



UNIwersYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

PATRYK ŻYWICA

Miary podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych
w klasyfikacji danych niepewnych.
Zastosowania w diagnostyce guzów jajnika

Praca doktorska na stopień doktora nauk matematycznych
w zakresie informatyki przygotowana pod kierunkiem
prof. dr hab. Macieja Wygalaka
oraz promotora pomocniczego
dr inż. Anny Stachowiak
w Zakładzie Metod Przetwarzania
Informacji Nieprecyzyjnej

Luty 2016

Streszczenie

Rozprawa dotyczy problemu mierzenia podobieństwa w sytuacji, gdy wiedza na temat reprezentowanych przez przedziałowe zbiory rozmyte obiektów, jest tylko częściowa i niepewna. Dokonano przeglądu literatury oraz porównania obecnych podejść do mierzenia podobieństwa klasycznych i przedziałowych zbiorów rozmytych. Okazuje się, że aby możliwe było pełne uwzględnienie niekompletności danych konieczne jest wyrażenie podobieństwa przy pomocy przedziału. Zbudowano teorię niezbędną do poprawnego modelowania przedziałowego podobieństwa. Sformułowane zostały podstawowe własności, jakie w takiej sytuacji powinna spełniać miara podobieństwa, a następnie zaproponowano metodę konstrukcji nieskończenie wielu takich miar. Metoda ta pozwala na skonstruowanie nowej miary na podstawie miary podobieństwa zbiorów rozmytych, o ile ta spełnia pewne warunki. Zbadano problem efektywnego obliczania nowych miar uzyskanych tą metodą. Szczególną uwagę poświęcono uogólnionej wersji indeksu Jaccarda. Korzystając z przedziałowych miar podobieństwa zaproponowano dwie metody klasyfikacji umożliwiające pełne wsparcie dla danych niepewnych zarówno na etapie budowy klasyfikatora, jak i jego stosowania. Dokonano obszernej ewaluacji jakości klasyfikacji z wykorzystaniem rzeczywistych danych medycznych. Jedną z zaproponowanych metod została wykorzystana w inteligentnym systemie wspomagania diagnostyki guzów jajnika – OvaExpert.

Słowa kluczowe: zbiory rozmyte, podobieństwo, niepewność, klasyfikacja.

Abstract

Title: Similarity Measures of Interval-Valued Fuzzy Sets in Classification of Uncertain Data. Applications in Ovarian Tumor Diagnosis

The dissertation deals with the problem of measuring the similarity when knowledge about objects represented by the Interval-Valued Fuzzy Sets is incomplete and uncertain. Various approaches to measuring similarity of classical and interval-valued fuzzy sets were investigated and compared. It appears that to be able to take full account of the data incompleteness, it is necessary to express the similarity as an interval. Theory necessary to properly model interval similarity was built. Basic properties, which in this case should be fulfilled by similarity measure were formulated, and a construction method of infinitely many such measures was proposed. This method allows to construct a new interval measure from a similarity measure of fuzzy sets, as long as it meets certain conditions. Problem of effective calculation of the new measures obtained by this method was examined. Special attention was given to the generalized version of the Jaccard Index. Using the interval similarity measures, two classification methods that allow full support for data uncertainty, both at the stage of building a classifier and its usage, were proposed. Comprehensive evaluation of the classification quality using real medical data was performed. One of the proposed methods was applied in the intelligent diagnosis support system for Ovarian Tumor – OvaExpert.

Keywords: fuzzy sets, similarity, uncertainty, classification.

Spis treści

Wstęp	7
1 Podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych	11
1.1 Operacje triangularne	11
1.2 Zbiory rozmyte	13
1.2.1 Moc skalarna zbioru rozmytego	14
1.3 Przedziałowe zbiory rozmyte	15
2 Niepewność danych oraz podobieństwo zbiorów rozmytych	17
2.1 Niepewność danych	17
2.2 Semantyka zbiorów rozmytych a niepewność danych	18
2.3 Podobieństwo i jego natura	22
2.4 Podobieństwo zbiorów rozmytych a niepewność	23
2.5 Formalne podejście do problemu podobieństwa zbiorów rozmytych	25
2.5.1 Własności miar podobieństwa zbiorów rozmytych	25
2.5.2 Własności miar podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych	33
2.6 Najczęściej używane miary podobieństwa zbiorów rozmytych	36
2.6.1 Podejście oparte na teorii mnogości	36
2.6.2 Podejście oparte na odległości	37
2.6.3 Podejście oparte na logice	39
3 Podobieństwo epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych	41
3.1 Epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte	41
3.2 Własności podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych	42
3.2.1 Adaptacje klasycznych własności	43
3.2.2 Własności specyficzne dla epistemicznych IVFS	46
3.2.3 Miary podobieństwa uwzględniające niepewność	48
3.2.4 Zależności	48
3.3 Reprezentacja Wavy-Slice	52
3.4 Najczęściej używane miary podobieństwa i ich rozszerzenia	57
3.4.1 Odległość Minkowskiego	57

3.4.2	Inne podejścia oparte na odległości	58
3.4.3	Miary podobieństwa oparte na operatorze koimplikacji	58
3.5	Uogólniony indeks Jaccarda	59
3.6	Uogólniona przedziałowa moc względna	63
3.6.1	Przeformułowanie problemu	64
3.6.2	Algorytmy Nguyena-Kreinovicha i Karnika-Mendela	65
3.6.3	Rozwiązanie dla t-norm mających u -własność	66
3.6.4	Rozwiązanie dla t-norm bez u -własności	75
4	Zastosowania w klasyfikacji	77
4.1	Zaproponowane metody klasyfikacji	78
4.1.1	Metoda k najpodobniejszych sąsiadów	78
4.1.2	Przedziałowy klasyfikator rozmyty	80
4.2	Ewaluacja i wyniki	82
4.3	Zastosowania w diagnostyce guzów jajnika	84
4.3.1	Wprowadzenie do problematyki diagnostyki guzów jajnika	84
4.3.2	Scenariusz 1: diagnostyka na podstawie danych pacjentki	86
4.3.3	Scenariusz 2: diagnostyka na podstawie modeli diagnostycznych	94
4.3.4	System <i>OvaExpert</i>	98
	Bibliografia	101
	Spis oznaczeń	111

Wstęp

Potrzeba modelowania nieprecyzyjności i niekompletność informacji dała początek teorii zbiorów rozmytych i jej licznym rozszerzeniom. Klasyczna teoria zbiorów rozmytych umożliwia modelowanie nieprecyzyjnych zdań, dopuszczając stopnie prawdziwości inne niż tylko całkowita prawda lub całkowity fałsz. Jednak wydaje się to niewystarczające wobec niekompletnej (częściowej) informacji, gdy określenie dokładnego stopnia prawdziwości nie jest możliwe. W takiej sytuacji mamy do czynienia z niepewnością. Badacze motywowani znaczeniem modelowania i przetwarzania informacji niepewnej stworzyli wiele uogólnień klasycznej teorii, mających na celu uchwycenie czynnika niepewności. Na szczególną uwagę wśród nich zasługują przedziałowe zbiory rozmyte będące tematem tej rozprawy.

W każdej dziedzinie matematyki określenie równości czy podobieństwa obiektów jest bardzo istotne. Okazuje się, że w przypadku zbiorów rozmytych problem ten stał się szczególnie złożony. Zbiory rozmyte bardzo często rozważane są w odniesieniu do nieprecyzyjnych obiektów, które reprezentują. Jak zatem porównać obiekty na podstawie rozmytego opisu, który z natury jest nieprecyzyjny? Należy tu jasno odróżnić pojęcie równości i podobieństwa reprezentacji informacji od równości i podobieństwa obiektów, które są przez nią reprezentowane. Problem komplikuje się jeszcze bardziej w przypadku przedziałowych zbiorów rozmytych, gdzie oprócz nieprecyzyjności dopuszczalna jest też niekompletność i niepewność.

Zagadnienie to jest istotne nie tylko z teoretycznego punktu widzenia. Miary podobieństwa zbiorów rozmytych znalazły również zastosowanie w rozwiązywaniu wielu problemów praktycznych takich, jak: klasyfikacja, wspomaganie decyzji czy przetwarzanie obrazów. Uwzględnienie niepewności danych jest kluczowe dla dalszego rozwoju tych zastosowań.

Rozprawa dotyczy problemu mierzenia podobieństwa obiektów w sytuacji, gdy częściowa i niepewna wiedza na ich temat jest reprezentowana przez przedziałowe zbiory rozmyte. Na podstawie dokonanego w niniejszej rozprawie przeglądu literatury oraz porównania obecnych podejść do mierzenia podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych zauważono, że znane miary podobieństwa nie nadają się do mierzenia podobieństwa w takiej sytuacji. Okazuje się, że aby możliwe było pełne uwzględnienie niekompletności danych konieczne jest wyrażenie podobieństwa przy pomocy przedziału. Podjęto zatem zadanie stworzenia nowej, przedziałowej miary, która sprostałaby stawianym kryteriom. Dla realizacji tego celu w niniejszej rozprawie zbudowano teorię niezbędną do poprawnego modelowania przedziałowego podobieństwa. Sformułowane zostały podstawowe własności, jakie w takiej sytuacji powinna spełniać miara podobieństwa, a następnie

zapropozowano metodę konstrukcji nieskończenie wielu takich miar. Metoda ta pozwala na skonstruowanie nowej miary na podstawie miary podobieństwa zbiorów rozmytych, o ile ta spełnia pewne warunki. Zbadano problem efektywnego obliczania nowych miar uzyskanych tą metodą. Szczególną uwagę poświęcono uogólnionej wersji indeksu Jaccarda – najpowszechniej stosowanej mierze podobieństwa zbiorów rozmytych.

Motywacją dla podjęcia tego tematu badań był problem diagnostyki różnicowej guzów jajnika, gdzie niekompletność i niepewność danych jest nieunikniona. W dużym uproszczeniu jest to zagadnienie klasyfikacji, stąd przeprowadzona analiza i część zaprezentowanych wyników dotyczy bezpośrednio tego problemu. Klasyfikacja w oparciu o dane niekompletne jest wciąż mało zbadana. Znane klasyfikatory wymagają kompletnego opisu obiektów. Stąd dostępne jest wiele metod uzupełniania, bądź usuwania niekompletnych instancji. Co jednak zrobić w zastosowaniach takich, jak diagnostyka medyczna, gdzie takie podejście jest niedopuszczalne? W niniejszej rozprawie zaproponowano dwie metody klasyfikacji umożliwiające pełne wsparcie dla danych niepewnych zarówno na etapie budowy klasyfikatora, jak i jego stosowania. Do ich konstrukcji potrzebne są miary podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych posiadające własności, które umożliwiają odpowiednie modelowanie danych niekompletnych.

Badania prowadzone były równoległe z rozwojem inteligentnego systemu wspomagania diagnostyki guzów jajnika – OvaExpert. Dzięki czemu możliwe było sprawdzenie efektywności opracowanych metod klasyfikacji w praktyce na rzeczywistych danych medycznych.

Pierwszy rozdział ma charakter wprowadzający i dotyczy wybranych pojęć i własności z zakresu operacji triangularnych, zbiorów rozmytych, przedziałowych zbiorów rozmytych oraz teorii ich mocy skalarnej.

Rozdział drugi rozpoczyna się obszerną dyskusją nad zagadnieniem modelowania niepewności za pomocą zbiorów rozmytych oraz interpretacją i znaczeniem podobieństwa w tym problemie. Następnie dokonano przeglądu własności (aksjomatów) związanych z pojęciem miary podobieństwa zbiorów rozmytych oraz przedziałowych zbiorów rozmytych proponowanych przez różnych autorów. Podano przykłady ilustrujące poszczególne własności i poddano je analizie. Według wiedzy autora niniejszej pracy, jest to pierwsze tak obszerne i szczegółowe zestawienie własności miar podobieństwa. Ostatni podrozdział zawiera przegląd najczęściej używanych miar podobieństwa.

W rozdziale trzecim zawarte są główne wyniki rozprawy. Poświęcony jest on podobieństwu przedziałowych zbiorów rozmytych, obarczonych niepewnością epistemiczną. Wprowadzono w nim pojęcie epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych, a następnie przedstawiono własności, jakie powinna spełniać *miara podobieństwa uwzględniająca niepewność*. Zbadano zależności pomiędzy poszczególnymi własnościami, jak również własnościami przedstawionymi w rozdziale drugim. Zaproponowano metodę konstrukcji *miar podobieństwa uwzględniających niepewność*, opartą na reprezentacji Wavy-Slice. Szczególna uwaga została poświęcona uogólnionej wersji indeksu Jaccarda – najpopularniejszej mierze podobieństwa zbiorów rozmytych. W przedostatnim podrozdziale pokazano, że miarę tę można sprowadzić do uogólnionej przedziałowej mocy względnej. Stąd końcowy podrozdział poświęcony jest problemowi jej wyliczenia. Dzięki przedstawionej analizie porównawczej znanych algorytmów dla dwóch przypadków szczególnych, zaproponowano efektywne algorytmy umożliwiające rozwiązanie problemu w ogólności.

Ostatni rozdział rozprawy poświęcony jest zastosowaniom praktycznym przedstawionych

wyników. W pierwszym podrozdziale zaproponowano dwa klasyfikatory, umożliwiające wykorzystanie danych niepewnych, oba oparte na *miarach podobieństwa uwzględniających niepewność*. Dalsza część rozdziału poświęcona jest wykazaniu skuteczności tych metod w różnych rzeczywistych problemach klasyfikacji danych. Drugi podrozdział przedstawia rezultaty uzyskane przez zaproponowane metody na zbiorze danych *dyslexic*, pochodzącym z repozytorium KEEL i opisującym wyniki badań psychologicznych dzieci podejrzanych o problemy z uczeniem. Porównanie otrzymanej skuteczności klasyfikacji z innymi klasyfikatorami pozwala stwierdzić wysoką jakość zaproponowanych metod.

Rozdział czwarty zwieńczony jest opisem zastosowania w rzeczywistym problemie medycznym – diagnostyce różnicowej guzów jajnika. W dwóch przedstawionych scenariuszach klasyfikacji zaproponowane metody uzyskały bardzo wysoką skuteczność, znacznie przewyższając obecnie znane i wykorzystywane modele diagnostyczne. Przedstawiono również zarys systemu *OvaExpert*, w którym jeden z opracowanych klasyfikatorów znalazł zastosowanie jako moduł diagnostyczny.

Rozprawę zamyka dodatek, w którym zebrano oznaczenia wykorzystywane w całej rozprawie.

Podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził w 1965 roku Zadeh [112]. Dynamiczny rozwój, początkowo niezauważanej teorii, nastąpił dopiero w drugiej połowie lat 70-tych, kiedy udało się rozwiązać problem sterowania piecem do wytwarzania cementu – z wykorzystaniem logiki rozmytej (Mamdani, [44]). Jednak kluczowe dla dalszego rozwoju tej dziedziny nauki okazały się spektakularne sukcesy w japońskim mieście Sendai, gdzie udało się opracować układ sterowania metrem. Dzięki zastosowaniu sterowania rozmytego możliwe było między innymi zmniejszenie czasu opóźnień oraz kosztów utrzymania metra. Dalsze badania spowodowały zastosowanie logiki rozmytej nie tylko w urządzeniach przemysłowych, lecz również codziennego użytku.

Niniejszy rozdział zawiera podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych. Przedstawiono w nim operacje triangularne, stanowiące podstawę do określenia podstawowych działań na zbiorach rozmytych oraz przedziałowych zbiorach rozmytych. Przedstawiono również pojęcie mocy skalarnej zbiorów rozmytych.

1.1 Operacje triangularne

Pojęcie normy triangularnej (normy trójkątnej, t -normy) zostało wprowadzone podczas badań nad przestrzeniami metrycznymi, w których odległość zdefiniowana jest za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa [48]. Zostały one wykorzystane do uogólnienia nierówności trójkąta, czemu zawdzięczają swoją nazwę. Pierwotnie pojęcie t -normy obejmowało znacznie szerszą rodzinę funkcji. Współczesny zbiór aksjomatów został podany przez Schweizera i Sklara [67]. Obecny stan wiedzy w tej dziedzinie przedstawiony został w monografii [36].

Definicja 1.1. Funkcję $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ taką, że dla każdego $a, b, c \in [0, 1]$:

$$\begin{array}{ll}
 T(a, 1) = 1 & \text{(element neutralny 1),} \\
 a \leq b \Rightarrow T(a, c) \leq T(b, c) & \text{(monotoniczność),} \\
 T(a, b) = T(b, a) & \text{(przemienność),} \\
 T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c) & \text{(łączność)}
 \end{array}$$

nazywamy t -normą. Mówimy, że t -norma jest ciągła, gdy jest ciągła ze względu na obie zmienne.

Definicja 1.2. Funkcję $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ taką, że dla każdego $a, b, c \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} S(a, 0) &= a && \text{(element neutralny 0),} \\ a \leq b &\Rightarrow S(a, c) \leq S(b, c) && \text{(monotoniczność),} \\ S(a, b) &= S(b, a) && \text{(przemienność),} \\ S(a, S(b, c)) &= S(S(a, b), c) && \text{(łączność)} \end{aligned}$$

nazywamy *t-konormą*. Mówimy, że t-konorma jest ciągła, gdy jest ciągła ze względu na obie zmienne.

T-normy i t-konormy nazywane będą łącznie operacjami triangularnymi. Do podstawowych takich operacji należą:

- t-operacje drastyczne

$$T_D(a, b) = \begin{cases} \min(a, b), & \text{jeśli } \max(a, b) = 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$S_D(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) & \text{jeśli } \min(a, b) = 0, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (1.2)$$

- t-norma minimum i t-konorma maksimum:

$$T_{\min}(a, b) = \min(a, b), \quad (1.3)$$

$$S_{\max}(a, b) = \max(a, b), \quad (1.4)$$

- t-operacje algebraiczne:

$$T_{\text{prod}}(a, b) = ab, \quad (1.5)$$

$$S_{\text{prod}}(a, b) = a + b - ab, \quad (1.6)$$

- t-operacje Łukasiewicza:

$$T_{\text{Łuk}}(a, b) = \max(0, a + b - 1), \quad (1.7)$$

$$S_{\text{Łuk}}(a, b) = \min(a + b, 1), \quad (1.8)$$

- rodzina t-operacji Schweizera-Sklara:

$$T_{\lambda}^{SS}(a, b) = \begin{cases} T_{\min}(a, b), & \text{jeśli } \lambda = -\infty \\ T_{\text{prod}}(a, b), & \text{jeśli } \lambda = 0 \\ T_D(a, b), & \text{jeśli } \lambda = \infty \\ (\max(0, x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1))^{\frac{1}{\lambda}}, & \text{jeśli } -\infty < \lambda < 0 \text{ lub } 0 < \lambda < \infty \end{cases}, \quad (1.9)$$

$$S_{\lambda}^{SS}(a, b) = \begin{cases} S_{\max}(a, b), & \text{jeśli } \lambda = -\infty \\ S_{\text{prod}}(a, b), & \text{jeśli } \lambda = 0 \\ S_D(a, b), & \text{jeśli } \lambda = \infty \\ 1 - (\max(0, (1-x)^{\lambda} + (1-y)^{\lambda} - 1))^{\frac{1}{\lambda}}, & \text{jeśli } -\infty < \lambda < 0 \text{ lub } 0 < \lambda < \infty \end{cases}. \quad (1.10)$$

Bezpośrednimi konsekwencjami definicji t -normy i t -konormy są następujące własności.

Twierdzenie 1.1. *Dla każdej t -normy T oraz t -konormy S , oraz dowolnych $a, b \in [0, 1]$ zachodzi:*

1. $T(a, 0) = 0$ oraz $S(a, 1) = 1$,
2. $T(a, b) \leq T_{\min}(a, b) \leq a, b \leq S_{\max}(a, b) \leq S(a, b)$,
3. $T(a, a) \leq a \leq S(a, a)$,
4. $T(a, b) = 1 \iff a = b = 1$ oraz $S(a, b) = 0 \iff a = b = 0$,
5. Funkcje $T^* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ oraz $S^* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowane jako

$$T^*(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b) \quad (1.11)$$

$$S^*(a, b) = 1 - S(1 - a, 1 - b) \quad (1.12)$$

są odpowiednio t -konormą oraz t -normą.

1.2 Zbiory rozmyte

Podstawowym pojęciem opisywanej teorii jest zbiór rozmyty, wprowadzony przez Zadeha w 1965 roku [112]. Stanowi on obiekt teorii mnogości utożsamiany z funkcją $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$, nazywaną uogólnioną funkcją charakterystyczną lub funkcją przynależności. Istotą koncepcji zbioru rozmytego jest stopniowanie należenia do niego elementów; wartość $\mu_A(u)$ rozumie się jako stopień przynależności (należenia) elementu u do zbioru rozmytego A . Ponadto, dowolny zbiór $X \subset U$ można utożsamić z jego funkcją charakterystyczną $\mathbb{1}_X$, a co za tym idzie ze zbiorem rozmytym. Często do określenia zbiorów rozmytych wykorzystuje się notację singletonową. Zapis

$$A = a_1/u_1 + a_2/u_2 + \dots + a_k/u_k \quad (1.13)$$

oznacza zbiór rozmyty taki, że $\mu_A(u_i) = a_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ oraz $\mu_A(u) = 0$ dla pozostałych $u \in U$. Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych w danym uniwersum U oznaczamy przez $\mathcal{FS}(U)$.

Dwa zbiory rozmyte są równe, gdy równe są ich funkcje przynależności. Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B , co oznaczamy przez $A \subset B$, gdy dla każdego $u \in U$

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u). \quad (1.14)$$

W klasycznej teorii mnogości podstawowe operacje na zbiorach to: dopełnienie, suma oraz iloczyn. W przypadku zbiorów rozmytych nie są to jednak operacje określone w jeden możliwy sposób.

Definicja 1.3. Dopełnienie zbioru rozmytego A określa się jako zbiór rozmyty A^c , którego funkcja przynależności dana jest w następujący sposób:

$$\forall_{u \in U} \mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u). \quad (1.15)$$

Definicja 1.4. Dla dowolnej t-normy T oraz t-konormy S , poprzez sumę dwóch zbiorów rozmytych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ rozumie się zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności ma postać

$$\forall_{u \in U} \mu_{A \cup_S B}(u) = S(\mu_A(u), \mu_B(u)), \quad (1.16)$$

natomiast funkcja przynależności przekroju (iloczynu) zbiorów rozmytych określona jest następująco:

$$\forall_{u \in U} \mu_{A \cap_T B}(u) = T(\mu_A(u), \mu_B(u)). \quad (1.17)$$

Standardowe operacje sumy i przekroju, określone za pomocą t-konormy maksimum oraz t-normy minimum, będą często dla uproszczenia oznaczane przez \cup oraz \cap .

W dalszej części pracy wykorzystywana będzie też następująca operacja na zbiorze rozmytym.

Definicja 1.5. Załóżmy, że uniwersum U jest skończone. Niech $\pi : U \rightarrow U$ będzie dowolną permutacją U . Dla dowolnego zbioru rozmytego $A \in \mathcal{FS}(U)$ przez A^π oznaczmy zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności μ_{A^π} jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\forall_{u \in U} \mu_{A^\pi}(u) = \mu_A(\pi(u)). \quad (1.18)$$

1.2.1 Moc skalarna zbioru rozmytego

Moc zbioru to jedna z podstawowych jego charakterystyk. Podczas, gdy w klasycznej teorii mnogości element należy do zbioru albo nie i nie ma problemu co zliczać, w przypadku zbiorów rozmytych, kwestia liczości znacznie się komplikuje. W literaturze można znaleźć wiele podejść do tego zagadnienia. Dominującą rolę zdają się odgrywać moce skalarne oraz wektorowe zbiorów rozmytych [107]. W tej rozprawie wykorzystane zostaną moce skalarne.

Definicja 1.6. Funkcję $\sigma : \mathcal{FS}(U) \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy mocą skalarną zbioru rozmytego, gdy spełnia następujące warunki:

1. dla dowolnego $u \in U$ zachodzi $\sigma(1/u) = 1$,
2. dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$ oraz dowolnych $0 \leq a \leq b \leq 1$ zachodzi $\sigma(a/u_1) \leq \sigma(b/u_2)$,
3. dla dowolnych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ zachodzi $A \cap B = \mathbf{1}_\emptyset \implies \sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

Twierdzenie 1.2 (Wygralak, [107]). *Funkcja $\sigma : \mathcal{FS}(U) \rightarrow [0, \infty)$ jest mocą skalarną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemalejąca funkcja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dla której $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, taka że dla dowolnego zbioru rozmytego A*

$$\sigma(A) = \sum_{u \in U} f(\mu_A(x)). \quad (1.19)$$

Funkcję f nazywamy wówczas funkcją wzorcową (wagową).

Stąd w dalszej części rozprawy będziemy stosowali oznaczenie σ_f dla podkreślenia jaka funkcja wagowa została użyta do konstrukcji skalarniej mocy zbiorów rozmytych. Standardową funkcją wagową jest funkcja identycznościowa f_{id} . Zamiast $\sigma_{f_{\text{id}}}(A)$ często dla uproszczenia stosowane będzie oznaczenie $|A|$.

Moc względna zbioru rozmytego reprezentuje proporcję elementów zbioru rozmytego, które należą jednocześnie do innego zbioru rozmytego. Stąd też mówi się o mocy A względem B i oznacza ją przez $\sigma_{f,T}(A|B)$:

$$\sigma_{f,T}(A|B) = \frac{\sigma_f(A \cap_T B)}{\sigma_f(B)}. \quad (1.20)$$

1.3 Przedziałowe zbiory rozmyte

Przedziałowe zbiory rozmyte (IVFS), wprowadzone przez Zadeha w 1975 roku [114], stanowią uogólnienie podstawowych zbiorów rozmytych poprzez wprowadzenie dodatkowego stopnia nieprecyzyjności. Funkcja przynależności przedziałowego zbioru rozmytego określona jest jako $\mu_{\hat{A}} : U \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$, gdzie $\mathcal{I}([0, 1])$ to zbiór wszystkich domkniętych przedziałów zawartych w $[0, 1]$. W ten sposób stopień przynależności dowolnego elementu, $\mu_{\hat{A}}(u) = [\underline{\mu}_{\hat{A}}(u), \bar{\mu}_{\hat{A}}(u)]$, nie musi być pojedynczą liczbą, lecz może być przedziałem. Podobnie jak dla zbiorów rozmytych, również tu możliwe jest wyrażenie dowolnego zbioru $X \subset U$ za pomocą przedziałowego zbioru rozmytego $\hat{\mathbb{1}}_X$. Ponadto, dowolnemu zbiorowi rozmytemu $A \in \mathcal{FS}(U)$ można przypisać przedziałowy zbiór rozmyty $IVFS(A)$ określony w następujący sposób:

$$\mu_{IVFS(A)}(u) = [\mu_A(u), \mu_A(u)]. \quad (1.21)$$

Często do określenia przedziałowych zbiorów rozmytych wykorzystuje się notację singletonową. Zapis

$$\hat{A} = [a_1, \bar{a}_1]/u_1 + [a_2, \bar{a}_2]/u_2 + \cdots + [a_k, \bar{a}_k]/u_k \quad (1.22)$$

oznacza przedziałowy zbiór rozmyty taki, że $\mu_{\hat{A}}(u_i) = [a_i, \bar{a}_i]$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ oraz $\mu_{\hat{A}}(u) = [0, 0]$ dla pozostałych $u \in U$. Rodzinę wszystkich przedziałowych zbiorów rozmytych w danym uniwersum U oznaczamy przez $\mathcal{IVFS}(U)$.

Dwa przedziałowe zbiory rozmyte są równe, gdy równe są ich funkcje przynależności. Przedziałowy zbiór rozmyty \hat{A} zawiera się w przedziałowym zbiorze rozmytym \hat{B} , co oznaczamy przez $\hat{A} \subset \hat{B}$, gdy dla każdego $u \in U$

$$\bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq \underline{\mu}_{\hat{B}}(u). \quad (1.23)$$

Definicja 1.7. Niech \hat{A} będzie przedziałowym zbiorem rozmytym. Dowolny zbiór rozmyty A taki, że dla każdego $u \in U$

$$\mu_A(u) \in \mu_{\hat{A}}(u) = [\underline{\mu}_{\hat{A}}(u), \bar{\mu}_{\hat{A}}(u)], \quad (1.24)$$

nazywamy zanurzonym w \hat{A} , i oznaczamy przez $A \in_E \hat{A}$.

Definicja 1.8. Załóżmy, że uniwersum U jest skończone. Niech $\pi : U \rightarrow U$ będzie dowolna permutacją U . Dla dowolnego przedziałowego zbioru rozmytego $\hat{A} \in \mathcal{IVFS}(U)$ przez \hat{A}^π oznaczmy przedziałowy zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności $\mu_{\hat{A}^\pi}$ jest zdefiniowana w następujący sposób

$$\mu_{\hat{A}^\pi}(x) = \mu_{\hat{A}}(\pi(x)). \quad (1.25)$$

Dla uniknięcia nieporozumień w całej rozprawie przyjęto następującą konwencję: wielkie końcowe litery alfabetu oznaczają zbiory w klasycznym sensie, podczas gdy początkowe – zbiory rozmyte. Przedziałowe zbiory rozmyte oznaczane są przez wielkie początkowe litery alfabetu, lecz dla odróżnienia oznaczone są daszkiem.

Niepewność danych oraz podobieństwo zbiorów rozmytych

W przeciągu ostatnich pięćdziesięciu lat rozwoju teorii zbiorów rozmytych powstało bardzo wiele prac na temat podobieństwa. Wiele z nich motywowane było potrzebą rozwiązania konkretnego problemu praktycznego. Stąd też metody skuteczne w jednym zastosowaniu, okazywały się całkowicie nieprzydatne w innych. Dla dokładnego zrozumienia charakteru podobieństwa konieczne jest poznanie semantyki zbioru rozmytego. Nie bez znaczenia jest też zrozumienie wpływu niepewności.

Niniejszy rozdział ma za zadanie omówić wspomniane zagadnienia oraz przedstawić znane podejścia do problemu miar podobieństwa zbiorów rozmytych oraz przedziałowych zbiorów rozmytych.

2.1 Niepewność danych

Potrzeba modelowania informacji nieprecyzyjnej i niekompletnej dała początek teorii zbiorów rozmytych oraz wielu jej uogólnieniom. Klasyczne zbiory rozmyte pozwalają modelować nieprecyzyjne stwierdzenia poprzez dopuszczenie stopni prawdziwości zdania innych niż tylko prawda lub fałsz. Jednakże jest to niewystarczające w przypadku danych niekompletnych (znanych częściowo), kiedy to dokładny stopień prawdziwości nie może zostać określony. W takim przypadku mamy do czynienia z niepewnością informacji.

Bez wątplenia niepewność jest powszechna w świecie rzeczywistym, a co za tym idzie nie może być ignorowana w praktycznych zastosowaniach. Zjawisko to jest badane od wielu lat i zasadniczo można wyróżnić dwa podejścia do jego rozumienia [20] – ontyczne i epistemiczne. W obu przypadkach niepewny obiekt jest najczęściej opisany za pomocą zbioru X zawierającego wszystkie możliwe jego reprezentacje. Taki sposób opisu w praktyce często prowadzi do niejednoznaczności. W pewnych przypadkach zbiór X reprezentuje kolekcję elementów, które składają się na większą całość. Każdy element w zbiorze X stanowi równoprawny komponent precyzyjnie zdefiniowanej większej całości (obiektu złożonego). Przykładowo obszar w obrazie cyfrowym składa się z (jest sumą) sąsiadujących pikseli.

Z drugiej strony możliwe jest również rozumienie zbioru X jako opisu niekompletnej informacji. W takim przypadku zbiór X traktowany jest jako dysjunkcja wielu możliwych reprezentacji

pewnego obiektu, spośród których tylko jedna jest właściwa. Przykładowo, próbując odgadnąć wiek konkretnej osoby, możemy podać przedział liczbowy, który według naszego stanu wiedzy z pewnością obejmuje prawdziwą wartość. Taki przedział jest subiektywny (zależy od wiedzy zgadującego) i nie znajduje bezpośredniego odwzorowania w rzeczywistości pomimo, że dotyczy pewnej informacji na jej temat.

Zbiory opisujące kolekcję elementów pewnego złożonego obiektu (pierwsze podejście) są nazywane zbiorami koniunktywnymi [20]. Odpowiadają one ontycznemu rozumieniu niepewności (zbiory ontyczne), gdzie wszystkie elementy zbioru X są jednakowo dopuszczalne (możliwe, pożądane). Zbiory opisujące niekompletną informację (podejście drugie) są nazywane dysjunktywnymi. Odpowiadają one epistemicznemu rozumieniu niepewności (zbiory epistemiczne), gdzie spośród wielu alternatywnych reprezentacji tylko jedna jest prawdziwa, lecz bez dodatkowej wiedzy nie jest możliwe określenie która.

Różnice pomiędzy oboma podejściami do rozumienia niepewności ilustruje następujący przykład [124]. Rozważmy pojęcie miesięcznej płacy na pewnym stanowisku, która może zostać opisana za pomocą przedziału $X = [4000 \text{ zł}, 6000 \text{ zł}]$. Jeśli przedział ten opisuje widełki płacowe dla danego stanowiska, to mamy do czynienia z niepewnością typu ontycznego. Każdy element z przedziału (każda kwota) stanowi komponent większej całości (zakresu płac). Z drugiej strony, przedział X może opisywać naszą wiedzę na temat wynagrodzenia pewnej konkretnej osoby. W tej sytuacji powinien być on rozumiany w sposób epistemiczny, gdyż wynagrodzenie tej osoby określone jest precyzyjnie, a przedział jest tylko wynikiem naszego braku wiedzy.

Co ważne, oba podejścia wymagają różnych metod przetwarzania w celu uchwycenia charakteru niepewności. Przykładowo, sposób łączenia informacji niepewnej jest uzależniony od typu niepewności. Połączenie dwóch (ontycznych) zbiorów opisujących obszary na obrazie cyfrowym z pewnością wykonane zostanie przy użyciu operacji sumy zbiorów. Z drugiej strony, jeśli dysponujemy dwoma (epistemicznymi) przedziałami opisującymi wiek tej samej osoby, to do połączenia tych dwóch informacji zostanie wykorzystana operacja przekroju zbiorów.

2.2 Semantyka zbiorów rozmytych a niepewność danych

Zbiory rozmyte zdefiniowane przez Zadeha są pojęciem bardzo ogólnym. Stąd mogą być wykorzystywane w wielu różnych celach, a znaczenie funkcji przynależności często zależy od kontekstu, w jakim jest ona wykorzystywana.

Można wyróżnić trzy główne typy zadań, w których zbiory rozmyte znajdują zastosowanie [19]: klasyfikacja, wspomaganie podejmowania decyzji oraz rozumowanie przybliżone. Oczywiście, podział ten nie jest wyczerpujący, jednakże można zauważyć, że większość zadań realizowanych przy użyciu zbiorów rozmytych obejmuje jedno lub kilka z powyższych. Każdemu z wymienionych zadań odpowiada inna semantyka stopnia przynależności do zbioru rozmytego [19].

1. *Stopień podobieństwa.* W klasyfikacji i analizie danych stopień przynależności $\mu_A(u)$ określa bliskość (podobieństwo) u do pewnych ustalonych prototypów dla zbioru A . Podejście to zostało zastosowane po raz pierwszy przez Bellmanna et al. w kontekście klasyfikacji [6]. Znajduje ono również zastosowanie w innych zadaniach, gdzie konieczne jest wyabstrahowanie reprezentacji danych poprzez zastosowanie podobieństwa pomiędzy obiektami.

semantyka	interpretacja	
	stopnia przynależności	zbioru rozmytego
1	stopień podobieństwa obiektu u do prototypu	kolekcja obiektów porównywanych względem pewnego prototypu
2	preferencja lub koszt wyboru obiektu u	kolekcja bardziej lub mniej preferowanych obiektów
3	stopień, w jakim możliwe jest, że u jest wartością pewnej zmiennej X	rozkład możliwości (patrz [18])

Tablica 2.1: Podsumowanie interpretacji stopnia przynależności i zbioru rozmytego w zależności od semantyki.

Jest też powszechnie wykorzystywane w sterowaniu rozmytym, gdzie stopnie podobieństwa pomiędzy bieżącą sytuacją i prototypami zdefiniowanymi w warunkach reguł rozmytych, stanowią podstawę do interpolacji pomiędzy następnikami reguł.

2. *Stopień preferencji.* W problemie wspomagania decyzji zbiór rozmyty A reprezentuje zbiór bardziej lub mniej preferowanych obiektów (lub wartości pewnej zmiennej), a stopień przynależności $\mu_A(u)$ – intensywność preferencji wobec obiektu u (stopień dopuszczalności danej wartości zmiennej).
3. *Stopień niepewności.* Ta interpretacja stopnia przynależności została zaproponowana przez Zadeha [57] podczas tworzenia teorii możliwości i teorii rozumowania przybliżonego [115]. Stopień przynależności $\mu_A(u)$ określa, w jakim stopniu możliwe jest, że u jest wartością pewnej zmiennej Z , biorąc pod uwagę, że jedyne, co wiadomo to to, że “ Z jest równe A ”. Więcej informacji na temat teorii możliwości można znaleźć w monografii [18].

Interpretacja stopnia przynależności i samego zbioru rozmytego we wszystkich trzech semantykach podsumowana jest w Tabeli 2.1.

Następujący przykład ilustruje zbiory rozmyte o różnych semantykach [19]. Rozważmy problem klasyfikacji samochodów o różnych znanych wymiarach do następujących klas: *duże*, *średnie* i *małe*. Łatwo można zaobserwować, że przynależność do poszczególnych klas jest stopniowa. Aby wyliczyć stopień przynależności każdego samochodu do klasy *duże*, można wybrać prototypowy „duży” samochód i określić miarę odległości pomiędzy rozważanymi samochodami i wybranym prototypem. Im większa odległość pomiędzy rozważanym samochodem a prototypem, tym mniej są one podobne. W takiej sytuacji stopień przynależności danego samochodu do klasy *duże* jest malejącą funkcją jego odległości od prototypu. Z drugiej strony, ktoś może być zainteresowany zakupem dużego samochodu. W takiej sytuacji stopień przynależności danego samochodu do klasy *duże* odzwierciedla zadowolenie z danego samochodu według kryterium rozmiaru (stopień przynależności określa preferencje).

Zupełnie inna sytuacja ma miejsce, gdy ktoś powie: „właśnie widziałam(em) duży samochód”. W tym przypadku stopień przynależności danego samochodu do klasy *duże* określa, na ile możliwe jest, że to jest taki sam samochód, jak ten zauważony. Gdy stopień przynależności jest duży, nasza wiedza na temat tego, jaki samochód został zauważony wciąż może być mała, szczególnie, gdy jest wiele różnych możliwości. Jednakże, gdy stopień przynależności jest mały,

typ niepewności	semantyka		
	stopień podobieństwa	stopień preferencji	stopień niepewności
brak (zbiór rozmyty)	nie dotyczy	nie dotyczy	brak wiedzy
ontyczny	obiekt	obiekt	obiekt i brak wiedzy
epistemiczny	brak wiedzy	brak wiedzy	brak wiedzy (wyższego poziomu)

Tablica 2.2: Źródła niepewności w poszczególnych semantykach funkcji przynależności przedziałowego zbioru rozmytego w zależności od typu niepewności.

możemy z dużą pewnością wykluczyć dany samochód z dalszych rozważań. W tym przypadku stopień przynależności odnosi się do niepewności, a nie – jak poprzednio – do preferencji. Innym przykładem zbioru rozmytego o tej semantyce jest wartość zmiennej *odczuwalna temperatura w pomieszczeniu* określana przez obserwatora bez użycia termometru. W takiej sytuacji stopień przynależności danej temperatury do zbioru rozmytego będącego wartością zmiennej określa, na ile obserwator jest pewien, że dana liczba jest rzeczywistą temperaturą w pomieszczeniu.

Następnym krokiem jest interpretacja funkcji przynależności przedziałowych zbiorów rozmytych w kontekście typu niepewności, jaki reprezentują. Ponieważ przedziałowe zbiory rozmyte są rozszerzeniem klasycznych zbiorów rozmytych, uzasadnione wydaje się wykorzystanie wprowadzonych trzech semantyk, lecz w kontekście ontycznej i epistemicznej niepewności informacji.

Wartością funkcji przynależności przedziałowego zbioru rozmytego \hat{A} jest przedział $\mu_{\hat{A}}(u) = [a, b]$. Zależnie od kontekstu może być on interpretowany w sposób ontyczny lub epistemiczny. W dalszej części podrozdziału jego znaczenie zostanie opisane w obu interpretacjach dla każdej z semantyk. Podsumowanie dyskusji znajduje się w Tabeli 2.2.

W ontycznej interpretacji przedziału wszystkie jego elementy są równie ważne i stanowią element większej całości. Przedziałowość (niepewność) w tym przypadku nie wynika z niewiedzy, tylko z samego charakteru zjawiska lub modelowanego obiektu (źródłem niepewności jest sam obiekt). Stąd, gdy przedział będący wartością funkcji przynależności reprezentuje stopień podobieństwa do pewnego prototypu, należy go interpretować jako zakres wszystkich poprawnych stopni podobieństwa. Jako przykład posłuży nam ponownie pojęcie miesięcznej płacy na danym stanowisku, a prototypem będzie *wysoka pensja*. Przedział określający podobieństwo obiektu (pensji) i prototypu w tym przypadku wynika z charakteru obiektu – miesięczna pensja na danym stanowisku zależy od wielu czynników i nie jest jednakowa dla wszystkich pracowników, stąd pensja niektórych może być bardziej podobna do *wysokiej pensji*, podczas gdy innych nie.

Podobnie sytuacja wygląda, gdy stopień przynależności reprezentuje preferencję wobec lub dopuszczalność danego obiektu. Wróćmy do przykładu temperatury w pomieszczeniu, tym razem w sytuacji, gdy znajduje się w nim grzejnik, a pomiar dokonywany jest dokładnym termometrem. Za sprawą grzejnika temperatura w pomieszczeniu nie jest jednolita, dlatego pomiar dokonywany jest w dwóch miejscach (przy grzejniku i w przeciwległej części pomieszczenia). W takiej sytuacji preferencja, czy temperatura w pomieszczeniu jest odpowiednia, może zostać wyrażona za pomocą przedziału.

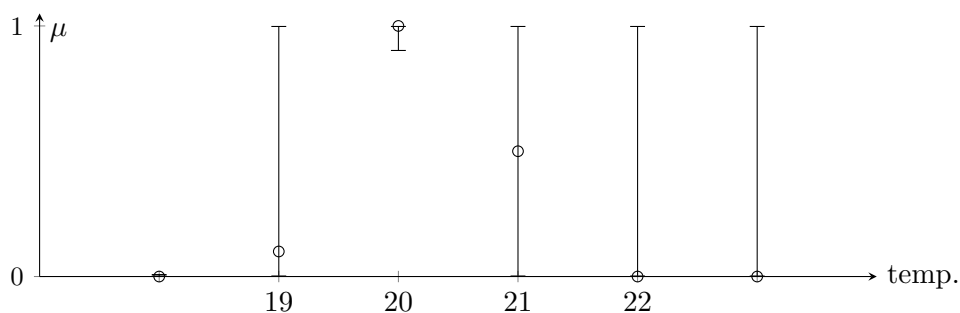
Trzecia semantyka sama w sobie zakłada niepewność wynikającą z niewiedzy obserwatora (teoria możliwości), stąd w połączeniu z niepewnością wynikającą z samego obiektu uzyskujemy możliwość modelowania obu typów niepewności. Wróćmy do przykładu temperatury w pomieszczeniu z grzejnikiem, lecz tym razem obserwator nie dysponuje termometrem. Bada on subiektywnie odczuwalną temperaturę w dwóch miejscach pomieszczenia. W takiej sytuacji mamy do czynienia z dwoma źródłami niepewności: temperatura w pomieszczeniu sama w sobie nie jest jednorodna (może być określona za pomocą przedziału), jednocześnie obserwator nie dokonuje precyzyjnego pomiaru temperatury (określa jedynie, jakie temperatury są możliwe i w jakim stopniu jest o tym przekonany). Otrzymany rozkład możliwości określony jest za pomocą przedziałów. Stopień przynależności danej temperatury $\mu_{\hat{A}}(u) = [a, b]$ należy interpretować jako zbiór stopni przekonania do tych przedziałów temperatury odczuwanych przez obserwatora, które zawierają temperaturę u .

Epistemiczna interpretacja przedziału, w przeciwieństwie do ontycznej, zakłada, że nie ma on swojego odzwierciedlenia w rzeczywistości, lecz reprezentuje tylko subiektywny i niekompletny stan wiedzy na temat pewnego precyzyjnego faktu (źródłem niepewności jest brak wiedzy). Stąd, gdy przedział będący wartością funkcji przynależności reprezentuje stopień podobieństwa do pewnego prototypu, należy go interpretować jako zbiór tych wszystkich stopni podobieństwa, które są dopuszczalne według aktualnego stanu wiedzy. Patrząc z innej perspektywy, są to wszystkie te stopnie podobieństwa, których obecna wiedza nie pozwala wykluczyć. Tylko jeden stopień podobieństwa jest zgodny z rzeczywistością, jednak bez dodatkowych informacji nie można określić który. Przykładowo, taka sytuacja ma miejsce, gdy chcemy porównać zarobki konkretnej osoby z prototypem *wysoka pensja*, wiedząc tylko, że pensja konkretnej osoby mieści się w pewnym przedziale, ale nie znając dokładnej wartości. Przedział określający podobieństwo obiektu (pensji) i prototypu w tym przypadku wynika z braku wiedzy – nie znamy dokładnych zarobków danej osoby, stąd nie możemy dokładnie określić stopnia podobieństwa do prototypu *wysoka pensja*.

W przypadku przedziału reprezentującego stopień preferencji rozumowanie jest analogiczne. Nie znając dokładnie obiektu, wobec którego preferencje mamy określić, najłatwiej posłużyć się przedziałem obejmującym preferencje wobec wszystkich możliwości.

Ostatnia semantyka stopnia przynależności uwzględnia brak wiedzy co do wartości pewnej zmiennej (niepewność epistemiczna). Jeśli stopień przekonania co do prawdziwości wartości danej zmiennej zastąpimy epistemicznym przedziałem, otrzymamy model o znacznie większym potencjale modelowania niepewności. Przedział reprezentuje niepewność wyższego poziomu, pozwalając w ten sposób uchwycić informację dotyczącą niewiedzy na temat stopnia dopuszczalności danej wartości pewnej zmiennej. Za przykład posłuży ponownie zmienna *temperatura w pomieszczeniu* mierzona bez użycia termometru. Według obserwatora to, że temperatura w pomieszczeniu wynosi 19°C jest możliwe w stopniu 0.1, 20°C w stopniu 1 i 21°C w stopniu 0.5. Inne temperatury są niemożliwe (mają stopień możliwości 0). Mamy tu do czynienia z klasycznym rozkładem możliwości. Obserwator następnie przekazuje tę informację drugiej osobie, wyrażając ją w następujący sposób:

„Temperatura w pomieszczeniu z pewnością nie jest niższa niż 19°C . Bardzo możliwe, że wynosi ona 20°C .”



Rysunek 2.1: Przykład epistemicznego przedziałowego zbioru rozmytego reprezentującego niekompletną informację na temat ustalonego rozkładu możliwości. Oryginalny rozkład możliwości przedstawiony jest za pomocą punktów na wykresie.

W tym przypadku to, co wiemy na temat temperatury może zostać zapisane przy użyciu przedziałów. Każda temperatura poniżej 19°C nie jest możliwa, stąd ich stopień możliwości to $[0, 0]$. Temperatura 19°C jest możliwa, ale nie wiemy w jakim stopniu, stąd otrzymujemy przedział $[0, 1]$. Wartość 20°C została bezpośrednio zasugerowana jako bardzo możliwa, stąd wiemy, że jej możliwość jest wysoka, co można przykładowo modelować jako $[0.9, 1]$. Na temat pozostałych wartości nie wiemy nic, stąd ponownie otrzymujemy przedział $[0, 1]$. Widzimy, że podczas przekazywania informacji doszło do istotnych strat. Przykład ten jest zilustrowany na Rysunku 2.1.

Jak można zauważyć, pierwsze dwie semantyki funkcji przynależności zachowują się bardzo podobnie zarówno bez, jak i przy uwzględnieniu obu typów niepewności. Stąd w dalszej części pracy często będą one opisywane łącznie.

2.3 Podobieństwo i jego natura

W tej sekcji przedstawione zostaną matematyczne techniki określania podobieństwa, bazujące na klasycznej teorii mnogości¹. Analiza podobieństwa dwóch obiektów jest podstawowym narzędziem w biologii, taksonomii, psychologii i stanowi podstawę do rozumowania przez analogię. Problem przypisania unikalnego znaczenia pojęciu podobieństwa został podjęty przez psychologa Gregsona [26] oraz Tverskeigo [93]. Pojęcie podobieństwa nie jest tak proste, jak się może wydawać, gdyż składa się na nie kilka różnych procesów i operacji [63].

Zazwyczaj przyjmuje się, że określenie różnic lub odmienności pomiędzy obiektami jest równoważne określeniu ich podobieństwa [39, 49]. Jeśli podobieństwo dwóch obiektów A i B oznaczymy przez $s(A, B)$, to ich odmiennosc równa jest $1 - s(A, B)$. Niektóre badania wykazały jednak, że człowiek inaczej postrzega każde z tych pojęć. Podczas określania podobieństwa, większy nacisk kładziony jest na cechy wspólne obiektów, podczas gdy do określania odmienności wykorzystywane są głównie różnice pomiędzy obiektami [95]. W teorii zbiorów rozmytych najczęściej jednak przyjmuje się założenie o wzajemnej odwrotności relacji podobieństwa i odmienności [56, 118].

Powszechnie uważa się, że podobieństwo jest symetryczne. W języku miar podobieństwa oznacza to, że

$$s(A, B) = s(B, A). \quad (2.1)$$

¹Dyskusja nad naturą podobieństwa została zaczerpnięta z pracy [120]

Formalne badania wykazały, że podobieństwo nie zawsze może być traktowane jako relacja symetryczna [94]. Ma to miejsce w sytuacji, gdy jeden z obiektów staje się obiektem odniesienia. Jawne określenie odniesienia może nastąpić przykładowo poprzez sformułowanie zadania ("Proszę porównać obiekt A z obiektem B "). Odniesienie może zostać również określone niejawnie. W takiej sytuacji najczęściej obiektem odniesienia staje się obiekt bardziej poprawny, lepszy albo o bardziej złożonej strukturze. Przykładowo, osoba ma za zadanie porównać jakość dwóch obrazów przedstawiających tę samą scenę. Obraz o lepszej jakości staje się *implicite* obiektem odniesienia. Z tego powodu, założenie symetrii zostało osłabione w miarach wykorzystywanych w niektórych dziedzinach, takich jak psychologia bodźców.

Jak wykazały badania psychologiczne, podobieństwo może być zależne od kontekstu, w jakim jest ono oceniane [26, 91]. W określeniu $s(A, B)$ biorą udział nie tylko cechy obiektów A i B , ale również cała charakterystyka otoczenia. Choć wydaje się to niepoprawne, na oszacowanie podobieństwa dwóch obiektów wpływ mają również cechy innych badanych obiektów. Podczas oceniania podobieństwa wielu obiektów przez człowieka, na istotność poszczególnych cech obiektu wpływa również zmienność ich wartości. Charakter tego wpływu może być jednak różny w zależności od tego, jaki jest cel porównania. W problemach klasyfikacji obiektów wykazano, że rzadkie wartości cechy są bardziej istotne [70], podczas gdy na potrzeby taksonomii korzystniej jest przyjąć przeciwne założenie [23].

Oczywiście powyżej wspomniane problemy nie muszą występować we wszystkich obszarach badawczych, w których podobieństwo pomiędzy obiektami wykorzystywane jest do analizy informacji i wspomaganie podejmowania decyzji. Oczekiwane własności podobieństwa zależą od natury i charakteru porównywanych obiektów, jak również od ich reprezentacji. Przykładowo zbiory rozmyte reprezentujące rozkłady możliwości (semantyka stopnia niepewności) z pewnością wymagają innych metod porównywania niż stopnie preferencji. Wobec niemożności założenia nawet tak podstawowych własności, jak symetria, nie powinno nikogo dziwić, że badacze opracowali bardzo wiele różnych aksjomatyzacji tego pojęcia, często ściśle dopasowanych do konkretnego problemu lub semantyki. Proponowane definicje często nie są zgodne, a wręcz wykluczają się. Co więcej, wciąż brakuje przystępnych wskazań, jakie własności są pożądane w różnych problemach.

2.4 Podobieństwo zbiorów rozmytych a niepewność

W Podrozdziale 2.2 przedstawione zostały podstawowe interpretacje stopnia przynależności do zbioru rozmytego, bez oraz z uwzględnieniem obu typów niepewności. W niniejszym podrozdziale przedstawiony zostanie wpływ niepewności na podobieństwo i sposób jego określenia.

Pierwszy przypadek to podobieństwo zbiorów rozmytych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$. Oryginalna definicja równości zbiorów podana przez Zadeha mówi, że zbiory rozmyte A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{u \in U} \mu_A(u) = \mu_B(u). \quad (2.2)$$

Oczywiście miara podobieństwa musi być mniej restrykcyjna, aby podobieństwo mogło przyjmować dowolne wartości pomiędzy pełnym podobieństwem a całkowitym jego brakiem.

Definicja 2.1. Miarę podobieństwa zbiorów rozmytych definiuje się jako funkcję określoną na pewnym podzbiornie $\mathbb{E} \subset \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U)$ [14, 113]

$$s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

taką że większe jej wartości wskazują większe podobieństwo wejściowych zbiorów rozmytych. Ponadto zbiór musi \mathbb{E} spełniać następujące warunki:

1. dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$, jeśli $(A, B) \in \mathbb{E}$, to również $(B, A) \in \mathbb{E}$,
2. dla każdego zbioru rozmytego $A \in \mathcal{FS}(U)$ zachodzi $(A, \mathbb{1}_U) \in \mathbb{E}$.

W przypadku, gdy $\mathbb{E} = \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U)$, wszystkie zbiory rozmyte są porównywalne przez daną miarę podobieństwa. Taka sytuacja nie zawsze ma jednak miejsce, gdyż niektóre standardowe miary podobieństwa nie są określone dla pewnych par zbiorów rozmytych (patrz Podrozdział 2.6).

Stopień podobieństwa dwóch zbiorów rozmytych określony jest za pomocą pojedynczej liczby. Podejście to jest w pełni uzasadnione w pierwszych dwóch semantykach. Obiekty reprezentowane przez zbiory rozmyte są w pełni znane, a co za tym idzie ich podobieństwo może być dokładnie obliczone. Jednakże, w przypadku semantyki stopnia niepewności, reprezentowany jest rozkład możliwości, czyli zbiór bardziej lub mniej możliwych wartości pewnej zmiennej. W takiej sytuacji mamy do czynienia z niepewnością, a co za tym idzie dokładne określenie stopnia podobieństwa może okazać się niemożliwe. Miara podobieństwa w takiej sytuacji mogłaby zostać określona w następujący sposób: $s' : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$. Takie miary podobieństwa wciąż są jednak mało zbadane. Nawet w badaniach nad podobieństwem rozkładów możliwości najczęściej przyjmuje się, że stopień podobieństwa określony jest za pomocą pojedynczej liczby [32].

Zdefiniowanie podobieństwa dla przedziałowych zbiorów rozmytych jest trudniejsze. Tym razem miara podobieństwa określona jest na zbiorze $\hat{\mathbb{E}} \subset \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U)$. Podobnie jak dla zbiorów rozmytych, musi on spełniać pewne podstawowe warunki:

1. dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$, jeśli $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, to również $(\hat{B}, \hat{A}) \in \hat{\mathbb{E}}$,
2. dla każdego przedziałowego zbioru rozmytego $\hat{A} \in \mathcal{IVFS}(U)$ zachodzi $(\hat{A}, \hat{\mathbb{1}}_U) \in \hat{\mathbb{E}}$,
3. dla dowolnych $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$, $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych zbiorów rozmytych $A \in_E \hat{A}$, $B \in_E \hat{B}$ zachodzi

$$(IVFS(A), IVFS(B)) \in \hat{\mathbb{E}}. \quad (2.4)$$

Naturalnie pojawiają się dwie możliwości zdefiniowania takiej miary:

$$s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.5)$$

oraz

$$\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Pierwsze podejście zakłada precyzyjny stopień podobieństwa, drugie dopuszcza wiele wartości. Poniżej pokazane zostanie, że oba typy miar podobieństwa znajdują zastosowanie do innych typów danych.

Rozważmy dwa jednoelementowe przedziałowe zbiory rozmyte takie, że $\mu_{\hat{A}}(u) = \mu_{\hat{B}}(u) = [a, b]$. Niech \hat{A} i \hat{B} niosą informacje o niepewności typu ontycznego. W takim przypadku te przedziałowe zbiory rozmyte są dokładnymi reprezentacjami pewnych złożonych obiektów, które z natury są niepewne (przedziałowe). Podobieństwo pomiędzy tymi obiektami można wyrazić dokładnie za pomocą pojedynczej liczby. Stąd w tej sytuacji można korzystać z podobieństwa zdefiniowanego w (2.5). Ponieważ $\mu_{\hat{A}} = \mu_{\hat{B}}$, więc otrzymujemy $s(\hat{A}, \hat{B}) = 1$.

W przypadku, gdy \hat{A} i \hat{B} są niepewnymi (epistemicznymi) reprezentacjami obiektów, interpretacja jest zupełnie inna. To, że $\mu_{\hat{A}} = \mu_{\hat{B}}$ oznacza jedynie, że epistemiczne reprezentacje tych obiektów są jednakowe, czyli wiedza na ich temat jest jednakowa. Nie można jednak na tej podstawie wnioskować o podobieństwie obiektów (przykładowo, trudno powiedzieć, że dwa obiekty, o których nic nie wiemy, są podobne). W tej sytuacji znacznie bardziej odpowiednia wydaje się być druga definicja podana w (2.6). Określenie wartości podobieństwa za pomocą przedziału pozwala na uchwycenie niepewności epistemicznej (niewiedzy) zawartej w przedziałowych zbiorach rozmytych. W ten sposób otrzymamy $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = [c, 1]$, gdzie $0 \leq c < 1$ w zależności od tego, jak określone zostało podobieństwo.

Dalsza część rozdziału poświęcona jest podobieństwu zbiorów rozmytych oraz ontycznych przedziałowych zbiorów rozmytych, określone zgodnie z (2.5). Problemowi podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych określone zgodnie z (2.6), poświęcony został następny rozdział.

2.5 Formalne podejście do problemu podobieństwa zbiorów rozmytych

Już od samego początku teorii zbiorów rozmytych trwają badania nad pojęciem równości i podobieństwa. Doprowadziły one do powstania wielu różnych formalnych jego definicji. W następującym podrozdziale przedstawione zostaną najczęściej postulowane własności, jakie powinny spełniać miary podobieństwa zbiorów rozmytych oraz wybranych ich rozszerzeń (w szczególności przedziałowych zbiorów rozmytych). Własności postulowane dla różnych rozszerzeń zbiorów rozmytych często uogólniają te proponowane w klasycznej teorii. Zbadane zostaną zależności pomiędzy pierwotnymi własnościami a ich uogólnieniami, ze szczególnym uwzględnieniem celu i kryteriów, którymi kierowano się podczas ich tworzenia. Uogólnione własności zostaną zinterpretowane i zilustrowane.

2.5.1 Własności miar podobieństwa zbiorów rozmytych

Aksjomatykę miar podobieństwa dla klasycznych zbiorów rozmytych można uznać za dobrze zbadaną i ustabilizowaną. Jedną z pierwszych prac w tym zakresie jest praca Xuechenga z 1992 roku [111]. Autor podaje w niej pięć warunków, jakie powinna spełniać miara podobieństwa, mianowicie własności G2, S1*, S2, S3 oraz S4 (patrz dalej). Trochę inny zestaw aksjomatów podany został w pracy [43]. Warunek S4 zastąpiono jego silniejszą wersją S4*, ponadto wymagane są również własności G1* oraz S5. Inne podejście do podobieństwa zaproponowane jest w pracy [32]. Celem badań było zdefiniowanie warunków, jakie musi spełniać miara podobieństwa dla rozkładów możliwości reprezentowanych za pomocą zbiorów rozmytych. Jest to jedna z pierwszych prób

określenia miar podobieństwa tylko dla konkretnej, pojedynczej semantyki zbiorów rozmytych. Zaproponowano tam zestaw niezbędnych oraz pożądaných własności. Obowiązkowe są ponownie własności $G1^*$, $G2$, $S3$ oraz $S4$. Osłabiono warunek $S1^*$, zastępując go przez $S1$ oraz dodano wymóg posiadania własności $G3$. Dodatkowo zasugerowano, że pożądane są również własności $S1^*$ -war oraz $S6$, a także silniejsze wersje własności $S2$ i $S5$, mianowicie $S2^*$ i $S5^*$.

W dalszej części wszystkie własności zostaną zdefiniowane oraz omówione. Dla przypomnienia, przez miarę podobieństwa w tej sekcji rozumie się funkcję $s : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$, gdzie $\mathbb{E} \subset \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U)$ (patrz (2.3)). Aby zwiększyć czytelność i ułatwić porównanie niektórych warunków, przyjęto i rozszerzono nazewnictwo zaproponowane przez Couso et al. [12]. Gwiazdka w nazwie własności oznacza „silniejszy niż”, a minus „słabszy niż”. Notacja i sposób sformułowania niektórych własności został również dopasowany tak, aby osiągnąć większą czytelność.

Następujące dwie własności są bardzo ważne. Pierwsza z nich wymaga, aby miara podobieństwa była ograniczona z dołu i góry. Jako zbiór wartości można wybrać dowolny domknięty przedział liczbowy, jednak w praktyce najczęściej wykorzystywany jest przedział $[0, 1]$. Druga własność wymaga, aby miara podobieństwa była symetryczna, co wynika bezpośrednio z charakteru pojęcia podobieństwa (równości) obiektów.

Własność (G1). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność G1, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$ zachodzi

$$0 \leq s(A, B) \leq 1. \quad (2.7)$$

Obserwacja 2.1. Miarę podobieństwa posiadającą tę własność można określić jako funkcję $s : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$. Wszystkie rozważane w dalszej części pracy miary podobieństwa posiadają własność G1, stąd często przyjmowana będzie właśnie ta definicja.

Własność (G2). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność G2, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$, zachodzi

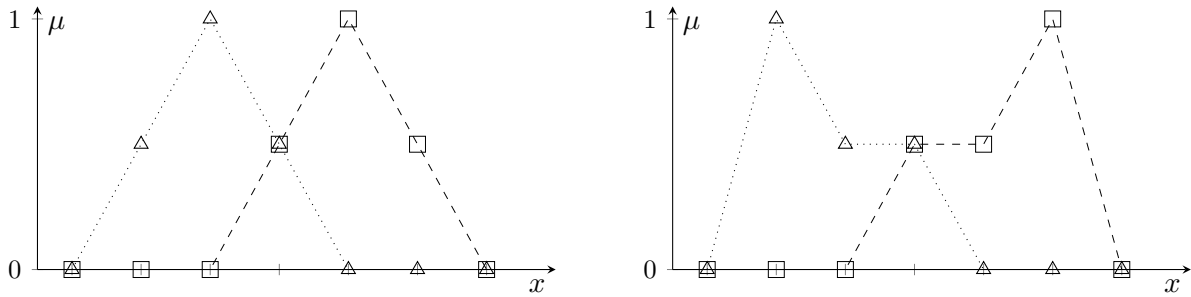
$$s(A, B) = s(B, A). \quad (2.8)$$

Istnieją również silniejsze warianty warunku G1, w których postuluje się, aby oprócz samej ograniczoności miary podobieństwa istniały również zbiory rozmyte (pewnego typu), dla których osiągnięta jest wartość 1.

Własność (G1*). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $G1^*$, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$ zachodzi

$$0 \leq s(A, B) \leq 1 \quad (2.9)$$

oraz istnieje para $(C, D) \in \mathbb{E}$ taka, że $s(C, D) = 1$.



Rysunek 2.2: Zbiory rozmyte $A, B \in \mathcal{FS}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ ilustrujące własność G3. Po lewej wykres funkcji przynależności zbiorów rozmytych A i B . Po prawej ich odpowiedników A^π i B^π dla pewnej permutacji π . Jeśli miara podobieństwa spełnia warunek G3, to $s(A, B) = s(A^\pi, B^\pi)$.

Własność (G1).** Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność G1**, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$ zachodzi

$$0 \leq s(A, B) \leq 1 \quad (2.10)$$

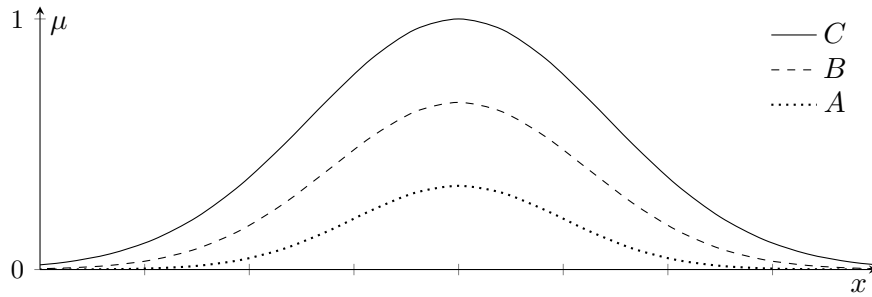
oraz istnieją zbiory $X, Y \subset U$ takie, że $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y) \in \mathbb{E}$ oraz $s(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y) = 1$.

Następna własność zdecydowanie wymaga komentarza, gdyż nie jest ona często spotykana. Co więcej, łatwo można zauważyć, że większość miar podobieństwa posiada ją mimo tego, że najczęściej nie jest ona wymagana. Podstawowa idea tej własności mówi, że miara podobieństwa jest określona tylko przez stopnie przynależności, bez względu na to, do jakiego elementu uniwersum są one przypisane. Fakt ten został zobrazowany na Rysunku 2.2. Ma to szczególne znaczenie, gdy stopnie przynależności rozważanych zbiorów rozmytych są interpretowane jako stopień spełnienia pewnej własności lub nasycenia cechy (semantyka stopnia podobieństwa oraz preferencji). Jeśli własności (cechy) nie są ze sobą powiązane kolejnością, to oczekivalibyśmy, że podobieństwo nie jest zależne od kolejności, w jakiej własności (cechy) są rozważane. Odmienne sytuacja wygląda, gdy elementy uniwersum są silnie powiązane kolejnością, co ma miejsce np. w ilościowej teorii możliwości (semantyka stopnia niepewności). W takim przypadku rozsądnym może być przyjęcie założenia przeciwnego do G3.

Własność 2.1 (G3). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność G3, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$, zachodzi $(A^\pi, B^\pi) \in \mathbb{E}$ oraz

$$s(A, B) = s(A^\pi, B^\pi). \quad (2.11)$$

Własności S1* i S2 to podstawowe warunki monotoniczności ze względu na zawieranie. Jeśli mamy trzy zbiory rozmyte $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że $A \subset B \subset C$, to dla dowolnego elementu uniwersum $x \in U$ zarówno stopnie przynależności $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(x)$, jak i $\mu_B(x)$ oraz $\mu_C(x)$ są sobie „bliższe” niż $\mu_A(x)$ i $\mu_C(x)$. Funkcja przynależności zbioru rozmytego B rozdziela A i C , stąd nie jest możliwe, aby A i C były bardziej podobne niż A i B oraz B i C . Sytuacja ta zobrazowana jest na Rysunku 2.3. Należy zauważyć, że zawieranie zbiorów rozmytych pełni w tej definicji funkcję czysto techniczną – gwarantuje odpowiednie uporządkowanie funkcji przynależności. Z tego powodu nie zawsze sens ma głębsze jego interpretowanie czy uogólnianie.



Rysunek 2.3: Zbiory rozmyte $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że $A \subset B \subset C$, ilustrujące własności $S1^*$ i $S2$.

Własność 2.2 ($S1^*$). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $S1^*$, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, C) \in \mathbb{E}$, $(A, B) \in \mathbb{E}$ oraz $A \subset B \subset C$, zachodzi

$$s(A, C) \leq s(A, B). \quad (2.12)$$

Własność 2.3 ($S2$). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $S2$, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, C) \in \mathbb{E}$, $(B, C) \in \mathbb{E}$ oraz $A \subset B \subset C$, zachodzi

$$s(A, C) \leq s(B, C). \quad (2.13)$$

Xuecheng zauważył, że jednoczesne spełnienie warunków $S1^*$ oraz $S2$ jest równoważne spełnieniu następującego warunku [111].

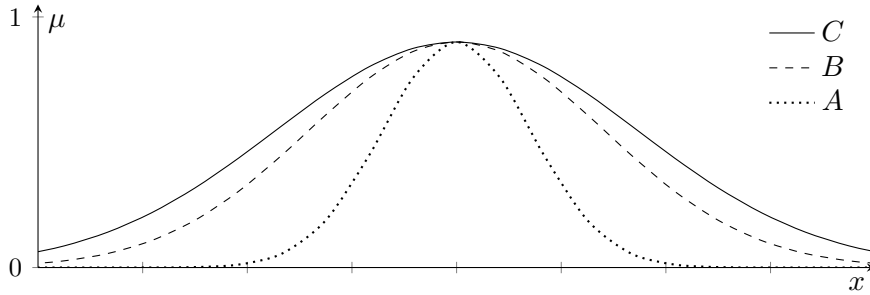
Własność 2.4 ($S1^* \& S2$). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada jednocześnie własności $S1^*$ oraz $S2$, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C, D \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, D) \in \mathbb{E}$, $(B, C) \in \mathbb{E}$ oraz $A \subset B \subset C \subset D$, zachodzi

$$s(A, D) \leq s(B, C). \quad (2.14)$$

Nie wszystkie definicje podobieństwa wykorzystują warunki $S1^*$ i $S2$. Autorzy często postulują w swoich pracach warunki silniejsze lub słabsze. Poniżej przedstawione zostały najczęściej wykorzystywane.

Własność 2.5 ($S1^*$ -war). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $S1^*$ -war, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, C) \in \mathbb{E}$, $(A, B) \in \mathbb{E}$ oraz $A \subsetneq B \subsetneq C$, zachodzi

$$s(A, C) < s(A, B). \quad (2.15)$$



Rysunek 2.4: Zbiory rozmyte spełniające założenia własności S1.

Jest to nierównoważny wariant warunku S1*, który nie jest ani słabszy, ani silniejszy od oryginalnego. Różnica polega na wyłączeniu przypadku, gdy zbiory rozmyte są równe i zastosowaniu ostrej nierówności.

Następna własność stanowi osłabienie S1*. Sformułowanie nierówności pozostaje bez zmian, zawężona zostaje natomiast rodzina zbiorów rozmytych spełniających założenie.

Własność 2.6 (S1). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność S1, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, C) \in \mathbb{E}$, $(A, B) \in \mathbb{E}$, $A \subset B \subset C$ oraz $\max_{u \in U} \mu_A(u) = \max_{u \in U} \mu_B(u) = \max_{u \in U} \mu_C(u)$, zachodzi

$$s(A, C) \leq s(A, B). \quad (2.16)$$

W tej postaci odpowiednia nierówność musi być spełniona, ale tylko dla zbiorów, które oprócz tego, że zawierają się w sobie, muszą być zgodne w przynajmniej jednym punkcie, co pokazuje poniższy lemat.

Lemat 2.2. Dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $\max_{u \in U} \mu_A(u) = \max_{u \in U} \mu_B(u)$ oraz $A \subset B$, istnieje $u_0 \in U$ takie, że

$$\max_{u \in U} \mu_A(u) = \mu_A(u_0) = \mu_B(u_0) = \max_{u \in U} \mu_B(u) \quad (2.17)$$

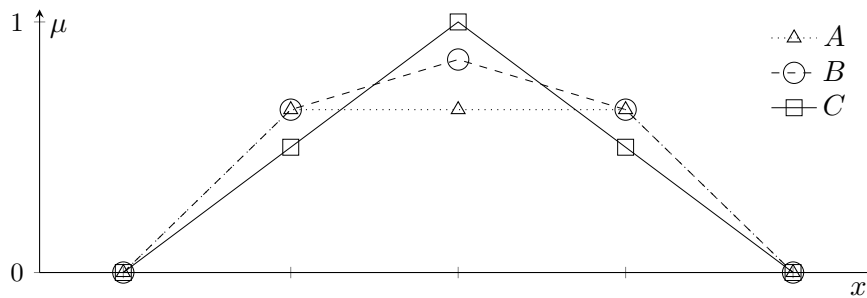
Dowód. Niech $A \subset B$ oraz $\max_{u \in U} \mu_A(u) = \max_{u \in U} \mu_B(u)$. Przyjmijmy, iż u_0 jest takie, że $\max_{u \in U} \mu_A(u) = \mu_A(u_0)$. Wtedy mamy $\mu_A(u_0) \leq \mu_B(u_0)$. Oczywiście $\mu_B(u_0) \leq \max_{u \in U} \mu_B(u)$, a stąd

$$\max_{u \in U} \mu_A(u) = \mu_A(u_0) \leq \mu_B(u_0) \leq \max_{u \in U} \mu_B(u). \quad (2.18)$$

Ponieważ $\max_{u \in U} \mu_A(u) = \max_{u \in U} \mu_B(u)$, więc symbole \leq można zastąpić przez $=$. \square

Stąd równość największych stopni przynależności rzeczywiście oznacza istnienie punktu, w którym wszystkie trzy zbiory rozmyte przyjmują tę samą maksymalną wartość. Sytuacja ta zilustrowana jest na Rysunku 2.4.

Kolejna własność powstała poprzez wzmocnienie warunku S2. Aby zinterpretować jej znaczenie, rozważmy dwa źródła informacji A i C . Załóżmy, że nie są one zgodne dla pewnego u_0 . Załóżmy, że źródło A zmienia zdanie i określa stopień przynależności $\mu_A(u_0)$ tak, aby był on bliższy wartości $\mu_C(u_0)$ (przykładowo A mogło zostać przekonane przez argumentację C)



Rysunek 2.5: Zbiory rozmyte ilustrujące własność $S2^*$. Jeśli miara podobieństwa spełnia $S2^*$, to $s(A, C) < s(B, C)$.

tworząc w ten sposób źródło B . W takiej sytuacji (przedstawionej na Rysunku 2.5) podobieństwo pomiędzy B i C powinno być większe niż pomiędzy A i C [32]. Formalnie warunek ten może zostać zapisany w następujący sposób.

Własność 2.7 ($S2^*$). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $S2^*$, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B, C \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $(A, C) \in \mathbb{E}$, $(B, C) \in \mathbb{E}$ oraz

$$\mu_A(u_0) < \mu_B(u_0) \leq \mu_C(u_0) \text{ dla pewnego } u_0 \in U \quad (2.19)$$

oraz

$$\mu_B(u) = \mu_A(u) \text{ dla każdego } u \in U \text{ takiego, że } u \neq u_0, \quad (2.20)$$

zachodzi

$$s(A, C) < s(B, C). \quad (2.21)$$

W pracy Couso et al. [12] pokazano, że $S2^*$ pociąga $S2$.

Własność $S3$ wymaga, aby zbiory rozmyte reprezentujące kompletnie sprzeczną informację były maksymalnie niepodobne. W przypadku zbiorów rozmytych dopełnienie nie zawsze w pełni wyklucza oryginalny zbiór. Ma to miejsce tylko w przypadku klasycznych zbiorów. Tę obserwację realizuje następujący warunek.

Własność 2.8 ($S3$). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ posiada własność $S3$, jeśli dla dowolnego zbioru $X \subset U$ takiego, że $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) \in \mathbb{E}$, zachodzi

$$s(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) = 0. \quad (2.22)$$

Własność $S4$ wywodzi się z obserwacji, że dwa identyczne zbiory rozmyte powinny być w pełni podobne. Jest to najczęściej wyrażane za pomocą warunku

$$\forall_{A \in \mathcal{FS}(U)} s(A, A) = 1.$$

Dla lepszego ukazania zależności pomiędzy różnymi definicjami podobieństwa warunek ten został zapisany w następującej postaci.

Własność 2.9 (S4). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność S4, jeśli dla dowolnego zbioru rozmytego takiego, że $(C, C) \in \mathbb{E}$, zachodzi

$$s(C, C) = \max_{(A, B) \in \mathbb{E}} s(A, B). \quad (2.23)$$

S4 w połączeniu z G1* gwarantują, że $S(A, A) = 1$. Jak zostanie pokazane w dalszej części pracy, oddzielenie tej własności ma również znaczenie w przypadku miar podobieństwa dla przedziałowych zbiorów rozmytych.

Silniejszy warunek S4* zakłada, że największa wartość podobieństwa (najczęściej jest to 1) przyjmowana może być tylko w przypadku porównywania dwóch identycznych zbiorów rozmytych.

Własność 2.10 (S4*). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność S4*, jeśli dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(C, D) \in \mathbb{E}$, zachodzi

$$C = D \iff s(C, D) = \max_{(A, B) \in \mathbb{E}} s(A, B). \quad (2.24)$$

Można również rozważać osłabienie S4 wymagając, aby wartość maksymalna musiała być przyjmowana tylko dla zbiorów w klasycznym sensie.

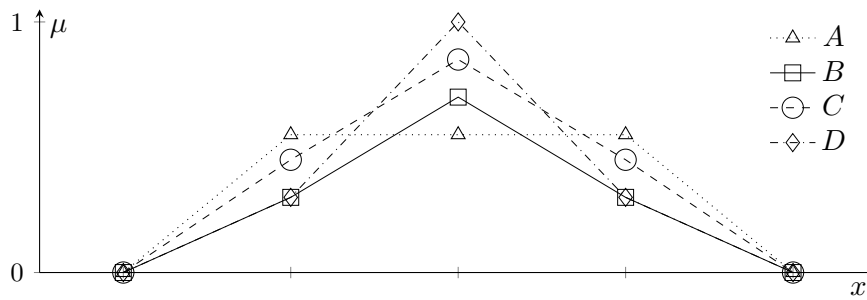
Własność 2.11 (S4-). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność S4-, jeśli dla dowolnego zbioru $X \subset U$ takiego, że $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) \in \mathbb{E}$, zachodzi

$$s(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) = \max_{(A, B) \in \mathbb{E}} s(A, B). \quad (2.25)$$

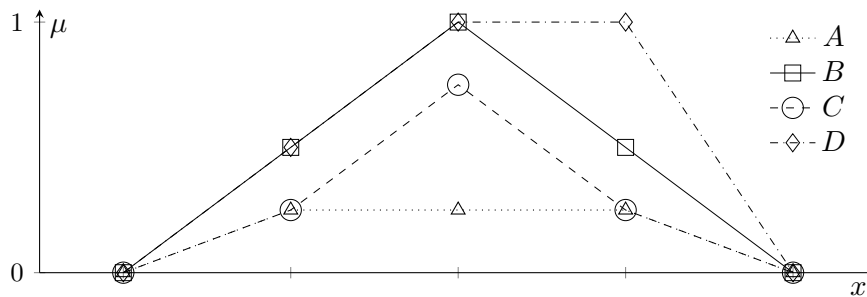
Następny warunek formalizuje obserwację, że dwa zbiory rozmyte są całkowicie niepodobne tylko wtedy, gdy są one rozłączne. Zbiory rozmyte, które nie są rozłączne, posiadają wspólne elementy o dodatnim stopniu przynależności i z tego powodu ich podobieństwo powinno być większe od 0.

Własność 2.12 (S5). Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ posiada własność S5, gdy dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}$, jeśli $s(A, B) = 0$, to $\sigma(A \cap B) = 0$.

Własność S5* swoje źródło bierze, podobnie jak S2*, z sytuacji istnienia dwóch źródeł informacji, które nie są zgodne. Tym razem nie ma żadnych dodatkowych założeń odnośnie do samych źródeł, wiadomo jedynie, że nie są one zgodne dla pewnego $u_0 \in U$. Załóżmy, że po odkryciu konfliktu oba źródła określają nowe stopnie przynależności zwiększając pierwotne o tę samą wartość α . W takiej sytuacji (zilustrowanej na Rysunku 2.6) podobieństwo powinno wzrosnąć, jeśli zmiana ta spowoduje spadek niezgodności pomiędzy źródłami, a pozostać bez zmian w przeciwnym przypadku. Do określenia poziomu zgodności źródeł użyto w przypadku tej własności maksymalnych stopni przynależności. Takie założenie jest całkiem naturalne, gdy rozważane zbiory rozmyte reprezentują na przykład rozkłady możliwości [32].



Rysunek 2.6: Zbiory rozmyte ilustrujące własność $S5^*$.



Rysunek 2.7: Zbiory rozmyte ilustrujące własność $S6$. Jeśli miara podobieństwa spełnia $S6$, to $s(A, C) = s(B, D)$.

Własność 2.13 ($S5^*$). Niech $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ będą dowolnymi zbiorami rozmytymi takimi, że $(A, B) \in \mathbb{E}$. Niech $u_0 \in U$. Zdefiniujemy nowe zbiory rozmyte $C, D \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że

- $\forall_{x \in U, x \neq u_0} \mu_C(x) = \mu_A(x)$ oraz $\mu_D(x) = \mu_B(x)$,
- $\mu_C(u_0) = \mu_A(u_0) + \alpha$ oraz $\mu_D(u_0) = \mu_B(u_0) + \alpha$, gdzie $0 \leq \alpha \leq 1 - \max(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0))$.

Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność $S5^*$, gdy zachodzi:

$$\text{jeśli } (C, D) \in \mathbb{E} \text{ oraz } \max_{u \in U} \mu_{A \cap B}(u) = \max_{u \in U} \mu_{C \cap D}(u), \text{ to } s(A, B) = s(C, D) \quad (2.26)$$

lub

$$\text{jeśli } (C, D) \in \mathbb{E} \text{ oraz } \max_{u \in U} \mu_{A \cap B}(u) > \max_{u \in U} \mu_{C \cap D}(u), \text{ to } s(A, B) > s(C, D). \quad (2.27)$$

Ostatnia własność gwarantuje, że jednoczesna zmiana stopni przynależności w obu zbiorach rozmytych o tę samą wartość, nawet dla różnych elementów uniwersum, nie powoduje zmiany stopnia podobieństwa. Przykładowe zbiory rozmyte ilustrujące tę własność przedstawione są na Rysunku 2.7.

Własność 2.14 ($S6$). Niech $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ będą dowolnymi zbiorami rozmytymi oraz $u_0, u_1 \in U$. Dla dowolnego α takiego, że $0 \leq \alpha \leq 1 - \max(\mu_A(u_0), \mu_B(u_1))$, definiujemy nowe zbiory rozmyte $C, D \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że

- $\forall_{u \in U, u \neq u_0} \mu_C(u) = \mu_A(u)$ oraz $\mu_C(u_0) = \mu_A(u_0) + \alpha$,

- $\forall_{\substack{u \in U \\ u \neq u_1}} \mu_D(u) = \mu_A(u)$ oraz $\mu_D(u_1) = \mu_B(u_1) + \alpha$.

Miara podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność S6, gdy, koniunkcja warunków $(A, C) \in \mathbb{E}$ oraz $(B, D) \in \mathbb{E}$ implikuje $s(A, C) = s(B, D)$.

2.5.2 Własności miar podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych

Pierwsze prace na temat metod mierzenia podobieństwa pomiędzy przedziałowymi zbiorami rozmytymi zostały napisane w kontekście zbiorów mglistych (ang. Vague sets)[24], które są równoważne intuicjonistycznym zbiorom rozmytym [8]. W pracy [10] z 1995 roku zaproponowano dwie miary podobieństwa dla tych obiektów. Następnym krokiem były prace zapoczątkowane przez Szmidt i Kacprzyka nad odległością [76] oraz entropią intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova (AIFS) [77]. Pierwsze formalne podejście do problemu miar podobieństwa dla AIFS należy przypisać Dengfengowi oraz Chuntianowi [15]. Zaproponowali oni, że miara podobieństwa powinna spełniać warunki iG1*, iG2, iS1*, iS2 oraz iS4 (patrz dalej). Jako punkt wyjściowy do ich badań przyjęli oni własności postulowane dla miar podobieństwa klasycznych zbiorów rozmytych. Niedługo potem pojawiły się prace, w których zakwestionowano warunek iS4 [41, 50]. Pokazano, że jest on zbyt słaby, co prowadzi do pewnych anomalii. Zaproponowano jego silniejszą wersję – iS4*. Prace nad odległością i entropią AIFS prowadzone przez Szmidt i Kacprzyka zaowocowały zaproponowaniem nowych miar podobieństwa [75, 78]. W pracy [75] zauważono, że o ile warunki iG1*, iG2 oraz iS4* są oczywiste i nie pozostawiają wątpliwości, o tyle iS1* i iS2 nie spełniają swojej roli w przypadku AIFS.

Wszystkie dotychczas wymienione prace dotyczyły zbiorów mglistych albo intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova. Jedną z pierwszych prac postulujących warunki dla miar podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych powstała w 2006 roku. W porównaniu do postulatów Dengfenga–Chuntiana dodany został warunek iS3 [116]. Jak zauważyli sami autorzy tej pracy, wszystkie te warunki mają swoje odpowiedniki dla klasycznych zbiorów rozmytych i, co więcej, redukują się do nich, gdy są stosowane do takich zbiorów. W pracy [117] zasugerowano bardzo podobny zbiór aksjomatów, z tą różnicą, że warunek iS3 został zaostrożony do iS3*.

W dalszej części niniejszej pracy wszystkie własności zostaną zdefiniowane oraz omówione. Dla przypomnienia, przez miarę podobieństwa w tej sekcji rozumie się funkcję $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\hat{\mathbb{E}} \subset \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U)$ (patrz (2.5)). Zbadane zostaną zależności pomiędzy pierwotnymi własnościami a ich uogólnieniami, ze szczególnym uwzględnieniem celu i kryteriów, którymi kierowano się podczas ich tworzenia. Uogólnione własności zostaną zinterpretowane i zilustrowane.

Dla zwiększenia czytelności zachowane zostało nazewnictwo z poprzedniej sekcji. Mała litera „i” została dodana do nazw własności, aby odróżnić je od swoich pierwowzorów dla klasycznych zbiorów rozmytych. Podobnie jak poprzednio, gwiazdka w nazwie własności oznacza „silniejszy niż”, a minus „słabszy niż”.

Pierwsze trzy własności – iG1*, iG2 oraz iG3 – stanowią proste uogólnienia na przedziałowe zbiory rozmyte. Ograniczoność oraz symetryczność miary podobieństwa jest na tyle oczywista, że warunki te nie wzbudzają żadnych wątpliwości, niezależnie od semantyki oraz charakteru niepewności reprezentowanej przez dany przedziałowy zbiór rozmyty.

Własność 2.15 (iG1*). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iG1*, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$0 \leq s(\hat{A}, \hat{B}) \leq 1 \quad (2.28)$$

oraz istnieje para przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{C}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$ taka, że $\hat{s}(\hat{C}, \hat{D}) = 1$.

Obserwacja 2.3. Podobnie jak dla miar podobieństwa zbiorów rozmytych, również tutaj miarę podobieństwa posiadającą tę własność można określić jako funkcję $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$.

Własność 2.16 (iG2). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iG2, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$s(\hat{A}, \hat{B}) = s(\hat{B}, \hat{A}). \quad (2.29)$$

Również własność niewrażliwości na permutacje elementów uniwersum (G3) może zostać prosto przeniesiona na przedziałowe zbiory rozmyte.

Własność 2.17 (iG3). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iG3, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ zachodzi $(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz

$$s(\hat{A}, \hat{B}) = s(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi). \quad (2.30)$$

Uogólnienie kolejnych dwóch własności – S1* oraz S2 – nie jest już tak proste. Większość badaczy przyjmuje w swoich pracach następujące najprostsze uogólnienia.

Własność 2.18 (iS1*). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iS1*, jeśli dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takich, że $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$, $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $\hat{A} \subset \hat{B} \subset \hat{C}$, zachodzi

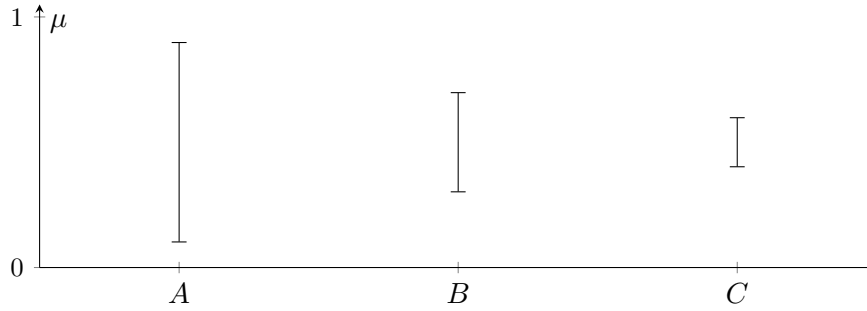
$$s(\hat{A}, \hat{C}) \leq s(\hat{A}, \hat{B}). \quad (2.31)$$

Własność 2.19 (iS2). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iS2, jeśli dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takich, że $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$, $(\hat{B}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $\hat{A} \subset \hat{B} \subset \hat{C}$, zachodzi

$$s(\hat{A}, \hat{C}) \leq s(\hat{B}, \hat{C}). \quad (2.32)$$

Szmidt w pracy [75] zauważyła, że warunek ten jest zbyt słaby, by mógł być efektywny dla intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova. Ten sam zarzut można wyrazić w języku przedziałowych zbiorów rozmytych. Podstawowy problem stanowi definicja zawierania przedziałowych zbiorów rozmytych, która wymaga, aby dla każdego $u \in U$ zachodziło

$$\underline{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq \underline{\mu}_{\hat{B}}(u) \text{ oraz } \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u). \quad (2.33)$$



Rysunek 2.8: Przykładowe jednoelementowe przedziałowe zbiory rozmyte spełniające (2.34).

Jak zostało wspomniane w poprzedniej sekcji, relacja zawierania zbiorów rozmytych pełni w warunkach S1* i S2 tylko funkcję techniczną. Stąd nic dziwnego, że przy uogólnianiu obu warunków powstały pewne problemy. Zarówno w przypadku klasycznych, jak i rozmytych zbiorów istnieją takie, co do których nie zachodzi zawieranie ani w jedną, ani w drugą stronę (nie są porównywalne przez \subset). W przypadku przedziałowych zbiorów rozmytych jest to szczególnie widoczne, gdyż bardzo łatwo skonstruować takie, które nie są porównywalne. Przykładowo weźmy dwa przedziałowe zbiory rozmyte w jednoelementowym uniwersum $U = \{u_1\}$

$$\hat{A} = [0.11, 0.4]/u_1 \text{ oraz } \hat{B} = [0.1, 0.9]/u_1.$$

Oczywiście ani $\hat{A} \subset \hat{B}$ ani $\hat{B} \subset \hat{A}$. Jednakże, bardzo niewiele brakuje aby $\hat{A} \subset \hat{B}$, przez co człowiek najprawdopodobniej skłaniałby się do przyjęcia takiego założenia. Warunki iS1* oraz iS2 wymagają, aby wszystkie trzy przedziałowe zbiory rozmyte zawierały się w sobie, przez co w ogóle nie dotyczą zbiorów nieporównywalnych. Na podobieństwo takich zbiorów nie są nałożone żadne ograniczenia, co może i prowadzi do pewnych zachowań niezgodnych z intuicją.

Innym problemem jest nieuwzględnianie przez iS1* i iS2 przedziałowych przedziałowych zbiorów rozmytych takich, że

$$\underline{\mu}_{\hat{A}}(x) \geq \underline{\mu}_{\hat{B}}(x) \geq \underline{\mu}_{\hat{C}}(x) \text{ oraz } \bar{\mu}_{\hat{A}}(x) \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(x) \leq \bar{\mu}_{\hat{C}}(x). \quad (2.34)$$

Przykładowo, niech

$$\hat{A} = [0.1, 0.9]/u_1, \hat{B} = [0.3, 0.7]/u_1 \text{ oraz } \hat{C} = [0.4, 0.6]/u_1, \quad (2.35)$$

co zostało zilustrowane na Rysunku 2.8. W takiej sytuacji, zgodnie z intuicją, powinna zachodzić nierówność analogiczna do iS1* i iS2, jednak żaden z warunków nie wprowadza takiego ograniczenia. Problem ten zostanie ponownie poruszony w następnym rozdziale (patrz własność E4).

Własność S3 zdefiniowana jest za pomocą klasycznych zbiorów, stąd jej uogólnienie jest bardzo proste.

Własność 2.20 (iS3). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow [0, 1]$ posiada własność iS3, jeśli dla dowolnego zbioru $X \subset U$ takiego, że $(\hat{\mathbb{1}}_X, \hat{\mathbb{1}}_{X^c}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$s(\hat{\mathbb{1}}_X, \hat{\mathbb{1}}_{X^c}) = 0. \quad (2.36)$$

Warunki S4 i S4* dotyczą podobieństwa identycznych zbiorów oraz maksymalnej wartości podobieństwa. Ich przeniesienie na ontyczne przedziałowe zbiory rozmyte jest bezpośrednie.

Własność 2.21 (iS4). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iS4, jeśli dla dowolnego przedziałowego zbioru rozmytego $\hat{C} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takiego, że $(\hat{C}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$s(\hat{C}, \hat{C}) = \max_{(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}} s(\hat{A}, \hat{B}). \quad (2.37)$$

Własność 2.22 (iS4*). Miara podobieństwa $s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność iS4*, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{C}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{C} = \hat{D} \iff s(\hat{C}, \hat{D}) = \max_{(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}} s(\hat{A}, \hat{B}). \quad (2.38)$$

Warunki te są często postulowane przez badaczy i w przypadku ontycznych przedziałowych zbiorów rozmytych nie ma powodu do ich kwestionowania.

2.6 Najczęściej używane miary podobieństwa zbiorów rozmytych

W literaturze można znaleźć zdecydowanie ponad sto różnych miar podobieństwa dla klasycznych jak i przedziałowych zbiorów rozmytych. Cross i Studkamp dokonali ich klasyfikacji na trzy główne rodziny w zależności od metod, jakimi zostały one uzyskane [14]. Są to miary podobieństwa oparte na teorii mnogości, odległości oraz logice. W niniejszym podrozdziale rodziny te zostaną pokrótce przedstawione wraz z wybranymi przedstawicielami.

2.6.1 Podejście oparte na teorii mnogości

Zastąpienie klasycznych operacji na zbiorach ich rozmytymi odpowiednikami, pozwala na przeniesienie znanych metod mierzenia podobieństwa klasycznych zbiorów na zbiory rozmyte [17]. Do konstrukcji sumy i przekroju można wykorzystać dowolną t-normę wraz ze sprzężoną z nią t-konormą. Należy jednak pamiętać, że znany z klasycznej teorii mnogości fakt

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \quad (2.39)$$

nie zawsze jest spełniony w przypadku rozmytym. Standardowa t-norma minimum gwarantuje spełnienie tego warunku, jednakże spośród t-norm archimedesowych zachodzi on tylko dla rodziny t-norm Franka.

Jedną z najczęściej stosowanych miar podobieństwa jest indeks Jaccarda. Jego rozszerzenie do zbiorów rozmytych nie stanowi większego problemu [42]:

$$s_{n,u,g} = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cup B)}, \text{ gdzie } g(A \cup B) \neq 0. \quad (2.40)$$

W przypadku tej miary podobieństwa mamy

$$\mathbb{E} = \{(A, B) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : g(A \cup B) \neq 0\}. \quad (2.41)$$

Jako g można przyjąć dowolną funkcję spełniającą następujące warunki:

1. $g(\mathbb{1}_\emptyset) = 0$,
2. $g(\mathbb{1}_U) = 1$,
3. jeśli $A \subset B$ to $g(A) \leq g(B)$.

Taka funkcja, nazywana *skalarnym ewaluatorem zbioru rozmytego*, pozwala na zastąpienie zbioru rozmytego pojedynczą wartością skalarną. Uogólnione skalarne moce względne [64, 107, 108] tworzą bardzo szeroką rodzinę skalarnych ewaluatorów:

$$g_f(A) = \sigma_{f,T}(A|\mathbb{1}_U) = \frac{\sigma_f(A \cap_T \mathbb{1}_U)}{\sigma_f(\mathbb{1}_U)} = \frac{\sigma_f(A)}{\sigma_f(\mathbb{1}_U)}, \quad (2.42)$$

gdzie T jest dowolną t-normą, a f funkcją wagową skalarnej mocy zbiorów rozmytych.

Inny rodzaj miar podobieństwa można uzyskać poprzez symetryczną agregację miary zawierania (oznaczonej jako Inc ; więcej informacji o miarach zawierania patrz [14])

$$s_{Inc,r}(A, B) = r(Inc(A, B), Inc(B, A)), \quad (2.43)$$

gdzie r jest dowolną symetryczną funkcją spełniającą $r(0, 0) = 0$ oraz taką, że $r(a, b) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = 1$. Miary tego typu agregują stopień zawierania A w B oraz B w A . Takie podejście zostało po raz pierwszy zaproponowane w [42].

2.6.2 Podejście oparte na odległości

Tversky zauważył, że w teoretycznych jak i doświadczalnych badaniach podobieństwa bardzo często przyjmuje się, że obiekty są dobrze reprezentowane przez punkty w pewnym układzie współrzędnych [94]. Przy takim założeniu relacja niepodobieństwa zachowuje się dokładnie jak funkcja odległości. Pomimo, że oryginalne badania dotyczyły klasycznych zbiorów, pojęcie bliskości obiektów może zostać również wykorzystane do określenia podobieństwa zbiorów rozmytych. W przypadku zbiorów rozmytych odległość, zamiast pomiędzy punktami w przestrzeni, musi zostać zdefiniowana pomiędzy funkcjami przynależności.

Pierwsze podejście uogólnia pojęcie metryki na zbiory rozmyte. Podstawowymi reprezentantami tej rodziny miar są: uogólnione metryki Minkowskiego oraz Hausdorffa. Stopień podobieństwa dwóch zbiorów może być też określony na podstawie odległości kątowej dwóch wektorów. Inne podejście zakłada powiązanie zbioru rozmytego z punktem w n -wymiarowej przestrzeni. Każdy wymiar tej przestrzeni odpowiada pewnej określonej własności/cesze zbioru.

Wykorzystanie metryk Minkowskiego Interpretując zbiór rozmyty A w skończonym uniwersum $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ jako punkt $(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), \dots, \mu_A(u_n))$ w n -wymiarowej przestrzeni, do wyznaczania odległości pomiędzy zbiorami rozmytymi można wykorzystać dowolną metrykę

$$d_r(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (2.44)$$

gdzie $r \geq 1$. Dla $r = 1$, d_r staje się metryką miejską, gdy $r = 2$ otrzymujemy metrykę Euklidesową. Dla $r = \infty$, d_r przyjmuje następującą postać:

$$d_\infty(A, B) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|, \quad (2.45)$$

zwaną metryką nieskończoności.

Odległość obiektów przyjmuje wartości odwrotne do miar podobieństwa. Stąd też, aby zdefiniować miarę podobieństwa, należy wartość odległości wcześniej znormalizować. Najczęściej wykorzystuje się następującą formułę

$$s_{d_r}(A, B) = 1 - \frac{d_r(A, B)}{|U|}. \quad (2.46)$$

Inną metodą na otrzymanie miary podobieństwa z odległości jest zastosowanie następującej transformacji [34, 60]

$$s_{d_r}(A, B) = \left(1 + \left(\frac{d_r(A, B)}{s} \right)^t \right)^{-1}. \quad (2.47)$$

Najczęściej przyjmuje się $s = t = 1$. W przypadku obu miar $\mathbb{E} = \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U)$.

Wykorzystanie odległości kątowej Miarę podobieństwa można też określić na podstawie kąta pomiędzy dwoma wektorami:

$$s_{\cos\theta}(A, B) = \frac{\sum_{u \in U} \mu_A(u) \mu_B(u)}{\sqrt{\sum_{u \in U} \mu_A(u)^2} \sqrt{\sum_{u \in U} \mu_B(u)^2}}. \quad (2.48)$$

W przypadku, gdy którykolwiek ze zbiorów rozmytych jest pusty, miara nie jest określona, stąd

$$\mathbb{E} = \{(A, B) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : A \neq \mathbf{1}_\emptyset \text{ oraz } B \neq \mathbf{1}_\emptyset\}. \quad (2.49)$$

Miara $s_{\cos\theta}(A, B)$ przyjmuje największą wartość, gdy kąt pomiędzy wektorami reprezentującymi zbiory rozmyte wynosi 90° . Ta miara podobieństwa wykorzystywana jest w przypadku, gdy szczególnie istotne jest porównanie kształtu funkcji przynależności zbiorów rozmytych. Cosinus kąta nie jest jedyną miarą kątową. W literaturze można znaleźć wiele jego modyfikacji (2.48) [33].

Wykorzystanie wektorów parametrów Podejście to zostało opracowane na potrzeby zagadnienia aproksymacji lingwistycznej. Mając dany zbiór etykiet reprezentowanych za pomocą zmiennych lingwistycznych, należy znaleźć tę, która najlepiej oddaje znaczenie nieznanego, nowego obiektu. Ze względów wydajnościowych proces ten często rozdzielany jest na dwie fazy. W pierwszej odrzucane są wszystkie etykiety, których reprezentacja jest znacząco różna od badanego obiektu. W drugiej, najbliższe etykiety porównywane są za pomocą wprowadzonych wcześniej miar podobieństwa opartych na metrykach Minkowskiego.

Porównywanie zbiorów rozmytych w pierwszej fazie odbywa się w oparciu o dowolną miarę odległości. Od poprzednio wprowadzonych metod odróżnia ją natomiast konstrukcja punktów, pomiędzy którymi odległość jest liczona. Poprzednio odległość była liczona pomiędzy wektorami składającymi się ze stopni przynależności. Przy takim podejściu wektory, a co za tym idzie wymiar przestrzeni, może stać się bardzo duży. Podejście oparte na wektorach parametrów zakłada, że reprezentacja zbioru rozmytego w przestrzeni jest znacznie prostsza – co najwyżej kilkuwymiarowa. Składowe wektora stanowią obliczane na podstawie funkcji przynależności parametry. Najczęściej wykorzystuje się parametry takie, jak: moc zbioru rozmytego, entropia, środek ciężkości (COG) czy skośność.

Przykładowo zbiory rozmyte można reprezentować w przestrzeni dwuwymiarowej (moc oraz środek ciężkości zbioru rozmytego), a do oceny ich podobieństwa wykorzystać standardową metrykę euklidesową [102]. W ten sposób miara podobieństwa przyjmuje następującą postać:

$$s(A, B) = 1 - \frac{\sqrt{(|A| - |B|)^2 + (COG(A) - COG(B))^2}}{|U|}. \quad (2.50)$$

2.6.3 Podejście oparte na logice

Miary oparte na logice [27, 28] wykorzystują interpretację funkcji przynależności zbioru rozmytego jako stopnia prawdziwości wniosku reprezentowanego przez ten zbiór rozmyty. Podstawowa metoda zakłada użycie operatora implikacji, co umożliwia konstrukcję zarówno miar zawierania, jak i podobieństwa. W klasycznej logice operator implikacji może zostać zdefiniowany na kilka równoważnych sposobów. Uogólnienie na przypadek logiki rozmytej, gdzie dopuszczane jest nieskończenie wiele stopni prawdziwości, spowodowało powstanie wielu nierównoważnych definicji tego pojęcia. Najczęściej wykorzystywanymi operatorami implikacji są S-implikacje i R-implikacje [5, 92]. Pierwszą rodzinę implikacji otrzymuje się poprzez bezpośrednie uogólnienie tautologii

$$a \Rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b. \quad (2.51)$$

S-implikacja otrzymana jest poprzez zastąpienie operatora alternatywy poprzez t-konormę

$$a \Rightarrow b = S(1 - a, b). \quad (2.52)$$

Nazwa S-implikacji pochodzi od użycia t-konormy S w jej definicji. Często S-implikacje nazywa się również silnymi implikacjami. Typową S-implikacją jest implikacja Łukasiewicza powstająca poprzez zastosowanie t-konormy Łukasiewicza

$$a \Rightarrow_{\text{Łuk}} b = \min(1, 1 - a + b). \quad (2.53)$$

R-implikacje generowane są za pomocą formuły

$$a \Rightarrow b = \sup\{x \in [0, 1] : T(a, x) \leq b\}, \quad (2.54)$$

gdzie T to t-norma. Wiele implikacji znanych z logiki nieskończenie wielowartościowej to R-implikacje. Przykładowo, zastosowanie t-normy produktowej pozwala uzyskać implikację Goguena [22, 25]

$$a \Rightarrow_G b = \begin{cases} \min(1, \frac{b}{a}), & \text{jeśli } a \neq 0, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.55)$$

Implikacja Łukasiewicza może również zostać uzyskana jako R-implikacja przy użyciu t-normy Łukasiewicza.

W celu zdefiniowania miary podobieństwa opartej na operatorze implikacji, można wykorzystać operator ko-implikacji $\Psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$\Psi(a, b) = T(a \Rightarrow b, b \Rightarrow a) \quad (2.56)$$

lub jego uogólnioną wersję [28]

$$\Psi(a, b) = \frac{T(a \Rightarrow b, b \Rightarrow a) + T(1 - a \Rightarrow 1 - b, 1 - b \Rightarrow 1 - a)}{2}. \quad (2.57)$$

Operator ko-implikacji pozwala na porównywanie poszczególnych stopni przynależności. Porównując dwa zbory rozmyte A i B otrzymamy zatem wektor postaci

$$v_{A,B} = [\Psi(\mu_A(u_1), \mu_B(u_1)), \dots, \Psi(\mu_A(u_n), \mu_B(u_n))]. \quad (2.58)$$

Aby wyliczyć miarę podobieństwa, należy go przekształcić do pojedynczej liczby rzeczywistej z przedziału $[0, 1]$. Wektor ten można w pewnym sensie traktować jako zbiór rozmyty. Dlatego też do jego agregacji można wykorzystać dowolny ewaluator skalarny.

Podobieństwo epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych

Niepewność epistemiczna występuje przede wszystkim wtedy, gdy informacje opisujące dane zjawisko są niekompletne. W takiej sytuacji spośród wielu dopuszczalnych reprezentacji tylko jedna jest prawdziwa, lecz bez dodatkowej wiedzy nie jest możliwe określenie która.

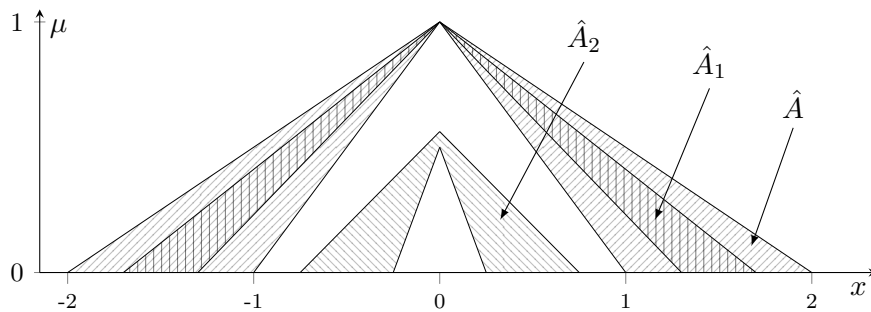
Nałożenie takiej interpretacji na zbiory ma ogromny wpływ na sposób określenia podobieństwa. Już w przypadku zwykłych przedziałów zagadnienie znacząco się komplikuje. Dla przedziałowych zbiorów rozmytych tematyka ta jest wciąż mało zbadana, a jak zauważył Dubois wymagania są często zupełnie inne od tych powszechnie przyjętych [20].

W poprzednim rozdziale przedstawiono różne warunki, jakie powinna spełniać „dobra” miara podobieństwa dla IVFS. Wiele z nich dotyczy konkretnej semantyki i kontekstu interpretacji danych. Ponadto niemal wszystkie są sprzeczne z podstawowym rozumieniem niepewności epistemicznej. Niniejszy rozdział poświęcony jest w całości problemowi modelowania podobieństwa obiektów obarczonych niepewnością epistemiczną, stąd w dalszej części rozprawy wszystkie przedziałowe zbiory rozmyte interpretowane będą jako niosące taką informację.

3.1 Epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte

W poprzednim rozdziale przedstawiono wpływ niepewności danych na interpretację przedziałowego stopnia przynależności do zbioru rozmytego. Zauważono, że w przypadku niepewności epistemicznej stopnie przynależności, a co za tym idzie całe przedziałowe zbiory rozmyte, zamiast nieść informację o świecie rzeczywistym, opisują raczej pewien stan wiedzy na jego temat. Taka interpretacja ma bezpośrednie konsekwencje dla narzędzi i metod przetwarzania przedziałowych zbiorów rozmytych. Przykładowo ich miary podobieństwa powinny być określone za pomocą przedziałów, gdyż wobec niekompletności informacji nie jest możliwe dokładne określenie stopnia podobieństwa.

Stąd aby odróżnić omawiane tutaj przedziałowe zbiory rozmyte, dla których stopień przynależności rozumiany jest jako niekompletny (epistemiczny) opis świata rzeczywistego, w niniejszej pracy wprowadzone zostaje pojęcie epistemicznego przedziałowego zbioru rozmytego (epistemicznego IVFS). Z formalnego punktu widzenia definicja IVFS oraz epistemicznych IVFS jest taka sama. Choć takie podejście może prowadzić do pewnych niejednoznaczności, wydaje się być w



Rysunek 3.1: Porównanie klasycznego pojęcia zawierania IVFS oraz zawierania stanów epistemicznych IVFS. Zachodzą następujące zależności: $\hat{A}_1 \sqsubset \hat{A}$ oraz $\hat{A}_2 \sqsubset \hat{A}$.

pełni uzasadnione. Dalsza część rozprawy w całości poświęcona jest epistemicznym przedziałowym zbiorom rozmytym.

Kluczowym pojęciem związanym z epistemicznymi przedziałowymi zbiorami rozmytymi są stany epistemiczne. Stan epistemiczny A to zbiór rozmyty stanowiący potencjalny obraz świata rzeczywistego. Mówimy, że stan ten jest zanurzony w epistemicznym IVFS \hat{A} , gdy

$$\forall u \in U \mu_A(u) \in \mu_{\hat{A}}(u). \quad (3.1)$$

Fakt ten symbolicznie zapisać można jako $A \in_E \hat{A}$. Oznacza to, że zbiór rozmyty A znajduje się pośród tych informacji na temat świata rzeczywistego, które są zgodne (dopuszczalne) z niekompletną informacją \hat{A} .

Rozważmy teraz dwie epistemiczne informacje na temat samego zjawiska: \hat{A} oraz \hat{B} . Ponadto niech informacja \hat{A} będzie bardziej szczegółowa niż \hat{B} , tj. wszystkie stany epistemiczne zanurzone w \hat{A} są również zanurzone w \hat{B} . W takiej sytuacji mamy do czynienia z zawieraniem się stanów epistemicznych, co oznaczane jest przez $\hat{A} \sqsubset \hat{B}$ i zdefiniowane w następujący sposób

$$\hat{A} \sqsubset \hat{B} \iff \forall u \in U \mu_{\hat{A}}(u) \subset \mu_{\hat{B}}(u). \quad (3.2)$$

Przykład ilustrujący pojęcie zawierania stanów epistemicznych został przedstawiony na Rysunku 3.1.

3.2 Własności podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych

Zdefiniowanie podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych to problem złożony. Przykładowo konieczne jest odpowiedzenie na pytanie, w jaki sposób określić stopień podobieństwa tak, aby odzwierciedlał on podobieństwo informacji opisanej w sposób niekompletny. Jak zostało to zauważone w poprzednim rozdziale, nawet całkowite podobieństwo niekompletnych opisów nie gwarantuje przecież podobieństwa opisywanych zjawisk czy obiektów. Z tego powodu konieczne jest modelowanie podobieństwa za pomocą przedziału.

Bieżący podrozdział przedstawia dwie grupy własności, które mogą być wymagane od miary podobieństwa epistemicznych IVFS. Pierwsza grupa obejmuje adaptacje znanych własności klasycznych i przedziałowych zbiorów rozmytych. W drugiej części podrozdziału przedstawione

zostaną własności specyficzne dla epistemicznego charakteru informacji niesionej przez IVFS. Dla przypomnienia, przez miarę podobieństwa w tym porożdziale rozumie się funkcję $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$, gdzie $\hat{\mathbb{E}} \subset \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U)$ (patrz (2.6)). Podczas adaptowania własności bardzo duży nacisk położono na zachowanie epistemicznej interpretacji niesionej przez zbiory. Wybrane własności zostaną zinterpretowane i zilustrowane.

Dla zwiększenia czytelności zachowane zostało nazewnictwo z poprzedniego rozdziału. Mała litera „e” została dodana do nazw własności, aby odróżnić je od swoich pierwowzorów. Podobnie jak poprzednio, gwiazdka w nazwie własności oznacza „silniejszy niż”, a minus „słabszy niż”.

Dzięki zebraniu w jednym miejscu oraz usystematyzowaniu wielu własności miar podobieństwa, możliwe jest zaproponowanie pojęcia *miary podobieństwa uwzględniającej niepewność*. W dalszej części rozdziału przedstawione są przykłady takich miar oraz zbadane zostały podstawowe ich własności.

3.2.1 Adaptacje klasycznych własności

Następujące cztery własności – eG1, eG1**, eG2 oraz eG3 – stanowią proste uogólnienia na epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte. W definicjach uwzględniono fakt, że wartością miary podobieństwa w tym przypadku jest przedział, a nie jak poprzednio liczba.

Własność 3.1 (eG1). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność eG1, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \subset [0, 1]. \quad (3.3)$$

Obserwacja 3.1. Miarę podobieństwa posiadającą tę własność można określić jako funkcję $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow [0, 1]$. W dalszej części pracy dla miar podobieństwa posiadających własność eG1, często przyjmowana będzie właśnie ta definicja.

Własność 3.2 (eG1**). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność eG1**, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \subset [0, 1] \quad (3.4)$$

oraz istnieją zbiory $X, Y \subset U$ takie, że $(\hat{1}_X, \hat{1}_Y) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $1 \in \hat{s}(\hat{1}_X, \hat{1}_Y)$.

Własność 3.3 (eG2). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność eG2, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \hat{s}(\hat{B}, \hat{A}). \quad (3.5)$$

Własność 3.4 (eG3). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność eG3, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi $(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \hat{s}(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi). \quad (3.6)$$

W przypadku próby adaptacji własności S1* oraz S2 problem komplikuje się, gdy danymi wejściowymi będą epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte. Należy wówczas pamiętać, że podobieństwo dwóch zbiorów określone jest za pomocą przedziału, a same przedziałowe zbiory rozmyte są niepewną reprezentacją pewnych klasycznych zbiorów rozmytych. Naturalnym jest sformułowanie następujących dwóch pytań:

1. Jaka jest interpretacja zawierania IVFS w kontekście niepewności epistemicznej?
2. Jak zdefiniować porównywanie stopni podobieństwa określonych za pomocą przedziałów?

Interpretacja zawierania IVFS jest stosunkowo trudna. Dla dowolnych epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych \hat{A} oraz \hat{B} , $\hat{A} \subset \hat{B}$ wcale nie oznacza, że zbiór epistemicznych stanów reprezentowanych przez \hat{A} jest zawarty w zbiorze stanów reprezentowanych przez \hat{B} . $\hat{A} \subset \hat{B}$ oznacza, że \hat{A} reprezentuje stany epistemiczne o mniejszych wartościach funkcji przynależności. Stąd też warunki iS1* oraz iS2 mają niewiele wspólnego z epistemiczną naturą przedziałowych zbiorów rozmytych.

Drugi problem dotyczy porównywania przedziałów. W przeciwieństwie do liczb, istnieje wiele przedziałów, które nie są porównywalne. Problem ten można próbować rozwiązać dzięki obserwacji, że relacja *mniejszy równy niż* w przypadku liczb jest równoważna negacji relacji *większy niż*. Zastosowanie tej własności nie prowadzi jednak do relacji, która dobrze oddawałaby epistemiczną naturę przedziałów. Obu problemów można uniknąć definiując te własności w języku zbiorów zanurzonych. Jednak aby było to możliwe, konieczne jest wprowadzenie własności E1 oraz pojęcia zawężenia miary podobieństwa.

Własność 3.5 (E1). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E1, jeśli dla dowolnych zbiorów rozmytych $A, B \in \mathcal{FS}(U)$ takich, że $\hat{A} = IVFS(A)$ $\hat{B} = IVFS(B)$ oraz $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = [a, a] \text{ dla pewnego } a \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Definicja 3.1. Niech $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ będzie miarą podobieństwa spełniającą warunek E1. Zawężenie \hat{s} do zbiorów rozmytych zdefiniowane jest jako funkcja $\hat{s}|_{\mathcal{FS}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(A, B) = a, \quad (3.8)$$

gdzie a jest takie, że

$$\hat{s}(IVFS(A), IVFS(B)) \stackrel{(E1)}{=} [a, a] \quad (3.9)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \{(A, B) \in \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U) : (IVFS(A), IVFS(B)) \in \hat{\mathbb{E}}\} \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \{(A, B) \in \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B}, (\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

W dalszej części pracy wszędzie gdzie będzie wykorzystywane zawężenie miary do zbiorów rozmytych, można przyjąć, że oryginalna miara posiada własność E1.

Epistemiczne wersje warunków S1* i S2 można określić łącznie, tak jak w (2.14).

Własność 3.6 (eS1*&eS2). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własności eS1* oraz eS2, jeśli dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takich, że $(\hat{A}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}, (\hat{B}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz dowolnych $A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B}, C \in_E \hat{C}, D \in_E \hat{D}$ takich, że $A \subset B \subset C \subset D$, zachodzi

$$\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(A, D) \leq \hat{s}|_{\mathcal{FS}}(B, C). \quad (3.11)$$

Idea zaproponowanego rozwiązania polega na tym, aby zamiast tworzyć warunki z wykorzystaniem przedziałowych zbiorów rozmytych oraz trudnych w interpretacji operacji na nich, wykorzystać zanurzone zbiory rozmyte. Znacząco upraszcza to problem poprzez umożliwienie zastosowania formuł znanych dla klasycznych zbiorów rozmytych.

Z powyższych rozważań można wywnioskować, że warunki S1* oraz S2 mogą również mieć znaczenie w przypadku epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych. Jednakże, stanowią one tylko skromną część ograniczeń, jakie należy nałożyć na miarę podobieństwa, aby odzwierciedlała ona intuicję podobieństwa dla danych obarczonych niepewnością epistemiczną. Znacznie ważniejsze od S1* i S2 jest uwzględnienie sytuacji zanurzonych stanów epistemicznych, co zostanie zrobione w dalszej części pracy (patrz warunek E4).

Kolejna własność przenosi obserwację, że dwa zbiory będące swoimi wzajemnymi dopełnieniami nie mogą być podobne. W przypadku epistemicznych IVFS, dla dwóch niekompletnych opisów zjawiska, które dopuszczają sprzeczną informację konieczne jest uwzględnienie zera jako możliwego stopnia podobieństwa.

Własność 3.7 (eS3). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$ posiada własność eS3, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, dla których istnieje zbiór $X \subset U$ taki, że $\mathbf{1}_X \in_E \hat{A}$ oraz $\mathbf{1}_{X^c} \in_E \hat{B}$, zachodzi

$$0 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}).$$

Adaptacja własności S5 na epistemiczne IVFS dotyczy sytuacji, w której zero jest możliwym stopniem podobieństwa \hat{A} oraz \hat{B} . W takim przypadku można wymagać, aby istniały zanurzone stany epistemiczne, które mają pusty przekrój.

Własność 3.8 (eS5). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$ posiada własność eS5, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ takiej, że $0 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$, istnieją zbiory rozmyte $A \in_E \hat{A}$ oraz $B \in_E \hat{B}$, dla których $\sigma(A \cap B) = 0$.

Adaptacja ostatniej własności jest bardzo bezpośrednia. W definicji zastąpiono arytmetykę liczb rzeczywistych arytmetyką przedziałową.

Własność 3.9 (eS6). Niech będą dowolnymi przedziałowymi zbiorami rozmytymi $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$ oraz $u_0, u_1 \in U$. Dla dowolnego przedziału α takiego, że

$$\alpha \subset [0, 1 - \max(\bar{\mu}_{\hat{A}}(u_0), \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_1))] , \quad (3.12)$$

definiujemy nowe przedziałowe zbiory rozmyte $\hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$ w następujący sposób:

$$\forall_{u \neq u_0} \mu_{\hat{C}}(u) = \mu_{\hat{A}}(u) \text{ i } \mu_{\hat{C}}(u_0) = \mu_{\hat{A}}(u_0) + \alpha \quad (3.13)$$

oraz

$$\forall_{u \neq u_1} \mu_{\hat{D}}(u) = \mu_{\hat{B}}(u) \text{ i } \mu_{\hat{D}}(u_1) = \mu_{\hat{B}}(u_1) + \alpha. \quad (3.14)$$

Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność eS6, gdy koniunkcja warunków $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $(\hat{B}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$ implikuje $\hat{s}(\hat{A}, \hat{C}) = \hat{s}(\hat{B}, \hat{D})$.

Z pewnością widoczny jest tu brak własności eS4. Otóż warunek, aby dwa identyczne IVFS były podobne do siebie w maksymalnym stopniu zupełnie nie znajduje pokrycia w przypadku epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych. Już w poprzednim rozdziale pokazano, że w przypadku dwóch IVFS reprezentujących całkowicie niepewną (niekompletną) informację na temat pewnego zjawiska, nie ma podstaw do precyzyjnego określenia ich stopnia podobieństwa. Dyskusja nad sytuacją, kiedy należy wymagać, aby wartość maksymalna była pośród możliwych stopni podobieństwa, przeprowadzona jest w następnej sekcji w kontekście warunku E2.

3.2.2 Własności specyficzne dla epistemicznych IVFS

Własności przedstawione w poprzedniej sekcji są ważne głównie ze względu na konieczność zachowania zgodności miar podobieństwa IVFS z miarami dla klasycznych zbiorów rozmytych. Nie bez znaczenia jest też zachowanie ograniczeń dotyczących symetrii czy zakresu wartości stopnia podobieństwa. Następna grupa własności swoje źródło bierze bezpośrednio z epistemicznego rozumienia informacji reprezentowanej przez przedziałowe zbiory rozmyte. Ich posiadanie jest szczególnie istotne, aby miara podobieństwa mogła operować na danych niekompletnych w sposób zgodny z intuicją.

Pierwsza własność – E1 – została wprowadzona przy okazji dyskusji nad adaptacją własności S1* oraz S2. Ograniczenie, jakie nakłada ona na miarę podobieństwa, dotyczy sytuacji, gdy epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte w rzeczywistości nie są obciążone niepewnością. Wtedy, zgodnie z intuicją, skoro dane wejściowe nie są niepewne, nie ma też powodu, dla którego podobieństwo powinno być niepewne.

Kolejne dwie własności dotyczą sytuacji wspomnianej już w poprzedniej sekcji. Sytuację, w której dwa przedziałowe zbiory rozmyte można uznać za w pełni podobne można łatwo wyrazić w języku stanów epistemicznych. Dwa epistemiczne przedziałowe zbiory rozmyte mogą być w pełni podobne, gdy zawierają przynajmniej jeden taki sam stan epistemiczny. Innymi słowy, na podstawie niekompletnych opisów dwóch zjawisk możemy wnioskować o ich całkowitym podobieństwie tylko w przypadku, gdy oba opisy dopuszczają przynajmniej jedną wspólną wersję. Idea ta jest sformalizowana w następujący sposób.

Własność 3.10 (E2). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$ posiada własność E2, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, dla których istnieje $C \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że $C \in_E \hat{A}$ oraz $C \in_E \hat{B}$, zachodzi

$$1 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.15)$$

Często nie jest potrzebna aż tak silna postać tego warunku, gdyż wystarczy, aby pożądana własność zachodziła tylko w przypadku, gdy wspólny stan dodatkowo redukuje się do klasycznego zbioru.

Własność 3.11 (E2-). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$ posiada własność E2-, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, dla których istnieje zbiór $X \subset U$ taki, że $\mathbb{1}_X \in_E \hat{A}$ oraz $\mathbb{1}_X \in_E \hat{B}$, zachodzi

$$1 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.16)$$

Dla wyjaśnienia następujących dwóch własności posłużmy przykład. Próbując zbadać podobieństwo dwóch zjawisk na podstawie niepewnych informacji \hat{A}_1 oraz \hat{B}_1 , otrzymujemy następujący wynik $\hat{s}(\hat{A}_1, \hat{B}_1) = [0.7, 1]$. Można z tego wnioskować, że z pewnością zjawiska te są bardzo podobne. Następnie w toku dalszych badań udało się poznać bardziej dokładny i pewny opis obu zjawisk ($\hat{A}_2 \sqsubset \hat{A}_1$ oraz $\hat{B}_2 \sqsubset \hat{B}_1$). W takiej sytuacji można by oczekiwać, że podobieństwo nie zmieni się drastycznie, a nawet, że będzie ono zgodne z wcześniejszą wartością. Przykładowo niech $\hat{s}(\hat{A}_2, \hat{B}_2) = [0.8, 0.9]$. Kontynuując przykład załóżmy, że udało się jakoś pozyskać dokładny i pewny opis badanych zjawisk – A oraz B . Ponownie intuicja nakazuje oczekiwać, że stopień podobieństwa będzie zgodny z wcześniejszymi wartościami – $\hat{s}(IVFS(A), IVFS(B)) = [0.8, 0.8]$. Własności E3 oraz E4 wymuszają zachowanie miar podobieństwa zgodne z przedstawionym rozumowaniem. Spadek niepewności informacji powoduje zawężenie wartości podobieństwa, jak również podobieństwo dowolnych zanurzonych stanów epistemicznych ma swoje odzwierciedlenie w przedziale opisującym stopień podobieństwa niekompletnej informacji.

Własność 3.12 (E3). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E3, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz dla dowolnych zbiorów rozmytych $A \in_E \hat{A}$ i $B \in_E \hat{B}$, zachodzi

$$\hat{s}_{|_{\mathcal{FS}}}(A, B) \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}).$$

Obserwacja 3.2. Własność E3 może zostać równoważnie zapisana w następujący sposób: dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ zachodzi

$$\left\{ \hat{s}_{|_{\mathcal{FS}}}(A, B) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\} \subset \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.17)$$

Własność 3.13 (E4). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E4, jeśli dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takich, że $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$, $(\hat{B}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$, $\hat{A} \sqsubset \hat{B}$ oraz $\hat{C} \sqsubset \hat{D}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{C}) \subset \hat{s}(\hat{B}, \hat{D}).$$

Ostatnia własność specyficzna dla epistemicznych IVFS to pewien warunek brzegowy. Zobowiązuje on miarę podobieństwa do całkowitego braku wiedzy na temat podobieństwa w przypadku całkowitego braku wiedzy na temat opisywanych zjawisk lub obiektów. W ten sposób możliwe jest uniknięcie sytuacji, w której miara podobieństwa pozwala wnioskować cokolwiek na temat nieznanych zjawisk lub obiektów.

Własność 3.14 (E5). Niech $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$ będą takie, że

$$\forall u \in U \mu_{\hat{A}}(u) = \mu_{\hat{B}}(u) = [0, 1]. \quad (3.18)$$

Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E5, jeśli $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = [0, 1]$, o ile $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$.

3.2.3 Miary podobieństwa uwzględniające niepewność

W poprzednim rozdziale i sekcji dokonano wyczerpującego przeglądu własności miar podobieństwa. Wiele własności czasem wydaje się trudna w interpretacji. Stąd nie we wszystkich sytuacjach potrzebne jest posiadanie ich wszystkich. Własności $eG1^{**}$ oraz $eG2$ nie pozostawiają miejsca na dyskusję. Spośród własności zaadaptowanych z tych znanych dla klasycznych zbiorów rozmytych bardzo ważne są również $eS3$ oraz $eS5$. W przypadku epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych najważniejsze jest odpowiednie traktowanie niepewności danych. To z kolei może być zapewnione tylko przez spełnienie specjalnych własności tj. $E1$ – $E5$.

Postępując podobnie jak Jenhani [32] w tej rozprawie oprócz obowiązkowych własności jakie musi posiadać każda miara podobieństwa, sugerujemy też pewne opcjonalne własności. Niektóre z nich to mocniejsze wersje warunków podstawowych. Inne wprowadzają nowe ograniczenia na miarę podobieństwa, które mogą być pożądane w pewnych specyficznych zastosowaniach.

Definicja 3.2. Miara podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych \hat{s} uwzględnia niepewność, gdy posiada własności: $E1$, $E2$ -, $E3$, $E4$, $E5$, $eG1^{**}$, $eG2$, $eS3$, $eS5$. Ponadto miara podobieństwa uwzględniająca niepewność może dodatkowo posiadać własności: $E2$, $eG3$, $eS1^*$ oraz $eS2$.

3.2.4 Zależności

Okazuje się, że przedstawione własności dla klasycznych zbiorów rozmytych oraz epistemicznych IVFS są silnie ze sobą powiązane. W tej sekcji udowodnione zostaną liczne zależności pomiędzy różnymi własnościami posiadanymi przez miarę podobieństwa. Wyniki przedstawione w tej sekcji stanowią podstawę dla opracowania efektywnej metody generowania miar podobieństwa uwzględniających niepewność, przedstawionej w następnym podrozdziale.

Lemat 3.3. Dla dowolnej miary podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiadającej własność $E1$ zachodzi:

1. Jeśli \hat{s} ma własność $eG1^{**}$, to $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $G1^{**}$.
2. Jeśli \hat{s} ma własność $eG2$, to $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $G2$.
3. Jeśli \hat{s} ma własność $eG3$, to $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $G3$.
4. \hat{s} ma własność $eS1^* \& eS2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $S1^* \& S2$.
5. Jeśli \hat{s} ma własność $eS3$, to $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $S3$.
6. Jeśli \hat{s} ma własność $eS6$, to $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ ma własność $S6$.

Dowód.

1. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność $eG1^{**}$. Weźmy dowolne zbiory rozmyte $(A, B) \in \mathbb{E}$. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$ oraz $\hat{B} = IVFS(B)$. Wtedy na mocy definicji $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ mamy, że $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, a na mocy założenia otrzymujemy $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \subset [0, 1]$, a stąd na mocy $E1$ $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(A, B) \in [0, 1]$. Ponadto, z założenia otrzymujemy, że $1 \in \hat{s}(\hat{\mathbb{1}}_U, \hat{\mathbb{1}}_U)$, a na mocy $E1$: $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U) = 1$.

2. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eG2. Weźmy dowolne zbiory rozmyte $(A, B) \in \mathbb{E}$. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$ oraz $\hat{B} = IVFS(B)$. Wtedy na mocy definicji $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}$ mamy, że $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, a na mocy założenia otrzymujemy $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \hat{s}(\hat{B}, \hat{A})$, a stąd na mocy E1: $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, B) = \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, A)$.
3. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eG3. Niech π będzie dowolną permutacją U . Weźmy dowolne zbiory rozmyte $(A, B) \in \mathbb{E}$. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$, $\hat{B} = IVFS(B)$ oraz $\hat{A}^\pi = IVFS(A^\pi)$, $\hat{B}^\pi = IVFS(B^\pi)$. Wtedy na mocy założenia otrzymujemy, że $(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \hat{s}(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi)$, a stąd na mocy E1: $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, B) = \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A^\pi, B^\pi)$.
4. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eS1*&eS2. Weźmy dowolne zbiory rozmyte $A, B, C, D \in \mathcal{FS}(U)$ takie, że $(A, D) \in \mathbb{E}$, $(B, C) \in \mathbb{E}$ oraz $A \subset B \subset C \subset D$. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$, $\hat{B} = IVFS(B)$, $\hat{C} = IVFS(C)$ oraz $\hat{D} = IVFS(D)$. Oczywiście $A \in_E \hat{A}$, $B \in_E \hat{B}$, $C \in_E \hat{C}$ oraz $D \in_E \hat{D}$. Stąd z założenia otrzymujemy

$$\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, D) \leq \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, C). \quad (3.19)$$

Teraz załóżmy, że $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}$ posiada własność S1*&S2. Weźmy dowolne przedziałowe zbiory rozmyte $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takie, że $(\hat{A}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $(\hat{B}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$. Niech $A \in_E \hat{A}$, $B \in_E \hat{B}$, $C \in_E \hat{C}$ oraz $D \in_E \hat{D}$ będą dowolne takie, że $A \subset B \subset C \subset D$. Spełnione są zatem założenia S1*&S2, z czego otrzymujemy

$$\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, D) \leq \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, C). \quad (3.20)$$

5. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eS3. Niech X będzie dowolnym podzbiorem uniwersum U takim, że $(\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_{X^c}) \in \mathbb{E}$. Wtedy na mocy eS3 otrzymujemy, że $0 \in \hat{s}(\hat{\mathbf{1}}_X, \hat{\mathbf{1}}_{X^c})$. Ponadto, spełnione są założenia własności E1, skąd wynika, że $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(\mathbf{1}_{X^c}, \mathbf{1}_{X^c}) = 0$.
6. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eS6. Weźmy dowolne zbiory rozmyte $A, B \in \mathcal{FS}(U)$. Niech $u_0, u_1 \in U$ będą dowolne oraz α takie, że $0 \leq \alpha \leq 1 - \max(\mu_A(u_0), \mu_B(u_1))$. Zgodnie z Własnością S6 konstruujemy zbiory rozmyte $C, D \in \mathcal{FS}(U)$. Aby pokazać, że jeśli $(A, C) \in \mathbb{E}$ oraz $(B, D) \in \mathbb{E}$, to $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, C) = \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, D)$, korzystamy z własności eS6. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$, $\hat{B} = IVFS(B)$ oraz $\alpha' = [\alpha, \alpha]$. Zgodnie z własnością eS6 konstruujemy przedziałowe zbiory rozmyte $\hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$. Łatwo można zauważyć, że $\hat{C} = IVFS(C)$ oraz $\hat{D} = IVFS(D)$. Przyjmijmy, że $(A, C) \in \mathbb{E}$ oraz $(B, D) \in \mathbb{E}$, co na mocy definicji $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}$ daje również $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz $(\hat{B}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}$, skąd na mocy eS6 otrzymujemy $\hat{s}(\hat{A}, \hat{C}) = \hat{s}(\hat{B}, \hat{D})$, a następnie na mocy E1 żadaną równość $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, C) = \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, D)$.

□

Lemat 3.4. *Dla dowolnej miary podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiadającej własności E1 oraz E3 jeśli \hat{s} ma własność eS5, to $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}$ ma własność S5.*

Dowód. Załóżmy, że \hat{s} posiada własność eS5. Niech zbiory rozmyte $(A, B) \in \mathbb{E}$ będą takie, że $\hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, B) = 0$. Niech $\hat{A} = IVFS(A)$, $\hat{B} = IVFS(B)$, wtedy na mocy E3 oraz eS5 mamy, że $0 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$ oraz istnieją $A' \in_E \hat{A}$ i $B' \in_E \hat{B}$ takie, że $\sigma(A' \cap B') = 0$. Jednak z określenia

przedziałowych zbiorów rozmytych \hat{A}, \hat{B} wynika, że $A = A'$ oraz $B = B'$, gdyż są to jedyne zbiory rozmyte, które można zanurzyć w przedziałowej reprezentacji IVFS. Stąd otrzymujemy $\sigma(A \cap B) = 0$. \square

Lemat 3.5. *Dla dowolnej miary podobieństwa \hat{s} posiadającej własności E1 oraz E3, jeśli $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ posiada własność S3, to \hat{s} posiada własność eS3.*

Dowód. Załóżmy, że $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ posiada własność S3. Niech $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ będą takie, że istnieje zbiór $X \subset U$ taki, że $\mathbf{1}_X \in_E \hat{A}$ oraz $\mathbf{1}_{X^c} \in_E \hat{B}$. Na mocy założenia mamy, że $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_{X^c}) = 0$, natomiast na mocy E3 otrzymujemy, że $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_{X^c}) \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$. \square

Lemat 3.6. *Dla dowolnej miary podobieństwa \hat{s} posiadającej własności E1 oraz E3, jeśli $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ posiada własności S4- oraz G1**, to \hat{s} posiada własność E2-.*

Dowód. Niech przedziałowe zbiory rozmyte $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ będą takie, że istnieje zbiór $X \subset U$ taki, że $\mathbf{1}_X \in_E \hat{A}$ i $\mathbf{1}_X \in_E \hat{B}$. Na mocy E3 mamy $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_X) \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$. Ponadto z S4- oraz G1** wiemy, że $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}(\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_X) = \max_{(A,B) \in \mathbb{E}} \hat{s}|_{\mathcal{FS}}(A, B) = 1$. \square

Lemat 3.7. *Jeśli miara podobieństwa \hat{s} ma własności E1, E2-, eG1 oraz eS3, to ma również własność E5.*

Dowód. Niech $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$ będą takie, że

$$\forall u \in U \mu_{\hat{A}}(u) = \mu_{\hat{B}}(u) = [0, 1] \quad (3.21)$$

oraz $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$. Zauważmy, że $\mathbf{1}_U \in_E \hat{A}$ oraz $\mathbf{1}_\emptyset \in_E \hat{B}$, zatem na mocy eS3 otrzymujemy, że $0 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$. Ponadto zbiór rozmyty $\mathbf{1}_U$ spełnia założenia E2-, skąd wynika, że $1 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$. Na mocy eG1 $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \subset [0, 1]$, a ponieważ 0 oraz 1 należą do tego przedziału, więc $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = [0, 1]$. \square

Powyższe zależności znacząco upraszczają wykazanie niektórych własności miary podobieństwa \hat{s} poprzez redukcję ich do własności jej zawężenia do zbiorów rozmytych $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$. Okazuje się, że zaostrenie warunku E3 poprzez zastąpienie inkluzji równością w (3.17) pozwala na wykazanie dodatkowych zależności, które prowadzą do ciekawych wniosków, będących tematem następnego podrozdziału.

Własność 3.15 (E3*). Miara podobieństwa $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E3*, jeśli dla dowolnej pary przedziałowych zbiorów rozmytych $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, zachodzi

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \left\{ \hat{s}|_{\mathcal{FS}}(A, B) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\}. \quad (3.22)$$

Obserwacja 3.8. Warunkiem koniecznym dla E3* jest ciągłość $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ (patrz Definicja 3.4 w następnym podrozdziale). W przeciwnym przypadku zbiór po lewej stronie (3.22) nie musi być przedziałem.

Lemat 3.9. *Dla dowolnej miary podobieństwa \hat{s} posiadającej własności E1 oraz E3* zachodzi:*

1. *Jeśli $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ posiada własność G1**, to \hat{s} posiada własność eG1**.*
2. *Jeśli $\hat{s}|_{\mathcal{FS}}$ posiada własność G2, to \hat{s} posiada własność eG2.*

3. Jeśli $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $G3$, to \hat{s} posiada własność $eG3$.

4. Jeśli $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $S5$, to \hat{s} posiada własność $eS5$.

Dowód.

1. Załóżmy, że $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $G1^{**}$. Niech $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, wtedy

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \stackrel{(E3^*)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\}. \quad (3.23)$$

Na mocy założenia wiemy, że $0 \leq \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) \leq 1$, a stąd otrzymujemy $\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \in [0, 1]$.

Ponadto wiemy, że istnieją podzbiory $X, Y \subset U$ takie, że $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y) \in \mathbb{E}$ oraz $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y) = 1$, skąd otrzymujemy

$$1 \in \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) : A \in_E \hat{\mathbb{1}}_X, B \in_E \hat{\mathbb{1}}_Y \right\} \stackrel{(E3^*)}{=} \hat{s}(\hat{\mathbb{1}}_X, \hat{\mathbb{1}}_Y). \quad (3.24)$$

2. Załóżmy, że $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $G2$. Niech $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$, wtedy

$$\hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) \stackrel{(E3^*)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\} \quad (3.25)$$

$$\stackrel{(G2)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(B, A) : B \in_E \hat{B}, A \in_E \hat{A} \right\} \stackrel{(E3^*)}{=} \hat{s}(\hat{B}, \hat{A}). \quad (3.26)$$

3. Załóżmy, że $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $G3$. Niech $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ oraz π będzie dowolną permutacją U . W pierwszej kolejności pokażemy, że $(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi) \in \hat{\mathbb{E}}$. Z definicji $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ oraz tego, że $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ wynika również, że dla dowolnych $A \in_E \hat{A}$ oraz $B \in_E \hat{B}$ zachodzi $(A, B) \in \mathbb{E}$. Stąd na mocy $G3$ mamy, że również $(A^\pi, B^\pi) \in \mathbb{E}$. Z własności zbioru $\hat{\mathbb{E}}$ mamy, że w takiej sytuacji $(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi) \in \hat{\mathbb{E}}$.

Żądaną równość stopni podobieństwa można teraz wykazać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\hat{A}, \hat{B}) &\stackrel{(E3^*)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\} \\ &\stackrel{(G3)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A^\pi, B^\pi) : A \in_E \hat{A}, B \in_E \hat{B} \right\} \\ &= \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) : A \in_E \hat{A}^\pi, B \in_E \hat{B}^\pi \right\} \stackrel{(E3^*)}{=} \hat{s}(\hat{A}^\pi, \hat{B}^\pi). \end{aligned} \quad (3.27)$$

4. Załóżmy, że $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada własność $S5$. Niech $(\hat{A}, \hat{B}) \in \hat{\mathbb{E}}$ będą takie, że $0 \in \hat{s}(\hat{A}, \hat{B})$. Na mocy $E3^*$ otrzymujemy, że istnieją takie zbiory rozmyte $(A, B) \in \mathbb{E}$, dla których $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}(A, B) = 0$. Stąd na mocy $S5$ mamy $\sigma(A \cap B) = 0$.

□

Wniosek 3.10. Dla dowolnej miary podobieństwa \hat{s} posiadającej własności $E1$ oraz $E3^*$, \hat{s} posiada własności $eG1^{**}$, $eG2$, $eG3$, $eS1^* \wp eS2$, $eS3$ lub $eS5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{s}_{|\mathcal{F}S}$ posiada odpowiednio własności $G1^{**}$, $G2$, $G3$, $S1^* \wp S2$, $S3$ lub $S5$.

Dowód. Wniosek jest bezpośrednią konsekwencją Lematów 3.3, 3.4, 3.5 oraz 3.9

□

Lemat 3.11. *Dowolna miara podobieństwa \hat{s} posiadająca własności E1 oraz E3* posiada również własność E4.*

Dowód. Załóżmy, że \hat{s} posiada własności E1 oraz E3*. Niech $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \in \mathcal{IVFS}(U)$ będą takie, że $(\hat{A}, \hat{C}) \in \hat{\mathbb{E}}, (\hat{B}, \hat{D}) \in \hat{\mathbb{E}}, \hat{A} \sqsubset \hat{B}$ oraz $\hat{C} \sqsubset \hat{D}$. Zauważmy, że z definicji relacji \sqsubset wynika

$$\{A : A \in_E \hat{A}\} \subset \{B : B \in_E \hat{B}\} \text{ oraz } \{C : C \in_E \hat{C}\} \subset \{D : D \in_E \hat{D}\}. \quad (3.28)$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{s}(\hat{A}, \hat{C}) &\stackrel{(E3^*)}{=} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(A, C) : A \in_E \hat{A}, C \in_E \hat{C} \right\} \\ &\stackrel{(3.28)}{\subset} \left\{ \hat{s}_{|\mathcal{FS}}(B, D) : B \in_E \hat{B}, D \in_E \hat{D} \right\} \stackrel{(E3^*)}{=} \hat{s}(\hat{B}, \hat{D}). \end{aligned}$$

□

3.3 Reprezentacja Wavy-Slice

Możliwość modelowania niepewności danych jest jedną z kluczowych cech przedziałowych zbiorów rozmytych. W 2002 roku Mendel i John zaproponowali nową reprezentację zbiorów rozmytych typu drugiego o nazwie *Wavy-Slice Representation* [46]. Okazała się one szczególnie skuteczna w przypadku przedziałowych zbiorów rozmytych oraz przedziałowych zbiorów rozmytych typu drugiego [45, 47].

Podstawę zaproponowanej reprezentacji stanowi *śląd niepewności* (ang. Footprint Of Uncertainty, w skrócie FOU):

$$\text{FOU}(\hat{A}) = \left\{ A \in \mathcal{FS}(U) : \forall u \in U \underline{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq \mu_A(u) \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \right\}. \quad (3.29)$$

Zbiór $\text{FOU}(\hat{A})$ zawiera wszystkie zbiory rozmyte zanurzone w przedziałowym zbiorze rozmytym \hat{A} . W ten sposób reprezentuje on wszystkie epistemiczne stany, jakie mogą skrywać się za \hat{A} co można zapisać w następujący sposób:

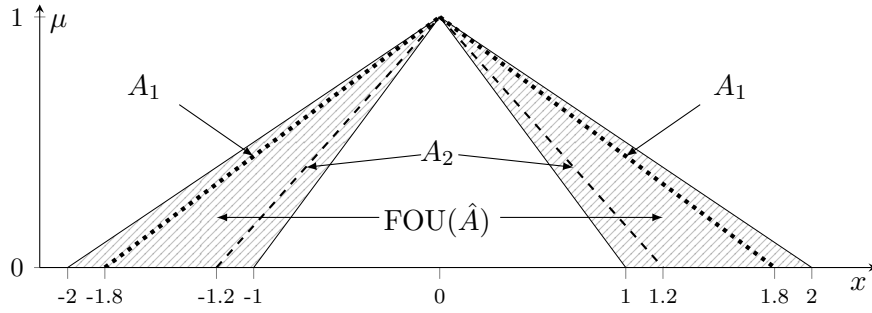
$$\text{FOU}(\hat{A}) = \{A \in \mathcal{FS}(U) : A \in_E \hat{A}\}. \quad (3.30)$$

Obserwacja 3.12 (Mendel [47]). Dowolny przedziałowy zbiór rozmyty $\hat{A} \in \mathcal{IVFS}(U)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez ślad niepewności $\text{FOU}(\hat{A})$.

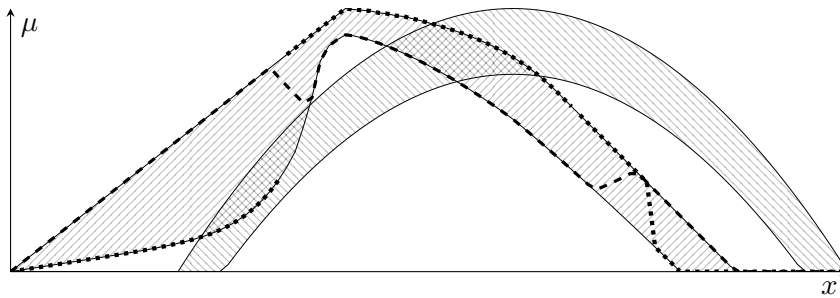
Podczas, gdy klasyczna reprezentacja przedziałowego zbioru rozmytego skupia się tylko na dolnej i górnej funkcji przynależności, $\text{FOU}(\hat{A})$ skłania do myślenia o nim jako o nieskończonym zbiorze rozmytych możliwości. Podobna reprezentacja była rozważana niezależnie w kontekście intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova [71, 72]. Takie podejście umożliwia zachowanie całej informacji o niekompletnie znanym zbiorze rozmytym i otwiera drogę do odpowiedniego zdefiniowania operacji na IVFS.

Na Rysunku 3.2 przedstawiony został przykładowy przedziałowy zbiór rozmyty \hat{A} wraz z $\text{FOU}(\hat{A})$. Zaznaczono również dwa zanurzone zbiory rozmyte $A_1 \in_E \hat{A}$ oraz $A_2 \in_E \hat{A}$.

Ślad niepewności wraz z Obserwacją 3.12 stanowią wygodne narzędzie do badania własności IVFS. Przykładowo pozwalają one określić operacje na przedziałowych zbiorach rozmytych w oparciu o klasyczne zbiory rozmyte. Poniżej wykorzystamy tę metodę do rozszerzenia miary podobieństwa zbiorów rozmytych na IVFS.



Rysunek 3.2: Wizualizacja przedziałowego zbioru rozmytego \hat{A} oraz jego śladu niepewności $FOU(\hat{A})$ (zacieniowany obszar). Przerywane linie reprezentują dwa zanurzone zbiory rozmyte $A_1 \in_E \hat{A}$ oraz $A_2 \in_E \hat{A}$.



Rysunek 3.3: Przykład sytuacji, w której skrajne wartości podobieństwa nie są osiągnięte dla dolnego lub górnego ograniczenia. Zacieniowany obszar przedstawia ślad niepewności (FOU) wejściowych przedziałowych zbiorów rozmytych. Wybrane dwa zanurzone zbiory rozmyte, dla których osiągnięta jest najmniejsza i największa wartość podobieństwa zaznaczone są na wykresie odpowiednio przerywaną i kropkowaną linią.

Definicja 3.3. Niech $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną miarą podobieństwa zbiorów rozmytych. Jej rozszerzenie do przedziałowych zbiorów rozmytych przy użyciu reprezentacji Wavy-Slice $\tilde{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ zdefiniowane jest następująco:

$$\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A \in FOU(\hat{A}) \\ B \in FOU(\hat{B})}} s(A, B), & \sup_{\substack{A \in FOU(\hat{A}) \\ B \in FOU(\hat{B})}} s(A, B) \end{array} \right] \quad (3.31)$$

oraz

$$\hat{\mathbb{E}} = \left\{ (\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : FOU(\hat{A}) \times FOU(\hat{B}) \subset \mathbb{E} \right\}. \quad (3.32)$$

Główny problem to odnalezienie zbiorów rozmytych, które minimalizują i maksymalizują pierwotną miarę podobieństwa. Ogólnie zbiory te nie muszą odpowiadać dolnej i górnej funkcji przynależności, a nawet mogą w ogóle nie istnieć. Przykład ilustrujący taką sytuację pokazany jest na Rysunku 3.3. Stąd pomimo, że reprezentacja Wavy-Slice pozwala na zdefiniowanie nowych operacji w bardzo intuicyjny i prosty sposób, często mogą one być nieefektywne obliczeniowo. W najgorszym przypadku problem wyliczenia miary podobieństwa określonej w ten sposób może być równoważny optymalizacji z ograniczeniami.

Lemat 3.13. *Miara podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych $\tilde{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ posiada własność E1 wtedy i tylko wtedy, gdy $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada własność G1.*

Dowód. Niech $(A', B') \in \mathbb{E}$ będzie dowolną parą zbiorów rozmytych oraz $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną miarą podobieństwa posiadającą własność G1. Niech $\hat{A} = IVFS(A')$ oraz $\hat{B} = IVFS(B')$. Wtedy ślad niepewności tych zbiorów zawiera tylko jeden zbiór rozmyty, mianowicie

$$\text{FOU}(\hat{A}) = \{A'\} \text{ oraz } \text{FOU}(\hat{B}) = \{B'\}. \quad (3.33)$$

W takiej sytuacji

$$\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}) \stackrel{(def)}{=} \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B), & \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B) \end{array} \right] \stackrel{(3.33)}{=} [s(A', B'), s(A', B')] = [a, a] \quad (3.34)$$

dla $a = s(A', B') \stackrel{(G1)}{\in} [0, 1]$.

Dla dowodu w drugą stronę założmy, że \tilde{s} posiada własność E1, skąd dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\forall_{A, B \in \mathcal{FS}(U)} [a, a] \stackrel{(E1)}{=} \tilde{s}(IVFS(A), IVFS(B)) \stackrel{(3.34)}{=} [s(A, B), s(A, B)], \quad (3.35)$$

co w rezultacie daje własność G1: $s(A, B) = a \in [0, 1]$. □

Obserwacja 3.14. Zawężenie do zbiorów rozmytych rozszerzonej miary podobieństwa dla IVFS daje w rezultacie pierwotną miarę podobieństwa

$$\tilde{s}|_{\mathcal{FS}} \equiv s. \quad (3.36)$$

Definicja 3.4. Niech $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. Miarę podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy ciągła na zbiorze

$$P = \{(\mu_A(u_1), \dots, \mu_A(u_n), \mu_B(u_1), \dots, \mu_B(u_n)) : (A, B) \in \mathbb{E}\} \subset [0, 1]^{2n} \quad (3.37)$$

jest funkcja $p : [0, 1]^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = s(A, B), \quad (3.38)$$

gdzie

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \mu_A(u_i) = a_i \text{ oraz } \mu_B(u_i) = b_i. \quad (3.39)$$

Dzięki następnemu lematowi na przedział $\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B})$ można patrzeć jak na zawierający wszystkie stopnie podobieństwa pomiędzy dowolną parą zanurzonych zbiorów rozmytych $A \in \text{FOU}(\hat{A})$, $B \in \text{FOU}(\hat{B})$.

Lemat 3.15. *Dla dowolnej ciągłej miary podobieństwa $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dla dowolnych przedziałowych zbiorów rozmytych $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$ takich, że $\text{FOU}(\hat{A}) \times \text{FOU}(\hat{B}) \subset \mathbb{E}$, zachodzi*

$$\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \left[\begin{array}{c} \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B), \quad \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B) \end{array} \right] = \left\{ s(A, B) : A \in \text{FOU}(\hat{A}), B \in \text{FOU}(\hat{B}) \right\}. \quad (3.40)$$

Dowód. Niech s będzie dowolną ciągłą miarą podobieństwa. Ponadto, niech $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{IVFS}(U)$ będą dowolne takie, że $\text{FOU}(\hat{A}) \times \text{FOU}(\hat{B}) \subset \mathbb{E}$. Dla uproszczenia w dalszej części dowodu zbiór

$$\left\{ s(A, B) : A \in \text{FOU}(\hat{A}), B \in \text{FOU}(\hat{B}) \right\} \quad (3.41)$$

będzie oznaczany przez $\tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B})$. Należy wykazać, że zachodzi

$$\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}) = \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.42)$$

Na podstawie ciągłej miary podobieństwa s zdefiniujemy funkcję p oraz zbiór P tak, jak w Definicji 3.4. Zdefiniujemy zbiór X w następujący sposób:

$$X = \prod_{1 \leq i \leq n} [\underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i), \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i)] \times \prod_{1 \leq i \leq n} [\underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i), \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i)] \subset [0, 1]^{2n}. \quad (3.43)$$

Wtedy dla dowolnego elementu

$$x = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in X \quad (3.44)$$

istnieją zbiory rozmyte $A \in \text{FOU}(\hat{A})$ oraz $B \in \text{FOU}(\hat{B})$ takie, że

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \mu_A(u_i) = a_i \text{ oraz } \mu_B(u_i) = b_i. \quad (3.45)$$

Zatem otrzymujemy, że $(A, B) \in \text{FOU}(\hat{A}) \times \text{FOU}(\hat{B}) \subset \mathbb{E}$, skąd wynika, że $x \in P$. Z dowolności x otrzymujemy, że $X \subset P$.

Ponadto z definicji funkcji p oraz zbioru X otrzymujemy następującą równość:

$$\begin{aligned} \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}) &= \left\{ s(A, B) : A \in \text{FOU}(\hat{A}), B \in \text{FOU}(\hat{B}) \right\} = \\ &= \left\{ p(\mu_A(u_1), \dots, \mu_A(u_n), \mu_B(u_1), \dots, \mu_B(u_n)) : A \in \text{FOU}(\hat{A}), B \in \text{FOU}(\hat{B}) \right\} \\ &= \left\{ p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) : \forall_{1 \leq i \leq n} \underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \leq a_i \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i), \underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \leq b_i \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \right\} \\ &= \{ p(x) : x \in X \} = p(X). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Z założenia wiemy, że p jest ciągła na P . Ponadto X jest zwartym podzbiorem $2n$ -wymiarowej kostki jednostkowej oraz $X \subset P$. Stąd jego obraz przez funkcję ciągłą $p(X)$ również jest zwartym podzbiorem $[0, 1]$, zatem musi on zawierać swoje kresy. Stąd wiemy, że

$$\inf \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}) = \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B) \in \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}) \quad (3.47)$$

oraz analogicznie dla supremum

$$\sup \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}) = \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B) \in \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}), \quad (3.48)$$

co z kolei daje nam

$$\tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}) \subset \tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.49)$$

Aby pokazać zawieranie w drugą stronę skorzystamy z twierdzenia Darboux. Niech $A_1, A_2 \in \text{FOU}(\hat{A})$ oraz $B_1, B_2 \in \text{FOU}(\hat{B})$ będą takie, że

$$s(A_1, B_1) = \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B) \quad (3.50)$$

oraz

$$s(A_2, B_2) = \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} s(A, B). \quad (3.51)$$

Takie zbiory rozmyte istnieją na mocy (3.47) oraz (3.48). Zdefiniujmy funkcję $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób

$$f(t) = p(\dots, t\mu_{A_1}(u_i) + (1-t)\mu_{A_2}(u_i), \dots, t\mu_{B_1}(u_i) + (1-t)\mu_{B_2}(u_i), \dots) \quad (3.52)$$

Dla dowolnego $t \in [0, 1]$ zachodzi

$$(\dots, t\mu_{A_1}(u_i) + (1-t)\mu_{A_2}(u_i), \dots, t\mu_{B_1}(u_i) + (1-t)\mu_{B_2}(u_i), \dots) \in X. \quad (3.53)$$

Stąd funkcja f jest ciągła, zatem na mocy twierdzenia Darboux $f([0, 1])$ jest przedziałem. Co więcej, na mocy (3.53) każda wartość przyjmowana przez funkcję f jest też wartością przyjmowaną przez p na zbiorze X , skąd wynika, że

$$f([0, 1]) \subset p(X) = \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}). \quad (3.54)$$

Ponieważ $f(0) = s(A_1, B_1)$ oraz $f(1) = s(A_2, B_2)$ są, odpowiednio, najmniejszą i największą wartością w zbiorze $\tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B})$ oraz $f[0, 1]$ jest przedziałem, więc

$$\tilde{s}(\hat{A}, \hat{B}) = [s(A_1, B_1), s(A_2, B_2)] = f([0, 1]) \subset \tilde{s}'(\hat{A}, \hat{B}), \quad (3.55)$$

co kończy dowód. □

Wniosek 3.16. *Miara podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych \hat{s} posiada własność E3* wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozszerzeniem do IVFS przy użyciu reprezentacji Wavy-Slice pewnej ciągłej miary podobieństwa zbiorów rozmytych s , co można zapisać w następujący sposób:*

$$\hat{s} \equiv \tilde{s}. \quad (3.56)$$

Następujące twierdzenie charakteryzuje pewną bardzo istotną rodzinę miar podobieństwa uwzględniających niepewność.

Twierdzenie 3.17. *Dla dowolnej ciągłej miary podobieństwa s zbiorów rozmytych posiadającej własności $G1^{**}$, $G2$, $S4-$, \tilde{s} jest miarą podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych uwzględniającą niepewność. Ponadto taka miara posiada opcjonalne własności $E2$, $eG3$, $eS1^*$ lub $eS2$ wtedy i tylko wtedy, gdy s posiada odpowiednio $S4$, $G3$, $S1^*$, lub $S2$.*

Dowód. Należy pokazać, że posiadanie przez ciągłą miarę podobieństwa s własności $G1^{**}$, $G2$, $S4-$ pociąga własności $E1$, $E2-$, $E3$, $E4$, $E5$, $eG1^{**}$, $eG2$, $eS3$, $eS5$ miary \tilde{s} .

Na mocy Lematu 3.13 oraz wniosku z Lematu 3.15 otrzymujemy, że \tilde{s} posiada własności $E1$ oraz $E3^*$. Własności $E2-$ oraz $E4$ wynikają z Lematów 3.6 oraz 3.11. Na podstawie Wniosku 3.10 otrzymujemy własności $eG1^{**}$, $eG2$, $eS3$ oraz $eS5$, a następnie, na mocy Lematu 3.7, własność $E5$, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia. Druga część wynika bezpośrednio z Wniosku 3.10. \square

3.4 Najczęściej używane miary podobieństwa i ich rozszerzenia

Następujący podrozdział przedstawia rozszerzenia znanych miar podobieństwa z wykorzystaniem reprezentacji Wavy–Slice. Jak zostanie pokazane, wyliczenie niektórych rozszerzonych miar podobieństwa jest trudne obliczeniowo, podczas gdy inne miary można obliczyć za pomocą prostych formuł. Szczególnie ciekawym przypadkiem jest indeks Jaccarda, któremu poświęcony zostanie osobny podrozdział. W tej części pracy pokazane zostaną miary podobieństwa oparte na odległości oraz na logice.

3.4.1 Odległość Minkowskiego

Rozszerzenia miar podobieństwa opartych na uogólnionej metryce Minkowskiego zdefiniowanych w (2.46) oraz (2.47) są stosunkowo proste. Przykładowo korzystając z (3.31) otrzymujemy następującą miarę podobieństwa:

$$\widetilde{s}_{d_r}(\hat{A}, \hat{B}) = \left[\inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} 1 - \frac{d_r(A, B)}{|U|}, \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} 1 - \frac{d_r(A, B)}{|U|} \right], \quad (3.57)$$

która określona jest dla wszystkich par przedziałowych zbiorów rozmytych. Dla uproszczenia, oznaczymy ten przedział przez $[a, b]$. Wtedy wartość dolnego ograniczenia możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} a &= \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} 1 - \frac{d_r(A, B)}{|U|} = 1 - \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{d_r(A, B)}{|U|} = 1 - \frac{1}{n} \sup_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \leq a_i \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \leq b_i \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i)}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \max \left\{ \left| \underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i) - \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \right|, \left| \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i) - \underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \right| \right\}^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Analogiczne przekształcenia prowadzą do otrzymania bezpośredniego wzoru na górne ograniczenie b . Wzór ten jest prostą sumą i do jego obliczenia niepotrzebna jest optymalizacja numeryczna. Kolejną istotną obserwacją jest fakt, że we wzorze tym występują tylko wartości dolnej i górnej

funkcji przynależności zbiorów \hat{A} oraz \hat{B} . Stąd miary te są bardzo efektywne obliczeniowo mimo, że do ich konstrukcji wykorzystano nieefektywną obliczeniowo reprezentację Wavy-Slice, uwzględniającą nieskończone ślady niepewności.

W bardzo podobny sposób można uzyskać rozszerzenia miar opartych na (2.47) oraz odległości d_∞ . Otrzymane formuły są analogiczne i mają ten sam narzut obliczeniowy.

3.4.2 Inne podejścia oparte na odległości

W przypadku miary podobieństwa opartej na odległości kątowej sytuacja jest wręcz przeciwna:

$$\widetilde{s}_{\cos\theta}(\hat{A}, \hat{B}) = \left[\inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{\sum_{u \in U} \mu_A(u) \mu_B(u)}{\sqrt{\sum_{u \in U} \mu_A(u)^2} \sqrt{\sum_{u \in U} \mu_B(u)^2}}, \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{\sum_{u \in U} \mu_A(u) \mu_B(u)}{\sqrt{\sum_{u \in U} \mu_A(u)^2} \sqrt{\sum_{u \in U} \mu_B(u)^2}} \right].$$

Powyższej definicji nie można w łatwy sposób uprościć jak to miało miejsce w przypadku odległości Minkowskiego. Problem konstrukcji algorytmu umożliwiającego dokładne obliczenie wartości takiej miary podobieństwa jest wciąż otwarty. Obecnie jedynym rozwiązaniem jest zastosowanie najnowszych metod optymalizacji numerycznej z ograniczeniami, które jednak są nieefektywne i nie gwarantują otrzymania optymalnego wyniku.

Podobnie zachowują się miary podobieństwa oparte na wektorach parametrów. Nawet przyjmując najprostsze składowe wektora, takie jak środek ciężkości czy moc zbioru rozmytego, znalezienie zbiorów minimalizujących lub maksymalizujących jednocześnie oba te parametry jest bardzo trudne.

3.4.3 Miary podobieństwa oparte na operatorze koimplikacji

Najprostszy operator koimplikacji zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$\Psi(a, b) = \min(a \Rightarrow b, b \Rightarrow a). \quad (3.59)$$

Miara podobieństwa określana jest następnie jako minimalna, średnia lub maksymalna wartość otrzymana dla wszystkich elementów uniwersum. Najciekawszy jest przypadek średniej, gdzie miara podobieństwa zdefiniowana jest jako

$$s_\Psi(A, B) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \Psi(\mu_A(u), \mu_B(u)). \quad (3.60)$$

Rozszerzenie tej miary zgodnie z reprezentacją Wavy-Slice określone jest następująco:

$$\widetilde{s}_\Psi(\hat{A}, \hat{B}) = \left[\inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \Psi(\mu_A(u), \mu_B(u)), \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \Psi(\mu_A(u), \mu_B(u)) \right] \quad (3.61)$$

Dla uproszczenia oznaczymy ten przedział przez $[a, b]$. Wtedy wartość dolnego ograniczenia możemy przekształcić w następujący sposób:

$$a = \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \Psi(\mu_A(u), \mu_B(u)) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \inf_{\substack{\mu_{\hat{A}}(u) \leq x \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \\ \mu_{\hat{B}}(u) \leq y \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u)}} \Psi(x, y). \quad (3.62)$$

Podobnie można przekształcić górne ograniczenie. Ta prosta transformacja pozwala na znaczne uproszczenie problemu wyliczenia infimum oraz supremum. Zamiast optymalizować wartość całej sumy, wystarczy zbadać, jak zachowuje się sam operator koimplikacji. Przykładowo dla operatora implikacji Łukasiewicza otrzymujemy następującą równość:

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq x \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u) \leq y \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u)}} \Psi_{\text{Łuk}}(x, y) &= \inf_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq x \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u) \leq y \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u)}} \min(\min(1, 1 - x + y), \min(1, 1 - y + x)) \quad (3.63) \\ &= \inf_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u) \leq x \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u) \leq y \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u)}} \min\{1, 1 - x + y, 1 - y + x\} = \min\{1, 1 - \bar{\mu}_{\hat{A}}(u) + \underline{\mu}_{\hat{B}}(u), 1 - \bar{\mu}_{\hat{B}}(u) + \underline{\mu}_{\hat{A}}(u)\}. \end{aligned}$$

Dzięki tej własności obliczenie rozszerzonej miary podobieństwa \widetilde{s}_{Ψ} możliwe jest w sposób bezpośredni bez konieczności używania technik optymalizacji numerycznej.

Niestety problem wyliczania miary \widetilde{s}_{Ψ} nie jest tak prosty w przypadku ogólnym. Dla dwóch podstawowych rodzin operatorów implikacji – S-implikacji oraz R-implikacji – ogólne wzory na dolne ograniczenie $\widetilde{s}_{\Psi}(\hat{A}, \hat{B})$ są następujące:

$$a = \inf_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \leq a_i \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \leq b_i \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i)}} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} T(S(1 - a_i, b_i), S(1 - b_i, a_i)) \quad (3.64)$$

oraz

$$a = \inf_{\substack{\underline{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \leq a_i \leq \bar{\mu}_{\hat{A}}(u_i) \\ \underline{\mu}_{\hat{B}}(u_i) \leq b_i \leq \bar{\mu}_{\hat{B}}(u_i)}} T(\sup\{x : T(a_i, x) \leq b_i\}, \sup\{x : T(b_i, x) \leq a_i\}), \quad (3.65)$$

gdzie T i S to, odpowiednio, t-norma i t-konorma. W obu przypadkach nie jest znany prosty sposób na bezpośrednie wyliczenie miary podobieństwa. Jest to ciekawy i wciąż otwarty problem do dalszych badań, niebędący jednak tematem tej rozprawy.

3.5 Uogólniony indeks Jaccarda

Indeks Jaccarda (patrz podrozdział 2.6) to najczęściej stosowana miara podobieństwa. Formalizuje ona obserwację, że dwa zbiory są tym bardziej podobne im więcej mają elementów wspólnych, a mniej różnych. Dla przypomnienia, indeks Jaccarda dla zbiorów rozmytych definiuje się jako

$$s_J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, \quad \text{gdzie } |A \cup B| \neq 0. \quad (3.66)$$

Ponieważ $A \cap B \subset A \cup B$, więc na indeks Jaccarda można patrzeć jak na stosunek liczby elementów wspólnych A i B do liczby wszystkich elementów w A lub B . Inne spojrzenie na indeks Jaccarda wywodzi się z obserwacji, że

$$s_J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|(A \cup B) \cap (A \cap B)|}{|A \cup B|} = \sigma(A \cap B | A \cup B). \quad (3.67)$$

Zgodnie z interpretacją mocy względnej jako stopnia zawierania, stopień podobieństwa dwóch zbiorów rozmytych zdefiniowany jest jako stopień, w jakim zbiór rozmyty $A \cup B$ zawiera się w $A \cap B$. Oczywiście odwrotna inkluzja zachodzi zawsze. Podejście to jest ciekawe również z tego względu, że odwołuje się ono do pojęcia stopnia zawierania zbiorów rozmytych (w tym przypadku

określonego jako moc względna). Naturalnym podejściem wydaje się konstrukcja następującej miary podobieństwa

$$s_\sigma(A, B) = \sigma(A|B) \wedge \sigma(B|A), \quad (3.68)$$

która swoje źródło bierze z metody dowodzenia równości zbiorów polegającej na wykazaniu zawierania w obie strony. Okazuje się, że tak określona miara podobieństwa nie jest jednak równoważna indeksowi Jaccarda, stąd nie będzie dalej brana pod uwagę.

Obie zaproponowane interpretacje można uogólnić z wykorzystaniem t-normy T i t-konormy S . Ponadto moc zbioru rozmytego również może zostać zdefiniowana za pomocą dowolnej funkcji wagowej f . Otrzymujemy w ten sposób następujące dwie definicje uogólnionego indeksu Jaccarda:

$$s'_{T,S,f}(A, B) = \frac{\sigma_f(A \cap_T B)}{\sigma_f(A \cup_S B)}, \quad (3.69)$$

$$s''_{T,S,f}(A, B) = \sigma_{T,f}(A \cap_T B | A \cup_S B) = \frac{\sigma_f((A \cup_S B) \cap_T (A \cap_T B))}{\sigma_f(A \cup_S B)}. \quad (3.70)$$

Należy zauważyć, że oba uogólnienia nie są określone w przypadku, gdy $\sigma_f(A \cup_S B) = 0$. Niestety, jednoznaczne określenie, jaką wartość powinna przyjmować miara podobieństwa w tym przypadku, nie jest możliwe. Dziedzinę miar podobieństwa można zdefiniować w następujący sposób:

$$\mathbb{E}_{S,f} = \{(A, B) \in \mathcal{FS}(U) \times \mathcal{FS}(U) : \sigma_f(A \cup_S B) \neq 0\}. \quad (3.71)$$

Dla dowolnej t-konormy i funkcji wagowej, $\mathbb{E}_{S,f}$ spełnia oba podstawowe warunki wymagane od dziedziny miary podobieństwa podane w Definicji 2.1. Ponadto do rodziny tej należy wiele specyficznych par zbiorów rozmytych. Przykładowo, dla dowolnego zbioru $X \subset U$ zarówno $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) \in \mathbb{E}_{S,f}$, jak i $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) \in \mathbb{E}_{S,f}$, co wynika bezpośrednio z własności t-operacji oraz operacji na zbiorach rozmytych. Szczególnie istotny wydaje się być przypadek szczególny, gdy

$$\mathbb{E}_{S,f} = \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) \setminus \{(\emptyset, \emptyset)\} = \mathbb{E}_\emptyset, \quad (3.72)$$

co ma miejsce np. dla $\mathbb{E}_{S_{\max}, f_{\text{id}}}$.

Obie miary podobieństwa są równoważne zarówno w przypadku klasycznych zbiorów, jak i zbiorów rozmytych, dla których przekrój i suma zbiorów zdefiniowana jest przy użyciu T_{\min} oraz S_{\max} przy identycznościowej funkcji wagowej. Dla pozostałych t-operacji równość ta nie musi zachodzić. Stąd w dalszej części podrozdziału będziemy rozważać je osobno. Jak się okaże, mają one bardzo zbliżone, choć nie jednakowe własności.

Twierdzenie 3.18. *Miary podobieństwa zbiorów rozmytych $s'_{T,S,f}$ oraz $s''_{T,S,f}$ posiadają własności $G1^{**}$, $G2$, $G3$, $S3$ oraz $S4$ -. Ponadto $s'_{T,S,f}$ ma własność $S5$, a jeśli t-norma T nie ma dzielników zera oraz $\forall_{x \in (0,1]} f(x) > 0$, to również $s''_{T,S,f}$ ma własność $S5$.*

Dowód.

G1** Bezpośrednio z definicji mocy skalarnej oraz operacji sumy i przekroju zbiorów rozmytych otrzymujemy, że w przypadku obu miar podobieństwa licznik jest mniejszy bądź równy mianownikowi oraz obie części ilorazów są nieujemne. Ponadto,

$$s'_{T,S,f}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(\mu_{\mathbb{1}_U}(u), \mu_{\mathbb{1}_U}(u)))}{\sum_{u \in U} f(S(\mu_A(u), \mu_B(u)))} = \frac{\sum_{u \in U} f(T(1, 1))}{\sum_{u \in U} f(S(1, 1))} = \frac{|U|}{|U|} = 1, \quad (3.73)$$

$$s''_{T,S,f}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(S(1, 1), T(1, 1)))}{\sum_{u \in U} f(S(1, 1))} = \frac{|U|}{|U|} = 1. \quad (3.74)$$

G2 Dla dowolnych zbiorów rozmytych $(A, B) \in \mathbb{E}_{S,f}$ mamy

$$s'_{T,S,f}(A, B) = \frac{\sigma_f(A \cap_t B)}{\sigma_f(A \cup_S B)} = \frac{\sigma_f(B \cap_T A)}{\sigma_f(B \cup_S A)} = s'_{J,T,S,f}(B, A), \quad (3.75)$$

$$s''_{T,S,f}(A, B) = \sigma_{T,f}(A \cap_T B | A \cup_S B) = \sigma_{T,f}(B \cap_T A | B \cup_S A) = s''_{J,T,S,f}(B, A). \quad (3.76)$$

G3 Ponieważ wartość sumy w liczniku i mianowniku nie zależy od kolejności elementów, obie miary podobieństwa posiadają własność G3.

S3 Niech $X \subset U$ będzie dowolnym podzbiorem uniwersum. Oczywiście $(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) \in \mathbb{E}_{S,f}$, dzięki czemu otrzymujemy

$$s'_{T,S,f}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)))}{\sum_{u \in U} f(S(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)))}, \quad (3.77)$$

$$s''_{T,S,f}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(S(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)), T(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u))))}{\sum_{u \in U} f(S(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)))} \quad (3.78)$$

Ponieważ dla każdego $u \in U$ wiemy, iż $\mu_{\mathbb{1}_X}(u) \in \{0, 1\}$, więc z definicji t-normy i t-konormy mamy, $T(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)) = 0$ oraz $S(\mu_{\mathbb{1}_X}(u), 1 - \mu_{\mathbb{1}_X}(u)) = 1$. Stąd otrzymujemy $s'_{T,S,f}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) = 0$ oraz $s''_{T,S,f}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{X^c}) = 0$.

S4- Niech $X \subset U$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem uniwersum. Niech $A = \mathbb{1}_X$. Wtedy $(A, A) \in \mathbb{E}_{S,f}$ oraz

$$s'_{T,S,f}(A, A) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(\mu_A(u), \mu_A(u)))}{\sum_{u \in U} f(S(\mu_A(u), \mu_A(u)))} = \frac{\sum_{\mu_A(u)=1} 1 + \sum_{\mu_A(u)=0} 0}{\sum_{\mu_A(u)=1} 1 + \sum_{\mu_A(u)=0} 0} = 1, \quad (3.79)$$

$$s''_{T,S,f}(A, A) = \frac{\sum_{u \in U} f(T(S(\mu_A(u), \mu_A(u)), T(\mu_A(u), \mu_A(u))))}{\sum_{u \in U} f(S(\mu_A(u), \mu_A(u)))} = \frac{\sum_{\mu_A(u)=1} 1 + \sum_{\mu_A(u)=0} 0}{\sum_{\mu_A(u)=1} 1 + \sum_{\mu_A(u)=0} 0} = 1. \quad (3.80)$$

S5 Dowód zostanie przeprowadzony dla twierdzenia transponowanego. Przyjmijmy, że zbiory rozmyte A i B są takie, że $\sigma_f(A \cap_T B) > 0$. Oczywiście wtedy też $\sigma_f(A \cup_S B) > 0$, a co za tym idzie $(A, B) \in \mathbb{E}_{S,f}$. Wystarczy pokazać, że $s'_{T,S,f}(A, B) > 0$, co wynika bezpośrednio z określenia miary podobieństwa $s'_{T,S,f}$.

W przypadku miary $s''_{T,S,f}$ postępujemy podobnie. Niech zbiory rozmyte A i B będą takie, że $\sigma_f(A \cap_T B) > 0$ ($(A, B) \in \mathbb{E}_{S,f}$). Wtedy istnieje $u_0 \in U$, dla którego $f(T(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0))) > 0$, co oznacza również, że

$$T(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0)) > 0. \quad (3.81)$$

Należy pokazać, że $s''_{T,S,f}(A, B) > 0$. W tym celu wystarczy dowieść, że

$$\sum_{u \in U} f(T(S(\mu_A(u), \mu_B(u)), T(\mu_A(u), \mu_B(u)))) > 0, \quad (3.82)$$

co jest równoważne istnieniu co najmniej jednego dodatniego składnika sumy. Z podstawowych własności t-operacji oraz (3.81) wiemy, że

$$0 < T(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0)) \leq S(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0)). \quad (3.83)$$

Ponieważ t-norma T nie ma dzielników zera, więc jej wartość jest ostro większa od zera, co z kolei dzięki własności funkcji wagowej f daje nam

$$f(\underbrace{T(S(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0)))}_{>0}, \underbrace{T(\mu_A(u_0), \mu_B(u_0))}_{>0}) > 0. \quad (3.84)$$

□

Obserwacja 3.19. Klasyczny rozmyty indeks Jaccarda

$$s'_{T_{\min}, S_{\max}, f_{id}}(A, B) = \frac{|A \cap_{\min} B|}{|A \cup_{\max} B|} \quad (3.85)$$

posiada własności G1**, G2, G3, S1*, S2, S3, S4 oraz S5.

Twierdzenie 3.20. *Miary podobieństwa zbiorów rozmytych $s'_{T,S,f}$ oraz $s''_{T,S,f}$ są ciągłe, jeśli funkcje T, S, f są ciągłe w całej swojej dziedzinie.*

Dowód. Zdefiniujmy zbiór

$$P = \{(\mu_A(u_1), \dots, \mu_A(u_n), \mu_B(u_1), \dots, \mu_B(u_n)) : (A, B) \in \mathbb{E}_{S,f}\} \subset [0, 1]^{2n} \quad (3.86)$$

oraz funkcje

$$p'(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = s'_{T,S,f}(A, B) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} f(T(a_i, b_i))}{\sum_{1 \leq i \leq n} f(S(a_i, b_i))}, \quad (3.87)$$

$$p''(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = s''_{T,S,f}(A, B) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} f(T(S(a_i, b_i), T(a_i, b_i)))}{\sum_{1 \leq i \leq n} f(S(a_i, b_i))}. \quad (3.88)$$

Należy pokazać ciągłość p' i p'' na zbiorze P . Obie funkcje zdefiniowane są za pomocą ilorazu skończonych sum. Ponadto dziedzina obu miar podobieństwa jest określona w taki sposób, aby mianownik zawsze był niezerowy. Stąd aby pokazać ciągłość p' i p'' , wystarczy pokazać ciągłość, odpowiednio, $f(T(a_i, b_i))$ oraz $f(T(S(a_i, b_i), T(a_i, b_i)))$, co wynika bezpośrednio z ciągłości funkcji T, S oraz f . □

Rozszerzenie indeksu Jaccarda do IVFS z wykorzystaniem reprezentacji Wavy-Slice przebiega analogicznie jak dla innych miar podobieństwa. Zgodnie z Definicją 3.3, dziedzina obu miar podobieństwa określona jest w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}}_{S,f} &= \left\{ (\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : \text{FOU}(\hat{A}) \times \text{FOU}(\hat{B}) \subset \mathbb{E}_{S,f} \right\} \\ &= \left\{ (\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : \forall_{\substack{A \in E \hat{A} \\ B \in E \hat{B}}} \sigma_f(A \cup_S B) \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Podobnie jak w przypadku odległości kątowej, nie jest możliwe łatwe uproszczenie formuł na dolne i górne ograniczenie. Miara $s''_{T,S,f}$ zdefiniowana jest za pomocą uogólnionej mocy względnej zbiorów rozmytych, dzięki czemu możliwe jest pewne uproszczenie problemu jej efektywnego wyliczania. W tym celu posłużymy się pojęciem uogólnionej mocy względnej przedziałowych zbiorów rozmytych [124].

Definicja 3.5. Funkcję $\hat{\sigma}_{f,T} : \mathbb{E}_f \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$ indukowaną przez ciągłą t-normę T oraz ciągłą funkcję wagową f , gdzie

$$\hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B}) = \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \sigma_{f,T}(A|B), & \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \sigma_{f,T}(A|B) \end{array} \right] \quad (3.90)$$

oraz

$$\mathbb{E}_f = \{(\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{IVFS}(U) \times \mathcal{IVFS}(U) : \forall_{B \in \hat{B}} \sigma_f(B) > 0\}, \quad (3.91)$$

nazywamy *uogólnioną przedziałową mocą względną*.

Można zauważyć następujące powiązanie pomiędzy rozszerzonym indeksem Jaccarda $\widetilde{s''_{T,S,f}}$ oraz uogólnioną mocą względną $\hat{\sigma}_{f,T}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{s''_{T,S,f}}(\hat{A}, \hat{B}) &= \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \sigma_{f,T}(A \cap_T B | A \cup_S B), & \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B})}} \sigma_{f,T}(A \cap_T B | A \cup_S B) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B}) \\ A' = A \cap_T B \\ B' = A \cup_S B}} \sigma_{f,T}(A'|B'), & \sup_{\substack{A \in \text{FOU}(\hat{A}) \\ B \in \text{FOU}(\hat{B}) \\ A' = A \cap_T B \\ B' = A \cup_S B}} \sigma_{f,T}(A'|B') \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \inf_{\substack{A' \in \text{FOU}(\hat{A} \cap_T \hat{B}) \\ B' \in \text{FOU}(\hat{A} \cup_S \hat{B})}} \sigma_{f,T}(A'|B'), & \sup_{\substack{A' \in \text{FOU}(\hat{A} \cap_T \hat{B}) \\ B' \in \text{FOU}(\hat{A} \cup_S \hat{B})}} \sigma_{f,T}(A'|B') \end{array} \right] = \hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A} \cap_T \hat{B} | \hat{A} \cup_S \hat{B}). \quad (3.92) \end{aligned}$$

Dzięki powyższej równości, wartość rozszerzonego indeksu Jaccarda można obliczyć za pomocą uogólnionej przedziałowej mocy względnej. Efektywna algorytmizacja tego problemu obliczeniowego jest tematem następnego podrozdziału. Niestety problem efektywnego obliczania miary $s'_{T,S,f}$ w ogólnym przypadku nadal pozostaje problemem otwartym. Należy jednak wspomnieć, że dla rozszerzenia klasycznego indeksu Jaccarda podano efektywne algorytmy umożliwiające jego wyliczenie w czasie $O(n \log n)$ [58, 106].

3.6 Uogólniona przedziałowa moc względna

Głównym problemem związanym z uogólnioną przedziałową mocą względną określoną w Definicji 3.5 jest jej duża złożoność obliczeniowa. Formuła (3.90) nie jest efektywna obliczeniowo, ponieważ zbiory $\text{FOU}(\hat{A})$ oraz $\text{FOU}(\hat{B})$ z reguły są nieskończone. W przypadku ogólnym obliczenie wartości $\hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$ jest równoważne problemowi wykonywania obliczeń przedziałowych na funkcjach nieliniowych, co jest problemem NP-trudnym [38].

Istnieje kilka prac, które podejmują ten problem w przypadku konkretnych t-norm oraz identycznościowej funkcji wagowej. Pierwsze rozwiązanie zaproponowane przez Rickarda i innych dla t-normy minimum jest nieefektywne [65]. Nguyen oraz Kreinovich [58] pokazali, że

$\hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$ można obliczyć efektywnie dla t-normy minimum oraz identycznościowej funkcji wagowej. Zaproponowali oni dwa algorytmy do obliczania dolnego i górnego ograniczenia przedziału $\hat{\sigma}_{f_{id},T_{\min}}(\hat{A}|\hat{B})$ o złożoności odpowiednio $O(n \cdot \log n)$ oraz $O(n)$ operacji, gdzie n to liczba elementów uniwersum. Później, Wu i Mendel zaproponowali inną metodę obliczania dolnego ograniczenia o złożoności $O(n^{1+\alpha})$, gdzie α jest bardzo małą dodatnią liczbą rzeczywistą [106]. Opracowano również efektywne algorytmy dla t-normy produktowej [121]. W tym przypadku do obliczenia obu kresów przedziału potrzeba $O(n \cdot \log n)$ operacji. Należy zauważyć, że problem optymalizacyjny, jaki należy rozwiązać, aby obliczyć przedziałową moc względną dla IVFS, jest taki sam, jak w przypadku obliczania centroidu przedziałowego zbioru rozmytego typu drugiego. Stąd też w tym przypadku możliwe jest wykorzystanie algorytmów Karnika–Mendla [35].

Niniejszy podrozdział poświęcony jest problemowi efektywnego wyliczania uogólnionej mocy względnej. Przedstawione wyniki zostały opublikowane w pracy [124].

3.6.1 Przeformułowanie problemu

Wzór na dolne i górne ograniczenie przedziału $\hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$ można zapisać za pomocą bardziej elementarnych operacji. Na mocy Lematu 3.15 wiemy, że oba kresy istnieją, stąd operacje infimum oraz supremum można zastąpić poprzez minimum oraz maksimum. Ponadto, dla uproszczenia, dla każdego $1 \leq i \leq n$ przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$a_i = \mu_{\hat{A}}(u_i) \text{ oraz } b_i = \mu_{\hat{B}}(u_i). \quad (3.93)$$

W ten sposób otrzymujemy

$$\underline{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B}) = \min_{\substack{a_i \leq \bar{a}_i \leq \bar{a}_i \\ b_i \leq \bar{b}_i \leq \bar{b}_i}} \frac{\sum_{i=1}^n f(T(a_i, b_i))}{\sum_{i=1}^n f(b_i)} \quad (3.94)$$

oraz

$$\bar{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B}) = \max_{\substack{a_i \leq \bar{a}_i \leq \bar{a}_i \\ b_i \leq \bar{b}_i \leq \bar{b}_i}} \frac{\sum_{i=1}^n f(T(a_i, b_i))}{\sum_{i=1}^n f(b_i)}. \quad (3.95)$$

Dzięki odpowiedniemu zdefiniowaniu dziedziny miary podobieństwa, powyższe ułamki są zawsze dobrze określone.

Argumenty operacji minimum i maksimum mogą być traktowane jako funkcja $2n$ zmiennych w taki sam sposób, jak w Definicji 3.4. W ten sposób można zauważyć, że wyrażenie to jest niemalejące ze względu na a_1, \dots, a_n . Dzięki tej obserwacji możliwe jest dalsze uproszczenie

$$\underline{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B}) = \min_{b_i \leq \bar{b}_i \leq \bar{b}_i} \frac{\sum_{i=1}^n f(T(a_i, b_i))}{\sum_{i=1}^n f(b_i)} \quad (3.96)$$

oraz

$$\bar{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B}) = \max_{b_i \leq \bar{b}_i \leq \bar{b}_i} \frac{\sum_{i=1}^n f(T(\bar{a}_i, b_i))}{\sum_{i=1}^n f(b_i)}, \quad (3.97)$$

gdzie dla każdego $1 \leq i \leq n$ zachodzi $0 \leq \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i \leq 1$, oraz t-norma T jak i funkcja wagowa f są ciągłe. W dalszej części podrozdziału, tam gdzie nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności, będziemy oznaczać $\underline{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$ oraz $\bar{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$ odpowiednio poprzez \underline{y} oraz \bar{y} .

Algorytm 1 Pseudokody algorytmów Nguyena-Kreinovicha (po lewej) oraz Karnika-Mendela (po prawej) do obliczania $\underline{\sigma}_{f_{id}, T_{\min}}$ oraz $\underline{\sigma}_{f_{id}, T_{\text{prod}}}$.

1: Przenumeruj \underline{a}_i , \underline{b}_i oraz \bar{b}_i w taki sposób, aby $(\min(\underline{a}_i, \bar{b}_i) - \min(\underline{a}_i, \underline{b}_i)) / (\bar{b}_i - \underline{b}_i)$ było uporządkowane rosnąco 2: for $1 \leq i \leq n$ do 3: $b_i \leftarrow \underline{b}_i$ 4: end for 5: $\underline{y}' \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n \min(\underline{a}_i, b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i}$ 6: $k \leftarrow 0$ 7: repeat 8: $\underline{y} \leftarrow \underline{y}'$ 9: $k \leftarrow k + 1$ 10: $b_k \leftarrow \bar{b}_k$ 11: $\underline{y}' \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n \min(\underline{a}_i, b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i}$ 12: until $\underline{y}' < \underline{y}$ and $i \leq n$ 13: return \underline{y}	1: Przenumeruj \underline{a}_i , \underline{b}_i oraz \bar{b}_i w taki sposób, aby \underline{a}_i były uporządkowane rosnąco 2: for $1 \leq i \leq n$ do 3: $b_i \leftarrow \frac{\underline{b}_i + \bar{b}_i}{2}$ 4: end for 5: $\underline{y}' \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n \underline{a}_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$ 6: repeat 7: $\underline{y} \leftarrow \underline{y}'$ 8: Znajdź k takie, że $p_k < \underline{y} \leq p_{k+1}$ 9: $b_i \leftarrow \begin{cases} \underline{b}_i & \text{if } i > k \\ \bar{b}_i & \text{if } i \leq k \end{cases}$ 10: $\underline{y}' \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^n \underline{a}_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$ 11: until $\underline{y}' < \underline{y}$ 12: return \underline{y}
--	--

3.6.2 Algorytmy Nguyena-Kreinovicha i Karnika-Mendela

Algorytmy Nguyena-Kreinovicha (NK, [58]) dla T_{\min} oraz f_{id} oraz Karnika-Mendela dla T_{prod} oraz f_{id} (KM, [35]) zostaną poniżej przeanalizowane. Dla skrócenia opisu przedstawione tylko zostaną algorytmy dla dolnego ograniczenia $\underline{\sigma}_{f,T}(\hat{A}|\hat{B})$. Algorytmy dla górnego ograniczenia są analogiczne. Więcej szczegółów na ich temat można znaleźć w pracach źródłowych.

Celem niniejszej sekcji jest pokazanie, że oba zaproponowane algorytmy mimo, iż stworzone zostały do rozwiązywania innych problemów oraz opisane przy użyciu całkowicie różnej notacji, mają tę samą zasadę działania. Ta obserwacja stanowić będzie podstawę do konstrukcji nowego ogólnego algorytmu do obliczania przedziałowej mocy względnej dla IVFS. W przypadku obu algorytmów w pracy przedstawione zostały pseudokody pochodzące z późniejszych publikacji [105, 106]. Oryginalnie oba podejścia zostały przedstawione tylko w sposób opisowy. Dla czytelności w obu przypadkach w pseudokodzie pominięto zaproponowane w oryginalnych jak i późniejszych pracach metody optymalizacji wydajności. Ponadto struktura obu pseudokodów została zmodyfikowana tak, aby ułatwić porównanie. Oba algorytmy przedstawione są jako Algorytm 1.

Jak można zauważyć, oba algorytmy są bardzo podobne. Najważniejsze różnice zostaną przeanalizowane poniżej. Po pierwsze, oba algorytmy różnią się strukturą iteracji. W obu przypadkach pętla jest wykonywana dopóki aktualna wartość \underline{y} nie zmaleje. W algorytmie NK wykonywane jest przeszukiwanie liniowe w poszukiwaniu punktu optymalnego poprzez sprawdzanie kolejnych wartości k . Algorytm KM działa na podobnej zasadzie jak przeszukiwanie binarne, skacząc pomiędzy różnymi wartościami k . Różnica ta wpływa jedynie na średnią liczbę iteracji. Jednakże, oba algorytmy wymagają $O(n)$ iteracji w najgorszym przypadku. Ponadto przekształcenie jednego podejścia w drugie może zostać wykonane przy niewielkim nakładzie pracy. Stąd należy wnioskować, że

różnica ta nie jest bardzo istotna.

Następną różnicą jest wyrażenie, według wartości którego uszeregowane są \underline{a}_i , \underline{b}_i oraz \bar{b}_i . Dla algorytmu NK jest to

$$p_i^{\text{NK}} = \frac{\min(\underline{a}_i, \bar{b}_i) - \min(\underline{a}_i, \underline{b}_i)}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}, \quad (3.98)$$

podczas gdy algorytm KM korzysta ze znacznie prostszego $p_i^{\text{KM}} = \underline{a}_i$. Oba te wyrażenia mają wspólne źródło. Rozważmy następujące wyrażenie:

$$p_i^* = \frac{T(\underline{a}_i, \bar{b}_i) - T(\underline{a}_i, \underline{b}_i)}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}, \quad (3.99)$$

które zarówno w przypadku t-normy minimum, jak i produktowej redukuje się odpowiednio do p_i^{NK} oraz p_i^{KM} .

Po zmianie kolejności elementów, oba algorytmy gwarantują, że w każdej iteracji

$$b_i = \begin{cases} \underline{b}_i, & \text{jeśli } i > k \\ \bar{b}_i, & \text{jeśli } i \leq k \end{cases} \quad (3.100)$$

dla pewnego k . To pozwala podejrzewać, że optymalne rozwiązanie ma zawsze następującą postać:

$$\underline{y} = \frac{\sum_{i=1}^k T(\underline{a}_i, \bar{b}_i) + \sum_{i=k+1}^n T(\underline{a}_i, \underline{b}_i)}{\sum_{i=1}^k \bar{b}_i + \sum_{i=k+1}^n \underline{b}_i}, \quad (3.101)$$

gdzie T jest albo t-normą minimum, albo produktową. Dzięki tej równości można zauważyć, że oba algorytmy szukają wartości k , przy której wynik jest optymalny. Ponadto, po niewielkich optymalizacjach, oba algorytmy mają taką samą złożoność obliczeniową: $O(n \cdot \log n)$, gdzie najbardziej kosztowną operacją jest sortowanie w pierwszym kroku.

3.6.3 Rozwiązanie dla t-norm mających u -własność

Obserwacja, że podobne algorytmy rozwiązują problem obliczania przedziałowej uogólnionej mocy względnej dla dwóch różnych t-norm była główną motywacją do badań nad możliwością zastosowania podobnego rozumowania do znacznie szerszej rodziny t-norm. Celem poniższych rozważań jest efektywne obliczenie wartości zdefiniowanych w (3.96) oraz (3.97), będących najogólniejszą wersją przedziałowej mocy względnej dla IVFS.

Po pierwsze, konieczne jest uogólnienie wartości p_i^* . Odgrywa ona kluczową rolę w działaniu obu algorytmów, wskazując kolejność, w jakiej elementy uniwersum są rozważane. Określa ona w pewien sposób siłę wpływu danego elementu uniwersum (jego stopnia przynależności) na końcowy wynik działania algorytmu. Niskie wartości p_i^* pozwalają zmniejszyć aktualny wynik, podczas gdy wartości duże – zwiększyć. Stąd, w przypadku minimalizacji, należy wybrać najmniejszą możliwą wartość p_i^* . Analogicznie dla maksymalizacji konieczne jest wybranie wartości największej. Prowadzi to do zdefiniowania następujących dwóch wartości:

$$\underline{p}_i = \inf_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{f(T(\underline{a}_i, b)) - f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))}{f(b) - f(\underline{b}_i)} \quad (3.102)$$

oraz

$$\bar{p}_i = \sup_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{f(T(\bar{a}_i, b)) - f(T(\bar{a}_i, \underline{b}_i))}{f(b) - f(\underline{b}_i)}. \quad (3.103)$$

Ponieważ problemy minimalizacji i maksymalizacji mogą być rozważane oddzielnie, bez straty ogólności dalej zakłada się, że wartości \underline{a}_i , \bar{a}_i , \underline{b}_i oraz \bar{b}_i są uszeregowane tak, że $\underline{p}_i \leq \underline{p}_{i+1}$ dla problemu minimalizacji oraz $\bar{p}_i \geq \bar{p}_{i+1}$ w przypadku maksymalizacji. Dzięki temu elementy uniwersum, które mają największy wpływ na końcowy wynik działania algorytmu, rozważane są jako pierwsze, niezależnie od aktualnie rozwiązywanego problemu.

Następnym krokiem jest uogólnienie własności (3.101).

Twierdzenie 3.21. *Jeśli funkcja wagowa f i t -norma T są ciągłe oraz \underline{a}_i , \bar{a}_i , \underline{b}_i i \bar{b}_i są uszeregowane tak, że $\bar{p}_i \geq \bar{p}_{i+1}$, to istnieje takie \bar{k} , że dla każdego $i \leq \bar{k}$ można znaleźć $\bar{u}_i \in (\underline{b}_i, \bar{b}_i]$ takie, że*

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{k}} f(T(\bar{a}_i, \bar{u}_i)) + \sum_{i=\bar{k}+1}^n f(T(\bar{a}_i, \bar{b}_i))}{\sum_{i=1}^{\bar{k}} f(\bar{u}_i) + \sum_{i=\bar{k}+1}^n f(\bar{b}_i)}. \quad (3.104)$$

Twierdzenie 3.22. *Jeśli funkcja wagowa f i t -norma T są ciągłe oraz \underline{a}_i , \bar{a}_i , \underline{b}_i i \bar{b}_i są uszeregowane tak, że $\underline{p}_i \leq \underline{p}_{i+1}$, to istnieje takie \underline{k} , że dla każdego $i \leq \underline{k}$ można znaleźć $\underline{u}_i \in (\underline{b}_i, \bar{b}_i]$ takie, że*

$$\underline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{\underline{k}} f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) + \sum_{i=\underline{k}+1}^n f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))}{\sum_{i=1}^{\underline{k}} f(\underline{u}_i) + \sum_{i=\underline{k}+1}^n f(\underline{b}_i)}. \quad (3.105)$$

Dowód. Dowody obu powyższych twierdzeń są analogiczne, stąd przedstawiony zostanie tylko kompletny dowód drugiego. Istnienie wartości b_i^* , dla których

$$\underline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n f(T(\underline{a}_i, b_i^*))}{\sum_{i=1}^n f(b_i^*)}, \quad (3.106)$$

wynika bezpośrednio z Lematu 3.15.

Zdefiniujmy następującą projekcję \underline{y} na i -tą zmienną $r_i : [\underline{b}_i, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$r_i(b_i) = \frac{\sum_{j \neq i}^n f(T(\underline{a}_j, b_j^*)) + f(T(\underline{a}_i, b_i))}{\sum_{j \neq i}^n f(b_j^*) + f(b_i)} = \frac{m_i + f(T(\underline{a}_i, b_i))}{M_i + f(b_i)}. \quad (3.107)$$

Spróbujmy teraz ustalić, kiedy $b_i^* > \underline{b}_i$. Sytuacja taka ma miejsce wtedy, gdy $r_i(b_i^*) < r_i(\underline{b}_i)$, co po przekształceniach jest równoważne następującemu warunkowi:

$$\frac{f(T(\underline{a}_i, b_i^*)) - f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))}{f(b_i^*) - f(\underline{b}_i)} < \frac{f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i)) + m_i}{f(\underline{b}_i) + M_i}. \quad (3.108)$$

Należy zauważyć, że (3.108) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{p}_i < \underline{y}$. Z tego powodu wartości \underline{p}_i większe od 1 mogą zostać obcięte, ponieważ \underline{y} jest zawsze mniejsze lub równe 1.

Z tych obserwacji można wywnioskować, że $b_i^* > \underline{b}_i$ tylko wtedy, gdy $\underline{p}_i < \underline{y}$; w przeciwnym przypadku $b_i^* = \underline{b}_i$. Złożmy, że \underline{p}_i są uszeregowane w kolejności rosnącej, tj. $\underline{p}_1 \leq \underline{p}_2 \leq \dots \leq \underline{p}_n$. Wtedy istnieje \underline{k} takie, że \underline{y} może zostać zapisane w następujący sposób:

$$\underline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{\underline{k}} f(T(\underline{a}_i, b_i^*)) + \sum_{i=\underline{k}+1}^n f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))}{\sum_{i=1}^{\underline{k}} f(b_i^*) + \sum_{i=\underline{k}+1}^n f(\underline{b}_i)}. \quad (3.109)$$

Możliwe są trzy przypadki i w każdym z nich można określić wartość \underline{k} :

- $\underline{k} = 0$, gdy $\underline{y} < \underline{p}_1$,
- $\underline{k} = j$, gdy $\underline{p}_j < \underline{y} \leq \underline{p}_{j+1}$ dla pewnego j ,
- $\underline{k} = n$, gdy $\underline{p}_n < \underline{y}$.

Aby zakończyć dowód, zdefiniujmy \underline{u}_i dla $i \leq \underline{k}$ w następujący sposób”

$$\underline{u}_i = b_i^*. \quad (3.110)$$

□

Dzięki tym twierdzeniom możliwe jest zredukowanie problemu minimalizacji oraz maksymalizacji do problemu znajdowania optymalnego punktu przegięcia k . Rezultat ten jest bardzo podobny, jak w przypadku algorytmów NK i KM, z jedną istotną różnicą – twierdzenia nie określają, w jaki sposób wyznaczyć wartości \underline{u}_i oraz \bar{u}_i . Dla f_{id} oraz T_{min} lub T_{prod} mamy $\underline{u}_i = \bar{b}_i$, jak zostało to wcześniej omówione dla algorytmów NK oraz KM. Należy jednak zauważyć, że w przypadku ogólnym dokładne znalezienie tych wartości jest praktycznie tak samo trudne, jak rozwiązanie oryginalnego problemu. Z tego powodu konieczne jest nałożenie pewnych ograniczeń na t-normę i funkcję wagową. W dalszej części pracy wprowadzona zostanie u -własność, która znacząco ogranicza zmienność wartości \underline{u}_i oraz \bar{u}_i . Pozwoli to zbadać ich cechy oraz w rezultacie zaproponować skuteczną metodą ich wyliczania.

Definicja 3.6. Para funkcji (T, f) , gdzie T jest t-normą oraz f jest funkcją wagową, posiada u -własność, jeśli dla dowolnych $a, \underline{b}, \bar{b}$ ($\underline{b} \leq \bar{b}$) istnieje \underline{u} oraz \bar{u} takie, że

$$\forall_{0 \leq m \leq M} \arg \min_{\underline{b} < b \leq \bar{b}} \frac{m + f(T(a, b))}{M + f(b)} \in \{\underline{u}, \bar{u}\} \quad (3.111)$$

oraz

$$\forall_{0 \leq m \leq M} \arg \max_{\underline{b} < b \leq \bar{b}} \frac{m + f(T(a, b))}{M + f(b)} \in \{\bar{u}, \underline{u}\}. \quad (3.112)$$

Mówimy, że t-norma T posiada u -własność, jeśli para funkcji (T, f_{id}) posiada u -własność.

Twierdzenie 3.23. Jeśli para funkcji (T, f) posiada u -własność, to

$$\forall_{1 \leq i \leq \underline{k}} \quad \underline{u}_i = \arg \min_{b_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{1 + f(T(\underline{a}_i, b))}{1 + f(b)} \quad (3.113)$$

oraz

$$\forall_{1 \leq i \leq \bar{k}} \quad \bar{u}_i = \arg \max_{b_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{1 + f(T(\bar{a}_i, b))}{1 + f(b)}. \quad (3.114)$$

Dowód. Twierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją zastosowania projekcji (3.107) do Definicji 3.6. Dla zwięzłości pokazana zostanie tylko pierwsza część. Niech \underline{k} oraz \underline{u}_i będą takie, jak w Twierdzeniu 3.22. Korzystając z (3.107) można zauważyć, że dla każdego $i \leq \underline{k}$

$$\underline{y} = r_i(\underline{u}_i) = \frac{m_i + f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i))}{M_i + f(\underline{u}_i)}, \quad (3.115)$$

gdzie

$$m_i = \sum_{i \neq j}^k f(T(\underline{a}_j, \underline{u}_j)) + \sum_{j=k+1}^n f(T(\underline{a}_j, \underline{b}_j)), \quad (3.116)$$

$$M_i = \sum_{i \neq j}^k f(\underline{u}_j) + \sum_{j=k+1}^n f(\underline{b}_j). \quad (3.117)$$

W ten sposób \underline{u}_i jest wartością, która minimalizuje powyższe wyrażenie, dzięki czemu możliwa jest następująca równość:

$$\underline{y} = \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} r_i(b) = \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{m_i + f(T(\underline{a}_i, b))}{M_i + f(b)}. \quad (3.118)$$

To z kolei daje

$$\underline{u}_i = \arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{m_i + f(T(\underline{a}_i, b))}{M_i + f(b)}. \quad (3.119)$$

Teraz możliwe jest skorzystanie z u -własności, która mówi, że

$$\arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{m_i + f(T(\underline{a}_i, b))}{M_i + f(b)} = \arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{1 + f(T(\underline{a}_i, b))}{1 + f(b)}, \quad (3.120)$$

i w rezultacie

$$\underline{u}_i = \arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{1 + f(T(\underline{a}_i, b))}{1 + f(b)}. \quad (3.121)$$

□

Twierdzenie 3.23 pozwala na zrobienie pierwszego kroku w kierunku obliczenia uogólnionej przedziałowej mocy względnej dla IVFS. Zawężenie obszaru zainteresowań do par funkcji posiadających u -własność pozwala znacząco uprościć problem, wciąż zachowując możliwość praktycznego zastosowania. Poniżej zaprezentowane zostaną nowe algorytmy do obliczania \underline{y} oraz \bar{y} w przypadku t -norm i funkcji wagowych posiadających u -własność. Wykorzystują one wprowadzone wcześniej wartości \underline{p}_i , \bar{p}_i , \underline{u}_i oraz \bar{u}_i , które można wyliczyć numerycznie na żądanie albo, dla większej wydajności, obliczyć dla konkretnych funkcji. W Tabeli 3.1 przedstawiono wartości potrzebnych parametrów dla wybranych rodzin t -norm oraz funkcji wagowych.

Procedura obliczania \underline{y} przedstawiona została za pomocą Algorytmu 2. Algorytm obliczający \bar{y} jest analogiczny i różni się tylko w kilku miejscach. Po pierwsze, \underline{p}_i oraz \underline{a}_i powinny zostać zastąpione przez \bar{p}_i oraz \bar{a}_i . Ponadto w pierwszym kroku \bar{p}_i są uszeregowane w kolejności malejącej oraz kierunek nierówności w krokach 1 oraz 8 jest zmieniony. Ogólnie, oba algorytmy działają w oparciu o tę samą zasadę, co algorytm KM. Pomijając dodatkowy nakład obliczeniowy związany z optymalizacją numeryczną (której można uniknąć), złożoność obliczeniowa zaproponowanych algorytmów to $O(n \log n)$. Pierwszy krok jest najbardziej kosztowny, gdyż wymaga on sortowania. Następnie algorytmy wykonują co najwyżej n iteracji, gdzie każda wymaga stałej liczby operacji.

Następujące twierdzenie podaje znacznie prostsze warunki, które gwarantują, że para (T, f) posiada u -własność.

Twierdzenie 3.24. *Para funkcji (T, f) , gdzie T jest t -normą oraz f funkcją wagową, posiada u -własność, jeśli f oraz T są ciągłe, f jest ściśle rosnące, oraz dla dowolnego a oraz \underline{b} istnieje*

t-norma		c_i^λ	$c_i^\lambda < \underline{b}_i$	$\underline{b}_i \leq c_i^\lambda < \bar{b}_i$	$\bar{b}_i \leq c_i^\lambda$
Minimum	\underline{p}_i	\underline{a}_i	0	$\frac{\underline{a}_i - \underline{b}_i}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}$	1
	\underline{u}_i		\bar{b}_i	\bar{b}_i	\bar{b}_i
t_{\min}	\bar{p}_i	\bar{a}_i	0	1	1
	\bar{u}_i		\underline{b}_i	\bar{a}_i	\bar{b}_i
Produktowa	\underline{p}_i	-		$\frac{\underline{a}_i}{\bar{b}_i}$	
	\underline{u}_i				
t_{prod}	\bar{p}_i	-		\bar{a}_i	
	\bar{u}_i			\bar{b}_i	
Łukasiewicza	\underline{p}_i	$1 - \underline{a}_i$	1	0	0
	\underline{u}_i		\bar{b}_i	$1 - \underline{a}_i$	\bar{b}_i
$t_{\text{Łuk}}$	\bar{p}_i	$1 - \bar{a}_i$	1	$\frac{\bar{a}_i + \bar{b}_i - 1}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}$	0
	\bar{u}_i		\bar{b}_i	\bar{b}_i	\underline{b}_i
Sugeno–Webera	\underline{p}_i	$\frac{1 - \underline{a}_i}{1 + \lambda \underline{a}_i}$	$\frac{1 + \lambda \underline{a}_i}{1 + \lambda}$	0	0
	\underline{u}_i		\bar{b}_i	$\frac{1 - \underline{a}_i}{1 + \lambda \underline{a}_i}$	\bar{b}_i
$t_\lambda^{\text{SW}}, \lambda \in (-1, 0)$	\bar{p}_i	$\frac{1 - \bar{a}_i}{1 + \lambda \bar{a}_i}$	$\frac{1 + \lambda \bar{a}_i}{1 + \lambda}$	$\frac{T_\lambda^{\text{SW}}(\bar{a}_i, \bar{b}_i)}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}$	0
	\bar{u}_i		\bar{b}_i	\bar{b}_i	\underline{b}_i
Schweizera–Sklara	\underline{p}_i	$\sqrt[\lambda]{1 - \underline{a}_i^\lambda}$	1	0	0
	\underline{u}_i		\underline{b}_i	$\sqrt[\lambda]{1 - \underline{a}_i^\lambda}$	\bar{b}_i
$t_\lambda^{\text{SS}}, \lambda \geq 1$	\bar{p}_i	$\sqrt[\lambda]{1 - \bar{a}_i^\lambda}$	1	$\frac{\sqrt[\lambda]{\bar{a}_i^\lambda + \bar{b}_i^\lambda} - 1}{\bar{b}_i - \underline{b}_i}$	0
	\bar{u}_i		\bar{b}_i	\bar{b}_i	\underline{b}_i

Tablica 3.1: Wartości parametrów wymaganych przez zaproponowane algorytmy dla typowych t -norm i identycznościowej funkcji wagowej.

$q \geq \underline{b}$ oraz $\alpha > 0$ takie, że T i f są różniczkowalne na przedziale $(q, 1]$ (T posiada pochodną cząstkową oznaczoną przez T'_b) oraz

1.

$$\forall_{\underline{b} < b \leq q} \quad p_{a, \underline{b}}(b) = \frac{f(T(a, b)) - f(T(a, \underline{b}))}{f(b) - f(\underline{b})} = \alpha, \quad (3.122)$$

2.

$$\forall_{q \leq b \leq 1} \quad T'_b(a, b) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{(f \circ T)'_b(a, b)}{f'(b)} \geq 1. \quad (3.123)$$

Dowód. Niech a, \underline{b}, q oraz α spełniają założenia twierdzenia. Ponadto niech \bar{b} będzie dowolną liczbą taką, że $\underline{b} \leq \bar{b}$. Należy udowodnić, że para funkcji spełniająca (3.122) oraz (3.123) posiada u -własność. W tym celu zbadamy własności wyrażenia

$$r(b) = \frac{m + f(T(a, b))}{M + f(b)}. \quad (3.124)$$

Algorytm 2 Algorytm obliczający \underline{y} dla funkcji posiadających u -własność.

- 1: Przenumeruj $\underline{a}_i, \underline{b}_i$ oraz \bar{b}_i w taki sposób, aby \underline{p}_i były uporządkowane rosnąco
 - 2: $k' \leftarrow \lfloor n/2.4 \rfloor$
 - 3: $m \leftarrow \sum_{i=1}^{k'} f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) + \sum_{i=k'+1}^n f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))$
 - 4: $M \leftarrow \sum_{i=1}^{k'} f(\underline{u}_i) + \sum_{i=k'+1}^n f(\underline{b}_i)$
 - 5: $\underline{y} \leftarrow \frac{m}{M}$
 - 6: **repeat**
 - 7: $k \leftarrow k'$
 - 8: $k' \leftarrow$ Znajdź k' takie, że $\underline{p}_{k'} < \underline{y} \leq \underline{p}_{k'+1}$
 - 9: $s \leftarrow \text{sign}(k' - k)$
 - 10: $m \leftarrow m + s \sum_{i=\min(k, k')+1}^{\max(k, k')} (f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) - f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i)))$
 - 11: $M \leftarrow M + s \sum_{i=\min(k, k')+1}^{\max(k, k')} (f(\underline{u}_i) - f(\underline{b}_i))$
 - 12: $\underline{y} \leftarrow \frac{m}{M}$
 - 13: **until** $k' \neq k$
 - 14: **return** \underline{y}
-

Określmy, kiedy $r(b)$ jest monotoniczne zarówno na przedziale $(\underline{b}, q]$, jak i $[q, 1]$. Rozważmy następującą transformację:

$$\begin{aligned} r(b) - r(\underline{b}) &= \frac{m + f(T(a, b))}{M + f(b)} - \frac{m + f(T(a, \underline{b}))}{M + f(\underline{b})} \\ &= \frac{f(b) - f(\underline{b})}{f(b) + M} \left[\frac{f(T(a, b)) - f(T(a, \underline{b}))}{f(b) - f(\underline{b})} - \frac{m + f(T(a, \underline{b}))}{M + f(\underline{b})} \right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Dzięki (3.122) otrzymujemy, że na przedziale $(\underline{b}, q]$

$$r(b) = \lambda_1 h(b) + \lambda_2, \quad (3.126)$$

gdzie

$$h(b) = \frac{f(b) - f(\underline{b})}{f(b) + M} \quad (3.127)$$

oraz zarówno λ_1 , jak i λ_2 są stałymi określonymi w następujący sposób:

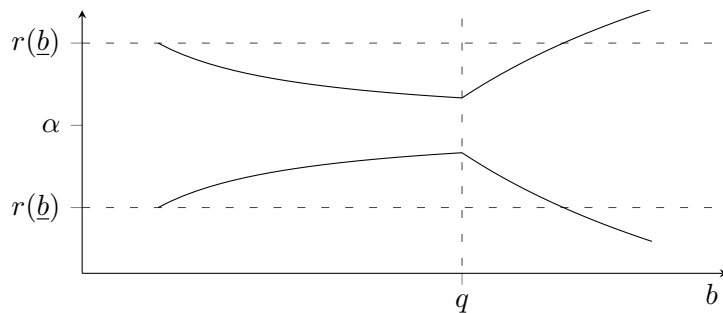
$$\lambda_1 = \alpha - \frac{m + f(T(a, \underline{b}))}{M + f(\underline{b})} = \alpha - r(\underline{b}), \quad (3.128)$$

$$\lambda_2 = \frac{m + f(T(a, \underline{b}))}{M + f(\underline{b})} = r(\underline{b}). \quad (3.129)$$

Należy zauważyć, że $h(b)$ jest zawsze rosnące, a zatem w tym przypadku $r(b)$ jest malejące wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 < 0$ i niemalejące w przeciwnym przypadku. Należy też zauważyć, że λ_1 zależy zarówno od m jak i M .

Okazuje się, że $r(b)$ jest również monotoniczne w przedziale $(q, 1]$. Dla uproszczenia dalszych rozważań oznaczmy $f(T(a, b))$ przez $T_{f,a}(b)$. Z założeń wiemy, że $T_{f,a}$ jest różniczkowalne na przedziale $(q, 1]$, stąd

$$r'(b) = \frac{(M + f(b))T'_{f,a}(b) - (m + T_{f,a}(b))f'(b)}{(M + f(b))^2}. \quad (3.130)$$



Rysunek 3.4: Kształt $r(b)$ w drugim (dolna linia) oraz trzecim (górną linia) przypadku.

Dla określenia, czy $r(b)$ jest rosnące czy malejące, należy określić, czy pochodna jest większa czy mniejsza niż 0. Po rutynowych przekształceniach otrzymujemy, że $r(b)$ jest rosnące, gdy

$$\frac{T'_{f,a}(b)}{f'(b)} \geq \frac{m + T_{f,a}(b)}{M + f(b)} = r(b), \quad (3.131)$$

oraz malejące, gdy

$$\frac{T'_{f,a}(b)}{f'(b)} \leq \frac{m + T_{f,a}(b)}{M + f(b)} = r(b). \quad (3.132)$$

Z tego, że wartość $r(b)$ zawsze leży pomiędzy 0 oraz 1, można wywnioskować, że $r(b)$ jest rosnące, gdy

$$\frac{T'_{f,a}(b)}{f'(b)} \geq 1, \quad (3.133)$$

oraz malejące, gdy

$$\frac{T'_{f,a}(b)}{f'(b)} = 0, \quad (3.134)$$

co ze względu na to, że f jest rosnące, dalej redukuje się do

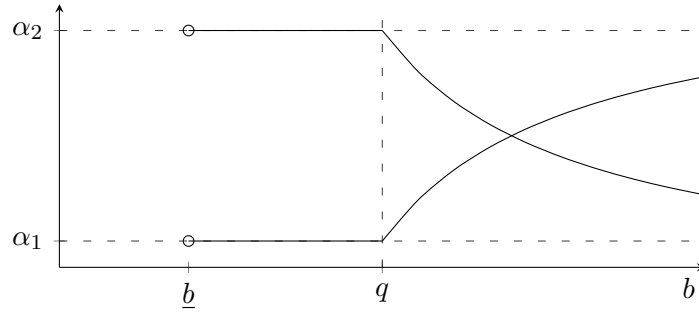
$$T'_{f,a}(b) = 0. \quad (3.135)$$

Otrzymane warunki dokładnie odpowiadają założeniom z (3.123). W konsekwencji wiemy, że $r(b)$ jest rosnące lub malejące na przedziale $(q, 1]$.

Podsumowując, mamy cztery możliwości:

1. $r(b)$ jest niemalejące na $(\underline{b}, q]$ i rosnące na $(q, 1]$,
2. $r(b)$ jest niemalejące na $(\underline{b}, q]$ i malejące na $(q, 1]$,
3. $r(b)$ jest malejące na $(\underline{b}, q]$ i rosnące na $(q, 1]$,
4. $r(b)$ jest malejące na $(\underline{b}, q]$ i $(q, 1]$.

Teraz należy pokazać, że wartości $\arg \min$ oraz $\arg \max$ mogą osiągać tylko dwie wartości, niezależnie od doboru m i M . Oczywiście te wartości mogą wciąż zależeć od innych parametrów takich, jak a czy \underline{b} . W pierwszym i ostatnim przypadku można łatwo zauważyć, że minimum i maksimum osiągnęte są zawsze dla wartości skrajnych ($r(b)$ jest rosnące lub malejące w całej dziedzinie). Stąd $\arg \min$ oraz $\arg \max$ są zawsze równe \underline{b} lub \bar{b} . Pozostałe dwa przypadki zostały przedstawione na Rysunku 3.4. W drugim przypadku minimum globalne może być albo w \underline{b} ,



Rysunek 3.5: Dwa możliwe kształty $p_{a,b}$ dla pary (t, f) spełniającej założenia Twierdzenia 3.24.

albo w \bar{b} , a maksimum globalne w q lub \bar{b} w zależności od tego, czy $q \leq \bar{b}$ czy nie. Podobnie w trzecim przypadku, minimum globalne osiągnięte może być w q lub \bar{b} (w zależności od tego, czy $q \leq \bar{b}$ czy nie), a maksimum osiągnięte może być albo w \underline{b} , albo \bar{b} . Należy zauważyć, że w obu przypadkach rzeczywista lokalizacja ekstremów nie zależy od wartości m i M . Stąd zarówno $\arg \min$ jak i $\arg \max$ są równe albo \underline{b} , albo innej wartości, która nie zależy od m i M . \square

Intuicja stojąca za powyższym twierdzeniem w przypadku identyczościowej funkcji wagowej jest następująca: t-norma posiada u -własność, jeśli $p_{a,\underline{b}}(b)$ jest stałe do pewnego punktu, a następnie albo gwałtownie rośnie, albo maleje. Oba przypadki zobrazowane zostały na Rysunku 3.5. Należy zauważyć, że

$$\underline{p}_i = \inf_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} p_{\underline{a}_i, \underline{b}_i}(b) \text{ oraz } \bar{p}_i = \sup_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} p_{\bar{a}_i, \bar{b}_i}(b). \quad (3.136)$$

Wybrane pary (T, f) , które spełniają powyższe warunki i w związku z tym posiadają u -własność, zostały przedstawione w następujących przykładach.

Przykład 3.1 (T-norma minimum). Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie dowolną ciągłą i rosnącą funkcją wagową. W pierwszej kolejności należy wyliczyć wartość $p_{a,\underline{b}}$:

$$p_{a,\underline{b}}(b) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \underline{b} < b \leq a \\ \frac{f(a)-f(\underline{b})}{f(b)-f(\underline{b})}, & \text{jeśli } \underline{b} < a < b \\ 0, & \text{jeśli } a < \underline{b} < b \end{cases} \quad (3.137)$$

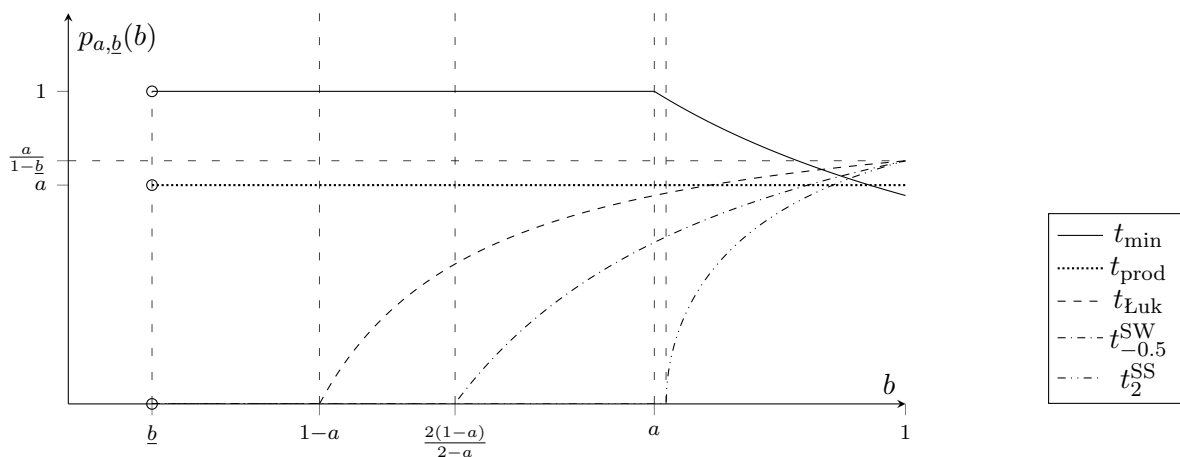
Aby wykazać u -własność, trzeba rozważyć dwa przypadki. W pierwszym, gdy $a < \underline{b}$, $p_{a,\underline{b}}(b)$ jest stałe i wynosi 0 ($\alpha = 0$ oraz $q = 1$). Zatem nie jest konieczne sprawdzanie drugiego warunku, ponieważ nie istnieje b takie, że $q < b \leq 1$. W drugim przypadku ($a \geq \underline{b}$), $\alpha = 1$ oraz $q = a$. Wykres $p_{a,\underline{b}}$ przedstawiony jest na Rysunku 3.6. Ponadto dla $b > a$

$$[f(T_{\min}(a, b))]'_b = [f(T_{\min}(a, b))]'_b (T_{\min}(a, b))'_b = 0. \quad (3.138)$$

Prowadzi to do wniosku, że para (T_{\min}, f) posiada u -własność dla dowolnej ciągłej i rosnącej funkcji wagowej f .

Oba algorytmy wymagają wartości parametrów \underline{p}_i , \bar{p}_i , \underline{u}_i oraz \bar{u}_i , które można wyliczyć bezpośrednio (patrz Tabela 3.1).

Należy zauważyć, że ten rezultat jest znacznie bardziej ogólny niż w przypadku algorytmu NK, gdyż do określenia mocy względnej można wykorzystać dowolną ciągłą i ściśle rosnącą funkcję wagową.



Rysunek 3.6: Kształt $p_{a,b}$ w zależności od wykorzystanej t -normy.

Przykład 3.2 (T-norma produktowa). Para $(T_{\text{prod}}, f_{\text{id}})$ ma u -własność. W tym przypadku $p_{a,b}(b) = a$, co daje $\alpha = a$ oraz $q = 1$. Ponadto, $\underline{p}_i = \underline{a}_i$, $\bar{p}_i = \bar{a}_i$, $\underline{u}_i = \bar{b}_i$ oraz $\bar{u}_i = \bar{b}_i$.

Przykład 3.3 (T-norma Sugeno–Webera). Rodzina t -norm Sugeno–Webera jest zdefiniowana dla dowolnego $\lambda > -1$ w następujący sposób:

$$T_{\lambda}^{SW}(a, b) = \max\left(0, \frac{a + b - 1 + \lambda ab}{1 + \lambda}\right). \quad (3.139)$$

W celu wykazania, że para $(T_{\lambda}^{SW}, f_{\text{id}})$ posiada u -własność, należy zbadać wartość $p_{a,b}(b)$

$$p_{a,b}(b) = \begin{cases} \frac{1+\lambda b}{1+\lambda}, & \text{jeśli } \frac{1-a}{1+\lambda a} < \underline{b} \\ 0, & \text{jeśli } \underline{b} < b < \frac{1-a}{1+\lambda a} \\ 1 - \frac{(1-a)-b(1+\lambda a)}{(1+\lambda)(b-\underline{b})}, & \text{jeśli } \underline{b} < \frac{1-a}{1+\lambda a} < b \end{cases}. \quad (3.140)$$

Możliwe są dwa przypadki. W pierwszym z nich, gdy $(1-a)/(1+\lambda a) < \underline{b}$, $p_{a,b}(b)$ jest stałe i równe $(1+\lambda a)/(1+\lambda)$, co daje $\alpha = (1+\lambda a)/(1+\lambda)$ oraz $q = 1$. W drugim przypadku $((1-a)/(1+\lambda a) \geq \underline{b})$ $\alpha = 0$ oraz $q = (1-a)/(1+\lambda a)$. Ponadto dla $b > (1-a)/(1+\lambda a)$

$$T_{\lambda}^{SW'}(a, b) = \left(\frac{a + b - 1 + \lambda ab}{1 + \lambda}\right)'_b = \frac{1 + \lambda a}{1 + \lambda}. \quad (3.141)$$

Ponieważ $(1+\lambda a)/(1+\lambda) \geq 1$ tylko wtedy, gdy $\lambda \leq 0$, więc (T_{λ}^{SW}, id) ma u -własność, gdy $-1 < \lambda \leq 0$. Należy zauważyć, że T_0^{SW} jest tożsama t -normie Łukasiewicza. Stąd t -norma Łukasiewicza również posiada u -własność.

Tabela 3.1 przedstawia wartości parametrów wymaganych przez oba algorytmy w przypadku identycznościowej funkcji wagowej i typowych t -norm. Rysunek 3.6 przedstawia wykres $p_{a,b}$ dla tych t -norm.

Można zauważyć, że w niektórych przypadkach \underline{p}_i lub \bar{p}_i przyjmuje tylko dwie wartości: 0 oraz 1. Ma to miejsce, przykładowo, w przypadku obliczania górnego ograniczania dla t -normy minimum. Nguyen pokazał, że w takiej sytuacji możliwe jest wyliczenie mocy względnej dla IVFS bezpośrednio, bez potrzeby sortowania [58]. Analogiczne rozumowanie może zostać zastosowane do uogólnionej przedziałowej mocy względnej dla IVFS, gdy \underline{p}_i lub \bar{p}_i przyjmuje tylko dwie skrajne wartości.

3.6.4 Rozwiązanie dla t-norm bez u -własności

Niestety nie wszystkie t-normy mają u -własność. Tematem tej sekcji będzie problem efektywnego obliczania uogólnionej przedziałowej mocy względnej dla IVFS w przypadku dowolnych t-norm. Posiadanie u -własności przez parę (T, f) nakłada silne ograniczenia na dopuszczalne wartości \underline{u}_i oraz \bar{u}_i z Twierdzeń 3.22 i 3.21, umożliwiając traktowanie poszczególnych wartości \underline{u}_i i \bar{u}_i niezależnie. Jednak, gdy t-norma nie posiada u -własności, problem obliczania \underline{u}_i oraz \bar{u}_i znacząco się komplikuje.

Twierdzenia 3.22 oraz 3.21 gwarantują istnienie \underline{u}_i i \bar{u}_i . Spróbujmy zbadać ich własności. Dla dowolnego $i \leq \underline{k}$, i -ty element może zostać wyciągnięty przed sumę zarówno w liczniku, jak i mianowniku w następujący sposób:

$$\underline{y} = \frac{f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(T(\underline{a}_j, \underline{u}_j)) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(T(\underline{a}_j, \underline{b}_j))}{f(\underline{u}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(\underline{u}_j) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(\underline{b}_j)}. \quad (3.142)$$

Ponieważ \underline{y} minimalizuje wartość całego wyrażenia, więc możemy zaobserwować, że

$$\underline{u}_i = \arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{f(T(\underline{a}_i, b)) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(T(\underline{a}_j, \underline{u}_j)) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(T(\underline{a}_j, \underline{b}_j))}{f(b) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(\underline{u}_j) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(\underline{b}_j)}. \quad (3.143)$$

Stąd każde \underline{u}_i zależy od wszystkich pozostałych \underline{u}_j .

Jednym z rozwiązań tego problemu może być konstrukcja równania rekurencyjnego, opisującego wartość \underline{u}_i wraz z iteratywnym algorytmem przybliżającym jego rozwiązanie. Równanie można łatwo wyprowadzić z (3.143)

$$\underline{u}_i^{(l+1)} = \arg \min_{\underline{b}_i < b \leq \bar{b}_i} \frac{f(T(\underline{a}_i, b)) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(T(\underline{a}_j, \underline{u}_j^{(l)})) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(T(\underline{a}_j, \underline{b}_j))}{f(b) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\underline{k}} f(\underline{u}_j^{(l)}) + \sum_{j=\underline{k}+1}^n f(\underline{b}_j)}, \quad (3.144)$$

z następującymi warunkami początkowymi:

$$\underline{u}_i^{(0)} = \begin{cases} \underline{b}_i, & \text{jeśli } i > \underline{k} \\ \bar{b}_i, & \text{jeśli } i \leq \underline{k} \end{cases}. \quad (3.145)$$

Należy zauważyć, że w tym równaniu $\underline{u}_i^{(l+1)}$ nie zależy bezpośrednio od $\underline{u}_i^{(l)}$. Jednakże, występuje tu pośrednia zależność od $\underline{u}_i^{(l-1)}$ poprzez pozostałe $\underline{u}_j^{(l)}$. Wykorzystanie tego równania nie gwarantuje otrzymania optymalnej wartości \underline{u}_i . Jednak, jak zostało to wykazane w eksperymentach, sytuacja taka nie ma miejsca. Algorytm szybko zbiega do optymalnej wartości \underline{u}_i . Oczywiście analogiczne rozumowanie może zostać również zastosować do \bar{u}_i .

Głównym celem podczas projektowania algorytmów dla obliczania uogólnionej przedziałowej mocy względnej dla IVFS w przypadku t-norm bez u -własności było zintegrowanie zaproponowanego równania rekurencyjnego z algorytmem zaproponowanym w poprzedniej sekcji. Ogólna zasada działania polega na iteracyjnym wykonywaniu Algorytmu 2, dopóki zmiana w wyniku będzie wystarczająco mała (mniejsza niż pewien ustalony ε). Pseudokod algorytmu dla obliczania dolnego ograniczenia przedstawiony jest za pomocą Algorytmu 3. Podobnie jak w poprzedniej sekcji, algorytm dla obliczania \bar{y} jest bardzo podobny.

Algorytm 3 Przybliżony algorytm do obliczania \underline{y} w przypadku t-norm bez u -własności.

- 1: Przenumeruj $\underline{a}_i, \underline{b}_i$ oraz \bar{b}_i w taki sposób, aby \underline{p}_i były uporządkowane rosnąco
 - 2: $k' \leftarrow \lfloor n/2.4 \rfloor$
 - 3: $m \leftarrow \sum_{i=1}^{k'} f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) + \sum_{i=k'+1}^n f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i))$
 - 4: $M \leftarrow \sum_{i=1}^{k'} f(\underline{u}_i) + \sum_{i=k'+1}^n f(\underline{b}_i)$
 - 5: $y' \leftarrow \frac{m}{M}$
 - 6: **repeat**
 - 7: $\underline{y} \leftarrow \frac{m}{M}$
 - 8: **repeat**
 - 9: $k \leftarrow k'$
 - 10: $k' \leftarrow$ Znajdź k' takie, że $\underline{p}_{k'} < \underline{y} \leq \underline{p}_{k'+1}$
 - 11: $s \leftarrow \text{sign}(k' - k)$
 - 12: $m \leftarrow m + s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} (f(T(\underline{a}_i, \underline{u}_i)) - f(T(\underline{a}_i, \underline{b}_i)))$
 - 13: $M \leftarrow M + s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} (f(\underline{u}_i) - f(\underline{b}_i))$
 - 14: $\underline{y} \leftarrow \frac{m}{M}$
 - 15: **until** $k' \neq k$
 - 16: $e \leftarrow |y' - \underline{y}|$
 - 17: $y' \leftarrow \underline{y}$
 - 18: **until** $e < \varepsilon$
 - 19: **return** \underline{y}
-

Zastosowania w klasyfikacji

Problem klasyfikacji polega na określeniu klasy (kategorii), do której należy przypisać nowy, wcześniej nieznaną obiekt. Budowa klasyfikatora odbywa się z wykorzystaniem zbioru uczącego, zawierającego dane o obiektach, co do których znana jest ich przynależność do klasy. Obiekty te są opisane przy pomocy różnych atrybutów. Do oceny skuteczności klasyfikatora wykorzystuje się zbiór testowy zawierający instancje nie znane podczas jego tworzenia. Różne metody klasyfikacji znalazły zastosowanie m.in. w tak ważnych dziedzinach, jak przetwarzanie tekstu czy diagnostyka medyczna.

Problem klasyfikacji znacząco się komplikuje, gdy dopuścimy niekompletność lub, ogólniej, niepewność danych. Najprostszy wariant zakłada brak wartości wybranych atrybutów w zbiorze testowym. Rozwiązaniem w takim przypadku może być konstrukcja osobnych modeli dla uwzględnienia braku wartości każdego atrybutu. Rozwiązanie to nie jest jednak efektywne, gdy dopuścimy brak wartości wielu różnych atrybutów. Kolejny wariant to brak danych zarówno w zbiorze testowym, jak i uczącym. Ponadto w obu wariantach można uwzględnić nie tylko niepewność wynikającą z braku danych, ale również bardziej ogólnie, niepewność typu epistemicznego. W takich warunkach konstrukcja efektywnego klasyfikatora z wykorzystaniem klasycznych metod może okazać się bardzo trudna albo nawet niemożliwa.

Podstawowe problemy napotymane podczas klasyfikacji danych niepewnych to:

- niemożliwość użycia wszystkich dostępnych danych do konstrukcji modelu (usuwanie obiektów lub atrybutów, w których występują brakujące wartości),
- niemożliwość klasyfikacji obiektów z brakującymi wartościami,
- konieczność konstrukcji różnych metod klasyfikacji dla różnych danych (np. osobny model dla obiektów z brakującymi wartościami i bez nich),
- znaczący wzrost złożoności obliczeniowej zarówno procesu uczenia klasyfikatora, jak i samej klasyfikacji,
- wzrost złożoności metod klasyfikacji, który znacząco utrudnia zrozumienie konstruowanych modeli.

Zaproponowane w niniejszym rozdziale metody klasyfikacji próbują rozwiązać te problemy za pomocą *miar podobieństwa uwzględniających niepewność*.

4.1 Zaproponowane metody klasyfikacji

W niniejszej rozprawie zaproponowane zostaną dwie metody klasyfikacji, oparte na *miarach podobieństwa uwzględniających niepewność*, wprowadzonych w poprzednim rozdziale. Obie metody działają na zasadzie wyboru najbliższego sąsiada, jednak różnią się strukturą zbioru uczącego oraz sposobem jego wykorzystania. W *metodzie k najpodobniejszych sąsiadów* cały zbiór uczący stanowi bazę do dalszej klasyfikacji, podczas gdy w *rozmytym klasyfikatorze przedziałowym* służy on tylko do określenia prototypów klas. Podejście oparte na prototypach pozwala na płynne połączenie zarówno wiedzy zawartej w danych, jak i wiedzy, którą można uzyskać od eksperta.

Cechą, która wyróżnia obie zaproponowane metody klasyfikacji jest pełne wsparcie dla niepewności danych. Dzięki wykorzystaniu *miar podobieństwa uwzględniających niepewność*, zaproponowane metody klasyfikacji bez problemu radzą sobie z niepewnością typu epistemicznego zarówno w zbiorze uczącym, jak i podczas klasyfikacji. Ponadto, wynikiem działania *rozmytego klasyfikatora przedziałowego*, oprócz wskazania klasy, do jakiej należy przypisać nowy, niepewny obiekt, jest też przedziałowy zbiór rozmyty opisujący przynależność do wszystkich znanych klas, dzięki czemu możliwa jest wizualizacja wyników. Ta cecha sprawia, że rozwiązanie może zostać wykorzystane w systemach wspomagania decyzji.

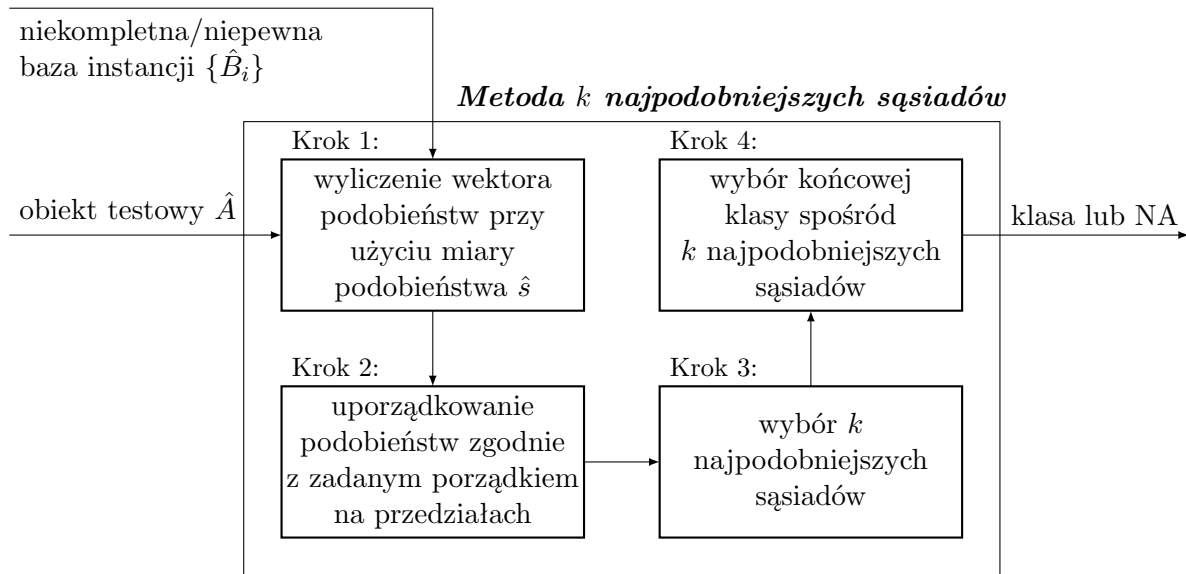
W systemach eksperckich oraz, ogólniej, w problemie wspomagania decyzji bardzo często, oprócz samej skuteczności, ważna jest również interpretowalność wykorzystywanych modeli matematycznych. Zbyt skomplikowane i trudne do zrozumienia dla eksperta metody, zniechęcają do ich wykorzystania. Problem taki ma miejsce przykładowo w dziedzinie wspomagania diagnostyki medycznej, gdzie lekarze bardzo sceptycznie spoglądają na metody, których mieliby używać na zasadzie czarnej skrzynki.

Opracowywane klasyfikatory tworzone były z myślą o wykorzystaniu w medycznych systemach wspomagania diagnostyki. Z tego powodu jednym z podstawowych założeń było utrzymanie prostoty oraz niewielkiej złożoności koncepcyjnej. Wybrane rozwiązania bazują na metodzie najbliższego sąsiada, która bardzo przypomina stosowaną w medycynie metodę opartą na studium przypadku.

4.1.1 Metoda k najpodobniejszych sąsiadów

Metoda k najpodobniejszych sąsiadów (ang. *k most similar neighbors method*, kSN) jest wariantem metody k najbliższych sąsiadów, gdzie zamiast odległości pomiędzy obiektami wykorzystuje się ich przedziałowe podobieństwo. Podstawowym założeniem przy konstrukcji klasyfikatora była możliwość klasyfikacji danych obarczonych niepewnością epistemiczną (np. wynikającą z niekompletności danych). Jednak miary podobieństwa uwzględniające niepewność nie mogą w prosty sposób posłużyć do konstrukcji funkcji odległości na potrzeby metody k najbliższych sąsiadów. Stąd *metoda k najpodobniejszych sąsiadów* posiada dodatkowe elementy, odpowiedzialne za obsługę niepewności. Schemat 4.1 przedstawia główne kroki zaproponowanej metody klasyfikacji.

Podstawową różnicą pomiędzy funkcją odległości, a *miarą podobieństwa uwzględniającą niepewność*, jest przedziałowy charakter wartości podobieństwa. Główny problem dotyczy uszeregowania przedziałów (Krok 2.), które, w odróżnieniu od liczb rzeczywistych, nie jest zdefiniowane jednoznacznie. Standardowe metody szeregowania przedziałów to:



Rysunek 4.1: Schemat działania klasyfikatora opartego na metodzie k najbliższych sąsiadów.

- sortowanie przedziałów względem środka, dolnego lub górnego ograniczenia

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } a_1 + b_1 < a_2 + b_2, \quad (4.1)$$

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } a_1 < a_2, \quad (4.2)$$

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } b_1 < b_2, \quad (4.3)$$

- sortowanie oparte na porównywaniu wartości bipolarnych [11, 29]

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } a_1 + b_1 < a_2 + b_2 \text{ lub } a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \text{ i } a_1 - b_1 < a_2 - b_2, \quad (4.4)$$

- wykorzystanie częściowego porządku określonego przez relację dominacji przedziałów

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } b_1 < a_2, \quad (4.5)$$

- wykorzystanie częściowego porządku kraty, określonego przez relację

$$[a_1, b_1] < [a_2, b_2], \text{ gdy } a_1 < a_2 \text{ i } b_1 < b_2. \quad (4.6)$$

W przypadku trzeciej i czwartej metody, otrzymany porządek jest tylko częściowy. Z tego powodu nie można jednoznacznie uporządkować przedziałów. Jednak na potrzeby zastosowania w klasyfikacji, wystarcza dowolne uszeregowanie przedziałów, które jest zgodne z wybraną relacją.

Również pozostałe kroki *metody k najbliższych sąsiadów* umożliwiają dopasowanie parametrów wpływających na jakość klasyfikacji. Najistotniejszym parametrem jest dobór miary podobieństwa w Kroku 1. Dzięki odpowiednim własnościom *miary podobieństwa uwzględniającej niepewność*, nie ma potrzeby nakładania dodatkowych obostrzeń. Problem doboru wartości parametru k z Kroku 3 jest analogiczny, jak w przypadku klasycznej metody najbliższego sąsiada.

Ostatni krok polega na wyborze klasy dla obiektu testowego na podstawie k najbliższych sąsiadów. Najprostsze rozwiązanie to wybór dominującej klasy. Uwzględnienie niepewności w

procesie klasyfikacji pozwala na wykorzystanie innej metody wyboru klasy. Polega ona na wyborze klasy sąsiada, którego podobieństwo niesie najmniej niepewności (tj. przedział będący wartością miary podobieństwa ma najmniejszą długość). Następna metoda może zostać wykorzystana tylko, gdy dopuszczalna jest sytuacja, w której klasyfikator nie podejmuje decyzji. W tej metodzie, jako klasa dla obiektu wybierana jest ta, do której należą wszyscy k najpodobniejsi sąsiedzi. W przypadku różnych klas decyzja nie jest podejmowana. Brak decyzji może również mieć miejsce w przypadku parzystych wartości parametru k i metody wyboru klasy dominującej. Takie rozwiązanie może być szczególnie przydatne w systemach eksperckich wspierających diagnostykę medyczną, gdzie w przypadku niewystarczających przesłanek można całkowicie zrezygnować z podejmowania decyzji wskazując w ten sposób, że należy zebrać więcej danych.

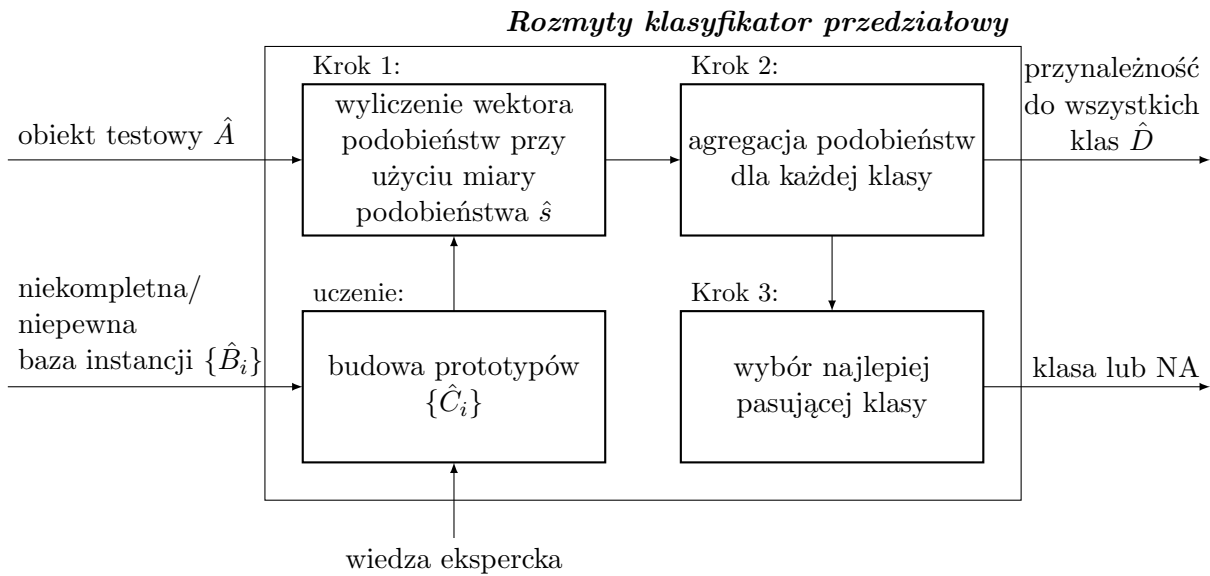
Do najważniejszych zalet *metody k najpodobniejszych sąsiadów* należy zaliczyć prostotę jej koncepcji, łatwość implementacji oraz jednorodny sposób operowania na kompletnych, niekompletnych, a nawet niepewnych danych. Trzecia zaleta jest szczególnie ważna, gdyż mało jest modeli o takiej własności.

Do podstawowych wad zaproponowanej metody należy duża złożoność obliczeniowa. Choć faza uczenia klasyfikatora w tym przypadku nie jest związana z dużym nakładem obliczeniowym, to koszt klasyfikacji pojedynczej instancji jest dość wysoki. W rozdziale trzecim pokazano, że wyliczenie wybranych miar podobieństwa możliwe jest w czasie $O(|U| \log |U|)$. Pierwszy krok wymaga zatem $O(n|U| \log |U|)$ operacji, gdzie n to liczba instancji w bazie. Uporządkowanie przedziałów w kroku drugim, w zależności od użytej metody, można wykonać w czasie $O(n \log n)$, jeśli wybrany porządek jest całkowity, lub $O(n^2)$, jeśli do sortowania zgodnie z porządkiem częściowym wykorzystane zostanie sortowanie topologiczne. Realizacja kroków trzeciego i czwartego wymaga $O(k)$ operacji. Zatem łącznie do sklasyfikowania pojedynczego obiektu testowego potrzeba $O(n \log n + n|U| \log |U|)$ lub $O(n^2 + n|U| \log |U|)$ operacji. Złożoność ta, choć duża, wciąż pozwala na efektywne klasyfikowanie, nawet przy kilku tysiącach elementów w bazie instancji.

4.1.2 Przedziałowy klasyfikator rozmyty

Przedziałowy klasyfikator rozmyty (ang. *Interval-Valued Fuzzy Classifier, IVFC*) został po raz pierwszy opisany w [73]. Podstawowym założeniem przy jego opracowywaniu była możliwość radzenia sobie z niepewnością w klasyfikowanych obiektach. W zaproponowanym podejściu, zamiast traktować to jako przeszkodę, uczyniono z tego główny atut pozwalając, aby wynik klasyfikacji również obarczony był niepewnością.

Ogólny schemat działania IVFC (Rysunek 4.2) jest zbliżony do poprzedniej metody. Główną rolę w klasyfikacji wciąż odgrywa *miara podobieństwa uwzględniająca niepewność*. Podstawowa różnica dotyczy sposobu wykorzystania bazy instancji. W *metodzie k najpodobniejszych sąsiadów* cała baza bierze bezpośredni udział w klasyfikacji. W przypadku *przedziałowego klasyfikatora rozmytego* jest ona wykorzystywana tylko do budowy prototypów poszczególnych klas. Pierwotna wersja klasyfikatora dopuszczała jeden prototyp na klasę, jednak rozwiązanie to, choć bardzo eleganckie z teoretycznego punktu widzenia, okazało się zbyt mało elastyczne dla zastosowań praktycznych. W procesie konstrukcji prototypów można też uwzględnić wiedzę eksperta zarówno poprzez dodanie nowych, jak i edycję uzyskanych w inny sposób prototypów. Problem generowania prototypów (czy też redukcji instancji dla metody k najbliższych sąsiadów) jest znany i szeroko



Rysunek 4.2: Schemat działania przedziałowego klasyfikatora rozmytego.

zbadany [103]. Jednak wciąż mało jest prac na temat radzenia sobie z danymi niekompletnymi oraz niepewnymi w sensie epistemicznym.

Prototypy, niezależnie od metody, jaką zostały uzyskane, są w pierwszym kroku algorytmu klasyfikacji porównywane z obiektem testowym za pomocą miary podobieństwa. Każde porównanie przypisuje jedno przedziałowe podobieństwo pewnej klasie. W ten sposób dla każdej klasy, dla której istnieje prototyp, uzyskiwana jest lista podobieństw, które następnie w kroku drugim muszą zostać zagregowane do jednego przedziału. Najprostszym rozwiązaniem jest wybranie przedziału, który opisuje największe podobieństwo. W tym celu można posłużyć się jedną z metod porządkowania przedziałów z poprzedniej sekcji. Ponadto w przypadku, gdy interpretacja klas w sposób numeryczny jest adekwatna w danym problemie, do agregacji można również wykorzystać przedziałową średnią ważoną.

W kroku drugim, konstruowany jest przedziałowy zbiór rozmyty, który najczęściej ma następującą postać:

$$\hat{D} = \hat{s}(\hat{C}_{i_1}, \hat{A}) / \text{klasa}_{i_1} + \hat{s}(\hat{C}_{i_2}, \hat{A}) / \text{klasa}_{i_2} + \dots + \hat{s}(\hat{C}_{i_n}, \hat{A}) / \text{klasa}_{i_n}. \quad (4.7)$$

Stanowi on bardzo cenne źródło informacji na temat wyniku klasyfikacji, pozwalając na ocenę jej jakości, jak i wizualizację w postaci informacji bipolarnej (patrz Sekcja 4.3).

Standardowo od klasyfikatora wymaga się jednak, aby wskazał on jedną klasę, do której należy przypisać nowy obiekt testowy. Stąd w kroku trzecim przedziałowy zbiór rozmyty \hat{D} , opisujący przynależność do poszczególnych klas, musi zostać podsumowany, czego wynikiem będzie wskazanie jednej klasy. Podobnie jak w poprzednich krokach, w tym celu można wykorzystać wiele metod, a najprostsze bazują ponownie na metodach porządkowania przedziałów – wybierana jest klasa, do której przypisane jest największe podobieństwo. W przypadku użycia tej samej metody porządkowania przedziałów w krokach drugim i trzecim, wynik działania IVFC jest tożsamy z metodą k najpodobniejszych sąsiadów dla $k = 1$ zastosowaną dla zredukowanej bazy instancji (prototypów).

W przypadku *przedziałowego klasyfikatora rozmytego* nakład obliczeniowy rozkłada się zarówno na fazę uczenia jak i klasyfikacji. W fazie uczenia budowane są prototypy, dzięki czemu znaczącej redukcji ulega wpływ rozmiaru bazy instancji na czas późniejszej klasyfikacji. Nakład obliczeniowy tej fazy zależy od wykorzystanych metod. Koszt klasyfikacji pojedynczej instancji to $O(m|U| \log |U|)$ operacji dla pierwszego kroku, gdzie m to liczba prototypów skonstruowanych na podstawie bazy instancji. Zarówno krok drugi i jak i trzeci wymaga $O(m \log m)$ lub $O(n^2)$ operacji w zależności od wykorzystanej metody. Stąd łączna złożoność obliczeniowa etapu klasyfikacji to, podobnie jak w przypadku *metody k najpodobniejszych sąsiadów*, $O(m \log m + m|U| \log |U|)$ lub $O(m^2 + m|U| \log |U|)$. Różnica jest jednak znacząca, gdyż wartość m nie zależy od rozmiaru bazy instancji i z reguły jest bardzo mała, maksymalnie kilka prototypów na klasę.

4.2 Ewaluacja i wyniki

Przeprowadzenie uczciwego porównania skuteczności opracowanych metod klasyfikacji z innymi znanymi klasyfikatorami jest trudne. Większość z nich nie potrafi operować na danych przedziałowych. Z drugiej strony, porównywanie metod stworzonych do radzenia sobie z niepewnością informacji na danych jej pozbawionej, znacznie faworyzuje rozwiązania klasyczne.

Kolejnym problemem jest dostępność dobrze udokumentowanych zbiorów danych obarczonych niekompletnością, które mogłyby posłużyć takiemu porównaniu. Z myślą o przewyżczeniu tego problemu, w ramach projektu KEEL stworzono archiwum zbiorów danych [1]. Niestety zawiera ono tylko jeden rzeczywisty zbiór danych (w różnych wariantach), który może zostać wykorzystany do realizacji tego zadania.

Na potrzeby tego oraz następnego podrozdziału przygotowano, dostępne na licencji *open source*, implementacje opracowanych miar podobieństwa oraz metod klasyfikacji [119]. Jako platformę wybrano uznany i darmowy język programowania *R*.

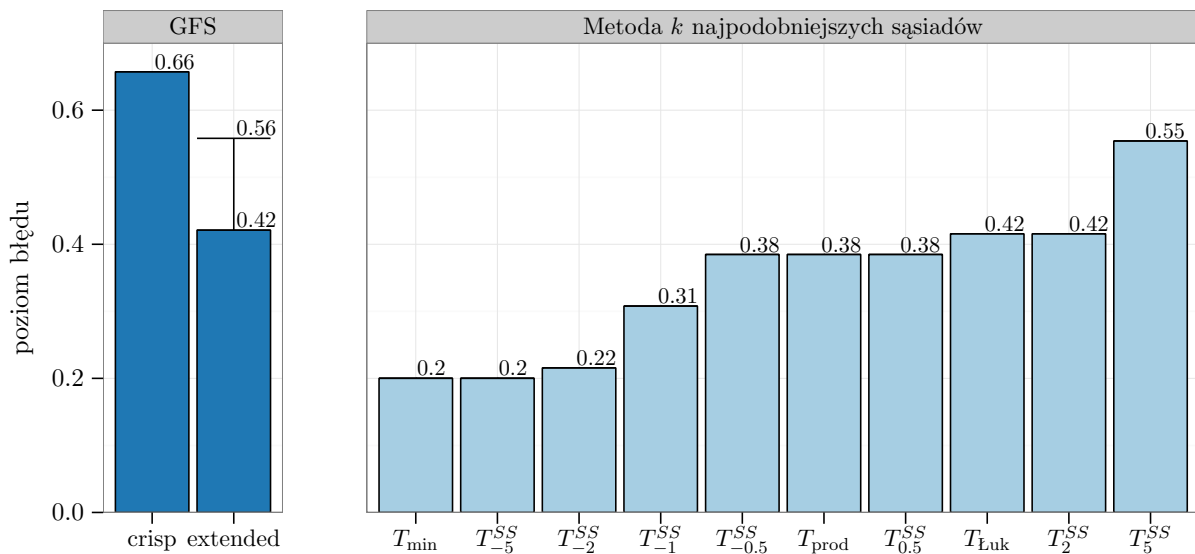
Niniejszy podrozdział poświęcony jest ewaluacji zaproponowanych metod klasyfikacji na zbiorze danych pochodzącym z archiwum KEEL. Skuteczność zostanie porównana z metodami zaproponowanymi przez twórców tego zbioru danych.

Zbiór danych i procedura ewaluacji

Dysleksja może zostać zdefiniowana jako upośledzenie procesu uczenia u osób z prawidłowym ilorazem inteligencji oraz bez innych fizycznych lub psychologicznych problemów, które mogłyby tłumaczyć taki stan.

Zbiór danych *dyslexic* zawiera wartości dwunastu wskaźników (atrybutów), pozwalających ocenić, czy umiejętności czytania, pisania oraz wykonywania rachunków są rozwinięte odpowiednio do wieku dziecka. Zbiór uwzględnia 65 dzieci w wieku między 6 i 8 lat, zamieszkających w prowincji Asturia w Hiszpanii. Szacuje się, że problem w tym rejonie dotyczy 4-5% dzieci.

Zbiór danych obciążony jest niepewnością wynikającą ze świadomej decyzji psychologa badającego dziecko. Każdy atrybut przyjmuje wartości z przedziału $[0, 10]$. W przypadku trudności z określeniem dokładnej wartości, psycholog może posłużyć się dowolnym przedziałem. Ponadto zbiór danych nie jest kompletny i wartości niektórych atrybutów nie są dostępne. Opisy wszystkich



Rysunek 4.3: *Uśredniony błąd klasyfikacji na zbiorze danych dyslexic. Po lewej stronie nanie-siono również wyniki klasyfikatorów opartych na metodzie GFS.*

instancji zostały znormalizowane i poddane konwersji do przedziałowego zbioru rozmytego. Brakujące wartości zostały zastąpione przedziałem wszystkich możliwości, tj. $[0, 1]$.

Podczas badania dokonuje się klasyfikacji dziecka do następujących czterech grup: *bez dysleksji, do kontroli, z dysleksją* oraz *inne zaburzenie*. Każde dziecko w wyniku badania może zostać przypisane jednocześnie do wielu grup.

Ewaluacja została przeprowadzona z wykorzystaniem 10-krotnej walidacji krzyżowej, takiej samej jak w pracach [61, 62], dzięki czemu możliwe będzie porównanie otrzymanych wyników. Podział na zbiory uczące i testowe został pobrany z archiwum KEEL.

Wyniki i dyskusja

Zgodnie z zaproponowanym schematem oceniono skuteczność klasyfikacji 600 wariantów *metody k najpodobniejszych sąsiadów*. Wykorzystano następujące komponenty i wartości parametrów:

1. miara podobieństwa uwzględniająca niepewność $\widetilde{s''_{T,S,f_{id}}}$ dla następujących t-norm i odpowiadających im t-konorm: $T_{-\infty}^{SS}$ ($\equiv T_{\min}$), T_{-5}^{SS} , T_{-2}^{SS} , T_{-1}^{SS} , $T_{-0.5}^{SS}$, T_0^{SS} ($\equiv T_{\text{prod}}$), $T_{0.5}^{SS}$, $T_{\text{Łuk}}$ ($\equiv T_1^{SS}$), T_2^{SS} oraz T_5^{SS} ;
2. porządek przedziałów oparty na środku, dolnym lub górnym ograniczeniu, relacji dominacji (4.5) oraz porządek zgodnie z (4.6);
3. wartości k z przedziału od 1 do 5;
4. metody wyboru końcowej klasy oparte na głosowaniu większościowym, najmniejszej niepewności oraz całkowitej zgodności.

Niestety *przedziałowy klasyfikator rozmyty* nie mógł zostać wykorzystany na tym zbiorze danych ze względu na zbyt małą ilość informacji potrzebnych do utworzenia prototypów.

Na Rysunku 4.3 przedstawiono średni poziom błędów w klasyfikacji czteroklasowej. Dla porównania przedstawione zostały również wyniki uzyskane przez oba warianty metody GFS (ang. Genetic Fuzzy System), która została zaproponowana przez autorów zbioru *dyslexic*. Podstawowy wariant (crisp) bardzo słabo radzi sobie z danymi niepewnymi, uzyskując błąd klasyfikacji na poziomie 0.657. Jego rozszerzona wersja wypada lepiej, uzyskując wynik w przedziale [0.421, 0.558].

Obie te metody są jednak istotnie gorsze od większości wariantów *metody k najpodobniejszych sąsiadów*. Podstawowa metoda oparta na mierze podobieństwa zbudowanej w oparciu o t-normę minimum (klasyczny indeks Jaccarda) uzyskała w ewaluacji błąd klasyfikacji na poziomie zaledwie 0.2. Nie jest to wynik odosobniony, gdyż również dla wielu innych t-norm błąd nie przekracza 0.4.

Bardzo ciekawy jest też dobór wartości parametru k . Dla t-norm, które uzyskały najniższy błąd klasyfikacji (są to też t-normy o niższych wartościach parametru λ) wynosi ona 1. Wraz ze wzrostem λ rośnie też k . Stąd można wnioskować, że w problemie klasyfikacji dysleksji, najlepszą skuteczność osiąga się poprzez bezpośrednie przypisanie klasy identycznej jak najpodobniejsza (w sensie rozszerzonego indeksu Jaccarda) instancja z bazy.

4.3 Zastosowania w diagnostyce guzów jajnika

Niniejszy podrozdział poświęcony jest zagadnieniu diagnostyki różnicowej guzów jajnika. Problem ten stanowił punkt wyjściowy do rozpoczęcia badań nad klasyfikacją danych niekompletnych i niepewnych. Sekcja rozpoczyna się krótkim opisem problemu z medycznego punktu widzenia. Następnie zostaną przedstawione dwa scenariusze wykorzystania zaproponowanych metod klasyfikacji. W obu przypadkach przedstawione zostaną wyniki obszernych ewaluacji skuteczności przeprowadzonych na rzeczywistych danych medycznych.

4.3.1 Wprowadzenie do problematyki diagnostyki guzów jajnika

Guzy złośliwe jajnika są jednym z najtrudniejszych problemów współczesnej onkologii ginekologicznej zarówno w aspekcie diagnostyki, jak i leczenia [79]. Problem ten obejmuje wszystkie kraje na świecie, także te wysoko rozwinięte [37]. Nie w pełni poznana etiologia, a także rosnąca zachorowalność i umieralność jeszcze bardziej zwiększają wagę tego zagadnienia. Wysoki wskaźnik umieralności u kobiet wynika z tego, że nowotwory jajnika są trudne do wykrycia we wczesnych fazach zaawansowania [79].

Najnowsze badania epidemiologiczne wykazują, iż liczba zachorowań na nowotwór jajnika rośnie z roku na rok. Okazuje się jednak, iż występowanie tej choroby jest zróżnicowane ze względu na strefy geograficzne, otaczające środowisko oraz wiek. Najbardziej podatne na zmiany jajnika są kobiety zamieszkałe w północnej i zachodniej Europie oraz Ameryce Północnej. Jednak w samej tylko Europie liczba kobiet zapadających na tę przypadłość jest bardzo różna - w Austrii wynosi ona 15.1 na 100 000, podczas gdy w niektórych rejonach Hiszpanii i Włoch odpowiednio 6.5 i 6.9. Zdecydowanie rzadziej problem nowotworu przydatków dotyka kobiety w Afryce - najniższe wskaźniki zachorowań wynoszą 0.7 w Mali i 1.2 w Algierii [79, 96, 104].

Szacuje się, że w samej tylko Unii Europejskiej w 2012 r. wykryto ponad 45 000 nowych przypadków guza jajnika, z czego ponad 30 000 doprowadziło do śmierci pacjentek. Średnia liczba zgonów pacjentek w krajach unijnych na 100 000 mieszkańców wynosi 7.4. W Polsce jednak jest

ona wyższa – 10.3. Według danych Światowej Organizacji Zdrowia (WHO) nowotwór jajnika stanowił przyczynę 6.4% zgonów spowodowanych chorobą nowotworową w Polsce, co daje szóste miejsce wśród guzów, a drugie wśród zmian układu rozrodczego [96, 104].

Wczesne wykrycie i poprawne zdiagnozowanie guza ma bardzo duży wpływ nie tylko na samą terapię, ale również na miejsce, w którym powinna zostać ona przeprowadzona. Chore, które od razu trafią pod opiekę ginekologa-onkologa mają lepsze rokowania, niż pacjentki operowane w mniejszych ośrodkach [37]. Stąd bardzo ważne jest możliwie dokładne ustalenie rodzaju guza i charakteru jego złośliwości przed pierwszym zabiegiem operacyjnym.

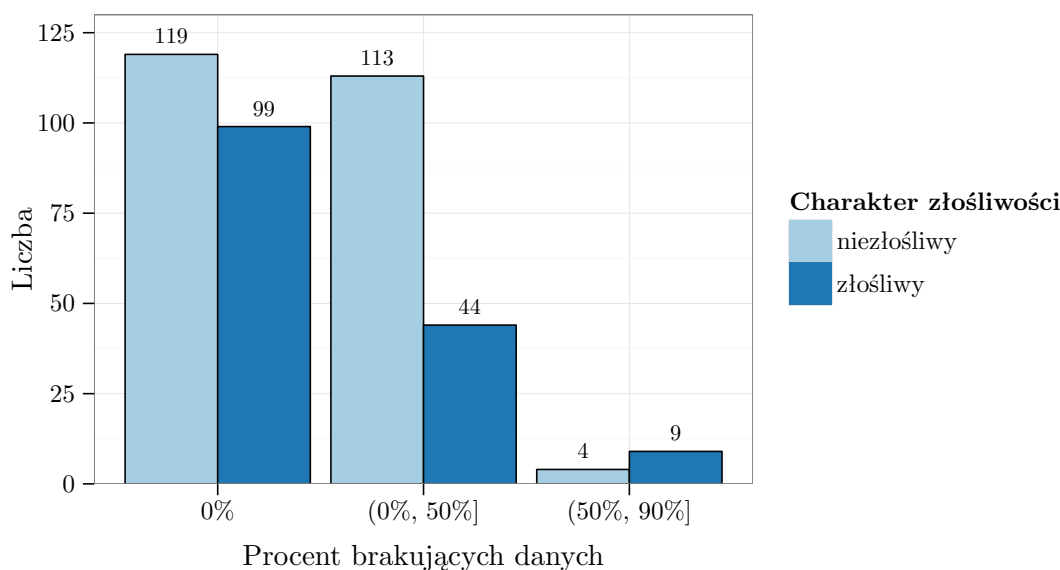
W przeciągu ostatnich lat przeprowadzono szereg badań, których celem było wskazanie parametrów opisujących pacjentkę, które umożliwiałyby przedoperacyjną predykcję typu nowotworu jajnika. Poza klasycznymi cechami zbieranymi podczas wywiadu medycznego, takimi jak status menopauzalny czy występowanie chorób nowotworowych w rodzinie pacjentki [13], zwrócono uwagę na informacje uzyskane podczas badania ultrasonograficznego [68, 84, 87]. Są to m.in. ilość oraz układ naczyń w obrębie guza jajnika, jego objętość i umiejscowienie, obecność płynu w jamie otrzewnowej, a ponadto występowanie bólu u pacjentki podczas badania. Osobną kategorią są markery nowotworowe: CA-125 oraz HE4, których poziom również jest jedną z ważniejszych przesłanek podczas różnicowania [9, 51]. Wciąż trwają badania nad przydatnością innych markerów podczas diagnostyki nowotworów jajnika, np. osteopontyny, jednak wyniki wciąż nie są jednoznaczne [53, 55].

Na przestrzeni ostatnich dwóch dekad wykształciły się dwa nurty, które postawiły sobie za cel zbliżyć się do trafności subiektywnej oceny doświadczonego ginekologa-ultrasonografisty, który wciąż pozostaje niedoścignionym wzorem w różnicowej diagnostyce guza jajnika [86]. Pierwszym z nich jest podejście poprzez skale punktowe, w których za występowanie danej cechy u pacjentki przyznawane są punkty, a po sumarycznym przekroczeniu pewnego progu wskazuje się złośliwość nowotworu. Ostatecznie zaowocowało to całą gamą skal diagnostycznych [2, 16, 40, 66, 80].

Drugim nurtem są modele matematyczne. Z jednej strony, wypracowano wiele algorytmów bazujących na podejściu regułowym [89]. Z drugiej strony, przy użyciu narzędzi, których dostarcza nauczanie maszynowe, skonstruowano rozwiązania wykorzystujące regresję logistyczną, takie jak modele LR1, LR2 i ADNEX [52, 82, 88, 98], sztuczne sieci neuronowe [7, 69, 83], maszyny wektorów nośnych czy też sieci bayesowskie [99, 100].

Należy też wspomnieć o rozwiązaniach pośrednich, tj. podejściu zaproponowanym w modelu RMI [90], będącym połączeniem skali punktowej oraz modeli matematycznych, a ponadto regułowej skali diagnostycznej GI-RADS [3].

Autorzy wspomnianych skal oraz modeli wskazują wysoką trafność prognostyczną modeli predykcyjnych, rzędu 95%, a nawet 100% [2, 85]. Niestety, zewnętrzna ewaluacja weryfikuje te założenia i w rzeczywistości ogólna trafność prognoz rzadko przekracza 90%, zarówno w przypadku czułości, jak i swoistości [97, 101]. Można z tego wnioskować, że obecnie nie posiadamy wystarczającej wiedzy, pozwalającej jednoznacznie stwierdzić, co i w jakim stopniu wpływa na typ nowotworu jajnika.



Rysunek 4.4: Podział pacjentów pod względem poziomu kompletności danych.

4.3.2 Scenariusz 1: diagnostyka na podstawie danych pacjentki

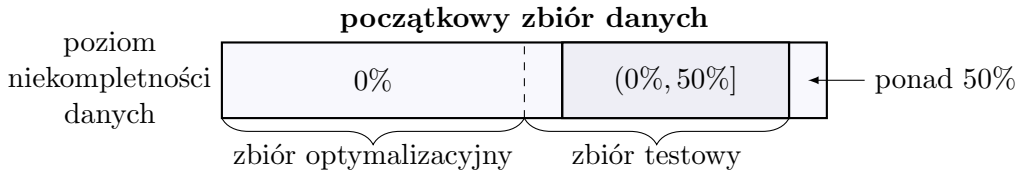
Pierwszy scenariusz zastosowania zaproponowanych w niniejszej dysertacji metod klasyfikacji zakłada wykorzystanie całych dostępnych danych medycznych do podjęcia diagnozy. Jest to metoda najprostsza i najbardziej bezpośrednia, gdyż jedynym przekształceniem, jakiemu poddawane są dane jest normalizacja. Miara podobieństwa wykorzystywana jest bezpośrednio do porównywania danych medycznych dwóch różnych pacjentek.

Zbiór danych

Grupa badawcza składa się z 388 pacjentek leczonych z rozpoznaniem guza jajnika w Klinice Ginekologii Operacyjnej Uniwersytetu Medycznego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu w latach 2005 – 2015. Spośród nich, u 61% zdiagnozowano zmianę łagodną, a u 39% złośliwą. Ponadto, 56% pacjentek nie miało żadnych brakujących danych, a u 40% brakowało mniej niż 50% danych. Procentowy rozkład udziału brakujących danych przedstawiono na Rysunku 4.4. Istotny podzbiór tej grupy badawczej, obejmujący większość pacjentek z kompletnym opisem, został przedstawiony w kontekście medycznym w pracy [54].

Procedura ewaluacji opiera się na klasycznym podziale danych na zbiór treningowy (optymalizacyjny) i testowy. Początkowy zbiór danych nie ma jednorodnego rozkładu poziomu brakujących danych. Jeżeli takie dane zostałyby podzielone równomiernie, mogłoby to doprowadzić do sytuacji, w której na etapie optymalizacji i/lub testowania nie byłyby dostępne instancje o wszystkich poziomach braku danych. Taka sytuacja jest bardzo niepożądana, gdyż celem jest opracowanie metody działającej dla każdego poziomu braku danych. Alternatywą jest poszerzenie zestawu danych poprzez włączenie nowych pacjentek. Jednak takie rozwiązanie jest bardzo czasochłonne i kosztowne. Dlatego też konieczne było znalezienie innego, opisanego poniżej, sposobu.

Zbiór testowy składa się z instancji z brakującymi danymi i pewnej części tych z kompletnym zestawem danych. Z drugiej strony, zbiór optymalizacyjny zbudowany jest z instancji z kompletnym opisem, a niekompletność jest symulowana. W symulacjach przyjęto, że niekompletność danych



Rysunek 4.5: Podział danych pomiędzy zbiór optymalizacyjny i testowy. Instancje z ponad 50% niekompletności danych zostały wykluczone z badań.

występuje w sposób losowy, gdyż nie jest możliwe dokładne symulowanie procesu diagnostycznego. Faktyczny rozkład poziomów braku danych nie jest znany, stąd w fazie optymalizacji przyjęto założenie o jego jednorodności. Dzięki takiemu określeniu, zarówno w zbiorze optymalizacyjnym, jak i testowym występują instancje o różnym poziomie niekompletności danych.

Opis każdej instancji poddawany jest konwersji do przedziałowego zbioru rozmytego. Niech uniwersum U składa się ze wszystkich atrybutów opisujących pacjentkę. Stopień przynależności danego atrybutu $u_i \in U$ do przedziałowego zbioru rozmytego \hat{A} , reprezentującego pacjentkę, niesie informację na temat stopnia w jakim wartość tego atrybutu dla danej instancji jest duża. Mamy tu zatem do czynienia z semantyką stopnia podobieństwa (patrz Podrozdział 2.2).

Zbiór \hat{A} budowany jest zgodnie z następującym wzorem:

$$\mu_{\hat{A}}(u_i) = \begin{cases} [a_i, a_i], & \text{jeśli wartość atrybutu } u_i \text{ jest określona} \\ [0, 1], & \text{jeśli wartość atrybutu } u_i \text{ nie jest określona} \end{cases}, \quad (4.8)$$

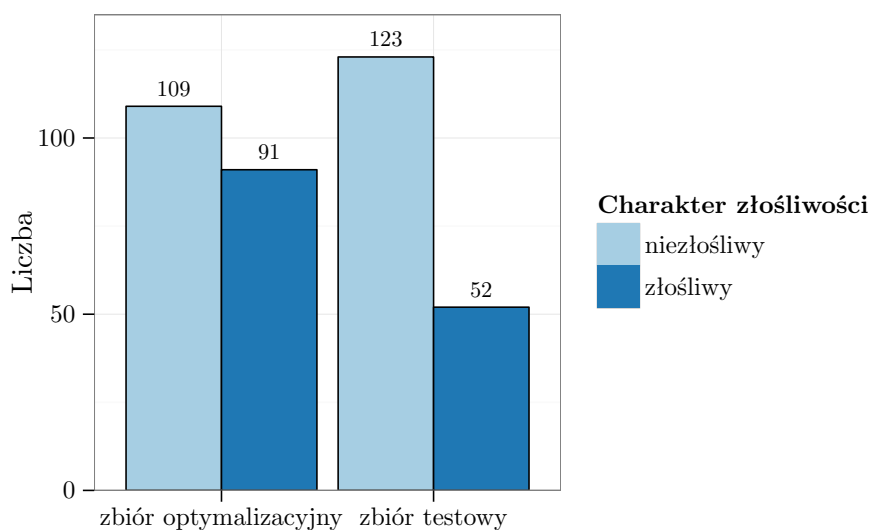
gdzie $a_i \in [0, 1]$ oznacza znormalizowaną wartość i -tego atrybutu dla danej instancji. Do normalizacji wartości do przedziału $[0, 1]$ wykorzystano klasyczną formułę opartą na wartości minimalnej (m_i) i maksymalnej (M_i) danego atrybutu

$$a_i = \frac{b_i - m_i}{M_i - m_i}, \quad (4.9)$$

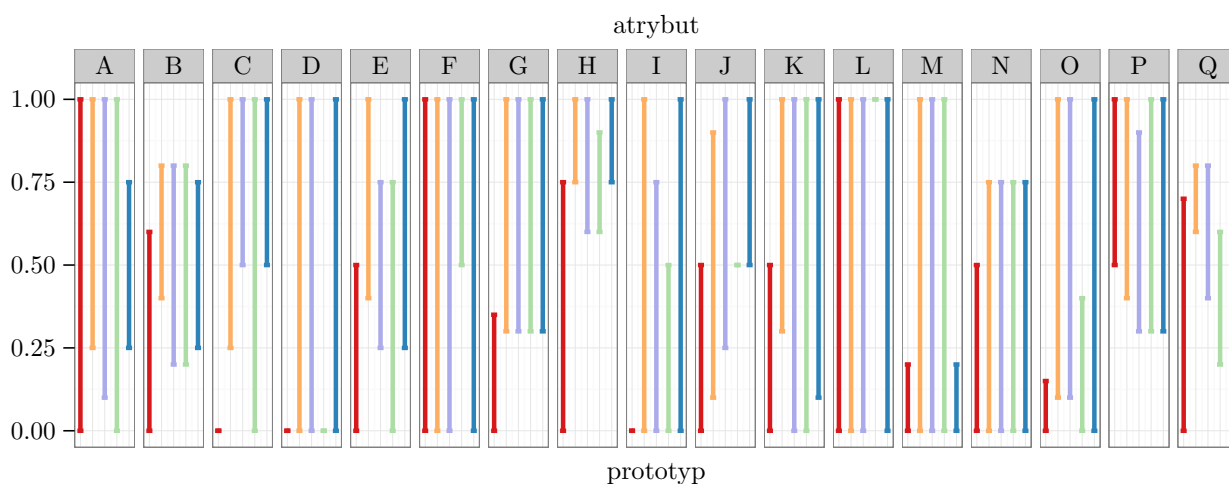
gdzie b_i to pierwotna wartość atrybutu. Stąd w przypadku kompletnych instancji, jako wartość stopnia przynależności dla danego atrybutu przyjmowany jest przedział jednoelementowy. Natomiast, jeśli wartość pewnego atrybutu nie jest dostępna, jako stopień przynależności używany jest cały przedział jednostkowy. W ten sposób wszystkie instancje (kompletne i nie) są jednoznacznie reprezentowane przy użyciu takiego samego formatu danych.

Na zbiór optymalizacyjny składa się 200 kompletnych instancji, podczas gdy zbiór testowy zawiera pozostałe 18 kompletnych opisów pacjentek oraz wszystkie opisy o poziomie niekompletności danych poniżej 50% – łącznie 175 instancji. Instancje niekompletne w ponad 50% zostały wykluczone z badań. Podział danych oraz rozkład klas w obu zbiorach przedstawiony został na Rysunkach 4.5 oraz 4.6.

Oprócz samego zbioru danych bardzo istotny jest też dobór prototypów dla *przedziałowego klasyfikatora rozmytego*. Na potrzeby niniejszego zbioru danych oraz ewaluacji przygotowano zostały prototypy oparte na wiedzy eksperckiej. Zastosowano podejście analogiczne jak w niedawnej pracy grupy IOTA [98], tj. podzielono guzy złośliwe na cztery grupy: guzy złośliwe we wczesnym oraz późnym stadium zaawansowania, guzy przerzutowe oraz guzy granicznie złośliwe. Ponadto osobną grupę stanowią zmiany łagodne. Dla każdej z grup przygotowano jeden prototyp



Rysunek 4.6: Rozkład klas w zbiorze optymalizacyjnym oraz testowym.

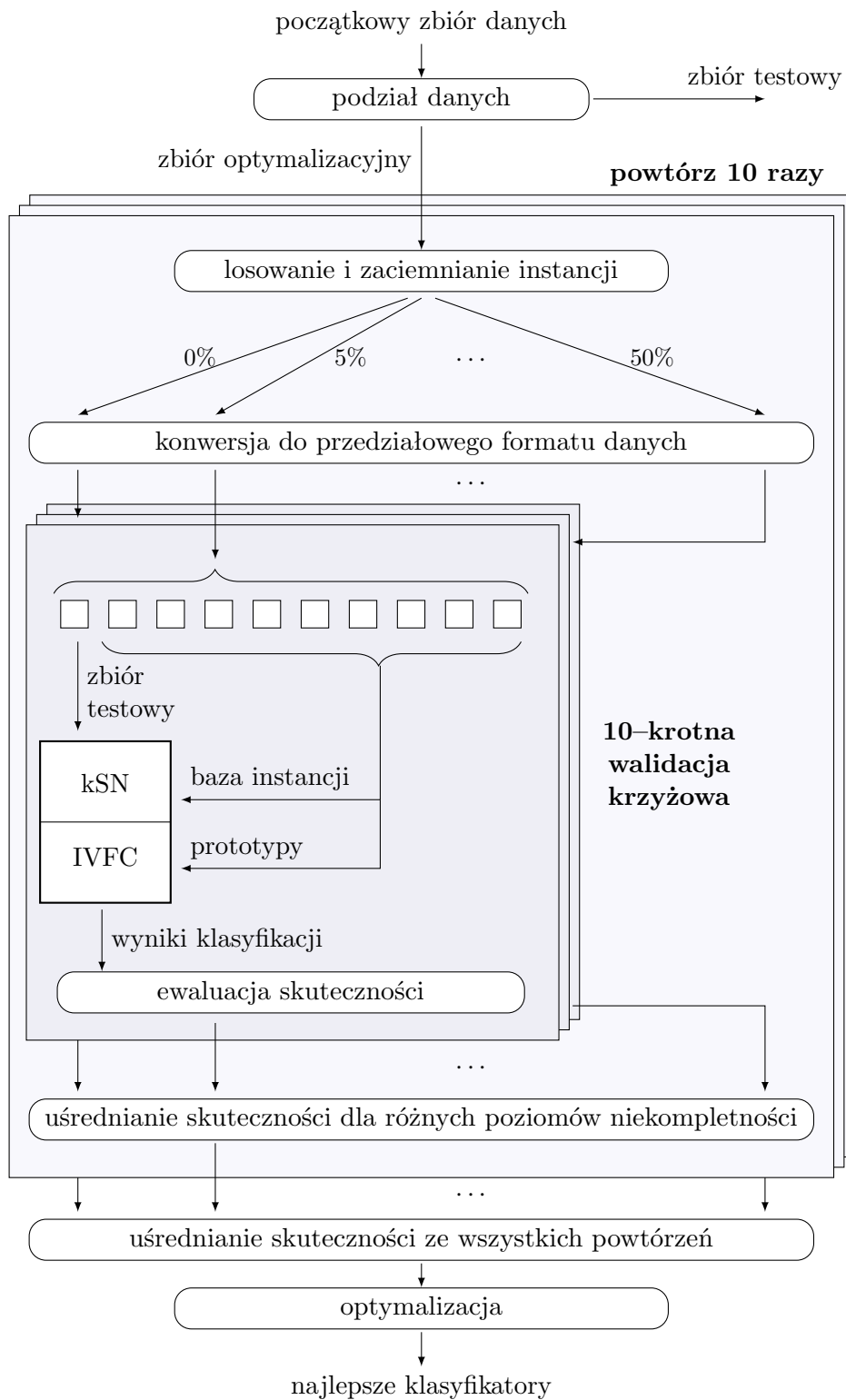


Rysunek 4.7: Wizualizacja prototypów wykorzystanych w klasyfikacji metodą IVFC. Skrótowe oznaczenia literowe atrybutów zostały wyjaśnione w Tabeli 4.2.

opisujący typowe parametry pacjentki z takim rozpoznaniem. Wszystkie wykorzystane prototypy zostały przedstawione na Rysunku 4.7.

Procedura ewaluacji

Celem fazy optymalizacji jest dobranie, na podstawie symulowanych niekompletnych danych, optymalnych wartości parametrów każdej z zaproponowanych metod. Symulowany poziom niekompletności znajdował się w przedziale od 0% do 50% z krokiem 5%. Dla każdego poziomu niekompletności wykonano 10 powtórzeń następującej procedury. W pierwszej kolejności, ze zbioru optymalizacyjnego losowane jest po 75 instancji dla każdej z klas (złśliwy, niezłśliwy). Następnie ustalony procent danych opisujący wybrane pacjentki jest zaciemniany (wymazywany). Na tak przygotowanych danych wykonywana jest 10-krotna walidacja krzyżowa wszystkich wariantów zaproponowanych metod klasyfikacji. Uzyskana ocena jakości klasyfikacji jest następnie uśredniana dla wszystkich powtórzeń oraz poziomów niekompletności danych. Pojedynczy krok fazy optymalizacji przedstawiony jest na Rysunku 4.8.



Rysunek 4.8: Diagram fazy optymalizacji.

Wynikiem fazy optymalizacji jest zbiór klasyfikatorów, które najlepiej wypadły na symulowanych danych niekompletnych. W fazie testowej, uruchamiane są one na danych ze zbioru testowego, dla których źródłem niepewności jest rzeczywisty proces diagnostyczny. Jako bazę instancji dla zaproponowanych klasyfikatorów wykorzystany jest cały zbiór optymalizacyjny. Aby zbadać, jak zachowują się opracowane metody klasyfikacji w sytuacji, gdy baza instancji obciążona jest niekompletnością, podobnie jak w fazie optymalizacji, symulowane są różne jej poziomy. Uzyskana ocena jakości klasyfikacji jest następnie uśredniana dla wszystkich powtórzeń oraz poziomów niekompletności danych. Pojedynczy krok fazy testowej przedstawiony jest na Rysunku 4.9.

Wyniki i dyskusja

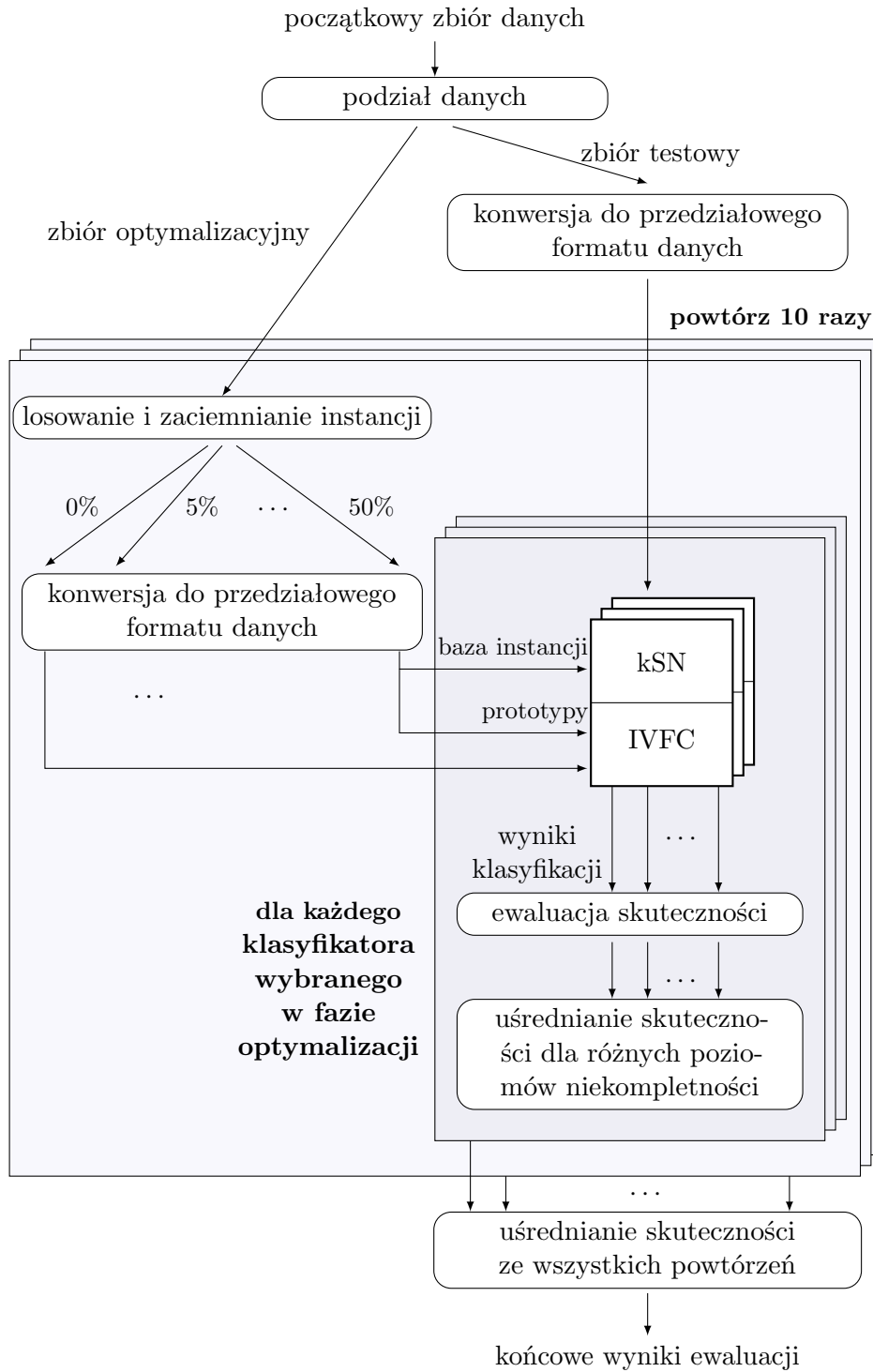
Zgodnie z zaproponowanym schematem oceniono skuteczność klasyfikacji 600 wariantów metody *k* najpodobniejszych sąsiadów oraz 350 wariantów przedziałowego klasyfikatora rozmytego. Klasyfikatory oparte na metodzie *k* najpodobniejszych sąsiadów są takie same, jak w ewaluacji na zbiorze danych *dyslexic*. W przypadku przedziałowego klasyfikatora rozmytego zastosowano następujące komponenty i wartości parametrów:

1. miary podobieństwa uwzględniające niepewność takie same, jak dla metody kSN;
2. metody agregacji podobieństw oparte na różnych uporządkowaniach przedziałów oraz średniej arytmetycznej i ważonej;
3. metody wyboru końcowej klasy oparte na uporządkowaniu przedziałów.

Ze względów obliczeniowych parametry liczbowe takie, jak k dla kSN, czy λ w mierze podobieństwa, zostały ograniczone do pewnego reprezentatywnego, skończonego podzbioru wartości. Takie rozwiązanie, oprócz znacznego zmniejszenia nakładu obliczeniowego, pozwala skutecznie uniknąć problemu przeuczenia klasyfikatora.

Jakość algorytmów klasyfikujących może zostać wyrażona za pomocą wielu różnych wskaźników, takich jak skuteczność, czułość czy specyficzność. W rozważanym problemie diagnostyki medycznej, najlepszy klasyfikator powinien zapewniać bardzo wysoką czułość, jak również niewiele niższą specyficzność. Co więcej, w przypadku niektórych instancji dane mogą nie wskazywać jednoznacznie, jaką podjąć decyzję. W takim przypadku klasyfikator nie powinien wskazywać diagnozy, a pacjent powinien zostać odesłany do referencyjnego ośrodka leczniczego. Z tego powodu dopuszczalna jest sytuacja, w której część instancji nie będzie miała przypisanej klasy (decyzyjność mniejsza niż 100%). Ponieważ wybór jednego wskaźnika jakości, który spełniałby wszystkie kryteria, jest bardzo trudnym zadaniem [31], wykorzystano metodę kosztu całkowitego, gdzie jako miarę jakości klasyfikacji przyjmuje się sumę kosztów przypisanych poszczególnym decyzjom.

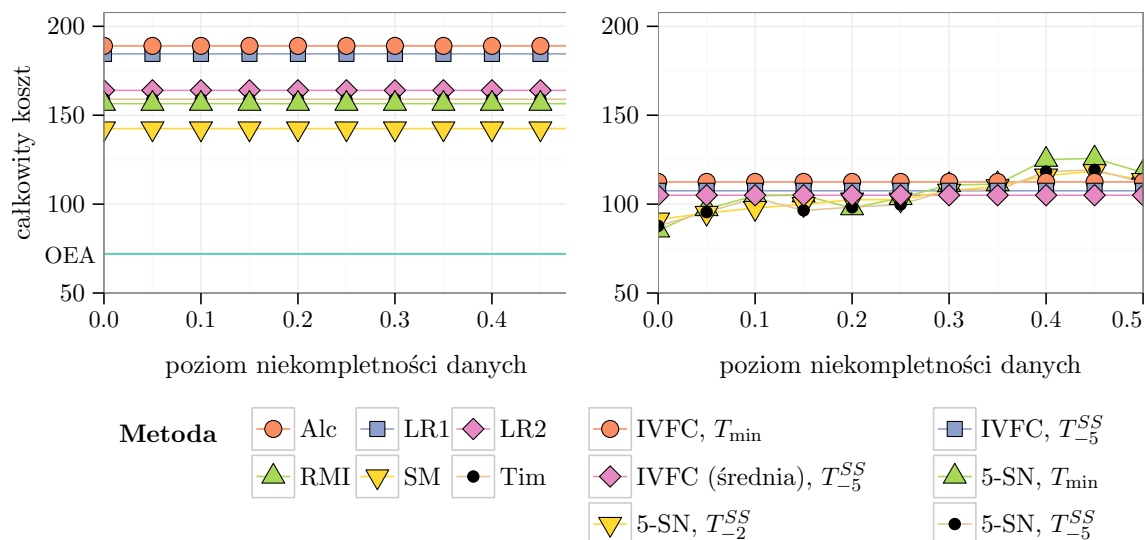
Tabela 4.1 przedstawia koszty możliwych decyzji dokonanych przez klasyfikator. Poprawna klasyfikacja jako *prawdziwie dodatni* albo *prawdziwie negatywny* nie jest związana z żadnym kosztem. Największy koszt przypisany jest diagnozie *falszywie negatywnej*, kiedy klasyfikator wskaże na niezłośliwość, podczas, gdy w rzeczywistości pacjentka ma guza złośliwego. Koszt diagnozy *falszywie dodatniej* został ustalony jako dwukrotnie mniejszy od kosztu diagnozy



Rysunek 4.9: Diagram fazy testowej.

		wynik klasyfikacji		
		niezłośliwy	złośliwy	NA
rzeczywista diagnoza	niezłośliwy	0	2.5	1
	złośliwy	5	0	2

Tablica 4.1: Macierz kosztu. Koszty zostały przypisane na podstawie opinii doświadczonego ginekologa.

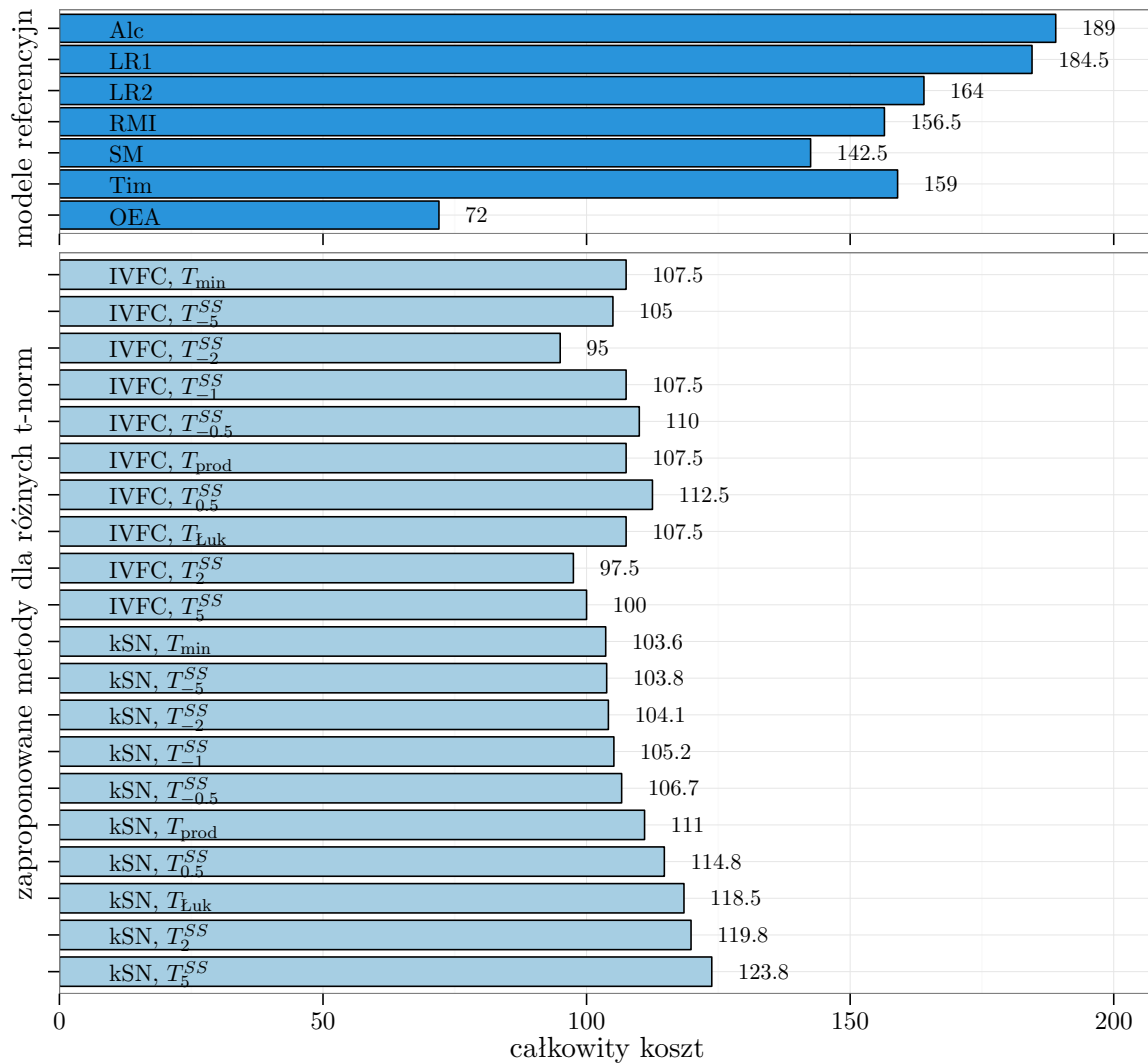


Rysunek 4.10: Wyniki ewaluacji dla oryginalnych modeli diagnostycznych (po lewej) oraz zaproponowanych metod klasyfikacji (po prawej) w zależności od poziomu niekompletności danych w bazie instancji. Jako punkt odniesienia na lewym wykresie naniesiono również skuteczność modelu OEA.

falszywie negatywnej, gdyż niepotrzebna operacja wciąż stanowi pewne niebezpieczeństwo dla zdrowia pacjentki. Również w przypadku sytuacji niepodjęcia decyzji przez klasyfikator jest pewna różnica w przypisanym koszcie. Jest on niższy niż w przypadku diagnozy *falszywie pozytywnej*, gdyż pacjentka jest odsyłana do ośrodka referencyjnego, gdzie wciąż może zostać podjęta dobra diagnoza. Jednakże koszt w przypadku, gdy guz jest złośliwy, jest dwa razy większy niż w przypadku guza niezłośliwego.

Rysunek 4.10 przedstawia charakterystykę zmienności całkowitego kosztu w zależności od poziomu niekompletności danych w bazie instancji. Dla porównania przedstawiono również wartości uzyskiwane przez najczęściej wykorzystywane modele diagnostyczne dla guzów jajnika (patrz Sekcja 4.3.1). Zarówno dla modeli diagnostycznych, jak i dla *przedziałowego klasyfikatora rozmytego*, łączny koszt nie zależy od niekompletności w bazie instancji. W przypadku IVFC, przyczyną takiego stanu jest metoda generowania prototypów, która wykorzystuje wiedzę ekspercką, przez co nie jest zależna od bazy instancji. Bardzo istotne jest, że wzrost niekompletności nie powoduje znaczącego wzrostu kosztu klasyfikacji. Cecha ta pozwala wnioskować, że zaproponowane metody klasyfikacji potrafią skutecznie działać nawet przy 50% poziomie niekompletności danych.

Jak zostało wspomniane we wprowadzeniu, klasyczne modele diagnostyczne oparte są na bardzo prostych metodach matematycznych, stąd nie powinno dziwić, że zarówno *metoda k najpodobniejszych sąsiadów*, jak i *przedziałowy klasyfikator rozmyty* uzyskały znacznie niższy średni łączny koszt klasyfikacji. W porównaniu uwzględniono również model OEA, opracowany z



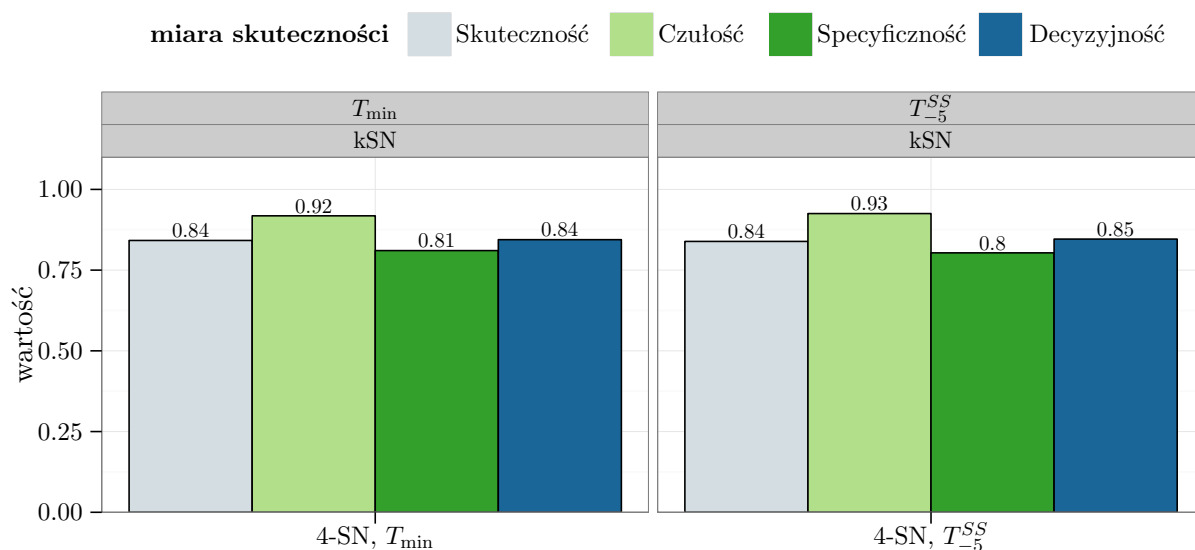
Rysunek 4.11: *Uśredniony całkowity koszt klasyfikacji dla najczęściej wykorzystywanych modeli diagnostycznych oraz zaproponowanych metod klasyfikacji.*

wykorzystaniem najnowszych metod inteligencji obliczeniowej oraz obliczeń miękkich specjalnie na potrzeby diagnostyki guzów jajnika [110]. W jego przypadku koszt jest niższy (72), od wyników uzyskiwanych przez zaproponowane metody. Różnica ta jednak nie jest bardzo duża, szczególnie biorąc pod uwagę, że badane klasyfikatory są bardziej uniwersalne. Średni łączny koszt klasyfikacji został przedstawiony na Rysunku 4.11.

Należy zaobserwować, że skuteczność klasyfikacji istotnie zależy od użytej miary podobieństwa, a co za tym idzie t-normy wykorzystanej do jej budowy. Jest to szczególnie widoczne w przypadku metody k najpodobniejszych sąsiadów, gdzie skuteczność spada wraz ze wzrostem parametru λ , a najlepszy rezultat uzyskiwany jest dla t-normy minimum ($T_{-\infty}^{SS}$). W przypadku IVFC zależność nie jest taka prosta, gdyż porównywalne, najniższe wartości łącznego kosztu klasyfikacji uzyskiwane są zarówno dla T_{-2}^{SS} , jak i T_2^{SS} .

Najlepszy klasyfikator, oprócz możliwie niskiego łącznego kosztu klasyfikacji, powinien również spełniać pewne dodatkowe założenia:

- czułość ≥ 0.9 ,



Rysunek 4.12: Porównanie skuteczności, czułości, specyficzności oraz decyzyjności dla wybranych najlepszych metod klasyfikacji.

- specyficzność ≥ 0.8 ,
- czułość $>$ specyficzność.

Pierwsze dwie reguły pozwalają odrzucić klasyfikatory o zbyt niskiej czułości i specyficzności. Ostatnia reguła związana jest bezpośrednio z medycznym kontekstem rozważanego problemu. W medycynie czułość metody diagnostycznej z reguły jest istotniejsza od specyficzności. Klasyfikatory spełniające te kryteria zostały zaprezentowane na Rysunku 4.12.

Oba klasyfikatory, które spełniają postulowane kryteria, są bardzo podobne. Oparte są na metodzie k najpodobniejszych sąsiadów przy $k = 4$, metodzie głosowania większościowego oraz porządkowaniu przedziałów względem ich środków. Różnią się jedynie t-normą zastosowaną do konstrukcji miary podobieństwa: T_{\min} oraz T_{-5}^{SS} . Należy pamiętać jednak, że t-normy te są bardzo podobne, stąd bardzo niewielkie różnice w uzyskiwanych dzięki nim klasyfikacjom.

Zastosowanie parzystego k w połączeniu z metodą głosowania większościowego umożliwia niepodjęcie decyzji w przypadku wątpliwości (remisu). Jest to cecha bardzo pożądana w rozważanym problemie.

4.3.3 Scenariusz 2: diagnostyka na podstawie modeli diagnostycznych

Częstym zarzutem wobec wielu metod klasyfikacji opartych na odległości lub podobieństwie jest spadek skuteczności wraz ze wzrostem ilości wymiarów przestrzeni. Jest to związane z faktem, że odległości w przestrzeni wielowymiarowej stają się duże niezależnie od rzeczywistej bliskości czy podobieństwa porównywanych instancji. Choć indeks Jaccarda jest dużo mniej podatny na ten problem niż przykładowo odległość Euklidesowa, wciąż można spodziewać się lepszej skuteczności w przypadku mniejszej liczby wymiarów.

Drugi scenariusz zakłada zredukowanie liczby atrybutów opisujących pacjentkę. Znanych jest wiele metod redukcji wymiarowości zbiorów danych, przykładowo analiza głównych składowych. Jednak w tym przypadku wykorzystana zostanie inna metoda. Jak zostało wspomniane we

wstępie do problematyki medycznej, istnieje wiele modeli dla problemu diagnostyki różnicowej guzów jajnika. Większość z nich zastosowana na kompletnych danych opisujących pacjentkę, jako wynik zwraca wartość liczbową z pewnego przedziału wskazującą na sugerowaną diagnozę. Wartości zwracane przez kilka modeli mogą posłużyć do konstrukcji nowych atrybutów opisujących pacjentkę.

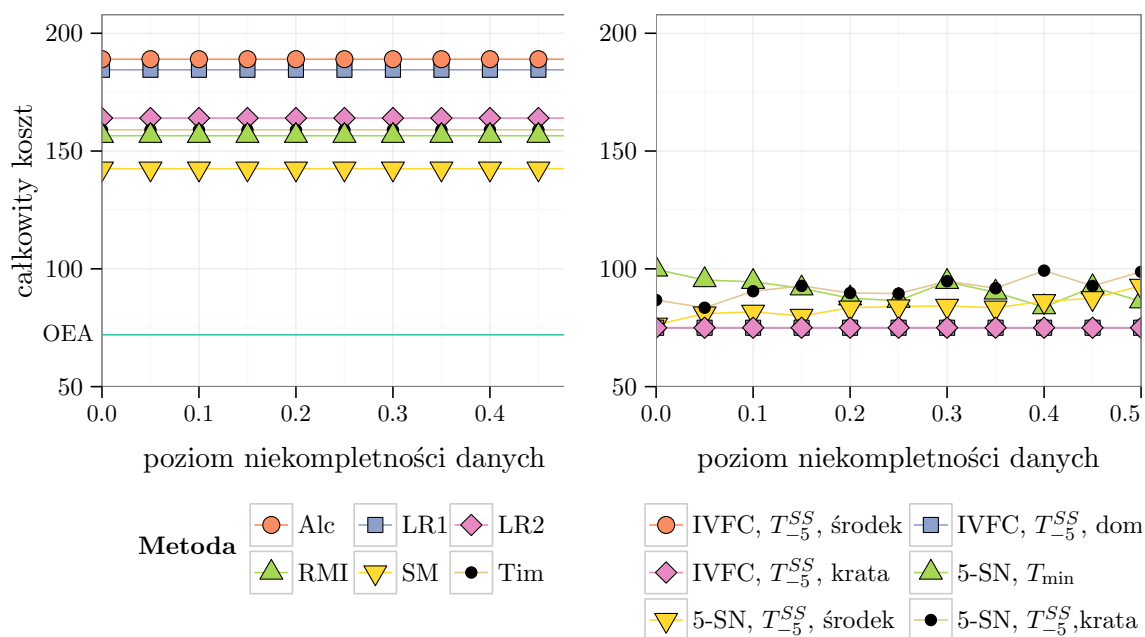
Zbiór danych i procedura ewaluacji

Podstawą do ewaluacji jest ten sam zbiór danych, co w pierwszym scenariuszu. Na potrzeby obliczeń wybrano sześć modeli diagnostycznych: dwa oparte na systemach punktowych (SM, Alcazar, [2, 81]) oraz cztery na regresji logistycznej (LR1, LR2, Timmerman oraz RMI, [30, 85, 88]). Tabela 4.2 przedstawia cechy opisujące pacjentkę wykorzystywane przez poszczególne modele wraz z oznaczeniami wykorzystywanymi w pierwszym scenariuszu.

cecha	modele diagnostyczne					
	SM	Alc.	LR1	LR2	Tim.	RMI
wiek (A)	-	-	✓	✓	-	✓
status menopauzalny (N)	✓	-	-	-	✓	✓
ból podczas badania	-	-	✓	-	-	-
terapia hormonalna	-	-	✓	-	-	-
histerektomia	-	-	-	-	-	✓
występowanie guza jajnika w rodzinie	-	-	✓	-	-	-
objętość guza (K)	✓	-	✓	-	-	-
ściana wewnętrzna guza (F, J)	✓	-	✓	✓	-	-
grubość przegrody	✓	-	-	-	-	-
echogenność (H)	✓	✓	-	-	-	-
lokalizacja (I)	✓	-	-	-	-	✓
ascites	✓	-	✓	✓	-	✓
wyrośla endofityczne (L, M)	-	✓	-	-	✓	-
rozmiar elementu litego (D, E)	-	✓	✓	✓	-	✓
lokalizacja naczyń w guzie (C)	-	✓	✓	✓	-	-
indeks oporu (P)	-	✓	-	-	-	-
największy wymiar (B)	-	-	✓	-	-	-
cień akustyczny	-	-	✓	✓	-	-
stopień unaczynienia guza (G)	-	-	✓	-	✓	-
marker nowotworowy CA-125 (O)	-	-	-	-	✓	✓
ocena jakościowa (Q)	-	-	-	-	-	✓

Tablica 4.2: Cechy wykorzystywane przez wybrane modele diagnostyczne. Cechy znajdujące się w drugiej grupie mogą mieć brakujące wartości.

Wybrane modele diagnostyczne wymagają kompletnych danych. Powstaje więc problem, jak obliczyć wartość zwracaną przez dany model dla instancji, która nie jest kompletna. Problem ten został rozwiązany przy użyciu uniepełniania (ang. *uncertaintification*, [110]). Podstawowa idea tego rozwiązania to zastąpienie pojedynczej wartości z przedziału $[0, 1]$ (0 oznacza zmianę na pewno łagodną, 1–złośliwą) przedziałem wszystkich wartości, jakie można uzyskać uzupełniając w dowolny sposób niekompletny opis pacjentki. Otrzymane w ten sposób dane obarczone są niepewnością epistemiczną, co sprawia, że doskonale wpasowują się w opracowane w rozprawie metody



Rysunek 4.13: Wyniki ewaluacji dla oryginalnych modeli diagnostycznych (po lewej) oraz zaproponowanych metod klasyfikacji (po prawej) w zależności od poziomu niekompletności danych w bazie instancji. Jako punkt odniesienia na lewym wykresie naniesiono również skuteczność modelu OEA.

klasyfikacji. Każda instancja reprezentowana jest za pomocą przedziałowego zbioru rozmytego. Tym razem jako uniwersum przyjmujemy zbiór wykorzystywanych modeli diagnostycznych, a stopień przynależności $\mu_{\hat{A}}(u)$ opisuje podobieństwo wartości zwracanej przez dany model do diagnozy złośliwej.

Dzięki takiemu określeniu nowych atrybutów opisujących instancję, również dużo łatwiejsze jest określenie prototypów. W tym przypadku wystarczą dwa prototypy, po jednym dla każdej klasy. Guzy niezłośliwe reprezentuje prototyp obejmujący wartości poniżej 0.5, podczas gdy guzy złośliwe wartości powyżej 0.5 dla wszystkich atrybutów.

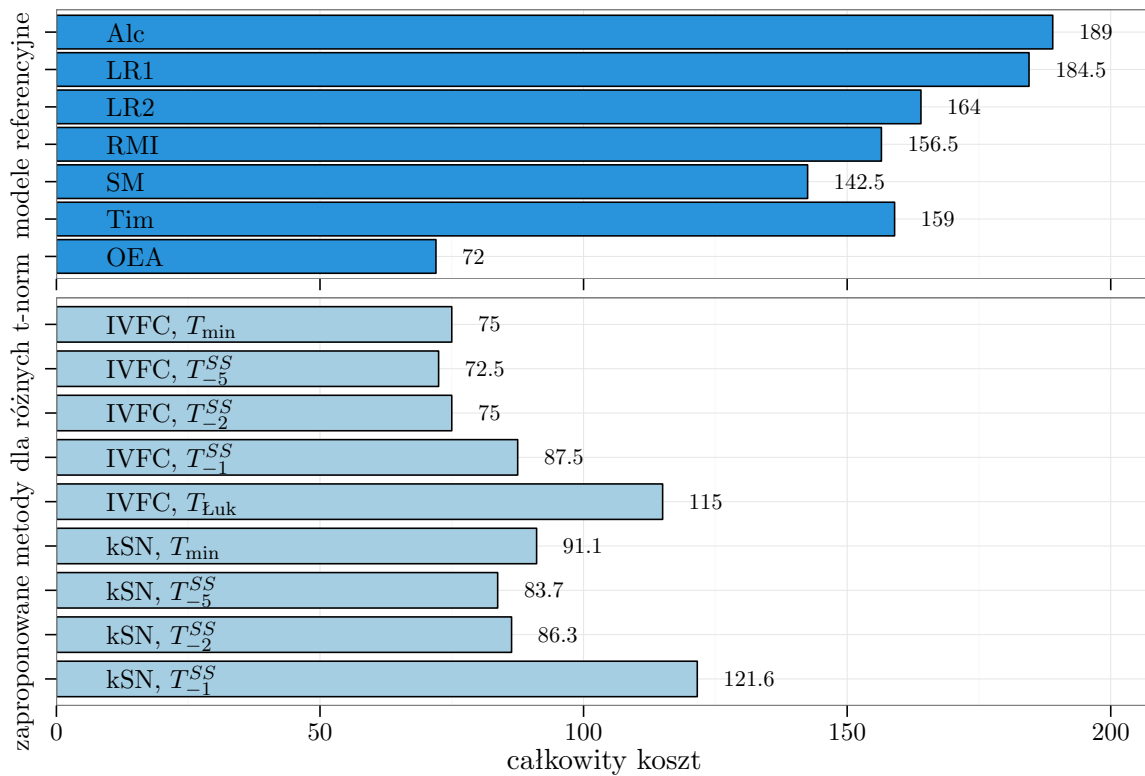
Procedura ewaluacji jest identyczna jak poprzednio (Rysunki 4.8 oraz 4.9) z tą różnicą, że w kroku „konwersja do przedziałowego formatu danych” zamiast normalizacji danych, wykonywana jest redukcja z wykorzystaniem nieupewnionych modeli diagnostycznych.

Wyniki i dyskusja

Zgodnie z zaproponowanym schematem ponownie oceniono skuteczność klasyfikacji tych samych 600 wariantów metody k najbliższych sąsiadów oraz 350 wariantów przedziałowego klasyfikatora rozmytego. Do oceny skuteczności wykorzystano również tę samą macierz kosztów.

Charakterystyka zmienności całkowitego kosztu klasyfikacji, w zależności od poziomu niekompletności bazy instancji przedstawiona jest na Rysunku 4.13. Podobnie jak poprzednio dla modeli diagnostycznych oraz przedziałowego klasyfikatora rozmytego, łączny koszt nie zależy od poziomu niekompletności bazy instancji. W tym przypadku możemy jednak zaobserwować, że również dla kSN łączny koszt nie rośnie istotnie wraz ze wzrostem poziomu niekompletności danych.

Tym razem również metoda k najbliższych sąsiadów, jak i przedziałowy klasyfikator



Rysunek 4.14: *Uśredniony całkowity koszt klasyfikacji dla oryginalnych modeli diagnostycznych oraz zaproponowanych metod klasyfikacji.*

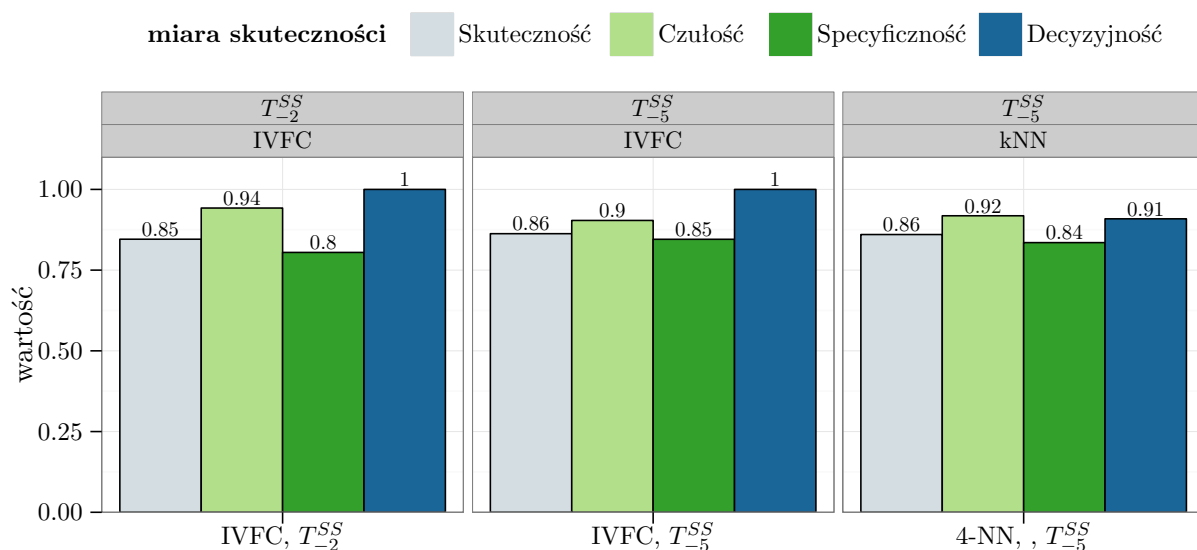
rozmyty uzyskały znacznie niższy średni łączny koszt klasyfikacji, niż oryginalne modele diagnostyczne. Jednak porównanie z modelem OEA nie wykazuje już tak bezpośredniej jego przewagi. Dzięki redukcji liczby atrybutów udało się zredukować koszt klasyfikacji w stopniu na tyle dużym, że w przypadku IVFC różnica ta jest minimalna. Średni łączny koszt klasyfikacji został przedstawiony na Rysunku 4.14.

W odróżnieniu od pierwszego scenariusza, wykres przedstawia tylko te klasyfikatory, które uzyskały wystarczająco dobry wynik w fazie optymalizacji. Jednak również w tym przypadku można zaobserwować, że skuteczność klasyfikacji istotnie zależy od użytej miary podobieństwa, a co za tym idzie t-normy wykorzystanej do jej budowy. Tym razem jest to widoczne w przypadku przedziałowego klasyfikatora rozmytego, gdzie skuteczność spada wraz ze wzrostem parametru λ .

Ponownie najlepszy klasyfikator, oprócz możliwie niskiego łącznego kosztu klasyfikacji, powinien również spełniać dodatkowe założenia:

- czułość ≥ 0.9 ,
- specyficzność ≥ 0.8 ,
- czułość $>$ specyficzność.

Tym razem zadane kryteria spełnia 20 klasyfikatorów. Na Rysunku 4.15 przedstawione zostały trzy modele, każdy reprezentujący osobną grupę. Pierwsze dwie grupy wybranych metod oparte są na przedziałowym klasyfikatorze rozmytym i zasadniczo różnią się tylko wartością parametru λ (-2 oraz -5). Podobnie jak poprzednio, t-normy te są bardzo podobne, stąd bardzo niewielkie różnice w uzyskiwanych dzięki nim klasyfikacjom. Najciekawszy wydaje się być trzeci klasyfikator, który



Rysunek 4.15: Porównanie skuteczności, czułości, specyficzności oraz decyzyjności dla wybranych najlepszych metod klasyfikacji.

znalazł się również w gronie dwóch najlepszych w pierwszym scenariuszu. Dla przypomnienia, jest to metoda k najpodobniejszych sąsiadów przy $k = 4$ oraz mierna podobieństwa skonstruowanej przy użyciu t-normy T_{-5}^{SS} .

Jak już wspomniano wcześniej, zastosowanie parzystego k , w połączeniu z metodą głosowania większościowego, umożliwia niepodjęcie decyzji w przypadku wątpliwości (remisu). Klasyfikator ten uzyskał bardzo dobrą charakterystykę. Średni sumaryczny koszt klasyfikacji w tym przypadku wynosi 85.65, a decyzyjność na poziomie 91% powoduje, że tylko pacjentki rzeczywiście tego wymagające zostaną odesłane do ośrodka referencyjnego.

4.3.4 System *OvaExpert*

Zwiększenie skuteczności przedoperacyjnego różnicowania guzów jajnika to problem, nad którym badania prowadzone są przez wielu badaczy na całym świecie. Obecnie najpowszechniejszym podejściem do problemu jest budowanie i rozwijanie nowych modeli diagnostycznych przy użyciu najnowszych osiągnięć z zakresu uczenia maszynowego. Jest to zadanie niezwykle trudne, ponieważ konwencjonalne metody wydają się osiągać już swój maksymalny poziom skuteczności. *OvaExpert*, inteligentny system wspomaganie diagnostyki różnicowej guzów jajnika, cechuje jednakże inne podejście [4, 21, 59, 74, 122, 123]. Jego główną cechą jest zbieranie całej dostępnej dotychczas wiedzy na temat guzów jajnika (modele, systemy punktowe, schematy rozumowania itp.) i umieszczenie jej w jednym systemie komputerowym.

Jednym z powodów, dla których istnieje potrzeba stworzenia tego systemu jest fakt, że lekarze potrzebują narzędzia, które nie tylko wspomogą ich w postawieniu diagnozy, ale również będzie asystować im podczas całego procesu diagnostycznego: od gromadzenia danych, przez diagnozę, po wymianę informacji i doświadczeń.

OvaExpert został objęty programem *Inkubator Innowacyjności* realizowanym przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego we współpracy z Poznańskim Parkiem Naukowo-

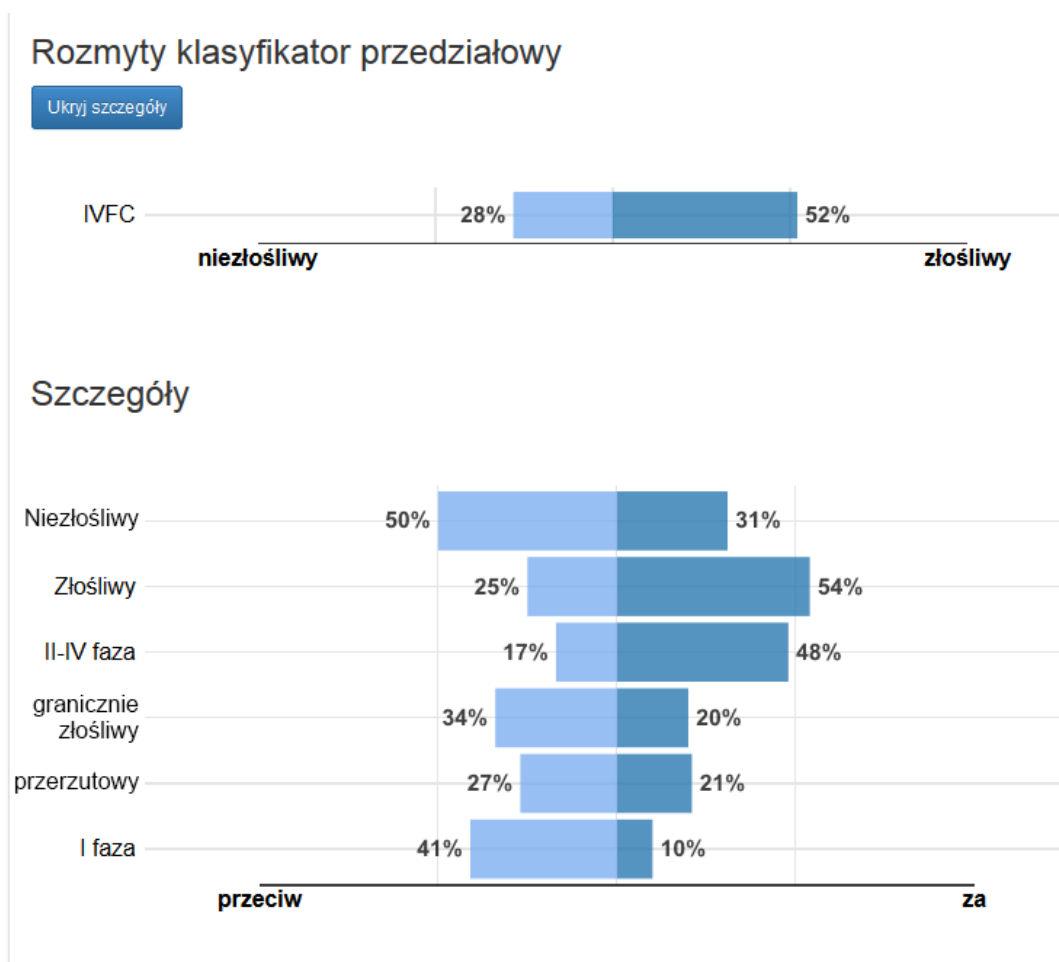
Technologicznym. Ponadto badania prowadzone nad systemem zostały docenione na arenie międzynarodowej przez firmę Microsoft, o czym świadczy przyznanie *Microsoft Azure Machine Learning Award*.

Głównym celem systemu *OvaExpert* jest dostarczenie wygodnego sposobu gromadzenia danych o pacjentkach oraz ich diagnozach pooperacyjnych. Aktualnie lekarze posługują się bardzo prostymi metodami gromadzenia danych, takimi jak notesy czy arkusze kalkulacyjne. Z tego powodu ograniczona jest współpraca pomiędzy różnymi ośrodkami. Opisany system, dzięki przyjaznemu interfejsowi oraz ustandaryzowanemu formatowi danych, umożliwia zbieranie danych we wspólnej bazie. W dalszej perspektywie może ona stać się wartościowym źródłem informacji dla całej społeczności medycznej.

Kluczową innowacją zaprezentowaną w *OvaExpert* jest całkowicie nowe podejście do obsługi danych niekompletnych. Przeprowadzone badania wykazały, że niekompletność danych ma kluczowy wpływ na ostateczną diagnozę [109]. Rolą systemu jest więc jak najlepsze radzenie sobie w takiej sytuacji.

Jedną z zalet systemu jest modułarna architektura. Istniejące oraz nowe metody wspomaganie diagnostyki mogą zostać zintegrowane z systemem jako nowe moduły, w celu polepszenia rzetelności diagnozy. *Przedziałowy klasyfikator rozmyty* został wykorzystany do stworzenia jednego z takich modułów diagnostycznych. Dzięki temu system, za pomocą klasyfikacji wieloklasowej, jako jeden z pierwszych na świecie pomaga rozróżnić nie tylko guzy łagodne i złośliwe, ale również guzy przerzutowe, granicznie złośliwe oraz różne stadia ich zaawansowania. Rysunek 4.16 przedstawia przykład działania systemu *OvaExpert* opartego na *przedziałowym klasyfikatorze rozmytym*.

W opracowanym module diagnostycznym wykorzystano podejście zaproponowane w pierwszym scenariuszu. Wykorzystano te same prototypy, z tą różnicą, że teraz każdy z nich odpowiada osobnej klasie. Do konstrukcji miary podobieństwa wykorzystano t-normę minimum. Ze względu na uwzględnienie tylko jednego prototypu na klasę, nie ma potrzeby agregowania przedziałowych podobieństw.



Rysunek 4.16: Zrzut ekranu przedstawiający widok diagnozy uzyskanej za pomocą przedziałowego klasyfikatora rozmytego.

Bibliografia

- [1] J. Alcalá, A. Fernández, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, i F. Herrera. Keel data-mining software tool: Data set repository, integration of algorithms and experimental analysis framework. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 17(2-3):255–287, 2010.
- [2] J. L. Alcázar, L. T. Mercé, C. Laparte, M. Jurado, i G. López-García. A new scoring system to differentiate benign from malignant adnexal masses. *American Journal of Obstetrics and Gynecology*, 188(3):685–692, 2003.
- [3] F. Amor, H. Vaccaro, J. L. Alcázar, M. León, J. M. Craig, i J. Martinez. Gynecologic imaging reporting and data system a new proposal for classifying adnexal masses on the basis of sonographic findings. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 28(3):285–291, 2009.
- [4] S. Apolinarski i B. Kubiński. Metody wspomaganie diagnostyki medycznej na przykładzie różnicowania guzów jajnika, 2015. Praca magisterska obroniona na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
- [5] M. Baczyński i B. Jayaram. *An Introduction to Fuzzy Implications*. Springer, Heidelberg, 2008.
- [6] R. Bellman, R. Kalaba, i L. A. Zadeh. Abstraction and pattern classification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 13:1–7, 1966.
- [7] R. Biagiotti, C. Desii, E. Vanzi, i G. Gacci. Predicting ovarian malignancy: application of artificial neural networks to transvaginal and color Doppler flow. *Radiology*, 210(2):399–403, 1999.
- [8] H. Bustince i P. Burillo. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(3):403–405, 1996.
- [9] P. A. Canney, M. Moore, P. M. Wilkinson, i R. D. James. Ovarian cancer antigen CA125: a prospective clinical assessment of its role as a tumour marker. *British Journal of Cancer*, 50(6):765, 1984.
- [10] S.-M. Chen. Measures of similarity between vague sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 74(2):217–223, 1995.

- [11] S.-M. Chen i J.-M. Tan. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 67(2):163–172, 1994.
- [12] I. Couso, L. Garrido, i L. Sánchez. Similarity and dissimilarity measures between fuzzy sets: A formal relational study. *Information Sciences*, 229:122–141, 2013.
- [13] D. W. Cramer, G. B. Hutchison, W. R. Welch, R. E. Scully, i K. J. Ryan. Determinants of ovarian cancer risk. I. Reproductive experiences and family history. *Journal of the National Cancer Institute*, 71(4):703–709, 1983.
- [14] V. V. Cross i T. A. Sudkamp. *Similarity and Compatibility in Fuzzy Set Theory. Assessment and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [15] L. Dengfeng i C. Chuntian. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. *Pattern Recognition Letters*, 23(1):221–225, 2002.
- [16] P. D. DePriest, D. Shenson, A. Fried, J. E. Hunter, S. J. Andrews, H. H. Gallion, E. J. Pavlik, R. J. Kryscio, i J. R. Van Nagell. A morphology index based on sonographic findings in ovarian cancer. *Gynecologic Oncology*, 51(1):7–11, 1993.
- [17] D. Dubois i H. Prade. New Results about Properties and Semantics of Fuzzy Set-Theoretic Operators. W P. P. Wang i S. K. Chang, redaktorzy, *Fuzzy Sets. Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*, strony 59–75. Springer-Verlag, USA, 1980.
- [18] D. Dubois i H. Prade. *Possibility theory. An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Springer, New York, 1988.
- [19] D. Dubois i H. Prade. The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):141–150, 1997.
- [20] D. Dubois i H. Prade. Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 192:3–24, 2012.
- [21] K. Dyczkowski, A. Wójtowicz, P. Żywica, A. Stachowiak, R. Moszyński, i S. Szubert. An Intelligent System for Computer-Aided Ovarian Tumor Diagnosis. W D. Filev, J. Jabłkowski, et al., redaktorzy, *Intelligent Systems' 2014. Volume 2: Tools, Architectures, Systems, Applications*, strony 335–343. Springer, Switzerland, 2015.
- [22] B. R. Gaines. Foundations of fuzzy reasoning. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6):623–668, 1976.
- [23] P. Gambaryan. Taxonomic analysis of the genus pinus l. *Doklady akademii nauk armenii, sekcja nauk biologicznych*, 18(8):75–81, 1966.
- [24] W.-L. Gau i D. J. Buehrer. Vague sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 23(2):610–614, 1993.
- [25] J. A. Goguen. The logic of inexact concepts. *Synthese*, 19(3):325–373, 1969.
- [26] R. A. M. Gregson. *Psychometrics of similarity*. Academic Press, New York, 1975.

-
- [27] K. Hirota i W. Pedrycz. Handling fuzziness and randomness in process of matching fuzzy data. W *Proceedings of the Third IFSA Congress*, strony 97–100, Seattle, USA, 1989.
- [28] K. Hirota i W. Pedrycz. Matching fuzzy quantities. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 21(6):1580–1586, 1991.
- [29] D. H. Hong i C.-H. Choi. Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):103–113, 2000.
- [30] I. Jacobs, D. Oram, et al. A risk of malignancy index incorporating CA 125, ultrasound and menopausal status for the accurate preoperative diagnosis of ovarian cancer. *BJOG: An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 97(10):922–929, 1990.
- [31] N. Japkowicz i M. Shah. *Evaluating Learning Algorithms: A Classification Perspective*. Cambridge University Press, New York, 2011.
- [32] I. Jenhani, S. Benferhat, i Z. Elouedi. Possibilistic similarity measures. W B. Bouchon-Meunier, L. Magdalena, et al., redaktorzy, *Foundations of Reasoning under Uncertainty*, strony 99–123. Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- [33] T. Kailath. The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 15(1):52–60, 1967.
- [34] A. Kandel. *Fuzzy Techniques In Pattern Recognition*. Wiley, New York, 1982.
- [35] N. N. Karnik i J. M. Mendel. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, 132(1):195–220, 2001.
- [36] E. P. Klement, R. Mesiar, i E. Pap. *Triangular norms*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2000.
- [37] J. Koneczny. Ocena przydatności ultrasonograficznych modeli diagnostycznych w predykcji złośliwych guzów jajnika, 2013. Praca doktorska obroniona na Warszawskim Uniwersytecie Medycznym.
- [38] V. Kreinovich, J. Rohn, P. Kahl, i A. Lakeyev. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. Springer, Dordrecht, 1998.
- [39] O. Kulpe i E. B. Titchener. *Outlines of psychology*. Wilhelm Engelmann, London, 1895.
- [40] J. P. Lerner, I. E. Timor-Tritsch, A. Federman, i G. Abramovich. Transvaginal ultrasonographic characterization of ovarian masses with an improved, weighted scoring system. *American Journal of Obstetrics and Gynecology*, 170(1):81–85, 1994.
- [41] Z. Liang i P. Shi. Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, 24(15):2687–2693, 2003.
- [42] C. Lin i C. G. Lee. Real-time supervised structure/parameter learning for fuzzy neural network. W *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, strony 1283–1291, San Diego, USA, 1992.

- [43] X. Luo i C. Zhang. An axiom foundation for uncertain reasonings in rule-based expert systems: NT-algebra. *Knowledge and Information Systems*, 1(4):415–433, 1999.
- [44] E. H. Mamdani i S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1):1–13, 1975.
- [45] J. M. Mendel. Tutorial on the uses of the interval type-2 fuzzy set's Wavy Slice Representation Theorem. W *Proceedings of Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, strony 1–6, New York, USA, 2008.
- [46] J. M. Mendel i R. I. B. John. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2):117–127, 2002.
- [47] J. M. Mendel, R. I. John, i F. Liu. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6):808–821, 2006.
- [48] K. Menger. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535, 1942.
- [49] J. Mill. *Analysis of the Phenomena of the Human Mind*. Longmans, Green, Reader and Dyer, London, 1869.
- [50] H. B. Mitchell. On the Dengfeng–Chuntian similarity measure and its application to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*, 24(16):3101–3104, 2003.
- [51] R. G. Moore, A. K. Brown, M. C. Miller, S. Skates, W. J. Allard, T. Verch, M. Steinhoff, G. Messerlian, P. DiSilvestro, C. O. Granai, et al. The use of multiple novel tumor biomarkers for the detection of ovarian carcinoma in patients with a pelvic mass. *Gynecologic Oncology*, 108(2):402–408, 2008.
- [52] R. G. Moore, D. S. McMeekin, A. K. Brown, P. DiSilvestro, M. C. Miller, W. J. Allard, W. Gajewski, R. Kurman, R. C. Bast, i S. J. Skates. A novel multiple marker bioassay utilizing HE4 and CA125 for the prediction of ovarian cancer in patients with a pelvic mass. *Gynecologic Oncology*, 112(1):40–46, 2009.
- [53] R. Moszynski, S. Szubert, D. Szpurek, S. Michalak, i S. Sajdak. Role of osteopontin in differential diagnosis of ovarian tumors. *Journal of Obstetrics and Gynaecology Research*, 39(11):1518–1525, 2013.
- [54] R. Moszyński, P. Żywica, et al. Menopausal status strongly influences the utility of predictive models in differential diagnosis of ovarian tumors: An external validation of selected diagnostic tools. *Ginekologia Polska*, 85(12):892–899, 2014.
- [55] R. Moszyński. *Możliwości diagnostyczne klasyfikacji zmian rozrostowych jajnika na podstawie ultrasonograficznej oceny morfologicznej i dopplerowskiej, markerów biochemicznych i angiogenezy oraz matematycznych modeli prognostycznych*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Medycznego im. Karola Marcinkowskiego, Poznań, 2014.

- [56] K. Nakamura i S. Iwai. A representation of analogical inference by fuzzy sets and its application to information retrieval systems. W M. Gupta i E. Sanchez, redaktorzy, *Fuzzy Information and Decision Processes*, strony 373–386. North-Holland, New York, 1982.
- [57] C. Negoita, L. A. Zadeh, i H. Zimmermann. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.
- [58] H. T. Nguyen i V. Kreinovich. Computing degrees of subsethood and similarity for interval-valued fuzzy sets: fast algorithms. Raport 94, Department of Computer Science, UTEP, 2008.
- [59] OvaExpert. Strona internetowa projektu. www.ovaexpert.pl.
- [60] S. K. Pal i D. D. Majumder. Fuzzy sets and decision making approaches in vowel and speaker recognition. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 7(8):625–629, 1977.
- [61] A. M. Palacios, L. Sánchez, i I. Couso. Extending a simple genetic cooperative-competitive learning fuzzy classifier to low quality datasets. *Evolutionary Intelligence*, 2(1-2):73–84, 2009.
- [62] A. M. Palacios, L. Sánchez, i I. Couso. Diagnosis of dyslexia with low quality data with genetic fuzzy systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51(8):993–1009, 2010.
- [63] S. C. Pepper. Concept and quality. *Journal of Aesthetics and Art Criticism*, 29:243–246, 1969.
- [64] D. Pilarski. Generalized relative cardinalities of fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 13(1):1–10, 2005.
- [65] J. T. Rickard, J. Aisbett, G. Gibbon, i D. Morgenthaler. Fuzzy subsethood for Type-n fuzzy sets. W *Proceedings of Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, strony 1–6, New York, USA, 2008.
- [66] A. M. Sassone, I. E. Timor-Tritsch, A. Artner, C. Westhoff, i W. B. Warren. Transvaginal sonographic characterization of ovarian disease: evaluation of a new scoring system to predict ovarian malignancy. *Obstetrics & Gynecology*, 78(1):70–76, 1991.
- [67] B. Schweizer, A. Sklar, et al. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(3):313–334, 1960.
- [68] J. H. Shepherd. Revised FIGO staging for gynaecological cancer. *BJOG: An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 96(8):889–892, 1989.
- [69] A. Smoleń, A. Czekierdowski, N. Stachowicz, i J. Kotarski. Use of multilayer perception artificial neural networks for the prediction of the probability of malignancy in adnexal tumors. *Ginekologia Polska*, 74(9):855–862, 2003.

- [70] P. H. A. Sneath. The application of numerical taxonomy to medical problems. *Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine*, strony 81–91, 1965.
- [71] A. Stachowiak. Uncertainty-Preserving Trust Prediction in Social Networks. W W. Pedrycz i S.-M. Chen, redaktorzy, *Social Networks: A Framework of Computational Intelligence*, strony 99–122. Springer, Switzerland, 2013.
- [72] A. Stachowiak i K. Dyczkowski. A similarity measure with uncertainty for incompletely known fuzzy sets. W *Proceedings of Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS)*, strony 390–394, Edmonton, Kanada, 2013.
- [73] A. Stachowiak, P. Żywica, K. Dyczkowski, i A. Wójtowicz. An Interval-Valued Fuzzy Classifier Based on an Uncertainty-Aware Similarity Measure. W P. Angelov, K. T. Atanassov, et al., redaktorzy, *Intelligent Systems' 2014. Volume 1: Mathematical Foundations, Theory, Analyses*, strony 741–751. Springer, Switzerland, 2015.
- [74] A. Stachowiak, K. Dyczkowski, A. Wójtowicz, P. Żywica, i M. Wygralak. A Bipolar View on Medical Diagnosis in OvaExpert System. W T. Andreasen, H. Christiansen, et al., redaktorzy, *Flexible Query Answering Systems 2015*, strony 483–492. Springer, Switzerland, 2016.
- [75] E. Szmidt. *Distances and Similarities in Intuitionistic Fuzzy Sets*. Springer, Switzerland, 2014.
- [76] E. Szmidt i J. Kacprzyk. Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(3):505–518, 2000.
- [77] E. Szmidt i J. Kacprzyk. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 118(3):467–477, 2001.
- [78] E. Szmidt i J. Kacprzyk. A measure of similarity for intuitionistic fuzzy sets. W *Proceedings of EUSFLAT Conference*, strony 206–209, Zittau, Niemcy, 2003.
- [79] D. Szpurek. *Clinical value estimation of the ultrasound morphological and Doppler indices, CA 125 and TPS antigens in early differentiation of the ovarian tumors malignancy*. Wydawnictwo Naukowe Akademii Medycznej im. K. Marcinkowskiego, Poznań, 2004.
- [80] D. Szpurek, R. Moszynski, W. Zietkowiak, M. Spaczynski, i S. Sajdak. An ultrasonographic morphological index for prediction of ovarian tumor malignancy. *European Journal of Gynaecological Oncology*, 26(1):51–54, 2004.
- [81] D. Szpurek, R. Moszyński, et al. An ultrasonographic morphological index for prediction of ovarian tumor malignancy. *European Journal of Gynaecological Oncology*, 26(1):51–54, 2005.
- [82] A. Tailor, D. Jurkovic, T. H. Bourne, W. P. Collins, i S. Campbell. Sonographic prediction of malignancy in adnexal masses using multivariate logistic regression analysis. *Ultrasound in Obstetrics & Gynecology*, 10(1):41–47, 1997.

- [83] A. Taylor, D. Jurkovic, T. H. Bourne, W. P. Collins, i S. Campbell. Sonographic prediction of malignancy in adnexal masses using an artificial neural network. *BJOG: An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 106(1):21–30, 1999.
- [84] D. Timmerman. The use of mathematical models to evaluate pelvic masses; can they beat an expert operator? *Best Practice & Research Clinical Obstetrics & Gynaecology*, 18(1): 91–104, 2004.
- [85] D. Timmerman, T. H. Bourne, A. Taylor, W. P. Collins, H. Verrelst, K. Vandenberghe, i I. Vergote. A comparison of methods for preoperative discrimination between malignant and benign adnexal masses: the development of a new logistic regression model. *American Journal of Obstetrics and Gynecology*, 181(1):57–65, 1999.
- [86] D. Timmerman, P. Schwärzler, W. Collins, F. Claerhout, M. Coenen, F. Amant, I. Vergote, i T. Bourne. Subjective assessment of adnexal masses with the use of ultrasonography: an analysis of interobserver variability and experience. *Ultrasound in Obstetrics & Gynecology*, 13(1):11–16, 1999.
- [87] D. Timmerman, L. Valentin, T. Bourne, W. Collins, H. Verrelst, I. Vergote, et al. Terms, definitions and measurements to describe the sonographic features of adnexal tumors: a consensus opinion from the International Ovarian Tumor Analysis (IOTA) Group. *Ultrasound in Obstetrics and Gynecology*, 16(5):500–505, 2000.
- [88] D. Timmerman, A. C. Testa, T. Bourne, E. Ferrazzi, L. Ameye, M. L. Konstantinovic, B. Van Calster, W. P. Collins, I. Vergote, S. Van Huffel, et al. Logistic regression model to distinguish between the benign and malignant adnexal mass before surgery: a multicenter study by the International Ovarian Tumor Analysis Group. *Journal of Clinical Oncology*, 23(34):8794–8801, 2005.
- [89] D. Timmerman, A. C. Testa, T. Bourne, L. Ameye, D. Jurkovic, C. Van Holsbeke, D. Paladini, B. Van Calster, I. Vergote, S. Van Huffel, et al. Simple ultrasound-based rules for the diagnosis of ovarian cancer. *Ultrasound in Obstetrics & Gynecology*, 31(6):681–690, 2008.
- [90] S. Tingulstad, B. Hagen, F. E. Skjeldestad, M. Onsrud, T. Kiserud, T. Halvorsen, i K. Nustad. Evaluation of a risk of malignancy index based on serum CA125, ultrasound findings and menopausal status in the pre-operative diagnosis of pelvic masses. *BJOG: An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 103(8):826–831, 1996.
- [91] W. S. Torgerson. Multidimensional scaling of similarity. *Psychometrika*, 30(4):379–393, 1965.
- [92] E. Trillas i L. Valverde. On mode and implication in approximate reasoning. W M. Gupta i A. Kandel, redaktorzy, *Approximate reasoning in expert systems*, strony 157–166. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [93] A. Tversky. Features of similarity. *Psychological Review*, 84:327–352, 1977.

- [94] A. Tversky i I. Gati. Studies of similarity. *Cognition and Categorization*, 1(1978):79–98, 1978.
- [95] L. Ughetto, D. Dubois, i H. Prade. Fuzzy interpolation by convex completion of sparse rule bases. W *Proceedings of 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2000)*, strony 465–470, San Antonio, USA, 2000.
- [96] United Nations. World Population Prospects, the 2012 Revision. <http://esa.un.org/unpd/wpp/>. Online. Dostęp 17/11/2014.
- [97] L. Valentin, B. Hagen, S. Tingulstad, i S. Eik-Nes. Comparison of ‘pattern recognition’ and logistic regression models for discrimination between benign and malignant pelvic masses: a prospective cross validation. *Ultrasound in Obstetrics & Gynecology*, 18(4):357–365, 2001.
- [98] B. Van Calster, K. Van Hoorde, L. Valentin, A. C. Testa, D. Fischerova, C. Van Holsbeke, L. Savelli, D. Franchi, E. Epstein, J. Kaijser, et al. Evaluating the risk of ovarian cancer before surgery using the ADNEX model to differentiate between benign, borderline, early and advanced stage invasive, and secondary metastatic tumours: prospective multicentre diagnostic study. *BMJ*, 349:5920.
- [99] B. Van Calster, D. Timmerman, C. Lu, J. A. K. Suykens, L. Valentin, C. Van Holsbeke, F. Amant, I. Vergote, i S. Van Huffel. Preoperative diagnosis of ovarian tumors using bayesian kernel-based methods. *Ultrasound in Obstetrics & Gynecology*, 29(5):496–504, 2007.
- [100] B. Van Calster, D. Timmerman, I. T. Nabney, L. Valentin, A. C. Testa, C. Van Holsbeke, I. Vergote, i S. Van Huffel. Using Bayesian neural networks with ARD input selection to detect malignant ovarian masses prior to surgery. *Neural Computing and Applications*, 17(5-6):489–500, 2008.
- [101] C. Van Holsbeke, B. Van Calster, L. Valentin, A. C. Testa, E. Ferrazzi, I. Dimou, C. Lu, P. Moerman, S. Van Huffel, I. Vergote, et al. External validation of mathematical models to distinguish between benign and malignant adnexal tumors: a multicenter study by the International Ovarian Tumor Analysis Group. *Clinical Cancer Research*, 13(15):4440–4447, 2007.
- [102] F. Wenstøp. Quantitative analysis with linguistic values. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(2): 99–115, 1980.
- [103] D. R. Wilson i T. R. Martinez. Reduction techniques for instance-based learning algorithms. *Machine Learning*, 38(3):257–286, 2000.
- [104] World Health Organization. Mortality database. http://www.who.int/healthinfo/mortality_data/. Online. Dostęp 17/11/2014.
- [105] D. Wu i J. M. Mendel. Enhanced Karnik–Mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4):923–934, 2009.

- [106] D. Wu i J. M. Mendel. Efficient algorithms for computing a class of subsethood and similarity measures for interval type-2 fuzzy sets. W *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ)*, strony 1–7, Barcelona, Hiszpania, 2010.
- [107] M. Wygralak. *Cardinalities of fuzzy sets*. Springer, Heidelberg, 2003.
- [108] M. Wygralak. Cardinalities of fuzzy sets with triangular norms. W *Proceedings of EUSFLAT Conference*, strony 691–696, Zittau, Niemcy, 2003.
- [109] A. Wójtowicz, P. Żywica, K. Szarzyński, R. Moszyński, S. Szubert, K. Dyczkowski, A. Stachowiak, D. Szpurek, i M. Wygralak. Dealing with Uncertainty in Ovarian Tumor Diagnosis. W K. Atanassov, W. Homenda, et al., redaktorzy, *Modern Approaches in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics. Volume II: Applications*, strony 151–158. IBS PAN, Warszawa, 2014.
- [110] A. Wójtowicz, P. Żywica, A. Stachowiak, i K. Dyczkowski. Solving the problem of incomplete data in medical diagnosis via interval modeling. *Applied Soft Computing*, W recenzji, 2016.
- [111] L. Xuecheng. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 52(3):305–318, 1992.
- [112] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [113] L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3(2):177–200, 1971.
- [114] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.
- [115] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence*, 9:149–194, 1979.
- [116] W. Zeng i H. Li. Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(11):1477–1484, 2006.
- [117] H. Zhang, W. Zhang, i C. Mei. Entropy of interval-valued fuzzy sets based on distance and its relationship with similarity measure. *Knowledge-Based Systems*, 22(6):449–454, 2009.
- [118] R. Zwick, E. Carlstein, i D. V. Budeacu. Measures of similarity among fuzzy concepts: A comparative analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1(2):221–242, 1987.
- [119] P. Żywica. Repozytorium kodu. <http://github.com/bikol/phd-thesis-applications>.
- [120] P. Żywica. Miary podobieństwa i zawierania zbiorów rozmytych, 2014. Praca magisterska obroniona na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
- [121] P. Żywica i A. Stachowiak. A new method for computing relative cardinality of intuitionistic fuzzy sets. W K. Atanassov, M. Baczyński, et al., redaktorzy, *Modern Approaches in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics. Volume I: Foundations*, strony 181–189. IBS PAN, Warszawa, 2014.

- [122] P. Żywica, S. Apolinarski, i B. Kubiński. OvaExpert: An intelligent medical diagnosis support system for ovarian tumor. *Journal of Medical Informatics & Technologies*, 24: 183–190, 2015.
- [123] P. Żywica, K. Dyczkowski, A. Wójtowicz, A. Stachowiak, S. Szubert, i R. Moszyński. Development of a Fuzzy-Driven System for Ovarian Tumor Diagnosis. *Journal of Healthcare Engineering*, W recenzji, 2016.
- [124] P. Żywica, A. Stachowiak, i M. Wygralak. An Algorithmic Study of Relative Cardinalities for Interval-Valued Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, W druku, 2016.

Spis oznaczeń

Symbol	Znaczenie
Ogólne	
U	uniwersum, najczęściej $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
X, Y, Z	zbiory w sensie klasycznej teorii mnogości
$\pi : U \rightarrow U$	permutacja elementów uniwersum
T, S	t-norma i t-konorma
T_{\min}, S_{\max}	t-norma minimum, t-konorma maksimum
\cap lub \cap_T, \cup lub \cup_S	przekrój i suma zbiorów, zbiorów rozmytych i przedziałowych zbiorów rozmytych
$\mathcal{I}(\mathbb{R})$	zbiór wszystkich przedziałów domkniętych w \mathbb{R}
$\mathcal{I}([0, 1])$	zbiór wszystkich przedziałów domkniętych w $[0, 1]$
Zbiory rozmyte	
$\mathcal{FS}(U)$	rodzina wszystkich zbiorów rozmytych w U
A, B, C, D	zbiory rozmyte w U
$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$	funkcja przynależności zbioru rozmytego A
A^π	zbiór rozmyty taki, że $\mu_{A^\pi}(u) = \mu_A(\pi(u))$ dla każdego $u \in U$
A^c	dopełnienie zbioru rozmytego
$\mathbf{1}_X$	funkcja charakterystyczna zbioru X
$ A , \sigma(A), \sigma_f(A)$	skalarna moc zbioru rozmytego A
$\sigma_{f,T}(A B)$	uogólniona moc względna zbioru rozmytego A względem B

Przedziałowe zbiory rozmyte

IVFS	przedziałowy zbiór rozmyty (ang. Interval-Valued Fuzzy Set)
$\mathcal{IVFS}(U)$	rodzina wszystkich przedziałowych zbiorów rozmytych w U
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$	przedziałowe zbiory rozmyte w U
$\mu_{\hat{A}} : U \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$	funkcja przynależności przedziałowego zbioru rozmytego A
\hat{A}^π	przedziałowy zbiór rozmyty taki, że $\mu_{\hat{A}^\pi}(u) = \mu_{\hat{A}}(\pi(u))$ dla każdego $u \in U$
A^c	dopełnienie przedziałowego zbioru rozmytego
$\hat{\mathbb{1}}_X$	przedziałowy zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_{\hat{\mathbb{1}}_X}(u) = \begin{cases} [1, 1], & u \in X \\ [0, 0], & u \notin X \end{cases}$
$IVFS(A)$	przedziałowy zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_{IVFS(A)}(u) = [\mu_A(u), \mu_A(u)]$
$\hat{\sigma}_{f,T}(\hat{A} \hat{B})$	uogólniona przedziałowa moc względna przedziałowego zbioru rozmytego \hat{A} względem \hat{B}
$\hat{A} \sqsubseteq \hat{B}$	zawieranie się stanów epistemicznych reprezentowanych przez dwa epistemiczne IVFS (patrz (3.2))
$A \in_E \hat{A}$	zbiór rozmyty A zanurzony w IVFS \hat{A} (patrz Definicja 1.7)
$\text{FOU}(\hat{A})$	śląd niepewności (patrz (3.29))

Podobieństwo

$\mathbb{E}, \hat{\mathbb{E}}$	dziedzina miary podobieństwa, odpowiednio, zbiorów rozmytych oraz przedziałowych zbiorów rozmytych (patrz Definicja 2.1)
$s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, s : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$	miara podobieństwa zbiorów rozmytych (patrz (2.3))
$s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}, s : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow [0, 1]$	miara podobieństwa przedziałowych zbiorów rozmytych (patrz (2.5))
$\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}),$ $\hat{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}([0, 1])$	miara podobieństwa epistemicznych przedziałowych zbiorów rozmytych (patrz (2.6))
$\hat{s} _{\mathcal{FS}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$	zawężenie \hat{s} do zbiorów rozmytych (patrz Definicja 3.1)
$\tilde{s} : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$	rozszerzenie miary podobieństwa zbiorów rozmytych s do przedziałowych zbiorów rozmytych (patrz Definicja 3.3)