

JAN FERIANC i JAN MASARYK

OPTYMALNY PLAN KAMPANII CUKROWNICZEJ

CHARAKTERYSTYKA ZAGADNIENIA I KRYTERIA JEGO ROZWIĄZANIA

Zanim dojdziemy do rozwiązania naszego zagadnienia metodami matematycznymi należy chociaż krótko wspomnieć o czynnikach wpływających na ekonomiczną efektywność cukrownictwa. Weźmy pod uwagę niektóre właściwości surowca — buraka cukrowego, z którego się u nas wyrabia cukier oraz cukrowni, które burak przerabiają.

Burak cukrowy, jak i inne przemysłowe surowce organicznego pochodzenia, ma tę właściwość, że po zakończeniu procesów biologicznych, tj. po wyrwaniu z ziemi, zachodzą w nim procesy biochemiczne, pod wpływem których burak się psuje i traci na zawartości cukru. Dlatego można powiedzieć, że sam upływ czasu wpływa na efektywność przemysłu cukrowniczego. Im dłużej się burak magazynuje, tj. im dłużej trwa kampania, tym mniej cukru wyprodukujemy (zakładając niezmienną powstałych warunków). Chodzi o bardzo dawno znany fakt, którego poznanie stało się przyczyną sezonowości przemysłu cukrowniczego. Jeżeli chcemy wyprodukować maksimum cukru, biorąc pod uwagę tylko naturalne właściwości buraków, należy jak najbardziej skrócić kampanię.

Nasuwa się pytanie: kiedy kampania będzie najkrótsza, oczywiście pod warunkiem, że mamy przerobić pewną określoną ilość buraków? Prawdopodobnie wtedy, gdy cukrownie równocześnie rozpoczną i równocześnie skończą kampanię, tj. w przypadku, gdy ich kampanie będą trwały równie długo.

Rozważmy czy powyższy wniosek pozostanie słuszny po uwzględnieniu specyficznych właściwości cukrowni. Okaze się, że nie.

Techniczny poziom cukrowni jest różny. Niektóre wyprodukują mniejszą ilość cukru (podczas procesu produkcji straty cukru są w nich większe), inne większą. Dążenie do największej efektywności prowadzi do tego, żeby technicznie lepsze cukrownie przerobiły jak najwięcej buraków, tzn. żeby miały jak najdłuższe kampanie, i odwrotnie. Z tego wynikałoby, że lepiej; wyposażone cukrownie powinny pracować w ciągu

całego roku, a gorsze powinny jedynie przerabiać nadwyżkę, której tamte nie są w stanie przerobić. Ze względu na właściwości buraka rozwiązanie tego rodzaju jest jednak niemożliwe. Burak nie znosi długiego magazynowania. Czytelnik już na pewno zauważył, że zarówno najkrótsza, jak i najdłuższa kampania są nieekonomiczne. Należy ustalić taką długość kampanii, pośrednią między kampanią najkrótszą i najdłuższą, którą będziemy nazywali optymalną. Długość jej określimy przy pomocy metod matematycznych.

Dotąd rozpatrywaliśmy zagadnienie biorąc za kryterium ekonomicznej efektywności tylko wielkość produkcji, tzn. ilość produkowanego cukru, co jest niewystarczające. W rozwiązaniach ekonomicznych zagadnień należy uwzględniać też poziom kosztów produkcji. Za istotny efekt można uznać tylko różnicę między wartością produkcji i kosztami produkcji. Otrzymanie maksymalnego efektu polega na osiągnięciu maksimum produkcji przy minimum, kosztów produkcji. Ale w ten sposób sformułowany postulat nie da się zrealizować. Można żądać albo wyprodukowania maksimum cukru przy kosztach, które nie są minimalne, lub pracować z minimalnymi kosztami, mimo że nie wyprodukujemy maksimum cukru. Decyzja polega na wyborze jednego z tych wariantów. Należy zdecydować się który z tych postulatów przyjąć jako kryterium dla rozwiązania naszego zagadnienia.

Punktem wyjścia do przyjęcia ostatecznej decyzji powinien być interes gospodarki narodowej, a nie interes zakładu pracy. Spróbujmy określić na czym polega interes gospodarki narodowej. Co jest dla gospodarki narodowej bardziej korzystne? Z danej ilości surowca uzyskać jak najwięcej jednostek produktu, czy też raczej uzyskać mniejszą ilość produktu przy minimalnych kosztach? To zależy od konkretnej sytuacji gospodarczej), a w szczególności od tego jaki jest udział surowca w wartości produktu i jak bogate są źródła surowca.

Jeśli wiemy, że źródła surowca są bardzo ograniczone, na przykład w pewnym okresie czasu źródła te zostaną całkowicie wyczerpane, należy przede wszystkim wyprodukować z surowca jak najwięcej produktu, nawet w wypadku, gdy udział surowca w wartości produktu jest zupełnie mały.

Jeśli udział surowca jest duży, wówczas też należy wyprodukować jak najwięcej produktów. Wynika to z następującego rozumowania. Jeśli uzyskamy z surowca maksimum produktów, to na jednostkę produkcji, zużyjemy minimum surowca, a więc będziemy pracowali z minimalnymi kosztami surowca. Gdy surowiec stanowi na przykład 90% gotowego produktu, to wtedy maksymalizując produkcję, równocześnie minimalizujemy 90% wszystkich kosztów produkcji.

Wystarczy podkreślić, że koszty surowca wynoszą przy produkcji

cukru 75% wszystkich kosztów. Z tego wniosek: trzeba uzyskać z danej ilości surowca maksimum cukru. Za wnioskiem tym przemawia między innymi jeszcze i to, że buraki są cennym surowcem. Przez wyprodukowanie planowanej ilości cukru z minimum surowca zwolnimy pewną ilość buraków dla karmienia bydła, co z kolei prowadzi do wzrostu produkcji mięsa, mleka itd.

Doszliśmy do wniosku, że z punktu widzenia gospodarki narodowej, rzeczą pierwszorzędnej wagi jest uzyskanie maksimum cukru, a obniżkę kosztów należy uwzględnić dopiero na drugim miejscu. Tym będziemy się kierować rozwiązując nasze zagadnienie, które można sformułować następująco.

Zadaniem naszym jest przerobienie w ramach gospodarki narodowej pewnej ilości buraków cukrowych o pewnej jakości (zawartości cukru), przy wykorzystaniu wszystkich cukrowni w kraju. Mamy ustalić optymalną kampanię, czyli określić długość kampanii poszczególnych cukrowni tak, żeby z danej ilości buraków wyprodukować maksimum cukru.

Nasze zadania można jeszcze rozszerzyć. Mamy określoną długość kampanii poszczególnych cukrowni, wiemy ile buraków cukrowych przerobi każda cukrownia, jak również ile buraków zakupi się w regionie każdej cukrowni. Biorąc to pod uwagę możemy rozwiązać problem organizacji transportu. Rozwiązanie polega na decyzji, z których terenów do której cukrowni trzeba transportować buraki, żeby suma kosztów transportu była minimalna

MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Wszystkie cukrownie w kraju tworzą system cukrowni, zdolnych do -przerobienia prawie wszystkich buraków, które się skupuje, ponieważ buraki nigdy nie bywają artykułami handlu zagranicznego. Można więc przyjąć, że bilans buraków pozostaje w równowadze.

Mamy system n cukrowni, z których dowolną cukrownię oznaczmy numerem j ($j=1, 2, \dots, n$).

Jeśli kampania j -ej cukrowni trwa t_j dni, a ilość buraków przerobionych w jednym dniu (w cetnarach metrycznych) oznaczmy przez q_j , to ilość buraków przerobionych przez tę cukrownię w toku całej kampanii można wyrazić przy pomocy następującego równania:

$$Q_j = q_j t_j \quad (1)$$

Ilość buraków przerobionych przez cały system cukrowni oznaczmy przez Q , wobec czego:

$$Q = \sum_{j=1}^n Q_j = \sum_{j=1}^n q_j t_j \quad (2)$$

Ilość buraków zakupionych w regionie j -ej cukrowni oznaczmy przez R_j , a ilość zakupioną przez cały system cukrowni przez R , co pozwoli nam na sformułowanie równania, analogicznego do równania (2):

$$R = \sum_{j=1}^n R_j \quad (3)$$

Ze względu na równowagę bilansu buraków zachodzi równanie:

$$\sum_{j=1}^n Q_j = \sum_{j=1}^n R_j,$$

choć niekoniecznie będą spełnione równania $R_j - Q_j$ z czego wynika potrzeba transportu surowca między regionami.

Dowolna cukrownia j uzyska z przeróbki Q_j buraków V_j cukru. Jeśli ilość cukru uzyskanego w toku kampanii przez wszystkie cukrownie z przeróbki buraków w ilości $R \sim Q$ oznaczmy przez V , możemy stwierdzić:

$$V = \sum_{j=1}^n V_j \quad (4)$$

Naszym zadaniem jest znalezienie rozwiązania, które zapewni wyprodukowanie maksimum cukru z danej ilości buraków $R=Q$.

Zanim przejdziemy do rozwiązania tego zadania określimy niektóre ważniejsze wielkości, które wystąpią w zagadnieniu.

Najważniejszym wskaźnikiem jakości buraków jest zawartość cukru, którą będziemy oznaczali przez α . Liczba α wskazuje ile kg cukru znajduje się w 100 kg buraków w momencie zbioru.

Wiemy, że po zakończeniu naturalnych procesów biologicznych w burakach zachodzą procesy biochemiczne, wywołujące podczas składowania obniżkę zawartości cukru i wagi buraków. Wskaźnikiem tej obniżki są tzw. straty, które oznaczmy przez v . Liczba v oznacza, ile kg cukru traci się na 100 kg buraków w ciągu jednego dnia. Jeżeli na przykład $v=0,03$, to znaczy że w jednym dniu na 100 kg buraków traci się 3 dkg cukru. Wielkość v jest zależna od wielu czynników (zdrowotność buraków, temperatura i wilgotność powietrza w okresie magazynowania, przewiewanie buraków itd.) i może się znacznie wahać w poszczególnych kampaniach, a nawet w poszczególnych dniach tej samej kampanii. Dienne straty są zwykle wyższe w ostatnich dniach kampanii niż na początku czy w środku kampania, ponieważ na początku istnieją lepsze warunki klimatyczne składowania.

Z chwilą rozpoczęcia procesu produkcyjnego kończą się straty z tytułu składowania buraków, a zaczynają się pojawiać inne straty — straty technologiczne. Wielkość strat technologicznych zależy od tech-

nologicznego poziomu cukrowni i oczywiście nie jest ona jednakowa w poszczególnych cukrowniach. W cukrowniach nowoczesnych z nowoczesną dyfuzją straty będą niższe niż w cukrowniach starych. Wskaźnik strat technologicznych w dowolnej cukrowni oznaczmy przez β_j ; wskazuje on nam ile kg cukru traci się na 100 kg surowca podczas procesu technologicznego w j-jej cukrowni. Na przykład $\beta_j = 0,90$ oznaczałoby, że na każde 100 kg surowca straty w procesie technologicznym wynoszą 90 dkg cukru.

Wróćmy do równania (4) i zbadajmy od czego zależy osiągnięcie maksimum produkcji cukru.

Wielkość produkcji cukru zależy w pierwszym rzędzie od ilości buraków i zawartości cukru w burakach. Q centnarów metrycznych buraków zawiera w dniu zbioru α Q kg cukru. Ponieważ wartości Q i α są dla przemysłu cukrowniczego określone już przez warunki gospodarki rolnej, powinniśmy je z punktu widzenia naszego zadania traktować jako dane. Dany jest tym samym iloczyn tych wielkości. Z teorii szukania ekstremum funkcji wiemy, że dodanie stałej nie ma wpływu na istnienie ekstremum (pochodna stałej jest równa zero), możemy więc być pewni, że o maksimum produkcji cukru nie decyduje sama ilość i zawartość cukru w burakach. Iloczyn αQ oznaczający ilość cukru we wszystkich burakach określa tylko górną granicę możliwej produkcji cukru, z czego wynika, że przy formułowaniu zadania trzeba dążyć do maksymalizacji innej; wielkości, a mianowicie V .

Ilość uzyskanego cukru otrzymamy, jeśli od ilości cukru zawartego we wszystkich burakach αQ odejmiemy straty spowodowane składowaniem i straty technologiczne. Ze względu na stałość iloczynu αQ można powiedzieć, że ilość cukru uzyskanego z danej ilości Q buraków zależy od rozmiarów wspomnianych dwóch rodzajów strat. Zbadajmy tę zależność.

Wiemy, że ogólna wielkość strat cukru z tytułu składowania zależy od wielkości strat dziennych, więc od wartości v , która jest dla każdej określonej kampanii dana. Oprócz tego zależy ona od ilości buraków i od okresu składowania.

Okres składowania jest tym dłuższy, im dłuższa jest kampania. Ilość składowanych buraków zależy od długości kampanii, ponieważ kampania trwa tym dłużej, im więcej buraków się magazynuje w momencie skończenia zbioru. Skoro wielkość zapasów i okres składowania zależy od długości kampanii, można stwierdzić: wielkość strat cukru z tytułu składowania zależy od czynnika v i od długości kampanii dowolnej; cukrowni, tzn. jest funkcją długości kampanii t_j .

Zbadajmy od czego zależy ogólna wielkość technologicznych strat, których poziom jest określony przez wartość β_j . Suma takich strat

w dowolnej cukrowni zależy od ilości przerobionych buraków i jest tym większa, im dłuższa jest kampania. Można więc powiedzieć, że te straty są funkcją długości kampanii t_j .

Ponieważ wszystkie rodzaje strat są funkcją długości kampanii, można wobec tego stwierdzić, że i produkcja cukru, tak w dowolnej; cukrowni, jak i w całym systemie cukrowni, jest funkcją czasu trwania kampanii, a więc $V=F(t_j)$, ($j=1, 2, \dots, n$). Dotychczasowe rozumowanie doprowadziło nas do istoty rozwiązania. Obecnie trzeba znaleźć konkretną postać funkcji $F(t_j)$ i określić t_j , w którym funkcja F osiąga maksimum¹.

W ten sposób obliczone długości kampanii t_j poszczególnych cukrowni będą optymalne, tj. zapewnią uzyskanie maksimum cukru. Równocześnie długość kampanii wszystkich cukrowni też będzie optymalna.

Dla jasności dalszych rozważań należy pojęcie optymalnej kampanii dokładnie określić, ponieważ nie jest ono zgodne z tym pojęciem optymalnej kampanii, które się uwzględnia przy rozważaniu budowy zakładów cukrowniczych. W tym ostatnim przypadku pojęcie optymalnej kampanii określa się bardziej szczegółowo niż w naszym przypadku, gdyż bierze się pod uwagę tylko warunki, w których konkretna cukrownia będzie pracować. W naszym wypadku bierzemy pod uwagę nie tylko warunki poszczególnych cukrowni, lecz również czynniki działające w całym systemie cukrowni (czynniki te traktujemy jako dane). Kampania w naszym pojęciu nie jest stała. Z roku na rok zmienia się, ponieważ zmieniają się czynniki działające na jej długość, tzn. zmienia się ilość buraków Q , zmienia się czynnik v i zmienia się technologiczny poziom cukrowni (rekonstrukcja, modernizacja itd.).

Obliczenie długości kampanii j , to tylko pierwsza część postawionego zadania. Drugą, względnie samodzielną częścią, jest rozwiązanie problemu transportu buraków. Ten problem zbadamy później.

MODELE DLA OBLICZENIA OPTYMALNEJ DŁUGOŚCI KAMPANII

Rozwiązanie zagadnienia jest skomplikowane wskutek działania czasu, który występuje w postaci długości kampanii poszczególnych cukrowni. Cukrownie rozpoczynają przeróbkę w różnych momentach; dowolne dwie cukrownie nie muszą rozpoczynać pracy w tym samym momencie. Na skutek tego należy założyć następujące upraszczające warunki. Pierwsze dwa mają znaczenie metodologiczne. Później: zostaną one usunięte.

¹ W oparciu o to rozumowanie zbudowany został model kwadratowy I. Logiczna struktura następnych dwóch modeli jest nieco inna. Różnice wytłumaczymy w czasie przeprowadzania dowodów.

Warunek 1. Wszystkie cukrownie rozpoczną kampanię w jednym momencie, czyli punkty zerowe (pojęcie to objaśnimy poniżej) wszystkich cukrowni będą identyczne.

Warunek 2. Czynniki v jest stały, tzn. straty z tytułu składowania są równe w każdym dniu kampanii.

Warunek 3. Wszystkie buraki zbiera się i magazynuje w punkcie zerowym, tj. w momencie rozpoczęcia kampanii przez wszystkie cukrownie (por. warunek 1).

W rzeczywistości część buraków zbiera się i skupuje przed początkiem kampanii, resztę — podczas kampanii. Ponieważ przyjęliśmy, że zawartość cukru w burakach w dniu zbioru jest stała i równa a , więc zawartość cukru w burakach zebranych na i dni przed rozpoczęciem kampanii w punkcie zerowym wyniesie

$$a_0 = a - iv, \quad (5)$$

będzie więc mniejsza niż zawartość cukru w dniu zbioru. Buraki zebrane już w toku trwania kampanii mogą tracić na zawartości cukru mniej lub więcej w zależności od długości okresu składowania. Upraszczający warunek 3 nie pozwala na uwzględnianie strat cukru płynących wskutek zbierania części buraków przed rozpoczęciem kampanii, wyolbrzymia natomiast straty płynące z magazynowania buraków zebranych w toku kampanii. Dokładne ustalenie zawartości cukru, z jaką poszczególne partie buraków są wprowadzane do procesu produkcyjnego, jest bardzo trudne i dlatego konieczne jest tu przyjęcie pewnego uproszczenia. Fakt ten powoduje, że operowanie modelami w których występuje współczynnik a musi prowadzić do pewnych niedokładności w obliczeniach. Ponieważ zależy nam na tym by przeprowadzić możliwie dokładne obliczenia, sformułujemy też takie metody rozwiązania zagadnienia, przy których współczynnik a w ogóle nie występuje (model kwadratowy II i liniowy I).

Zakładając wymienione wyżej warunki upraszczające obliczymy obecnie straty z tytułu składowania buraków i straty technologiczne.

Oznaczmy straty cukru z tytułu składowania w j -ej cukrowni przez W_j . Współczynnik W_j obliczymy sumując dzienne straty, z których każda jest iloczynem wartości v i zapasu buraków w magazynie w danym dniu kampanii. Oznaczając przez z_{ij} stan magazynu w i -tym dniu w cukrowni j otrzymamy na współczynnik W_j wzór

$$W_j = \sum_{i=1}^{t_j} v z_{ij} = v \sum_{i=1}^{t_j} z_{ij}. \quad (6)$$

Wobec warunku 3 zapas po i dniach kampanii wyniesie $Q_j - i q_j$, a zakładając że zapas zmienia się w sposób ciągły możemy przyjąć,

iż w chwili t będzie on wynosił $Q_j - tq_j$ i zastąpić sumą $\sum_{i=1}^{t_j} z_{ij}$ całką

$$\int_0^{t_j} (Q_j - tq_j) dt.$$

Wobec wzoru $\int_0^{t_j} (Q_j - tq_j) dt = \int_0^{t_j} q_j(t_j - t) dt = q_j(t_j^2 - \frac{1}{2} t_j^2) = \frac{1}{2} q_j t_j^2$,

a więc

$$W_j = \frac{1}{2} v q_j t_j^2. \quad (7)$$

Ilość cukru straconego z tytułu magazynowania w dowodnej cukrowni wyrażona równaniem (7) jest podana w jednostkach równych jednej setnej jednostki, w których mierzymy ilość buraków. Jeśli wielkości q_j mierzymy w cetnarach metrycznych, to współczynnik W_j będzie wyrażony w kilogramach.

Wskaźnikiem strat technologicznych są współczynniki β_j , które już określiliśmy. Dowolna cukrownia przerobi w ciągu dnia ilość buraków wynoszącą q_j jej kampania trwa t_j dni, podczas kampanii przerobi ona ilość $q_j t_j$ cetnarów metrycznych buraków, a ponieważ każdy cetnar metryczny buraków straci podczas procesu produkcyjnego β_j kilogramów cukru, technologiczne straty dowolnej cukrowni będą wynosiły:

$$U_j = \beta_j q_j t_j. \quad (8)$$

Jeśli wielkość q_j wyrazimy w cetnarach metrycznych, to współczynnik U_j będzie wyrażony w kilogramach.

MODEL KWADRATOWY I

Wykazaliśmy, że wielkość produkcji cukru otrzymamy, jeśli od ilości cukru zawartego w burakach aQ odejmiemy straty z tytułu magazynowania i straty technologiczne. Wielkość produkcji cukru w dowolnej cukrowni, która przerobi Q_j cetnarów buraków, możemy ze względu na równania (7) i (8) wyrazić równaniem:

$$V_j = aQ_j - \frac{1}{2} v q_j t_j^2 - \beta_j q_j t_j.$$

Jeśli zamiast Q_j wpiszemy jego wartość określoną równaniem (1) to będzie:

$$V_j = a q_j t_j - \frac{1}{2} v q_j t_j^2 - \beta_j q_j t_j, \quad (9)$$

+ po przekształceniu

$$V_j = (\alpha - \beta_j) q_j t_j - \frac{v}{2} q_j t_j^2. \quad (10)$$

Wielkość produkcji cukru we wszystkich cukrowniach naszego systemu otrzymamy, jeśli równanie (10) wprowadzimy do (4), skąd otrzymamy:

$$V = \sum_{j=1}^n (\alpha - \beta_j) q_j t_j - \frac{v}{2} \sum_{j=1}^n q_j t_j^2. \quad (11)$$

Kryterium optymalności wymaga, żeby z buraków przerobionych w całym systemie cukrowni uzyskać maksimum cukru, tzn., że matematycznie powinno być:

$$\sum_{j=1}^n V_j = \max,$$

przy dodatkowym warunku:

$$\sum_{j=1}^n q_j t_j = R. \quad (12)$$

Optymalne są więc te kampanie poszczególnych cukrowni, przy których maksimum osiąga funkcja:

$$F(t_j) = \sum_{j=1}^n V_j - \lambda (R - \sum_{j=1}^n q_j t_j),$$

która po uwzględnieniu zależności (10) i przekształceniu przyjmie postać:

$$F = \sum_{j=1}^n (\alpha - \beta_j) q_j t_j - \frac{v}{2} \sum_{j=1}^n q_j t_j^2 + \lambda \sum_{j=1}^n q_j t_j - \lambda R. \quad (13)$$

Wartości t_j przy których funkcja (13) osiąga ekstremum otrzymamy rozwiązując równania:

$$\frac{\partial F(t_j)}{\partial t_j} = 0. \quad (14)$$

Na podstawie teorii ekstremów funkcji wielu zmiennych można dowieść, że to ekstremum będzie stanowiło maksimum.

Wprowadzając wyrażenie (13) do równania (14), różniczkując i przyrównując do zera otrzymujemy:

$$(\alpha - \beta_j) q_j - v q_j t_j + \lambda q_j = 0,$$

skąd

$$t_j = \frac{(\alpha - \beta_j) q_j + \lambda q_j}{v q_j},$$

a po przekształceniu

$$t_j = \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j) + \frac{\lambda}{v}. \quad (15)$$

Musimy jeszcze określić parametr λ , i w tym celu wprowadzimy równanie (15) do dodatkowego warunku (12), skąd otrzymamy

$$\sum_{j=1}^n q_j \left[\frac{1}{v}(\alpha - \beta_j) + \frac{\lambda}{v} \right] = R,$$

a po przekształceniu

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j)q_j + \frac{\lambda}{v} \sum_{j=1}^n q_j = R,$$

skąd

$$\frac{\lambda}{v} = \frac{R - \sum_{j=1}^n \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j)q_j}{\sum_{j=1}^n q_j}.$$

Po uwzględnieniu zależności (15) otrzymamy:

$$t_j = \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j) + \frac{R - \sum_{j=1}^n \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j)q_j}{\sum_{j=1}^n q_j},$$

czyli

$$t_j = \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j) - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v}(\alpha - \beta_j)q_j - R}{\sum_{j=1}^n q_j}. \quad (16)$$

Jeśli czynnik $\frac{1}{v}(\alpha - \beta_j)$ oznaczmy przez A_j , otrzymamy

$$t_j = A_j - \frac{\sum_{j=1}^n A_j q_j - R}{\sum_{j=1}^n q_j}, \quad (17)$$

a jeśli przyjmiemy

$$\frac{\sum_{j=1}^n A_j q_j - R}{\sum_{j=1}^n q_j} = M, \quad (18)$$

to będzie

$$t_j = A_j - M, \quad (19)$$

co jest wzorem na długość optymalnej kampanii dla poszczególnych cukrowni.

Obliczenie tych długości będzie proste, jeśli uporządkujemy je w postaci następującej tabelki²:

Cukrownia	q_j	β_j	$\alpha - \beta_j$	A_j	$A_j q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6	7

Współczynnik M otrzymamy korzystając ze wzoru (18), który ze względu na powyższą tabelkę możemy zapisać w postaci:

$$M = \frac{\text{suma kolumny 5} - R}{\text{suma kolumny 1}}$$

Kolumna 7 tabelki zawiera ilości buraków, które powinny być przeobrażone przez poszczególne cukrownie podczas optymalnej kampanii. Oprócz tego ma ona znaczenie kontrolne.

Suma wyrazów kolumny 7 powinna być identyczna z R . Ze względu na zaokrąglenie może tu wystąpić pewna różnica. Ta różnica nie powinna być duża. Na przykład jeśli obliczamy długość kampanii t_j z dokładnością do jednej tysięcznej, różnica może wynosić tysięczną część sumy dziennych ilości przerabianych w cukrowniach, a wtedy powinno być

$$R - \sum_{j=1}^n q_j t_j \leq \frac{1}{1000} \sum_{j=1}^n q_j. \quad (20)$$

MODEL KWADRATOWY TL

Model ten jest zbudowany przy założeniu, że maksimum cukru wyprodukujemy wtedy, jeżeli suma strat z tytułu magazynowania i strat technologicznych będzie minimalna.

Sumę strat j -ej cukrowni oznaczmy przez S_j . Z równań (7) i (8) wynika, że

$$S_j = \beta_j q_j t_j + \frac{1}{2} v q_j t_j^2. \quad (21)$$

Maksimum produkcji cukru osiągniemy przy takich t_j , że

$$\sum_{j=1}^n S_j = \min,$$

przy dodatkowym warunku (12).

² Por. przykład podany na s. 225.

Ze względu na warunek (12) suma strat wszystkich cukrowni jest określona funkcją:

$$F = \sum_{j=1}^n S_j - \lambda(R - \sum_{j=1}^n q_j t_j),$$

a jeśli zamiast S_j wprowadzimy prawą stronę wzoru (21), to po przekształceniu otrzymamy:

$$F = \sum_{j=1}^n \beta_j q_j t_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n v q_j t_j^2 + \lambda \sum_{j=1}^n q_j t_j - \lambda R. \quad (22)$$

Ta funkcja ma ekstremum przy wartościach t_j , obliczonych z następującego równania:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0. \quad (23)$$

Na podstawie teorii ekstremów funkcji wielu zmiennych można dowieść, że to ekstremum stanowi minimum.

Na podstawie wzorów (22) i (23) możemy przyjąć

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \beta_j q_j + v q_j t_j + \lambda q_j = 0,$$

skąd

$$t_j = -\frac{\beta_j q_j + \lambda q_j}{v q_j},$$

a po przekształceniu

$$t_j = -\frac{\beta_j}{v} - \frac{\lambda}{v}, \quad (24)$$

gdzie λ jest współczynnikiem, którego nie znamy. Otrzymamy go przez wprowadzenie wyrażenia (24) do dodatkowego warunku (12), z czego wynika:

$$\sum_{j=1}^n q_j \left(-\frac{\beta_j}{v} - \frac{\lambda}{v} \right) = R,$$

a po przekształceniu

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{v} q_j - \frac{\lambda}{v} \sum_{j=1}^n q_j = R,$$

skąd

$$-\frac{\lambda}{v} = \frac{R + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{v} q_j}{\sum_{j=1}^n q_j},$$

co po uwzględnieniu wzoru (24) da nam:

$$t_j = -\frac{\beta_j}{v} + \frac{R + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{v} q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} \quad (25)$$

albo

$$t_j = N - \frac{\beta_j}{v}, \quad (26)$$

gdzie

$$N = \frac{R + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{v} q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} \quad (27)$$

Współczynnik N jest oczywiście dla wszystkich cukrowni identyczny. Obliczenia znowu uporządkujemy w postaci tabeli:

Cukrownia	q_j	β_j	$\frac{\beta_j}{v}$	$\frac{\beta_j}{v} q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6

Współczynnik N obliczymy ze wzoru (27), a korzystając z tabelki według następującego wzoru:

$$N = \frac{R + \text{suma kolumny 4}}{\text{suma kolumny 1}}, \quad (28)$$

co zgodne jest z równaniem (27)³.

MODEL LINIOWY I

Model jest zbudowany w oparciu o następujące założenie:

Do maksimum produkcji cukru dojdziemy przy takiej długości kampanii poszczególnych cukrowni, przy której w ostatnim dniu kampanii każda cukrownia uzyska z metrycznego cetnara buraków identyczną ilość cukru.

To założenie można uzasadnić przez stosunkowo łatwe ale długie rozumowanie ekonomiczne. Korzystając z równania (16) dojdziemy do zupełnie prostego i zwięzłego dowodu matematycznego.

Ostatni cetnar metryczny buraków magazynował się prawie tyle dni, ile trwała kampania, więc z tytułu magazynowania stracił prawie

³ Por. przykład podany na s. 225.

vt_j cukru, a ponieważ straty technologiczne wynoszą β_j , więc z metrycznego cetnara uzyska się w ostatnim dniu kampanii ilość cukru u_j , określoną równaniem:

$$u_j = \alpha - \beta_j - vt_j. \quad (29)$$

Jeśli do równania (29) wprowadzimy optymalne t_j , obliczone na podstawie równania (16), to otrzymamy

$$u_j = \alpha - \beta_j - v \left[\frac{1}{v} (\alpha - \beta_j) - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v} (\alpha - \beta_j) q_j - R}{\sum_{j=1}^n q_j} \right],$$

a po przekształceniu

$$u_j = \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha - \beta_j) q_j - Rv}{\sum_{j=1}^n q_j},$$

Z tego jasno wynika, że wielkości u_j są jednakowe dla Wszystkich cukrowni, więc

$$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_j = u_{j+1} = \dots = u_n, \quad (30)$$

co dowodzi słuszności naszego założenia.

Przystąpmy z kolei do badania medalu liniowego I, którego nazwa pochodzi stąd, że jego podstawą jest układ równań liniowych.

Na podstawie równania (30) można napisać układ równań liniowych:

$$u_j = u_{j+1} \quad (j=1, 2, \dots, n-1). \quad (31)$$

Wprowadzimy teraz równanie (29) do (31); otrzymamy

$$\alpha - \beta_j - vt_j = \alpha - \beta_{j+1} - vt_{j+1},$$

a po uporządkowaniu

$$t_j - t_{j+1} = \frac{1}{v} (\beta_{j+1} - \beta_j).$$

Jeśli jeszcze przyjmiemy, że

$$\frac{1}{v} (\beta_{j+1} - \beta_j) = a_j, \quad (32)$$

to otrzymamy

$$t_j - t_{j+1} = a_j \quad (j=1, 2, \dots, n-1). \quad (33)$$

Ponieważ układ równań (33) zawiera tylko $n-1$ równań, dodajemy jeszcze znane równanie (12) i otrzymujemy układ równań:

$$\sum_{j=1}^n q_j t_j = R, \quad t_j - t_{j+1} = a_j.$$

Jeśli ten układ będziemy rozwiązywać metodą kolejnej eliminacji niewiadomych, rozpoczynając od t_1 będziemy mieli:

$$t_n \sum_{j=1}^n q_j = R - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^k q_j,$$

wobec czego długość kampanii ostatniej cukrowni wyrazi się wzorem:

$$t_n = \frac{R - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^k q_j}{\sum_{j=1}^n q_j}, \quad (34)$$

Jeśli znamy długość kampanii ostatniej cukrowni, długości kampanii poszczególnych cukrowni, otrzymamy z wzoru (33), z którego wynika

$$t_j = t_{j+1} + a_j. \quad (35)$$

Numeryczne obliczenia można uporządkować w tabeli:

Cukrownia	q_j	$\sum_{j=1}^k q_j$	β_j	$\beta_{j+1} - \beta_j$	a_k	$a_k \sum_{j=1}^k q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6	7	8

Dane w kolumnie 4 otrzymamy przy pomocy kolumny 3. Wartości w pierwszym wierszu otrzymamy, jeśli od β_j w drugim wierszu odejmiemy β_j w pierwszym wierszu itd. W wyniku tego ostatnie wiersze kolumn 4, 5 i 6 nie zostaną wypełnione.

Obliczenia w pozostałych kolumnach wynikają z układu tabeli.

Długość kampanii ostatniej: z kolei cukrowni otrzymamy z równania (34), a ze względu na tablicę będzie

$$t_n = \frac{R - \text{suma kolumny 6}}{\text{suma kolumny 1}}$$

Po obliczeniu długości kampanii ostatniej z kolei cukrowni t_n kampanie poszczególnych cukrowni obliczamy następującym sposobem: kampania $(n-1)$ -ej cukrowni jest równa kampanii t_n plus liczba w $(n-1)$ -ym wierszu kolumny 5. Kampania $(n-2)$ -ej cukrowni jest równa t_{n-1} plus liczba w $(n-2)$ -ym wierszu kolumny 5 itd., wreszcie kampanię pierwszej z kolei cukrowni otrzymamy, jeśli do kampanii drugiej cukrowni dodamy liczbę w pierwszym wierszu kolumny 5. Dodawanie jest algebraiczne tzn, jeśli liczby w odpowiednich wierszach kolumny 5 są ujemne, to je odejmujemy.

Uwaga: jeżeli uporządkowanie cukrowni jest dowolne, w niektórych wierszach kolumny 4, 5 i 6 występują ujemne liczby, co nie jest wygodne. Ażeby to wyeliminować, można cukrownie uporządkować według wielkości β_j , tak aby $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n$ dzięki czemu w pierwszym wierszu znajdzie się technicznie najlepsza cukrownia z najdłuższą kampanią, a na ostatnim najgorsza z najkrótszą kampanią.

Do kolumny 8 stosuje się wzór (20).

WYKORZYSTANIE MODEM W PRZYPADKU RÓŻNYCH MOMENTÓW ROZPOCZĘCIA KAMPANII

W rzeczywistości nie jest możliwe, ażeby wszystkie cukrownie rozpoczęły kampanię równocześnie, dlatego warunek 1, na którym zbudowaliśmy modele, trzeba odrzucić. Pokażemy teraz możliwości korzystania z modeli i w takim wypadku,

Założmy, że dowolna cukrownia rozpoczyna kampanię w pewnym dniu, który oznaczymy przez T_j ($j=1, 2, \dots, n$). Pierwsza cukrownia zaczyna w dniu T_1 , druga w T_2 ..., ostatnia w T_n .

Podkreślmy, że wielkość produkcji cukru zależy od długości kampanii poszczególnych cukrowni, więc jest funkcją czasu. Dlatego trzeba wybrać pewien moment, od którego liczymy upływ czasu (długości kampanii poszczególnych cukrowni). Ten moment nazwiemy momentem stałym.

Stałym momentem może być dowolny dzień kampanii, ale z praktyki wynika, że jest najlepiej, jeżeli tym momentem będzie moment początku kampanii cukrowni, rozpoczynającej; pracę jako ostatnia, tzn. dzień T_n (jego początek).

Kampania dowolnej cukrowni będzie w takim razie złożona z dwóch części, jednej przed stałym momentem i drugiej po wspomnianym momencie. Pierwszą część oznaczymy przez t_{0j} (ilość dni) podczas których cukrownia pracowała przed stałym momentem i drugą, część — t_{1j} . Możemy przyjąć:

$$t_j = t_{0j} + t_{1j} \quad (36)$$

gdzie

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Oczywiście

$$t_{0j} = T_n - T_j. \quad (37)$$

Uwaga: dla ostatniej cukrowni — jak wynika z równania (37) — będzie $t_{0n} = 0$ a zgodnie z wzorem (36) $t_n = t_{1n}$, ponieważ dla $j=n$, $t_{0j} = 0$. Wynika to stąd, że ostatnia cukrownia nie pracuje przed stałym momentem i cała jej kampania odbywa się po tym, momencie, ponieważ zaczyna ona kampanię w momencie stałym.

Korzystając z wymienionych modeli możemy optymalizować tylko drugą część kampanii (t_{In}). W związku z tym powinniśmy obliczyć ilość buraków, przeznaczonych do przerobu po momencie stałym. Tę ilość oznaczamy przez $R^{(n)}$. $R^{(n)}$ otrzymamy, jeśli od skupionej ilości buraków odejmiemy ilości przerobione w poszczególnych cukrowniach przed momentem stałym, tzn. w pierwszych częściach kampanii. Matematycznie

$$R^{(n)} = R - q_1 t_{01} - q_2 t_{02} - \dots - q_{n-1} t_{0(n-1)} = R - \sum_{j=1}^{n-1} q_j t_{0j}. \quad (38)$$

Znając wartość $R^{(n)}$ i korzystając z dowolnego modelu (z praktycznych przyczyn nie korzystamy z modelu kwadratowego I, ponieważ tam występuje wielkość a), obliczamy optymalne kampanie poszczególnych cukrowni, a ściślej wielkości t_{Ij} , tzn. drugie części kampanii. W numerycznych obliczeniach wprowadzimy po prostu wartość $R^{(n)}$ zamiast wartości R . W zbudowanych wzorach nic innego się nie zmieni.

Musimy jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób można optymalizować wartości t_{0j} — czyli pierwsze części kampanii. Odpowiedź jest prosta:

W okresach t_{0j} — pierwszych częściach kampanii — uzyskamy maksimum cukru wtedy, jeśli one będą najdłuższe w technologicznie najlepszych cukrowniach. Najpierw więc powinny zacząć pracować technologicznie najlepsze cukrownie, a dopiero następnie — gorsze (w miarę jak rosną zapasy buraków).

Praktyczne zastosowanie tej zasady jest w rzeczywistości bardzo trudne. Gdybyśmy przyjęli dokładnie takie rozwiązanie, okazałoby się, że musimy transportować buraki do najlepszej czy najlepszych cukrowni. Gdyby buraki w tych regionach były jeszcze nie dojrzałe, cukrownie przerabiałby tylko obce buraki i wobec tego rosłyby koszty transportu. Oprócz tego wystąpiłyby inne trudności w kampanii, ponieważ możliwe byłoby rozpoczęcie kampanii tylko z dużym zapasem buraków. Dlatego nie jest możliwe urzeczywistnienie takiego rozwiązania.

W praktyce można przyjąć rozwiązanie następujące.

Kampanii nie rozpoczynają technologicznie najlepsze cukrownie, ale te, w regionach których buraki dojrzewają najprędzej. W momencie kiedy zapasy buraków zaczynają szybko wzrastać, rozpoczyna się transport do najlepszych cukrowni.

To rozwiązanie, chociaż nie prowadzi do produkcji maksimum cukru w częściach t_{0j} , zapewnia jednak wzrost produkcji cukru, gdyż każda cukrownia zaczyna kampanię z burakami swojego regionu, a możliwe przesunięcia mają miejsce dopiero pod koniec kampanii (jak się

dotychczas praktykuje). Proponowany sposób spowoduje znaczny efekt ekonomiczny, zwłaszcza jeśli terminy technologicznej dojrzałości buraków są w regionach poszczególnych cukrowni różne. W niektórych krajach różnica ta wynosi dwa tygodnie, a więc jest znaczna.

Wspomniany sposób rozwiązywania ma niektóre ekonomiczne zalety. Oprócz tego, że doprowadza do wzrostu produkcji cukru, przesuwa transport buraków z końca kampanii na początek, kiedy kolejnictwo dysponuje większymi możliwościami transportowymi.

Zagadnienie ma duże znaczenie, zwłaszcza w przypadku, gdy pewne regiony produkujące buraki mają mało wydajnych cukrowni, a ponadto buraki dojrzewają tam prędzej, niż w regionach, gdzie produkuje się mniej buraków, a oprócz tego te ostatnie regiony mają nadmiar zdolności przerobowej w cukrowniach.

OPTYMALNA KAMPANIA W PRZYPADKU ZMIENNYCH DZIENNYCH STRAT

Przyjmując warunek 2 założyliśmy, że dzienne straty są stałe, podczas gdy w rzeczywistości są one zmienne. Wzrastają podczas kampanii i pod koniec kampanii są dzięki niesprzyjającym warunkom klimatycznym najwyższe.

Wielkość tego czynnika ma poważny wpływ na długość optymalnych kampanii poszczególnych cukrowni i na ich wzajemny stosunek, co wynika z następującego rozumowania.

Założmy, że dzienne straty nie istnieją ($v=0$). W takim razie najlepsze cukrownie pracują cały rok (nie ma sezonu), najgorsze nie pracują w ogóle, albo przez bardzo krótki czas.

Odwrotnie, jeśli dzienne straty są duże, powinniśmy buraki przerobić jak najprędzej i technologiczny poziom cukrowni nie odgrywałby roli; najgorsze cukrownie pracowałyby mniej więcej tak długo, jak najlepsze. Różnice między kampaniami poszczególnych cukrowni byłyby bardzo małe albo żadne.

Można stwierdzić, że mniejsze dzienne straty faworyzują lepsze cukrownie, odwrotnie duże straty ten proces hamują.

Z punktu widzenia tego rozumowania zbadajmy wpływ stałości dziennych strat na optymalność kampanii. Nasze v jest przeciętną wartością z okresu kampanii, prawdziwą w środku kampanii; pod koniec kampanii rzeczywiste straty są wyższe niż nasze v . Ponieważ w przedstawionych modelach v jest stałe, obliczone długości kampanii są zdeformowane; są one dłuższe w lepszych cukrowniach i krótsze w gorszych. Długości kampanii przeciętnych cukrowni są zdeformowane bardzo mało.

Jeżeli uporządkujemy cukrownie według rosnących β_j (od najlepszej

do najgorszej), to t_l będzie kampanią najlepszej, a t_n — najgorszej cukrowni, i t_l będzie większa od t_n . Koniec kampanii wszystkich cukrowni znajdzie się w pewnym przedziale o długości m dni, gdzie $m=t_l-t_n$. Dowolny dzień tego przedziału oznaczmy przez $k=1, 2, \dots, m$.

Obliczenia przy pomocy których otrzymaliśmy optymalne długości kampanii, przy stałym v , nazwiemy pierwszą iteracją.

Jeżeli w drugiej iteracji wprowadzimy zamiast poprzedniego jakieś większe v , kampanie najlepszych cukrowni się skrócą (prędzej skończą), kampanię najgorszych się przedłuży, więc przedział m się skróci.

Drugą iterację przeprowadzimy następująco:

W dowolnym k -tym dni przedziału m mamy jakieś dzienne straty v_k . Wartość czynnika v_k obliczymy z praktyki jako pewną przeciętną wielkość, ze względu na stan zdrowia buraków, prawdopodobne warunki klimatyczne itd. Dla każdego dnia przedziału m obliczamy średnią wielkość strat wszystkich poprzednich dni $\bar{v}_k$ więc:

$$\bar{v}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i. \quad (39)$$

Tak obliczone wielkości $\bar{v}_k$ przyporządkujemy poszczególnym cukrowniom według tego w którym dniu przedziału m kończą one kampanię na podstawie pierwszej iteracji. Cukrowniom, które kończą kampanię w pierwszym dniu przedziału m przyporządkujemy $\bar{v}_1$ w drugim dniu $\bar{v}_2$ itd. Zakładamy, że cukrownie są uporządkowane według wzrastającego β_j .

Po przyporządkowaniu jakiegoś $\bar{v}_k$ każdej cukrowni, odpowiednie $\bar{v}_k$ oznaczmy wskaźnikami poszczególnych cukrowni. Więc straty dzienne pierwszej cukrowni będą $\bar{v}_1$, drugiej $\bar{v}_2$, ..., ostatniej $\bar{v}_n$.

Dalej obliczamy ilość buraków, którą cukrownie przerobić miały w przedziale m , a którą oznaczmy przez R^+ , wobec czego

$$R^+ = \sum_{j=1}^n q_j t_j^+, \quad (40)$$

gdzie t_j^+ = ilość dni, przez które j -a cukrownia miała pracować w przedziale m , według pierwotnego rozwiązania.

Nasze zadanie możemy sformułować następująco:

Ilość buraków R^+ określoną równaniem (40), musimy przerobić w systemie n cukrowni tek, ażebyśmy uzyskali maksimum cukru. Dowolna cukrownia przerobi w ciągu dnia ilość q_j buraków, ma straty technologiczne β_j i dzienne straty v_j . Naszym zdaniem jest obliczyć nowe optymalne długości kampanii, oznaczone przez t_j^{++}

Do rozwiązania wykorzystamy model liniowy I, jako najlepszy dla rozważanego obecnie przypadku.

Wychodząc z zależności

$$u_j = \alpha - \beta_j - v_j t_j$$

(por. równanie (29)), uwzględniając warunek (23) i równanie analogiczne do równania (12) otrzymamy układ równań:

$$\sum_{j=1}^n q_j t_j^{++} = R^+,$$

$$v_j t_j^{++} - v_{j+1} t_{j+1}^{++} = \beta_{j+1} - \beta_j,$$

a jeśli przyjmiemy

$$\beta_{j+1} - \beta_j = b_j,$$

to otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^n q_j t_j^{++} = R^+ \quad (41)$$

$$v_j t_j^{++} - v_{j+1} t_{j+1}^{++} = b_j.$$

Jeśli ten układ będziemy rozwiązywali eliminując kolejno niewiadome t_j , od t_j do t_{n-1} otrzymamy:

$$t_n^{++} = \frac{R^+ - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{v_j}}{v_n \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{v_j}}. \quad (42)$$

Optymalną długość kampanii pozostałych cukrowni otrzymamy z wzoru

$$t_j^{++} = \frac{b_j}{v_j} + \frac{v_{j+1}}{v_j} t_{j+1}^{++}, \quad (43)$$

co wynika z drugiego równania układu (41).

t_j^{++} określa ilość dni, którą j -a cukrownia powinna przepracować w przedziale m , po pierwszej iteracji i jeśli dodamy jeszcze ilość dni poprzedzającą przedział m , otrzymamy całkowitą optymalną długość kampanii cukrowni j .

Długości kampanii obliczone w drugiej iteracji nie dają absolutnego optimum, są tylko dobrą aproksymacją. Byłoby możliwe przeprowadzenie jeszcze trzeciej iteracji, której wyniki byłyby jeszcze bardziej dokładne. Z praktycznego punktu widzenia byłoby to jednak bezcelowe.

TRANSPORT BURAKÓW CUKROWYCH

Znając długość kampanii j -ej cukrowni t_j łatwo można z równania (1), obliczyć ilość buraków, które j -a cukrownia ma przerobić w ciągu kampanii.

Wiemy, że każda cukrownia część przerobionych buraków transportuje swoimi środkami transportowymi prosto z pola do cukrowni, a drugą część buraków, która znajduje się w dalej położonych miejscowościach, transportuje koleją. Tę część będziemy nazywali zamiejscową, pierwszą zaś część miejscową.

Miejscowe buraki, których ilości przerobiono w j -ej cukrowni w toku całej kampanii oznaczymy przez M_j , transportuje się tylko z własnego regionu (ściśle mówiąc transportują się do własnej, cukrowni), dlatego w zadaniu transportowym zajmujemy się tylko burakami zamiejscowymi.

W regionie j -ej cukrowni skupuje się buraki w ilości R_j . Wielkość ta może być mniejsza, większa lub równa ilości Q_j buraków, które j -ta cukrownia ma przerobić zgodnie z optymalnym planem kampanii. Jeżeli $R_j < Q_j$, to wszystkie buraki zakupione w regionie j będą burakami miejscowymi ($R_j = M_j$), a ponadto do j -ej cukrowni trzeba będzie dowieźć buraki w ilości

$$P_j = Q_j - R_j = Q_j - M_j. \quad (44)$$

Jeżeli $R_j > Q_j$, to tylko część buraków zakupionych w regionie j będzie mogła zostać zużyta na miejscu ($Q_j = M_j$), i trzeba będzie z tego regionu wywieźć buraki w ilości

$$S_j = R_j - Q_j = R_j - M_j. \quad (45)$$

Problem transportu buraków zamiejscowych nie powstanie w ogóle w regionach tych cukrowni, dla których $R_j = Q_j$.

Podzielimy cukrownie wchodzące w skład naszego systemu na takie, w regionach których występuje brak ($R_j < Q_j$) i takie w regionach których występuje nadmiar buraków ($R_j > Q_j$). Załóżmy, że cukrowni pierwszego rodzaju jest p , a cukrowni drugiego rodzaju s . $p+s=r$ jest pewną liczbę nie większą od n . Pozostałe cukrownie w liczbie $n-r$ to cukrownie, które pokrywają dokładnie całe swe zapotrzebowanie burakami miejscowymi ($R_j = Q_j$).

Wobec założenia, że bilans buraków w całym systemie cukrowni jest wyrównany, zachodzić będzie równość

$$\sum_{j=1}^p P_j = \sum_{k=1}^s S_k. \quad (46)$$

Zadanie transportowe polega na znalezieniu takich wielkości przewozu buraków z tych regionów gdzie występuje nadwyżka buraków

do cukrowni, których zapotrzebowanie nie może być pokryte wyłącznie burakami miejscowym. Jeżeli przez x_{kj} oznaczmy przewóz z regionu k -tej cukrowni do cukrowni j -ej (mierzony w określonych jednostkach, np. w tonach lub wagonach kolejowych) a przez a_{kj} koszt przewozu z regionu k do regionu j (przyjętej jednostki), to zadanie transportowe sprowadza się do znalezienia takich nieujemnych liczb x_{kj} że

$$\sum_{k=1}^s x_{kj} = P_j, \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^p x_{kj} = S_k,$$

a ponadto

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^s a_{kj} x_{kj} = \min. \quad (48)$$

W ten sposób sformułowane zadanie można rozwiązywać dowolną metodą programowania liniowego. Metody programowania liniowego są w literaturze dosyć szczegółowo opracowane razem z algorytmami służącymi do rozwiązania ich na maszynach szybkoliczących. W rzeczywistości sprawa jest bardziej skomplikowana, ponieważ w regionach, w których występuje nadwyżka buraków cukrowych, może istnieć wiele stacji kolejowych, i koszt transportu z regionu k do regionu j *zależy* od wyboru stacji załadunkowej w regionie k . Jeżeli regiony są niewielkie można tę komplikację pominąć, przyjmując za a_{kj} średni koszt przewozu z regionu k do cukrowni j . Można też rozważyć model bardziej złożony, w którym uwzględniłoby się możliwość transportu z różnych stacji załadunkowych w regionie k -tym w sposób następujący.

Niech M_k oznacza ilość stacji załadunkowych w regionie k , x_{ij} — ilość buraków przewiezionych ze stacji i do cukrowni j , a_{ij} — koszt przewozu ze stacji i do cukrowni j przyjętej za jednostkę ilości buraków. Wówczas łączny koszt transportu buraków wyraziłby się sumą:

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=1}^p a_{ij} x_{ij}. \quad (49)$$

Wielkości transportu x_{ij} miałyby spełniać warunki

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{M_k} x_{ij} = P_j. \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^{M_k} x_{ij} = S_k,$$

a problem sprowadzałby się do znalezienia minimum wyrażenia (49) w zbiorze nieujemnych rozwiązań układu równań (50).

Ze względu na dużą ilość stacji załadunkowych należy szukać me-

tody redukcji zadania, w celu zmniejszenia ilości zmiennych. O tych metodach nie trzeba mówić szczegółowo, ponieważ są znane specjalistom z dziedziny programowania liniowego.

W CSSR wykorzystaliśmy fakt, że na wschodzie kraju występuje niedostatek cukrowni⁴ i buraki transportuje się zawsze do regionów innych cukrowni, które znajdują się na zachodzie. Główne transporty kierują się z wschodu na zachód, więc każdy plan przewidujący transport w odwrotnym kierunku nie byłby optymalny. To założenie stanowi istotę redukcji zadania.

Na podstawie założenia o eliminacji transportu w kierunku wschodnim planowałoby się dowóz buraków tylko ze wschodnich załadunkowych stacji, a dopiero jeżeli to nie wystarcza, z najbliższych stacji zachodnich. Przy takim postępowaniu ilość zmiennych zadania transportowego będzie o wiele mniejsza niż poprzednio. Takie zadanie można już rozwiązywać bez maszyny szybkoliczącej, korzystając ze znanych metod aproksymatywnych.

WNIOSKI

Zastosowanie podstawowych modeli dla konkretnych obliczeń w odniesieniu do kampanii 1959/1960 pokazało, że przez optymalne rozwiązanie zadania dla systemu cukrowni na Słowacji i Morawach można w jednym roku uzyskać dodatkowo około 3 miliony kilogramów cukru prawie bezpłatnie. Jest to więc efekt, którego nie można zaniedbać w gospodarce narodowej. Podkreślamy, że matematyczne metody przyniosły nowy kompleksowy pogląd na zagadnienie, podkreśliły nowe fakty, ważne dla zwiększenia efektywności, które inaczej nie zostałyby uwzględnione. Powiemy o niektórych z nich.

Cena cetnara metrycznego buraków jest stała, bez względu na to, jaka jest zawartość cukru. Gospodarze nie są więc zainteresowani w wyprodukowaniu buraków z jak największą zawartością cukru ani w tym, ażeby buraki podczas magazynowania na polu straciły jak najmniej cukru (między zbiorem i transportem do cukrowni). Cukrownie mierzą zawartość cukru dopiero w momencie wprowadzenia surowca do procesu produkcyjnego i też są niedostatecznie zainteresowane w obniżce strat cukru podczas magazynowania buraków na stacjach załadunkowych i w cukrowniach. Straty z tytułu magazynowania przedstawiają milionowe wartości, dlatego problem materialnego zainteresowania w obniżce strat jest bardzo ważny.

Okazało się dalej, do jakich dużych strat w gospodarce narodowej

⁴ Dysproporcje pochodzą z czasów przedwojennych.

prowadzi żywiołowość w zbieraniu buraków, powodująca wzrost strat cukru na skutek gromadzenia niepotrzebnych zapasów surowca.

Zwłaszcza cenne są wiadomości dotyczące programu transportu buraków z nadwyżkowych do niedostatecznie zaopatrzonych cukrowni. Większą część transportu dotychczas urzeczywistniano w drugiej połowie kampanii, kiedy koleje są w trudnej sytuacji, ze względu na transport innych produktów (węgiel, ziemniaki itd.). Matematyczne rozwiązanie jest korzystne nie tylko dla kolei, lecz jest ekonomicznie uzasadnione dla cukrowni — doprowadza do wzrostu produkcji cukru.

Z wyprowadzonych modeli można korzystać nie tylko przy obliczeniach optymalnej długości kampanii, ale i w innych sytuacjach, na przykład w sytuacji następującej.

Chcemy wyprodukować pewną ilość cukru i pytamy się na jakich obszarach powinniśmy produkować buraki, w celu wyprodukowania z tych buraków maksimum cukru. W gruncie rzeczy chodzi o odwrócenie zadania, które dotychczas rozwiązyaliśmy. Korzystanie z modeli i związanego z nimi planu transportu może służyć przy opracowywaniu planu rozwoju i rekonstrukcji przemysłu cukrowniczego, przy decyzjach dotyczących rozmieszczenia obszarów produkujących buraki itd.

Zadanie można rozwiązywać też z punktu widzenia drugiego kryterium, gdzie szukamy warunków, w których koszty na jednostkę produkcji będą minimalne.

Ośrodek badawczy Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Bratysławie interesuje się rozwiązaniem takich zadań i jak się okazuje, współpraca ze strony pracowników przemysłu cukrowniczego stwarza możliwości wprowadzenia rezultatów tych badań w życie.

PRZYKŁAD

Mamy system 8 cukrowni, których zadaniem jest przerobić $R=11658\ 940$ etnarów metrycznych buraków o zawartości cukru $a=18$.

Załóżmy, że dzienne straty z tytułu magazynowania są stałe ($v=0,035$) i że wszystkie cukrownie rozpoczynają pracę równocześnie.

Poszczególne cukrownie mają następujące dzienne wydajności q_j i technologiczne straty (β_j):

Cukrownia	Dzienna wydajność w etnarach metrycznych q_j	Straty technologiczne β_j
01	15 481	1,34
02	15 189	1 14
03	17 167	1,21
04	11 101	1,37
05	21 055	1,26
06	22 404	1,20
07	22 875	0,83
08	18 850	1,23

Zastosowanie modelu kwadratowego I

	q_j	β_j	$\alpha - \beta_j$	A_j	$A_j q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6	7
01	15 481	1,34	16,66	504,848	7,815 551,89	75,956	1,175 874,84
02	15 189	1,14	16,86	510,909	7,760 196,80	82,017	1,245 756,21
03	17 167	1,21	16,79	508,787	8,734 346,43	79,895	1,371 557,46
04	11 101	1,37	16,63	503,939	5,594 226,84	75,047	833 096,75
05	21 055	1,26	16,74	507,272	10,680 611,96	78,380	1,650 290,90
06	22 404	1,20	16,80	509,090	11,405 652,36	80,198	1,796 755,99
07	22 875	0,83	17,17	520,303	11,901 931,12	91,411	2,091 026,62
08	18 850	1,23	16,77	508,181	9,579 211,85	79,289	1,494 597,65
	144 122	9,58	134,42		73,471 729,25		11,658 956,42

$$M = \frac{\sum_{j=1}^n A_j q_j - R}{\sum_{j=1}^n q_j} = \frac{\text{suma kolumny 5} - R}{\text{suma kolumny 1}} = \frac{73,471\ 729,25 - 11,658\ 940}{144\ 122} = 428,892$$

suma kolumny 7 11,658 956

R 11,658 940

różnica 16 q

Zastosowanie modelu kwadratowego II

	q_j	β_j	$\frac{\beta_j}{v}$	$\frac{\beta_j}{v} q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6
01	15 481	1,34	40,606	628 606,00	75,955	1,175 874,84
02	15 189	1,14	34,545	524 704,00	82,017	1,245 756,21
03	17 167	1,21	36,667	629 462,39	79,895	1,371 557,46
04	11 101	1,37	41,515	460 858,02	75,047	833 096,75
05	21 055	1,26	38,182	803 922,01	78,380	1,650 290,90
06	22 404	1,20	36,364	814 699,06	80,198	1,796 755,99
07	22 875	0,83	25,152	575 352,00	91,410	2,091 003,75
08	18 850	1,23	37,273	702 596,05	79,289	1,494 597,65
	144 122	9,58		5,140 199,53		11,658 933,55

$$N = \frac{R + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{v} q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} = \frac{R + \text{suma kolumny 4}}{\text{suma kolumny 1}} = \frac{11,658\ 940 + 5,140\ 199,53}{144\ 122} = 116,562$$

suma kolumny 6 11,658 934

R 11,658 940

różnica 6 q

Zastosowanie liniowego modelu I

	q_j	$\sum_{j=1}^k q_j$	β_j	$\beta_{j+1} - \beta_j$	a_k	$a_k \sum_{j=1}^k q_j$	t_j	$q_j t_j$
	1	2	3	4	5	6	7	8
01	15 481	15 481	1,34	-0,20	- 6,0606	- 93 824,15	75,956	1,175 874,84
02	15 189	30 670	1,14	+0,07	+ 2,1212	+ 65 057,20	82,016	1,245 741,02
03	17 167	47 837	1,21	+0,16	+ 4,8484	+ 231 932,91	79,895	1,371 557,46
04	11 101	58 938	1,37	-0,11	- 3,3333	- 196 458,04	75,047	833 096,75
05	21 055	79 993	1,26	-0,06	- 1,8181	- 145 435,27	78,380	1,650 290,90
06	22 404	102 397	1,20	-0,37	-11,2121	-1148 085,40	80,198	1,796 755,99
07	22 875	125 272	0,83	+0,40	+12,1212	+1518 446,97	91,410	2,091 003,75
08	18 850	144 122	1,23	-	-	-	79,289	1,494 597,65
	144 122	-	9,58	- 0,11	- 3,3333	+ 231 634,22	-	11,658 918,36

$$t_n = \frac{R - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^k q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} = \frac{R - \text{suma kolumny 6}}{\text{suma kolumny 1}} = \frac{11,658\ 940 - 231\ 634,22}{144\ 122} = 79,289$$

$$t_j = t_{j+1} + a_j$$

Na przykład $t_7 = t_8 + a_7 = 79,289 + 12,121 = 91,419$

$$\begin{array}{rcl} \text{suma kolumny 8} & . & . & . & . & 11,658\ 918 \\ R & . & . & . & . & 11,658\ 940 \\ \hline \text{różnica} & . & . & . & . & 22\ q \end{array}$$

Tłumaczył
Zbigniew Czerwiński