RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok XLIX — Zeszyt 4 — 1987

EMIL PANEK

OPTYMALNY PODZIAŁ INWESTYCJI MIĘDZY DWA SEKTORY — WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

I. WSTĘP

Zagadnieniu optymalnego podziału inwestycji między dwa sektory - sektor 1 wytwarzający środki produkcji i sektor 2 wytwarzający dobra konsumpcyjne — poświęcono w literaturze ekonomiczno-matematycznej wiele miejsca. Początkowo rozwiązanie próbowano otrzymać stosując proste metody rachunku różniczkowego[1]. Rozwój teorii sterowania optymalnego spowodował natychmiastowy wzrost zainteresowania ekonomistów matematycznych tą dziedziną matematyki. Wkrótce też podjęli oni próbę wykorzystania aparatu teorii sterowania do rozwiązania zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między sektory w matematycznie ogólniejszej i — jak sądzono — ekonomicznie poprawniejszej postaci[2]. Okazało się jednak, że „mechaniczne" przełożenie na język teorii sterowania problemów stawianych na gruncie rachunku różniczkowego prowadzi do rozwiązań niezgodnych z obserwacją procesów zachodzących w realnych gospodarkach. Próbę sformułowania podstaw teoretycznych klasy modeli, z jednej strony dostosowanych do założeń teorii sterowania optymalnego, a z drugiej strony poprawniej od modeli tradycyjnych opisujących procesy wzrostu gospodarczego, podjął autor w serii prac, do których nawiązuje niniejszy artykuł[3].

[1] Por. np. Z. Czerwiński, *Optymalny podział inwestycji między dwa sektory,* Ekonomista 1974, nr 5.

[2] Ibidem; zob. także G. Handley, M. C. Kemp, *Variational Methods in Economics,* Amsterdam 1971; A. I. Ickiewicz, *Analiz liniejnych ekonomiko-matiematiczeskich modielej,* Nowosybirsk 1976, rodz. 3; M. Intriligator, *Mathematical Optimisation and Economic Theory,* New York 1971, rozdz. 16.

[3] M. in. E. Panek, *Optymalny rozkład inwestycji w zagregowanym modelu wzrostu,* Ekonomista 1(978, nr 6; tenże, *Sterowanie wzrostem w modelu jedno sektorowym z uwzględnieniem czynnika demograficznego,* w: *Problemy modelowania i sterowania w systemach społeczno-gospodarczego rozwoju,* pod red. A. Straszaka, Warszawa—Wrocław 1981; tenże, *Minimalnoczasowe zagadnienie sterowania wzrostem gospodarczym,* Prace Instytutu Cybernetyki Ekonomicznej, z. 115, Poznań 1984; tenże, *O gładkim rozwiązaniu zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między dwa sektory,* Przegląd Statystyczny 1884, nr 1/2; tenże, *Zastosowanie teorii sterowania optymalnego do rozwiązywania zagadnienia optymalnego podziału dochodu narodo-*

Celem artykułu jest empiryczne rozwiązanie, za pomocą aparatu teorii sterowania, zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między dwa sektory na przykładzie modelu wzrostu typu Leontiewa. Każdy z tych sektorów gra odmienną rolę w procesie wzrostu. Z technicznego punktu widzenia sektor 2, wytwarzający dobra konsumpcyjne, odgrywa rolę pasywną. Jego produkcja jest niezbędna dla zaspokojenia szeroko pojmowanych potrzeb konsumpcyjnych społeczeństwa i jako taka „wychodzi" poza układ produkcyjny przestając (bezpośrednio) oddziaływać na wzrost gospodarczy. Produkcja sektora 1 (inwestycyjnego) pozostaje — przekształcona poprzez inwestycje w majątek produkcyjny — w układzie produkcyjnym i przyczynia się do tworzenia dóbr konsumpcyjnych i inwestycyjnych w przyszłości. Przebieg procesu wzrostu zależy m.in. od tego, w jaki sposób wytworzone dobra inwestycyjne są dzielone między każdy z dwóch sektorów. Niski udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych, a więc wysoki udział inwestycji kierowanych do sektora 2, oznacza wprawdzie doraźnie szybki wzrost majątku tego sektora i tym samym wzrost jego produkcji, ale wzrost ten odbywa się kosztem zmniejszonych nakładów inwestycyjnych w sektorze 1, wytwarzającym środki produkcji. W konsekwencji następuje spadek produkcji środków produkcji, co wywołuje z kolei zmniejszenie nakładów inwestycyjnych w sektorze 2. Wysoki udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych, a więc niski udział inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne, sprzyja wprawdzie dynamicznemu wzrostowi majątku i produkcji sektora inwestycyjnego, ale wzrost ten odbywa się kosztem niskiej produkcji dóbr konsumpcyjnych w sektorze 2.

Rodzi się pytanie, jakie powinny być reguły podziału inwestycji między sektory i jaki wpływ na te reguły ma przyjęte kryterium wzrostu? Teoretyczna odpowiedź na to pytanie w przypadku

a) kryterium maksymalizacji produkcji sektora wytwarzającego dobra konsumpcyjne w ustalonym okresie,

b) kryterium maksymalizacji produkcji sektora wytwarzającego dobra konsumpcyjne w końcowym momencie ustalonego okresu

jest znana[4].

Nieznane są natomiast autorowi próby empirycznego rozwiązania tego zagadnienia na przykładzie dynamicznego modelu Leontiewa, na podstawie danych statystycznych o gospodarce Polski. Wyniki takiego eksperymentu obliczeniowego są tematem artykułu[5].

wego, w: *Modelowanie rozwoju społeczno-gospodarczego przy ograniczonych zasobach,* pod red. J. Hołubca, Warszawa—Łódź 1984; tenże, *La politique d'investissement optimale a la lumiére de la théorie de commande,* Problemy rozwoju makroekonomicznego i regionalnego, z. 147, Poznań 1986; tenże, *Optymalne trajektorie wzrostu w zagregowanych modelach ekonomicznych,* Poznań 1986.

[4] E. Panek, O *gładkim rozwiązaniu.*

[5] Część obliczeń wykonano przy współudziale studentów kierunku Informatyka i Cybernetyka Ekonomiczna w Poznaniu w ramach prowadzonego przez autora przedmiotu „Modele ekonomii matematycznej" w roku akad. 1985/1986.

II. CIĄGŁY, DYNAMICZNY MODEL LEONTIEWA

Zakładamy, że czytelnikowi znany jest statyczny model Leontiewa zwany także modelem przepływów międzygałęziowych, który opisuje układ n równań liniowych:

$$x(t)-Ax(t)=y(t), \tag{1}$$

gdzie $x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ są wektorami odpowiednio: produkcji i produkcji końcowej wytwarzanej w poszczególnych sektorach gospodarki w momencie t, $A=(a_{ij})_{(n,n)}$ jest kwadratową, nieujemną macierzą współczynników nakładów bieżących (współczynników materiałochłonności), n oznacza liczbę wyróżnionych sektorów produkcyjnych[6]. Przy założeniu produktywności macierzy A układ równań (1) ma zawsze jednoznaczne, nieujemne rozwiązanie $x(t)$, odpowiadające danemu nieujemnemu wektorowi $y(t)$ produkcji końcowej[7].

W pracy interesuje nas dynamiczny model Leontiewa. Zakłada się w nim, że produkcja końcowa sektorów gospodarki $y(t)$ dzieli się na część $k(t)=\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ \vdots \\ k_n(t) \end{pmatrix}$, kierowaną na inwestycje produkcyjne, oraz część $c(t)=\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$, kierowaną na zaspokojenie popytu finalnego:

$$y(t)=k(t)+c(t). \tag{2}$$

Oznaczając przez $k_{ij}(t)$ wielkość przepływu inwestycyjnego z sektora i do sektora j w momencie t (jest to część produkcji sektora i przekazywana w momencie t na cele inwestycyjne sektorowi j) mamy:

$$k_i(t)=\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t). \tag{3}$$

[6] Na temat modelu Leontiewa pisze m. in. Z. Czerwiński, *Podstawy matematyczne modeli wzrostu gospodarczego,* Warszawa 1973, rozdz. 5. W niniejszym artykule zakładamy, że czas zmienia się w sposób „ciągły", a więc na przykład, że zmienne $x(t)$, $y(t)$ określają — ściśle rzecz biorąc — tylko gęstość (prędkość narastania) strumienia produkcji globalnej i końcowej. Stosujemy przyjętą powszechnie w literaturze terminologię pisząc „produkcja", „konsumpcja" zamiast „gęstość strumienia produkcji", „gęstość strumienia konsumpcji" itd. Należy pamiętać jednak o umowności tej terminologii.

[7] O własnościach produktywnych macierzy pisze m. in. D. Gale, *Teoria liniowych modeli ekonomicznych,* Warszawa 1969, rozdz. IX. Por. także I. A. Ickowicz, *Analiz liniejnych,* rozdz. I.

Drugie fundamentalne założenie głosi, że przepływ $k_{ij}(t)$ jest proporcjonalny do przyrostu (przyspieszenia prędkości narastania) produkcji sektora j w momencie t:

$$k_{ij}(t)=b_{ij}\dot{x}_j(t). \tag{4}$$

Parametr b_{ij}, zwany współczynnikiem nakładów inwestycyjnych, interpretujemy jako taki przepływ inwestycyjny z sektora i do sektora j, który — wraz z odpowiednimi przepływami z pozostałych sektorów — umożliwia jednostkowy wzrost produkcji w sektorze j. Symbolem $\dot{x}_j(t)$ oznaczamy pochodną funkcji $x_j(t)$.

Przyjmując oznaczenia

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix}, \qquad B=(b_{ij})_{(n,n)},$$

z równań (1) - (4) otrzymujemy następujący układ równań dynamicznego modelu Leontiewa:

$$x(t)=Ax(t)+B\dot{x}(t)+c(t). \tag{5}$$

Nieujemna macierz B nosi nazwę macierzy współczynników nakładów inwestycyjnych lub krótko — macierzy inwestycyjnej. $Ax(t)$ jest wektorem nakładów bieżących umożliwiających wytworzenie w momencie t wektora produkcji $x(t)$, natomiast $B\dot{x}(t)$ jest wektorem nakładów inwestycyjnych (według sektorów pochodzenia nakładów), które należy ponieść w momencie t, aby móc osiągnąć wzrost produkcji $\dot{x}(t)$

III. WERSJA MODELU ZASTOSOWANA W OBLICZENIACH

1. DWUSEKTOROWY, DYNAMICZNY MODEL LEONTIEWA

Interesuje nas nie układ równań (5), lecz jego szczególny przypadek, gdy w gospodarce wyodrębnione zostają tylko dwa sektory: sektor 1—wytwarzający środki produkcji (sektor inwestycyjny) i sektor 2—wytwarzający dobra konsumpcyjne (umownie będziemy go nazywać sektorem konsumpcyjnym). W związku z tym będziemy zakładać, że:

— wszystkie zmienne modelu (tj. produkcja, inwestycje produkcyjne, nakłady bieżące oraz popyt finalny) wyrażone są w jednostkach pieniężnych,

— współczynniki a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12} są dodatnie oraz $a_{11}+a_{21}<1$, $a_{12}+a_{22}<1$ (warunek produktywności gospodarki),

— współczynniki $b_{21}=b_{22}=0$ (sektor 2 nie wytwarza bowiem dóbr inwestycyjnych),

— stała część produkcji końcowej sektora inwestycyjnego jest kierowana poza sferę produkcyjną gospodarki (traktowana m.in. jako inwestycje infrastrukturalne i socjalne, przyrost rezerw itp.):

$$c_1(t)=dy_1(t),$$

gdzie $0<d<1$.

Przy tych założeniach z układu równań (5) wynikają następujące warunki wzrostu produkcji w obu sektorach gospodarki:

$$\begin{aligned} &b_{11}\dot{x}_1(t)+b_{12}\dot{x}_2(t)=(1-d)[(1-a_{11})x_1(t)-a_{12}x_2(t)], \\ &c_1(t)=d[(1-a_{11})x_1(t)-a_{12}x_2(t)], \\ &c_2(t)=-a_{21}x_1(t)+(1-a_{22})x_2(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Wyrażenia

$$i_1(t)=b_{11}\dot{x}_1(t), \qquad i_2(t)=b_{12}\dot{x}_2(t) \tag{7}$$

interpretujemy jako wielkości inwestycji w sektorach 1, 2 w momencie *t*. Oznaczmy przez *h(t)* udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w łącznych nakładach inwestycyjnych (w obu sektorach) w momencie *t*:

$$h(t)=\frac{i_1(t)}{i_1(t)+i_2(t)}. \tag{8}$$

Niech $T=[0, t_1]$ będzie pewnym ustalonym przedziałem czasu. Nazywamy go dalej *horyzontem planowania*. Funkcję $h\colon T\to[0, 1]$ nazywamy *funkcją podziału inwestycji między sektory* i oznaczamy symbolem h_T. Natomiast symbolem *h(t)* oznaczamy wartość tej funkcji w momencie (punkcie) *t*. Po jej wprowadzeniu do układu równań (6) otrzymujemy następujące warunki wzrostu produkcji w sektorach:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t)=\frac{1-d}{b_{11}}h(t)Q[x(t)], \\ &\dot{x}_2(t)=\frac{1-d}{b_{12}}(1-h(t))Q[x(t)], \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie

$$Q[x(t)]=(1-a_{11})x_1(t)-a_{12}x_2(t).$$

Zakładamy, że ustalony jest wektor produkcji $x^0=\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$ w początkowym momencie $t=0$,

$$x(0)=x^0>0 \tag{10}$$

oraz że gospodarka w momencie tym dysponuje dodatnimi inwestycjami, a tym samym dodatnią produkcją końcową sektora inwestycyjnego:

$$Q[x^0]>0.$$

Odpowiadające danej funkcji h_T z wartościami w przedziale [0, 1] rozwiązanie układu (9) z warunkiem początkowym (10) oznaczamy symbolem $x_T=(x_1, x_2)_T$ Funkcję x_T nazywamy trajektorią produkcji, a odpowiadające jej zgodnie z (7) funkcje $c_T=(c_1, c_2)_T$, $i_T=(i_1, i_2)_T$ — trajektorią popytu finalnego (inwestycyjnego — c_{1T} i konsumpcyjnego — c_{2T}) oraz trajektorią inwestycji. Parę $(h, x)_T$ spełniającą na T układ (9) - (10) nazywarny (x^0, T) - dopuszczalnym procesem wzrostu.

2. ZAGADNIENIA OPTYMALNEGO PODZIAŁU INWESTYCJI MIĘDZY DWA SEKTORY — SFORMUŁOWANIE KLASYCZNE

Rozpatrzmy najpierw „klasyczną" wersję zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między dwa sektory, przez którą rozumiemy taką jego postać matematyczną, w której funkcja podziału inwestycji h_T pełni rolę tzw. funkcji sterującej i w związku z tym należy do klasy funkcji przynajmniej przedziałami ciągłych, o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju wewnątrz horyzontu T. Klasę takich funkcji oznaczamy przez $\tilde{C}^0[T]$

Kierując się kryteriami wzrostu, o których była mowa we wstępie, rozpatrzymy dwa zadania optymalnego podziału inwestycji między sektory.

Zadanie 1. Znaleźć taki (x^0, T) — dopuszczalny proces wzrostu $(h^*, x^*)_T$ z funkcją sterującą $h^* \in \tilde{C}^0[T]$, który w horyzoncie czasu T maksymalizuje produkcję sektora 2, wytwarzającego dobra konsumpcyjne.

Zadanie 2. Znaleźć taki (x^0, T) — dopuszczalny proces wzrostu $(h^*, x^*)_T$, który maksymalizuje produkcję sektora 2 w końcowym momencie t_1 horyzontu T.

Rozwiązanie tych zadań[8] przedstawia tabela 1. Jak widać, funkcja podziału inwestycji między sektory (funkcja sterująca) przyjmuje zawsze skrajne wartości: 0 (brak inwestycji w sektorze 1) lub 1 (brak inwestycji w sektorze 2). Rozwiązania różnią się między sobą jedynie w „długich" okresach dla $t_1 > \theta$, gdy następuje „przełączenie" funkcji sterującej z 1 na 0. Różnie kształtują się przy tym tylko długości poszczególnych faz wzrostu — fazy inwestycyjnej, w której $h^*(t) = 1$ i fazy konsumpcyjnej, w której $h^*(t) = 0$. Natomiast postacie analityczne optymalnych trajektorii w sektorach produkcji w obu rozwiązaniach są analogiczne.

3. NOWA WERSJA ZAGADNIENIA OPTYMALNEGO PODZIAŁU INWESTYCJI MIEDZY DWA SEKTORY

Z ekonomicznego punktu widzenia rozwiązania obu zadań są nierealne. Żadna gospodarka nie zniosłaby tak gwałtownego „skoku" w podziale inwestycji między sektory, jaki sugerują rozwiązania. W żadnej gospodarce niedopuszczalne jest całkowite wstrzymanie inwestycji w którymkolwiek z sektorów. Mając to na uwadze rozpatrzymy obecnie nowy wariant zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między sektory, w którym;

— zamiast dotychczasowego, nierealistycznego przedziału [0,1] dopuszczalnych wartości funkcji podziału inwestycji h_T weźmiemy węższy przedział $[s^0, s^1] \subset [0, 1]$, gdzie s^0 oznacza minimalny, a s^1 — maksymalny dopuszczalny udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych,

[8] Rozwiązanie otrzymano stosując warunki optymalności znane w teorii sterowania pod nazwą „zasady maksimum Pontriagina"; por. I. A. Ickowicz, *Analiz liniejnych,* s. 143 - 151 oraz E. Panek, *O gładkim rozwiązaniu.*

Tabela 1

Charakterystyka rozwiązań zadań 1 - 2

Wyszczególnienie	Długość horyzontu planowania $T=[0, t_1]$		
	$t_1 \leqslant \theta$	$t_1 > \theta$	
	$t \in T$	$t \in [0, \tau)$	$t \in [\tau, t_1]$
Optymalna funkcja podziału inwestycji między sektory; h_T^*	0	1	0
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1; x_{1T}^*	x_1^0	$(x_1^0-f_1)e^{\rho t}+f_1$	$x_1^*(\tau)$
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2; x_{2T}^*	$[x_2^0-f_2(0)]e^{-\sigma t}+f_2(0)$	x_2^0	$[x_2^0-f_2(\tau)]e^{-\sigma(t-\tau)}+f_2(\tau)$
Optymalna trajektoria inwestycyjnego popytu finalnego; c_{1T}^*	$(1-a_{22})[x_2^0-f_2(0)]e^{-\sigma t}-$ $-a_{12}df_2(0)+(1-a_{11})dx_1^0$	$(1-a_{11})d(x_1^0-f_1)e^{\rho t}+$ $+(1-a_{11})df_1-a_{12}x_2^0$	$-a_{12}d[x_2^0-f_2(\tau)]e^{-\sigma(t-\tau)}-$ $-a_{12}df_2(\tau)+(1-a_{11})dx_1^*(\tau)$
Optymalna trajektoria konsumpcyjnego popytu finalnego; c_{2T}^*	$(1-a_{22})[x_2^0-f_2(0)]e^{-\sigma t}+$ $+(1-a_{22})f_2(0)$	$-a_{21}(x_1^0-f_1)e^{\rho t}-$ $-a_{21}f_1+(1-a_{22})x_2^0$	$(1-a_{22})[x_2^0-f_2(\tau)]e^{-\sigma(t-\tau)}+$ $+(1-a_{22})f_2(\tau)-a_{21}x_1^*(\tau)$

Przyjęto oznaczenia: $f_1=a_{12}x_2^0/(1-a_{11})$, $f_2(\tau)=x_1^*(\tau)=x_1^0(\tau)x_2^0/f_1$, $f_2(0)=f_2(\tau)$ dla $\tau=0$, $\rho=(1-a_{11})(1-d)/b_{11}$, $\sigma=a_{12}(1-d)/b_{12}$; $\tau=t_1-\theta$, gdzie θ w zadaniu 1 jest dodatnim pierwiastkiem równania $1-e^{-\sigma\theta}=\theta/[\rho^{-1}+\sigma^{-1}]$, w zadaniu 2; $\theta=\sigma^{-1}\ln(1+\sigma\rho^{-1})$.

— podział inwestycji między sektory opiszemy za pomocą funkcji będącej rozwiązaniem równania

$$\dot{h}(t)=\omega[s(t)-h(t)] \tag{11}$$

z warunkiem początkowym

$$h(0)=h^0 \tag{12}$$

i funkcją sterującą $s\in\tilde{C}^0[T]$ z wartościami w $[s^0, s^1]$, gdzie $h^0\in(s^0, s^1)$ jest ustalonym początkowym udziałem inwestycji w sektorze 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych; ω jest parametrem dodatnim.

Równanie (11) określa reguły podziału inwestycji między sektory w zależności od postaci funkcji sterującej s_T. Trójkę funkcji $(s, x, h)_T$, gdzie -$s\in\tilde{C}^0[T]$, a funkcje x_T, h_T są rozwiązaniami układu równań (9), (11) z warunkami początkowymi (10), (12) nazywamy (x^0, h^0, T)—dopuszczalnym procesem wzrostu.

Zadanie 3. Znaleźć taki (x^0, h^0, T)—dopuszczalny proces wzrostu $(s^*, x^*, h^*)_T$, który maksymalizuje produkcję sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne w momencie końcowym t_1 horyzontu T.

Rozwiązanie tego zadania zawiera tabela 2. Postać rozwiązania [9] zależy od długości horyzontu. Jeżeli horyzont jest „długi" $(t_1>\theta)$, to proces wzrostu dzieli się na dwie fazy: fazę pierwszą, w której $s^*(t)=1$ (wzmożonego inwestowania w sektorze inwestycyjnym) i fazę drugą, w której $s^*(t)=0$ (wzmożonego inwestowania w sektorze wytwarzającym dobra konsumpcyjne). W „krótkim" horyzoncie czasu (gdy $t_1\leqslant\theta$) ma miejsce stały spadek udziału inwestycji kierowanych do sektora 1 i wzrost udziału inwestycji kierowanych do sektora 2. W odróżnieniu od rozwiązań zadań 1 - 2 zawsze, niezależnie od długości horyzontu planowania, obserwujemy dodatnie inwestycje w obu sektorach. Również ich podział między sektory przebiega regularnie, bez względu na długość horyzontu.

Rozwiązanie to jest bliższe naszemu wyobrażeniu o wzroście, niż rozwiązania poprzednich dwóch zadań. Bez dalszych badań empirycznych można jednak mówić co najwyżej o „jakościowej" zbieżności otrzymanego procesu z przebiegiem procesów wzrostu w realnych gospodarkach.

IV. UWAGI O SZACUNKACH PARAMETRÓW ZADAŃ 1 - 3

Dalsza część artykułu poświęcona jest próbie odpowiedzi na pytanie, jakie powinny być reguły optymalnego podziału inwestycji między sektory i jak przebiegałby proces wzrostu w gospodarce, której technologia wytwarzania, mechanizm

[9] Przedstawiamy tylko rozwiązanie zadania z kryterium maksymalizacji produkcji sektora 2 w momencie końcowym horyzontu planowania, gdyż podobnie jak poprzednio rozwiązanie zadania z kryterium maksymalizacji produkcji tego sektora w całym horyzoncie różni się jedynie momentem „przełączenia" funkcji sterującej s_T^*. Rozwiązanie otrzymano stosując warunki optymalności Pontriagina; zob. E. Panek, O *gładkim rozwiązaniu.*

Tabela 2

Charakterystyka rozwiązania zadania 3

Wyszczególnienie	Długość horyzontu planowania $T=[0, t_1]$		
	$t_1 \leqslant \theta$	$t_1 > \theta$	
	$t \in T$	$t \in [0, \tau)$	$t \in [\tau, t_1]$
Optymalna funkcja podziału inwestycji między sektory; h_T^*	$(h^0-s^0)e^{-\omega t}+s^0$	$(h^0-s^1)e^{-\omega t}+s^1$	$[h^*(\tau)-s^0]e^{-\omega(t-\tau)}+s^0$
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1; x_{1T}^*	$x_1^0+\int\limits_0^t \frac{1-d}{b_{11}}[(h^0-s^0)e^{-\omega v}+ +s^0]j^0 e^{g(0,v)}dv$	$x_1^0+\int\limits_0^t \frac{1-d}{b_{11}}[(h^0-s^1)e^{-\omega v}+ +s^1]j^0 e^{g(v)}dv$	$x_1^*(\tau)+\int\limits_\tau^t \frac{1-d}{b_{11}}[(h^*(\tau)-s^0)\times \times e^{-\omega(v-\tau)}+s^0]j^*(\tau)e^{g(\tau,v)}dv$
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2; x_{2T}^*	$x_2^0+\int\limits_0^t \frac{1-d}{b_{12}}[1-(h^0-s^0)e^{-\omega v}- -s^0]j^0 e^{g(0,v)}dv$	$x_2^0+\int\limits_0^t \frac{1-d}{b_{12}}[1-(h^0-s^1)e^{-\omega v}- -s^1]j^0 e^{g(v)}dv$	$x_2^*(\tau)+\int\limits_\tau^t \frac{1-d}{b_{12}}[1-(h^*(\tau)-s^0)\times \times e^{-\omega(v-\tau)}-s^0]j^*(\tau)e^{g(\tau,v)}dv$
Optymalna trajektoria inwestycyjnego popytu finalnego; c_{1T}^*	$d(1-a_{11})x_1^*(t)-a_{12}x_2^*(t)$		
Optymalna trajektoria konsumpcyjnego popytu finalnego; c_{2T}^*	$-a_{21}x_1^*(t)+(1-a_{22})x_2^*(t)$		

Przyjęto oznaczenia: $g(t)=b^{-1}(h^0-s^1)(1-e^{-\omega t})+(b_1 s^1-b_2)t$, $g(\tau,t)=b_1\omega^{-1}[h^*(\tau)-s^0][1-e^{-\omega(t-\tau)}]+(b_1 s^0-b_2)(t-\tau)$, $g(0,t)=g(\tau,t)$ dla $\tau=0$, $j^*(\tau)=(1-a_{11})x_1^*(\tau)-a_{12}x_2^*(\tau)$, $j^0=(1-a_{11})x_1^0-a_{12}x_2^0$, $b_1=(1-a_{11})(1-d)/b_{11}+b_2$, $b_2=a_{12}(1-d)/b_{12}$; $\tau=t_1-\theta$; moment $\theta>0$ można wyznaczyć **jedynie numerycznie, dla konkretnych wartości parametrów zadania 3 (brak ogólnego wzoru analitycznego).**

inwestycyjny, relacje Instytucjonalna i behawioralne byłyby podobne do tych, jakie założono w zadaniach 1 - 3, a parametry techniczno-ekonomiczne nie odbiegałyby istotnie od parametrów naszej gospodarki z przełomu lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych. Ten warunkowy charakter analizy ogranicza, oczywiście, wartość przeprowadzonych badań, gdyż brak de facto podstaw do twierdzenia, że gospodarka Polski na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych założenia te spełniała. Z tego też względu nie w pełni miarodajne mogą okazać się porównania optymalnych trajektorii produkcji, rozwiązań zadań 1 - 3, z ich rzeczywistym przebiegiem. Trajektorie te zaznaczono na wykresach obok optymalnych trajektorii produkcji, ale akcentujemy mocno, że ich większa lub mniejsza zbieżność z trajektoriami optymalnymi nie dowodzi jeszcze, że gospodarka nasza rozwijała się w sposób optymalny w sensie któregokolwiek z postulowanych w zadaniach 1-3 kryteriów.

Drugim zadaniem było ustalenie minimalnej długości horyzontu planowania *T*, przy którym w optymalnych procesach wzrostu ujawniają się charakterystyczne dwie fazy wzrostu. Wiążą się z tym pewne problemy z pogranicza metodologii i praktyki planowania, o których będzie mowa dalej.

Przy szacowaniu parametrów zadań 1-3 korzystano z danych statystycznych o gospodarce Polski w latach 1965-1975 w cenach bieżących[10]. Współczynniki a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} (wielkości niemianowane) wyznaczono na podstawie informacji o przepływach międzygałęziowych produkcji krajowej w 1969 r.[11], uznając tym samym strukturę nakładów bieżących w tym roku za najbardziej reprezentatywną dla naszej gospodarki na przestrzeni lat 1965 -1975. Sposób szacowania tych współczynników wyglądał pokrótce następująco. Bilans przepływów międzygałęziowych za 1969 r. opracowany został z uwzględnieniem podziału sfery produkcyjnej gospodarki na 15 gałęzi. W obliczeniach natomiast obowiązuje podział gospodarki tylko na dwa wielkie sektory: sektor 1, inwestycyjny, wytwarzający środki produkcji i sektor 2, zwany przez nas konsumpcyjnym, wytwarzający dobra konsumpcyjne. Oznaczmy przez q_k wielkość produkcji gałęzi k oraz przez q_{kl} wielkość bieżącego przepływu międzygałęziowego z gałęzi k do gałęzi l według bilansu przepływów za 1969 r. $(k, l=1, 2, \ldots, 15)$. Niech J oznacza zbiór gałęzi, które w bilansie tym figurują jako gałęzie inwestycyjne[12]. Ponadto niech x_i, x_{ij} oznacza wielkość produkcji oraz wielkość przepływu bieżącego produkcji[13] z sektora i do sektora j w gospodarce dwusektorowej $(i, j=1, 2)$. Współczynniki macierzy $A= (a_{ij})_{(2,\ 2)}$ wyznaczone zostały według znanego wzoru:

[10] Okres ten cechował względnie równomierny wzrost gospodarczy, co w badaniach empirycznych miało istotne znaczenie na etapie szacowania parametrów.

[11] Źródło: Rocznik Statystyczny 1971, s. 138 -141.

[12] W bilansie przepływów między gałęziowych za 1969 r. do inwestycyjnych zaliczone są: gałąź 3 — przemysł elektromaszynowy, gałąź 6 — przemysł drzewno--papierniczy, gałąź 10 — budownictwo, gałąź 13 — transport i łączność, gałąź 14 — obrót towarowy.

[18] Zmienne q_k ,x_i oraz q_{kl} ,x_{ij} są strumieniami (wymiar: zł/R, gdzie R jest ustaloną jednostką czasu — w naszym przypadku R=jeden rok).

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}, \quad (i,j=1,2),$$

gdzie

$$x_1=\sum_{k\in J} q_k, \quad x_2=\sum_{k\notin J} q_k,$$

$$x_{11}=\sum_{k\in J}\sum_{l\in J} q_{kl}, \quad x_{12}=\sum_{k\in J}\sum_{l\notin J} q_{kl},$$

$$x_{21}=\sum_{k\notin J}\sum_{l\in J} q_{kl}, \quad x_{22}=\sum_{k\notin J}\sum_{l\notin J} q_{kl}.$$

Po obliczeniach otrzymano

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}25819 & 0{,}09287 \\ 0{,}21456 & 0{,}48082 \end{pmatrix}.$$

W podobny sposób, wykorzystując macierz współczynników nakładów inwestycyjnych za 1969 r. sporządzoną dla gospodarki polskiej podzielonej na 15 gałęzi produkcyjnych oraz informację o przyrostach produkcji w 1970 r. w stosunku do 1969 r.[14], a następnie dokonując odpowiedniej agregacji, wyznaczono współczynniki macierzy inwestycyjnej w gospodarce dwusektorowej

$$B=\begin{pmatrix} 1{,}13203 & 1{,}41943 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wartość parametru d wskazującego, jaka część produkcji końcowej sektora inwestycyjnego jest kierowana poza sferę produkcyjną gospodarki, ustalono na podstawie danych o przepływach międzygałęziowych i inwestycyjnych bieżących w 1969 r. według wzoru

$$d=\frac{\sum_{k\in J} q_k-\sum_{k\in J}\sum_{l} q_{kl}-\sum_{k\in J}\sum_{l} k_{kl}}{\sum_{k\in J} q_k-\sum_{k\in J}\sum_{l} q_{kl}},$$

gdzie k_{kl} jest przepływem inwestycyjnym z gałęzi k do gałęzi l w roku 1969 (parametr d jest wielkością niemianowaną). W rezultacie otrzymano d=0,49663.

Pewne trudności sprawiało ustalenie wartości parametrów s°, s^1 (wielkości niemianowane) oznaczających minimalny i maksymalny dopuszczalny udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych w sferze produkcyjnej. Trudności wynikały stąd, że w źródłach statystycznych brak informacji o rozmiarach nakładów inwestycyjnych w podziale na sektor wytwarzający środki produkcji i sektor wytwarzający dobra konsumpcyjne. Są natomiast informacje o nakładach inwestycyjnych ponoszonych w gospodarce w rozbiciu na działy: przemysł, budownictwo, rolnictwo, leśnictwo, transport i łączność oraz obrót to-

[14] Macierz tę publikuje Z. Czerwiński i współautorzy w książce *Planowanie i modelowanie wzrostu gospodarki narodowej,* Warszawa 1982. W tej samej pracy zawarte są także dane o przyrostach produkcji globalnej gałęzi w roku 1970 w stosunku do roku 19>69. Elementy macierzy inwestycyjnej mają wymiar czasu (R).

warowy[15]. Trzy spośród wymienionych działów (budownictwo, transport i łączność, obrót towarowy) należą, zgodnie z podziałem przyjętym w sprawozdawczości statystycznej, do inwestycyjnych. W przemyśle są tylko dwie gałęzie inwestycyjne, a mianowicie przemysł elektromaszynowy i przemysł drzewno-papierniczy. Wydzielenia części nakładów inwestycyjnych kierowanej do przemysłu elektromaszynowego i drzewno-papierniczego z nakładów inwestycyjnych ogółem ponoszonych w przemyśle dokonano proporcjonalnie do udziału produkcji tych dwóch gałęzi w produkcji całego przemysłu. Mając tak oszacowaną wielkość nakładów inwestycyjnych ponoszonych w sektorze 1 oraz wiedząc, jakie nakłady inwestycyjne były ponoszone w całej sferze produkcyjnej gospodarki można oszacować udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych. Obliczenia przeprowadzono dla kolejnych lat okresu 1965 -1975[16], a otrzymane skrajne wartości zamierzano przyjąć jako szacunki parametrów s°, s^{1}. Okazało się, że najniższa wartość wskaźnika podziału inwestycji między sektory w tych latach wynosiła około 0,45, a najwyższa około 0,50. Ponieważ rozpiętość tego przedziału jest bardzo mała, zdecydowano się obniżyć nieco dolną oraz podnieść górną granicę i przyjąć ostatecznie $s^{\circ}=0{,}35$ oraz $s^{1}=0{,}60$.

Kolejny problem, który należało rozwiązać w związku z koniecznością ustalenia początkowej wielkości produkcji w sektorach x_1^0, x_2^0 oraz początkowego udziału inwestycji ponoszonych w sektorze 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych h° (wielkość niemianowana) wiązał się z przejściem od danych statystycznych notowanych w dyskretnych (rocznych) odstępach czasu do odpowiadających im funkcji ciągłych. Zastosowano tutaj standardową metodę aproksymacji do danych statystycznych ciągłych funkcji (typu wykładniczego). Traktując początek roku 1965 jako moment początkowy dziesięcioletniego horyzontu planowania otrzymano[17]:

$$x_1^0=496{,}3 \text{ (mld zł/R)},$$
$$x_2^0=881{,}4 \text{ (mld zł/R)},$$
$$h^0=0{,}450.$$

Parametr ω (wymiar: 1/R) nie podlega *de facto* oszacowaniu, lecz powinien zostać narzucony przez władzę gospodarczą zgodnie z wytycznymi polityki inwestycyjnej, możliwościami gospodarki itp. Nie dysponując wiarygodnymi danymi postanowiono rozpatrzyć trzy warianty procesów wzrostu z ciągłymi trajektoriami inwestycji odpo-

[15] Zob. np. Rocznik Statystyczny 1971, s. 151.

[16] Dane zaczerpnięto z Roczników Statystycznych: 1971, s. 151; 1976, s. 125.

[17] Z metodą tą można zapoznać się np. w pracach K. Malagi, *Sterowanie optymalne wzrostem w zagregowanym modelu gospodarki,* Prace Instytutu Cybernetyki Ekonomicznej, z. 115, Poznań 1984 oraz *La commande optimale: application a un modéle agrégé de croissance de l'économie,* w: *Problemy rozwoju*. Dane statystyczne o produkcji gałęzi gospodarki narodowej w latach 1965 -1975 zaczerpnięto z *Rocznika Dochodu Narodowego 1971,* s. 72-105 oraz 1976, s. 38-78; Rocznika Statystycznego Przemysłu 1973, s. 56 oraz 1975, s. 42; Rocznika Statystycznego 1976, s. 229. O danych statystycznych dotyczących nakładów inwestycyjnych informuje przypis 16.

wiadające wartościom parametru ω równym 0,25, 0,35 oraz 0,50. Przy wartości $\omega=0,25$ „przestawienie" gospodarki z minimalnego udziału inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych (0,35) do udziału rzędu 0,54 (tj. do udziału sięgającego 90% jego maksymalnej wielkości 0,60) wymaga około 4 lat. Przy wartościach $\omega=0,35$ oraz $\omega=0,50$ okres „przestawienia" jest odpowiednio krótszy (3 - 2 lata).

V. WYNIKI OBLICZEŃ EKSPERYMENTALNYCH

Obliczenia przeprowadzono zakładając dziesięcioletni horyzont planowania ($T=[0, 10]$), utożsamiając moment początkowy horyzontu z początkiem 1965 r. oraz jego moment końcowy z końcem roku 1975.

Rozwiązanie[18] zadania 1 (maksymalizacja produkcji sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne w całym horyzoncie planowania) przedstawia tabela 3. Przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania w optymalnym procesie wzrostu obserwujemy dwie fazy. Jako pierwsza pojawia się faza inwestycyjna, w której cała produkcja końcowa sektora 1, po odliczeniu „wychodzącej" poza sferę produkcyjną gospodarki części przeznaczonej na zaspokojenie pozakonsumpcyjnego popytu finalnego, skierowana zostaje na inwestycje w tym sektorze powodując w krótkim czasie szybki wzrost jego produkcji. W tym czasie produkcja sektora 2 utrzymuje się na wyjściowym poziomie x_2^0. Produkcja sektora 1 rośnie średnio ze stopą około 33% rocznie! Faza inwestycyjna przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania trwa nieco ponad 4 lata.

Tabela 3

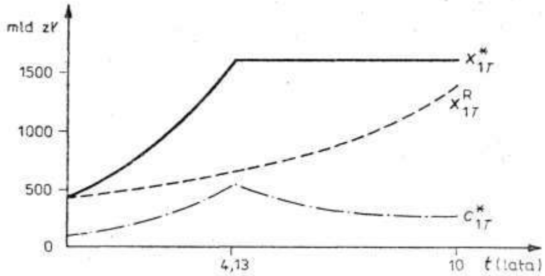
Rozwiązanie zadania 1 na podstawie danych statystycznych o gospodarce PRL w latach 1965 -1975

Wyszczególnienie	Długość horyzontu $T=[0, t_1]$				
	$t_1 \leqslant 5,87$		$t_1 > 5,87$		
	$t=0$	$t=5,87$	$t=0$	$t=4,13$	$t=10$
Optymalna trajektoria podziału inwestycji między sektory — h_T^*	0	0	1	0	0
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1 x_{1T}^* (mld zł)	496,3	496,3	496,3	1617,5	1617,5
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2 x_{2T}^* (mld zł)	881,4	1423,3	881,4	881,4	2997,6
Optymalna trajektoria inwestycyjnego popytu finalnego — c_{1T}^* (mld zł)	101,0	50,7	101,0	514,0	317,5
Optymalna trajektoria konsumpcyjnego popytu finalnego — c_{2T}^* (mld zł)	351,1	632,4	351,1	110,4	1209,1

Przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania $\theta=5,87$, $\tau=4,13$.

[18] W tabeli prezentujemy rozwiązanie zadania tylko dla wybranych momentów *t*.

Po fazie inwestycyjnej następuje faza konsumpcyjna, w której inwestycje w całości kierowane są do sektora 2, wytwarzającego dobra konsumpcyjne. Produkcja sektora 1 utrzymuje się w tej fazie na poziomie, który osiąga on pod koniec fazy inwestycyjnej. Produkcja sektora 2 rośnie (gasnąco) ze średnią stopą 23% rocznie! Przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania faza konsumpcyjna w rozwiązaniu zadania 1 trwa niecałe 6 lat.



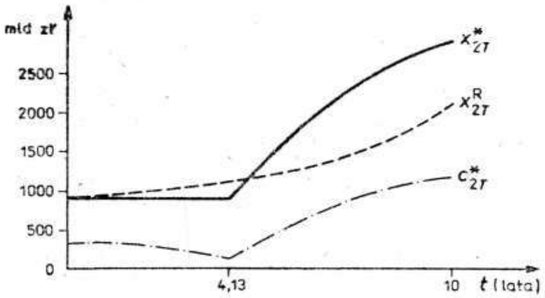
Rys. 1. Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1 (x^*_{1T}) i inwestycyjnego popytu finalnego (c^*_{1T}) — rozwiązanie zadania 1 przy założonym 10-letnim horyzoncie planowania. Rzeczywista trajektoria produkcji w sektorze 1 (x^R_{1T}) w latach 1965-1975

«

Na rys. 1 i 2 obok optymalnych trajektorii x^*_{1T}, x^*_{2T} — rozwiązań zadania 1 — zaznaczono także przebieg optymalnych trajektorii popytu finalnego c^*_{1T}, c^*_{2T} oraz rzeczywisty poziom produkcji zaobserwowany w latach 1965 -1975 (ściślej rzecz biorąc — jego ciągły analogon). Zwraca uwagę duża rozbieżność między optymalną i rzeczywistą wielkością produkcji w całym horyzoncie, zwłaszcza w sektorze inwestycyjnym. Jeden rzut oka na rysunek wystarcza, by uznać rozwiązanie za nierealistyczne. Nie do zrealizowania jest postulat skierowania całości nakładów inwestycyjnych najpierw wyłącznie do sektora 1, a następnie — po upływie 4 lat — ich gwałtownego przelania do sektora 2. Nierealna jest też zarówno ponad trzydziestoprocentowa roczna stopa wzrostu produkcji środków produkcji, jak i ponad dwudziestoprocentowa roczna stopa wzrostu produkcji dóbr konsumpcyjnych.

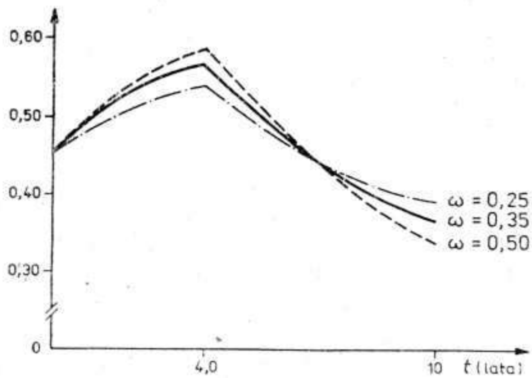
Z tych samych względów nie do przyjęcia w świetle naszej wiedzy o wzroście jest proces otrzymany w rozwiązaniu zadania 2. Przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania, tak jak poprzednio, dzieli się on na dwie fazy: fazę pierwszą — inwestycyjną i drugą — konsumpcyjną. Optymalnie trajektorie przebiegają podobnie jak na rys. 1 i 2 z tym, że w stosunku do poprzedniego rozwiązania wydłuża się znacznie faza inwestycyjna, która trwa teraz ponad 7 lat, a skraca faza konsumpcyjna (do niecałych 3 lat).

Zmiana długości faz wzrostu w rozwiązaniu zadania 2 jest łatwa do wyjaśnienia i wiąże się ze zmianą kryterium wzrostu. W zadaniu 1 kryterium wzrostu jest maksymalizacja produkcji sektora 2 w całym horyzoncie planowania. Wydłużenie fazy inwestycyjnej w rozwiązaniu zadania 2 jest równoznaczne z utrzymywaniem w tej fazie zdolności wytwórczych sektora 2 na niskim wyjściowym poziomie, co rzutuje na obniżenie łącznych rozmiarów jego produkcji w całym horyzoncie (nawet gdyby pod jego koniec miało nastąpić znaczne zwiększenie produkcji tego sektora). Wydłużenie fazy inwestycyjnej staje się jednak uzasadnione, gdy przyjmiemy — jak



Rys. 2. Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2 (x^*_{2T}) i konsumpcyjnego popytu finalnego (c^*_{2T}) — rozwiązanie zadania 1 przy założonym 10-letnim horyzoncie planowania. Rzeczywista trajektoria produkcji w sektorze 2 w latach 1965 - -1975 (x^R_{2T}).

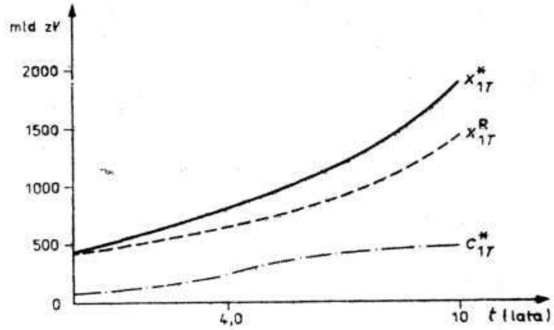
w zadaniu 2 — kryterium maksymalizacji produkcji sektora 2 w momencie końcowym dziesięcioletniego horyzontu. Długa faza inwestycyjna umożliwia bowiem wprawdzie w tym czasie funkcjonowanie sektora 2 tylko na poziomie reprodukcji prostej, pozwala jednak — dzięki temu, że całość inwestycji w fazie tej kierowana jest tylko do sektora 1 — na osiągnięcie pod jej koniec wysokiego poziomu produkcji środków produkcji. W ten sposób w fazie konsumpcyjnej w krótkim okresie możliwe sta-



Rys. 3. Trajektorie podziału inwestycji między sektory odpowiadające różnym wartościom parametru co

je się dostarczenie sektorowi 2 znacznych nakładów inwestycyjnych stymulujących w efekcie taki wzrost produkcji dóbr konsumpcyjnych pod koniec horyzontu planowania, jakiego nie zapewnia rozwiązanie zadania 1.

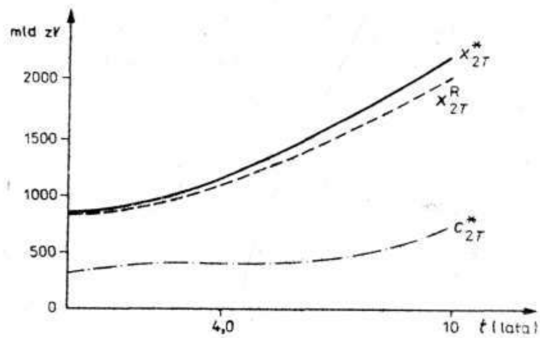
W końcowym okresie horyzontu planowania rozwiązania obu zadań prowadzą do poziomów produkcji przewyższających poziom osiągnięty w rzeczywistości.



Rys. 4, Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1 (x^*_{1T}) i inwestycyjnego popytu finalnego (c^*_{1T}) — rozwiązanie zadania 3 przy założonym 10-letnim horyzoncie planowania i wartości parametru $w=$ $=0,50$. Rzeczywista trajektoria produkcji w sektorze 1 w latach 1965 - 1975 (x^R_{1T})

Nie dowodzi to jednak, że w latach 1965 -1975 możliwe było osiągnięcie wyższego tempa wzrostu produkcji w sektorach. Rozwiązania te są bowiem, jak już o tym pisaliśmy, niemożliwe do przyjęcia z ekonomicznego punktu widzenia.

Zadanie 3 zostało tak sformułowane by — po pierwsze — wyeliminować niere-



Rys. 5. Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2 (x^*_{2T}) i konsumpcyjnego popytu finalnego (c^*_{2T}) — rozwiązanie zadania 3 przy założonym dziesięcioletnim horyzoncie planowania i wartości parametru $w=0,50$. Rzeczywista trajektoria produkcji w sektorze 2 w latach 1965 - -1975 (x^R_{2T})

Tabela 4

Rozwiązanie zadania 3 na podstawie danych statystycznych w gospodarce PRL w latach 1965 -1975

Wyszczególnienie	Horyzont $T=[0, 10]$						
	$t=0$	$\omega=0,25$		$\omega=0,35$		$\omega=0,50$	
		$t=4$	$t=10$	$t=4$	$t=10$	$t=4$	$t=10$
Optymalna trajektoria podziału inwestycji; h_T^*	0,450	0,545	0,393	0,563	0,376	0,580	0,361
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 1; x_{1T}^* (mld zł)	496,3	883,9	1880,3	901,2	1870,7	920,6	1851,2
Optymalna trajektoria produkcji w sektorze 2; x_{2T}^* (mld zł)	881,4	1166,3	2214,4	1159,7	2230,6	1153,0	2274,2
Optymalna trajektoria inwestycyjnego popytu finalnego; c_{1T}^* (mld zł)	101,0	217,2	400,5	224,3	482,0	232,1	470,8
Optymalna trajektoria konsumpcyjnego popytu finalnego; c_{2T}^* (mld zł)	351,1	415,9	746,3	408,8	756,7	401,2	783,5

$\theta=6,0; \tau=4,0$

alistyczne, skrajne przypadki, gdy inwestycje kierowane są wyłącznie do jednego z sektorów oraz — po drugie — by wykluczyć gwałtowne „skoki" w podziale inwestycji między sektory towarzyszące przejściu od inwestycyjnej do konsumpcyjnej fazy wzrostu. Jego rozwiązanie przedstawia tabela 4 (dla wybranych momentów czasu) oraz rys. 3 i 5. Na rys. 4 i 5 przedstawiono przebieg optymalnych trajektorii produkcji i konsumpcji dla wartości parametru $\omega=0{,}50$.

Podobnie, jak w rozwiązaniach dwóch poprzednich zadań, również obecnie przy dziesięcioletnim horyzoncie planowania obserwujemy dwie fazy wzrostu: pierwszą — inwestycyjną, w której w całkowitych nakładach inwestycyjnych rośnie udział inwestycji kierowanych *do* sektora 1 i drugą — konsumpcyjną, w której rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2. Faza pierwsza trwa 4 lata, faza druga — 6 lat. Ich długości nie zależą istotnie od postulowanych wartości parametru ω. Ma on natomiast wpływ na sposób podziału inwestycji między sektory oraz na przebieg trajektorii produkcji. I tak, przy najwyższej wartości parametru $\omega=0{,}50$ (a więc, gdy tempo wzrostu funkcji podziału inwestycji h_T w fazie inwestycyjnej jest najwyższe, a w fazie konsumpcyjnej — najniższe) w momencie końcowym dziesięcioletniego horyzontu planowania produkcja sektora 1 osiąga niższy poziom, a produkcja sektora 2 — wyższy poziom, aniżeli przy wartościach $\omega=0{,}25$ oraz $\omega=0{,}35$. Kierując się kryterium maksymalizacji produkcji sektora 2 w momencie końcowym dziesięcioletniego horyzontu planowania wnioskujemy, że rozwiązanie zadania 3 przy wartości parametru $\omega=0{,}50$ jest „najlepsze". Z drugiej jednak strony w tym wariancie, w fazie inwestycyjnej produkcja sektora 2 utrzymuje się na niższym poziomie, aniżeli w obu pozostałych wariantach (przy $\omega=0{,}25$ i $\omega=0{,}35$).

Śledząc przebieg optymalnych trajektorii produkcji na rys. 4 i 5 zauważamy ich dużą „regularność". W pełni realny, zgodny z naszym wyobrażeniem o procesach wzrostu zachodzących w rzeczywistych gospodarkach, jest podział inwestycji między sektory zilustrowany na rys. 3. Porównując przebieg optymalnych trajektorii produkcji (we wszystkich wariantach) z jej rzeczywistym poziomem w latach 1965 - 1975 stwierdzamy, że zawsze, niezależnie od przyjętej wartości parametru ω, rzeczywisty poziom produkcji w sektor kształtuje się poniżej trajektorii optymalnej. W całym horyzoncie planowania w sektorze 1 optymalna trajektoria produkcji rośnie średnio ze stopą około 14% rocznie, zaś w sektorze 2 — średnio ze stopą 11% rocznie. W tym okresie faktyczny wzrost produkcji (w cenach bieżących) w sektorze 1 wynosił około 12 % rocznie, a w sektorze 2 niecałe 10 % rocznie. Gdyby więc nasza gospodarka w latach 1965 - 1975 rozwijała się zgodnie z założeniami zadania 3, wówczas stosując reguły, jakie sugeruje jego rozwiązanie, osiągnięto by w tym okresie wyższy poziom produkcji w sektorach, niż to miało miejsce w rzeczywistości.

VI. PODSUMOWANIE

Przejście do tradycyjnego sformułowania zagadnienia optymalnego podziału inwestycji między sektory do jego nowej wersji, dostosowanej do założeń teorii sterowania optymalnego wymaga dużej ostrożności i wiąże się często z koniecznością weryfikacji niektórych tradycyjnych założeń w świetle ich nowej interpretacji ekonomicznej. Nieprzemyślane, mechaniczne uogólnienia prowadzić mogą do rozwiązań nie do przyjęcia w świetle naszej wiedzy o wzroście, jak to pokazują rozwiązania pierwszych dwóch zadań.

Otrzymane, nierealne z ekonomicznego punktu widzenia, rozwiązania nie dowodzą jeszcze, rzecz prosta, nieprzydatności teorii sterowania optymalnego jako narzędzia badawczego zjawisk ekonomicznych. Dowodzą natomiast niepoprawności sformułowania problemu ekonomicznego w języku matematycznym. Przemawia za tym rozwiązanie trzeciego zadania, w którym — zgodnie z interpretacją procesów zachodzących w realnych gospodarkach — zmodyfikowano warunki podziału inwestycji między sektory wykluczając te negatywne zjawiska, które ujawniono w rozwiązaniach pierwszych dwóch zadań (tj. zarówno możliwość wstrzymania inwestycji, jak i ich gwałtownego „skoku", „spadku lub wzrostu", w którymkolwiek z sektorów).

Choć rozwiązanie zadania trzeciego jest zbieżne z przebiegiem trajektorii produkcji obserwowanym w rzeczywistości, nieuzasadnionym byłby jednak wniosek, że gospodarka nasza w latach 1965 -1975 rozwijała się w sposób optymalny (w sensie kryterium maksymalizacji produkcji dóbr konsumpcyjnych w momencie końcowym dziesięcioletniego horyzontu planowania). Do udowodnienia takiej tezy potrzebny byłby model wzrostu dużo dokładniejszy od przedstawionego w artykule.

Natomiast otrzymane rozwiązania ujawniają inne, żywo dyskutowane, także poza gronem ekonomistów matematycznych, zjawisko związane z długością horyzontu planowania i tej sprawie na zakończenie poświęcimy chwilę uwagi. Otóż w systemie planów gospodarczych szczebla centralnego w Polsce oraz w pozostałych krajach socjalistycznych wiodące ogniwo tworzą, jak wiadomo, plany pięcioletnie. W świetle uzyskanych rozwiązań zjawiskiem nietypowym, choć teoretycznie dopuszczalnym, są „krótkie" horyzonty, w których pojawia się tylko jedna, konsumpcyjna, faza wzrostu[19]. Byłaby to zresztą także sytuacja nietypowa (czy w ogóle dopuszczalna?) w jakiejkolwiek realnej gospodarce. Jeśli więc za naturalny uznać stan, gdy cykl planistyczny obejmuje obie podstawowe fazy wzrostu — inwestycyjną i konsumpcyjną — to w świetle rozwiązania trzeciego zadania (jedynego, które można uznać za godne uwagi z ekonomicznego punktu widzenia) horyzont pięcioletni jest zdecydowanie za krótki. Aby w rozwiązaniu tego zadania w optymalnym procesie w ogóle mogły pojawić się obie fazy wzrostu, potrzebny jest horyzont planowania o długości przekraczającej 6 lat.[20]

Biorąc pod uwagę jakiekolwiek sensowne proporcje między długością obu faz wzrostu dochodzimy do wniosku (w świetle uzyskanych rozwiązań, ze wszystkimi zastrzeżeniami, które sformułowano pod adresem modelu), że wiodące na szczeblu

[19] Drugi skrajny przypadek — występowania tylko inwestycyjnej fazy wzrostu — nie wchodzi w grę z tego powodu, że proces taki nie byłby nigdy optymalny w świetle rozpatrywanych w artykule kryteriów.

[20] W miarę wydłużania horyzontu rośnie praktycznie tylko długość fazy drugiej, która przy dziesięcioletnim horyzoncie dochodzi do ok. 4 lat. To samo zjawisko obserwujemy zresztą także w rozwiązaniu zadania 1.

centralnym plany rozwoju społeczno-gospodarczego powinny w praktyce obejmować okresy dłuższe niż pięcioletnie. Sprawą otwartą pozostaje „optymalna" długość takiego horyzontu, lecz problematyka ta wykracza poza ramy artykułu.

THE OPTIMUM DISTRIBUTION OF INVESTMENT BETWEEN TWO SECTORS — THE RESULTS OF SIMPLE EMPIRICAL STUDIES

Summary

The paper is composed of two parts. In the first, theoretical one, the author presents the Leontief dynamic model and investigates the variants of the solution of the problem of optimum distribution of investment between sectors in the two-sector version of that model. The solution is obtained by means of the Pontriagin maximum principle.

In the second, empirical part, the author presents the results of calculations made on the basis of statistical data concerning Poland in the years 1965 - 1975. The author critically evaluates economically unrealistic variants of solution which postulat sudden "switches" in the distribution of investment between sectors. In the author's opinion, fully realistic processes taking place in real economies are characterized by "smooth" trajectories of investments and consumption. He shows that if the rules of investments distribution between sectors resulting from that solution had been applied in years 1965 -1975, a higher level of production of means of production and similar level of production of consumption goods would have been achieved.

The author indicates that in view of the above solutions the leading plans of socio-economic development formulated on the highest level of authority should cover longer periods than the five-year-ones.