Podaję przykłady zagadek logicznych Smullyana w niniejszym tekście. Smullyan jest także autorem „poważnych" prac matematycznych, dotyczących: teorii rekursji, twierdzeń metalogicznych, metody tablic analitycznych.

Niektórzy współcześni autorzy zagraniczni. Interesujące zbiory zagadek matematycznych opublikowali np. Presh Talwalkar i Peter Winkler. Kilka książek z zagadkami matematycznymi autorstwa Iana Stewarta zostało przetłumaczonych na język polski. Szczegóły podaję w bibliografii.

Polscy autorzy. W polskiej literaturze przedmiotu znajdujemy wiele ciekawych zbiorów zagadek matematycznych, np.: Hugo Steinhaus *Kalejdoskop matematyczny*, Szczepan Jeleński *Lilavati*, *Śladami Pitagorasa*, Cecylia Rauszer *Rozmaitości matematyczne*, Witold Więsław *Stare polskie zadania z matematyki*, Krzysztof Ciesielski i Zdzisław Pogoda *Zagadki matematyczne*, *Wielka księga zagadek. Matematyczna bombonierka*, Edward Piegat *Zadania Hugona Steinhausa znane i nieznane*, *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa*, Marek Penszko *Łamigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej*. Zagadki i łamigłówki matematyczne podawane są także w pracach popularyzujących matematykę – zob. np. książki Michała Szurka podane w bibliografii.

4.1.2. Zagadki matematyczne: zasoby

W bibliografii podaję pozycje, z których zaczerpnąłem poszczególne zagadki. Obecnie mamy do dyspozycji wiele różnorodnych źródeł zagadek matematycznych. Znajdujemy je w książkach popularyzujących matematykę, zbiorach zagadek, materiałach różnorakich konkursów matematycznych, a także na wielu portalach internetowych poświęconych matematyce. Niektóre czasopisma prowadzą kolumny poświęcone zagadkom matematycznym. Na stronie internetowej *Chronology of Recreational Mathematics* Davida Singmastera wyliczono setki przykładów rozrywek matematycznych, które cieszyły ludzi w dziejach.

Zbiory zagadek

Niektóre pozycje z załączonej na końcu tekstu bibliografii poświęcone są w całości zagadkom matematycznym. Są to pozycje już klasyczne (np. opracowania Steinhausa, Jeleńskiego, Gardnera, Smullyana) bądź też całkiem nowe (np. opracowania Stewarta, Winklera, Havila, Talwalkara). Włączyłem do bibliografii także zestawy zadań z różnych konkursów matematycznych: olimpiad matematycznych, które odbywały się w Związku Socjalistycznych Republik Radzieckich oraz znanych amerykańskich konkursów *William Lovell Putnam Mathematical Competition*.

Konkursy matematyczne

W wielu krajach popularne są różnego typu konkursy matematyczne. Czasem nazywają się one olimpiadami matematycznymi i mają całkiem poważny charakter – uczestnictwo w takiej olimpiadzie i zostanie jej laureatem bywa nagrodą zarówno dla uczniów, jak i dla opiekujących się nimi nauczycieli.

Alfabetyczną listę konkursów matematycznych w Polsce znaleźć można na stronach: http://sem.edu.pl/konkursy/.

Informacje na temat konkursów matematycznych w różnych krajach świata znaleźć można w Wikipedii, pod hasłem *List of mathematics competitions*. Amerykańskie konkursy matematyczne wyliczone są na stronach *Mathematical Association of America*: http://www.maa.org/math-competitions

Portale w sieci

W sieci znajdujemy coraz więcej portali poświęconych zagadkom matematycznym, matematyce rekreacyjnej, różnego rodzaju łamigłówkom itp., np.: *Mind your decisions*, *Mathologer*, *3Blue1Brown*, *Numberphile*, *Khan Academy*, *TED-ED*, *PBS Infinite Series*. Doprawdy, trudno je wyliczyć. Warte zauważenia są również niektóre polskie portale, np.: Adonai.pl, Matematyka.pl, Serwis matematyczny, Polski portal matematyczny, Wrocławski portal matematyczny.

4.2. Przykłady zagadek matematycznych

Grupuję zagadki w umownych działach tematycznych. Poszczególne zagadki mogą czasem zostać przypisane do różnych działów, ale to nie jest żadnym kłopotem. Pamiętajmy o jedności całej matematyki. Często najciekawsze problemy matematyczne powstają w obszarach wspólnych różnym jej działom.

Nie wyróżniam np. osobnego działu poświęconego grom, ale zagadki dotyczące gier umieszczam w różnych działach. Można dokonać drobniejszego podziału tematów – np. wyróżnić osobny dział poświęcony tym zagadkom, w których istotną rolę odgrywa rozbieżność szeregu harmonicznego. Niektóre z podanych niżej zagadek znaleźć można w różnych stylizacjach w wielu miejscach. Prawie wszystkie zagadki zaczerpnięto z pozycji podanych w bibliografii (w wybranych przypadkach podaję informację bibliograficzną).

4.2.1. Nieskończone

To jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. Zawsze było ono też źródłem wielu problemów filozoficznych. Budziło i budzi emocje: strach, podziw, itd. Żongluje się nim dość swobodnie w systemach religijnych. Czy potrafimy porządnie zdefiniować nieskończoność? Zastanów się przez chwilę, czy widzisz możliwość precyzyjnego określenia, że czegoś jest nieskończenie wiele, bez odwoływania się np. do: czasu, przestrzeni, uporządkowania. Prawdopodobnie w miarę łatwo przychodzi ci obcowanie z *nieskończonością potencjalną* – z przypadkiem, gdy można bez ograniczeń stale powiększać jakąś kolekcję obiektów. Możesz natomiast z pewnym-takim-wahaniem być skłonna do uznania, że istnieje również *nieskończoność aktualna* – oraz że możemy wykonywać pewne operacje na ujmowanych w całość obiektach nieskończonych. Z pewnością zaczniesz się buntować, gdy dowiesz się o istnieniu całej skali różnych nieskończoności.

Zagadki

Ile banknotów? Raymond Smullyan podaje w *Labiryntach logicznych* następującą ciekawą zagadkę (Smullyan 2009, 146; tłum. J.P.):

> *Problem 14.21.* Załóżmy, że ty i ja jesteśmy nieśmiertelni. Mam nieskończoną liczbę banknotów dolarowych do mojej dyspozycji, a ty na początku nie masz żadnego. Dzisiaj daję ci dziesięć banknotów, a ty oddajesz mi jeden. Jutro dam ci kolejne dziesięć, a ty wtedy z dziewiętnastu banknotów, które masz, oddasz mi jeden. I tak we wszystkie następne dni, ja daję ci dziesięć każdego dnia, a ty oddajesz mi jeden. Czynimy tak przez całą wieczność. A teraz pytaniem jest: ile na stałe pozostanie ci banknotów? Nieskończona liczba? Zero? Jakaś dodatnia liczba skończona? (Jestem przekonany, że odpowiedź wprawi w szok wielu z was!)

Kule Smullyana. Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, według następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać” poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej. Czy potrafisz uzasadnić, że zabawa musi zakończyć się po skończonej liczbie kroków?

Róg Gabriela. Wierni z jednej z parafii na dalekiej północy kraju podarowali swojemu arcybiskupowi kształtną flaszkę wypełnioną winem. Ma ona mianowicie kształt następujący: składa się z walca o promieniu i wysokości równej jednostce (np. jednemu metrowi) oraz szyjki, która jest powierzchnią powstałą poprzez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale od 1 do nieskończoności. Czy arcybiskup będzie pił z niej wiecznie, zakładając, że codziennie pragnie, powiedzmy, ćwiarteczki?

Rozwiązania

Ile banknotów? Odpowiedź zależy od tego, które ze swoich banknotów mi oddajesz! Spójrzmy bowiem:

1. Jeśli oddajesz mi zawsze banknot ze szczytu sterty dziesięciu banknotów, które ci dałem danego dnia, to dziewięć banknotów ze sterty będzie ci zostawało za każdym dniem, a stąd na stałe będziesz miał nieskończenie wiele banknotów.

2. Możesz też postąpić inaczej: najpierw (w ciągu pierwszych dziesięciu dni) oddasz mi pierwsze dziesięć banknotów, które otrzymałeś pierwszego dnia, potem (w ciągu następnych dziesięciu dni) drugie dziesięć banknotów, które otrzymałeś drugiego dnia itd. Wtedy ostatecznie (po nieskończonej liczbie dni) oddasz mi wszystkie banknoty, które otrzymałeś i pozostaniesz z niczym, jak przed naszą zabawą.

3. Mógłbyś wreszcie postąpić jeszcze inaczej: na stałe zatrzymać dowolną skończoną liczbę banknotów, którą sam wybierzesz i oddawać mi resztę np. wedle procedury z poprzedniego punktu.

Smullyan pisze w rozwiązaniu tej zagadki (Smullyan 2009, 155–156; tłum. J.P.):

> Można na to spojrzeć inaczej w ten oto sposób. Wyobraź sobie, że wszystkie banknoty są ponumerowane $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Wtedy mógłbyś, według jednej strategii, systematycznie oddawać mi banknoty w porządku $1, 2, \ldots, n, \ldots$, w którym to przypadku nie zatrzymałbyś żadnego; alternatywnie, mógłbyś oddawać mi banknoty oznaczone liczbami parzystymi i zatrzymać nieskończenie wiele banknotów oznaczonych liczbami nieparzystymi. Albo jeszcze inaczej, mógłbyś na stałe zatrzymać dowolną skończoną liczbę, którą chcesz i oddawać mi resztę wedle rosnącego porządku numerów.
>
> Cały ten problem jest jedynie zwodniczą wersją pytania, ile liczb naturalnych pozostanie, jeśli usuniemy nieskończenie wiele z nich. Tu odpowiedzią jest oczywiście, że zależy to od tego, które liczby usuniemy (być może wszystkie, być może tylko parzyste, być może wszystkie liczby większe od 27).

Kule Smullyana. Zabawę tę przedstawić można w postaci drzewa o ponumerowanych wierzchołkach. Początkową zawartość pudełka reprezentują wierzchołki wychodzące bezpośrednio z korzenia drzewa. Zastępowanie jakiejś kuli (liścia drzewa) zbiorem innych polega na dołączeniu, w miejsce usuwanego liścia, całego zbioru nowych liści, reprezentujących kule, zastępujące usuwaną kulę. Drzewo „rośnie w górę” w miarę jak zastępujemy usuwane kule nowymi. Zauważmy, że na każdej gałęzi drzewa występują kule o coraz mniejszych numerach. Ponadto, każdy wierzchołek drzewa ma tylko skończenie wielu bezpośrednich potomków. Gdyby drzewo miało nieskończoną liczbę wierzchołków, to (na mocy *lematu Königa*) musiałoby mieć gałąź nieskończoną. To jednak jest niemożliwe, ze względu na wspomniany już fakt, że numery na każdej gałęzi maleją w miarę oddalania się od korzenia drzewa. Zabawa w opróżnianie pudełka musi więc zakończyć się w skończonej liczbie kroków.

Róg Gabriela. Mamy niedobre wiadomości dla spragnionego arcybiskupa. Nie chodzi nawet o to, że musiałby mieć nieskończenie długą szyję, aby napić się z tej flaszki bez jej rozbijania, ale przede wszystkim o to, że objętość rozważanej flaszki jest skończona, mimo iż jej całkowita powierzchnią jest nieskończona. Stosowne obliczenia (wykorzystujące całkowanie, ale można też opracować wersję dyskretną zagadnienia, przez aproksymację flaszki ciągiem walców o wysokości 1 oraz stosownie dobranych promieniach) ukazują, że:

1. Objętość rozważanej flaszki to objętość walca (tu: 2π) plus objętość szyjki (tu: π), czyli razem 3π.

2. Powierzchnia rozważanej flaszki to powierzchnia boczna walca (równa 2π) plus powierzchnia szyjki, a ta ostatnia jest nieskończona, gdyż majoryzuje wielkość $2\pi \ln x$, która to wielkość dąży do nieskończoności wraz z x dążącą do nieskończoności.

Powyższe wyniki otrzymujemy, wykorzystując stosowne wzory na objętość oraz pole powierzchni bryły obrotowej. W naszym przypadku bryłę tę otrzymujemy, rozważając obracający się wokół osi odciętych wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, w przedziale od 1 do jakiejś liczby d. Mamy mianowicie następujące wzory na objętość $V(d)$ oraz powierzchnię $P(d)$ tej bryły:

$$V(d) = \pi \int\limits_1^d \frac{1}{x^2} dx = \pi(1 - \frac{1}{d})$$

$$P(d) = 2\pi \int\limits_1^d \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{x} dx > 2\pi \int\limits_1^d \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln d$$

Przechodząc do granicy w pierwszym z tych wzorów, mamy:

$$\lim_{d \to \infty} \pi(1 - \frac{1}{d}) = \pi$$

Natomiast przejście do granicy w drugim z tych wzorów daje:

$$\lim_{d \to \infty} 2\pi \ln d = \infty$$

Ta granica nie jest skończona, ponieważ wartość funkcji logarytmu naturalnego dąży do nieskończoności przy argumencie dążącym do nieskończoności.

W szkole powyższych wzorów nie możemy wykorzystać, ale możemy podać stosowne oszacowania dla powierzchni P szyjki flaszki oraz jej objętości V, w których nie stosujemy całkowania. Wykorzystują one aproksymację szyjki flaszki walcami o wysokości 1 oraz promieniach będących odwrotnościami kolejnych liczb naturalnych:

1. $P > \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}) = 2\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

2. $V < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\pi(\frac{1}{n})^2 \cdot 1) = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi \frac{\pi^2}{6}$

W szkole poznaliśmy wzory: na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, jeśli jego iloraz jest co do bezwzględnej wartości mniejszy od jedynki. Kolejne wyrazy sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie są jednak ani wyrazami ciągu arytmetycznego, ani geometrycznego, więc poznane w szkole wzory nie mają tu zastosowania. Oznaczmy:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Liczby H_n nazywamy *liczbami harmonicznymi*, a suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ to *szereg harmoniczny*. Od XIV wieku wiadomo, że szereg ten jest rozbieżny (czyli suma ta nie jest liczbą skończoną), jak wykazał to bodaj po raz pierwszy Mikołaj z Oresme. Istnieje kilkadziesiąt dowodów rozbieżności szeregu harmonicznego, przypomnijmy ten pochodzący z XIV wieku. Porównajmy następujące sumy nieskończone:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \dots.$$

Każdy kolejny składnik pierwszej sumy jest niemniejszy od odpowiadającego mu kolejnego składnika drugiej sumy. Tę drugą sumę możemy przedstawić w postaci:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16})+\dots.$$

Sumy składników w nawiasach są wszystkie równe $\frac{1}{2}$. Jakąkolwiek więc wybierzemy wielkość skończoną n, to wystarczy dodać odpowiednią liczbę ułamków $\frac{1}{2}$, aby otrzymać sumę przekraczającą n. W konsekwencji, wystarczy także dodać odpowiednią liczbę kolejnych składników szeregu harmonicznego, aby przekroczyć dowolną, z góry wybraną liczbę n.

Dowód (Eulera), że $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ jest dość złożony. Pokażemy jedynie, że S jest liczbą skończoną:

$S = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) + \dots <$
$1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}) + \dots =$
$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Zwróćmy uwagę, że bryłę o podobnych własnościach (skończona objętość ograniczona nieskończoną powierzchnią) otrzymamy też, gdy wykonamy następującą konstrukcję. Sześcian jednostkowy dzielimy na połowy: górną i dolną. Górną dostawiamy do prawej strony dolnej. Teraz tę obecnie prawą połowę dzielimy na połowy: górną oraz dolną. Górną dostawiamy do prawej strony dolnej. I tak dalej: otrzymujemy nieskończone (co do powierzchni) schody, jednak cała bryła ma objętość taką, jak wyjściowy sześcian, czyli równą jeden.

Zagadka dotycząca rogu Gabriela omawiana jest np. w Havil 2008. Zgodnie z tradycją chrześcijańską, archanioł Gabriel ogłosi Sąd Ostateczny zadęciem w róg. Rozważany obiekt geometryczny jest nazywany także trąbką Torricelliego. Szereg harmoniczny pojawi się w jednej z kolejnych zagadek.

4.2.2. Liczby i wielkości

W szkole metodą *przemocy symbolicznej* nauczono cię tabliczek: dodawania i mnożenia. Zmuszono cię również do poznania algorytmicznych przepisów, ustalających jak (całkowicie bezmyślnie) dodawać, mnożyć, odejmować i dzielić liczby. Potem jeszcze były potęgi, pierwiastki, logarytmy. Czy jednak wiesz, czym właściwie są liczby (naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone) oraz czym właściwie jest ich dodawanie, mnożenie, itd.? Czy istnieją inne rodzaje liczb niż te, o których mówiono w szkole? Jakie jeszcze rozważa się operacje na liczbach i po co? Czy istnieją wielkości nieskończenie wielkie lub nieskończenie małe? Czy o liczbach (prędzej czy później) dowiemy się wszystkiego czy też istnieją prawdy o liczbach, które dowodem matematycznym nie są osiągalne? Czy każdy zbiór liczb naturalnych możemy w jakiś efektywny sposób opisać?

Zagadki

Wiek dzieci. Wyobraź sobie następujący dialog:

– Ile lat mają twoje dzieci?

– Mam trójkę dzieci, iloczyn ich lat wynosi 36.

– To nie wystarcza dla ustalenia wieku każdego z nich!

– Suma ich lat równa jest liczbie okien w kamienicy naprzeciwko.

– To też nie wystarcza!

– Najstarsze ma zeza.

– No, wreszcie! Teraz już wiem, ile lat ma każde z trójki.

Ile lat ma każde z dzieci?

17 koni. Ojciec zostawia w spadku trzem synom 17 koni, życząc sobie, aby spadek podzielono (wedle starszeństwa) w stosunku: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, a przy tym oczywiście nie wolno dzielić koni na kawałki. Czy można zatem wypełnić ostatnią wolę konającego?

Ile ważeń? W dziesięciu workach znajdują się monety, w każdym tysiąc monet. Dziewięć worków zawiera wyłącznie monety prawdziwe, a jeden wyłącznie monety fałszywe. Prawdziwa moneta waży 14 g, a fałszywa 15 g. Mamy do dyspozycji precyzyjną wagę, która wytrzyma obciążenie do 100 kg. Jaka jest minimalna liczba ważeń, która pozwoli z całkowitą pewnością ustalić, który worek zawiera fałszywe monety?

Rozwiązania

Wiek dzieci. Dopiero wszystkie trzy powyższe informacje pozwalają rozwiązać zagadkę. Sposób postępowania narzuca się prawie natychmiast. Najpierw ustalamy wszystkie dzielniki liczby 36. Są to: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Zbudujmy teraz zestawienie, w którym pierwszy wiersz to możliwy wiek jednego dziecka, pierwsza kolumna to możliwy wiek drugiego dziecka, a wiek trzeciego otrzymujemy, dzieląc 36 przez iloczyn liczby lat pierwszego oraz drugiego z dzieci i wpisujemy na przecięciu stosownego wiersza i kolumny. Znak „x" stawiamy w sytuacji, gdy 36 nie dzieli się przez ten iloczyn. Ze względu na warunki zadania oraz własności działań na liczbach wystarczy oczywiście wypełnić tylko połowę tego zestawienia, jak pokazano to niżej (a nawet jedynie jego ćwiartkę – widzisz którą?):

	1	2	3	4	6	9	12	18	36
1	36	18	12	9	6	4	3	2	1
2	18	9	6	x	3	2	x	1	
3	12	6	4	3	2	x	1		
4	9	x	3	x	x	1			
6	6	3	2	x	1				
9	4	2	x	1					
12	3	x	1						
18	2	1							
36	1								

Z tego zestawienia znajdujemy możliwe układy liczby lat dzieci i zapisujemy je w następnym zestawieniu, powiedzmy w porządku rosnącym. Ostatnia kolumna podaje sumę lat każdej z rozważanych trójek:

1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

Widać, że w dwóch przypadkach otrzymujemy tę samą sumę – odpowiada to temu, że podanie owej sumy nie wystarczało jeszcze do rozstrzygnięcia, ile lat mają dzieci. Wykorzystujemy wreszcie ostatnią informację: jedno z dzieci ma być najstarsze, co wyklucza układ $(1, 6, 6)$. Odpowiedź na nasze pytanie brzmi zatem: dzieci mają, odpowiednio, dwa, dwa i dziewięć lat.

Mogłoby się wydawać, że cała ta zabawa z zestawieniami jest niepotrzebna i wystarczy szybko „w rozumie" znaleźć trójki liczb spełniające pierwsze dwa warunki. To oczywiście możliwe, gdy bierzemy pod uwagę właśnie tak nikczemnie małe liczby. Dla większych liczb ich rozkładów na sumy jest już bardzo dużo – dla przykładu, liczba n ma 2^{n-1} rozkładów (uporządkowanych) na sumy. W ogólności, *partitio numerorum* (podział liczb na sumy) oraz *factorisatio numerorum* (podział na czynniki) to problemy wielce skomplikowane. Dla przykładu, liczba 1000 ma 24061467864032622473692149727991 rozkładów (nieuporządkowanych) na sumy.

17 koni. Wystarczy na chwilę pożyczyć jednego konia od sąsiada. Wtedy mamy 18 koni i dzielenie tej liczby wedle zasad testamentu daje:

$$\frac{18}{2} = 9 \quad \frac{18}{3} = 6 \quad \frac{18}{9} = 2.$$

Mamy: $9 + 6 + 2 = 17$. Oddajemy pożyczonego konia.

Zauważmy, że – precyzyjnie rzecz biorąc – nie uczyniliśmy zadość wymaganiom testamentu, aby konie podzielone zostały w proporcji $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, gdyż w istocie każdy z synów otrzymał więcej, ponieważ:

$$9 > \frac{17}{2} \quad 6 > \frac{17}{3} \quad 2 > \frac{17}{9}.$$

Przypuszczamy jednak, że wszyscy spadkobiercy są zadowoleni (nie mówiąc o koniach, które uniknęły ćwiartowania dzięki tej arytmetycznej sztuczce).

Zagadka pochodzi od Tartagli, jak pisze Petković na stronie 24 swojego znakomitego zbioru zagadek Petković 2009. Dodaje też, że równanie diofantyczne:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{n}{n+1}$$

ma dokładnie siedem rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, czyli jest dokładnie siedem układów (n, a, b, c) spełniających to równanie. Są to mianowicie układy: $(7, 2, 4, 8)$, $(11, 2, 4, 6)$, $(11, 2, 3, 12)$, $(17, 2, 3, 9)$, $(19, 2, 4, 5)$, $(23, 2, 3, 8)$, $(41, 2, 3, 7)$.

Ile ważeń? Wystarczy jedno ważenie! Na wadze kładziemy jedną monetę z pierwszego worka, dwie monety z drugiego, trzy z trzeciego itd. W sumie zatem kładziemy na wadze:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

monet. Wynik pomiaru pozwala jednoznacznie wskazać worek z fałszywymi monetami, ponieważ:

1. Gdyby wszystkie monety były prawdziwe, to wynikiem pomiaru byłoby $55 \cdot 14 = 770$ g.
2. Jeśli waga wskaże 771 g, to fałszywe monety są w worku pierwszym.
3. Jeśli waga wskaże 772 g, to fałszywe monety są w worku drugim.
4. Jeśli waga wskaże 773 g, to fałszywe monety są w worku trzecim.
5. Itd. A zatem, jeśli waga wskaże $770 + n$g, gdzie $1 \leqslant n \leqslant 10$, to n jest numerem worka z fałszywymi monetami.

Podobne zagadki (z różną liczbą worków oraz wagą monet) znaleźć można w wielu miejscach, np.: https://szaloneliczby.pl/worek-monet/ [28 lutego 2020]

4.2.3. Ruch i zmiana

Czym są ruch i zmiana? Niektórzy twierdzili, że to, co jest, jest niezmienne, bo gdyby było zmienne, to musiałoby przejść od tego czym jest, do tego czym nie jest; ale tego czym nie jest, przecież nie ma, a więc zmiana jest niemożliwa. „Ruchu nie ma” – powiedział Parmenides i odszedł. „Strzała wypuszczona z łuku nie porusza się” – twierdził Zenon: w każdym momencie pozostaje bowiem nieruchoma, a suma bezruchu przecież ruchu dać nie może. Nie są to tylko czcze igraszki słowne – wiążą się z nimi podstawowe pytania o naturę rzeczywistości oraz możliwości jej poznania. Z pobytu w dyskotece wiesz, że ludzie wykonują różne – czasem dziwne – ruchy. Pełno jest także ruchu w przyrodzie – tu coś pełznie, tam coś fruwa, a tam dalej coś się kołysze itp. W jaki sposób opisujemy tę olbrzymią różnorodność ruchów? Czy każdy rodzaj ruchu (powiedzmy: turbulentne przepływy cieczy) potrafimy opisać matematycznie? Jedną z największych zagadek Natury jest to, że obiekty fizyczne zachowują się zgodnie z pewnymi prawami minimalizującymi wybrane parametry. Skąd, u licha, mała-głupia-cząstka wie, która z nieskończenie wielu dróg między dwoma punktami jest najkrótsza?

Zagadki

Mrówka na linie. Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Mamy doskonale (nieskończenie) elastyczną linę o długości, powiedzmy, 1 km. Lina rozciąga się z jednostajną prędkością 1 km/sek. Tak więc, traktując lewy koniec liny jako nieruchomy, jej prawy koniec oddala się od lewego właśnie z jednostajną prędkością 1 km/sek: po jednej sekundzie lina ma 2 km długości, po dwóch sekundach 3 km długości itd. Z lewego końca liny startuje mała mrówka, poruszając się wzdłuż liny ze stałą prędkością (względem samej liny), powiedzmy, 1cm/sek. Pytamy teraz: czy mrówka dotrze do prawego końca liny w skończonym czasie, czy też będzie dreptała w nieskończoność, nigdy nie docierając do prawego końca liny?

Drabina na ścianie. Drabina o długości L opiera się górnym końcem o pionową ścianę, a jej dolny koniec spoczywa na poziomie gleby. Stojąca drabina tworzy z poziomem gleby kąt ostry. Przypuśćmy, że dolny koniec drabiny porusza się (jest ciągnięty) po poziomie gleby z jednostajną prędkością v. Z jaką prędkością górny wierzchołek drabiny uderzy w poziom gleby?

Armia Conwaya. Nieskończoną szachownicę dzieli pozioma bariera – tak, jak oś odciętych w układzie kartezjańskim dzieli płaszczyznę. Na polach szachownicy pod barierą gromadzimy armię pionków. Poruszać się one mogą poziomo lub pionowo (nie po przekątnych!) w ten sposób, że pionek wykonujący właśnie ruch przeskakuje przez pionek przed nim (usuwając go) i ląduje na polu za nim, pod warunkiem, że pole to jest puste. Celem gry jest osiągnięcie przez co najmniej jeden pionek ustalonego poziomu ponad barierą. Twoim zadaniem jest podanie przykładów armii, które osiągają poziomy: pierwszy, drugi, trzeci, czwarty i piąty.

Rozwiązania

Mrówka na linie. Zanim podamy rozwiązanie zagadki, zauważmy, że wiele osób próbuje podać natychmiastową, bezrefleksyjną odpowiedź i jest to zwykle odpowiedź błędna. Otóż może się wydawać, że wolno drepcząca mrówka nie ma szans na dotarcie do prawego końca szybko rozciągającej się liny. W rzeczywistości jest inaczej: jakkolwiek szybko rozciągałaby się lina (byle z jednostajną prędkością!) i jakkolwiek wolno dreptałaby mrówka (byle również z jednostajną prędkością, nie zwalniając), to musi ona po pewnym czasie osiągnąć prawy koniec liny.

Zagadka ta omawiana jest przez różnych autorów – zob. np.: Gardner 1982, Graham, Knuth i Patashnik 1996. Jest też obecna na różnych stronach poświęconych rozrywkom matematycznym.

Podkreślmy, że zagadka ma charakter eksperymentu myślowego – przyjmujemy w nim pewne założenia idealizacyjne: istnienie doskonale elastycznej liny, odpowiednio długi czas życia mrówki, zaniedbywalnie małe rozmiary mrówki. W istocie abstrahujemy od przywołanej reprezentacji fizycznej (jakoś trzeba zagadkę opowiedzieć, aby miała stosowną dramaturgię) i mamy przed sobą problem z fizyki teoretycznej, a właściwie problem czysto matematyczny.

Problem sformułowany w wersji ciągłej może sprawiać pewne kłopoty, jeśli chodzi o trafne wyobrażenie sobie rozważanej sytuacji i poprawne napisanie równania ruchu mrówki. Zwykle formułuje się więc tę zagadkę w postaci dyskretnej – mniej realistycznej, ale za to łatwiejszej do rozwiązania. Wyobraźmy sobie zatem, że lina nie rozciąga się w sposób ciągły, ale skokowo: co jedną sekundę Demon rozciąga linę o jeden kilometr. Mrówka drepcze więc przez pierwszą sekundę, a wraz z jej wybiciem Demon rozciąga linę z jednego do dwóch kilometrów. Mrówka maszeruje przez drugą sekundę, a z jej wybiciem Demon rozciąga linę z dwóch do trzech kilometrów. I tak dalej. W tej wersji zagadkę rozwiązać już łatwo – wystarczy zastanowić się, jaką część całej długości liny przebywa mrówka w każdej kolejnej sekundzie:

1. w pierwszej sekundzie mrówka pokonuje jeden centymetr z jednego kilometra, czyli $\frac{1}{100000}$ część całej długości liny
2. w drugiej sekundzie mrówka pokonuje jeden centymetr z dwóch kilometrów, czyli $\frac{1}{200000}$ część całej długości liny
3. w trzeciej sekundzie mrówka pokonuje jeden centymetr z trzech kilometrów, czyli $\frac{1}{300000}$ część całej długości liny
4. i tak dalej: w n-tej sekundzie mrówka pokonuje jeden centymetr z n kilometrów, czyli $\frac{1}{n \cdot 100000}$ część całej długości liny.

Nasze pytanie sprowadza się teraz do tego, czy istnieje liczba n taka, że suma:

$$\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100000}$$

będzie równa 1, czyli całej długości liny. Inaczej mówiąc, szukamy n takiej, dla której:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = 100000.$$

Pamiętamy (zagadka *Róg Gabriela*), że $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = H_n$ to n-ta liczba harmoniczna, a szereg harmoniczny $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Liczby harmoniczne spełniają następującą równość, w której pojawia się *stała Eulera-Mascheroniego* γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = 0,5772156649501\ldots.$$

Obecnie (2020) nie wiadomo, czy γ jest liczbą algebraiczną, czy przestępną, ani czy jest liczbą wymierną, czy też niewymierną. Gdyby liczba γ była wymierna (była ułamkiem nieskracalnym), to mianownik tego ułamka musiałby być większy od 10^{242080}. Stała γ występuje w wielu ważnych zależnościach, wiąże się np. z funkcją zeta Riemanna:

$$\gamma = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \zeta(n)}{n}.$$

Wracając do naszej zagadki, z faktu rozbieżności szeregu harmonicznego wynika, że istnieje liczba naturalna n taka, że $H_n \geqslant 100000$, a więc że mrówka po n sekundach osiągnie i przekroczy prawy koniec liny. Przy przyjętych tu wartościach liczbowych czas ten będzie naprawdę długi: $e^{100000-\gamma}$ sekund, co w zapisie dziesiętnym daje liczbę o ponad czterdziestu tysiącach cyfr. Jest to czas tysiące razy dłuższy od czasu istnienia Wszechświata (licząc od Wielkiego Wybuchu).

Wartości początkowych liczb harmonicznych są następujące:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Żadna liczba harmoniczna H_n $(n > 1)$ nie jest liczbą całkowitą. Przyjmijmy dodatkowo $H_0 = 0$. Rachunki pokazują ([Sloane A004080]), że aby uzyskać liczbę większą od 4, trzeba zsumować 31 odwrotności kolejnych liczb naturalnych, aby uzyskać liczbę większą od 10, trzeba zsumować 12367 odwrotności kolejnych liczb naturalnych, natomiast aby uzyskać liczbę większą od 20, trzeba zsumować aż ponad 250 000 000 odwrotności kolejnych liczb naturalnych. Tak więc szereg harmoniczny jest rozbieżny, ale jest w tej rozbieżności bardzo leniwy, by tak rzec.

Dodajmy jeszcze, że zagadka z mrówką na linie ma pewien związek ze współczesnymi modelami kosmologicznymi. Wedle aktualnych ustaleń, przestrzeń całego Wszechświata stale się rozszerza i to coraz szybciej. Czy więc kiedyś to wszystko, co skrzy się na nocnym niebie, zacznie (dla nas) gasnąć? Nie zwiększymy przecież prędkości światła: ani dekretem Unii Europejskiej, ani żarliwą modlitwą. Warto przy tym nadmienić, że owo rozszerzanie się przestrzeni Wszechświata obserwowalne jest w wielkiej skali – nie dotyczy ono rozmiarów obiektów pozostających w silnych związkach grawitacyjnych (Davis i Lineweaver 2003).

Drabina na ścianie. To zadanie jest często wykorzystywane w nauczaniu początków rachunku różniczkowego, prawdopodobnie ze względu na poglądowy model fizyczny oraz łatwe reguły różniczkowania. Kryje ono jednak w sobie pewną pułapkę. Jeśli mianowicie założymy, że górny wierzchołek drabiny nie opuszcza ściany i zsuwa się z niej aż do momentu osiągnięcia poziomu gleby, to – jak za chwilę zobaczymy – otrzymujemy osobliwość: górny wierzchołek drabiny musiałby uderzać w poziom gleby z nieskończoną prędkością, co jest oczywiście fizycznie niemożliwe.

Rozważmy najpierw tę zagadkę z owym pochopnym założeniem. Czytelnik może wykonać pomocniczy rysunek, na którym poziom gleby jest osią odciętych, pionowa ściana jest osią rzędnych, a drabina jest stosownie ulokowanym odcinkiem (czyli jest oparta pod kątem ostrym o ścianę).

Piszemy równanie Pitagorasa:

$$x^2 + y^2 = L^2.$$

Wielkości x oraz y zależą od czasu t. Sporządzony przez czytelnika rysunek przedstawia rozważaną sytuację dla $t = 0$. Wiemy, że pochodna x względem t jest równa v:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Naszym zadaniem jest znalezienie pochodnej y względem t dla chwili, w której współrzędna y równa jest zeru. Różniczkujemy powyższe równanie Pitagorasa względem t i otrzymujemy:

$$2xv + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Z tego równania otrzymujemy:

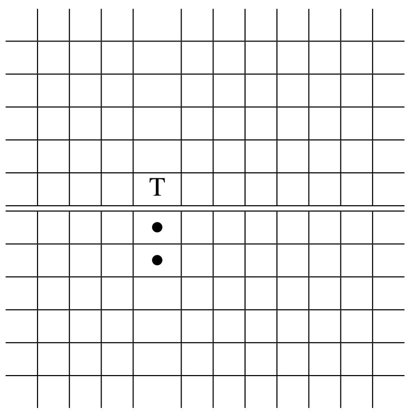
$$\frac{dy}{dt} = -v\frac{x}{y}.$$

Dla $y = 0$ wartość prawej strony równania jest nieskończona (ponieważ mamy dzielić wartość skończoną przez zero). Kłopot.

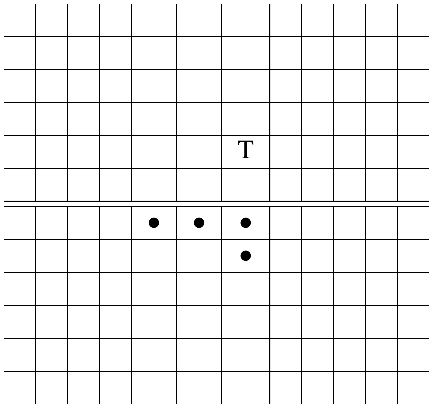
Trzeba zatem odrzucić przyjęte założenie, że górny wierzchołek drabiny nie opuszcza ściany i zsuwa się z niej aż do momentu osiągnięcia poziomu gleby. W istocie ruch górnego wierzchołka drabiny przebiega nieco inaczej: w pewnym momencie zostaje on oddzielony od ściany. W tej drugiej fazie drabina zachowuje się jak wahadło i należy zastosować równania dotyczące ruchu wahadła w polu grawitacyjnym. Jest kilka metod poprawnego (nie tylko pod względem matematycznym, lecz także fizycznym) opisu rozważanego zjawiska, np.: Scholten i Simoson 1996, Majumdar i Roy 2012. Ten przykład pokazuje, że gdy przyjęcie danego matematycznego modelu badanego zjawiska prowadzi do absurdu fizycznego, to zmienić należy model matematyczny.

Inny ciekawy przykład dotyczący ruchu drabiny omawiany jest w Klymchuk i Staples 2013. Jeśli drabina przylegająca początkowo do ściany prostopadłej do podłoża zacznie odchylać się od niej i upadać, to każdy punkt na drabinie zakreśli łuk będący ćwiartką okręgu, co chyba jest dla każdego widoczne. Jeśli natomiast drabina będzie zsuwała się po ścianie i górny jej wierzchołek zachowa styczność ze ścianą aż do momentu, gdy drabina będzie już poziomo na podłożu, to: górny wierzchołek drabiny będzie poruszał się po odcinku (ściana), jej dolny koniec także będzie poruszał się po odcinku (zakładamy, że podłoże jest poziome), natomiast np. punkt leżący na połowie długości drabiny zakreśli ćwiartkę okręgu. Co ciekawe, większości osób pytanych o ruch tego ostatniego punktu wydaje się, że punkt ten będzie poruszał się inaczej.

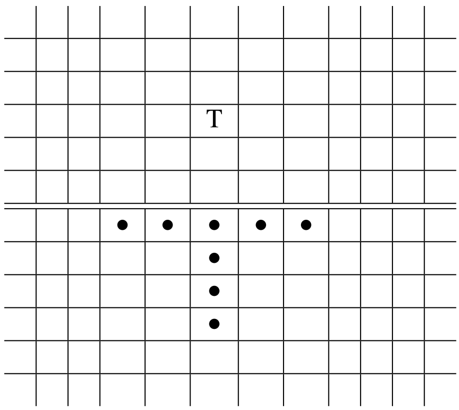
Armia Conwaya. Dość łatwo wyobrazić sobie, ile pionków (i jak ustawionych) wystarczy zgromadzić pod barierą, aby uzyskać poziom pierwszy, drugi lub trzeci. Pokazują to poniższe rysunki (T oznacza cel):



Minimalna armia osiągająca poziom pierwszy.

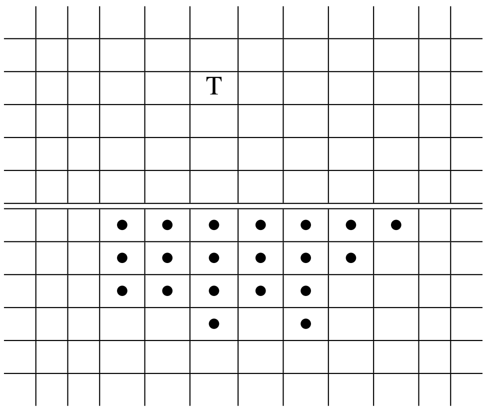


Minimalna armia osiągająca poziom drugi.



Minimalna armia osiągająca poziom trzeci.

Nieco bardziej złożony jest problem osiągnięcia czwartego poziomu. Jedno z możliwych ustawień pionków pokazano poniżej:



Mogłoby się wydawać, że aby osiągnąć poziomy wyższe od czwartego, wystarczy umiejętnie rozstawić odpowiednio dużą liczbę pionków pod barierą. Tak jednak nie jest – udowodnimy, że przy podanych zasadach ruchu pionków żadna ich armia zgromadzona pod barierą nie potrafi doprowadzić chociażby jednego z nich do poziomu piątego. Istota rozwiązania sprowadza się do przypisania wybranemu polu poziomu piątego ustalonej wartości, przypisania wartości każdemu ustawieniu pionków w kolejnych ruchach armii (przy czym przypisanie tych wartości odzwierciedla oddalenie pionków od celu) i pokazaniu, że żadna konfiguracja pionków nie może osiągnąć wartości przypisanej celowi.

Konfiguracje pionków opisywane są wielomianami wedle następujących reguł. Wybrane na poziomie piątym pole ma wartość 1. Pionek na danym polu ma wartość równą x^n, gdzie n odpowiada *odległości taksówkowej* tego pola od celu, czyli temu, o ile ruchów (poziomych lub pionowych) pole to oddalone jest od celu. Na rysunku wygląda to następująco:

			x^1	T	x^1			
		x^3	x^2	x^1	x^2	x^3		
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	
	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	
	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	
		x^8	x^7	x^6	x^7	x^8		
			x^8	x^7	x^8			
				x^8				

Odległości pionków od celu na poziomie piątym.

Każdą konfigurację pionków możemy teraz opisać wielomianem. Dla przykładu, konfiguracje pozwalające osiągać poziomy: pierwszy, drugi, trzeci oraz czwarty (pokazane na poprzednich rysunkach, ale odniesione teraz do celu na poziomie piątym) opisane są, odpowiednio, wielomianami:

1. $x^5 + x^6$
2. $x^5 + 2x^6 + x^7$
3. $x^5 + 3x^6 + 3x^7 + x^8$
4. $x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 4x^9 + x^{10}$.

Zauważmy, że dozwolone ruchy pionków odbywają się wedle następujących reguł:

1. $x^{n+2} + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^n
2. $x^n + x^{n-1}$ zostaje zastąpione przez x^n
3. $x^n + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^{n+2}.

Wartość $x > 0$ dobieramy tak, aby wartość otrzymanego wielomianu zmniejszała się w drugim i trzecim z powyższych przypadków, a pozostawała niezmieniona w pierwszym z nich. Skoro $x > 0$, to $x^n + x^{n-1} > x^n$. Jeśli ma być $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$, to $1 + x > x^2$, co daje nierówność $0 < x < \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Wreszcie, dla pierwszego warunku nasz wielomian ma nie zmieniać wartości, czyli ma zachodzić $x^{n+2} + x^{n+1} = x^n$. To oznacza, że $x + x^2 = 1$, a więc $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Jeśli więc przyjmiemy $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, to wszystkie wymagane warunki są spełnione oraz zachodzi $x + x^2 = 1$.

Każda z konfiguracji pionków opisana jest skończonym wielomianem. Jego wartość będzie zatem mniejsza od sumy szeregu nieskończonego:

$$P = x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 7x^8 + \ldots$$

$$P = x^5(1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots).$$

Sumowanie to staje się jasne, gdy spojrzymy na rysunek:

					T						
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}
x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}
x^{15}	x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	x^{16}

Nieskończona armia pod barierą.

Szereg w nawiasie to *szereg arytmetyczno-geometryczny* i jego sumę obliczamy w standardowy sposób:

1. $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$
2. $xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$
3. $S - xS = (1 - x)S = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$
4. $S - xS = 1 + 2(x + x^2 + x^3 + \ldots)$
5. $S - xS = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$
6. $S(1 - x) = \frac{1+x}{1-x}$
7. $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

Ponieważ $P = x^5 S$, więc $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2}$. Przypomnijmy, że nasz wybór wartości dla x spełnia warunek $x + x^2 = x(1 + x) = 1$, a więc $1 + x = \frac{1}{x}$ oraz $1 - x = x^2$. Tak więc:

$$P = \frac{x^5(1 + x)}{(1 - x)^2} = \frac{x^5(\frac{1}{x})}{(x^2)^2} = \frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Oznacza to, że wartość przypisana każdej początkowej (skończonej!) konfiguracji pionków poniżej bariery musi być mniejsza od 1, a ponieważ każdy ruch albo zmniejsza wartość konfiguracji, albo pozostawia ją bez zmian, więc wartość żadnego z pionków nie osiągnie nigdy 1. A to znaczy, że żaden pionek ze skończonej armii pod barierą, niezależnie od tego jak licznej i jak sprytnie rozstawionej, nigdy nie osiągnie poziomu piątego.

Podany wyżej dowód pochodzi z książki Havil 2007. Znane są też inne, bardziej ogólne dowody. Opracowano szereg wersji tej gry, np. z dopuszczeniem ruchów po przekątnej, na płaszczyźnie podzielonej nie na kwadraty, lecz na sześcioboki, w większej od 2 liczbie wymiarów itd. W ogólności, dla skończonej armii pionków zawsze któryś poziom (oraz oczywiście wszystkie wyższe) jest nieosiągalny. Rozważa się też nieskończone armie pionków, dla których poziom piąty staje się osiągalny (przy stosownych założeniach).

4.2.4. Kształt i przestrzeń

Ile wymiarów ma przestrzeń, w której żyjemy? Czy można zobaczyć czwarty wymiar? Jakie reguły obowiązują w świecie Płaszczaków (istot dwuwymiarowych)? W szkole zmuszono cię do poznania kilku, może kilkunastu kształtów, powierzchni, brył. Łatwo jednak wyobrazić sobie całe mnóstwo bardzo złożonych kształtów, powierzchni itp. Czy można je wszystkie jakoś rozumnie poklasyfikować? Jakie w tym celu wykorzystać środki – geometryczne, algebraiczne czy jeszcze jakieś inne? Jesteś przyzwyczajona do kilku sposobów mierzenia odległości między dwoma punktami – np. na płaszczyźnie będzie to długość odcinka łączącego te punkty, na sferze długość stosownego łuku koła wielkiego. W centrum miasta, gdzie poruszać się można jedynie po prostokątnej sieci ulic, odległość między punktami wyznaczona będzie przez długość pewnej łamanej, łączącej te punkty. Snuje ci się po głowie intuicyjne określenie: odległość między dwoma punktami to długość najkrótszej drogi łączącej te punkty. Jak nadać tej intuicji precyzyjną formę? Czy zawsze, w każdej przestrzeni o ustalonej strukturze można poprawnie zdefiniować odległość? Zapewne słyszałaś, że oprócz geometrii euklidesowej nauczanej w skromnym wymiarze w szkole są jeszcze geometrie nieeuklidesowe. Czym różnią się od tej szkolnej? A może istnieją jeszcze inne geometrie?

Zagadki

Sadzenie drzew. W jaki sposób posadzić można cztery drzewa tak, aby wszystkie odległości między punktami posadzeń były równe? Po krótszym lub dłuższym zastanowieniu się, z pewnością ustalisz, że punkty nasadzeń nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie. Tak więc, aby spełnione były warunki tego zadania, punkty nasadzeń muszą znajdować się w wierzchołkach czworościanu foremnego, czyli wystarczy trzy drzewa posadzić w wierzchołkach trójkąta równobocznego, a czwarte w odpowiednio głębokim dołku (lub na odpowiednio wysokiej górce). Czy można posadzić dziewięć drzew, w dziewięciu rzędach, po trzy drzewa w jednym rzędzie? Pisząc, że drzewa stoją w jednym rzędzie, mamy oczywiście na myśli to, że punkty ich zasadzeń leżą na jednej prostej.

Koza na sznurku. Jesteś dumnym posiadaczem jednej kozy i łąki w kształcie trójkąta równobocznego o długości boku 100 m. Chciałbyś dokładnie połowę łąki przeznaczyć na pastwisko dla kozy, a na drugiej połowie zasiać cokolwiek (tylko nie konopie). Koza jest uwiązana na sznurku zaczepionym do palika w jednym z wierzchołków rozważanego trójkąta. Jak długi powinien być sznurek, aby koza miała dostęp dokładnie do połowy twojego pola? Czynimy oczywiście śmieszne założenie, że koza jest punktem.

Zlepianie brył. Rozważmy dwie bryły: czworościan foremny o boku długości a oraz ostrosłup o podstawie kwadratowej, boku podstawy równym a oraz długości krawędzi łączących wierzchołki podstawy z wierzchołkiem ostrosłupa także równej a. Przypuśćmy teraz, że zlepiamy te bryły w ten sposób, że ścianę czworościanu zlepiamy (utożsamiamy) z jedną z trójkątnych ścian ostrosłupa. Jakim wielościanem jest powstała bryła – ile ma ścian, wierzchołków, krawędzi?

Rozwiązania

Sadzenie drzew. To zadanie dość łatwo rozwiązać. Rysujesz dwie proste. Na jednej z nich zaznaczasz punkty: a_1, a_2 oraz a_3 (w kolejności od lewej do prawej), a na drugiej punkty: b_1, b_2 oraz b_3 (także w kolejności od lewej do prawej). To daje ci dwa rzędy po trzy drzewa w każdym. Łączysz teraz odcinkami punkty:

1. a_1 z b_2 oraz a_1 z b_3
2. a_2 z b_1 oraz a_2 z b_3
3. a_3 z b_1 oraz a_3 z b_b.

Wtedy następujące pary odcinków będą miały punkty wspólne:

1. a_1b_2 oraz a_2b_1; nazwijmy ten punkt wspólny c_1
2. a_1b_3 oraz a_3b_1; nazwijmy ten punkt wspólny c_2
3. a_2b_3 oraz a_3b_2; nazwijmy ten punkt wspólny c_3.

To daje nam sześć dalszych rzędów zawierających trzy współliniowe punkty każdy, a mianowicie:

$$\begin{array}{ccc} a_1c_1b_2 & a_1c_2b_3 & a_2c_1b_1 \\ a_2c_3b_3 & a_3c_2b_1 & a_3c_3b_2 \end{array}$$

Punkty c_1, c_2 oraz c_3 leżą wszystkie na jednej prostej, na mocy *twierdzenia Pascala*. To dodaje kolejny rząd. W sumie otrzymałeś zatem dziewięć rzędów drzew, po trzy drzewa w jednym rzędzie.

Koza na sznurku. Czasami rozwiązanie zadania geometrycznego łatwiej uzyskać, zmieniając odpowiednio kontekst. Rysujemy zatem sześciokąt złożony z sześciu trójkątów równobocznych (o wymiarach twojego pola). Jest on oczywiście wpisany w okrąg o promieniu 100. Ze środka tego okręgu zakreślamy okrąg o szukanym promieniu r. Różnica powierzchni sześciokąta i powierzchni tego okręgu to właśnie sześciokrotna połowa twojego pola. Rachunki są już całkiem proste:

1. pole okręgu o promieniu r: πr^2
2. pole trójkąta równobocznego o długości boku a: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
3. pole sześciokąta złożonego z tych trójkątów: $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dla $a = 100$ otrzymujemy pole sześciokąta: $15000\sqrt{3}$. Wiemy, że πr^2 ma być równe połowie tej wielkości, czyli $7500\sqrt{3}$. Z tego łatwo otrzymujemy:

$$r = \frac{\sqrt{7500\sqrt{3}}}{\pi} \approx 64.3037.$$

Ta zagadka omawiana jest w Stewart 2011b (zamieniliśmy świnię na kozę).

Zlepianie brył. Zagadka omawiana jest np. w Winkler 2004. Piramida ma pięć ścian, zaś czworościan ma cztery ściany. Po zlepieniu tych brył w podany sposób znikną dwie trójkątne ściany, a więc powstała bryła miałaby w sumie $5+4-2 = 7$ ścian. Tak jednak nie jest, ponieważ po takim zlepieniu nie tylko znikną te dwie ściany, ale dwukrotnie będzie tak, iż ściana czworościanu będzie leżała w jednej płaszczyźnie z jedną z trójkątnych ścian piramidy, a zatem powstała bryła będzie miała w sumie tylko pięć ścian.

Odpowiedź na zadane pytanie znajdziemy dość łatwo, gdy narysujemy (albo zbudujemy) dwie piramidy, dotykające się bokiem podstawy: czyli dwa ostrosłupy o podstawie kwadratowej i długości krawędzi łączących wierzchołki podstawy z wierzchołkiem ostrosłupa równych długości boku podstawy, przy czym ich podstawy spoczywają w jednej płaszczyźnie i mają jeden bok podstawy wspólny. Połączymy teraz wierzchołki tych ostrosłupów odcinkiem. Nietrudno zauważyć, że otrzymujemy w ten sposób czworościan foremny usadowiony między tymi ostrosłupami. Usuwamy następnie jeden z ostrosłupów i otrzymujemy bryłę o której mowa w zagadce.

4.2.5. Uporządkowania

Starsi obywatele dobrze rozumieją pojęcie porządku liniowego: tak właśnie uporządkowana powinna być kolejka ludzi oczekujących przed sklepem. Z kolei pojęcie uporządkowania hierarchicznego (*porządku częściowego*) jest chyba znane wszystkim: taki typ porządku obserwujemy w drzewach genealogicznych lub w hierarchii wojskowej czy też kościelnej. Naturalne jest pojęcie *dobrego uporządkowania*: takiego, w którym każdy niepusty podzbiór rozważanego uniwersum ma element najmniejszy. Dość dobrze radzimy sobie z tzw. naturalnym porządkiem w zbiorach liczbowych. Potrafimy też uchwycić różnicę między porządkami *dyskretnymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb całkowitych) oraz *gęstymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb wymiernych). Nieco więcej zastanowienia wymaga odróżnienie porządków gęstych (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb wymiernych) od *ciągłych* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych).

Zagadki

Paradoks Condorceta. Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

X: $A > B > C$

Y: $B > C > A$

Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt?

Para wujów. Jedna z zagadek Alkuina z Yorku dotyczyła określenia związków pokrewieństwa zachodzących wtedy, gdy wdowa z córką spotyka (niespokrewnionego z nią) wdowca z synem i zawarte zostają związki: wdowiec żeni się z córką, a syn żeni się z wdową. Pewną modyfikacją tej ostatniej zagadki jest problem następujący. Czy możliwe jest (bez związków kazirodczych), aby Stanisław był wujem Kazimierza, a Kazimierz wujem Stanisława? Przypomnijmy, że być wujem oznacza być bratem matki lub mężem siostry matki.

Problem Józefa Flawiusza. Ustawiamy n osób na okręgu, numerując je liczbami od 1 do n (dla ustalenia uwagi, w porządku zgodnym z ruchem wskazówek zegara). Zaczynając liczyć od osoby 1, eliminujemy co drugą z tych osób (okrutny sposób eliminacji pozostawiamy do wyboru czytelnikowi), dopóki nie pozostanie tylko jedna osoba. Znaleźć pozycję, na którą trzeba zająć, aby uniknąć eliminacji.

Rozwiązania

Paradoks Condorceta. Dość łatwo widać, że tak nie jest:

1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.
2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.
3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

Sytuacja opisana powyżej przedstawia *paradoks Condorceta*. Pojawia on się także (w nieco bardziej złożonej postaci) w pewnych twierdzeniach pokazujących, że niemożliwe jest przeprowadzenie wyborów (czyli ustalenie globalnych preferencji społeczeństwa), które czyniłyby zadość pewnym naturalnym zasadom demokracji.

Para wujów. Jest rzeczą ciekawą, że ludzie miewają trudności z rozwiązaniem tego typu zagadek i często proponują dość zawiłe koligacje jako rozwiązania. Powodem jest zapewne to, że kłopot sprawia wyobrażenie sobie splątania porządku wyznaczonego przez relację między rodzicami i potomkami oraz zależności wynikające z faktu zawierania małżeństw, zwłaszcza w sytuacji „skrzyżowania" pokoleń, jak w zagadce Alkuina.

Uważam, że najprostszym rozwiązaniem zagadki o dwóch wujach jest sytuacja następująca:

1. Stanisław żeni się z siostrą matki Kazimierza.
2. Kazimierz żeni się z siostrą matki Stanisława.
3. Matka Kazimierza nie jest spokrewniona z matką Stanisława.

Wtedy istotnie Kazimierz jest wujem Stanisława, a Stanisław jest wujem Kazimierza. O tej zagadce wspomina się w Ciesielski i Pogoda 2003. W sieci znaleźć można zabawne historyjki i piosenki (np. *I am my own grandpa* Raya Stevensa) dotyczące tego typu powikłań rodzinnych.

Problem Józefa Flawiusza. Niech $J(n)$ oznacza pozycję osoby, która przeżyje całą eliminację. Znajdziemy najpierw warunki rekurencyjne, określające funkcję J, a potem wyraźny wzór, wyznaczający pozycję tego, który przeżyje.

Rozważmy osobno przypadki, gdy początkowa liczba osób jest parzysta bądź nieparzysta. Jeśli na początku jest $2n$ osób, to po pierwszej eliminacji pozostają tylko osoby o numerach nieparzystych. Otrzymujemy w ten sposób sytuację startową, ale teraz każda z pozostałych osób ma numer podwojony i pomniejszony o jeden. Mamy zatem warunek:

$$J(2n) = 2J(n) - 1, \qquad n \geqslant 1.$$

Załóżmy z kolei, że na początku mamy $2n+1$, czyli nieparzystą liczbę osób. Po pierwszej eliminacji znikają osoby o numerach: $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1$ (w tej kolejności). To znowu pozostawia przy życiu osoby o numerach nieparzystych z wyjątkiem nieszczęśnika o numerze 1. Otrzymujemy w ten sposób sytuację startową, ale teraz każda z pozostałych osób ma numer podwojony i powiększony o jeden. Mamy zatem warunek:

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1, \qquad n \geqslant 1.$$

Biorąc pod uwagę oba otrzymane warunki oraz oczywistą zależność $J(1) = 1$, dostajemy rekurencyjną definicję funkcji J:

1. $J(1) = 1$
2. $J(2n) = 2J(n) - 1$ dla $n \geqslant 1$
3. $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$ dla $n \geqslant 1$.

Zanim podamy ogólny wzór na funkcję J, spójrzmy na zestawienie, podającąe jej wartości dla kolejnych niewielkich argumentów:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Czytelnik zauważył z pewnością regularność pojawiającą się w ciągu kolejnych wartości funkcji J. Jeśli mianowicie pogrupujemy wartości $J(n)$ od 2^m do $2^{m+1} - 1$ (dla $m = 0, 1, 2, 3$), to widzimy, że na początku każdej grupy mamy wartość $J(n) = 1$ (dla $n = 2^m$), a kolejne wartości w każdej z grup wzrastają o 2. Jeśli teraz przedstawimy n w postaci $n = 2^m + k$, gdzie 2^m jest największą potęgą dwójki nie przekraczającą n, to powyższa obserwacja może sugerować następujący wzór:

$$J(2^m + k) = 2k + 1, \quad m \geqslant 0, \quad 0 \leqslant k < 2^m.$$

Zwróćmy uwagę, że jeśli $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, to reszta $k = n - 2^m$ spełnia warunek $0 \leqslant k < 2^{m+1} - 2^m$.

Udowodnimy przez indukcję (po m) powyższy wzór na funkcję J. Dla $m = 0$ musi być $k = 0$. Wtedy $J(1) = 1$, co się zgadza.

Niech teraz $m > 0$ oraz załóżmy, że $J(2^m + k) = 2k + 1$ dla wszystkich $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$. Musimy pokazać, że:

$$J(2^{m+1} + k) = 2k + 1$$

dla $k = 0, 1, \ldots, 2^{m+1} - 1$. Rozważymy dwa przypadki:

1. k parzysta. Wtedy $k = 2j$ dla $0 \geqslant j < 2^m$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

   (a) $J(2^{m+1} + k) =$

   (b) $J(2^{m+1} + 2j) =$

   (c) $J(2(2^m + j)) =$

(d) $2J(2^m + j) - 1 =$

(e) $2(2j + 1) - 1 =$

(f) $2(k + 1) - 1 =$

(g) $2k + 1.$

2. k nieparzysta. Wtedy $k = 2j + 1$ dla $0 \geqslant j < 2^m$.

   Z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

   (a) $J(2^{m+1} + k) =$

   (b) $J(2^{m+1} + 2j + 1) =$

   (c) $J(2(2^m + j) + 1) =$

   (d) $2J(2^m + j) + 1 =$

   (e) $2(2j + 1) + 1 =$

   (f) $2k + 1.$

Dowód indukcyjny został zatem zakończony. Dla przykładu, wyznaczmy pozycję gwarantującą uniknięcie eliminacji, gdy początkowo mamy, powiedzmy, $n = 101$ osób. Ponieważ $101 = 2^6 + 37$, więc $J(101) = 2 \cdot 37 + 1 = 75$.

Rozważa się bardziej skomplikowane wersje tej zagadki, gdy np. eliminowana jest co trzecia osoba, aż do momentu, gdy pozostają tylko dwie osoby (taka była właśnie sytuacja Józefa Flawiusza i jego przyjaciela). Przedstawiona tutaj argumentacja pochodzi z książki Petković 2009.

4.2.6. Wzorce i struktury

Niektórzy matematycy (np. Keith Devlin) uważają, że matematyka jest nauką o wzorcach (*Mathematics is a science of patterns*). Od XIX wieku datuje się sposób myślenia o matematyce jako nauce o różnorakich strukturach. Wiąże się to po części z rozwojem algebry abstrakcyjnej i jej zastosowaniach we wszystkich praktycznie działach matematyki. Tematy zagadek tego działu dotyczą m.in.: wielokątów, wielościanów, wielokomórek, parkietaży, wypełnień przestrzeni, różnych rodzajów symetrii, arytmetyki modularnej. Niektóre zagadki mają treść kombinatoryczną. Umieszczam w tym dziale także zagadki dotyczące grafów.

Zagadki

Wielokąty Reuleaux. Przez figurę o stałej szerokości rozumie się figurę (ograniczoną, domkniętą oraz jednospójną) na płaszczyźnie taką, że proste równoległe przylegające do tej figury z obu stron mają tę samą odległość bez względu na kierunek. Czy jest prawdą, że jedyną figurą o stałej szerokości jest koło?

Podstępny ciąg. Znajdź następny wyraz ciągu $2, 4, 8, 16, \ldots$

Liczba rozłącznych ósemek na płaszczyźnie. Gdyby zapytać, ile rozłącznych okręgów narysować można na płaszczyźnie, to odpowiesz nie tylko, że można ich narysować nieskończenie wiele, ale możesz nawet powiedzieć bardziej dokładnie: tyle, ile jest liczb rzeczywistych, ponieważ wystarczy zapełnić płaszczyznę koncentrycznymi okręgami o promieniach będących dowolną liczbą rzeczywistą. Ile rozłącznych ósemek można narysować na płaszczyźnie? Na pewno tyle, ile jest par liczb całkowitych (czyli tyle samo, co par liczb naturalnych, czyli tyle samo, co liczb naturalnych – *przeliczalnie* wiele). Czy jednak można na płaszczyźnie narysować tyle rozłącznych ósemek, ile jest liczb rzeczywistych?

Rozwiązania

Wielokąty Reuleaux. Nie jest to prawdą. Rozpatrzmy prosty kontrprzykład. Z wierzchołków trójkąta równobocznego zakreślamy łuki, które przechodzą przez pozostałe dwa wierzchołki tego trójkąta. Otrzymujemy *trójkąt Reuleaux*, figurę wypukłą o stałej szerokości. W podobny sposób otrzymać możemy n-kąty Reuleaux, dla dowolnej liczby nieparzystej $n \geqslant 3$. Zachęcamy czytelników do zastanowienia się, jak wyglądałaby jazda na rowerze o kołach będących trójkątami Reuleaux. Pewne wielokąty Reuleaux mają różne zastosowania, np. siedmiokąt Reuleaux jest kształtem niektórych monet.

Podstępny ciąg. Tego typu zagadki są dość popularne. Mają skłaniać do podania rozwiązania nasuwającego się na skutek zaobserwowanej prawidłowości w kilku pierwszych wyrazach ciągu. Jest to jednak zadanie podstępne. W rozważanym przypadku nasuwającą się odpowiedzią jest 32, gdyż ciąg $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ jest, można rzec, łatwo dostępny poznawczo. W istocie nie jest to jedyna możliwość: kolejny wyraz w ciągu $2, 4, 8, 16, \ldots$ może być całkiem dowolny.

Rozważmy następujący wzór na n-ty wyraz ciągu:

$$a_n = 2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x.$$

Wtedy pierwsze cztery wyrazy tego ciągu to właśnie $2, 4, 8, 16$. Za a_5 możemy przyjąć dowolną wartość a, jeśli weźmiemy $x = \frac{a-32}{24}$. Ta zagadka jest omawiana w Klymchuk i Staples 2013.

Liczba rozłącznych ósemek na płaszczyźnie. Takich rozłącznych ósemek na płaszczyźnie można narysować tylko przeliczalnie wiele. Każdej ósemce przyporządkujmy parę punktów o obu współrzędnych wymiernych, po jednym takim punkcie wewnątrz każdej z pętli tej ósemki. Wtedy żadne dwie ósemki nie mogą mieć wspólnej takiej pary punktów. Liczba naszych ósemek nie przekracza więc liczby par liczb wymiernych, a takich par par liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele, tyle ile liczb naturalnych. Równoliczność zbioru wszystkich par liczb naturalnych oraz zbioru wszystkich liczb naturalnych ustala np. funkcja pary Cantora: $f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$.

4.2.7. Algorytmy i obliczenia

Wyobrażasz sobie świat bez komputerów, internetu, telewizji? Oraz bez wszelakich dalszych gadżetów elektronicznych, którymi się zabawiasz lub które służą ci do ochrony zdrowia, zapewnienia bezpieczeństwa itd.? Cóż, taki był kiedyś świat. Natomiast obecna jego postać, naszpikowana elektronicznymi urządzeniami przetwarzającymi informację, nigdy by nie powstała, gdyby matematycy nie zajęli się tym, czym jest informacja, jak ją przetwarzać, na czym polegają obliczenia itd. Aby powstał pracujący komputer, potrzebna była najpierw matematyczna wizja tego, czym jest obliczanie. Czy potrafisz – choćby intuicyjnie – powiedzieć, w pełnej ogólności, co to znaczy, iż coś można obliczyć? Czy wszystko można obliczyć, czy też istnieje *Nieobliczalne*? Z bolesnych doświadczeń szkolnych wiesz, że łatwiej jest dodawać niż mnożyć, łatwiej mnożyć niż dzielić. Cóż miałoby znaczyć, że coś jest trudno obliczalne? W tym dziale umieszczam także zagadki kombinatoryczne.

Zagadki

Muszkieterzy na moście. Czterech muszkieterów chce przeprawić się przez most nocą, mając tylko jedną świeczkę. Boją się bez niej iść. Potrzebują na przejście odpowiednio: Atos 1 minutę, Aramis 2 minuty, D'Artagnan 5 i Portos 10 minut. Most jest słaby i na raz mogą przejść tylko 2 osoby, a kiedy idą w parze, szybszy idzie z prędkością wolniejszego. Jaki jest najkrótszy czas przeprawy?

Dzielenie samogonu. Udało ci się otrzymać (na własny użytek) pyszny samogon w ośmiolitrowym baniaku. Spodziewasz się wizyty gości w najbliższy weekend, a także w następny. Chcesz zatem podzielić samogon na dwie porcje po cztery litry. Masz jednak do dyspozycji (oprócz ośmiolitrowego baniaka) jedynie dwa naczynia: jedno trzylitrowe oraz jedno pięciolitrowe. W jaki sposób dokonasz podziału na dwie czterolitrowe porcje?

Kameleony. Na wyspie mieszkają trzy typy kameleonów: 10 jest brązowych, 14 szarych, a 15 czarnych. Gdy spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to oba zmieniają barwę na trzeci kolor. Czy jest możliwe, aby wszystkie kameleony uzyskały jeden kolor?

Rozwiązania

Muszkieterzy na moście. Oto jedno z rozwiązań:

1. Idzie Atos z Aramisem : 2 min
2. Aramis wraca ze świeczką: 2 min
3. Idzie D'Artagnan z Portosem: 10 min
4. Atos wraca ze świeczką: 1 min
5. Idzie Atos z Aramisem: 2 min

Inne rozwiązanie:

1. Idzie Atos z Aramisem: 2 min
2. Atos wraca ze świeczką: 1 min
3. Idzie D'Artagnan z Portosem: 10 min
4. Aramis wraca ze świeczką: 2 min
5. Idzie Atos z Aramisem: 2 min

Trzeba jeszcze w każdym przypadku udowodnić, że nie można tego zrobić krócej. Tego typu zagadki omawiane są w wielu miejscach, z różnymi bohaterami oraz przeszkodami utrudniającymi przeprawę (zob. np. Levitin i Levitin 2011).

Dzielenie samogonu. Aby dokonać podziału, będziesz zmuszony wielokrotnie (ostrożnie!) przelewać samogon. Możesz to zrobić w następujący sposób (podaję ciąg stanów, w których zaznaczam, ile aktualnie znajduje się samogonu w każdym z pojemników):

1. Stan początkowy: 3(0) 5(0) 8(8).
2. Przelewasz z 8-litrowego do 5-litrowego. Stan: 3(0) 5(5) 8(3).
3. Przelewasz z 5-litrowego do 3-litrowego. Stan: 3(3) 5(2) 8(3).

4. Przelewasz z 3-litrowego do 8-litrowego. Stan: 3(0) 5(2) 8(6).

5. Przelewasz z 5-litrowego do 3-litrowego. Stan: 3(2) 5(0) 8(6).

6. Przelewasz z 8-litrowego do 5-litrowego. Stan: 3(2) 5(5) 8(1).

7. Przelewasz z 5-litrowego do 3-litrowego. Stan: 3(3) 5(4) 8(1).

8. Przelewasz zawartość 3-litrowego do 8-litrowego. Stan końcowy: 3(0) 5(4) 8(4).

9. Cztery litry w naczyniu pięciolitrowym podajesz w najbliższy weekend. Cztery litry w naczyniu ośmiolitrowym podajesz w następny weekend.

Czy jest to najkrótsze rozwiązanie? Powinniśmy oczywiście dodać, że wersja z samogonem dotyczy wyłącznie osób dorosłych, dzieciom proponujemy mleczko.

Kameleony. Nie jest to możliwe. Gdy spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to obie liczby kameleonów o ich kolorach zmniejszą się o jeden, natomiast liczba kameleonów trzeciego koloru zwiększy się o dwa. Jedna z różnic liczb kameleonów o różnych kolorach nie zmieni się, natomiast dwie pozostałe różnice zwiększą się o trzy. A zatem reszty z dzielenia przy trzy wszystkich tych różnic nie zmienią się. To implikuje, że dla danych zagadki (10, 14, 15) nie jest możliwe, aby wszystkie kameleony uzyskały ten sam kolor, ponieważ:

1. początkowe różnice między liczbami kameleonów poszczególnych kolorów wynoszą: 4, 1, 5

2. reszty z dzielenia przez trzy tych różnic to odpowiednio: 1, 1, 2 (pamiętajmy, że te reszty z dzielenia przez trzy pozostają niezmienne przy spotkaniach kameleonów)

3. gdyby wszystkie kameleony uzyskały ten sam kolor, to jedna z tych różnic musiałaby mieć wartość zero, a w konsekwencji reszta z jej dzielenia przez trzy też byłaby równa zero.

Zagadka o kameleonach omawiana jest w wielu miejscach (zob. np. Levitin i Levitin 2011).

4.2.8. Prawdopodobieństwo

Pojęcia *regularności* oraz *przypadkowości* (*losowości*) są niezwykle trudne do ogólnego zdefiniowania. Czy istnieją procesy, zdarzenia itp., które są czysto losowe, w których nie ma żadnych regularności? W szkole obchodzono się z tobą bardzo łagodnie, oswajając cię z najprostszymi sytuacjami, w których szacować trzeba prawdopodobieństwa (jakieś kulki w urnach, rzuty kostką itp.). Stąd jeszcze bardzo daleko to naprawdę trudnych zagadnień probabilistycznych. Warto w tym miejscu wspomnieć, że obecnie pewne aspekty świata opisywane być muszą właśnie w terminach prawdopodobieństwa (mechanika kwantowa).

Zagadki

Wybór najlepszej kandydatki. W konkursie na objęcie jakiegoś atrakcyjnego stanowiska bierze udział tysiąc kandydatek. Można oczywiście przepytać je wszystkie i wybrać najlepszą. Czy jednak można znaleźć jakąś w miarę optymalną strategię wyboru – taką, która nie zmuszając do przepytywania wszystkich kandydatek, pozwoli, z określonym prawdopodobieństwem, wybrać najlepszą z nich?

Rosyjska ruletka. Ty i twój przeciwnik zgadzacie się zagrać w rosyjską ruletkę. W rewolwerze jest jedna kula, pięć pozostałych komór jest pustych. Rewolwer jest ustawiany losowo za każdym razem – nie wiadomo, czy oddany z niego strzał jest śmiertelny, czy ślepy. Każdy z was strzela do siebie, robicie to na przemian, wygrywa ten, który przeżyje. Czy lepiej strzelać jako pierwszy, czy jako drugi?

Trzy monety. Masz trzy monety: jedna ma po obu stronach orła, druga po obu stronach reszkę, a trzecia jest „normalna” – po jednej stronie ma orła, po drugiej reszkę. Wybierasz losowo jedną z tych monet i rzucasz: wypada orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na drugiej stronie tej monety także jest orzeł?

Rozwiązania

Wybór najlepszej kandydatki. Może to wydać się okrutne, ale optymalną strategią jest przepytanie i odrzucenie pierwszych 368 kandydatek, a następnie wybranie z pozostałych pierwszej lepszej od wszystkich dotąd odrzuconych. Rozwiążemy problem w przypadku ogólnym, dla n kandydatek (w podanej fabule mamy $n = 1000$).

W przypadku przepytania wszystkich kandydatek wybieramy najlepszą z prawdopodobieństwem 1. W przypadku kapryśnego losowania jednej kandydatki z n trafimy na najlepszą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$. Niech teraz r będzie liczbą pierwszych przepytanych i odrzuconych kandydatek. Załóżmy, że najlepszą kandydatką jest B. Jeśli B znalazła się wśród odrzuconych, to przegraliśmy, gdyż wedle przyjętej strategii będziemy porównywali wszystkie pozostałe $n - r$ kandydatek z B i zostaniemy zmuszeni do wybrania ostatniej kandydatki z tysiąca. Jeśli B znajdzie się na pozycji $r + 1$, to oczywiście zostanie wybrana i konkurs zakończymy. To zdarzyć się może z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$. Jeśli B znajdzie się na pozycji $r + 2$, to jeśli kandydatka z pozycji $r+1$ wygrała, to my przegraliśmy, nie uwzględniając lepszej od niej B, w przeciwnym przypadku wybierzemy oczywiście B. Oznacza to, że wybierzemy B, jeśli najlepsza z dotychczasowych $r + 1$ kandydatek jest wśród pierwszych r kandydatek, czyli z prawdopodobieństwem $\frac{r}{r+1}$. To, że B jest na $r+2$ pozycji zdarzyć się może z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$, a więc prawdopodobieństwo sukcesu na tym etapie wynosi:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1}.$$

Podobnie dla wszystkich dalszych etapów – prawdopodobieństwo tego, że B znajdzie się na $r + 3$-ej, $r + 4$-ej, $\ldots$, n-tej pozycji jest równe, odpowiednio:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2}, \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+3}, \quad \ldots \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1}.$$

Wreszcie, prawdopodobieństwo $P(n, r)$, że przy tej strategii wybierzemy B, wynosi:

$$P(n, r) = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{r}{r+1} + \frac{r}{r+2} + \frac{r}{r+3} + \ldots + \frac{r}{n-1}).$$

Zauważmy, że:

$$P(n, r) = \frac{1}{n} \cdot (1 + r \cdot (H_{n-1} - H_r)).$$

Przypominamy, że H_m jest m-tą liczbą harmoniczną (zob. wyżej omówioną zagadkę z mrówką na linie). Dla ustalonej wartości n (w naszym przykładzie: $n = 1000$) badamy teraz funkcję $P(n, r)$ zmiennej r. Możemy zastąpić dyskretną zmienną r zmienną ciągłą r, wykorzystując fakt, że $\lim\limits_{k\to\infty} H_k = \ln k - \gamma$, co daje nam przybliżoną wartość:

$$P(n, r) = \frac{1}{n} \cdot (1 + r \cdot \ln \frac{n-1}{r}).$$

Dla $n = 1000$ funkcja $P(n, r)$ ma maksimum równe 0.368195, a to oznacza, że z takim właśnie prawdopodobieństwem wybraliśmy najlepszą kandydatkę. Ten sposób rozwiązania omówiony jest w Havil 2008.

Rosyjska ruletka. Niech a będzie prawdopodobieństwem, że osoba, która strzela pierwsza, wygrywa, zaś b prawdopodobieństwem, że osoba, która strzela druga, wygrywa. Mamy zatem $a+b = 1$. Przypuśćmy, że strzelasz pierwszy. Prawdopodobieństwo b, że wygra twój przeciwnik, jest równe prawdopodobieństwu p, że przeżyje on twój pierwszy strzał razy prawdopodobieństwo q, że wygra on grę, przeżywszy pierwszy strzał. Ponieważ jest tylko jedna kula w jednej z sześciu komór, więc $p = \frac{5}{6}$. Jeśli twój przeciwnik przeżył pierwszy strzał, staje się teraz tym, który oddaje pierwszy strzał, z prawdopodobieństwem a wygrania gry. Tak więc, $q = a$. A zatem $b = \frac{5}{6}a$. Ponieważ $a + b = 1$, więc $a = \frac{6}{11}$, natomiast $b = \frac{5}{11}$. Masz zatem większe szanse na wygraną, jeśli oddajesz strzał jako pierwszy. Różne wersje zagadek dotyczących rosyjskiej ruletki omawia się np. w Talwalkar 2015b, 2015d.

Trzy monety. Oczywiście, jeśli wypadł orzeł, to była to albo moneta normalna, albo moneta z dwoma orłami. Może się więc wydawać, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$. Tak jednak nie jest. Trzeba myśleć o tym doświadczeniu w inny sposób. Masz sześć stron monet:

1. (O_1, O_2) – moneta z dwoma orłami,
2. (R_1, R_2) – moneta z dwiema reszkami,
3. (O_3, R_3) – moneta normalna.

Gdy rzucasz wybraną losowo monetą, z równym prawdopodobieństwem wypada jedna z tych sześciu możliwości. Z trzech orłów, dwa mają po drugiej stronie również orła, a więc szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{3}$. Ta oraz podobne zagadki omawiane są w wielu miejscach (zob. np. Winkler 2004).

4.2.9. Zagadki logiczne

Tego typu zagadki polegają przede wszystkim na analizie wnioskowań. Traktujemy wnioskowania jako konstrukcje językowe (a nie np. procesy psychiczne), złożone z przyjmowanych przesłanek oraz z otrzymywanego z nich wniosku. Istotny jest charakter związku między przesłankami a wnioskiem: wyróżniamy jako poprawne te wnioskowania, w których prawdziwość przesłanek gwarantuje prawdziwość wniosku. Mówimy wtedy, że wniosek wynika logicznie z przesłanek. Stosowne precyzyjne definicje tych pojęć znasz z wykładu logiki z pierwszego roku studiów. W wykładzie *Zagadki* wykorzystywałem głównie przykłady zagadek logicznych podanych w książkach Raymonda

Smullyana, mistrza w tworzeniu logicznych łamigłówek. Uwzględniałem zagadki dotyczące analizy żywionych przekonań. Dla przykładu: można pokazać, że jeśli jesteś tzw. *szczęściarzem epistemicznym*, mniemasz, iż masz niesprzeczny system przekonań i wierzysz w zdanie „Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie przekonam się o jego istnieniu" (z punktu widzenia Boga to całkiem rozumny, dyskretny i wygodny sposób bycia), to cały twój system przekonań stanie się sprzeczny. Pokazać można też, co wystarcza, aby wiara w zajście jakiegoś zdarzenia implikowała, że zdarzenie to z pewnością zajdzie.

Zagadki

Dwie oferty. Dwie osoby, A oraz B, składają ci następujące propozycje:

1. *Oferta* A: Wypowiadasz zdanie. Jeśli jest ono prawdziwe, to otrzymujesz dokładnie dziesięć dolarów. Jeśli jest ono fałszywe, to otrzymujesz albo mniej niż dziesięć, albo więcej niż dziesięć dolarów, ale nie dokładnie dziesięć dolarów.

2. *Oferta* B: Wypowiadasz zdanie. Niezależnie od tego, czy jest ono prawdziwe czy fałszywe, otrzymujesz więcej niż dziesięć dolarów.

Którą z tych dwu ofert byłbyś skłonny wybrać?
Sylogizm Lewisa Carrolla. Czy następujący sylogizm jest prawomocny?

$$\begin{array}{l} \text{Każdy kocha moje dziecko.} \\ \text{Moje dziecko kocha tylko mnie.} \\ \hline \therefore \text{Jestem swoim własnym dzieckiem.} \end{array}$$

Zbawienie. Powiada się, że pewnego razu bóg zstąpił z niebios i zaklasyfikował każdego mieszkańca Ziemi jako albo szczególnego, albo nieszczególnego. Jak się okazało, dla każdej osoby a, a była szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy było tak, że albo każdy był szczególny, albo nikt nie był szczególny. Które z następujących trzech stwierdzeń wynika z tego logicznie?

1. Nikt nie jest szczególny.

2. Niektórzy są szczególni, a niektórzy nie są.

3. Każdy jest szczególny.

Rozwiązania

Dwie oferty. Większość osób decyduje, że oferta B jest lepsza, bo gwarantuje pewną wygraną, niezależnie od tego, jakie zdanie wypowiemy. Smullyan argumentuje jednak, że można wygrać dowolną kwotę, jeśli przyjmie się propozycję A (Smullyan 2007b, 16–17):

> Wszystko co muszę powiedzieć, to: „Nie zapłacisz mi ani dokładnie dziesięciu dolarów, ani dokładnie miliona dolarów". Jeśli moje zdanie jest prawdziwe, to z jednej strony nie zapłacisz mi dokładnie dziesięciu dolarów lub dokładnie miliona dolarów, ale z drugiej strony *musisz* zapłacić mi dokładnie dziesięć dolarów za wypowiedzenie zdania prawdziwego. To sprzeczność, a więc zdanie to nie może być prawdziwe i musi być fałszywe. Ponieważ jest fałszywe, nie jest tak, jak ono mówi, co oznacza, że *zapłacisz* mi dokładnie dziesięć dolarów lub dokładnie milion dolarów. Jednak nie możesz zapłacić mi dokładnie dziesięciu dolarów za wypowiedzenie zdania fałszywego, a więc musisz zapłacić mi dokładnie milion dolarów.

Sylogizm Lewisa Carrolla. Jakkolwiek może to wydawać się zabawne na pierwszy rzut oka, ten argument jest prawomocny! Ponieważ każdy kocha moje dziecko, wynika stąd, że moje dziecko, będąc osobą, kocha moje dziecko. Moje dziecko kocha więc moje dziecko, ale także kocha tylko mnie. Wtedy wynika stąd, że moje dziecko jest tą samą osobą co ja! Oczywiście ten argument, choć prawomocny, nie może być trafny; nie może być tak, aby obie przesłanki były prawdziwe, ponieważ prowadziłoby to do absurdalnej konkluzji, że jestem swoim własnym dzieckiem.

Zbawienie. Niech p będzie zdaniem mówiącym, że albo każdy jest szczególny, albo nikt nie jest szczególny. Ponadto, dla każdej osoby a oznaczmy stwierdzenie, że a jest szczególna poprzez Sa. W ogólności, w logice symbolicznej, dla dowolnej własności P oraz dowolnej nazwy indywidualnej a, zdanie mówiące, że (obiekt oznaczany przez) a ma własność P, wyrażane jest przez zapis Pa. Przypomnijmy, że dwa zdania nazywamy równoważnymi, gdy są one albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe. Podano nam, że dla każdej osoby a zdanie Sa jest równoważne z p (a jest szczególna wtedy i tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe – tj. wtedy i tylko wtedy, gdy albo wszyscy są szczególni, albo nikt). Wtedy dla dowolnych dwóch ludzi a i b, zdania Sa oraz Sb muszą być wzajem równoważne, ponieważ oba są równoważne z p. Oznacza to, że dla dowolnych dwóch ludzi albo są oni obaj szczególni, albo żaden z nich nie jest szczególny, a z tego wynika, że albo wszyscy ludzie są szczególni, albo żaden z nich nie jest szczególny – inaczej mówiąc, zdanie p jest prawdziwe. Wtedy, ponieważ dla każdej osoby a zdanie Sa jest równoważne z p, więc wynika z tego, że dla każdej osoby a zdanie Sa jest prawdziwe. Inaczej mówiąc, każdy jest szczególny.

Matematyczna treść zagadki sprowadza się do tego, że tautologią logiki pierwszego rzędu jest formuła:

$$\forall x\ (Sx \equiv (\forall x\ Sx \vee \forall x\ \neg Sx)) \rightarrow \forall x\ Sx.$$

Dobrym ćwiczeniem dla czytelników jest potwierdzenie tego np. metodą tablic analitycznych.

4.2.10. Paradoksy

Za paradoksalne uważamy – z grubsza rzecz ujmując – to, co mając pozory fałszu, jest jednak prawdą, lub – inaczej rzecz ujmując – to, co kłóci się z naszymi (jak sądzimy, dobrze ugruntowanymi) przekonaniami o naturze w istocie intuicyjnej. Za paradoksalny możesz np. uważać fakt istnienia powierzchni, które mają tylko jedną stronę (jak *wstęga Möbiusa*). Z punktu widzenia doświadczenia potocznego paradoksalny jest fakt, że przed otwarciem pudełka *Kot Schrödingera* jest jednocześnie żywy i martwy. Niewątpliwie uznasz za paradoksalne *twierdzenie Banacha-Tarskiego*: kulę podzielić można na skończoną liczbę części, a następnie złożyć z tych części dwie kule, z których każda ma objętość równą kuli wyjściowej. W literaturze anglojęzycznej często terminem *paradox* określa się także sprzeczności logiczne. Zalecam jednak odróżniać sprzeczności logiczne od paradoksów. Gdy znajdujemy w jakiejś teorii sprzeczność, to staramy się ją natychmiast usunąć, gdyż inaczej teoria pozostaje bezwartościowa: w teorii sprzecznej można udowodnić wszystko (łącznie z tym, że teoria owa jest niesprzeczna). Natomiast napotkanie paradoksu zmusza nas do dokładniejszego przemyślenia żywionych dotąd przekonań intuicyjnych, które są z nim sprzeczne. W konsekwencji, zwykle modyfikujemy owe intuicyjne przekonania, wskazujemy wyraźniej na zakres ich stosowalności. Nie ma przecież żadnej gwarancji, że wszystkie odkrycia i pomysły naukowe dają się wyrazić w terminach potocznych.

Zagadki

Paradoks stosu. To cała gama paradoksów związanych z nieostrością wyrażeń języków etnicznych. Jedno ziarno nie tworzy stosu. Dwa ziarna nie tworzą stosu. Trzy ziarna nie tworzą stosu. Bez wątpienia jednak np. milion ziaren tworzy stos. Gdzie jest granica między – powiedzmy – skupiskiem pojedynczych ziaren a stosem ziaren?

Paradoks Berry'ego. Rozważmy najmniejszą liczbę (naturalną), która nie może zostać zdefiniowana z użyciem mniej niż stu słów. W zbiorze wszystkich liczb, które nie mogą zostać zdefiniowane z użyciem mniej niż stu słów, istnieje liczba najmniejsza. Ale właśnie zdefiniowaliśmy ją z użyciem mniej niż stu słów. Paradoks?

Paradoks Grellinga-Nelsona. Podzielmy przymiotniki polskie na autologiczne oraz heterologiczne. Wyraz jest autologiczny, gdy ma cechę, którą orzeka. Dla przykładu, autologiczne są wyrazy: *polski*, *sześciosylabowy*. Wyraz jest heterologiczny, gdy nie ma cechy, którą orzeka. Heterologiczne są np.: *zielony*, *czterosylabowy*. Mamy zatem dychotomiczny podział wszystkich polskich przymiotników (empirycznie można stwierdzić, że większość polskich przymiotników jest heterologiczna, ale to nieistotne). Do której z tych klas należy przymiotnik *heterologiczny*?

Rozwiązania

Paradoks stosu. Nie ma dobrej odpowiedzi na pytanie, ile ziaren zaczyna tworzyć stos. Podobnie np. dla łysiny. Gdy masz bujną czuprynę i stracisz jeden włos, trudno to nawet zauważyć. Podobnie, gdy stracisz dwa, trzy, cztery, włosy. Przychodzi jednak ten moment, gdy stajesz się łysy, choć nie sposób momentu tego jednoznacznie określić.

Może warto dodać, że nieostrość wyrażeń języków etnicznych nie jest w nich zjawiskiem marginalnym, ale jest dość powszechna. Wbrew pochopnemu sądowi, nie utrudnia to jednak komunikacji, lecz raczej ją ułatwia.

Paradoks Berry'ego. Źródłem tego paradoksu jest niejednoznaczność wyrażenia *może zostać zdefiniowana*. Używamy mianowicie tego wyrażenia zarówno w języku przedmiotowym, jak i w metajęzyku. Kłopot powstaje więc, gdy mieszamy te użycia, gdy mówimy, że zdefiniowaliśmy (w metajęzyku) liczbę, której nie można zdefiniować (w języku przedmiotowym). Precyzyjne odróżnienie języka przedmiotowego oraz metajęzyka dostarcza rozwiązania paradoksu.

Paradoks Grellinga-Nelsona. Korzystając z wprowadzonych ustaleń, mamy:

1. Gdyby *heterologiczny* był autologiczny, to miałby cechę, którą orzeka, a wiec musiałby być heterologiczny.

2. Gdyby *heterologiczny* był heterologiczny, to nie miałby cechy, którą orzeka, czyli nie byłby heterologiczny.

Mamy więc do czynienia z paradoksem, którego źródłem jest pomieszanie języka przedmiotowego z metajęzykiem.

4.2.11. Sofizmaty

Gdy wnioskujemy niepoprawnie, to możemy czynić to bezwiednie bądź celowo. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z *paralogizmem* – błędem logicznym. W przypadku drugim, gdy usiłujemy przedstawić niepoprawny wniosek z intencją oszukania, mówimy o *sofizmatach*. Można – na różne sposoby – kodyfikować poprawne metody rozumowania, jednak jakaś trafna oraz w miarę wyczerpująca klasyfikacja bądź typologia błędów i sofizmatów nie wydaje się wykonalna. Wyniki każdego sprawdzianu z logiki dobitnie przekonują, że ludzka inwencja w błądzeniu jest niewyczerpana. Podobnie, nieograniczona w swojej różnorodności wydaje się ludzka pomysłowość w oszukiwaniu.

Zagadki

LEMAT WROCŁAWSKI. *Istnieje zbiór pusty.* Dowód lematu. Rozważmy zbiór wszystkich zbiorów pustych i oznaczmy go przez W. Zachodzi dokładnie jedna z następujących możliwości: a) zbiór W jest zbiorem pustym; b) zbiór W jest zbiorem niepustym. W przypadku a) zbiór W jest zbiorem spełniającym tezę Lematu Wrocławskiego. W przypadku b), skoro W jest zbiorem niepustym, to zawiera jakieś elementy. Ale, z definicji W, każdy element zbioru W jest zbiorem pustym. A zatem dowolny element zbioru W spełnia tezę Lematu Wrocławskiego.

Znajdź usterkę w powyższym dowodzie.

LEMAT KRAKOWSKI. *Nic nie istnieje.* Dowód lematu. Uczyńmy założenie optyczno-liryczne, że „brak cienia jest dowodem nieistnienia”. Cienie nie rzucają cienia. Zatem cienie nie istnieją. Wynika z tego, że nic nie posiada cienia. Dowodzi to, że nic nie istnieje.

Znajdź usterkę w powyższym dowodzie.

Złotówka równa groszowi. Co zarzucisz następującemu „dowodowi”, że złotówka równa się groszowi:

$$1\text{zł} = 100\text{gr} = (10\text{gr})^2 = (0.10\text{zł})^2 = 0.01\text{zł} = 1\text{gr}$$

Rozwiązania

LEMAT WROCŁAWSKI. Usterka polega na wprowadzeniu samego zbioru W. Przywołując ten zbiór, niejawnie zakładamy, że zbiór pusty istnieje, popełniamy więc błędne koło w dowodzeniu. Istnienie (dokładnie jednego) zbioru pustego jest oczywiście zagwarantowane w teorii mnogości: zbiór pusty istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania. Wystarczy za cechę definiującą ten zbiór wybrać dowolną własność sprzeczną.

LEMAT KRAKOWSKI. Usterka polega oczywiście na przyjęciu założenia optyczno-lirycznego. Nie ma ono nic wspólnego z matematyką, jest jedynie zabawną grą słów.

Złotówka równa groszowi. W podanej argumentacji posłużono się w sposób nieuprawniony operacją mnożenia – nie ma czegoś takiego, jak *grosze do kwadratu*.

4.2.12. Iluzje

Na pewno pokazywano ci rysunki, które przedstawiały różne niemożliwe figury (np. *trójkąt Penrose'a* lub *sześcian Neckera*). Oglądałaś grafiki Mauritsa Cornelisa Eschera, na których woda płynie wbrew wszelkim zasadom hydrauliki lub schody prowadzące w dół nagle okazują się schodami prowadzącymi w górę? Czułaś dyskomfort poznawczy, gdy oglądałaś rysunek przedstawiający – przy jednym sposobie patrzenia starą kobietę, a przy innym całkiem młodą? Czy po takich doświadczeniach nie stałaś się odrobinę podejrzliwa wobec świadectw dostarczanych przez zmysły? Co jest złudzeniem, a co nie? Może – zgroza – wszystko jest złudzeniem? Jak mawiała pewna dama: „Jestem solipsystką i dziwię się, że inni nimi nie są". Jakim innym jeszcze (oprócz optycznych) złudzeniom podlegamy? W jaki sposób przekonujemy się, że coś jest złudzeniem? Do złudzeń zaliczymy także bezrefleksyjne odpowiedzi na pytania podobne do poniższych.

Zagadki

Sznur dookoła Ziemi. Wyobraźmy sobie, że gładką kulę wielkości Ziemi opasaliśmy ciasno sznurem. Niech jej promień równy będzie r. Średni promień Ziemi równy jest 6371 km, a jej obwód wynosi 40 075 km. Przedłużmy teraz ten sznur, powiedzmy, o 15 metrów i utwórzmy z niego okrąg opasujący naszą kulę w pewnej odległości od jej powierzchni. Jaka będzie to odległość? Czy pod sznurem przepełznie mrówka? Czy przebiegnie pod nim jamniczek? Czy przejdzie pod nim bez schylania się dorosły człowiek średniego wzrostu?

Gdzie jest brakujący dolar? Do hotelu przybyło trzech gości i zdecydowali się wynająć wspólny pokój. Hotelarz zażądał 30 dolarów, a więc każdy z gości dał 10 dolarów i zajęli pokój. Nieco później hotelarz (można przypuszczać, że był protestantem) uznał, że zażądał zbyt wiele i ustalił cenę za pokój równą 25 dolarów. Wręczył 5 dolarów chłopcu hotelowemu z poleceniem, aby zwrócił tę kwotę gościom. Chłopiec (można przypuszczać, że nie był protestantem) zatrzymał dla siebie dwa dolary, a pozostałe trzy wręczył gościom, każdemu po dolarze. Policzmy teraz: każdy z gości zapłacił ostatecznie za pokój dziewięć dolarów, co daje razem 27 dolarów, a chłopiec zatrzymał dwa dolary, a więc w sumie mamy 29 dolarów. Gdzie zniknął brakujący dolar?

Butelka z korkiem. Butelka z korkiem kosztuje 1,10 zł. Butelka jest o złotówkę droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?

Rozwiązania

Sznur dookoła Ziemi. Odpowiedzi podawane bez refleksji są tu często bardzo dalekie od prawdy. W istocie, długość nowego promienia (czyli długość promienia okręgu utworzonego przez sznur przedłużony) wynosi $r + \frac{15}{2\pi}$. Gdy odejmiemy od tego r, to otrzymamy w przybliżeniu $2,387$. Większość przedstawicieli naszego gatunku mogłaby więc swobodnie przejść pod sznurem zawieszonym na takiej wysokości, nawet tanecznie podskakując.

Należy zauważyć, że – przy ustalonej na początku długości a dodatkowego sznura – wynik x, o który pytamy, nie zależy od promienia kuli, mamy bowiem:

1. Obwód kuli ciasno opasanej sznurem: $2\pi r$.
2. Długość okręgu o promieniu $r + x$: $2\pi r + a$.
3. Długość okręgu o promieniu $r + x$: $2\pi(r + x)$.
4. Skoro $2\pi(r + x) = 2\pi r + a$, to $2\pi r + 2\pi x = 2\pi r + a$, czyli $2\pi x = a$, a zatem $x = \frac{a}{2\pi}$. Tak więc, szukana odległość x nie zależy od promienia rozważanej kuli.

Gdzie jest brakujący dolar? Ta zagadka zyskała już sobie pewną popularność – podobno jest nawet wykorzystywana w niektórych szkoleniach pracowników, zajmujących się usługami. Niektórzy potrafią się pogubić, rozwiązując tę prostą zagadkę, będącą w gruncie rzeczy bałamutnym werbalnie przedstawieniem problemu. Spójrzmy na dystrybucję całej kwoty w ciągu całej tej historii:

Hotelarz ma:	Chłopiec ma:	Goście mają:	Etap:
0	0	30	Goście przychodzą do hotelu
30	0	0	Goście płacą za hotel
25	5	0	Hotelarz daje piątkę chłopcu
25	2	3	Chłopiec daje trójkę gościom.

Na końcu tej przygody hotelarz ma zatem 25 dolarów, chłopiec ma 2 dolary (czyli obaj łącznie mają 27 dolarów), a goście mają 3 dolary. Wszystko się zgadza, nie ma żadnego „brakującego” dolara.

Butelka z korkiem. Niech cena korka w groszach wynosi x. Wtedy ceną butelki jest $x + 100$. Butelka wraz z korkiem kosztuje 110 groszy, a zatem otrzymujemy proste równanie:

$$(x + 100) + x = 110.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = 5$. Korek kosztuje więc 5 groszy, a butelka (bez korka) 105 groszy, czyli złotówkę i pięć groszy. Wiele osób podaje bezrefleksyjnie błędną odpowiedź, iż butelka kosztuje złotówkę, a korek 10 groszy. Zarówno ta zagadka, jak i dwie poprzednie omawiane są w wielu miejscach.

4.3. Słowo końcowe

Wykorzystywanie zagadek matematycznych w rodzaju wyżej podanych dobrze sprawdziło się w dydaktyce, a konkretnie w nauczaniu matematycznych metod rozwiązywania problemów na zajęciach fakultatywnych w programie studiów kognitywistycznych na UAM. Do takiej oceny upoważnia mnie zarówno oryginalna treść esejów zaliczeniowych tego przedmiotu, jak i fakt, że podczas zajęć zawsze mieliśmy do czynienia z żywą dyskusją, oceną różnych strategii rozwiązywania problemów, sporym zaangażowaniem intelektualnym słuchaczy. Sądzę również, że te aktywności poznawcze słuchaczy wpłynęły pozytywnie na kształtowanie się (bądź korektę) żywionych przez nich intuicji matematycznych.

W ramach wspomnianego w Przedmowie projektu badawczego zajmowałem się m.in. intuicją matematyczną, jej rozumieniem przez profesjonalnych matematyków oraz jej kształtowaniem w procesie nabywania wiedzy, umiejętności oraz kompetencji matematycznych przez uczniów. Ujmowałem ten proces w *kontekście przekazu* w matematyce. Ten termin wprowadziłem w Pogonowski 2016. Sądzę, że interesujące (zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia) jest dokładniejsze przyjrzenie się, jaką rolę w kontekście przekazu w matematyce pełnią objaśnienia intuicyjne (zob. też Pogonowski 2018).

Jest wielkie mnóstwo książek z zagadkami i ciekawostkami matematycznymi i logicznymi, a także książek popularnych o matematyce. Podana w bibliografii lista w żadnym razie nie aspiruje do kompletności, zawiera natomiast m.in. te pozycje, w których znajdowałem przedstawione wyżej zagadki. Mam nadzieję, że zdołam przygotować obszerniejszy zbiór zagadek rozważanych wyżej typów, w którym podana zostanie rozszerzona bibliografia. Trzeba mieć nadzieję, niezależnie od tego, co knuje Los.

Bibliografia

Alexanderson, G.L., Klosinski, L.F., Larson, L.C., editors (1985). *The William Lowell Putnam mathematical competion. Problems and solutions: 1965–1984*. The Mathematical Association of America.

Arnold, V.I. (2014). *Mathematical understanding of nature. Essays on amazing physical phenomena and their understanding by mathematicians*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Balta, N. (2002). New versions of the rolling double cone. *The Physics Teacher*, 40: 156–157.

Barr, S. (1982). *Mathematical brain benders. 2nd miscellany of puzzles*. New York: Dover Publications, Inc.

Berlekamp, E.R., Conway, J.H., Guy, R.K. (2001). *Winning ways for your mathematical plays*. Volume 1, second edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Berlekamp, E.R., Conway, J.H., Guy, R.K. (2003a). *Winning ways for your mathematical plays*. Volume 2, second edition. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Berlekamp, E.R., Conway, J.H., Guy, R.K. (2003b). *Winning ways for your mathematical plays*. Volume 3, second edition. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Berlekamp, E.R., Conway, J.H., Guy, R.K. (2003c). *Winning ways for your mathematical plays*. Volume 4, second edition. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Berlekamp, E.R., Rodgers, T., editors (1999). *The mathemagician and pied puzzler. A collection in tribute to Martin Gardner*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Bollobás, B., Leader, I., Walters, M. (2009). Lion and man – can both win? Dostępne na (27 lutego 2020): http://arxiv.org/pdf/0909.2524v1.pdf

Bowditch, B.H. (2007). The angel game in the plane. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16 (3): 345–362.

Carnero, C., Carpena, P., Aguiar, J. (1997). The rolling body paradox: an oscillatory motion approach. *European Journal of Physics*, 18: 409–416.

Carroll, L. (1958). *Symbolic logic and the game of logic*. Dover Publications.

Carroll, L. (2003). *The mathematical recreations of Lewis Carroll. Pillow problems and a tangled tale*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Chen, E. (2016). *Euclidean geometry in mathematical olympiads*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Ciesielski, K., Pogoda, Z. (2003). *Królowa bez nobla. Rozmowy o matematyce*. Warszawa: Demart.

Ciesielski, K., Pogoda, Z. (2015). *Zagadki matematyczne*. Warszawa: Demart.

Ciesielski, K., Pogoda, Z. (2016). *Wielka księga zagadek. Matematyczna bombonierka*. Warszawa: Demart.

Cipra, B., Demaine, E.D., Demaine, M.L., Rodgers, T., editors (2005). *Tribute to a mathemagician*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Clarke, B. (2003). *Challenging logic puzzles*. New York: Puzzlewright Press.

Clarke, B. (2015). *Extreme logic puzzles*. New York: Puzzlewright Press.

Coffin, S.T. (1990). *The puzzling world of polyhedral dissections*. Oxford: Oxford University Press.

Conway, J.H. (1996). The angel problem. W: R. Nowakowski, editor, *Games of no chance*, MSRI Publications, 29: 3–12.

Conway, J.H., Guy, R.K. (1999). *Księga liczb*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Cortés, E., Cortés-Poza, D. 2011. Mechanical paradox: the uphill roller. *European Journal of Physics*, 32 (6): 1559–1576.

Dambeck, H. (2012). *Im więcej dziur, tym mniej sera. Matematyka zdumiewająco prosta*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Davis, T.M., Lineweaver, C.H. (2003). Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. Dostępne na (27 lutego 2020): arXiv:astro-ph/0310808v2

De Luca, R., Ganci, S. (2011). The uphill roller experiment and a variation on theme. *European Journal of Physics*, 32: 101–106.

Demaine, E.D., Demaine, M.L., Rodgers, T. 2008. *A lifetime of puzzles. Honoring Martin Gardner*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Dorichenko, S. (2012). *A Moscow math circle. Week-by-week problem sets*. Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute, Providence: American Mathematical Society.

Drösser, C. (2011). *Matematyka daj się uwieść*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Dunham, W. (2001). *Matematyczny wszechświat*. Poznań: Zysk i S-ka.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies*. Springer Science+Business Media, Inc.

Fedorov, R., Belov, A., Kovaldzhi, A., Yashchenko, I., editors (2011a). *Moscow mathematical olympiads, 1993–1999*. Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute, Providence: American Mathematical Society.

Fedorov, R., Belov, A., Kovaldzhi, A., Yashchenko, I., editors (2011b). *Moscow mathematical olympiads, 2000–2005*. Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute, Providence: American Mathematical Society.

Fitzgerald, M., James, I. (2007). *The mind of the mathematician*. Baltimore: The John Hopkins University Press.

Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I. (1996). *Mathematical circles (Russian experience)*. The American Mathematical Society.

Fuchs, W.R. (1972). *Matematyka popularna*. Warszawa: Wiedza Powszechna.

Gal, S. (1979). Search games with mobile and immobile hider. *SIAM J. Control Optim.*, 17 (1): 99–122.

Gallitto, A.A., Fiordilino, E. (2011). The double cone: a mechanical paradox or a geometrical constraint? *Physics Education*, 46 (6): 682–684.

Galperin, G. (2003). Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). *Regular and Chaotic Dynamics*, 8 (4): 375–394.

Gandhi, S., Efthimiou, C. (2005). The ascending double cone: a closer look at a familiar demonstration. *European Physics Journal*, 26: 681–694.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, magic and mystery*. New York: Dover Publications, Inc.

Gardner, M. (1982). *Aha! Gotcha: paradoxes to puzzle and delight*. W.H. Freeman and Company.

Gardner, M. (1986). *Entertaining mathematical puzzles*. New York: Dover Publications, Inc.

Gardner, M. (1994). *My best mathematical puzzles*. New York: Dover Publications, Inc.

Gardner, M. (1996). The ball that rolls up. *Physics Teaching*, 34: 461.

Gardner, M. (1997). *The last recreations. Hydras, eggs, and other mathematical mystifications.* New York: Springer-Verlag.

Gardner, M. (2006). *The colossal book of short puzzles and problems*. New York, London: W.W. Norton & Company.

Gårding, L. (1993). *Spotkanie z matematyką*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Gleason, A.M., Greenwood, R.E., Kelly, L.M., editors (1980). *The William Lowell Putnam mathematical competion. Problems and solutions: 1938–1964*. The Mathematical Association of America.

Grabowski, M. (2009). *Podziw i zdumienie w matematyce i fizyce*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1996). *Matematyka konkretna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Haddon, M. (2004). *Dziwny przypadek psa nocną porą*. Warszawa: Świat Książki.

Havil, J. (2003). *Gamma. Exploring Euler's constant.* Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Havil, J. (2006). Defying gravity: The uphill roller. Dostępne na (28 lutego 2020): http://plus.maths.org/content/defying-gravity-uphill-roller

Havil, J. (2007). *Nonplussed! Mathematical proof of implausible ideas*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Havil, J. (2008). *Impossible? Surprising solutions to counterintuitive conundrums*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Henle, M., Hopkins, B., editors (2012). *Martin Gardner in the twenty-first century*. The Mathematical Association of America.

Isaacs, R. (1965). *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. New York: John Wiley & Sons.

Jeleński, S. (1956). *Lilavati. Rozrywki matematyczne*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Jeleński, S. (1974). *Śladami Pitagorasa. Rozrywki matematyczne*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Kedlaya, K.S., Poonen, B., Vakil, R., editors (2002). *The William Lowell Putnam mathematical competition 1985–2000. Problems, solutions and commentary*. The Mathematical Association of America.

Kloster, O. (2007). A solution to the angel problem. *Theoretical Computer Science*, 389 (1–2): 152–161.

Klymchuk, S., Staples, S. (2013). *Paradoxes and sophisms in calculus*. Mathematical Association of America.

Kolby, J. (2016). *The LSAT logic puzzle book. Are you smarter than a lawyer?* West Hollywood, CA: Nova Press.

Kordemsky, B. (1992). *The Moscow puzzles. 359 mathematical recreations*. New York: Dover Publications, Inc.

Kordiemski, B. (1956). *Rozrywki matematyczne*. Warszawa: Wiedza Powszechna.

Kowal, S. (1971). *500 zagadek matematycznych*. Warszawa: Wiedza Powszechna.

Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O. (1973). *500 zadań tekstowych z matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Krusemeyer, M.I., Gilbert, G.T., Larson, L.C. (2012). *A mathematical orchard. Problems and solutions*. The Mathematical Association of America.

Laskowski, D. (2012). *Jak tego dowieść – krótka opowieść. Dowody matematyczne dla każdego*. Gliwice: Helion.

Laskowski, D. (2013). *Matematyczne szkiełko i oko. Mniej i bardziej poważne zastosowania matmy*. Gliwice: Helion.

Lénárt, I. (1996). *Non-Euclidean adventures on the Lénárt sphere*. USA: Key Curriculum Press.

Levi, M. (2009). *The Mathematical mechanic. Using physical reasoning to solve problems*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Levitin, A., Levitin, M. (2011). *Algorithmic puzzles*. New York: Oxford University Press.

Leybourn, W. (1694). *Pleasure with profit consisting in recreations of diverse kinds*. London: R. Baldwin and J. Dunto.

Lietzmann, W. (1958). *Gdzie tkwi błąd? Sofizmaty matematyczne i sygnały ostrzegawcze.* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Majumdar, P., Roy, S. (2012). Friction Controlled Three Stage Ladder Sliding Motion in a Non-conservative System: From pre-detachment to post-detachment. *The African Review of Physics*, 7: 67—81.

Máthé, A. (2007). The angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16 (3): 363–374.

Moscovich, I. (2006). *The big book of brain games*. New York: Workman Publishing Co., Inc.

Moscovich, I. (2015). *The puzzle universe. A history of mathematics in 315 puzzles*. Richmond Hill, Ontario: Firefly Books.

Mosteller, F. 1987. *Fifty challenging problems in probability with solutions*. New York: Dover Publications, Inc.

Paulos, J.A. (2012). *Innumeracy. Matematyczna ignorancja i jej konsekwencje w dobie nowoczesnej technologii*. Warszawa: CeDeWu.

Pegg, E. Jr, Schoen, A.H. Rodgers, T., editors (2009). *Mathematical wizardy for a Gardner*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.

Pegg, E. Jr, Schoen, A.H. Rodgers, T., editors (2009). *Homage to a pied puzzler*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.

Penszko, M. (2009). *Łamigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Perelman, J. (1951). *Matematyka na wesoło*. Warszawa: Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej.

Perelman, J. (1957). *Ciekawa geometria*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Péter, R. (1962). *Gra z nieskończonością*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Petković, M.S. (2009). *Famous puzzles of great mathematicians*. The American Mathematical Society.

Piegat, E., opracowanie, (2000). *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS.

Piegat, E., opracowanie, (2005). *Zadania Hugona Steinhausa znane i nieznane*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS.

Pogonowski, J. (2016). Kontekst przekazu w matematyce. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 8: 119–137.

Pogonowski, J. (2018). Intuitive explanations of mathematical ideas. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 10: 123–137.

Polya, G. (1964). *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Polya, G., Kilpatrick, J. (2002). *The Stanford mathematics problem book*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Posamentier, A.S., Lehmann, I. (2013). *Magnificent Mistakes in Mathematics*. Amherst, New York: Prometheus Books.

Posamentier, A.S., Lehmann, I. (2014). *Mathematical curiosities. A treasure tove of unexpected entertainments*. Amherst, New York: Prometheus Books.

Rauszer, C. (1979). *Rozmaitości matematyczne*. Warszawa: Instytut Wydawniczy „Nasza Księgarnia".

Ribenboim, P. (1997). *Mała księga wielkich liczb pierwszych*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Romero, G.E. (2014). The collapse of supertasks. *Foundations of Science*, 19: 209–216.

Rooney, A. (2011). *Fascynująca matematyka*. Warszawa: Bellona.

Ruelle, D. (2007). *The mathematician's brain. A personal tour through the essentials of mathematics and some of the great minds behind them*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Sadowski, W. (2000). *Femme fatale. Trzy opowieści o królowej nauk.* Warszawa: Prószyński i S-ka.

Sautoy, M. du (2012). *Poker z Pitagorasem*. Warszawa: carta blanca.

Sawyer, W.W. (1970). *Ścieżki wiodące do matematyki*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Schmittberger, R. (2016). *Montague Island and other logic puzzles*. New York: Puzzlewright Press.

Scholten, P., Simoson, A. (1996). The falling ladder paradox, *The College Mathematics Journal*, 27 (1): 49–54.

Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., Yaglom, I.M. (1993). *The USSR olympiad problem book. Selected problems and theorems of elementary mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Sierpiński, W. (1987). 250 *zadań z elementarnej teorii liczb*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Smullyan, R. (1982). *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian tale for children under eighty*. New York: Morrow. Gotowy jest przekład polski (Jerzy Pogonowski).

Smullyan, R. (1993). *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (1995). *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (1998). *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki logiczne*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (2004). *Zagadki Szeherezady i inne zdumiewające łamigłówki, dawne i współczesne*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (2007a). *Przedrzeźniać przedrzeźniacza oraz inne zagadki logiczne łącznie z zadziwiającą przygodą w krainie logiki kombinatorycznej*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (2007b). *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy przewodnik po twierdzeniach Gödla*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Smullyan, R. (2007c). *The magic garden of George B. and other logic puzzles*. Milano: Polimetrica. Gotowy jest przekład polski (Jerzy Pogonowski).

Smullyan, R. (2009). *Logical labyrinths*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters. Gotowy jest przekład polski (Jerzy Pogonowski).

Smullyan, R. (2010). *King Arthur in search of his dog & other curious puzzles*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Smullyan, R. (2013). *The Gödelian puzzle book. Puzzles, paradoxes, and proofs*. Mineola, New York: Dover Publications. Gotowy jest przekład polski (Jerzy Pogonowski).

Stankova, Z., Rike, T., editors (2008). *A decade of the Berkeley Math Circle. The American experience, Volume I*. Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute, Providence: American Mathematical Society.

Steinhaus, H. (1989). *Kalejdoskop matematyczny*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Stewart, I. (2009). *Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2011a). *Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2011b). *Gabinet matematycznych zagadek. Część I*. Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Stewart, I. (2012a). *Dlaczego prawda jest piękna. O symetrii w matematyce i fizyce.* Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2012b). *Stąd do nieskończoności. Przewodnik po krainie dzisiejszej matematyki.* Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2012c). *Jak pokroić tort i inne zagadki matematyczne*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2012d). *Gabinet matematycznych zagadek. Część II*. Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Stewart, I. (2013). *17 równań, które zmieniły świat*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stewart, I. (2014). *Wielkie problemy matematyczne*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Stillwell, J.C. (2006). *Yearning for the impossible: the surprising truths of mathematics*. Wellesley, MA: A K Peters, Ltd.

Straszewicz, S. (1965). *Mathematical problems and puzzles from the Polish mathematical olympiads*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Strzelecki, P. (2011). *Matematyka współczesna dla myślących laików*. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.

Szurek, M. (2000). *Matematyka dla humanistów*. Warszawa: Wydawnictwo RTW.

Szurek, M. (2013). *Gawędy matematyczne na każdy dzień miesiąca*. Wydawnictwo BTC.

Szurek, M. (2008). *Matematyka przy kominku*. Warszawa: Wydawnictwo btc.

Szurek, M. (2016). *Podróże matematyczne*. Warszawa: Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.

Talwalkar, P. (2015a). *40 paradoxes in logic, probability, and game theory*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Talwalkar, P. (2015b). *Math puzzles*. Volume 1: *Classic riddles and brain teasers in counting, geometry, probability, and game theory*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Talwalkar, P. (2015c). *Math puzzles*. Volume 2: *More riddles and brain teasers in counting, geometry, probability, and game theory*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Talwalkar, P. (2015d). *Math puzzles*. Volume 3: *Even more riddles and brain teasers in counting, geometry, probability, and game theory*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Talwalkar, P. (2014). *The joy of game theory. An introduction to strategic thinking*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Talwalkar, P. (2016). *The irrationality illusion. How to make smart decisions and overcome bias*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Tanton, J. (2012). *Mathematics galore! The first five years of the St. Mark's Institute of Mathematics*. Mathematical Association of America.

Thomas, K. (2006). The ascending double cone: verifying and demonstrating the motion cone V-rail system. Final report. Department of Physics, University of Central Florida, Orlando: *The Society of Physics at the University of Central Florida*.

Venema, G.A. (2013). *Exploring advanced Euclidean geometry with GeoGebra*. The Mathematical Association of America.

Wajszczyk, J. (2003). *Jestem więc myślę. Łamigłówki logiczne*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Weber, K. (2009). *Zagadki kryminalne. 40 przypadków do rozwiązania*. Warszawa: KdC.

Wells, D. (2000). *I ty zostaniesz matematykiem*. Poznań: Zysk i S-ka Wydawnictwo.

Wells, D. (2002). *Cudowne i interesujące łamigłówki matematyczne*. Poznań: Zysk i S-ka Wydawnictwo.

Wells, D. (2012). *Games and mathematics. Subtle connections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Więsław, W. (2000). *Stare polskie zadania z matematyki*. Opole: Wydawnictwo NOWIK.

Winkler, P. (2004). *Mathematical puzzles. A connoisseur's collection*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Winkler, P. (2007). *Mathematical mind-benders*. Wellesley, MA: A K Peters, Ltd.

Yaglom, A.M., Yaglom, I.M. (1987). *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. Volume I: *Combinatorial analysis and probability theory*, Volume II: *Problems from various branches of mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Yashchenko, I. (2013). *Invitation to a mathematical festival*. Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute, Providence: American Mathematical Society.

Zeits, P. 2007. *The art and craft of problem solving*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.