PRACE MONOGRAFICZNE Z DYDAKTYKI MATEMATYKI

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

10

WYDAWNICTWO
NAUKOWE
UAM

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Prace monograficzne z dydaktyki matematyki

Redaktor naukowy
Edyta Juskowiak

10

WYDAWNICTWO NAUKOWE

POZNAŃ 2025

Recenzenci:
Dr Edyta Juskowiak, prof. UAM, Poznań
Dr hab. Henryk Kąkol, prof. UP Kraków
Dr Elżbieta Mrożek, UG Gdańsk
Prof. dr hab. Ryszard Pawlak, UŁ Łódź
Dr Mirosława Sajka, prof. UKEN, Kraków
Dr hab. Ewa Swoboda, prof. PWST, Jarosław
Dr Katarzyna Wadoń, MUP, Oświęcim
Dr hab. Anna K. Żeromska, prof. AGH Kraków

Publikacja sfinansowana jest przez Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie oraz Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Opracowanie graficzne okładki: K. & S. Szurpit
Redaktor: Monika Simińska
Redaktor techniczny i DTP: Marcin Tyma

ISBN 978-83-232-4244-4 (Print)
ISBN 978-83-232-4245-1 (PDF)
DOI: 10.14746/amup.9788323242451

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
61-701 POZNAŃ, UL. FREDRY 10
www.press.amu.edu.pl
Sekretariat: tel. 61 829 46 46, faks 61 829 46 47, e-mail: wydnauk@amu.edu.pl
Dział Promocji i Sprzedaży: tel. 61 829 46 40, e-mail: press@amu.edu.pl
Wydanie I. Ark. wyd. 12,00. Ark. druk. 13,00

DRUK I OPRAWA: VOLUMINA.PL SP. Z O.O., SZCZECIN, UL. KS. WITOLDA 7-9

Spis treści

Część 1
– ESEJE

ROZWAŻANIA O BADANIACH DYDAKTYCZNYCH I O NAUCZANIU MATEMATYKI

Anna Sierpińska (1947–2023) – wybitny dydaktyk matematyki[1]

Marianna Ciosek
Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
ciosek.maria@gmail.com

Mirosława Sajka
Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
miroslawa.sajka@uken.krakow.pl
ORCID: 0000-0002-0209-7817

19 października 2023 roku zmarła Anna Sierpińska, Profesor Uniwersytetu Concordia w Montrealu, znana w świecie jako polsko-kanadyjska dydaktyk matematyki. Anna Sierpińska zdobyła matematyczne wykształcenie w Polsce – w Uniwersytecie Warszawskim. Uzyskała stopień doktora nauk matematycznych w zakresie ich dydaktyki w Wyższej Szkole Pedagogicznej (WSP) w Krakowie. Była nauczycielem akademickim w Polsce, a następnie – od 1990 roku w Kanadzie. Prowadziła intensywne badania dydaktyczne odnoszące się do różnych aspektów procesu uczenia się matematyki, szczególnie ceniona za wkład do badań nad epistemologią i rozumieniem w matematyce. Była niezwykle aktywnym uczestnikiem międzynarodowych działań na rzecz doskonalenia nauczania matematyki. Pracując już w Kanadzie, była nadal żywo zainteresowana sprawami dydaktyki matematyki w Polsce. Uczestniczy-

[1] Artykuł stanowi polską, zmodyfikowaną wersję artykułu pt. *ANNA SIERPINSKA (1947–2023) – outstanding researcher in the field of mathematics education* tych samych autorek, opublikowaną w roczniku „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia", nr 16 (2024), dostępną na: https://didacticammath.uken.krakow.pl/. Artykuł w bieżącej wersji zawiera rozszerzenie i uszczegółowienie pewnych wątków z działalności Anny Sierpińskiej, odnoszących się do związku tej uczonej z polską dydaktyką matematyki.

ła w organizowanych w Polsce konferencjach dydaktycznych, zapraszała dydaktyków polskich do Montrealu do odbywania zajęć w Uniwersytecie Concordia. Propagowała polskie badania z zakresu dydaktyki matematyki na arenie międzynarodowej, promowała czasopismo „Dydaktyka Matematyki" w zagranicznych środowiskach oraz udzielała merytorycznego i językowego wsparcia mniej i bardziej doświadczonym polskim naukowcom uprawiającym badania z zakresu dydaktyki matematyki.

GŁÓWNE FAKTY Z ŻYCIORYSU ANNY SIERPIŃSKIEJ

W życiu i działalności Anny Sierpińskiej można wyróżnić trzy okresy, uwzględniające miejsca zamieszkania, etapy zdobywanego wykształcenia oraz miejsca pracy. Są to okresy zaznaczone przedziałami czasu: 1947–1963, 1963–1990, 1990–2023.

1947–1963: Wrocław, Kair, Damaszek

Anna Sierpińska urodziła się 17 czerwca 1947 roku we Wrocławiu w rodzinie inteligenckiej. Pięć lat swojej wczesnej młodości (1958–1963) spędziła wraz z rodzicami poza Polską – rok w Kairze i 4 lata w Damaszku. Uczyła się tam w międzynarodowych szkołach, co pomogło jej w osiągnięciu biegłej znajomości języków: francuskiego i angielskiego. W 1963 roku uzyskała świadectwo ukończenia nauki w szkole francuskiej na poziomie tzw. „małej matury".

1963–1990: Warszawa

W 1963 roku Anna Sierpińska powróciła do Polski. Uzupełniała naukę na poziomie szkoły średniej w liceum im. N. Żmichowskiej w Warszawie, gdzie zdała maturę w 1966 roku. W tym samym roku rozpoczęła studia matematyczne na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dyplom magistra matematyki uzyskała w 1970 roku. Bezpośrednio po studiach rozpoczęła pracę w macierzystym Uniwersytecie w Zakładzie Algebry i Teorii liczb. Pracowała tam 8 lat, najpierw na stanowisku asystenta, a od 1972 roku – starszego asystenta. Przedmiotem jej zainteresowania naukowego była teoria pierścieni. Opublikowała 3 artykuły z tej tematyki, ale pracy naukowej w tym zakresie nie kontynuowała. W 1978 roku mgr Anna Sierpińska zmieniła zatrudnienie. Podjęła pracę nauczyciela matematyki i informatyki w liceum, w którym zdała maturę. Od 1979 roku uczestniczyła aktywnie w seminarium z dydaktyki matematyki, które w Uniwersytecie Warszawskim prowadzili prof. Zbigniew Semadeni oraz doc. dr Wacław Zawadowski. Nie rezygnując z pracy w szkole, w roku 1980 mgr Anna Sierpińska podjęła pracę w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, na stanowisku starszego asystenta. W 1980 roku – między innymi w wyniku kontaktów z dydaktykami francuskimi z IREM (*Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Grenoble*) – Anna Sierpińska zainteresowała się jednym z podstawowych zagadnień dydaktyki matematyki, mianowicie przyczynami trudności w uczeniu się pojęć matematycznych, w szczególności przeszkodami epistemologicznymi. Podjęła decyzję o przygotowaniu rozprawy doktorskiej z tej tematyki. Jej opiekunem naukowym był doc. dr Wacław Zawadowski. Wskazówek dotyczących kierunków badań oraz nadania im ram teoretycznych w rozprawie udzielała pani doktorant także prof. Anna Zofia Krygowska na ogólnopolskim seminarium z dydaktyki matematyki w krakowskiej WSP, gdzie przyszła pani doktor referowała wyniki swoich badań.

Oprócz przygotowywania w tym czasie rozprawy doktorskiej, Anna Sierpińska uczestniczyła także w bardzo ważnym przedsięwzięciu nauki polskiej, jakim była organizacja Międzynarodowego Kongresu Matematyków w 1983 roku w Warszawie. W materiałach pokongresowych wkład pracy Anny Sierpińskiej w przygotowanie Kongresu doceniony został następującym wpisem: „Biuro Kongresu, ustanowione w 1979 roku, wspierane było przez kadrę administracyjną Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. Szczególnie ważną rolę odegrała Anna Sierpińska-Jankowska[2], która była w pełni zaangażowana w sprawy Kongresu od samego początku" (Ciesielski, Olech, 1984, s. XII).

W 1984 roku Anna Sierpińska uzyskała stopień doktora nauk matematycznych w zakresie ich dydaktyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Techniki WSP w Krakowie. Po uzyskaniu doktoratu, Anna Sierpińska, jako pracownik Polskiej Akademii Nauk, działała bardzo aktywnie na różnych polach. Jesienią 1984 roku wzięła udział w Sesji Naukowej[3] zorganizowanej w WSP w Krakowie z okazji 80. rocznicy urodzin prof. A.Z. Krygowskiej (26–28.11.1984). Wygłosiła tam referat pt. *Problem rozróżniania między trudnością a przeszkodą epistemologiczną*. W latach 1985–1990 opracowała 7 artykułów naukowych dotyczących zagadnienia przeszkód epistemologicznych. Zostały one opublikowane między innymi w prestiżowych zagranicznych czasopismach, takich jak „Educational Studies in Math ematics" oraz w „Researches en Didactique des Mathématiques", a także w polskim czasopiśmie „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V: Dydaktyka Matematyki"[4] (od 2007 roku „Didactica Mathematicae"). W 1987 roku doktor Anna Sierpińska dołączyła do grona członków Komitetu Redakcyjnego tego polskiego czasopisma. Współpracowała z redakcją tego czasopisma, z dwuletnią przerwą, do 2023 roku.

---

[2] W swojej działalności zawodowej Anna posługiwała się nazwiskiem Sierpińska, w anglojęzycznej pisowni: Sierpinska.

[3] Źródło: *Kronika Zakładu Dydaktyki Matematyki WSP* w Bibliotece Głównej UKEN w Krakowie (w zbiorach spuścizny po Prof. A.Z. Krygowskiej, niepublikowana).

[4] W dalszej części tekstu używamy skróconej nazwy: *Dydaktyka Matematyki*.

W drugiej połowie lat 80. XX wieku brała udział w pracach zespołu, który – pod kierunkiem prof. Zbigniewa Semadeniego – przygotował *Raport o edukacji matematycznej w Polsce*, na zamówienie *Komitetu Ekspertów do Spraw Edukacji Narodowej* i *Komitetu Nauk Matematycznych PAN*. W czasopiśmie „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria II: Wiadomości Matematyczne", w którym zamieszczono *Raport*, znalazła się następująca uwaga: „Poniższe tezy Raportu stanowią wynik pracy wielu osób. Szczególnie duży był wkład dr Anny Sierpińskiej" (*Tezy raportu...*, 1990, s. 113–114).

Anna Sierpińska działała także w PTM (*Krótkie informacje*, 1988, s. 103–109). Była członkiem Prezydium Zarządu Głównego tego Towarzystwa przez jedną kadencję, wygłaszała referaty, jak na przykład ten w ramach XIII Zjazdu Matematyków Polskich (wrzesień 1989 roku, Kraków) pt. *O przeszkodach epistemologicznych związanych z pojęciem granicy* (*Krótkie informacje*, 1988, s. 160–165). Pod kierunkiem dr Anny Sierpińskiej powstawały też prace magisterskie. Jedna z nich, autorstwa Moniki Viwegier, zgłoszona w 1990 roku do Konkursu PTM im. Anny Zofii Krygowskiej na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki, otrzymała drugą nagrodę (*Konkurs im. Anny Zofii Krygowskiej…*, 1992, s. 56). Oprócz wspomnianych już prac, w okresie 1985–1990 Anna Sierpińska uczestniczyła z wykładami w wielu międzynarodowych konferencjach. Komitet Wykonawczy ICMI (*Krótkie informacje*, 1988, s. 160–165) powołał ją na członka Międzynarodowego Komitetu Programowego Kongresu ICME 7 (Quebec, 1992).

1990–2023: Montreal[5]

W grudniu 1990 roku doktor Anna Sierpińska została zatrudniona jako nauczyciel akademicki w Uniwersytecie Concordia w Montrealu na Wydziale Matematyki i Statystyki, będąc jednocześnie urlopowanym pracownikiem Polskiej Akademii Nauk w Warszawie – do 1996 roku. Zamieszkała z rodziną (mężem i dwoma synami) w Montrealu. Została włączona do grupy pracowników naukowych realizujących oryginalny, istniejący od 1967 roku program MTM – Magister/Mistrz nauczania matematyki (*Master in the Teaching of Mathematics*). Program ten miał trojakie cele: a) udoskonalenie profesjonalizmu nauczycieli matematyki szkoły średniej, b) przygotowanie nauczycieli matematyki w kolegiach nauczycielskich, c) przygotowanie do powadzenia badań edukacyjnych w zakresie nauczania matematyki. Studenci uczący się według tego programu (często wykonujący już zawód nauczyciela matematyki) mieli zajęcia z zaawansowanej matematyki, a także wprowadzani byli we współczesne teorie nauczania matematyki. Poznawali metody badań dydaktycznych i ich wyniki, a poza tym prowadzili – pod kierun-

[5] Źródło: Sierpinska, A. (2020).

kiem swoich uniwersyteckich nauczycieli – badania dydaktyczne, prezentowali ich rezultaty oraz pisali raporty z badań.

Okres pracy Anny Sierpińskiej w Uniwersytecie Concordia był niewątpliwie najbogatszym okresem w jej wielokierunkowej działalności. W zakresie pracy zawodowej wniosła swój wkład w rozwijanie programu MTM. Wykładała algebrę liniową, dydaktykę matematyki, historię, filozofię matematyki i badania w dydaktyce matematyki. Do roku 2016 – kiedy program przestał być realizowany – współkierowała bądź kierowała nim samodzielnie. Była inicjatorką zapraszania znanych dydaktyków zagranicznych do okresowego prowadzenia zajęć ze studentami Uniwersytetu Concordia. W roli nauczycieli – gości wystąpili między innymi: Alan Bell (Anglia); David Tall (Anglia); Colette Laborde (Francja); Shlomo Vinner (Izrael); Tommy Dreyfus (Izrael), Gerald A. Goldin (USA), a także polscy naukowcy – dydaktycy matematyki: Maciej Klakla (Kraków), Ewa Łakoma (Warszawa), Edyta Nowińska (pracująca w Niemczech, Osnabrück) i Anna Rybak (Białystok). W tym okresie Anna Sierpińska dużo publikowała oraz współpracowała z kilkoma międzynarodowymi komisjami zajmującymi się zagadnieniami nauczania matematyki.

Pod kierunkiem A. Sierpińskiej powstało 28 prac magisterskich oraz 23 programy badawcze przygotowane przez studentów kształconych według programu MTM. Anna Sierpińska jako profesor Uniwersytetu Concordia była promotorem dwóch prac doktorskich.

Uniwersytet Luleå w Szwecji uhonorował Panią Profesor A. Sierpińską tytułem *doctora honoris causa* w roku 2006.

DZIAŁALNOŚĆ NAUKOWA ANNY SIERPIŃSKIEJ

Nie jest możliwe kompletne omówienie osiągnięć naukowych tak wybitnego naukowca, tym bardziej w krótkim opracowaniu, dlatego poniżej podajemy wybrane, w naszej subiektywnej ocenie ważne aspekty tej działalności.

Rozprawa doktorska

W roku 1984 Anna Sierpińska obroniła doktorat na podstawie rozprawy pt. *Epistemologiczne podejście do badania trudności w uczeniu się pojęć matematycznych na przykładzie pojęcia granicy*. Promotorem tej pracy doktorskiej był doc. dr Wacław Zawadowski (Uniwersytet Warszawski), a recenzentami byli prof. Anna Zofia Krygowska (WSP w Krakowie) oraz prof. Roman Duda (Uniwersytet Wrocławski)[6].

---

[6] Dane pochodzą z dokumentów wymaganych do otwarcia przewodu doktorskiego, złożonych w WSP w Krakowie w1983 r. Obecnie znajdują się one w Archiwum Uniwersytetu Ko-

Ekspert komisji międzynarodowych

Anna Sierpińska pełniła ważne międzynarodowe funkcje związane z edukacją matematyczną. Na szczególną uwagę zasługuje intensywna praca w międzynarodowym ruchu na rzecz doskonalenia nauczania matematyki. W latach 1991–1994 członkiem komisji ICMI[7] (*The International Commission on Mathematical Instruction*), a następnie w latach 1995–1998 pełniła funkcję wiceprezesa tej Komisji. Z historycznego punktu widzenia ciekawe jest, że Anna Sierpińska jako pierwsza kobieta po II wojnie światowej znalazła się w Zarządzie Głównym komisji ICMI (Furinghetti & Giacardi, 2010).

Pokłosiem działalności Anny Sierpińskiej w komisji ICMI była dla przykładu redakcja (z Jeremy Kilpatrickiem) książki: *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity* (Sierpinska & Kilpatrick, 2012), zawierajacej wyniki zainicjowanych przez ICMI badań na temat: *What is Research in Mathematics Education and What Are Its Results?*

Anna Sierpińska była również zaproszona jako ekspert do przygotowania rozdziałów w dwóch książkach z serii ICMI Study:

– (2000), The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics (s. 143–170). W: J. Fauvel, J van Maanen (red.). *History in Mathematics Education: ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
– (2001), Research into the teaching and learning of the Linear Algebra (s. 255–273). W: D. Holton (red.). *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Działalność redakcyjna

Anna Sierpińska pełniła prestiżową funkcję redaktora „Educational Studies in Mathematics" (ESM) w następujących rolach:

– 2000–2001 jako członek Komitetu Redakcyjnego ESM,
– 2001–2005 jako Redaktor Naczelny ESM,
– 2006–2010 jako Redaktor Wspomagający ESM.

Ponadto w latach 1987–1999 oraz 2002–2023 była redaktorem bądź członkiem Komitetu Redakcyjnego rocznika „Dydaktyka Matematyki".

---

misji Edukacji Narodowej w Krakowie – w dziale Zespół akt – przewody naukowe, Sygnatura: DHP/74.

[7] Komisja ICMI została powołana na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1908 r. w Rzymie. Od 1952 r. jest to Komisja afiliowana przy Międzynarodowej Unii Matematycznej (IMU).

Konferencje

Anna Sierpińska uczestniczyła w ponad 40 renomowanych kongresach i konferencjach z zakresu dydaktyki matematyki. Są wśród nich kongresy o zasięgu światowym, konferencje i sympozja o zasięgu kontynentalnym, międzynarodowym i konferencje lokalne.

Uczestniczyła w pięciu Kongresach ICME[8] (*The International Commission on Mathematical Education*), organizowanych przez Komisję ICMI: Budapeszt (1988), Quebec (1992), Sewilla (1996), Kopenhaga (2004), Hamburg (2016). Na ICME 8 w Sewilli (1996) miała wykład plenarny, który otwierał Kongres pt. *Whither Mathematics Education*?. Na Kongresie w Quebecu (1992) przewodniczyła (z Jeremy Kilpatrykiem) dyskusji Komitetu Programowego *ICMI Study*, przygotowującego główne pytania, które miały być rozważane w książce *What Is Research in Mathematics Education and What Are Its Results?* Na każdym z pozostałych trzech Kongresów Anna była liderem grupy roboczej, grupy tematycznej bądź jedną z prowadzących panel dyskusyjny.

Anna Sierpińska uczestniczyła również w kikudniowej ICMI Study Conference (USA, Waszyngton, Uniwersytet Maryland, 1994), przewodnicząc (z Jeremy Kilparickiem) obradom na temat „What Is Research in Mathematics Education?".

Badaczka prezentowała również wyniki badań dydaktycznych na kongresach merytorycznych z matematyki o światowym zasięgu. Na przykład wzięła udział w Sympozjum „Matematyka dla wszystkich", które odbywało się w ramach Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Warszawie (1983), a na Międzynarodowym Kongresie Matematyków (International Congress of Mathematicians), biorąc udział w sekcji *ICMI Lectures* (Zürich, 1994), wygłosiła wykład pt. *What Is Research in Mathematics Education? Preliminary Outcomes of an ICMI Study*. Prezentowała w nim wstępne wyniki pracy *Międzynarodowego Komitetu Programowego* działającego w ramach *ICMI Study* pt. *What is Research in Mathematics Education and What are its Results?*. Pracami tego Komitetu kierowali: Anna Sierpinska (Canada) i Jeremy Kilpatrick (USA)[9].

Czynnie uczestniczyła w międzynarodowych i renomowanych konferencjach poświęconych psychologicznym aspektom nauczania matematyki PME[10]

---

[8] Kongresy odbywają się co 4 lata. Pierwszy odbył się w 1969 roku w Lyonie, ostatni odbył się w 2024 w Sydney

[9] Informacje dostępne na: https://www.mathunion.org/icmi/digital-library/icmi-studies/icmi-study-discussion-documents (Discussion document: 1994)

[10] Grupa PME została powołana na 3. Kongresie ICME w 1976 roku w Karlsruhe (Niemcy). Konferencje PME odbywają się corocznie. Pierwsza konferencja PME odbyła się w Utrechcie w 1977 roku. PME-47 odbyło się w Auckland (Nowa Zelandia) w lipcu 2024.

(*The International Group for Psychology of Mathematics Education*). Wzięła udział w 10 takich konferencjach. Na jednej z nich była prelegentem wykładu plenarnego pt. *I NEED the Teacher to Tell Me If I Am Right or Wrong* (PME 2007, Seul). Na innych przedstawiała wykłady czy regularnie prowadziła sesje dyskusyjne w grupach tematycznych: Montreal (1987), Veszprem (1988), Paryż (1989), Lizbona (1994), Haifa (1999), Utrecht (2001), Norwich (2002), Praga (2006), Seul (2007) oraz PME-NA (North American Chapter of PME) w Reno, USA (2011).

Anna Sierpińska czynnie uczestniczyła w międzynarodowych konferencjach CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration des Mathématiques*): Leiden (1985), Southampton (1986), Sherbrooke (1987). Występowała w nich z referatami, a także jako lider grupy tematycznej w Southampton.

Anna Sierpińska brała również udział w międzynarodowych konferencjach tematycznych. W Montrealu w 1988 podczas międzynarodowej konferencji na temat przeszkód epistemologicznych i konfliktu poznawczego (*International Conference on Epistemological Obstacles and Cognitive Conflict*) została zaproszona do wygłoszenia wykładu plenarnego, podobnie w Bratysławie w 1990 roku wystąpiła na konferencji *2nd International Symposium on Research and Development in Mathematics Education*.

Anna Sierpińska brała także udział w konferencjach o szerokim międzynarodowym zasięgu CERME organizowanych przez ERME (*European Society for Research in Mathematics Education*): CERME 1 w Osnabrück, Germany (1998) oraz CERME 7 w Rzeszowie, w Polsce (2011).

Spośród innych międzynarodowych konferencji tematycznych, w których Anna Sierpińska brała udział z wykładami, można podać przykład: *Symposium on Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics* (Gilleleje, Dania, 1992) oraz *Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning* (Niemcy, Essen 1992).

Wśród lokalnych konferencji kanadyjskich, w których Anna Sierpińska brała czynny udział, warto wymienić na przykład konferencje organizowane przez CMESG (*Canadian Mathematics Education Study Group*). W ramach tych konferencji w roku 1990 wygłosiła wykład plenarny pt. *Remarks on Understanding in Mathematics* (Burnaby, British Columbia) oraz w roku 2003 wykład plenarny pt. *Research in Mathematics Education Through a Keyhole* (Wolfville, Nova Scotia).

Brała również udział w konferencjach merytorycznych organizowanych przez matematyków. Jedną z nich była *Research Conference in Collegiate Mathematics Education* (USA, 1996), gdzie wygłosiła wykład plenarny pt. „Problems related to the design of the teaching and learning process of linear algebra". Innym przykładem jest kongres stowarzyszenia matematycznego w prowincji Quebeck: *Congres de Association Mathématique du Québec* (Trois-Rivières, Québec, 1997).

Publikacje

Anna Sierpińska jest autorką ponad 80 publikacji w różnych formach, w postaci książek, części książek, materiałów konferencyjnych (proceedings) i w różnych czasopismach naukowych, wśród których można wymienić:

- *Educational Studies in Mathematics*
- *Recherches en Didactique des Mathématiques*
- *Dydaktyka Matematyki (Roczniki PTM)*
- *For the Learning of Mathematics*
- *ZDM*
- *Journal for Research in Mathematics Education*
- *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*
- *Instructional Science*

W dorobku publikacyjnym Anny Sierpińskiej można wyróżnić wiele obszarów tematycznych. W niniejszej publikacji zwracamy uwagę na pięć następujących obszarów tematycznych, którymi zajmowała się Anna Sierpińska i podajemy wybrane tytuły publikacji z tych zakresów.

I. O rozumieniu w matematyce oraz o znaczeniu w matematyce:
   - *Some Remarks on understanding in Mathematics* (Sierpinska, 1990).
   - *On Understanding the Notion of the Concept of Function* (Sierpinska, 1992).
   - *Understanding in Mathematics* (Sierpinska, 1994; 2013).
   - *Discoursing Mathematics Away* (Sierpinska, 2005).

II. Przeszkody epistemologiczne:
   - *O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy – na podstawie studium przypadku* (Sierpińska, 1985).
   - *Attractive Fixed Pints and Humanities Students* (Sierpinska, 1987).
   - *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki* (Sierpińska, 1988).
   - *Propozycja pewnej sytuacji dydaktycznej w zakresie nauczania początków analizy matematycznej* (Sierpińska, 1990).
   - *O powstawaniu przeszkód epistemologicznych związanych z pojęciem nieskończoności u dzieci 10–12 i 14-letnich* (Sierpińska & Vivegier, 1992).
   - *Perspektywa diachroniczna w badaniach nad rozumieniem w matematyce – użyteczność i ograniczenia pojęcia przeszkody epistemologicznej* (Sierpińska, 1994b).
   - *Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education* (Sierpinska & Lerman; 1996).
   - *The Diachronic Dimension in Research on Understanding in Mathematics – usefulness and Limitations of the Concept of Epistemological Obstacle* (Sierpinska, 1996).

III. Nauczanie algebry liniowej:
- *On One Persistent Mistake in Linear Algebra* (Hillel & Sierpinska, 1994).
- *A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire* (Sierpinska, Defence, Khatcherian, & Saldanha, 1997).
- *Cabri-Based Linear Algebra: Transformations* (Dreyfus, Hillel, & Sierpinska, 1998).
- *Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri* (Sierpinska, Trgalova, & Hillel, 1999).
- *Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations* (Sierpinska, Dreyfus, & Hillel, 1999).
- *On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra* (Sierpinska, 2000).
- *Research Into the Teaching and Learning of Linear Algebra* (Dorier, & Sierpinska, 2001).
- *Methodological Problems in Analyzing Data From a Small Scale Study on Theoretical Thinking in High Achieving Linear Algebra Students* (Sierpinska & Nnadozie, 2001).
- *A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra* (Sierpinska, Nnadozie, & Oktaç, 2002).

IV. Stosunek emocjonalny uczniów i studentów do uczenia się matematyki:
- *Sources of Students' Frustration in Bridging Mathematics Courses* (Sierpinska, 2006).
- *Sources of Students' Frustration in Pre-university Level, Prerequisite Mathematics* Courses (Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008).
- *Teaching Absolute Value Inequalities to Mature Students* (Sierpinska, Bobos, & Pruncut, 2011).
- *Problems of Transition from a Former to a New Professor in a Preservice Elementary Mathematics Teacher Education Course* (Savard, Sierpinska, Osana, Bobos, Royea, & Hartwick, 2009).

V. Typy rozumowań – praktyczne i teoretyczne:
- *A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra* (Sierpinska, Nnadozie, & Oktaç, 2002).
- *On Practical and Theoretical Thinking and Other False Dichotomies in Mathematics Education* (Sierpinska, 2005).
- *Discoursing Mathematics Away* (Sierpinska, 2005).

Przytoczone zakresy tematyczne działalności naukowej nie wyczerpują szerokiego spektrum problematyki badawczej podejmowanej przez Annę Sierpińską i nie stanowią one klasyfikacji. W swoich publikacjach poruszała wiele innych ważnych zagadnień.

Promotor rozpraw doktorskich

Anna Sierpińska wypromowała dwóch doktorów na podstawie badań z zakresu dydaktyki matematyki:

– Nadia Hardy w 2009 roku rozprawa pt. *Students' Models of the Knowledge to Be Learned About Limits in College Level Calculus Courses. The Influence of Routine Tasks and the Role Played by Institutional Norms* (Hardy, 2009),
– Georgeana Bobos-Kristof w 2015 roku pt. *Teaching Fractions Through a Measurement Approach to Prospective Elementary Teachers: A Design Experiment in A Math Methods Course* (Bobos-Kristof, 2015).

Była również mentorem szkół doktorskich prowadzących zajęcia z metodologii badań z zakresu dydaktyki matematyki (w czeskich Choceradach w roku 2000).

DZIAŁALNOŚĆ DYDAKTYCZNA ANNY SIERPIŃSKIEJ – PROGRAM MTM

Anna Sierpińska objęła swoim kierownictwem w Concordia University wspomniany program *Master in the Teaching of Mathematics* (MTM). Była jego dyrektorem. W ramach tego programu osobiście wypromowała 28 prac magisterskich i 23 projektów badawczych. W związku z tą działalnością Anna Sierpińska przygotowała różne materiały dydaktyczne z serii „Lecture Notes". Przykładem takiego materiały jest napisany w roku 2019 *Materials For Teaching a Course on Research in Mathmematics Education About Students' Difficulties in Mathematics* (Sierpinska, 2019), co jest unikalną pozycją zawierającą zgodnie z tytułem materiały dydaktyczne do zajęć dla nauczycieli z zakresu prowadzenia badań nad trudnościami uczniów w matematyce.

Na szczególną uwagę zasługuje praca napisana w 2020 roku zamieszczona w zasobach internetowych, a niepublikowana książka pt. *History of the Master in the Teaching of Mathematics (MTM) Program 1967–2018* (Sierpinska, 2020). Jest to unikalna i bardzo oryginalna pozycja, w której przedstawiony jest nie tylko cel kształcenia i działania programu MTM, realizowane przedmioty i plany kursu, wymienione są nazwiska wszystkich nauczycieli wykładowców, którzy w tym programie uczestniczyli, ale również wymienione zostały nazwiska studentów, czynnych nauczycieli uczestniczących w tym programie przez okres 1967–2018, wszystkie tematy projektów badawczych. Pisała w nich w nich między innymi „Każdy projekt badawczy i każda praca mgr była dla studentów i dla mnie przygodą samą w sobie. Każda z tych prac miała swoja interesującą historię do opowiedzenia" (Sierpinska, 2020, s. 66, tłumaczenie własne). Podkreślała, że bardzo się cieszy tym, że niektórzy z jej studentów postanowili dalej rozwijać się naukowo i podjęli studia doktoranckie, a siedmiu z nich uzyskało doktorat. Wspomina na przykład, że David A. Reid, który skończył studia w 1992 roku, uzyskał stopień doktora z dydaktyki matematyki na Uniwersytecie Alberty, został profesorem uczelnianym najpierw w USA, a teraz w Niemczech, powierzono mu też funkcję redaktora naczelnego czasopisma *For the Learning of Mathematics*.

Anna Sierpińska w tym opracowaniu liczącym 117 stron dokonuje wielostronnego podsumowania lat działalności programu i w pewnym sensie żegna się z uczestnikami programu, a także podkreśla swoją wdzięczność ze współpracy z tymi osobami. Pisze nie tylko, że cieszyła się, że mogła towarzyszyć studentom w pisaniu tych prac, ale też podkreśla wątki jej osobistego zaangażowania, na przykład, że była bardzo szczęśliwa, że przestała się martwić słabą finansową sytuacją pewnych osób lub że dostali pracę taką, jaką chcieli. Świadczy to o jej głębokiej więzi z uczestnikami programu, jej studentami i uczniami-nauczycielami. Bardzo ciepło pisała w tym opracowaniu o współpracownikach, którzy pracowali w tej uczelni.

ZWIĄZKI ANNY SIERPIŃSKIEJ Z POLSKĄ DYDAKTYKĄ MATEMATYKI

Anna Sierpińska uzyskała bardzo solidne wykształcenie w ramach warszawskiej szkoły matematyki i filozofii oraz *Krakowskiej Szkoły Dydaktyki Matematyki*[11]. Była czynnym uczestnikiem *Ogólnopolskiego Seminarium z Dydaktyki Matematyki*, gdzie bywała również w okresie swojej działalności w Montrealu, po śmierci profesor Anny Zofii Krygowskiej. Na przykład w roku 2007 wygłosiła referat. Przez cały okres swojej światowej działalności popularyzowała wiedzę i nowe trendy zagraniczne jako redaktor czasopisma „Dydaktyka Matematyki", którym była przez 34 lata, między innymi publikując w języku polskim. W tym kontekście wprowadzała do polskiego dyskursu naukowego terminy z języka angielskiego i francuskiego (przeszkody epistemologiczne, perspektywa instytucjonalna etc.) i prezentowała w języku polskim światowy dorobek w zakresie wiedzy z dziedziny dydaktyki matematyki i nowe zagraniczne tendencje odnoszące się do badań dydaktycznych.

Anna Sierpińska, pracując w Montrealu, zapraszała polskich dydaktyków, jako znanych zagranicznych dydaktyków, do okresowego prowadzenia zajęć ze studentami Uniwersytetu Concordia[12]. Zajęcia ze studentami Uniwersytecie Concor-

---

[11] Termin opisany w: Nowecki (1984).

[12] O kontekście tych zaproszeń piszemy w sekcji dotyczącej lat 1990–2023: Montreal.

dia prowadzili: Maciej Klakla, Ewa Łakoma, Edyta Nowińska (Polska i Niemcy) i Anna Rybak.

Zawsze wspierała polskich badaczy z zakresu dydaktyki matematyki, służyła doradztwem merytorycznym; jej pomoc przybierała także materialny charakter – na przykład przesyłała regularnie pocztą tradycyjną kserokopie literatury anglojęzycznej (ze względu na trudny dostęp polskich dydaktyków do niektórych czasopism zagranicznych).

Przez cały okres swojej ogólnoświatowej kariery Anna Sierpińska była żywo zainteresowana badaniami z zakresu dydaktyki matematyki realizowanymi w Polsce. Czytała na bieżąco polskie artykuły naukowe z tego zakresu, a następnie promowała badania na forum międzynarodowym w czasopismach zagranicznych.

Dla przykładu w „Educational Studies in Mathematics" w dziale „Book Review" (nr 18, 1987) propagowała czasopismo „Dydaktyka Matematyki" poprzez streszczanie w języku francuskim artykułów opublikowanych w latach 1982, 1984, 1985. Wśród streszczanych lub wspominanych przez Sierpińską artykułów polskich znalazły się następujące prace: *Roczniki PTM Dydaktyka Matematyki* vol. 1 (1982): Krygowska (1982, s. 7–60), Nowak (1982, s. 61–126), Duda (1982, s. 127–137), Semadeni (1982, s. 163–184); *Roczniki PTM Dydaktyka Matematyki* vol. 2 (1982): Klakla (1982, s. 33–81), Puchalska (1982, s. 143–202), *Roczniki PTM Dydaktyka Matematyki* vol. 3 (1984): Ciosek (1984, str. 7–44), Ćwik (1984, s. 45–83), Płocki (1984, s. 155–206), *Roczniki PTM Dydaktyka Matematyki* vol.4 (1985): Pieprzyk (1985, s. 7–59), Sierpińska (1985, s. 107–167), *Roczniki PTM Dydaktyka Matematyki* vol. 5 (1985): Urbańska (1984, s. 123–134) i Duda (1985, s. 163–192).

Dokonywała również tłumaczeń wybranych całych artykułów autorstwa polskich badaczy i pomagała w procesie ich wydania, jak na przykład w przypadku publikacji Heleny Siwek (1990).

Przyjeżdżała do swoich rodziców, którzy pozostali w Polsce i z którymi była bardzo związana. Książka o rozumieniu w matematyce (*Understanding in Mathematics*) jest dedykowana właśnie im. Starała się organizować tak swój pobyt w Polsce, by uczestniczyć w konferencjach i spotykać się na konsultacjach z polskimi kolegami badaczami. Dla przykładu brała udział w konferencjach organizowanych w Polsce: w Warszawie (2007), CERME 7 w Rzeszowie (2011), CME we Wrocławiu (2016).

Anna Sierpińska dbała bardzo o kontakty z polskimi badaczami i odczuwała potrzebę spotkań z nami. Podczas międzynarodowych kongresów inicjowała „Polskie wieczory", gdzie spotykaliśmy się w naszym narodowym gronie z nią, jako mentorem i zarazem przyjacielem. Jedno z takich ostatnich spotkań odbyło się podczas ICME w Hamburgu w 2016 roku. Spotykając się z Polakami pytała „Co się dzieje w Krakowie? Poznaniu? Warszawie? Nad czym pracujecie?", i z żywym zainteresowaniem prowadziła dyskusje naukowe. Wszyscy, z którymi rozmawiała podkreślali, jak bardzo była pomocna.

ANNA SIERPIŃSKA – SZLACHETNY I WARTOŚCIOWY CZŁOWIEK

Na podstawie samej pobieżnej analizy życiorysu i działalności naukowej i dydaktycznej widać, że Anna Sierpińska miała solidne wykształcenie, władała biegle trzeba językami – polskim, angielskim i francuskim i była niezwykle zaangażowanym, dociekliwym badaczem procesów uczenia się i nauczania matematyki.

Profesor Anna Sierpińska była wysoko oceniana przez swoich studentów. Jedna z jej doktorantek w przedmowie do swojej rozprawy zamieściła następujący wpis:

> Chciałabym podziękować mojemu promotorowi, Profesor Annie Sierpińskiej. Od momentu, kiedy po raz pierwszy spotkałam Panią Profesor była Nauczycielem w najgłębszym znaczeniu tego słowa; pozwoliła mi, bym zaprojektowała swoją własną ścieżkę w badaniach, ale była obecna przy każdym moim kroku, aby oświetlić to, czego jeszcze nie widziałam. Pomagała mi na każdym etapie moich doktorskich studiów, tak w sprawach naukowych, jak i osobistych. To, że byłam Jej studentką uważam za przywilej i zaszczyt (Hardy, 2009, tłum. własne).

W swoim opracowaniu pt. „*A History of the Master in the Teaching of Mathematics (MTM) Program 1967–2018* Anna Sierpińska wspominała dobre kontakty ze swoimi współpracownikami oraz dydaktykami – przyjaciółmi spoza Concordia University. Podkreślała, że już od początkowego etapu pracy w Montrealu odbywali oni częste spotkania i prowadzili dyskusje na tematy naukowe. Pisała:

> Mój pierwszy semestr w Concordia University z zaproszonymi zagranicznymi wykładowcami Colette Laborde, Liora Linchevski, Shlomo Vinner i kolegami prowadzącymi badania z dydaktyki matematyki Joel Hillel i Nick Herscovics sprawiali, że czułam się, jak gdybym brała udział w międzynarodowej konferencji. To było ekscytujące. Nauczanie było również ekscytujące. W ramach kursu MTM uczyłam kursu *Filozofii* na kierunku matematyka i *Algebry Liniowej* dla studentów studiów licencjackich (Sierpinska, 2020, s. 59, tłumaczenie własne).

Współpracownicy Anny Sierpińskiej z Concordia University podkreślają, że była głębokim myślicielem (*deep thinker*), miała ogromną wiedzę nie tylko o kształceniu matematycznym, ale także o filozofii, historii, kulturze[13].

---

[13] Anna Sierpińska, 1947–2023. In Memoriam. *Educational Studies in Mathematics* 115, 5–7 (2024). https://doi.org/10.1007/s10649-024-10301-z; G., Gueudet, E., Nardi, & E. Lockwood, (2023). A Tribute to Anna Sierpińska. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 9, 570–571. https://doi.org/10.1007/s40753-023-00231-1; N., Hardy Obituary for Anna Sierpińska. In memoriam – Obituary for Anna Sierpińska (1947 – 2023).

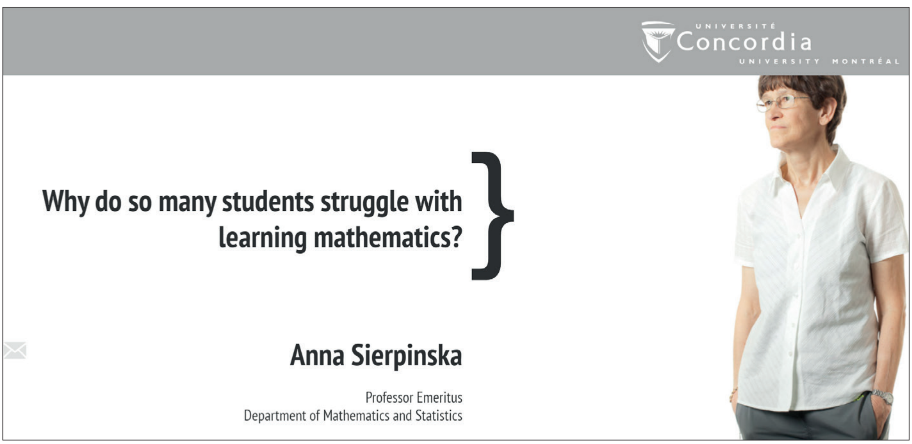
Anna Sierpińska była ponadto świetnym słuchaczem, niezwykle szybko dostrzegającym związki. Na konferencji PME w Seulu (2007) po wykładzie zdziwienie wywołało u słuchaczy tego wykładu to, że potrafiła zupełnie bez wysiłku dostrzec i błyskotliwie skomentować związki pomiędzy treściami swojego wykładu z wieloma innymi odczytami i wykładami, które się odbyły bezpośrednio przed jej wystąpieniem.

Budziła ogromny respekt u wszystkich współpracowników, ale jednocześnie była bardzo otwarta, szybko nawiązywała kontakty, włączała się w dyskusje i była bardzo bezpośrednia. Współpracownicy Anny Sierpińskiej stwierdzają, że w sytuacjach trudnych zadają sobie pytanie: „Co Anna by na to powiedziała?".

W pełni podzielamy opinie kolegów kanadyjskich Anny Sierpińskiej. Była niezwykłym Człowiekiem, zaangażowanym nie tylko w sprawy naukowe ale również dającym wsparcie i niosącym pomoc w różnych sytuacjach życiowych.

Chcemy dodać, że polscy dydaktycy matematyki są dumni z osiągnięć naszej Koleżanki, profesor Anny Sierpińskiej, chcemy wyrazić naszą wielką wdzięczność za Jej życzliwość, przyjaźń okazywaną nam – Koleżankom i Kolegom dydaktykom w Polsce i okazywaną nam pomoc w różnych sytuacjach.

Wzruszeniem nas napawa Jej wielka troska nie tylko o rodzinę i bliskich, ale także o bliższych i dalszych współpracowników, studentów i uczniów oraz ogólnie o kondycję dydaktyki matematyki jako nauki (w tym rozwoju dydaktyki matematyki w Polsce), a przede wszystkim o rozwój szeroko rozumianej edukacji matematycznej (co podkreśliła w swoim motto, zob. rys.1)



Rysunek 1. Anna Sierpińska – archiwalna strona Concordia University

---

A major figure of ICMI passed away: Anna Sierpińska, ICMI Newsletter – December 2023 | International Mathematical Union (IMU), dostęp z 26.02.2025.

BIBLIOGRAFIA

Anna Sierpińska, 1947–2023. In Memoriam. *Educational Studies in Mathematics* 115, 5–7 (2024). https://doi.org/10.1007/s10649-024-10301-z.

Bobos-Kristof, G. (2015). *Teaching Fractions Through a Measurement Approach to Prospective Elementary teachers: A design experiment in a Math Methods course* (niepublikowana rozprawa doktorska, Concordia University).

Ciesielski, Z ., Olech, Cz. (red.) (1984). *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, August 16–24, 1983, Warszawa, Volume 1. Warszawa–North-Holland–Amsterdam–New York–Oxford: PWN – Polish Scienific Publishers.

Dorier, J.-L., Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of the Linear Algebra. W: D. Holton (red.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series* (s. 255–273). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1998). Cabri-based Linear Algebra: Transformations. *European Research in Mathematics Education I*, 209–221.

Furinghetti, F., Giacardi, L. (2010). People, Events, and Documents of ICMI's First Century *Actes d'historia de la ciência i de la técnica*, *3* (2), 11–50.

Gueudet, G., Nardi, E. & Lockwood, E. (2023). A Tribute to Anna Sierpińska. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 9, 570–571. https://doi.org/10.1007/s40753-023-00231-1.

Hardy, N. Obituary for Anna Sierpińska. In memoriam – Obituary for Anna Sierpińska (1947 – 2023). A major figure of ICMI passed away: Anna Sierpińska, ICMI Newsletter – December 2023 | International Mathematical Union (IMU) dostęp z 26.02.2025.

Hardy, N. (2009). *Students' Models of the Knowledge to be Learned about Limits in College Level Calculus Courses. The Influence of Routine Tasks and the Role Played by Institutional Norms* (niepublikowana rozprawa doktorska, Concordia University).

Hillel, J., Sierpinska, A. (1994). On One Persistent Mistake in Linear Algebra. *The Proceedings PME*, *18*(2), 65–72.

Kronika Zakładu Dydaktyki Matematyki WSP, Biblioteka Główna UKEN w Krakowie (w zbiorach spuścizny po Prof. A.Z. Krygowskiej)

Krótkie informacje (1988). *Wiadomości Matematyczn*e, *XXVIII.1*, s. 103–109.

Krótkie Informacje (1990) Wiadomości Matematyczne, *XXIX.1*, s. 160–165.

Lukkassen, D., Persson, L-E., Sierpinska, A. (2007). Some Aspects of Web-courses in Mathematics Based on PC Screen Recorded Video Lectures. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *12*(4), 53–72.

Nowecki, B.J. (1984). *„Krakowska Szkoła Dydaktyki Matematyki", Prace Monograficzne Nr LXV*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP,

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 1(1982).

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 2 (1982).

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 3 (1984).

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 4 (1985).

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 5 (1985).

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 13 (1992).

Savard, A., Sierpinska, A., Osana, H.P., Bobos, G., Royea, D.A., Hartwick, G. (2009). *Problems of Transition from a Former to a New Professor in a Preservice Elementary Mathematics Teacher Education Course*. 61st CIEAEM Meeting, July 26-31, Montreal.

Sierpińska, A. (1985). O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy – na podstawie studium przypadku. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *4*(1985), 107–167.

Sierpinska, A. (1987). Attractive Fixed Pints and Humanities Students. W: J.C. Bergeron i in. (red.), *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME)* (11th, Montreal, Canada, July 19–25, 1987). Nr III (s. 170–176).

Sierpińska, A. (1988). Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *8*(1988), 103–153.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Sierpińska, A. (1990). Propozycja pewnej sytuacji dydaktycznej w zakresie nauczania początków analizy matematycznej. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *12*(1990),143–191.

Sierpińska, A., & Vivegier, M. (1992). O powstawaniu przeszkód epistemologicznych związanych z pojęciem nieskończoności u dzieci 10–12 i 14-letnich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *13*(1992), 253–311.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of the Concept of Function. W: G. Harel, E. Dubinsky (red.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (s. 25–58). MAA Notes, 25. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1994a). *Understanding in Mathematics.* Wyd. 1. London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203454183

Sierpińska, A. (1994b). Perspektywa diachroniczna w badaniach nad rozumieniem w matematyce – użyteczność i ograniczenia pojęcia przeszkody epistemologicznej. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *16*(1994), 73–101.

Sierpinska, A., Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. W: *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (s. 827–876). Dordrecht: Springer Netherlands.

Sierpinska, A. (1996). The Diachronic Dimension in Research on Understanding in Mathematics – Usefulness and Limitations of the Concept of Epistemological Obstacle. W: H.N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (red.), *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences.* Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 289–318

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away. W: Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., Valero, P. (red.). *Meaning in Mathematics Education* (s. 205–230). Mathematics Education Library. New York: Springer.

Sierpinska, A. (2000). The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics. W: J. Fauvel, J van Maanen (red.). *History in Mathematics education: ICMI study* (s.143-170). Dordrecht: Kluwer 2000,.

Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T., Saldanha, L. (1997). A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire. W: J.-L. Dorier (red.), *L'Enseignetnent de l'Algèbre Linéaire en Question* (s. 249–268). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Sierpinska, A., Trgalova, J., & Hillel, J. (1999). Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation*, *100*, 156.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations. *Recherches en didactique des mathématiques* (Revue), *19*(1), 7–40.

Sierpinska, A. (2000). On Some aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. W: J.L. Dorier (red.). On the Teaching of Linear Algebra (s. 209–246). Dordrecht: Springer Netherlands.

Dorier, J.L., Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. W: D. Holton (red.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (s. 255–273). Dordrecht: Springer Netherlands.

Sierpinska, A., Nnadozie, A.A. (2001). Methodological problems in analyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 177–184.

Sierpinska, A., Nnadozie, A.A. & Oktaç, A. (2002). A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra. *Concordia University: Manuscript. Retrieved May*, *2*, 2011.

Sierpinska, A., Bobos, G., & Knipping, C. (2008). Sources of Students' Frustration in Pre-university Level, Prerequisite Mathematics Courses. *Instructional Science*, *36*, 289–320.

Sierpinska, A. (2006). Sources of Students' Frustration in Bridging Mathematics Courses. *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, 121–129.

Sierpinska, A., Bobos, G., Pruncut, A. (2011). Teaching Absolute Value Inequalities to Mature Students. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 275–305.

Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and Other False Dichotomies in Mathematics Education. W: M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard, F. Seeger (red.). *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education* (117–135). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (red.). (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICMI Study*. Vol. 4. New York: Springer Science & Business Media, LLC.

Sierpinska, A. (2013). *Understanding in Mathematics*. Wyd. 2. London: Routledge.

Sierpinska, A. (2019). *Materials for Teaching a Course on Research in Mathmematics Education About Students' Difficulties in Mathematics.* Lecture Notes, Concordia University. https://tinyurl.com/yrpter8h dostęp z 22.11.2024.

Sierpinska, A. (2020), *A History of the Master in the Teaching of Mathematics (MTM) Program 1967–2018*, Concordia University. https://spectrum.library.concordia.ca/id/eprint/987308/7/A_history_of_MTM_1967-2018-Sierpinska-Beddard-Cor.01.11.2020.pdf dostep z 22.11.2024.

Siwek, H. (1990). Rapport d'un fragment de recherche sur le développement de simples activités mathématiques chez des enfants légèrement handicapés de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(1), 61–110.

Tezy raportu o edukacji matematycznej w Polsce (1990). *Wiadomości Matematyczne XXIX.1*, s. 113–114.

Co to znaczy „myśleć kreatywnie" na zajęciach z matematyki?

Ewa Swoboda

Państwowa Akademia Nauk Stosowanych Jarosław
ewa.swoboda@pwste.edu.pl
ORCID: 0000-0002-9563-158X

Streszczenie

Prowadzenie zajęć z matematyki wymaga od nauczyciela przestrzegania kilku kluczowych zasad. Jaworski (1992, 1994), analizując główne założenia dotyczące zajęć z edukacji matematycznej zaproponowała triadę, na którą składa się (1) matematyczny problem będący wyzwaniem, (2) otwartość na uczniów i (3) umiejętność zorganizowania sytuacji uczenia się. Jej zdaniem są to podstawowe elementy każdej prawidłowej sytuacji dydaktycznej. Przestrzeganie tych zasad jest podporządkowane naczelnej zasadzie metodyki nauczania matematyki, która nakazuje, by pozwolić uczniowi myśleć samodzielnie. Realizowanie takich postulatów może sprawić, że uczniowie będą twórczo i kreatywnie pracować na zajęciach. W artykule odnoszę się do trzech elementów triady, na przykładach zadań z różnego poziomu edukacyjnego analizuję możliwość ich realizacji.

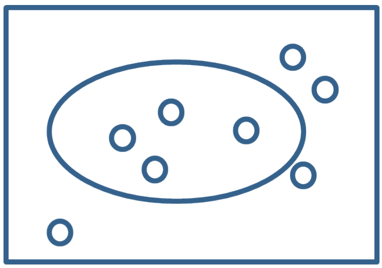
Abstract

Teaching mathematics requires the teacher to follow a few key rules. Jaworski [1992, 1994], analyzing the main assumptions about mathematical classes, proposed a triad, which consists of (1) a mathematical problem that is a challenge, (2) openness to students and (3) the ability to organize a learning situation. In her opinion, these are the basic elements of any correct teaching situation. Compliance with these principles is subordinated to the guiding principle of the methodology of teaching mathematics, which requires the child to think independently. The implementation of such postulates can make students work creatively. In the article I refer to three elements of the triad. I analyze the possibility of their implementation, using examples from school textbooks.

ZAMIAST WSTĘPU

Podczas jednego z seminariów zorganizowanego przez prof. Zbigniewa Semdeniego z Uniwersytetu Warszawskiego, Edie Gray z Uniwersytetu Warwick zaprezentował niektóre wyniki obserwacji dotyczących próby określenia cech dziecięcego myślenia pod kątem ich umiejętności matematyzowania.

Badaniami objęto dzieci przedszkolne (4–5 lat). Wybierano te, które łatwo nawiązywały kontakt, były otwarte w wyrażaniu swoich opinii. Dzieci były rozdzielane do dwóch grup: te, które (w opinii swoich nauczycielek) przejawiały zainteresowania matematyczne oraz te, które takich zainteresowań nie przejawiały. Badano je schematycznymi rysunkami, które można było różnorodnie interpretować. Pytania do każdej ryciny były takie same: opowiedz, co widzisz na tym rysunku. Oto jeden z nich:



Rysunek 1. Szkic jednego z obrazków wykorzystywanych jako narzędzie badawcze w badaniach prowadzonych przez D. Talla i E. Graya (notatki własne)

Opiszę dwie wypowiedzi:

1. To są groszki na talerzu. Ale niektóre groszki się wysypały i leżą poza talerzem.
2. To jest pół. Bo tutaj i tutaj jest tyle samo.

Widać, że te dwa opisy bardzo różnią się, mimo że dotyczą tego samego obrazka. Umysł pierwszego dziecka potrafił wykreować bardzo bogatą, ale jednostkową sytuację: kolorową (groszki mają kolor), dynamiczną (groszki wypadły poza talerz), podbudowaną dźwiękiem (groszki odbijają się od talerza). Druga wypowiedź pokazuje, że dziecko ten schematyczny rysunek jeszcze bardziej uprościło, pominęło wiele jego cech (kształt obiektów, ich liczbę), za to skupiło się na relacji między liczbą obiektów w zakreślonym owalu w stosunku do wszystkich obiektów. Łatwo zgadnąć, że ta druga wypowiedź należy do dziecka, które dostrzega matematykę w otaczającym świecie, widzi rzeczywistość poprzez pryzmat matematycznych związków. Czy jednak można powiedzieć, że nie jest to twierdzenie oryginalne, twócze, zaskakujące? Warto przyznać, że oba opisy są oryginalne, ale różnią się zasadniczo między sobą w sposobie interpretacji informacji, które do dzieci docierały.

Ten przykład zwrócił moją uwagę na fakt, który leży u podstaw myślenia matematycznego. Matematyka działa w świecie abstrakcyjnym, ale abstrakcyjne obiekty matematyczne są efektem właśnie abstrahownia, czyli skupiania uwagi na wybranych cechach przedmiotów lub zjawisk. Na jakich cechach skupia uwagę „matematyczny umysł”? Podany wcześniej przykład sugeruje, że są to związki, relacje, prawidłowości. Może więc warto od samego początku matematycznej edukacji stwarzać jak najwięcej okazji do działań w tym zakresie? Mówiąc językiem psychologii i dydaktyki – budować odpowiednie schematy pomagające w matematycznym interpretowaniu otaczającego nas świata?

JAK ROZUMIEĆ „KREATYWNOŚĆ” NA ZAJĘCIACH MATEMATYCZNYCH?

Zżymam się, kiedy spotykam się z opinią, że kreatywność polega na swobodnym, niekontrolowanym przebiegu myśli, a jej efektem ma być powstanie oryginalnego, jednostkowego (czyli unikalnego) dzieła. W takim ujęciu efekt myślenia kreatywnego ma oprowadzać do zaskakujących, nieoczekiwanych wyników. Najlepiej – w obszarze nauk plastycznych, muzycznych, literackich, bo przecież w takim ujęciu matematyka nie daje pola dla myślenia kreatywnego. W takim ujęciu rolą nauczyciela ma być nieprzeszkadzanie, pozwolenie na wszystko, co wpadnie do głowy. Inna, też nieakceptowana przeze mnie tendencja polega na zastępowaniu pojęć: nowy, inny, własny słowem „kreatywny”. Niestety, również takie podejście jest szeroko rozprzestrzeniane, hołubione, przybiera postać naukową. Pewnie się nie znam, ale fakt, że istnieją dysertacje doktorskie o tytule *Kreatorzy nowej kultury kawy w postindustrialnym mieście. Studium socjologiczne* (Gołębiewska, 2021), budzi konsternację.

Nie godzę się na takie ujęcie, bo myślenie kreatywne to jedna z form myślenia jako takiego. A myślenie samo w sobie zakłada tworzenie ciągu przeobrażeń. Parafrazując jedną z popularnych definicji myślenia (Tomaszewski, 1992): Myślenie to czynność **umysłowa –** w czynności myślenia biorą udział **operacje umysłowe**, nieobserwowalne bezpośrednio. Za ich pomocą człowiek **przetwarza** informacje o przedmiotach i klasach. Te informacje zawarte są w spostrzeżeniach, wyobrażeniach i pojęciach. W związku z tym w strukturze myślenia wyróżnia się trzy elementarne składniki: (1) informacje o świecie, które są materiałem myślenia; informacje te mogą być zakodowane w **spostrzeżeniach, wyobrażeniach lub pojęciach**; (2) operacje, czyli elementarne transformacje umysłowe; (3) reguły (metody, taktyki, strategie), czyli to, co wpływa na uporządkowanie kolejnych operacji.

Myślenie w każdej postaci wymaga własnego, twórczego działania, choćby w kierunku budowania skojarzeń, przetwarzania. Najlepiej – ukierunkowanego na osiągnięcie określonego celu. W związku z tym taka aktywność jest często twórcza sama w sobie dla osoby, która myśli. W nauczaniu na każdym etapie i w każdym obszarze edukacyjnym wychowanie myślącego człowieka nakłada na edukatorów obowiązek stymulowania własnych (kreatywnych?) postaw w stosunku do postawionych zadań. Matematyka z tego obszaru w żaden sposób nie jest wyłączona.

Istnieje wiele opracowań i teorii podkreślających rolę myślenia kreatywnego w procesie uczenia się matematyki. Wszystkie te teorie w jakimś stopniu odwołują się do konstruktywizmu poznawczego. Barbara Jaworski (1992, 1994) analizując główne założenia dotyczące zajęć z edukacji matematycznej, zaproponowała triadę, na którą składa się (1) matematyczny problem będący wyzwaniem; (2) otwartość na uczniów; (3) umiejętność zorganizowania sytuacji uczenia się. Jej zdaniem są to podstawowe elementy każdej prawidłowej sytuacji dydaktycznej.

MATEMATYCZNY PROBLEM BĘDĄCY WYZWANIEM

Jak rozumieć matematyczny problem będący wyzwaniem? Moim zadaniem każda nowa sytuacja wymagająca rozwiązania może być dla dziecka wyzwaniem. Fakt, że dla nauczyciela może to być znany problem, nie ma tu nic do rzeczy. Wystarczy, by dorosły nie ingerował zbytnio w sam proces badania problemu, by pozwolił na jego eksplorowanie, samodzielne poszukiwania, dał czas, aby pomyśleć. Nawet bardzo tradycyjne zagadnienia mogą być miejscem wyzwalania wielu różnych pomysłów. Oto przykłady z różnych poziomów matematycznej edukacji.

Problemy z poziomu edukacji wczesnoszkolnej

Przykład 1.

Zadanie, które odwołuje się do skojarzeń związanych z liczbami naturalnymi pierwszej dziesiątki. Podawane przez dzieci odpowiedzi mogą być różnorodne, ważne jednak, by dziecko potrafiło powiedzieć, dlaczego właśnie tak uważa. Na przykład rękawiczka może być reprezentacją dla liczby 5 – bo to rękawiczka z 5 palcami; może kojarzyć się z liczbą 2, bo każda rękawiczka ma drugą do pary, a nawet – z liczbą 7, bo akurat na tej rękawiczce widać 7 kolorów. Warto dać potem dzieciom czas na wymyślanie własnych przykładów, oczywiście razem z uzasadnieniem.

1 Weź kartoniki z liczbami od 0 do 9. Dopasuj te liczby do obrazków. Powiedz, dlaczego właśnie tak.

- Podaj własne przykłady przedmiotów, które kojarzą ci się z liczbami od 0 do 9.

Rysunek 2. Zadanie dotyczące tworzenia związków między obiektami realnego świata a liczbami naturalnymi. Źródło: Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 84.

Przykład 2.
Uczniowie mieli ułożyć zadanie do następującego obrazka:

4. Na scenie stoją Kasia, Ola, Marcin i Tomek. Ustal, w jakiej kolejności stoją dzieci w czasie występu, jeżeli Ola stoi z brzegu. Po prawej stronie Oli stoi Tomek, Kasia stoi pomiędzy Marcinem i Tomkiem. Wpisz imiona wszystkich dzieci.

Rysunek 3. „Utwórz zadanie do obrazka". Źródło: Lenkiewicz, Sawicka, Swoboda, 2010, s. 54.

Efekt ich pracy przedstawiam poniżej:

- Na scenie śpiewało dwoje śpiewaków. Po chwili doszło do nich jeszcze dwoje dzieci. Ile osób jest teraz na scenie?
- Na scenie są 4 osoby. Dwoje z nich to dzieci. Ile jest osób dorosłych?
- Na scenie znajduje się 2 chłopców i 2 dziewczynki. 1 chłopiec i jedna dziewczynka śpiewają, a pozostali aktorzy tańczą. Kto z aktorów tańczy?
- Na scenie stoi dziewczynka, która ma jedna parę skrzydełek. Ile skrzydełek potrzeba dla 5 takich dziewczynek?
- Na obrazku są 4 osoby. Jedna osoba ma 2 nogi. Ile nóg mają wszyscy razem?
- Na scenie jedna osoba nie ma żadnego nakrycia głowy. Ile osób jest na obrazku? Ile nie ma nakrycia głowy?
- W przedstawieniu bierze udział 14 aktorów. Na scenie jest 4. Ilu jest poza sceną?
- Nauczycielka kupiła 20 czekoladek. Rozdzieliła je między dzieci występujące w przedstawieniu. Ile czekoladek dostało każde dziecko?
- Na scenie jest 4 dzieci. Jedna dziewczynka jest przebrana za biedronkę. Ile jest pozostałych dzieci?
- Podczas wakacyjnego pikniku zorganizowano konkurs talentów. Udział w zabawie wzięło 8 osób. Mama Janka zrobiła zdjęcie, na którym jest Janek, po jednej stronie jest Ania, a po drugiej Marysia i Dawid. Jankowi zrobiło się przykro, bo na zdjęciu nie było Tomka, Wiktorii, Wojtka i Kornelii. Ilu osobom mama nie zrobiła zdjęcia? Ile osób było na zdjęciu? Ile było dziewczynek na zdjęciu?
- W szkole odbywało się przedstawienie. Składało się ono z 4 scen, w każdej z nich wzięło udział 4 dzieci – w każdej inne. Ile dzieci wystąpiło w przedstawieniu?
- Jeżeli od każdego dziecka występującego na scenie przyjdzie 2 rodziców, to ilu rodziców będzie w tej grupie?
- W przedstawieniu brało udział 4 dzieci. Najpierw odfrunęła biedronka, potem odleciał pilot. Ile dzieci zostało na scenie?
- Klasa IIIa liczy 23 osoby. Do udziału w przedstawieniu wybrano 2 dziewczynki i 2 chłopców. Reszta dzieci wróciła do domu. Ile dzieci wróciło do domu?
- Strój Kasi kosztował 30 zł, a strój Adama 25 zł. Sukienka Agnieszki była droższa od stroju Kasi o 28 zł, a strój Michała kosztował o 4 zł mniej niż sukienka Agnieszki. Ile kosztowały wszystkie stroje na ten występ?
- Na scenę weszło jeszcze 4 uczniów, a jedna osoba opuściła scenę. Ile dzieci jest teraz na scenie?
- Jedna z dziewczynek przebrana jest za biedronkę. Na jej stroju znajduje się 25 kropek. Na dwóch skrzydełkach jest 8 kropek. Ile jest na tułowiu?
- W szkole zorganizowano przedstawienie. Na scenie występowało 4 dzieci. Ile dzieci będzie na scenie, gdy dojdzie tam jeszcze 3 dzieci?

Mamy tutaj 18 zadań. Niektóre odwołują się wprost do informacji pokazanych na rysunku, inne tworzą własną historyjkę, dla której rysunek jest tylko inspiracją. Twórcy zadań odnoszą się do różnej swojej wiedzy matematycznej; niektóre zadania są bardzo łatwe, inne wymyślniejsze, ale każdy autor pomysłu niewątpliwie ma poczucie sukcesu. I pewnie wcale nie są to wszystkie zadania, które można stworzyć.

Problemy z poziomu zajęć z matematyki dla starszych klas szkoły podstawowej

Poniższy przykład mógł zostać zainspirowany informacją radiową, mówiącą o korkach ulicznych na drogach czy autostradach. To przykład sytuacji bardzo dobrze wpisującej się w umiejętności modelowania matematycznego:

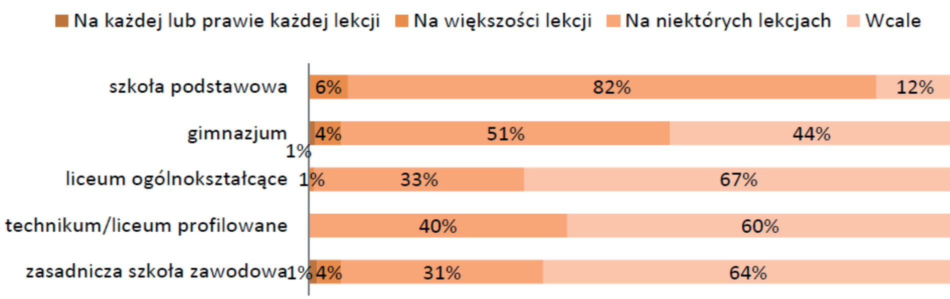
– W gorące letnie popołudnie zdarzył się wypadek na autostradzie A4 bezpośrednio przed węzłem Chrzanów, na linii wiodącej do Krakowa. Ruch został wstrzymany. Zrobił się korek pomiędzy węzłem Chrzanów i węzłem Balin. Samochody jadące autostradą mogą go ominąć zjazdem z autostrady na węźle Balin. Obsługa techniczna autostrady zamierza przygotować wodę mineralną w butelkach dla pasażerów, którzy utknęli w korku.
– Ile butelek wody należy przygotować?

W tym problemie nie ma niemal żadnej matematycznej informacji. Na czym więc polega wyzwanie postawione przed uczniami? Powinni sami dotrzeć do tych informacji, które są im potrzebne (na przykład jaka jest odległość między węzłami, ile jest tam pasów, na których mogą stać samochody). Muszą sami podjąć decyzję, jak szacować liczbę pasażerów uwięzionych w samochodach. Mamy więc okazję do podziału uczniów na zespoły, rozdzielenia obowiązków (kto odpowiada za jaką część rozwiązywania problemu), korzystania z różnych źródeł informacji. No i jest to rzeczywista aktywność związana z matematyzowaniem, bo same obliczenia mogą okazać się łatwe, albo sugerujące posłużenie się kalkulatorami w sposób świadomy. I chyba nawet nie będzie uczniom przeszkadzało, że sama sytuacja jest surrealistyczna, bo przecież często mamy korki na jezdniach i nikt nie troszczy się o dostarczenie wody uwięzionym w samochodach podróżnym.

A jaka jest rzeczywistość?

Opisane powyżej sytuacje są możliwe do przeprowadzenia, dlatego trochę dziwi częsty opór związany z ich realizacją. Argument – na ogół taki sam: „nie mam czasu na takie zabawy, muszę realizować program". Czy jednak rzeczywiście sytuacje, w których sam przebieg zajęć jest taki, że uczniowie są „kreatywni", sami czują się odpowiedzialni za podawane propozycje i sposoby rozwiązywania zadania stoi w sprzeczności z możliwością realizowania treści programowych? Chyba te dwie rzeczy można spokojnie pogodzić, warto uwierzyć, że warto.

Jak jednak wskazują badania (Białek i in., 2013, s. 157) sytuacja, gdy uczniowie mogą sami wymyślać zadania, wcale nie jest taka częsta. Ten problem też był badany na różnych poziomach edukacyjnych. Obrazuje to poniższy diagram.



Rysunek 4. Wymyślanie własnych zadań matematycznych przez uczniów, w świetle badań. Źródło: IBE 2013, Raport z badań Szkoła Samodzielnego Myślenia, s.157.

OTWARTOŚĆ NA UCZNIÓW

Można zadać pytanie – czy uczniowie potrafią działać kreatywnie, czyli – czy rzeczywiście potrafią wymyślać swoją własną matematykę? Wiemy, że tak. Może to dotyczyć zarówno znajdywania własnych strategii dla rozwiązania zadania nietypowego, jak i dla wymyślania takich sposobów prowadzenia na przykładobliczeń, które są całkiem inne niż te proponowane w klasie. Wystarczy nie spieszyć się zbytnio z pokazywaniem „gotowej matematyki". Istnieje wiele sposobów i zadań, w których warto dać dzieciom swobodę w poszukiwaniu strategii rozwiązujących. Warto zasugerować posługiwanie się dodatkowymi pomocami (żetonami, liczmanami, modelami), samodzielne tworzenie rysunku – to się sprawdza na każdym poziomie edukacyjnym. Dyskusja różnych rozwiązań jest wielkim atutem tak prowadzonych zajęć. Nie tylko zmusza uczniów do samodzielnego formułowania swoich wypowiedzi, a pozostałych – do krytycznego słuchania, prowokowania do argumentowania. To jest również okazja do realizacji hasła „społecznego charakteru uczenia się", z wszelkimi cechami działania w grupie. Popatrzmy choćby na takie zadania, znów dotyczące różnych poziomów edukacyjnych.

Przykłady z poziomu edukacji wczesnoszkolnej

1 W tabeli są wypisane wszystkie dodawania do 10. Przyjrzyj się tabeli. Czy wiesz, jak była budowana?

0 + 0	1 + 0	2 + 0	3 + 0	4 + 0	5 + 0	6 + 0	7 + 0	8 + 0	9 + 0	10 + 0
0 + 1	1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1	5 + 1	6 + 1	7 + 1	8 + 1	9 + 1	
0 + 2	1 + 2	2 + 2	3 + 2	4 + 2	5 + 2	6 + 2	7 + 2	8 + 2		
0 + 3	1 + 3	2 + 3	3 + 3	4 + 3	5 + 3	6 + 3	7 + 3			
0 + 4	1 + 4	2 + 4	3 + 4	4 + 4	5 + 4	6 + 4				
0 + 5	1 + 5	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 5					
0 + 6	1 + 6	2 + 6	3 + 6	4 + 6						
0 + 7	1 + 7	2 + 7	3 + 7							
0 + 8	1 + 8	2 + 8								
0 + 9	1 + 9									
0 + 10										

- Co mają ze sobą wspólnego dodawania w żółtych okienkach?
- Co zauważasz w działaniach w zielonych okienkach?
- Co jeszcze zauważasz w tej tabeli?

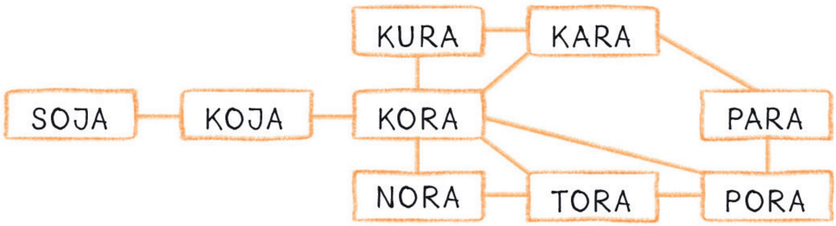
Rysunek 5. Zadanie dla uczniów klasy I dotyczące poszukiwania związków. Źródło: Sawicka, Swoboda, 2020b, s. 118.

Analizowanie tabelki często jest wyzwaniem dla uczniów nauczania wczesnoszkolnego: jest dużo danych, nie wiadomo na co patrzeć. Dlatego warto podać kilka pytań naprowadzających, ukierunkowujących na szukanie związków, prawidłowości. Czy można na tej podstawie formułować jakieś ogólne prawidła? Czy można odpowiadać na pytania: dlaczego? Czy można doszukiwać się innych związków, podobnych do tych obowiązujących na wyróżnionych polach? Odpowiedź „tak” na każde z tych pytań jest chyba oczywista.

Jeszcze jeden przykład. To zadanie – wbrew pozorom – wcale nie jest zadaniem z zakresu edukacji polonistycznej. Opiera się na wykorzystaniu tzw. permutacji bąbelkowej[1], chociaż ani nauczyciel, ani uczeń nie muszą znać tego pojęcia. Podstawowym zagadnieniem, które jest kierowane do uczniów, związane jest z umiejętnością działania w oparciu o regułę. Trzeba jednak zastosować tę regułę w nowej dla siebie sytuacji, a rozwiązania są nieoczywiste.

[1] Pomysł zadania sugerowany jest pracą prof. Michała Szurka *Kolorowa matematyka*. Pracę tę udostępnił mi w maszynopisie profesor Szurek z sugestią wykorzystania w początkach pandemii, kiedy jeszcze nie mieliśmy pomysłów jak pracować w systemie online (zasoby własne autorki).

Michał bawił się w grę, w której wymyślał krótkie, 4-literowe wyrazy różniące się tylko 1 literą. Potem zapisywał każdy wyraz. W ten sposób stworzył taką siatkę powiązań. Wskaż w wyrazach litery, które zostały zmienione.



Rysunek 6. Zadanie dla uczniów klas III dotyczące działania zgodnie z regułą. Źródło Sawicka, Swoboda, 2022a, s. 7.

I w tym zadaniu rola dziecka nie musi się ograniczać do realizacji polecenia. Świetnie nadaje się ono do dalszego budowania siatki powiązań, do zmieniania reguł (co na przykład ze słowami pięcioliterowymi; a może poszukajmy słów z obcego języka, który znamy…). Takich zadań, w których sukces opiera się na własnej pomysłowości, otwartości, chęci poszukiwań bez obawy o popełnienie błędu (a któż z nas nie popełnia błędów!), można znaleźć sporo. Dobrze, że pojawiają się one w podręcznikach, że są sugerowane nauczycielom. Trzeba tylko, by nauczyciele chcieli z nich korzystać.

Propozycja lekcji matematyki w technikum w klasie drugiej

W ramach poszukiwań pomysłów na inspirujące zagadnienia matematyczne kierowane do uczniów techników mechanicznych, została przeanalizowania sytuacja problemowa, w której wyraźnie sugeruje się związek między zagadnieniami praktycznymi a matematyką traktowaną jako narzędzie do rozwiązywania tych problemów[2]. Do przeprowadzenia badania użyto zadania o zagadnieniu typowo technicznym, które umożliwiło przyjęcie odpowiedniego modelu matematycznego, i rozwiązanie go za pomocą dosyć prostych i znanych uczniom narzędzi matematycznych. Rozwiązanie zadania wymagało dodatkowo umiejętności czytania ze zrozumieniem i interpretacji fragmentu instrukcji budowlanych, odnoszącego się do rzeczywistych przepisów:

[2] Przykład pochodzi z niepublikowanej pracy magisterskiej pana Piotra Marka, napisanej pod moim kierunkiem na Uniwersytecie Rzeszowskim w 2016 r. Tytuł pracy: *Aktywność matematyczna uczniów techników w trakcie rozwiązywania praktycznych problemów*. Treść zadania jest autorstwa pana Piotra Marka.

– Mechanik chce zaprojektować dla własnych potrzeb najazd dla samochodów osobowych, ułatwiający prace remontowe, składający się z rampy (na rysunku poniżej) oraz pochylni pozwalającej na wjazd. Chcąc uwzględnić maksymalne nachylenie pochylni, odwołał się do przepisów budowlanych:
- „Maksymalne nachylenie pochylni związanych z budynkiem nie może przekraczać wielkości określonych poniżej.
- Pochylnie – pierwsza wartość – na zewnątrz bez przykrycia, druga – wewnątrz budynku lub pod dachem:
  - ► Dla samochodów w garażach indywidualnych – **25%**/25%

Wiedząc, że mechanik przyjmie maksymalne nachylenie oraz 1% oznacza wzniesienie o 1 cm wysokości na 1 m długości oblicz długość pochylni. Pod jakim kątem będzie usytuowana pochylnia w stosunku do podłoża?

Po obliczeniu długości pochylni mechanik chce wzmocnić ją metalową belką. Jak usytuować wzmocnienie? Oblicz jego długość.

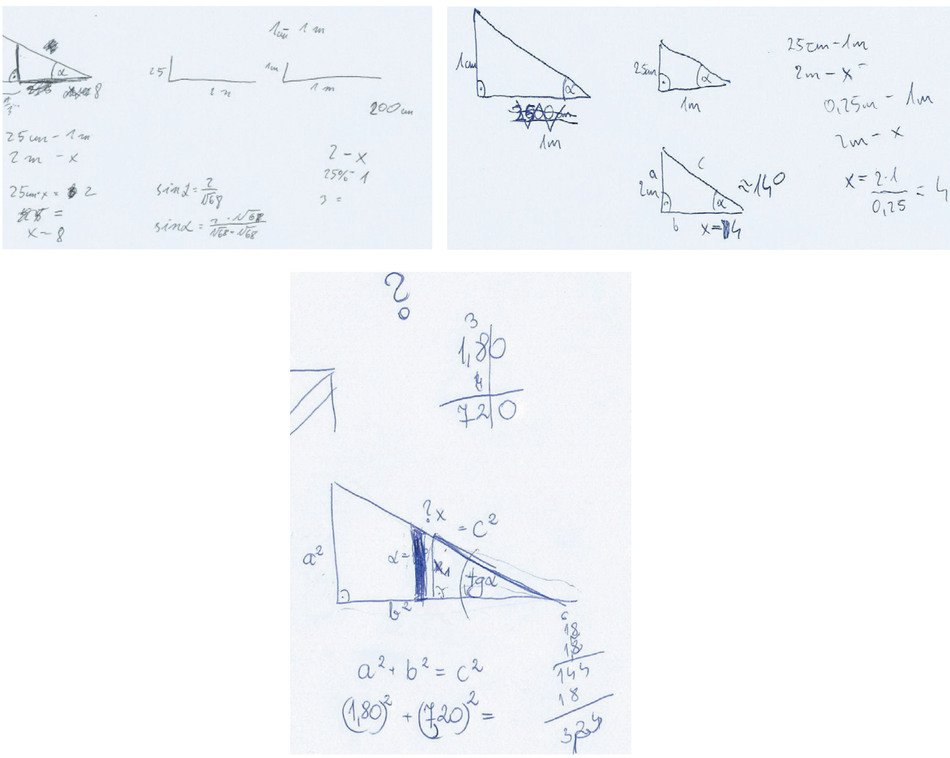
Rysunek 7. Zdjęcia obrazujące problem zadania dotyczącego najazdu. Źródło: Marek, 2016.

W sformułowaniu tego problemu zostały wykorzystane rzeczywiste przepisy budowlane w takim brzmieniu, w jakim występują. Łatwo można zauważyć, że nie są to określenia znane z lekcji matematyki.

Podczas pracy nad tym zadaniem uczeń musi sam podjąć pewne decyzje:

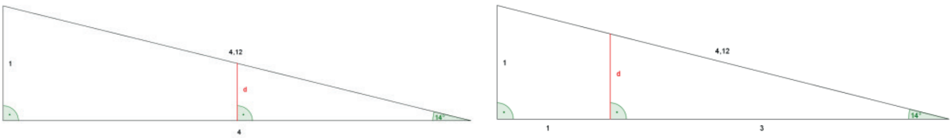
- Pierwsza decyzja: przyjęcie odpowiednich długości na potrzeby budowy najazdu. Kryteriami mogą być:
  - wysokość najazdu,
  - długość podjazdu,
  - miejsce, którym dysponujemy.
- Następny etap to obliczenie długości pochylni, czyli w wypadku przyjętego modelu matematycznego – obliczenie długości przeciwprostokątnej w trójkącie.

Pomimo początkowego zaskoczenia, a więc sytuacji, w której trzeba przyjąć własne kryteria i zinterpretować przepisy, uczniowie bardzo szybko znaleźli się w tej sytuacji. Potrafili zinterpretować przepis podający w procentach nachylenie, samodzielnie przyjęli założenia dotyczące długości. Podczas wykonywania obliczeń sami decydowali jakie elementy wiedzy matematycznej będą dla nich korzystne.

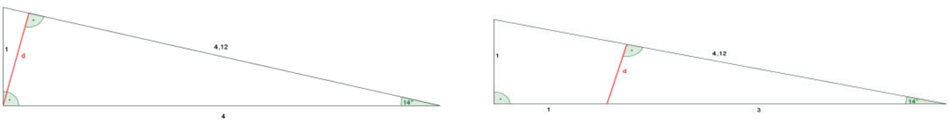


Rysunek 8. Przykłady uczniowskich obliczeń związanych z zadaniem o projektowaniu najazdu.
Źródło: Marek, 2016.

Dopasowanie belki wzmacniającej, a więc w przyjętym modelu – odcinka w trójkącie, było kolejnym szokiem dla uczniów. Jak to zostało przedstawione na poniższych rysunkach, można było przyjąć różne rozwiązania. Uczniowie musieli się zdobyć na decyzję – które z tych rozwiązań jest sensowne.



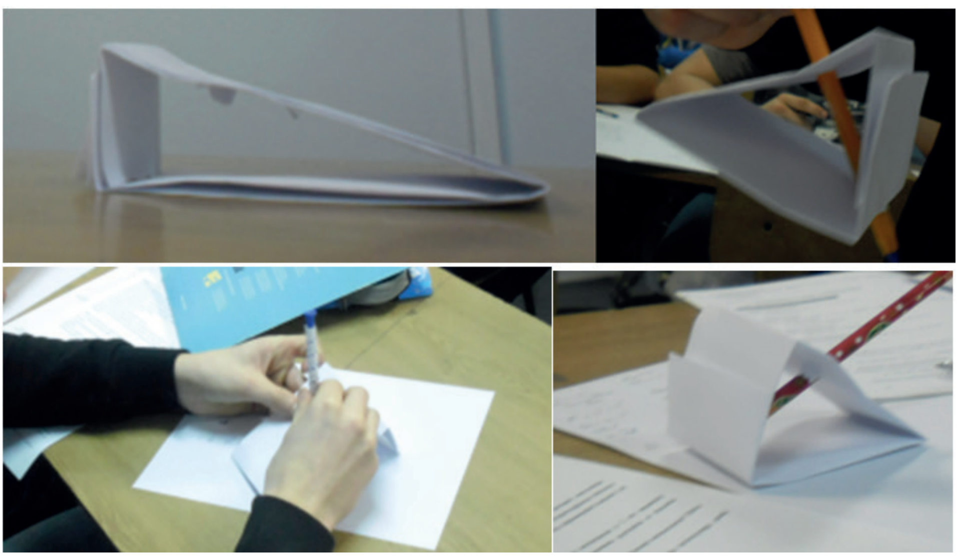
A, B



C, D

Rysunek 9. Różne możliwości dotyczące umiejscowienia belki wzmacniającej w zadaniu o projektowaniu najazdu. Źródło: Marek, 2016.

Z pomocą przyszła możliwość skorzystania z prostego modelu.



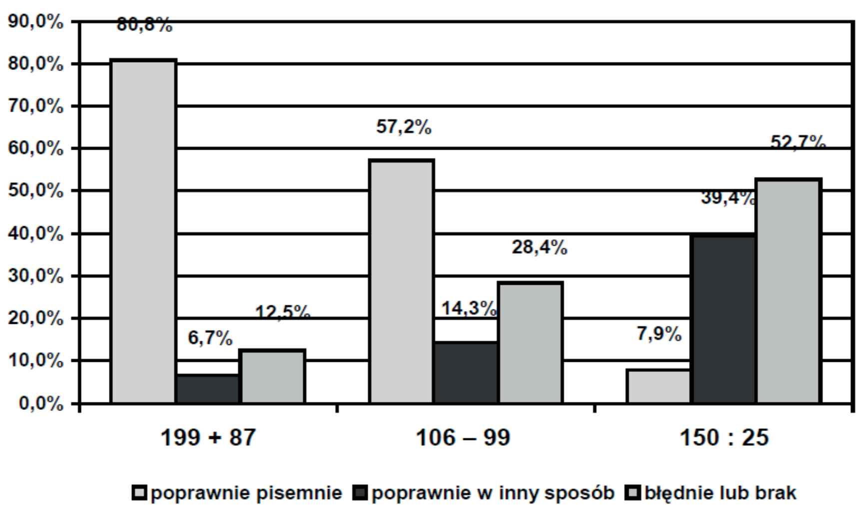
Rysunek 10. Tworzenie przez uczniów modeli dotyczących umiejscowienia belki wzmacniającej w zadaniu o projektowaniu najazdu. Źródło: Marek, 2016.

W kilku sytuacjach uczniowie sami stwierdzali, że pewne rozwiązania warto odrzucić. Na przykład sytuacja przedstawiona na rysunku 9C nie jest gwarantem, że dostawiona belka będzie wzmacniała najazd, gdyż długość (wyliczona!) belki tylko nieznacznie różni się od długości przyprostokątnej, zaś punkt podparcia najazdu jest bardzo blisko od punktu w którym najazd się kończy.

Ponad połowa badanych uznała, że powinno się częściej rozwiązywać zadania realistyczne, a sama lekcja była ciekawa. Niestety, sama nauczycielka, która na co dzień pracuje z tymi uczniami, nie podzielała optymizmu. Jej zadaniem – nie ma czasu na takie eksperymenty.

Wyniki badań prowadzonych na dużej populacji

Argumentem wspierającym przekonanie, że uczniowie potrafią samodzielnie myśleć, niezależnie od narzucanych im reguł, pokazują wyniki zebrane w ramach badań prowadzonych przez Instytut Badań Edukacyjnych. Niektóre z tych wyników analizował M. Dąbrowski (2007). Okazało się, że nawet przy tradycyjnych zagadnieniach realizowanych w szkole z pomocą algorytmów (dodawanie i odejmowanie pisemne) część dzieci zastosowało swoje własne sposoby „sprytnego liczenia" (rysunek 6). Można te wyniki interpretować, podkreślając elementy niekorzystne (dzieci myślących samodzielnie jest niewiele), albo znajdując w nim potwierdzenie pozytywnych postaw (niezależnie od całego systemu szkolnego są w szkołach dzieci myślące samodzielnie, budujące swoje własne strategie rozwiązywania problemów).



Rysunek 11. Strategie stosowane przez uczniów klasy III przy wykonywaniu działań na liczbach trzycyfrowych i dwucyfrowych. Źródło: Dąbrowski, 2007, s. 36.

Warto tutaj podkreślić jedną ważną rzecz – nauczyciel powinien stwarzać odpowiednią atmosferę – taką, w której uczeń odważy się działać po swojemu, eksperymentować. Bo przecież w sytuacji poszukiwania własnych sposobów nie zawsze uczeń znajdzie ten sposób który oszołomi i klasę, i nauczyciela. W sytuacji poszukiwań nieuniknione są błędy. Jak łatwo wtedy zawstydzić ucznia! Czy taki uczeń, który został napiętnowany za popełnienie błędu, będzie dalej chciał być poszukiwaczem?

CO Z UMIEJĘTNOŚCIĄ ZORGANIZOWANIA SYTUACJI UCZENIA SIĘ?

Wcześniej przytoczone przykłady na ogół są sprzeczne z odczuciami wielu nauczycieli, którzy narzekają na brak własnej inicjatywy uczniów na lekcjach. To nie jest problem jedynie polskiej szkoły. Jeżeli tak jest rzeczywiście, to warto zadać pytanie, dlaczego uczniowie nie chcą na nich myśleć (być kreatywni)? Podczas konferencji „Motivation via Natural Differentiation in Mathematics”, która odbyła się 2010 roku w Iwoniczu, Maarten Dolk (2010, s. 311) zacytował opinię jednego z amerykańskich nauczycieli odnośnie do niedostatków lekcji matematyki: „brak inicjatywy studentów, brak wytrwałości; brak zdolności przechowywania wiedzy; niechęć do zadań tekstowych; gorliwość w stosowaniu do reguł”[3]. Można się zastanawiać, skład to się wszystko wzięło? Na ile sama postawa nauczycieli nie wpłynęła na taki obraz zajęć?

Problem niewątpliwie jest złożony, ale bardzo istotny. Anna Baczko-Dombi (2017) w swoim artykule *Ucieczka od matematyki. Rekonstrukcja procesu w kontekście społecznego wizerunku przedmiotu* próbuje ustalić, gdzie zaczynają się problemy z aktywnością matematyczną. Powołuje się na szerokie badania międzynarodowe, w których brane są pod uwagę różne czynniki mogące teoretycznie wpływać na szkolny sukces w uczeniu się matematyki. Przyjmuje przy tym własną perspektywę badawczą – bada wpływ, jaki na postrzeganie matematyki szkolnej mają rodzice oraz nauczyciele, gdyż uważa, że są to dwa zasadnicze determinanty postawy uczniów w stosunku do matematyki.

> [Jednak] próba opisania mechanizmu oraz przebiegu odchodzenia od matematyki wymaga położenia większego nacisku na związek między społecznym postrzeganiem matematyki a przebiegiem procesu jej nauczania, czego nie obejmują badania osiągnięć, analizy indywidualnych problemów uczniów ani klasyczne stosowanie zmiennych społeczno-demograficznych. Kluczowa jest rola dwóch grup aktorów mających najsilniejszy wpływ na stosunek młodzieży do matematyki: nauczycieli i rodziców (Baczko-Dombi, 2017, s. 41).

---

[3] Ang.: „[…] lack of students initiative, lack of perseverance; lack of retention; aversion to word problems; and eagerness for formulas […]” – przekład własny.

Z wywiadów z maturzystami wyłania się ciekawy obraz, niestety – mocno obciążający szkołę i nauczycieli.

> Z wypowiedzi uczniów można wywnioskować, że brak umiejętności matematycznych nie jest cechą wrodzoną, a negatywny stosunek do przedmiotu nie wynika z rodzinnych tradycji. Świadczy o tym choćby sposób, w jaki maturzyści – nawet mający ogromne problemy z matematyką i negatywny do niej stosunek związany z powrotem obowiązku zdawania tego przedmiotu – opowiadali o pierwszych doświadczeniach z nim związanych. Pierwsze kontakty z matematyką określali jako radosne, ciekawe, ekscytujące. Bardzo ważne było ich zachowanie podczas tych wypowiedzi – zmianie ulegała mowa ciała i mimika, żywo gestykulowali (Baczko-Dombi, 2017, s.44).

Powołam się na inne polskie badania i własne obserwacje. Często w sytuacji, kiedy na zajęciach proponowane są zadania „do dyskusji", zadania prowokujące konflikt myślowy, czy zadania posiadające kilka różnych rozwiązań, nauczyciele z nich rezygnują. Argument? – zawsze ten sam: nie mam czasu na takie zabawy, muszę zrealizować program. Dla takich nauczycieli sytuacja kiedy szybko osiągnie się cel (na przykład rozwiązanie zadania tekstowego) jest sytuacją komfortową. Można to osiągnąć opierając się na współpracy z kilkoma wybranymi uczniami, którzy zawsze wszystko wiedzą, albo stosując reguły, podpowiadające sposób rozwiązania. W rezultacie zadanie (problem) jest rozwiązany, ale na jeden, często schematyczny, sposób.

Anna Żeromska (2013), w podsumowaniu swoich badań pisze między innymi:

> Chcę [jednak] podkreślić, że oprócz wiedzy, również system przekonań i poglądów (nie zawsze nawet uświadomionych) ma znaczący wpływ na rezultaty prowadzonej przez niego edukacji. Nauczyciel może przekazywać np. swoje negatywne lub pozytywne nastawienie do jakiegoś tematu, a tego najczęściej nie bierzemy pod uwagę. Z pozoru nauczyciel jest neutralnym ogniwem między matematyką a uczniem. Przyjmuje się, że nauczyciel może przyspieszyć i wspomóc proces uczenia się przez ucznia, może go spowolnić lub źle zorganizować, ale efekty tego procesu (w postaci zasobu wiedzy ucznia) są traktowane tylko w odniesieniu do ich poprawności matematycznej. Patrzymy na te efekty jakby nie powstawały w procesie społecznym, który ma na nie ogromny wpływ. A przede wszystkim zaniedbujemy wiedzę, emocje, nastawienie i przekonania nauczyciela, który oprócz wykształcenia matematycznego posiada różne doświadczenia, wyobrażenia i poglądy, mogące mieć wpływ na styl jego pracy i pozostawić trwały ślad w obrazie matematyki w umyśle ucznia (Anna Żeromska, 2013, s. 186).

Bardzo niepokojącym zjawiskiem jest spłycanie wymagań i oczekiwań w stosunku do dzieci na poziomie wczesnoszkolnym. Nie bierze się pod uwagę faktu, że to tutaj kształtuje się „to coś", co powinno charakteryzować podejście do matematyki jako ludzkiej aktywności. Panuje przekonanie, że szkolne zadania matematyczne nie mogą być zbyt trudne. Problem w tym, że pojęcie „trudne zadanie" jest bardzo rozmyte, niestety – często opinia taka kształtowana jest przez nauczycielki, a dotyczy zadań nietypowych, nowych, wymagających spokojnego rozważenia problemu, być może – wsparcia manipulacją czy odpowiednio zrobionym rysunkiem. To są zabiegi, które wymagają umiejętności zorganizowania sytuacji dydaktycznej prowadzącej do rozwiązania zadania – wymagają czasu na samodzielne poszukiwania, możliwości prowadzenia dyskusji, różnorodnej analizy. Równie częsty jest argument: ja muszę zrealizować cały podręcznik, za który zapłacili rodzice; nie mogę na jedno zadanie poświęcić całej lekcji. Koło się zamyka, bo wydawnictwa pedagogiczne, oferujące podręczniki szkolne, wykręcają się od zamieszczania zadań inspirujących do kreatywnego podejścia. Boją się, że takie podręczniki nie zostaną przez nauczycielki kupione.

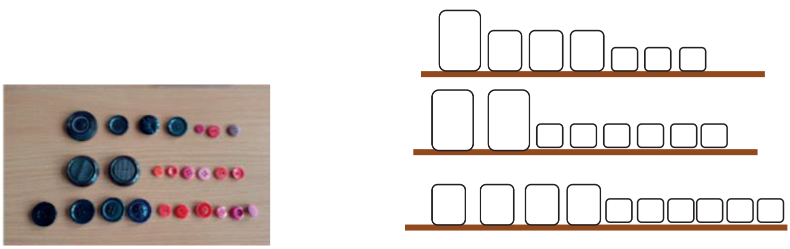
To nie są tylko teoretyczne dywagacje. Podaję przykład, którego sama doświadczyłam jako współautorka podręczników do wczesnoszkolnej edukacji matematycznej:

W podstawie programowej w dziale: *Osiągnięcia w zakresie stosowania matematyki w sytuacjach życiowych oraz w innych obszarach edukacji*, znajdują się zalecenia do realizacji:

(uczeń) *dzieli na dwie i cztery równe części, na przykład kartkę papieru, czekoladę; używa pojęć: połowa, dwa i pół, cztery równe części, czwarta część lub ćwierć; odmierza płyny; używa określeń: litr, pół litra, ćwierć litra;*

Realizując te zalecenia, w podręczniku do klasy III (Sawicka, Swoboda, 2022c) zaproponowałyśmy następujące zadanie:

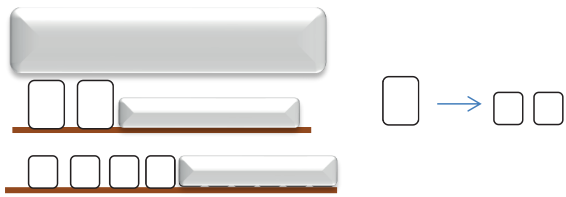
Babcia Jadzia robi pyszny dżem z dyni. Pakuje je do różnych słoiczków. Jaka jest pojemność każdego z tych słoików, jeżeli wiadomo, że na każdej półce jest zapakowane tyle samo dżemu, a najmniejszy słoik ma pojemność ¼ litra?



Rysunek 12. Szkic do zadania proponowanego do podręcznika do klasy III (Sawicka, Swoboda, 2022a) oraz interpretacja „guziczkowa" przedstawionej sytuacji

To zadanie można rozwiązywać w różny sposób. Można na przykład zbudować model „guziczkowy", zastępując słoiczki guzikami. Stworzenie takiego modelu daje możliwość wykonywania różnych manipulacji, co może się okazać dobrą metodą pracy nad tym zadaniem.

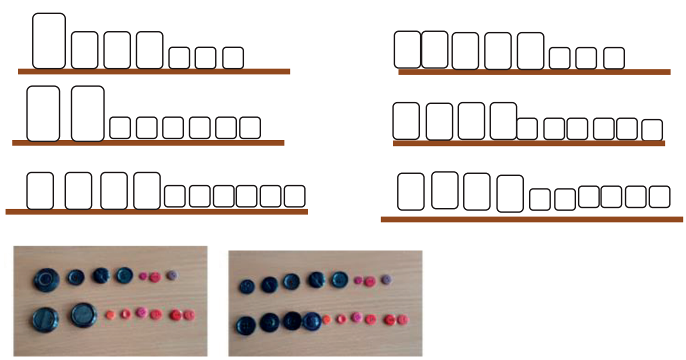
Trzeba przyjąć, że dla znalezienia rozwiązania najistotniejsze jest określenie zależności między pojemnością słoików różnej wielkości. Spróbuję zrobić symulację myślową ukierunkowaną na poszukiwanie związku między pojemnością słoiczków. Warto zauważyć, że te związki są dość czytelne na poziomie drugiej i trzeciej półki. Na obu tych półkach stoi 6 małych słoików, za to na drugiej są 2 duże, a na trzeciej 4 małe. Możemy odsunąć z obu półek te elementy, które się powtarzają (czyli 6 małych słoików), zostawiając tylko te, które są inne. Prowadzi to do prostego związku między słoikami największymi i średnimi:



Rysunek 13. Ilustracja pierwszego etapu rozwiązania zadania przedstawionego powyżej

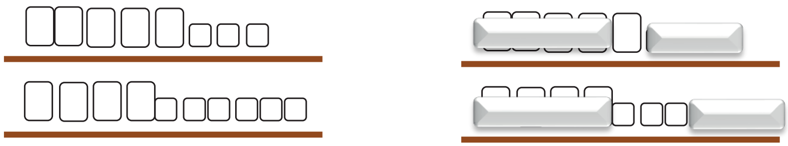
Rysunek 14. Interpretacja „guziczkowa" pierwszego etapu rozwiązania zadania

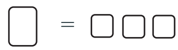
Ten związek można teraz dalej wykorzystać, redukując ilość różnych słoiczków. Na wszystkich półkach można zastąpić duży słoik dwoma słoikami średnimi.



Rysunek 15. Ilustracja drugiego etapu rozwiązania zadania przedstawionego powyżej oraz jego interpretacja „guziczkowa"

Postępując w ten sposób, doprowadzimy do sytuacji, w której druga i trzecia półka będą wyglądać tak samo. Porównajmy teraz pierwszą i drugą półkę. Zobaczmy, czym się różnią, bo to nam pomoże znaleźć związki między pojemnością słoika małego i średniego. Elementy, które się powtarzają, można ściągnąć lub zasłonić.

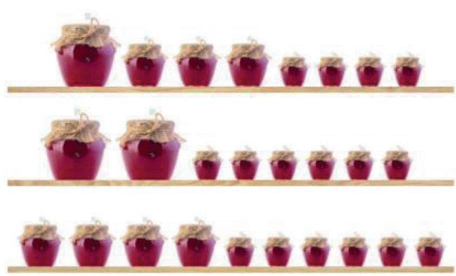


Widać teraz, że zachodzi zależność: 

Rysunek 16. Końcowy etap rozwiązania zadania, przedstawiona na rysunku oraz w interpretacji „guziczkowej”

Ponieważ znamy pojemność najmniejszego słoiczka (1/4 l), można określić pojemność słoiczka średniego i dużego. Zwłaszcza że takie określenia jak „pół litra”, „jeden i pół” są przewidziane w podstawie programowej.

Jakież było nasze zdziwienie, gdy w tekście przygotowanym do druku to zadanie zostało zmodyfikowane.



Rysunek 17. Wersja zadania, zamieszczona w podręczniku Sawicka, Swoboda, 2022c, s.16.

Niby mała rzecz – jeden słoiczek więcej na pierwszej półce! Najpierw sądziłyśmy, że jest to niedopatrzenie techniczne. Zwróciłam na to uwagę, zaproponowałam, w jaki sposób można pracować nad tym zadaniem. Niestety, odpowiedź jaką otrzymałam z redakcji, nie pozostawiała złudzeń co do celów ingerencji w autorską propozycję (podkreślenia moje):

> Dziękujemy za podanie sposobu rozwiązania tego zadania. Bardzo prosimy, aby Panie przemyślały jeszcze, czy nie można jednak zrezygnować z zadania **o takim stopniu trudności**. Wprowadzamy dopiero miarę pojemność ćwierć litra i **od razu wymagamy od dziecka tak skomplikowanego rozwiązania. Naszym zdaniem takie zadanie jest zdecydowanie za trudn**e. Patrzymy na ten temat całościowo. Jest to tylko jeden temat, dotyczący miar, a **zadań jest dużo, rozwiązanie ich wymaga czasu /omawianie, podawanie różnych sposobów rozwiązań, przedstawianie ich w wersji schematów, rysunków itp./** Na tej stronie są 3 zadania i jeśli omawiane zadanie będzie takie jak w korekcie Pań, żadne z zadań nie jest, naszym zdaniem, o średnim poziomie trudności. Każde z nich na poziomie klasy 3 powinno być oznaczone żarówką. Dlatego prosimy o rozważenie, czy jednak nie zachować zadania w obecnej wersji. Wtedy mały słoik to 1/4 l, średni to ½ l, duży to 1 l.

Poraża obawa, że problem jest „zdecydowanie za trudny". Zwłaszcza że nikt nie zdecydował się sprawdzić, jak sobie z takim zadaniem poradzą dzieci (już nie takie dzieci – 10-letni uczniowie, mający za sobą kilkuletni trening myślowy, 3 tygodnie przed zakończeniem nauki w klasie III). Wprowadzenie pojęcia „ćwierć litra" metodycznie powtarzało wprowadzenie innych ćwiartek, odbywało się czynnościowo przez podział połówki na dwie równe części. Było więc ćwiczeniem tej samej operacji na innym materiale. Z tego powodu nie powinno być traktowane jako pojęcie całkowicie nowe. Poraża również argumentacja – zarówno w tej części, w której wyrażono przekonanie, że zadań na stronie jest dużo (to tak, jakby każde z zaproponowanych zadań musiało być rozwiązane na lekcji), jak i w tej, że praca nad zadaniem wymaga czasu. Tak, jakby czas poświęcony myśleniu miał być limitowany. Wciąż nie jest brane pod uwagę, że wykorzystywane tutaj strategie rozwiązania zadania (manipulowanie, zastępowanie/podstawianie, poszukiwanie związków) były już wielokrotnie sugerowane w całym kursie proponowanego podręcznika. Jedną z metod pracy nad zadaniem, inną niż ta opisana, może być metoda prób, stawiania hipotez. Przypuśćmy, że uczeń założy, że średni słoik ma dwa razy większą pojemność niż mały, czyli jest półlitrowy, a duży ma pojemność dwóch średnich słoików, czyli jest litrowy. W wersji uproszczonej przez redakcję taka hipoteza nie prowadzi do sprzeczności, bo wtedy rzeczywiście na każdym poziomie jest tyle samo dżemu. W wersji autorskiej takie rozwiązanie się nie sprawdza, co z matematycznego punktu widzenia można nazwać obaleniem hipotezy. Dało by to okazję do przeżycia ważnego doświadczenia – przypuszczenie było niesłuszne, trzeba poszukiwać innego rozwiązania. Stawianie hipotez, ich weryfikacja, wyciąganie wniosków to elementy matematycznej kreatywności, której nie wolno uczniom zabierać w ich procesie uczenia się, na żadnym z edukacyjnych poziomów.

ZAKOŃCZENIE

Jednym z wciąż aktualnych haseł przyświecającym pracy dydaktyka jest hasło kierowane do nauczycieli: POZWÓLMY UCZNIOM MYŚLEĆ. Nie jest tak, że wielkie pomysły rodzą się w próżni. Najpierw trzeba prowadzić trening myślenia w ogóle, pozwalać na malutkie samodzielne kroczki, cieszyć się w klasie z każdego małego odkrycia. Zajęcia z edukacji matematycznej, pełne problemów do rozwiązania, stanowią znakomity poligon, na którym taki trening może się odbywać w sposób zupełnie naturalny. Ten zakres doświadczeń powinien być stopniowo rozszerzany, na dalszych poziomach edukacyjnych. Wprawdzie z czasem pojawiają się coraz bardziej skomplikowane matematyczne pojęcia, które trzeba dobrze „przećwiczyć”, ale to i tak nie zwalnia nas (nauczycieli!) od poszukiwania takich sytuacji, zadań, metod, w których uczeń nie będzie musiał podporządkowywać się narzuconym schematom działania, ale będzie miał możliwość własnych poszukiwań, własnych decyzji, własnych odkryć.

Moje wieloletnie doświadczenie w pracy pokazuje jednak, że tak się nie dzieje. Na ogół każda nowa propozycja metodyki jest odrzucana, w najlepszym przypadku – przyjmowana z dużą obawą. A najbardziej niezrozumiałe jest podejście, w którym nauka matematyki sprowadza się do wyćwiczenia pewnych elementów gotowej wiedzy. Wyćwiczenia, ale nie do twórczego wykorzystania tej wiedzy do rozwiązywania problemów.

BIBLIOGRAFIA

Baczko-Dombi, A. (2017). Ucieczka od matematyki. Rekonstrukcja procesu w kontekście społecznego wizerunku przedmiotu. *Edukacja*, *1*(140), 39–54.

Białek, K., Biedrzycki, K., Brożek, A., Czajkowska, M., Dobkowska, J., Dobosz, W., Grudniewska, M., Stanaszek, A., Wróbel, I., Zambrowska, M. (2013). *Raport z badania Szkoła Samodzielnego Myślenia*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Dąbrowski. M. (2007). *Pozwólmy dzieciom myśleć! O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dolk, M. (2010). Teachers Supporting Mathematical Development. W: B. Maj, E. Swoboda, K. Tatsis (red.), *Motivation via Natural Differentitation in Mathematics*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Gołębiowska, J. (2021). *Kreatorzy nowej kultury kawy w postindustrialnym mieście. Studium socjologiczne*. Rozprawa doktorska. Łódź: Uniwersytet Łódzki.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it?. *For the Learning of Mathematics*, *12*, 8–14.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.

Kozielecki, J. (1992). Myślenie i rozwiązywanie problemów. W: T. Tomaszewski (red.), *Psychologia ogólna*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Lenkiewicz, B., Sawicka K., Swoboda, E. (2010). *Raz, dwa, trzy, teraz my, Matematyka klasa 2 cz. 4*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Marek, P. (2016). *Aktywność matematyczna uczniów techników w trakcie rozwiązywania praktycznych problemów*. Niepublikowana praca magisterska napisana pod kierunkiem Ewy Swobody. Uniwersytet Rzeszowski.

Sawicka, K., Swoboda, E. (2020a). *Wielka Przygoda, Matematyka kl. I cz. 2*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka K., Swoboda E., (2020b), *Wielka Przygoda, Matematyka kl. I cz. 3*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka, K., Swoboda, E. (2022a). *Wielka Przygoda, Matematyka kl. III cz 2*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka, K., Swoboda, E. (2022b). *Wielka Przygoda, Matematyka kl. III ćwiczenia 2.* Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka K., Swoboda E., (2022c), *Wielka Przygoda, Matematyka kl. III ćwiczenia 4.* Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Żeromska, A.K. (2013). *Metodologia matematyki jako przedmiot badań antropomatematycznych*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego.

Część 2

BADANIA DYDAKTYCZNE, WNIOSKI Z BADAŃ

O LEPSZE ZROZUMIENIE PROCESU UCZENIA SIĘ MATEMATYKI PRZEZ UCZNIÓW

Prowokowanie matematycznego myślenia z wykorzystaniem metody „problemów tworzących” Ericha Wittmanna i kalkulatora graficznego lub programu komputerowego

Janina Duda

Małopolska uczelnia Państwowa im. rtm. Witolda Pileckiego w Oświęcimiu
janina.duda@mup.edu.pl
ORCID: 0009-0004-4930-650X

Streszczenie

Erich Wittmann proponuje metodę prowokującą uczniów do myślenia matematycznego, która jest oparta na wykorzystaniu tzw. „zadań tworzących”. W pierwszym etapie uczeń skupia się na rozwiązaniu takiego zadania, po którym jego myślenie i inwencja podnoszą się na „wyższy poziom energii”. W drugim etapie nauczyciel bezpośrednio lub pośrednio zachęca ucznia, wykorzystując odpowiedni tekst do formułowania pytań lub generowania nowych problemów. Zadanie wyjściowe staje się zatem źródłem nowych zadań, które uczniowie mogą formułować poprzez analogie, uogólnienia lub specyfikacje itd. Może być również źródłem rozpoznawanych przez uczniów nowych problemów, a także źródłem odkrywanych przez nich nowych twierdzeń, hipotez i dowodów. W artykule przedstawiono przykład takiego „zadania tworzącego” z wykorzystaniem do jego rozwiązania kalkulatora graficznego lub programu komputerowego, a także wnioski i efekty pracy uczniów o średnim poziomie zdolności z przeprowadzonych badań.

Abstract

Erich Wittmann proposes a method provokes the students to mathematical thinking based on the use of tasks which can be characterized as “generating problems” or “problem-sources”. In the first stage, the student focuses on solving such task, and his thinking and invention increase to a “higher level of energy”. In the second stage, the teacher encourages the student directly or indirectly by using a proper text to formulate questions or generate new problems. The initial task serves as a base for new problems which can to be formulated by the students through analogies, generalizations, or simplifications, etc. It is the source of the new problems which are recognized by the students, as well as the source of new theories, hypotheses and proofs discovered by them. The article presents an example of such a "generating problem" using a graphing calculator or a computer program to solve it, as well as the conclusions and effects of the work of students with an average level of ability based on their research.

WPROWADZENIE

Ważnym elementem procesu nauczania matematyki jest prowokowanie uczniów do myślenia matematycznego, które opiera się, jak pisze John Mason (2005), na następujących procesach: konkretyzacji[1], uogólnianiu, wysuwaniu hipotez i uzasadnianiu, a więc na działaniach o charakterze twórczym. John Mason określa matematyczne myślenie jako dynamiczny proces, który rozszerza rozumienie człowieka, gdyż pozwala mu radzić sobie z coraz bardziej złożonymi problemami. Zasadniczy wpływ na skuteczność matematycznego myślenia mają:

– „Umiejętność wykorzystania procesów używanych w badaniach matematycznych,
– Panowanie nad stanami psychicznymi i emocjonalnymi oraz umiejętność ich wykorzystania,
– Rozumienie odpowiedniej dziedziny matematyki, a jeśli to konieczne, również dziedziny, w której jest stosowana" (Mason, 2005, s. 143).

John Mason przywiązuje też wielką wagę do właściwej atmosfery poznawczej i emocjonalnej w czasie procesu matematycznego myślenia. Ta atmosfera, zwana przez niego „atmosferą matematycznego myślenia", jest warunkiem koniecznym, chociaż niewystarczającym do rozkwitu matematycznego myślenia. Pozwala ona, przy odpowiedniej ilości czasu, na swobodne stawianie pytań, rzucanie wyzwań i refleksji oraz powoduje i wzmacnia poczucie pewności siebie. Matematyczne myślenie może być zainspirowane przez wyzwanie, niespodziankę, sprzeczność, dostrzeżoną lukę w rozumieniu (Mason, 2005, s. 151–155).

Zofia Krygowska podkreśla, że „nie ma tematów banalnych, natomiast można je traktować w sposób dydaktycznie mniej lub więcej kształcący, mniej lub więcej pobudzający uczniów do samodzielnego myślenia, do postawy badawczej, stawiania pytań, do uświadamiania sobie przez nich różnych elementów matematycznej metody w działaniu" (Krygowska, 1977, s. 118). „Poligonem twórczego doświadczenia ucznia może być zwykłe zadanie, zadanie o charakterze ćwiczeniowym „pod warunkiem, że nie będzie on zaprawiany do poszukiwania rozwiązań jedy-

[1] Z. Krygowska (1977) używa określenia „specyfikacja", G. Polya (1975) używa określenia „specjalizacja". Specjalizacja jest to przechodzenie od rozpatrywania danego zbioru obiektów do rozpatrywania mniejszego ich zbioru albo nawet jednego z tych obiektów (Polya, 1964, s. 220).

nie wśród przyswojonych mu sztywnych schematów” (Krygowska, s. 125, 1977). Należy zatem z jednej strony dbać o to, aby uczeń przyswoił sobie pewne konieczne schematy czy też metody postępowania i umiał je stosować, a z drugiej strony czuwać nad tym, aby uczeń nie stał się ich niewolnikiem i potrafił się od nich oderwać, gdy jest to niepotrzebne lub nieekonomiczne.

Z. Krygowska podaje przykłady dwóch postaw intelektualnych uczniów rozwiązujących zadanie domowe (Krygowska, 1977, s. 139–140).

1) 14-letnia uczennica po zapoznaniu się na lekcji ze sposobami rozwiązywania przez podstawienie układu dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych rozwiązała w domu kilka zadanych układów, a następnie w ciągu kilku dni, z własnej inicjatywy, jeszcze następnych kilkadziesiąt takich układów, różniących się jedynie współczynnikami. Ogółem rozwiązała ich 100. Chwaliła się potem tą pracą, mówiąc: „przyjemne, bo samo się rozwiązuje”, „takie rzeczy lubię, bo to takie łatwe i mogłabym to robić bez końca”.
2) 9-letni uczeń miał za zadanie domowe zaproponować arytmetyczne „przedstawienia” liczby 17, na przykład: $17 = 10 + 7$; $17 = 20 - 3$; $17 = (100 - 20) : 4 + 2 - 10 : 2$. Matka przyszła do nauczyciela z pretensjami, bo dziecko zafascynowane tym zadaniem i chęcią wyczerpania wszystkich możliwości nie chciało iść spać, póki wszystkich nie znajdzie. Przerwało pracę dopiero w momencie, gdy zauważyło, że jest to niemożliwe.

W obu sytuacjach uczniowie podeszli z zapałem do odrobienia zadania domowego. Każde z nich zrobiło więcej, niż wymagał nauczyciel. W pierwszym przypadku uczennica z przyjemnością powtórzyła wielokrotnie te same czynności, nabywając coraz to lepszą sprawność w ich wykonywaniu, i tylko tę sprawność. Wypowiedź uczennicy, że „samo się rozwiązuje” świadczy o tym, że działania przeszły w fazę zautomatyzowania. Takie działania Z. Krygowska nazywa aintelektualnymi i pozorną aktywnością matematyczną. Można przypuszczać, że po pewnym czasie zostało wyłączone myślenie matematyczne. W drugim przypadku uczeń też rozwiązywał z pasją zadania na zadany temat, wymyślając kolejne i o coraz to większym stopniu trudności przykłady. Tej jego pracy towarzyszyła po pierwsze, chęć odpowiedzi na pytanie „Kiedy to się skończy?”, a po drugie „przyjemność właśnie w stwarzaniu sobie samemu trudności i ich pokonywaniu”. Tutaj możemy powiedzieć, że była to rzeczywista aktywność matematyczna, podczas której wykonywane rachunki były jedynie środkiem do osiągnięcia celu. Działaniom tego ucznia towarzyszyło myślenie matematyczne. Zofia Krygowska (1977, s. 101–102) pisze, że jednym z ważnych celów nauczania, a w szczególności nauczania matematyki jest rozwijanie rzetelnej „odwagi intelektualnej” (Krygowska, 1977, s. 101). Można ten cel osiągnąć poprzez „prowokowanie ucznia do formułowania hipotez, dla których znajduje on jakąś intuicyjną lub empiryczną motywację” (Krygowska, 1977, s. 101), niezależnie od tego, czy hipoteza okaże się prawdziwa i czy wyraża ważny lub mniej ważny fakt matematyczny. Badaczka zwraca też uwagę, że umiejętności dostrzegania problemów i właściwego formułowania pytań można i powinno się uczyć już od pierwszej chwili, gdy dziecko styka się z matematyką, nawet wtedy, gdy nie wychodzimy poza ramy tradycyjnej matematyki elementarnej. Należy jej uczyć stale i w każdej sytuacji.

METODA „PROBLEMÓW TWORZĄCYCH"

Jedną z metod prowokowania uczniów do myślenia matematycznego poprzez dostrzeganie problemów matematycznych i ich poprawne formułowanie, tzw. „metodę problemów tworzących" (Methode der erzeugenden Probleme), proponuje Erich Wittmann (1972). Jest to postępowanie polegające na przechodzeniu od zadań stereotypowych do coraz bardziej otwartych problemów poprzez „przedłużanie zadań". Musi ono odbywać się systematycznie, aby uczniowie przyzwyczaili się do takiej aktywności. Jej podstawą są starannie dobrane i przemyślane tzw. „zadania tworzące"[2]. W pierwszym etapie uczeń koncentruje się na rozwiązaniu wyjściowego zadania, a w drugim jest zachęcany przez nauczyciela lub poprzez odpowiedni tekst do formułowania pytań lub generowania nowych problemów. Zadanie wyjściowe staje się zatem źródłem nowych zadań, które powstają na drodze analogii, uogólnień, specyfikacji itd., a także może być źródłem odkrywanych przez uczniów nowych twierdzeń, hipotez i dowodów. Po rozwiązaniu wyjściowego zadania myślenie i inwencja ucznia podnoszą się na „wyższy poziom energii" i można ten fakt wykorzystać. Autor na podstawie swoich doświadczeń stwierdza, że początkowe warianty proponowane przez uczniów są bardzo banalne, ale dłuższe zajmowanie się tą samą sytuacją zwiększa zaufanie ucznia do samego siebie, do śmielszego formułowania niebanalnych pytań czy też problemów i poszerza jego horyzont matematyczny. Pojawić się mogą też problemy, których uczeń nie potrafi już rozwiązać i wtedy jest potrzebna pomoc nauczyciela. Może też się zdarzyć, że nauczyciel nie potrafi też tego nowego zadania rozwiązać bądź jego rozwiązanie nie jest znane. Organizowanie pracy uczniów „metodą problemów tworzących" jest, jak pisze Z. Krygowska (1977, c.3, s. 104) zabiegiem dydaktycznym opartym na realizmie dydaktycznym. Nauczyciel nie puszcza od razu ucznia na głęboką wodę, nie od razu poprzestaje na rzuceniu hasła „oto sytuacja, zastanów się nad nią". Doświadczenia pokazują, że przeciętny uczeń nie umie mimo takiej prowokacji stawiać pytań, nie dostrzega problemów.

Z punktu widzenia psychologii mamy tu do czynienia z **myśleniem dywergencyjnym,** które według Joya P. Guilforda (Nęcka, 2001) jest wytwarzaniem licznych

---

[2] Z. Krygowska (1977) „zadanie tworzące" nazywa też „zadaniem-źródłem".

pomysłów w odpowiedzi na problem natury otwartej, w odróżnieniu od **myślenia konwergencyjnego,** polegającego na poszukiwaniu jednego poprawnego rozwiązania. J.P. Guilford w badaniach nad myśleniem dywergencyjnym zaproponował ocenę ze względu na trzy kryteria: **płynność, giętkość i oryginalność. Płynność** jest zdefiniowana jako łatwość wytwarzania pomysłów, a **płynność ideacyjna** polega na wytworzeniu jak najwięcej rozwiązań problemu. **Giętkość** jest gotowością do zmiany kierunku myślenia; operacyjnym wskaźnikiem tej zdolności może być różnorodność pomysłów, czyli liczba kategorii do jakich można je zaliczyć. J.P. Guilford wyróżnia dwa rodzaje giętkości: spontaniczną, polegającą na niewymuszonej zmianie kierunku myślenia, i adaptacyjną, związaną z modyfikacją procesów myślenia pod wpływem konieczności dostosowania się do okoliczności lub warunków zadania. **Oryginalność** natomiast to zdolność do wytwarzania reakcji nietypowych, niezwykłych i niepowtarzalnych. Prostym kryterium oryginalności jest wskaźnik frekwencyjny. Pomysł uważa się za oryginalny, jeśli pojawił się tylko u określonej liczby osób badanych na przykład 5%, 1%. Kryteria płynność i giętkość odnoszą się do osoby, a oryginalność dotyczy wytworu.

Aktualnie zaprezentowana zostanie treść zadania tworzącego do rozwiązywania, którego zaplanowano użycie kalkulatora graficznego (programu komputerowego[3]) oraz przedstawione zostaną efekty pracy nad nim uczniów o przeciętnym poziomie zdolności. Zadanie to jest jednym z wykorzystanych w badaniach nad twórczością matematyczną uczniów uzdolnionych inspirowanych wykorzystaniem kalkulatora graficznego. Efekty pracy nad nim uczniów z 6-osobowej grupy badawczej były już dokładnie omówione w artykule *Odkrywanie matematyki z kalkulatorem graficznym (fragment badań)* (Duda, 2008). Ponieważ zadanie to może być adresowane do każdego ucznia badaniu dodatkowo poddani zostali również uczniowie o przeciętnym poziomie zdolności.

Cel badań sformułowano następująco: **Zbadanie i opisanie czy i w jaki sposób zastosowanie kalkulatora graficznego lub programu komputerowego może prowokować myślenie matematyczne uczniów podczas rozwiązywania „zadania tworzącego”.**

Realizacja tego celu wymagała udzielenia odpowiedzi na pytanie badawcze:

1) Czy kalkulator graficzny lub program komputerowy może być wykorzystany do inspirowania uczniów w zakresie podjęcia aktywności eksperymentowania, dostrzegania problemów, formułowania i weryfikowania hipotez czyli do prowokowania myślenia matematycznego?

---

[3] Może to być emulator kalkulatora graficznego na przykład program Manager PLUS for fx-9860 G Series Ver1.1 for Windows lub inny matematyczny program komputerowy.

2) Czy praca z kalkulatorem graficznym lub programem komputerowym może przyczyniać się do wzrostu entuzjazmu i wpływać na wytrwałość uczniów w generowaniu nowych wytworów (problemów)?

CHARAKTERYSTYKA GRUPY BADANYCH OSÓB

Badana grupa składała się z sześciu uczniów o przeciętnym poziomie zdolności i wywodzących się z dwóch klas trzecich gimnazjalnych, w których był realizowany jeden z popularnych programów nauczania matematyki. Uczniowie ci sami zgłosili się na dodatkowe zajęcia z matematyki z kalkulatorem graficznym. Badania były przeprowadzone w drugim półroczu klasy trzeciej gimnazjum. Wyniki uczniów z matematyki na świadectwie gimnazjalnym były co najmniej dobre, ale ani jeden z nich nie miał żadnych osiągnięć z matematyki. Dla tych uczniów było to pierwsze zadanie, które wymagało samodzielnego formułowania wniosków i pierwsze zetknięcie z kalkulatorem graficznym. Ich pracę poprzedził stosowny instruktaż dotyczący obsługi kalkulatora graficznego w zakresie umiejętności określonych zadaniem.

ORGANIZACJA I NARZĘDZIA BADAWCZE

Każdy z uczniów otrzymał kalkulator graficzny CFX – 9850 GB PLUS i kartę pracy z treścią zadania, pustymi „okienkami" i miejscem na notatki. Każdy z uczniów pracował samodzielnie. Na rozwiązanie zadania uczniowie mieli 60 minut. Po upływie tego czasu i oddaniu karty pracy uczniowie wypełniali ankiety. W ankiecie w ciągu 15 minut należało udzielić odpowiedzi na 6 pytań dotyczących rozwiązywanego zadania.

Narzędzia badawcze stanowiły: karty pracy, ankiety, arkusz obserwacji.

Poniżej podana jest **treść zadania**[4], które rozwiązywali uczniowie.

Rozwiąż za pomocą kalkulatora graficznego następujące układy równań:

$a)\ \begin{cases} 18x + 19y = 20 \\ 21x + 22y = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1252x + 1253y = 1254 \\ 1255x + 1256y = 1257 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -24x - 23y = -22 \\ -21x - 20y = -19 \end{cases}$

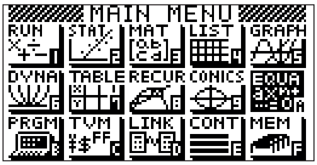
Co zauważyłeś? Sformułuj odpowiedni wniosek i spróbuj go uzasadnić. Spróbuj zbudować inne układy równań o pewnych szczególnych własnościach. Pracę z kalkulatorem zanotuj dokładnie w okienkach.

---

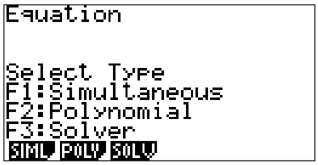
[4] Pomysł wykorzystania układu równań z dwiema niewiadomymi i ciągu arytmetycznego w odniesieniu do jego współczynników pochodzi z artykułu *Układy równań z kalkulatorem graficznym* (Skurzyński, 1998).

ANALIZA PRACY UCZNIÓW

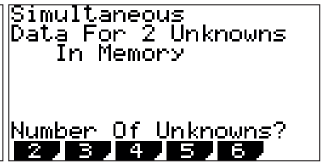
Żaden z uczniów nie miał trudności z rozwiązywaniem układów równań za pomocą kalkulatora graficznego. Uczniowie najpierw kolejno rozwiązywali każdy z podanych układów i sporządzali notatkę na karcie pracy. Rysunki od 1 do 6 przedstawiają poszczególne etapy pracy uczniów nad rozwiązaniem układu wymienionego w punkcie a), natomiast rysunek 7. przedstawia przykładową notatkę sporządzoną przez Hanię.



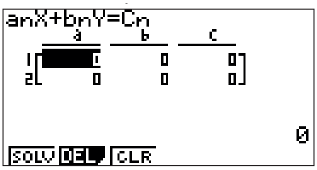
Rysunek 1.



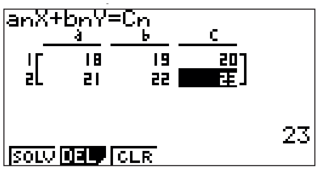
Rysunek 2.



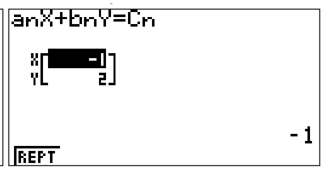
Rysunek 3.



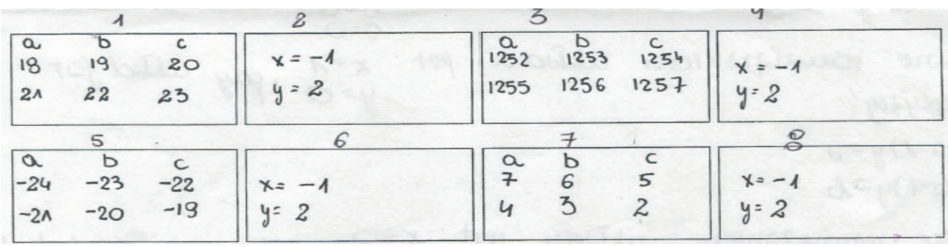
Rysunek 4.



Rysunek 5.



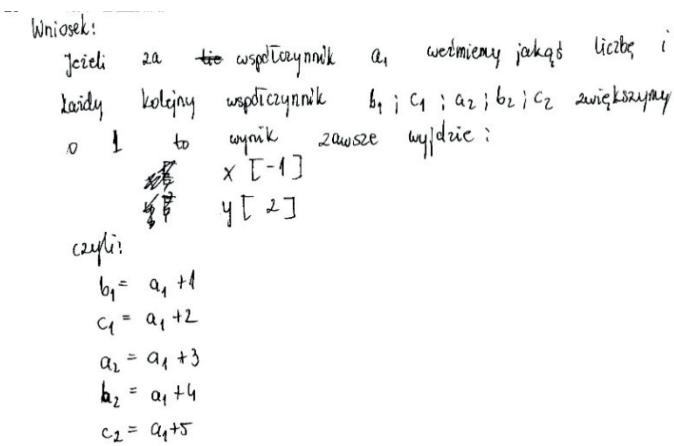
Rysunek 6.



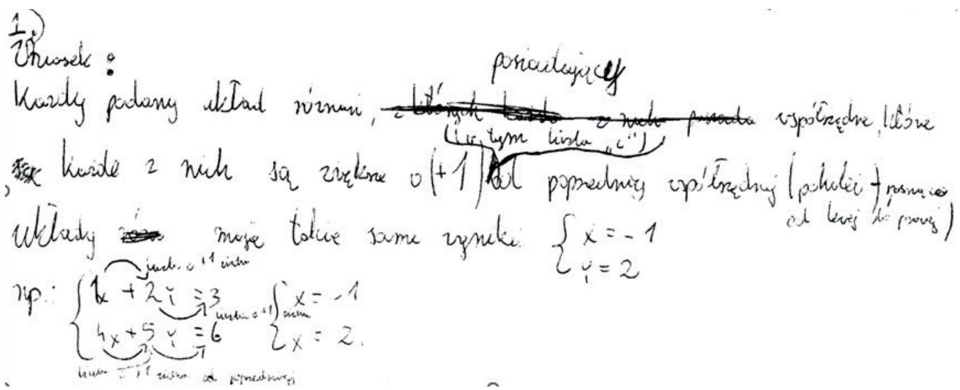
Rysunek 7. Kopia notatek Hani

Po rozwiązaniu trzech podanych układów równań okazało się, że każdy z nich ma to samo rozwiązanie: i . Wszyscy uczniowie zauważyli, że kolejne współczynniki każdego z układów różnią się o 1. Tę zależność uczniowie, z wyjątkiem Agnieszki i Hani, sprawdzili na innych przykładach za pomocą kalkulatora graficznego. Wszyscy z nich, z wyjątkiem Natalii, zgodnie z poleceniem sformułowali wówczas stosowną hipotezę, zapisując ją na miarę swoich możliwości. Natalia natomiast po przeprowadzeniu serii innych prób, sformułowała hipotezę ogólniejszą uwzględniającą również tę sytuację szczególną. Pięciu uczniów z wyjątkiem Grzegorza zastosowało zapis słowny. Żaden z uczniów nie podjął próby weryfikacji teoretycznej, poprzestając na weryfikacji empirycznej, zarówno do wniosku sformułowanego na podstawie podanych w treści zadania układów równań, jak i układów wymyślonych przez siebie.

Rysunki 8, 9, 10 przedstawiają przykładowe prace, w tym Natalii.



Rysunek 8. Kopia notatek Grzegorza



Rysunek 9. Kopia notatek Tomasza

Jeżeli

$a<b<c$

$a>b>c$ i liczby te zwiększają się ~~ze~~ (bądź zmniejszają) zawsze o tę samą wartość to rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi są zawsze liczby -1;2. Własność ta nie działa przy równaniach z większą ilością niewiadomych.

Rysunek 10. Kopia notatek Natalii

W dalszej części omawiania pracy uczniów przyjęta została następująca umowa: układ postaci $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ jest zapisywany jako ciąg współczynników $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$. Używane też będą pojęcia: ciąg, ciąg arytmetyczny, których uczniowie nie znali i nie stosowali.

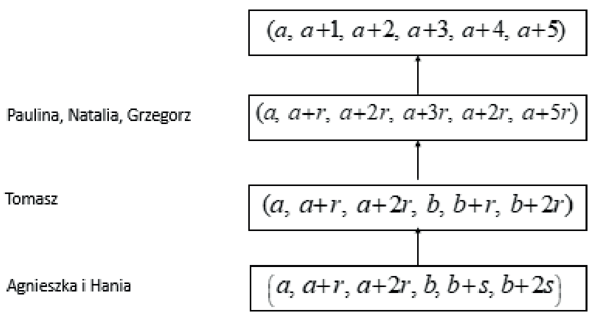
Następnie wszyscy uczniowie z wyjątkiem Tomasza zaczęli sprawdzać, jakie będzie rozwiązanie, gdy współczynniki będą różniły się o inną stałą wartość dodatnią lub ujemną. Tomasz natomiast po sprawdzeniu, że ta różnica może też wynosić 1 zajął się przypadkiem ogólniejszym, współczynniki każdego z równań układu są ciągami arytmetycznymi o tej samej różnicy, ale współczynniki całego układu nie tworzą ciągu arytmetycznego. Zaskoczeniem dla niego był fakt, że rozwiązaniem za każdym razem była ta sama para liczb $x = -1$ i $y = 2$. W zasadzie od tego momentu prawie każdy z uczniów zainteresował się innym typem układu. Agnieszka i Hania zrobiły jeszcze większe uogólnienie niż Tomasz, gdyż sprawdziły, że rozwiązanie układu się nie zmieni, gdy różnice ciągów arytmetycznych ciągów współczynników obu równań układu będą różniły się od siebie. Natalia badała wpływ na rozwiązanie układu równań znaku „minus" postawionego przed niektórymi współczynnikami ciągu $(a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r, a + 5r)$. Tomasza zainteresowały układy postaci $(a, b, a + b, c, d, c + d)$. W trakcie tej 60-minutowej pracy w grupie pojawiły się też inne pomysły.

Na podstawie notatek uczniów (zaobserwowano, że uczniowie zgodnie z poleceniem wpisywali na kartę pracy każdy rozwiązywany przez siebie układ równań) sporządzona została tabela przedstawiająca wszystkie badane i zapisane przez nich typy układów równań:

Tabela 1. Typy układów badanych przez uczniów

Lp.	Badane układy	Natalia	Paulina	Tomasz	Agnieszka	Hania	Grzegorz
1.	$\boldsymbol{(a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5)}$						
2.	$(a, a-1, a-2, a-3, a-4, a-5)$	x	x	x		x	x
3.	$(a, a+r, a+2r, a+3r, a+4r, a+5r)$	x	x		x	x	x
4.	$(a, a+1, a+2, a, a-1, a-2)$	x	x				
5.	$(a, a+r, a+2r, b, b+r, b+2r)$			x			
6.	$(a, a+r, a+2r, b, b-r, b-2r)$	x	x	x			
7.	$(a, a+r, a+2r, b, b+s, b+2s)$				x	x	
8.	$(a, a+r, a+2r, a+2r, a+r, a)$						x
9.	$(-a,a+r,a+2r,-(a+3r),a+4r,a+5r)$	x					
10.	$(a,-(a+r),a+2r,a+3r,-(a+4r),a+5r)$	x					
11.	$(a,a+r,-(a+2r)\ a+3r,a+4r,-(a+5r)\ )$	x					
12.	$(a,a+2r,a+r,b,b+2r,b+r)$			x			
13.	$(a,b,a+b,c,d,c+d)$			x			
14.	$(a,a+b,b,c,c+d,d)$			x			
15.	$(2a,a,4a,a,4a,2a)$		x				
16.	$(a,10\ a,100a,b,0{,}1b,0{,}01b)$		x				

Uczniowie, rozwiązując to „zadanie tworzące", zostali sprowokowani do aktywności twórczych, takich jak wysuwanie hipotez (wniosków), weryfikacji empirycznej i uogólniania, czyli do matematycznego myślenia. Hipoteza (wniosek) sformułowana na podstawie układów równań z rozwiązywanego „zadania tworzącego" była uogólniana stopniowo, co pokazuje poniższy schemat.



Schemat 1. Proces uogólniania dokonanego przez uczniów

Uogólnienie nastąpiło też dla układu równań o ciągu współczynników wymyślonego przez Paulinę i Natalię. Tomasz natomiast uogólnienie rozpoczął od innej wartości r. Uczniowie nie podjęli już dalszych uogólnień na przykład:

$$\boxed{(a, a+1, a+2, a, a-1, a-2)}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{(a, a+r, a+2r, a, a-r, a-2r)}$$
$$\uparrow$$
Paulina, Natalia, Tomasz $\boxed{(a, a+r, a+2r, b, b-r, b-2r)}$

Schemat 2. Proces uogólniania dokonanego przez uczniów

Ponieważ żaden z tych uczniów nie podjął nawet próby weryfikacji teoretycznej, postanowiono dokonać ich oceny pod względem płynności ideacyjnej, giętkości i oryginalności. Przyjmuje się następujące definicje:

Definicja 1. (Płynności ideacyjnej)

Płynność ideacyjna wymyślonej przez ucznia hipotezy (pomysłu) mierzona jest liczbą naturalną dodatnią wyrażającą stopień ogólności tej hipotezy, rozumiany jako liczba wynikających z niej hipotez szczegółowych badanych przez uczniów.

Uwaga: Jeśli uczeń sformułował najpierw hipotezę szczegółową na przykład dla układu $(a, a+1, a+2, a, a-1, a-2)$, a potem hipotezę ogólniejszą dla $(a, a+r, a+2r, b, b-r, b-2r)$, to jego płynność ideacyjna jest oceniona tylko za hipotezę ogólniejszą.

Definicja 2. (Giętkości)

Giętkość mierzona jest liczbą kategorii, do których pomysły można zaliczyć.

Definicja 3. (Oryginalności)

Pomysł jest oryginalny, jeśli pojawił się tylko u jednej osoby z całej grupy i wówczas mierzony jest liczbą 1.

Tabela 2. Określenie płynności ideacyjnej i kategorii układów badanych przez uczniów

Lp.	Badane układy	Płynność ideacyjna	Kategorie
1.	$(a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5)$		
2.	$(a,\ a-1,\ a-2,\ a-3,\ a-4,\ a-5)$	1	K1
3.	$(a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,\ a+5r)$	2	K1

cd. tab. 2

4.	$(a,\ a+1,\ a+2,\ a,\ a-1,\ a-2)$	1	K2
5.	$(a,\ a+r,\ a+2r,\ b,\ b+r,\ b+2r)$	3	K2
6.	$(a,\ a+r,\ a+2r,\ b,\ b-r,\ b-2r)$	3	K2
7.	$(a,\ a+r,\ a+2r,\ b,\ b+s,\ b+2s)$	4	K2
8.	$(a, a+r, a+2r, a+2r, a+r, a)$	2	K2
9.	$(-a,\ a+r,\ a+2r,\ -(a+3r),\ a+4r,\ a+5r)$	1	K3
10.	$(a,\ -(a+r),\ (a+2r),\ a+3r,\ -(a+4r),\ a+5r)$	1	K3
11.	$(a,\ a+r, -(a+2r),\ a+3r,\ a+4r,\ -(a+5r))$	1	K3
12.	$(a,\ \ a+2r,\ a+r,\ b,\ b+2r,\ b+r)$	2	K4
13.	$(a,\ b,\ a+b,\ c,\ d,\ c+d)$	1	K5
14.	$(a,\ a+b,\ b,\ c,\ c+d,\ d)$	1	K5
15.	$(2a,\ a,\ 4a,\ a,\ 4a,\ 2a)$	1	K6
16.	$(a{,}10\ a{,}100a{,}b{,}0{,}1b{,}0{,}01b)$	2	K6

Zgodnie z przyjętymi definicjami oceniono uczniów pod względem płynności ideacyjnej, giętkości i oryginalności. Okazało się, że w każdym z tych kryteriów najlepszy okazał się Tomasz, który wymyślił najwięcej hipotez, w szczególności oryginalnych, należących do różnorodnych kategorii, uzyskując wyniki prezentowane w poniższej tabeli.

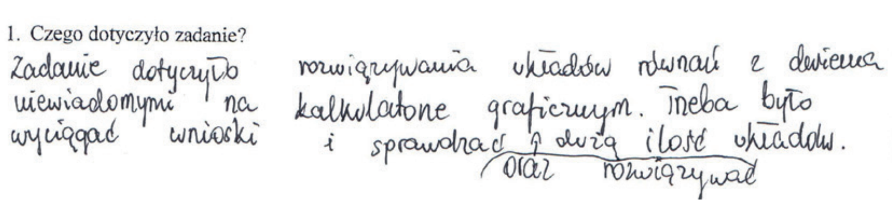
Tabela 3. Ocena uczniów pod względem płynności ideacyjnej, giętkości i oryginalności

Imiona uczniów	Płynność ideacyjna	Giętkość	Oryginalność
Natalia	8	3	3
Paulina	8	3	2
Tomasz	11	4	4
Agnieszka	6	2	0
Hania	6	2	0
Grzegorz	4	2	1

ANALIZA ANKIET UCZNIÓW

Wypełnienie ankiety wymagało od uczniów refleksji na temat własnej aktywności.

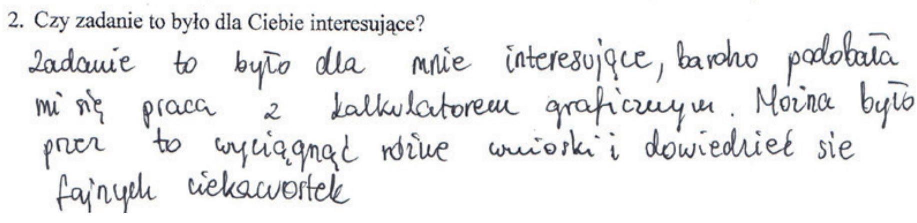
Na pytanie: „Czego dotyczyło zadanie?”, 4 uczniów napisało, że zadanie dotyczyło rozwiązywania układów równań z kalkulatorem graficznym. Jedynie Grzegorz napisał „Trzeba było wyciągać wnioski i sprawdzać dużą ilość układów”, a Tomasz „Zadanie dotyczyło wykonywania działań na kalkulatorze graficznym i znalezienia podobieństw w zadaniach a), b), c)”.


1. Czego dotyczyło zadanie?

Zadanie dotyczyło rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi na kalkulatorze graficznym. Trzeba było wyciągać wnioski i sprawdzać oraz rozwiązywać dużą ilość układów.

Rysunek 11. Kopia notatek Grzegorza

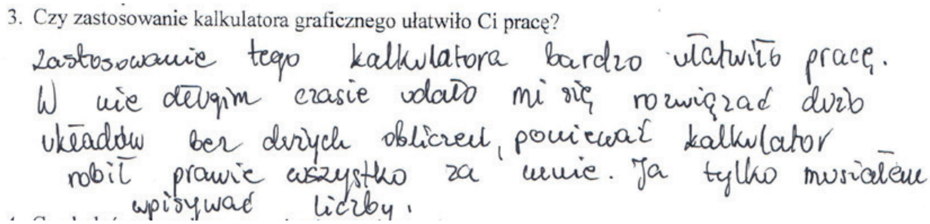
Na pytanie „Czy zadanie to było dla Ciebie interesujące?” wszyscy uczniowie odpowiedzieli pozytywnie. Mimo iż nie było pytania o powody, trzech uczniów uznało za stosowne o tym napisać, Paulina, że „Było to coś nowego, przy czym trzeba było trochę pomyśleć, aby znaleźć równania o szczególnym znaczeniu.”, Agnieszka, „[…] mogłam się zabawić – w wymyślanie najprzeróżniejszych układów, których bez kalkulatora nie chciało by mi się liczyć”, a Grzegorz „ […] bardzo podobała mi się praca z kalkulatorem graficznym. Można było przez to wyciągać różne wnioski i dowiedzieć się fajnych ciekawostek”.


2. Czy zadanie to było dla Ciebie interesujące?

Zadanie to było dla mnie interesujące, bardzo podobała mi się praca z kalkulatorem graficznym. Można było przez to wyciągnąć różne wnioski i dowiedzieć się fajnych ciekawostek

Rysunek 12. Kopia notatek Grzegorza

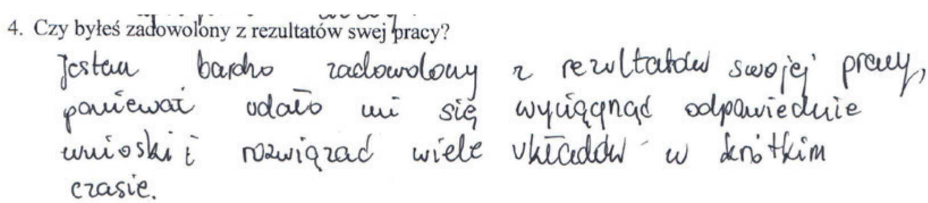
Na kolejne pytanie „Czy zastosowanie kalkulatora graficznego ułatwiło Ci pracę?” również wszyscy uczniowie odpowiedzieli pozytywnie. Wypowiedzi niektórych uczniów: „Tak, bo rozwiązywanie trudnych układów równań bez kalkulatora byłoby bardzo czasochłonne” (Natalia); „Tak bardzo mi ułatwiło,[…] gdyż człowiek ma prawo do popełniania błędów” (Agnieszka); „W niedługim czasie udało mi się rozwiązać dużo układów bez dużych obliczeń, ponieważ kalkulator robił prawie wszystko za mnie […]” (Grzegorz).


3. Czy zastosowanie kalkulatora graficznego ułatwiło Ci pracę?

Zastosowanie tego kalkulatora bardzo ułatwiło pracę. W nie długim czasie udało mi się rozwiązać dużo układów bez dużych obliczeń, ponieważ kalkulator robił prawie wszystko za mnie. Ja tylko musiałem wpisywać liczby.

Rysunek 13. Kopia notatek Grzegorza

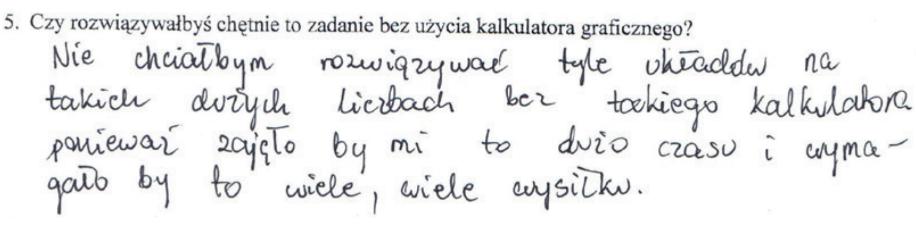
Z rezultatów swojej pracy byli zadowoleni wszyscy uczniowie, a Grzegorz podkreślił „[…] udało mi się wyciągnąć odpowiednie wnioski […]”.


4. Czy byłeś zadowolony z rezultatów swej pracy?

Jestem bardzo zadowolony z rezultatów swojej pracy, ponieważ udało mi się wyciągnąć odpowiednie wnioski i rozwiązać wiele układów w krótkim czasie.

Rysunek 14. Kopia notatek Grzegorza

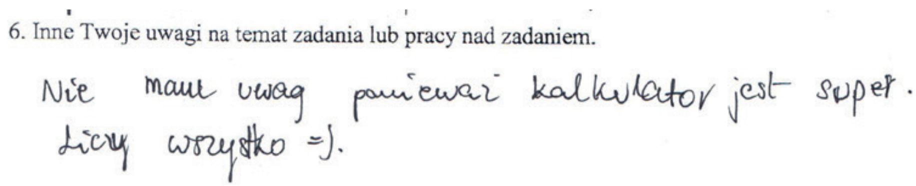
Na pytanie „Czy rozwiązywałbyś chętnie to zadanie bez użycia kalkulatora graficznego?” 5 uczniów napisało, że nie, wymieniając przy tym następujące powody: zbyt czasochłonne, nudne, wymagające zbyt dużo wysiłku, nie chciało by mi się rozwiązywać samej tylu przykładów, zbyt dużo liczenia. Jedynie Paulina napisała, że tak, ale gdyby miała więcej czasu.


5. Czy rozwiązywałbyś chętnie to zadanie bez użycia kalkulatora graficznego?

Nie chciałbym rozwiązywać tyle układów na takich dużych liczbach bez takiego kalkulatora ponieważ zajęło by mi to dużo czasu i wymagało by to wiele, wiele wysiłku.

Rysunek 15. Kopia notatek Grzegorza

Ankieta kończyła się zapisaniem uwag na temat pracy nad zadaniem. Tu wypowiedzieli się jedynie Natalia i Grzegorz. Natalia napisała, że „pozwalało zbadać różne ciekawe przypadki i własności układów równań”, a Grzegorz „[…] kalkulator jest super. Liczy wszystko =)”.


6. Inne Twoje uwagi na temat zadania lub pracy nad zadaniem.

Nie mam uwag ponieważ kalkulator jest super. Liczy wszystko =).

Rysunek 16. Kopia notatek Grzegorza

PODSUMOWANIE

Na podstawie szczegółowej analizy notatek uczniów i wypełnionych przez nich ankiet udzielono odpowiedzi na pytania badawcze.

1. **Czy kalkulator graficzny lub program komputerowy może być wykorzystany do inspirowania uczniów w zakresie podjęcia aktywności eksperymentowania, dostrzegania problemów, formułowania i weryfikowania hipotez czyli do prowokowania myślenia matematycznego?**
   Sformułowano następujące wnioski:
   - wszyscy badani uczniowie w czasie całej swojej pracy nad zadaniem, korzystali z kalkulatora graficznego i trybu pracy EQUA, rozwiązując za pomocą tego narzędzia każdy z podanych lub wymyślonych przez siebie układów równań;
   - zastosowanie kalkulatora graficznego pozwoliło im skupić się na problemie, a nie na żmudnych i uciążliwych rachunkach;
   - wszyscy badani uczniowie sformułowali, na miarę swoich możliwości, wymagany w treści zadania wniosek (hipotezę). Jego weryfikację empiryczną przeprowadziło czterech uczniów, z wyjątkiem Agnieszki i Hani, które uznały, że 3 przypadki są wystarczające do sformułowania wniosku. Żaden z uczniów nie podjął próby weryfikacji teoretycznej;
   - kalkulator graficzny pozwalał uczniom szybko weryfikować empirycznie swoje hipotezy;
   - wszyscy uczniowie zostali sprowokowani do matematycznego myślenia poprzez dostrzeganie zależności, formułowanie hipotez, przeprowadzanie weryfikacji empirycznych i uogólnianie.

2. **Czy praca z kalkulatorem graficznym lub programem komputerowym może przyczyniać się do wzrostu entuzjazmu i wpływać na wytrwałość uczniów w generowaniu nowych wytworów (problemów)?**
   Dla wszystkich uczniów zadanie było interesujące, ale pięciu uczniów napisało, że nie chciało by im się go rozwiązywać bez użycia kalkulatora graficznego, gdyż rozwiązywanie układów równań byłoby zbyt czasochłonne i nudne oraz można by było popełnić błędy. Wszyscy uczniowie byli bardzo aktywni, usatysfakcjonowani eksperymentowaniem i zadowoleni z odkrytych zależności. W ankiecie pisali, że rozwiązywanie tego zadania zmuszało do myślenia, było formą zabawy, pozwalało wyciągać wnioski i dowiedzieć się różnych ciekawostek na temat układów równań. Zastosowanie kalkulatora graficznego jako narzędzia do rozwiązywania układów równań wpłynęło zatem na wzrost entuzjazmu uczniów i zachęcało do eksperymentowania i generowania nowych wytworów.

Przykłady „zadań tworzących" adresowanych do uczniów uzdolnionych wraz z omówieniem efektów pracy uczniów z przeprowadzonych badań można znaleźć między innymi w publikacjach Janiny Dudy (2009, 2020).

BIBLIOGRAFIA

Duda, J. (2008). Odkrywanie matematyki z kalkulatorem graficznym. W: H. Kąkol (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki* (s. 175–187). Bielsko Biała: Forum Dydaktyki Matematyki.

Duda, J. (2009). Twórczość matematyczna uczniów uzdolnionych a kalkulator graficzny (fragment badań). *Annales Of The Polish Mathematical Society*, *Series V, Didactica Mathematicae*, *32*, 43–92.

Duda, J. (2020). Mathematical Transgressions Of Gifted Students Inspired By Using Information Technology. W: P. Błaszczyk i B. Pieronkiewicz (red.), *Different Perspectives on transgressions in mathematics and its educations*" (253–269). Kraków: Wydawnictwo Naukowe UP Kraków.

Krygowska, Z. (1977). *Zarys Dydaktyki Matematyki*. c. 3, Warszawa: WSiP.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2005). *Matematyczne myślenie.* Warszawa: WSiP.

Nęcka, E. (2001). *Psychologia Twórczości*. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Pedagogiczne.

Polya, G. (1964). *Jak to rozwiązać?*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Naukowe.

Skurzyński, K. (1998). *Układy równań z kalkulatorem graficznym*. „Nauczyciele i Matematyka" *26*, 12–16

Wittmann, E. (1971). *Komplementäre Einstellungen beim Problemlösen. Beträge zum Mathematikunterricht* (s. 288–296). Hannover: Schroedel.

Która droga jest dłuższa? – Intuicje 5-, 6-letnich dzieci związane z miarą i mierzeniem długości

Marta Pytlak

Uniwersytet Rzeszowski
mpytlak@ur.edu.pl
ORCID: 0000-0002-8100-6521

Streszczenie

Zagadnienie edukacji matematycznej w nauczaniu przedszkolnym jest w ostatnich latach częstym tematem rozważań dydaktyków i pedagogów. Znaczenie edukacji matematycznej dla ogólnego rozwoju dziecka jest podkreślane w zapisach podstawy programowej dla wychowania przedszkolnego (MEN 2017). Dzieci w wieku 5–6 lat są szczególnie otwarte na nowe doświadczenia edukacyjne. Mają naturalną zdolność do odkrywania i poznawania. Ponadto wiele aktywności, które podejmują w codziennym życiu, niesie w sobie duży potencjał do rozwijania intuicji w zakresie określonych pojęć matematycznych. Jednym z takich zagadnień jest miara i mierzenie długości. Powstaje więc pytanie: jak wspierać dzieci w rozwoju na tym etapie edukacyjnym? Jak wykorzystać ich naturalną chęć rozwoju do wzbogacania ich wiedzy matematycznej? Jak rozwijać posiadane intuicje związane z miarą i mierzeniem długości w celu ukształtowania pojęcia miary? Podjęte badania pilotażowe są próbą znalezienia odpowiedzi na te pytania.

Abstract

The issue of mathematical education in preschool teaching has been a frequent topic of consideration by educators and educators in recent years. The importance of mathematical education for the general development of the child is emphasized in the provisions of the core curriculum for preschool education (MEN 2017). Children aged 5-6 are particularly open to new learning experiences. They have a natural ability to explore and learn. In addition, many of the activities they undertake in their daily lives have great potential to develop intuition in specific mathematical concepts. One such issue is measuring length. So the question arises: how to support children in their development at this stage of education? How to use their natural desire to develop to enrich their mathematical knowledge? How to develop your intuitions related to measure and measuring length in order to shape the concept of measure? The pilot studies are an attempt to find answers to these questions.

The attitude of the children participating in the pilot studies and the results obtained are optimistic. The presented series of meetings with preschoolers and the series of tasks presented to them seems to be a good starting point for developing children's competences in the field of measurement and measuring. Detailed research on a much wider research group can verify this hypothesis and help to develop a didactic proposal for kindergartens and develop competence in the field of measuring and measurement in children.

WPROWADZENIE DO TEMATYKI

Edukacja matematyczna dzieci w wieku przedszkolnym staje się coraz częściej obiektem zainteresowań dydaktyków. Widać to po atencji, jaką cieszą się konferencje temu poświęcone. Znacznie wzrasta zainteresowanie udziałem w grupach tematycznych dedykowanym matematyce wieku dziecięcego (na przykład TWG03 Early Mathematics, CERME). Zauważana jest zależność między odpowiednim przygotowaniem przedszkolnym a gotowością (dojrzałością) szkolną (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009, 2012).

Edukacja matematyczna dzieci 5-, 6-letnich opiera się na dwóch filarach: arytmetyce i geometrii. W odniesieniu do arytmetyki głównie kształcone są kompetencje w zakresie liczenia, przeliczania oraz porównywania liczebności zbiorów. Dzieci w starszych grupach przedszkolnych dość dobrze radzą sobie z przeliczaniem zbiorów, z podaniem ich liczebności. W miarę sprawnie potrafią porównać zbiory. Z badań przeprowadzonych na tej grupie wiekowej wynika, że w zakresie kompetencji liczenia i porównywania osiągają oni poziom średni i wysoki (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). W zakresie geometrii edukacja przedszkolna skupia się przede wszystkim na rozpoznawaniu kształtu podstawowych figur (trójkąt, kwadrat, prostokąt, koło).

Matematyka przedszkolna nie powinna opierać się jedynie na liczbach. Bardzo istotna jest również geometria oraz zagadnienie miary. Dla dziecka nie jest to całkowicie nowe i nieznane pojęcie. Z pojęciem tym – nawet o tym nie wiedząc – spotyka się w codziennym życiu. Miara pozwala bowiem za pomocą liczb uporządkować świat wokół nas. W wielu opracowaniach podkreślane jest znaczenie miary i mierzenia (NTCM 2000). Brak jednak jest szerokich badań w tym zakresie, zwłaszcza dotyczących miary i mierzenia. Tymczasem zarówno geometria, jak i mierzenie dają nam spore możliwości do rozwijania kompetencji i uzdolnień dzieci. Jak piszą Marija van den Heuvel-Panhuizen i Kees Buys (2004, s.10):

> Zarówno pomiar, jak i geometria umożliwiają dzieciom nawiązywanie połączeń z codziennym środowiskiem. Obie dziedziny oferują narzędzia matematyczne, każda na swój sposób, służące do strukturyzacji świata fizycznego i zrozumienia go. Co więcej, oba prowadzą do zdumienia. Stąd rozwój dyspozycji matematycznej charakteryzuje się postawą odkryw-

czą, pewną wytrwałością w rozwiązywaniu problemów oraz wrażliwością na piękno struktur i rozwiązań matematycznych[1].

W nauczaniu ważne jest budowanie mostów pomiędzy poszczególnymi dziedzinami wiedzy. Miara i mierzenie mogą być takim mostem pomiędzy arytmetyką a algebrą.

Samo zagadnienie miary i mierzenia w ujęciu formalnym często jest dość trudne. Wymaga bowiem rozumienia operacji na poziomie konkretnym (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). Tymczasem dzieci w wieku 5–6 lat funkcjonują na poziomie przedoperacyjnym. Dopiero kształtują się u nich pierwsze ugrupowania – pojawia się rozumienie wielkości stałych i ilości. Zatem wprowadzanie dziecka w świat matematyki powinno odbywać się w najnaturalniejszy i najprzyjaźniejszy dla niego sposób. Rozwijanie umiejętności i kompetencji powinno odbywać się w działaniu, poprzez aktywny udział dziecka (jak jest to podkreślane w nauczaniu czynnościowym, Siwek, 1998).

W uczeniu się dzieci ważną rolę odgrywa intuicja. Nauczyciel w procesie nauczania powinien odwoływać się do intuicyjnego podejścia dziecka do matematycznych zagadnień. Wykorzystanie naturalnych przekonań może wspomóc proces nauczania.

Według Howarda Gardnera (2009) dzieci w wieku 5–6 lat nie mają jeszcze wyraźnie ukierunkowanych predyspozycji, wyraźnie dominującego rodzaju inteligencji wielorakiej. Poprzez odpowiednią pracę z dzieckiem, stymulowanie jego rozwoju można je odpowiednio kształtować. Ważne jest jednak, aby zdiagnozować naturalne intuicje posiadane przez dziecko i odpowiednio je wzmacniać w kierunku uzdolnień. A to przede wszystkim odbywa się poprzez dostarczanie dziecku okazji do zdobywania doświadczeń, do przeżywania, odkrywania.

Pierwsze doświadczenia dziecięce odnoszące się do miary i mierzenia związane są z porównywaniem. Dzieci porównują, które jest wyższe, które ma dłuższą stopę, kto zbudował większą wieżę. Powoli buduje się ich własne wyobrażenie na temat miary i mierzenia. Wykorzystanie tych naturalnych skłonności do porównywania może stanowić punkt wyjścia do ukierunkowanych aktywności w zakresie rozwijania kompetencji „mierniczych".

---

[1] Przekład własny. W oryginale: Both measurement and geometry enable children to make connections with their daily environment. Both domains offer mathematical tools, each in their own way, to structure the physical world and to get a grasp on it. Moreover, they both lead to wonderment. And thus to the development of mathematical disposition with is characterized by an exploring attitude, a certain perseverance in solving problems, and a sensitivity to the beauty of mathematical structures and solutions.

Sam proces mierzenia związany jest z kilkoma aspektami, o czym wspominają Kees Buys i Ed de Moor (2008). Wyróżniają oni bowiem: mierzenie przez porównywanie, mierzenie poprzez zastosowanie jednostki (standardowej bądź niestandardowej) oraz mierzenie poprzez zastosowanie odpowiednich narzędzi pomiarowych. Aby w pełni zrozumieć pojęcie miary dziecko powinno mieć możliwość przejścia przez wszystkie te trzy etapy. Tutaj bardzo ważne jest mocne odniesienie się do codziennych doświadczeń dziecka. Samo mierzenie nie powinno być traktowane i uczone jako oddzielna aktywność, ale raczej jako złożona kombinacja pojęć i umiejętności, które rozwijają się z biegiem czasu (Clements, Stephan, 2004). Aby dobrze rozwinąć u dzieci pojęcie miary i umiejętności mierzenia, należy stawiać przed nimi odpowiednio przygotowane „zadania-problemy pomiarowe" (Mac Donalds, Lowri, 2011).

W Polsce w nauczaniu przedszkolnym podczas zajęć z edukacji matematycznej bardzo dużo czasu poświęca się na zagadnienia związane z liczeniem. Dużo zabaw i zadań dotyczy liczenia, przeliczania. Zagadnienia geometryczne pojawiają się niejako „przy okazji". Zazwyczaj jest to rozpoznawanie figur, kształtów. Zagadnienia miary często są pomijane. Porównywanie obiektów raczej jest realizowane jako porównywanie liczebności zbiorów, a nie w kontekście mierzenia, długości, wielkości. Stąd też pojawił się pomysł zbadania kompetencji dzieci w zakresie miary i mierzenia długości.

OPIS BADAŃ

Opisane poniżej badania są częścią większego projektu dotyczącego rozumienia pojęcia miary i mierzenia długości przez dzieci w wieku przedszkolnym (5–6 lat). Badania zostały przeprowadzone w dwóch etapach: pierwszy to badania pilotażowe, a drugi badania właściwe. Na każdym z tych etapów postępowanie było bardzo podobne: najpierw badano, jakie intuicje i przekonania posiadają 5-, 6-letnie dzieci w zakresie miary i mierzenia długości. Następnie sprawdzano, jak dzieci wykorzystują posiadane intuicje podczas rozwiązywania zadań dotyczących mierzenia długości i porównywania ich. Po zakończeniu badań pilotażowych planowana jest ewaluacja narzędzia badawczego i dalsze jego testowanie. Celem całego projektu jest:

1) rozpoznanie dziecięcych intuicji dotyczących różnych aspektów miary i mierzenia długości;
2) zbadanie umiejętności dokonywania pomiarów i posługiwania się różnymi jednostkami miary;
3) rozwijanie kompetencji mierzenia i kształtowanie rozumienia pojęcia miary (w odniesieniu do mierzenia długości);

4) wypracowanie pewnych narzędzi i propozycji dydaktycznych wspierających rozumienia pojęcia miary.

Badania pilotażowe przebiegały następująco:

Krok 1. Najpierw została przeprowadzona diagnoza wszystkich biorących udział w badaniu uczniów w kontekście posiadanych intuicji i przekonań związanych z mierzeniem długości. W tym celu z każdym dzieckiem został przeprowadzony indywidualny wywiad diagnozujący, podczas którego rozwiązywało ono 3 zadania. Badacz rozmawiał z dzieckiem, ale nie oceniał jego odpowiedzi. Chodziło tutaj jedynie o zebranie informacji, co dziecko wie na temat mierzenia długości.

Krok 2. Podczas zajęć w grupach dzieci rozwiązywały wspólnie zadania dotyczące miary i mierzenia długości. Celem tych zajęć było wywołanie interakcji między dziećmi. Obserwowano wpływ różnych sposobów myślenia u poszczególnych dzieci na podejście do danego zadania i finalne rozwiązanie postawionego problemu. Wspólna dyskusja dzieci z badaczem miała na celu zwrócenie uwagi na istotne aspekty związane z miarą i mierzeniem długości oraz usystematyzowanie wiedzy na ten temat (co to znaczy zmierzyć długość, jak dokonać pomiarów, na co zwracać uwagę podczas mierzenia).

Krok 3. Przeprowadzenie zajęć, podczas których dzieci samodzielnie bądź w małych grupkach (3-, 4-osobowych) rozwiązywały zadania dotyczące mierzenia długości. Analiza pracy dzieci, obserwacja, czy nastąpiła zmiana ich podejścia do zagadnienia miary i mierzenia długości.

Krok 4. Analiza zebranego materiału badawczego. Przeprojektowanie aktywności wpierających rozwój kompetencji mierzenia długości i kształtowanie rozumienia pojęcia miary, przygotowanie do badania na szerszej grupie badawczej.

Po badaniach pilotażowych planowane są badania właściwe, których przebieg będzie zbliżony do badań z pierwszego etapu. Rozpoczną się one od indywidualnych wywiadów diagnozujących. Następnie dzieci przejdą przez serię spotkań w grupach, podczas których poprzez zabawę będą rozwijały swoje umiejętności w zakresie mierzenia długości. Kolejnym krokiem będą indywidualne testy sprawdzające rozumienie miary i mierzenia, a na zakończenie odbędą się zajęcia utrwalające poznane wiadomości.

Obecnie zakończone zostały badania pilotażowe, a także przeprowadzone badania diagnozujące wśród dzieci biorących udział w badaniach właściwych. W przygotowaniu są kolejne etapy z badań właściwych. W tym referacie będę przedstawiać wyniki badań pilotażowych.

Grupę badawczą podczas badań pilotażowych stanowiły dzieci w wieku 5–6 lat uczęszczające do publicznego przedszkola (18 osób w kroku 1. i 20 w następnych).

Badania pilotażowe miały pomóc znaleźć odpowiedź na następujące pytania:

1. Jakie intuicje i przekonania dotyczące mierzenia długości mają 5-, 6-letnie dzieci na etapie przed wprowadzeniem tego zagadnienia?

2. Jak dzieci dokonują pomiarów różnych obiektów, czy i jakich używają jednostek?
3. Czy dzieci potrafią porównywać różne obiekty ze sobą ze względu na określony ich wymiar (czy potrafią wypracować uniwersalną jednostkę, zasady dokonywania pomiarów)?
4. Czy dzieci potrafią zastosować poznane i wypracowane zasady dokonywania pomiarów podczas rozwiązywania zadań dotyczących mierzenia długości?

W tym artykule skupię się na przedstawieniu przebiegu badań pilotażowych oraz omówieniu uzyskanych tam wyników. Zebrane dane zostały przeanalizowane jakościowo. Szczegółowe wyniki badań pilotażowych z kroku 1 zostały zaprezentowane podczas konferencji SEMT (Pytlak, Maj-Tatsis, 2021).

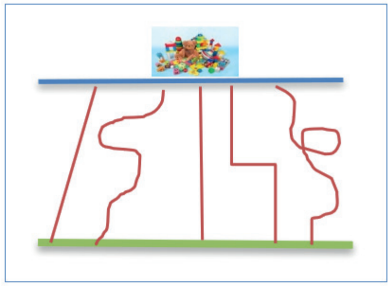
ORGANIZACJA I PRZEBIEG BADAŃ Z ETAPU 1.

Krok pierwszy w badaniach pilotażowych polegał na indywidualnych spotkaniach z dzieckiem. Przeprowadzona rozmowa miała za zadanie zidentyfikować intuicje, jakie dziecko posiada w zakresie mierzenia. Próbowano uzyskać odpowiedź na pytanie, co dla dziecka oznacza „zmierzyć". Interesowało nas również, w jaki sposób dzieci będą dokonywały porównywania długości dwóch obiektów (na przykładdwóch pociągów ułożonych z klocków), jakich narzędzi użyją, aby dokonać pomiaru długości (w jaki sposób będą chciały sprawdzić, który obiekt jest dłuższy).

Rozmowy odbywały się na terenie przedszkola, ale w odosobnionym miejscu, aby nic nie rozpraszało dzieci podczas pracy. Podczas tej rozmowy badacz przedstawiał badanemu kolejno trzy zadania do rozwiązania. Czas na rozwiązanie nie był limitowany, zazwyczaj jednak rozmowy te trwały do 10 minut. W trakcie pracy nad ich rozwiązaniem badacz prowadził rozmowę z dzieckiem, której celem było uzyskanie informacji odnośnie sposobu rozwiązania. Stawiane pytania miały raczej charakter informacyjny, a nie oceniający. Chodziło przede wszystkim o uzyskanie informacji od dziecka, a nie wartościowanie i ocenianie ich. Każda odpowiedź dziecka była uznawana za właściwą.

Zadania, jakie zostały zaprezentowane dzieciom podczas tego etapu badań były następujące:

Zad. 1. (Pomocnicze materiały: plansza oraz figurka postaci z klocków lego; badacz kładzie przez dzieckiem planszę, stawia na niej figurkę przedstawia historyjkę; kolejno zadaje pytania, czekając na reakcję dziecka).



Polecenie dla ucznia: Ania uwielbia bawić się zabawkami. Stoi na zielonej linii i chciałaby dostać się do swoich zabawek [fizyczne postawienie figurki na zielonej linii przez badacza]. Zastanawia się, którą drogę wybrać. Chce, aby była to najkrótsza. Pomóż Ani dokonać właściwego wyboru. Dlaczego właśnie ta droga jest najkrótsza? Czy można to jakoś sprawdzić?

Oczekiwane rezultaty: Dziecko jako właściwą wskaże ścieżkę trzecią, intuicyjnie odwołując się do jej prostopadłości względem linii startowej i końcowej.

Zad. 2. (Pomocnicze materiały: klocki jednakowej wielkości). Na stole leżą dwa stosy jednakowych co do wielkości klocków, w rozsypce, aby można było wyróżnić poszczególne elementy. Zbiory są różnoliczne.

Polecenie dla ucznia: Kuba i Jaś układali pociągi z kolorowych klocków. Tutaj są klocki Kuby, a tutaj Jasia. Jak myślisz, który z chłopców ułoży dłuższy pociąg ze swoich klocków? Dlaczego? Spróbuj ułożyć te dwa pociągi. Czy twoje przewidywania były słuszne? A jak można sprawdzić, który z ułożonych pociągów jest dłuższy?

Oczekiwane rezultaty: Dziecko wskaże stos z większa liczbą klocków, może odwołać się do liczebności zbiorów; układając dwa pociągi, ułoży je jeden pod drugim, zaczynając z jednej linii startowej.

Zad.3. (Pomocnicze materiały: dwa zestawy klocków różnej długości – klocki mają taką samą wysokość i szerokość, różnią się jedynie długością). Na stole leżą dwa zestawy klocków: krótsze i dłuższe. Krótszych jest więcej niż dłuższych, ale można z nich zbudować krótszy pociąg niż z dłuższych.

Polecenie dla ucznia: Ala i Kasia układały pociągi. Tutaj są klocki Ali, a tutaj Kasi. Jak myślisz, która dziewczynka zbuduje dłuższy pociąg? Dlaczego? Spróbuj ułożyć te dwa pociągi. Czy twoje przewidywania były słuszne? A jak można sprawdzić, który z ułożonych pociągów jest dłuższy?

Oczekiwane rezultaty: 1) dziecko wskaże zbiór dłuższych klocków jako ten, z którego zbuduje się dłuższy pociąg, a ułożenie elementów tylko potwierdzi tę hipotezę lub 2) dziecko wskaże zbiór krótszych klocków jako ten, z którego zbuduje się dłuższy pociąg, a ułożenie elementów i porównanie obiektów doprowadzi do zmiany zdania i odkrycia wniosku, że nie tylko liczba elementów składowych, ale również ich wymiar (tu: długość klocka) ma znaczenie.

Pierwsze zadanie dotyczyło intuicji „najkrótszej drogi" – że odległość między obiektami jest realizowana w kierunku prostopadłym. Zadanie drugie i trzecie dotyczyły umiejętności stawiania hipotez związanych z wyznaczaniem długości (oszacowanie, który pociąg będzie dłuższy) oraz ich weryfikacja i uzasadnienie swojego zdania. Chodziło również o sprawdzenie, czy porównując dwa obiekty, uczniowie będą ustalali „punkt startowy" i czy zwrócą uwagę na stosowaną jednostkę (tu: różna wielkość klocków).

Materiał badawczy stanowiły filmy nagrane podczas każdego ze spotkań oraz sporządzone na ich podstawie protokoły. Analizie podlegał sposób pracy dziecka uwieczniony na filmie oraz rozmowa z badaczem.

ANALIZA WYNIKÓW Z ETAPU 1.

Wstępna analiza materiału badawczego pokazała, że każde z dzieci biorących udział w badaniu rozwiązało wszystkie trzy zadania oraz starało się uzasadnić dokonywane przez siebie wybory. Zadanie pierwsze okazało się stosunkowo łatwe i tylko 3 uczniów na 18 udzieliło odpowiedzi innej niż oczekiwana. Większych trudności nie sprawiło również udzielenie poprawnej odpowiedzi na pytanie z zadania drugiego „który pociąg będzie dłuższy". Aż 17 na 18 osób wskazało, że z liczebniejszego zbioru ułoży się dłuższy pociąg. Wszystkie dzieci potrafiły również uzasadnić dokonany przez siebie wybór, odwołując się do liczby klocków traktowanych tutaj jako jednostka. W zadaniu trzecim początkowo tylko połowa uczestników podała poprawną odpowiedź, a blisko 1/3 nie potrafiła jej uzasadnić – zazwyczaj na pytanie „dlaczego" odpowiadali „nie wiem". Po ułożeniu obu pociągów następowała weryfikacja tej pierwszej hipotezy. Wówczas dzieci zmieniały zdanie (poza jednym przypadkiem) i podawały poprawną odpowiedź na pytanie „to który pociąg będzie dłuższy". Pojawiało się również uzasadnienie „bo te klocki są większe/dłuższe".

ANALIZA WYNIKÓW ZADANIA 1.

Wybierając „najkrótszą drogę" w zadaniu pierwszym, uczniowie najczęściej wskazywali linię trzecią. Wśród uzasadnień dominowało „bo jest prosta". Takiej odpowiedzi udzieliło 8 dzieci. Inne uzasadnienia to „bo jest krótka" – 2 osoby, „bo jest szybka" – 2 osoby. Tylko trzy osoby nie potrafiły uzasadnić swojego wyboru. Wskazywane przez dzieci uzasadnienia mogą świadczyć o tym, że dominujący był tu aspekt wizualny. Dziecko widziało, która droga jest krótsza. Mogło dokonać wizualnego porównania. Rysują się też intuicje odnośnie odległości między obiektami. Dzieci czują, że ta „najkrótsza droga" jest realizowana na kierunku prostopadłym, ale z oczywistych względów nie potrafią tego wyrazić, czy też odpowiednio matematycznie uzasadnić. Stąd też określenia takie jak „jest prosta", odnoszące się do intuicji prostopadłości. O tym, że tak właśnie można to zinterpretować świadczyć może następujący fakt. Na sugestię, że ścieżka numer jeden również jest prosta, uczniowie odpowiadali: ale ta jest bardziej prosta. Zatem nie sam kształt ścieżki (linia prosta), ale raczej jej położenie względem linii początkowej i końcowej miało znaczenie.

Ex: Którą drogę wybierze?

W2: Tą [wskazuje trzecią ścieżkę].

Ex: A dlaczego tę?

W2: Bo jest najszybsza droga i jest prosta.

Ex: Ale ta też jest prosta [wskazuje na pierwszą ścieżkę].

W2: [Chwila zastanowienia, po czym zdecydowanie] Nie, tą pójdzie [wskazuje trzecią ścieżkę], ta jest najkrótsza.

Dzieci, które wskazały błędne ścieżk,i argumentowały swój wybór następująco: „bo ma taką pętelkę" (w przypadku ścieżki nr 5), „bo jest szybka/najkrótsza". Podczas rozmowy z badaczem, po sugestii że może inna ścieżka jest krótsza, dwoje dzieci zmieniło zdanie.

Ex: […] Którą drogę wybierze?

M3: [Wskazuje ścieżkę nr 1] Tą.

Ex: A dlaczego?

M3: Bo jest najkrótsza.

Ex: Aha, ta jest najkrótsza. A ta tutaj [wskazuje na ścieżkę nr 3]?

M3: Też jest krótka.

Ex: To dwie są krótkie?

M3: Bo są razem proste.

Ex: […] A która z tych dwóch będzie krótsza?

M3: [Wskazuje na ścieżkę nr 3].

Ex: A dlaczego?

M3: Bo ta jest taka prościutka.

Z powyższego dialogu można wysnuć przypuszczenie, że w tym kontekście dla dziecka słowo „prosty" na dwa różne znaczenia. Obydwa dotyczą kształtu linii ocenianego aspektu wizualnie, ale związane są z innymi zagadnieniami matematycznymi. Pierwsze znaczenie można utożsamić z pojęciem prostej. Linia prosta potocznie rozumiana jest jako linia bez załamań i pętelek. Tak rozumianą „prostość" można ocenić wizualnie. W tym kontekście kryteria spełniają dwie ścieżki. Drugie znaczenie dotyczy pojęcia „prostopadły", rozumianego tutaj jako relacja między dwoma odcinkami. Dzieci oceniały, że narysowania linia „nie jest krzywa, pochylona", tylko prosta.

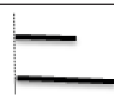
Analiza materiału badawczego pokazała, że dzieci posiadają spore intuicje w zakresie miary i mierzenia. Wyniki uzyskane z zadania 1. pokazały, że zdecydowana większość utożsamiała odległość między obiektami jako prosty odcinek łączący oba te obiekty. Przy czym rozumienie przez nich „najkrótszej drogi" było dwojakie. Dla części dzieci była to „prosta" droga (tutaj chodziło o linię prostą bez pętelek i zagięć, co można było zweryfikować wizualnie). Spora grupa rozumiała najkrótszą drogę jako odcinek prostopadły do linii początkowej (co jest zgodne z matematycznym rozumieniem pojęcia odległości).

ANALIZA WYNIKÓW ZADANIA 2.

W zadaniu 2. dzieci mogły wykorzystać klocki do zbudowania pociągów. Aż 17 osób poprawnie odpowiedziało na pytanie „który pociąg będzie dłuższy". Głównym argumentem na poparcie swojej hipotezy było odwołanie się do liczebności zbioru elementów, z których miał być budowany pociąg. Dzieci przeliczały klocki w jednym zbiorze, potem w drugim i na tej podstawie formułowały odpowiedź. Tak odpowiedziało 15 dzieci. Tylko jedno nie potrafiło podać uzasadnienia, od razu zaczęło układać.

Analizując sposób układania pociągów, można było wyróżnić cztery wzory:

Tabela1. Sposoby układania pociągów przez dzieci w zadaniu 2.

Opis sposobu układania	Układanie dwóch pociągów w jednej linii	Układanie dwóch pociągów ukośnie względem siebie	Układanie dwóch pociągów równolegle do siebie, z przesunięciem	Układanie dwóch pociągów równolegle do siebie, ze wspólnej linii startowej
Wizualizacja				
Liczba rozwiązań:	6	5	4	3

Na pytanie badacza „Który z ułożonych pociągów jest dłuższy?" prawie połowa dzieci (8 z 18) zaczęła znów przeliczać elementy, z których te pociągi były zbudowane. Pomijali całkowicie fakt stworzenia określonej konstrukcji, nie porównywali odległości między jej początkiem a końcem – dla tych dzieci pociągi to był tylko pewien sposób na uporządkowanie zbioru elementów.

A2: [Układa w jednej linii dwa pociągi].

Ex: Można je teraz jakoś porównać? Pokazać, który jest dłuższy?

A2: Yyy... [chwila zastanowienia, zaczyna cicho liczyć, wskazując kolejne elementy palcami].

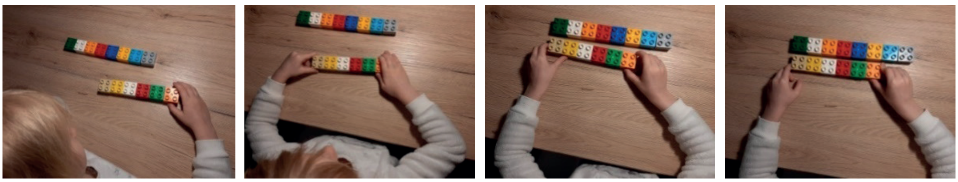
Ex: No i?

A2: Bo tu jest 6 [wskazuje pierwszy pociąg], a tu jest 8 [wskazuje drugi pociąg]. I 8 jest więcej.

Ex. No dobrze. […] Chcesz wytłumaczyć młodszemu bratu, który pociąg jest dłuższy. Ale on nie umie liczyć i nie wie, że 8 jest większe od 6. To jak mu to pokażesz?

A2: […] No nie da się.

Dopiero po kolejnych pytaniach badacza, czy może jest jakiś sposób na pokazanie, że jeden pociąg jest dłuższy od drugiego, dzieci przesuwały swoje układanki względem siebie w taki sposób, aby rozpoczynały się ze wspólnej linii.



Rysunek 1. Porównywanie pociągów ułożonych z klocków przez dziecko.

Taką strategię zastosowała zdecydowana większość dzieci, które początkowo odwoływały się do liczebności zbiorów. W dwóch przypadkach dzieci stwierdziły, że „widać, że ten jest mały, a ten duży" i nie potrzebowały dodatkowo potwierdzać swojego zdania.

ANALIZA WYNIKÓW ZADANIA 3.

Zadanie trzecie było pewną modyfikacją zadania 2. Tutaj do dyspozycji dzieci miały dwa zestawy klocków o różnej liczebności i różnej wielkości. Na pytanie „który pociąg jest dłuższy" połowa podała oczekiwaną odpowiedź (że to będzie ten złożony z dłuższych klocków). Tutaj argumentem za było „bo te są większe". Zatem w tym przypadku dzieci odnosiły się nie do liczebności zbiorów, ale wielkości elementów składowych (czyli elementów jednostkowych). Druga grupa, która wskazała początkowo zestaw krótszych klocków, skupiła się na liczebności poszczególnych zbiorów. Krótszych klocków było więcej, wizualnie wydawało się również, że zajmują większą powierzchnię. Stąd też przekonanie uczestników badania, że z tych elementów uda się zbudować dłuższy pociąg.

Tym razem nie trzeba było szczególnie zachęcać dzieci do ułożenia pociągów i zweryfikowania swojej hipotezy. Od razu przystąpili do układania, a tylko jedno dziecko zaczęło od liczenia elementów. Zdecydowana większość od razu zaczęła układać pociągi jeden pod drugim, rozpoczynając ze wspólnej linii. Bardzo często tą „wspólną linią" był brzeg ławki, co widać na poniższych rysunkach:

Rysunek 2. Sposób układania pociągów ze wspólnej linii startowej w zadaniu 3.

Sposób pracy dzieci wyraźnie nawiązywał do doświadczeń z zadania poprzedniego.

Tabela 2. Wyniki dla zadania 2. i 3.

		Zadanie 2	Zadanie 3
Pierwsza odpowiedź: wskazanie oczekiwanej odpowiedzi/wskazanie błędniej odpowiedzi		17/1	9/9
Uzasadnienie poprzez odwołanie się do liczebności zbiorów		15	7
Sposób układania	W linii obok siebie	6	3
	Skośnie	5	0
	Równolegle z przesunięciem	4	0
	Jeden pod drugim, ze wspólnej linii startowej	3	14

Po ułożeniu pociągów niektóre dzieci z zaskoczeniem przyjęły fakt, że błędnie oszacowały, który z pociągów będzie dłuższy. Szybko jednak stwierdzały, że dzieje się tak dlatego, że klocki mają różną długość.

<u>Przykład:</u>

Ex: […] Który pociąg będzie dłuższy?

A1: Ten [wskazuje na zbiór krótszych klocków].

Ex: Ten. A dlaczego?

A1: Bo ma więcej klocków.

Ex. Dobrze, to ułóżmy […].

A1: [Układa dwa pociągi w jednej linii, później przesuwa jeden, aby był dokładnie pod drugim] Oj.

Ex: Co się stało?

A1: Bo ten jest krótszy, a ten jest dłuższy [wskazuje kolejno pociągi].

Ex: O, a wcześniej mówiłaś odwrotnie. Jak to tak jest?

A1: [Bardzo pewnie] Bo tu są większe klocki.

Część dzieci początkowo nie zwróciła uwagi na różne długości klocków użytych do budowania pociągu, stąd błędne odpowiedzi i błędne uzasadnienia. Widząc różne długości klocków, dzieci same zaczynały układać pociągi i wówczas następowała weryfikacja wcześniejszej odpowiedzi. Tym razem sposób układania był zdecydowanie inny. Nawet jeżeli ktoś zaczął układać równolegle z przesunięciem, bardzo szybko ustawiał oba pociągi w jednej linii startowej.

Wyniki uzyskane z zadania 2. i 3. pokazały, że podczas „mierzenia" dzieci zwracały uwagę zarówno na jednostkę, jak i na sposób dokonywania pomiarów. Przy czym doświadczenia z zadania 2. przenosiły się na sposób rozwiązania zadania 3. Porównując dwa obiekty między sobą (tutaj były to dwa pociągi o różnej długości), układały je jeden pod drugim, z tej samej linii startowej. Taki sposób porównywania był jednak istotny przede wszystkim w sytuacji, gdy pociągi były układane z klocków o różnej długości (co możemy utożsamić z różną jednostką miary). Gdy oba obiekty zbudowane były z takich samych klocków, dzieci nie czuły potrzeby porównywania fizycznego. Wystarczyło im wówczas zwykłe przeliczenie elementów w każdym z pociągów. Zatem w tej sytuacji „mierzenie" zostało utożsamione z liczebnością poszczególnych zbiorów, zaś „układanie pociągów" potraktowane jako inne uporządkowanie danego zbioru.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Dla dzieci biorących udział w badaniu zaprezentowane zadania były nowym doświadczeniem. Zwłaszcza konieczność uzasadnienia swojego zdania była dla nich zaskakująca. Początkowo czuły się nieco niezręcznie i nie były skłonne do udzielania wyjaśnień, ograniczając się jedynie do wskazania poprawnej odpowiedzi. Tak było przede wszystkim przy rozwiązywaniu zadania 1. Stopniowo jednak zaczynały czuć się swobodnie, nabierały pewności siebie i zaczynały udzielać szerszych wyjaśnień. Tutaj język werbalny był mocno wspierany gestem. Samo wskazanie przez dziecko dłuższego pociągu było dla niego wystarczającą odpowiedzą i nie widziały potrzeby potwierdzenia tego słowami.

Wyniki uzyskane podczas pierwszego etapu badań pozwalają wysnuć przypuszczenie, że dzieci w wieku 5, 5–6 lat posiadają intuicję w zakresie miary i mierzenia. Interpretują odległość między obiektami jako „odcinek prostopadły do obu". Jest to zbieżne z formalnym matematycznym rozumieniem odległości. „Prostość" jest przez nie rozumiana zarówno jako prosta, ale również jako prostopadła.

W zadaniu drugim układane obiekty składały się z jednakowych elementów. Można to utożsamić z jednakową jednostką miary. Dla dzieci dość oczywiste było, że gdy mają jednakową „jednostkę miary", dłuższy będzie ten obiekt, który ma więcej „jednostek". Tutaj nie widziały potrzeby innego weryfikowania swojej hipotezy. Wykorzystanie jedynie aspektu ilościowego, odwołanie się do liczebności zbiorów było dla nich wystarczające. Świadczyć o tym może fakt, że układanie pociągów potraktowały raczej jako pewnego rodzaju uporządkowanie zbiorów. Zadziałała tutaj intuicja „liczebności zbioru" – w jednym zbiorze było więcej elementów, więc ten zbiór był „większy". Z pewnością nie czuły konieczności odwoływania się do jednostki długości. Budowli z klocków nie utożsamiły z dwoma obiektami geometrycznymi, które można ze sobą porównać, na przykład poprzez zmierzenie ich długości. Co ciekawe, w zadaniu 3., pozornie identycznym jak zadanie 2., dzieci przystępując do układania, w zdecydowanej większości zaczynały układać pociągi jeden pod drugim, z jednej linii startowej. Jest to zgodne z intuicją porównywania obiektów: aby stwierdzić który jest dłuższy, trzeba ustawić je na jednej linii i zobaczyć, który kończy się dalej od niej. Być może podczas rozwiazywania zadania trzeciego uczniowie korzystali z doświadczeń zdobytych podczas pracy nad zadaniem drugim. Taki efekt jest bardzo pożądany i może świadczyć o dużym potencjale dzieci do uczenia się. Innym czynnikiem wpływającym na zmianę strategii układania może być wielkość elementów. Podczas dalszej nauki szkolnej uczulamy uczniów, że porównywać można ze sobą wielkości wyrażone w tych samych jednostkach. Tutaj porównywane obiekty były „w różnych jednostkach". Początkowo część dzieci nie zwróciła na to uwagi, stosując strategię wykorzystywaną podczas porównywania liczebności zbiorów. Dopiero rzeczywiste ułożenie obu pociągów pokazało, że takie podejście jest błędne.

Drugi krok badań pilotażowych potwierdził, że dzieci miały swoje własne intuicje na temat mierzenia. Rozumiały odległość między obiektami jako najkrótszy odcinek łączący je, którego koniec jest prostopadły do obiektu końcowego. Jest to zgodne z pojęciem odległości, z jaką spotykają się uczniowie podczas edukacji matematycznej w szkole podstawowej. Porównywanie takich odcinków następowało poprzez wizualną weryfikację. Należało je ułożyć równolegle względem siebie i sprawdzić, który wystaje poza pozostałe. Ułożenie tych odcinków równolegle do siebie i ze wspólnej linii startowej ułatwiało taką wizualną weryfikację, ale nie było traktowane jako warunek konieczny.

Postawa dzieci biorących udział w badaniach pilotażowych oraz uzyskane wyniki napawają optymizmem. Zaprezentowana seria spotkań z przedszkolakami oraz cykl prezentowanych im zadań wydaje się być dobrym punktem wyjścia do rozwijania dziecięcych kompetencji w zakresie miary i mierzenia. Szczegółowe badania na znacznie szerszej grupie badawczej mogą zweryfikować tę hipotezę i pomóc w opracowaniu propozycji dydaktycznej dla przedszkoli oraz rozwijać kompetencje w zakresie miary i mierzenia u dzieci.

BIBLIOGRAFIA

Buys, K., de Moor, E. (2008). Domain Description Measurement. W: M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys (red.), *Young Children Learn Measurement and Geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school* (s. 15–36). Netherlands, Freudenthal Institute, Utrecht University.

Clements, D., Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. W: D.H. Clements, J. Sarama, A. DiBase (red.). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematica education* (s. 299–320). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1992) *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: WSiP.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2009). *Zajęcia dydaktyczno-wyrównawcze dla dzieci, które rozpoczną naukę w szkole* Warszawa: Edukacja Polska.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2012). *O dzieciach matematycznie uzdolnionych*, Warszawa: Nowa Era.

Heuvel-Panhuzen, M., van den Buys, K. (red) (2005), *Young Children Learn Measurement and Geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

MacDonald, A., Lowrie, T. (2011). Developing measurement concepts within context: Children's representations of length. *Mathematics Education Research Journal, 23*(1), 27–42. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0002-7

National Council of Teachers of Mathematics (red.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Podstawa programowa wychowania przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego. [Curriculum of pre-school education for kindergartens] (2017). https://podstawaprogramowa.pl/Przedszkole z 10.09.2024.

Pytlak, M., Maj-Tatsis, B. (2021). Young children's intuitive understanding of measure sense and measurement. W: J. Novotná, H. Moraová (red.), *Proceedings of International Symposium Elementary Mathematics Teaching – SEMT'21* (s. 338–348). Praga: Charles University.

Siwek, H. (1998). *Czynnościowe nauczanie matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

Wpływ oceny kształtującej na nauczanie matematyki w szkole podstawowej

Anna Pyzara
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
anna.pyzara@umcs.pl
ORCID 0000-0002-8165-3980

Anna Sieczka
e-mail: annasieczka2@gmail.com

Marcin Szymański
Szkoła Podstawowa nr 30 im. Króla Kazimierza Wielkiego w Lublinie
e-mail: marszym@poczta.onet.pl

Streszczenie

Ocenianie kształtujące, w tym ocena kształtująca w postaci informacji zwrotnej, jest zalecane jako alternatywa dla tradycyjnej oceny sumującej. Jego celem jest zwiększenie świadomości uczniów o ich wiedzy i umiejętnościach oraz motywowanie do nauki. Pomaga także nauczycielom dostosować metody nauczania. Odpowiednie łączenie obu form oceniania przynosi uczniom korzyści i usprawnia proces nauki. Badania nad ocenianiem kształtującym rzadko uwzględniają specyfikę przedmiotów. Prezentowane badanie dotyczy wpływu oceny kształtującej na nauczanie matematyki. Przeprowadzono eksperyment w siódmej klasie szkoły podstawowej, polegający na przekazywaniu uczniom ocen kształtujących. Analiza prac uczniów i ankieta wykazały, że uczniowie pozytywnie ocenili wpływ informacji zwrotnej na ich naukę matematyki (byli bardziej świadomi swojej wiedzy, czuli indywidualne wsparcie nauczyciela i motywację do nauki). Jednocześnie badanie pokazało, że ocena kształtująca nie wpływa znacząco na wyniki uczniów przy tak krótkim jej stosowaniu.

Abstrakt

Formative assessment, including feedback-based formative evaluation, is recommended as an alternative to traditional summative assessment. Its goal is to increase students' awareness of their knowledge and skills while motivating them to learn. It also helps teachers adjust their teaching methods. Properly combining both forms of assessment benefits students and enhances the learning process.

Research on formative assessment rarely considers subject-specific aspects. The presented study examines the impact of formative assessment on mathematics education. An experiment was conducted in a seventh-grade primary school class, where students received formative assessments. Analysis of students' work and a survey showed that they positively evaluated the impact of feedback on their mathematics learning—they became more aware of their knowledge, felt individual support from the teacher, and were more motivated to learn. However, the study also indicated that formative assessment does not significantly affect students' results over a short period of application.

WPROWADZENIE

Oceny były zawsze obecne na lekcjach matematyki i nie tylko. Sprawdzian odbywał się po każdym rozdziale podręcznika, a także w trakcie trwania działu uczniowie pisali kartkówki, oczywiście wszystko na ocenę sumującą (stopień). Często bez względu na to, jakie oceny uczniowie otrzymali, nauczyciel (zmuszony do realizacji podstawy programowej) po teście rozpoczynał nowy dział, a cały schemat postępowania zaczynał się od nowa (McIntosh, 2010). Dzieje się tak, ponieważ duża ilość materiału do opanowania przez uczniów niemalże determinuje takie postępowanie. Natomiast oceny nie powinny tylko podsumowywać działań nauczyciela po zakończonych przez niego zajęciach. Powinny one dostarczać informacji prowadzącemu i pomagać odpowiednio zaplanować proces efektywnego kształcenia (Ginsburg, 2009). Oceny mogą sugerować nauczycielowi, że należy zmodyfikować sposób nauczania, a także informować go, co uczniowie wiedzą, rozumieją i potrafią zrobić (Bennett, 2011). Takie podejście umożliwia ocena kształtująca, która nie tylko daje nauczycielowi informacje o stanie wiedzy podopiecznych, ale przekazuje też te informacje uczniom.

Wiele publikacji zachęca do stosowania oceniania kształtującego wraz ze wszystkimi jego elementami. Niniejszy artykuł skupia się na ocenie kształtującej przekazywanej za pomocą informacji zwrotnej. Ta ocena ma być alternatywną formą dla stosowanej w większości szkół oceny sumującej. Używanie jej ma zmniejszyć liczbę ocen (stopni), ale zwiększyć świadomość uczniów na temat posiadanej przez nich wiedzy i umiejętności. Oprócz tego ocena kształtująca powinna zachęcać i motywować uczniów do działania, wpływać na zaangażowanie, a także przyspieszać postępy w nauce. Według założeń oceniania kształtującego odpowiednie stosowanie oceny sumującej i oceny kształtującej (informacji zwrotnej) powinno przynosić uczniom same korzyści i usprawniać proces zdobywania wiedzy (Bennett, 2011; Black, Wiliam, 2010; Jackowska-Boryc, Pyzara, 2020). Rozważanie oceny kształtującej jest możliwe po ukazaniu jej w szerszym kontekście, tj. w odniesieniu do jej elementów.

OCENIANIE KSZTAŁTUJĄCE I JEGO ELEMENTY

Ocenianie kształtujące jest sposobem nauczania polegającym na częstym i systematycznym zbieraniu informacji o przebiegu procesu uczenia się. Nauczyciel wykorzystujący ocenianie kształtujące pomaga uczniom w nauce, a nie tylko skupia się na zrealizowaniu podstawy programowej. Osoba prowadząca zajęcia, która stosuje ocenianie kształtujące (Sterna, 2014):

- określa cele lekcji i formułuje je w języku zrozumiałym dla ucznia,
- ustala kryteria oceniania, czyli to, co będzie brane pod uwagę przy ocenie pracy ucznia,
- stosuje efektywną informację zwrotną, czyli komentarz mówiący, co zostało poprawnie wykonane, co wymaga poprawy, jak dokonać poprawy oraz jak pracować dalej,
- rozróżnia funkcje oceny sumującej (oceny wyrażonej stopniem) i oceny kształtującej,
- buduje atmosferę uczenia się pracując z uczniami i rodzicami,
- potrafi formułować pytania kluczowe, tzn. takie pytania, które zainteresują uczniów tematem lekcji,
- potrafi zadawać pytania angażujące ucznia w lekcję,
- wprowadza samoocenę i ocenę koleżeńską, czyli ocenę poprawności rozwiązania zadania, którą uczniowie otrzymują od kolegów lub koleżanek.

Jednym z elementów oceniania kształtującego są cele lekcji. Niektórzy nauczyciele nie widzą sensu w podawaniu celów lekcji skoro podają temat. Uważają oni, że celem zajęć jest opanowanie tematu. Jest to jednak tylko jeden cel, który musi być rozłożony na szczegółowe cele, aby dokładnie było wiadomo, co ma zostać osiągnięte (Bąbel, 2007). Nie można też przesadzić z liczbą celów. Ich nadmiar może powodować, że cele przewidziane na dane zajęcia nie zostaną opanowane i tym samym nauczyciel oraz uczniowie nie będą zadowoleni z zajęć. Jest to demotywujące, dlatego dobrym pomysłem jest określanie maksymalnie trzech celów na daną godzinę lekcyjną i podawanie ich uczniom. Natomiast inne, poboczne cele, powinny być realizowane, ale bez zwracania na nie szczególnej uwagi naszych podopiecznych (Sterna, Dojer, 2016b).

Kolejnym elementem oceniania kształtującego, który pomoże uczniom na lekcjach matematyki są kryteria oceniania[1]. Pozwalają one sprawdzić, czy uczniowie opanowali zagadnienia i umiejętności zawarte w celach lekcji. Dzięki kryteriom oceniania mogą oni szybko zweryfikować, co już umieją, a co wymaga jeszcze nauki. Jest to pożyteczne nie tylko na lekcjach matematyki, ale na wszystkich

---

[1] Kryteria oceniania w języku polskim nazywane są NaCoBeZu, czyli skrót od zwrotu „Na Co Będę Zwracać Uwagę".

przedmiotach, ponieważ czyni z ucznia świadomego uczestnika procesu uczenia się (Sterna, 2014). Kryteria oceniania są rezultatem zaplanowanych celów lekcji, dlatego nie należy ich ze sobą mieszać. Kryteria pozwalają ukierunkować pracę uczniów, dają możliwość modyfikacji procesu uczenia się oraz przyspieszają postępy w nauce (Sterna, Dojer, 2016a). Dla uczniów ważne jest, aby znali nie tylko cele, ale także sposób weryfikowania ich wiedzy (Bąbel, 2007). Z tego powodu zrozumiałe dla uczniów kryteria oceniania pokierują ich procesem uczenia się i pozwolą podopiecznym zauważyć, co jest ważne oraz to, co wymaga większej uwagi w trakcie nauki. Kryteria oceniania są szczególnie przydatne dla osób nieobecnych na zajęciach. Dodatkowo pozwalają one na naukę ważnych i potrzebnych rzeczy, przez co wpływają na motywację i zaangażowanie uczniów (Sterna, 2014).

Kryteria oceniania powinny pojawiać się tam, gdzie występują cele. Jeśli nauczyciel podaje cele do poszczególnych lekcji czy konkretnych działań, to warto też podać kryteria oceniania. Liczba kryteriów zależy od tego, do czego je formułujemy. Jednak należy pamiętać, że liczba kryteriów nie może być zbyt duża. Jeśli kryteria nie będą zbyt obszerne, to uczniowie będą w stanie się wszystkiego nauczyć. Osiągną wtedy sukces, który sprawi, że będą chcieli więcej i będą mieli motywację, by dalej się uczyć. Natomiast nauczycielom systematyczne podawanie krótkich i zrozumiałych kryteriów ocen odwdzięczy się przy sprawdzianie, ponieważ mając kryteria oceniania z całego działu, można szybko utworzyć nowe do sprawdzianu oraz wybrać odpowiednie zadania weryfikujące dane umiejętności (Sterna, Dojer, 2016a).

Ocenianie kształtujące jest wykorzystywane na lekcjach wielu przedmiotów, także przez nauczycieli matematyki. Matematyka jest przedmiotem, który posiada swoje specyficzne słownictwo, a język matematyczny nie zawsze jest zrozumiały dla uczniów. Jednak nauczyciel nie może zrezygnować z fachowego słownictwa, które będzie się pojawiać w książkach i na egzaminach. Niestety też, jeśli uczniowie nie będą rozumieli, co mówi do nich nauczyciel, przestaną być zaangażowani w te niezrozumiałe dla nich lekcje. Pomocne są oceny kształtujące i cele lekcji podawane w języku zrozumiałym dla ucznia. Gdy uczeń będzie wiedział i rozumiał, co ma osiągnąć, łatwiej przyjdzie mu nauka tych rzeczy, a i nazwy matematyczne po pewnym czasie przestaną być niezrozumiałe (Bąbel, 2007; Sterna, 2014). Z tego względu formułowanie celów lekcji w języku zrozumiałym dla uczniów jest ważne, ponieważ powinni oni rozumieć, po co się uczą oraz kiedy cele zostały osiągnięte. Gdy nasi podopieczni znają cele zajęć, widzą sens brania udziału w lekcji (Sterna, Dojer, 2016b). Niektórzy miewają problemy z rozróżnianiem celów i kryteriów oceniania. Z tego względu, przy stosowaniu oceniania kształtującego zawsze należy pamiętać, że cele przedstawiają miejsce, do którego zmierzamy, natomiast kryteria oceny to punkty pokazujące, czy dany cel został osiągnięty (Sterna, Dojer, 2016b).

Matematyka jest dla uczniów często trudnym przedmiotem, którego nie potrafią opanować. Wielu uczniom wydaje się, że pomimo uczestnictwa w zajęciach matematyki i tak nadal nic nie potrafią. Jednak umieją oni więcej niż są tego świadomi, dlatego tak ważne jest docenianie tego, co uczeń już przyswoił. Docenianie, wskazywanie błędów, dawanie wskazówek do poprawy błędów i do dalszej pracy jest możliwe dzięki informacji zwrotnej (Sterna, 2014). Informacja zwrotna powinna zawierać 4 elementy: wskazanie dobrych stron pracy, wskazanie błędów, poinformowanie jak poprawić błędy oraz wskazówki w jakim kierunku dalej pracować. Ten element oceniania kształtującego to nie tylko zwykły komentarz, ale również bezpośrednie odniesienie się do danego ucznia i dostrzeżenie go w zespole klasowym. Informacja zwrotna musi być dokładnie powiązana z kryteriami oceniania i może się odwoływać tylko do nich (Sterna, 2014; Jackowska-Boryc, Pyzara, 2020). Czasem formułowanie czteroelementowej informacji zwrotnej może przysparzać kłopot nauczycielom, bo trzeba odnaleźć w każdej pracy mocne strony, nawet w „słabych" pracach. Gdy okaże się, że żaden punkt kryterium oceniania nie został poprawnie wykonany, należy pochwalić samo podjęcie próby rozwiązania zadania. Można udzielić uczniowi wsparcia i zmotywować go do pracy, ponieważ informacja zwrotna nie tylko ma informować o zrealizowaniu poszczególnych kryteriów oceny, ale także ma funkcję wspierającą i motywującą. Dzięki takim właściwościom informacji zwrotnej można zachęcić ucznia do pracy, ale także uświadomić mu, w czym jest dobry i dać rady dotyczące poprawy błędów (Gregorczyk, Swat-Pawlicka, 2016). Przy przekazywaniu wskazówek ważne jest, aby mówić co można zrobić lepiej, a nie, co jest źle, aby nie zniechęcać ucznia (Bąbel, 2007).

Przy wprowadzaniu informacji zwrotnej, warto ustalić z uczniami jakie prace będą oceniane sumująco, a jakie kształtująco. Gdy umowa nauczyciela z uczniami (na temat sposobu oceniania konkretnych prac) jest zawarta – nie wolno jej zmieniać, ani łączyć obu ocen. Informacja zwrotna nie wymaga uzupełnienia stopniem, ponieważ zawiera wszystkie potrzebne informacje o tym, co uczeń potrafi i nad czym jeszcze musi popracować. Natomiast ocena wyrażona stopniem nie daje szczegółowych informacji o opanowaniu wiedzy i umiejętności przez ucznia (Gregorczyk, Swat-Pawlicka, 2016). Z tego powodu w ocenianiu kształtującym, zamiast oceny sumującej uczeń częściej otrzymuje informację zwrotną do swojej pracy, aby mógł nadrobić braki przed pracą ocenianą za pomocą oceny sumującej (Sterna, 2014). Ideą oceny kształtującej jest oddzielenie jej od oceny sumującej, jednak praktyka nauczania w polskiej szkole często zmusza nauczycieli do łączenia oceny kształtującej ze stopniem, gdyż polskie społeczeństwo (uczniowie, rodzice) nie potrafią jeszcze w pełni wykorzystać dobrodziejstwa informacji zwrotnej (Jackowska-Boryc, Pyzara, 2020).

Oprócz informacji zwrotnej od nauczyciela uczniowie mogą otrzymać też informację zwrotną od samego siebie lub od kolegi czy koleżanki (ocena koleżeńska) na podstawie wcześniej ustalonych kryteriów oceniania (Bąbel, 2007). Taki sposób oceny pozwala odciążyć nauczyciela i przekazać informację zwrotną wszystkim uczniom jednocześnie. Uczniowie mogą udzielać sobie informacji zwrotnej, która pomoże im w nauczeniu się danej partii materiału, a także będzie doskonałą okazją do utrwalenia zdobytych już wiadomości i umiejętności. Natomiast niedopuszczalne jest wystawianie stopni przez uczniów, ponieważ może być nieobiektywne i prowadzić do manipulacji (Sterna, Modzelewska-Buławicka, 2016). Ocena koleżeńska sprawia, że uczniowie wymieniają się swoimi doświadczeniami i poznają inne spojrzenie na zadanie, przez co uzupełniają swoją wiedzę. Uczniowie sprawdzając sobie prace i dając wskazówki uczą się poprzez uczenie innych. Oprócz uczenia się, taki sposób pracy angażuje uczniów i usuwa nudę z lekcji. Dodatkowo uczniowie czują się potrzebni i mają satysfakcję z tego, że czegoś już się nauczyli i że dzięki temu mogą pomóc i pokierować swojego przyjaciela ze szkolnej ławki.

W ocenianiu kształtującym stosowane są również pytania kluczowe i pytania angażujące uczniów w lekcję oraz zwracana jest uwaga na atmosferę panującą w klasie i współpracę z rodzicami (Sterna, 2014). Te elementy nie są ściśle związane z oceną kształtującą przekazywaną za pomocą informacji zwrotnej, dlatego nie będą rozważane w tym artykule. Natomiast istotne jest rozróżnienie oceny sumującej i oceny kształtującej. Temu zagadnieniu poświęcony jest następny paragraf.

Ocena kształtująca a ocena sumująca

Ocena szkolna ma funkcję informacyjną i motywującą oraz pełni zadanie klasyfikacji i promowania uczniów do następnych klas. Wśród wszystkich rodzajów ocen można wyróżnić ocenę sumującą i ocenę kształtującą. Pierwsza z nich służy do podsumowywania wiedzy, którą zdobył uczeń i jest przedstawiana za pomocą stopnia. Natomiast ocena kształtująca ma za zadanie uświadomić uczniowi, co zrobił dobrze, a co źle i w jaki sposób może on poprawić swoją pracę. Celem tej oceny jest pomaganie uczniowi podczas procesu uczenia się. Pomimo tego, że te oceny mają inne cele i dają inne konsekwencje, czasem się wzajemnie przenikają lub są źle używane przez osoby prowadzące zajęcia. Gromadzenie się nieporozumień wokół tych ocen nie jest niczym dobrym, jednak rosnące zainteresowanie ocenianiem kształtującym wśród nauczycieli może zniwelować ten problem oraz wpłynąć na poprawę procesu uczenia się i podniesienie osiągnięć uczniów (Szyling, 2010; Sterna, 2014).

Stosowanie oceniania kształtującego w czasie zajęć prowadzi do zmiany sposobu oceniania uczniów. Z tego powodu ocena sumująca (stopnie, punkty, procenty, różne symbole) w trakcie zdobywania umiejętności zostaje zastąpiona przez informację zwrotną. Dzięki takiemu podejściu, uczeń powinien dojść do wniosku, że w nauce ważne jest zdobywanie wiedzy, a nie stopni. Dążenie do właściwego rozwoju wiedzy i umiejętności jest możliwe dzięki ocenie kształtującej, przez którą nauczyciel może wspierać, motywować i kierować ucznia. Aby ocena kształtująca mogła odnieść sukces, musi być oddzielona od oceny sumującej. Właśnie dlatego, gdy praca ucznia jest oceniana stopniem nie powinna się tam znaleźć informacja zwrotna, ponieważ uczniowie często zwracają uwagę tylko na stopień, a informacje zawarte w informacji zwrotnej są ignorowane. Tym samym zniekształcona zostaje funkcja oceny sumującej. Nie oznacza to, że należy rezygnować z oceny sumującej albo z oceny kształtującej. Trzeba tylko ustalić reguły stosowania każdej z ocen. Ocenę kształtującą należy stosować w trakcie procesu uczenia się, aby dać uczniowi wskazówki dotyczące tego, co już opanował, a nad czym musi jeszcze popracować. Takich ocen w ciągu semestru może być dowolnie dużo. Chociaż nie zawsze jest to możliwe do wykonania, to nauczyciel powinien się starać udzielać uczniom ocen kształtujących regularnie i często. Należy pamiętać, że nie wolno zamienić oceny kształtującej na stopień, bo narusza to umowę z uczniami o stosowaniu każdej z tych ocen. Natomiast z oceny sumującej powinno się skorzystać, gdy chce się podsumować pewien etap pracy nad jakimiś zagadnieniami i sprawdzić, ile uczniowie się nauczyli. Aby móc ocenić ucznia stopniem należy odpowiednio wcześnie zapowiedzieć pracę na taką ocenę (Dojer, Swat-Pawlicka, 2016).

OCENA KSZTAŁTUJĄCA W BADANIACH

Wielu naukowców badało zagadnienie oceny kształtującej, aby zbadać jej wpływ na poprawę nauczania i uczenia się. W większości wyniki pokazywały istotne lub średnie korzyści z tego rodzaju nauki (Bennett, 2011; Black, Wiliam, 2010; Ginsburg, 2009). Wiele osób popierających ocenę kształtującą używa argumentu, że badania naukowe dowodzą, iż powoduje ona od średnich do bardzo dużych osiągnięć. Uważają oni także, że wyniki pochodzą z wiarygodnych źródeł takich jak meta-analizy czy badania indywidualne (Bennett, 2011). Można się też spotkać ze stwierdzeniem, że ta ocena bardziej pomaga uczniom ze słabymi wynikami niż innym osobom i podnosi ich ogólne wyniki, ale jednocześnie ogranicza zakres osiągnięć. Mimo tego przynosi ona korzyści dla tych uczniów i daje im szansę na wyrównanie braków edukacyjnych. Bez względu na różnice zdań, widać znaczące plusy z tego sposobu nauczania, który jest osiągany za pomocą różnych metod. Działania stosowane podczas procesu uczenia się mają wspólną cechę – ocenę kształtującą, która przynajmniej częściowo przyczynia się do sukcesu (Black, Wiliam, 2010).

Bennett (2011) w swojej pracy przytacza artykuł Blacka i Wiliama (2010), który jest bardzo często wykorzystywany do wskazywania skuteczności oceny kształtującej. Ci naukowcy wykorzystali materiały z 250 źródeł do napisania długiej recenzji opublikowanej w specjalnym numerze czasopisma „Assessment in Education". Do stworzenia swojego przeglądu badacze użyli wielu opracowań, a zawarte w nich badania pokazują, że wszystkie działania prowadzące do ulepszenia oceny kształtującej, przynoszą znaczne i znaczące korzyści w nauce. Podano także wielkość efektu dla tego sposobu nauczania. Wielkość ta wskazywała znacznie większe pozytywne skutki w przyroście wiedzy i umiejętności uczniów niż przy innych sposobach edukacyjnych (Black, Wiliam, 2010).

Podczas innych badań przeprowadzonych w Niemczech na lekcjach matematyki sprawdzano wpływ oceny kształtującej na osiągnięcia i zainteresowanie uczniów, poprzez postrzeganie przez nich przydatności informacji zwrotnej. Badani stwierdzili, że wiadomości o postępach od nauczycieli są bardzo przydatne i dają im większą pewność osiągnięcia lepszych wyników w nadchodzącym sprawdzianie oraz powodują znacznie wyższe zaciekawienie tematami (Rakoczy i in., 2019).

Do badania wpływu oceny kształtującej na postępy uczniów w matematyce czasem używane są też technologie internetowe. W Katedrze Matematyki Uniwersytetu Turyńskiego skorzystano z kursów e-learningowych, aby prowadzić badania nad tym ocenianiem. Szkolenie online wykorzystywało automatyczny system oceniania Maple T.A. poprzez system zarządzania nauką Moodle. Skuteczność oceny kształtującej badano na podstawie uczniów z liceum językowego podczas kursu fizyki oraz w czasie kursu matematycznego w liceum naukowym. Uczestnicy tych zajęć co tydzień byli proszeni o rozwiązywanie zadań online poprzez system zarządzania nauką Moodle zintegrowany z Maple T.A. Wykorzystanie kursu internetowego pozwoliło uczniom na samodzielną naukę procedury rozwiązywania problemów, a czas lekcji był wykorzystywany na wyjaśnianie wątpliwości. Po zakończeniu nauki uczestnicy wypełnili ankiety, w których pozytywnie ocenili zajęcia online, dostępność zadań, natychmiastową ocenę ich pracy (automatyczną informację zwrotną), możliwość wielokrotnych prób, kierowanie rozwiązywaniem problemów oraz losowe dane w zadaniach. Uczniowie stwierdzili także, że te lekcje w formie e-learningu przyczyniły się do lepszego zrozumienia treści zajęć. Nauczyciele też pozytywnie oceniali tę formę nauczania. W swoich opiniach wymieniali: skrócenie czasu oceny zadań, zwiększenie kontroli nad działaniami uczniów, automatyczne przekazywanie spersonalizowanych informacji zwrotnych, ogromną liczbę ćwiczeń do udostępnienia, wzrost świadomości uczniów dotyczący własnych możliwości, rozwój pewności siebie wśród młodzieży, wzrost motywacji, większą obiektywność w ocenie. Uczniowie i nauczyciele byli zadowoleni z wykorzystania tego narzędzia do automatycznej oceny kształtującej oraz zauważyli wzrost poziomu uczenia się, a także przydatność w przygotowaniu do egzaminów końcowych (Barana, Marchisio, 2016).

Inne cyfrowe narzędzie edukacyjne umożliwiające przekazywanie oceny kształtującej wykorzystano do zbadania wpływu tego narzędzia na osiągnięcia i motywację podczas nauki matematyki w klasie trzeciej szkoły podstawowej we wschodniej Holandii. Korzystano z narzędzia o nazwie Snappet, w którym dydaktyk może wybierać zadania dla całej klasy, grupy osób lub jednego dziecka. Istnieje też możliwość automatycznego dobierania zadań dla uczniów na podstawie osiągniętych poziomów umiejętności, które program oblicza, analizując poprawne odpowiedzi dziecka. Dydaktyk na podstawie tego co się dzieje w zespole klasowym może decydować o tym, czy uczniowie pracują nad zadaniami programowymi (tj. zadaniami, które znajdują się w podręczniku wybranym przez nauczyciela i które uczniowie muszą rozwiązać samodzielnie – bez żadnych wskazówek), zadaniami adaptacyjnymi (tj. zadaniami, które podpowiadają uczniowi co powinien po kolei obliczać) czy nad obydwoma rodzajami. Wyniki uczniów po przeprowadzeniu badań z wykorzystaniem Snappeta pokazują, że respondenci będący w grupie eksperymentalnej osiągnęli więcej niż uczniowie w grupie kontrolnej. Naukowcy zauważyli także, że uczestnicy grupy badawczej na każdym poziomie umiejętności mieli przyrost wiedzy dużo większy niż w grupie obserwacyjnej. Badacze wyciągnęli również wniosek, że narzędzie to jest bardziej efektywne, jeśli uczniowie korzystają z niego w dużym stopniu oraz że wpływa ono na motywację. Otrzymane wyniki udowodniły, że systematycznie przekazywana ocena kształtująca wpłynęła na osiągnięcia uczniów i podniosła ich wyniki (Faber i in., 2017).

WDRAŻANIE OCENY KSZTAŁTUJĄCEJ W PRACY NAUCZYCIELA

Nauczyciele, którzy chcą korzystać z oceniania kształtującego (w tym z oceny kształtującej) potrzebują wiedzy na ten temat. Konieczne jest stworzenie solidnych podstaw zrozumienia i stosowania tego obiecującego sposobu nauczania, co jest możliwe przez samodzielne zdobywanie wiedzy lub branie udziału w kursach czy programach szkolenia zawodowego na ten temat. W dzisiejszych czasach osoby prowadzące zajęcia w bardzo łatwy i szybki sposób mogą zapisać się na szkolenia stacjonarne lub kursy internetowe dotyczące nauczania kształtującego. Informacje zdobyte na tych warsztatach mogą wykorzystać w swojej pracy i usprawnić proces nauczania i uczenia się dzieci. Na przykład w Polsce od 2000 roku działa program Szkoła Ucząca Się (prowadzony przez Centrum Edukacji Obywatelskiej), którego celem jest podnoszenie efektywności nauczania i uczenia się we wszystkich typach i poziomach szkół. W ramach projektu rozpowszechniane jest wprowadzanie oceniania kształtującego do szkół, w tym oceny kształtującej.

Nauczyciele biorący udział w szkoleniach dotyczących wdrażania oceny kształtującej potrzebują czasu. Jest im on potrzebny, aby mogli oswoić się i wykorzystać zdobytą wiedzę i umiejętności dotyczące oceniania kształtującego w praktyce. Muszą się oni nauczyć stosować przygotowane dla nich materiały edukacyjne, dostosowywać je do swoich potrzeb, ale też tworzyć własne. Czas jest także potrzebny do refleksji nad doświadczeniami. Ponadto każdy nauczyciel powinien odkryć swój własny sposób włączenia do lekcji pomysłów i propozycji uzyskanych na szkoleniach. Trzeba więc zauważyć, że nawet przy maksymalnym wsparciu proces wdrażania oceny kształtującej będzie niestety powolny, ale z czasem przyniesie korzyści (Bennett, 2011; Black, Wiliam, 2010).

BADANIE WPŁYWU OCENY KSZTAŁTUJĄCEJ NA UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNE UCZNIÓW – METODOLOGIA BADAŃ

Uzasadnienie i cel badań

Nauczycielom zależy na tym, aby uczniowie w czasie zajęć przyswoili jak najwięcej wiedzy i zdobyli potrzebne im umiejętności. Efektywne zdobywanie wiedzy i umiejętności jest możliwe dzięki stosowaniu oceniania kształtującego (Barana, 2016; Bennett, 2011; Rakoczy i in., 2019). Jednym z jego elementów jest ocena kształtująca przekazywana za pomocą informacji zwrotnej, która jest przedmiotem przeprowadzonego eksperymentu dydaktycznego. Polegał on na wprowadzeniu oceny kształtującej w nauczaniu matematyki. Przedmiot ten jest często trudny dla uczniów, więc warto poszukiwać rozwiązań ułatwiających jego naukę.

Przeprowadzony eksperyment dydaktyczny jest istotny, ponieważ zwykle badania dotyczące oceny kształtującej są wykonywane bez odniesienia do konkretnego przedmiotu nauczania. Przedstawione poniżej badanie skupia się na jednym elemencie oceniania kształtującego czyli na ocenie przekazywanej za pomocą informacji zwrotnej oraz dotyczy nauczania matematyki w szkole podstawowej. Takie uszczegółowienie ma na celu zbadanie jak sama ocena kształtująca wpłynie na wyniki uczniów z matematyki.

Głównym celem badań jest sprawdzenie, czy ocena kształtująca wpływa na osiągnięcia matematyczne uczniów. Dodatkowe szczegółowe pytania badawcze zostaną ukazane przy opisie narzędzi badawczych.

Organizacja i przebieg badań

Przeprowadzone badania miały formę eksperymentu dydaktycznego polegającego na systematycznym przekazywaniu uczniom szkoły podstawowej ocen kształtujących podczas nauczania matematyki. Wykorzystano dwie metody badawcze: ankietę przeprowadzoną wśród uczniów oraz analizę pisemnych prac uczniów. Badania trwające miesiąc przeprowadzono na przełomie maja i czerwca 2021 roku w Szkole Podstawowej nr 30 w Lublinie. W tym czasie nauczanie odbywało się w systemie hybrydowym.

W badaniu wzięły udział dwie klasy siódme uczone przez tego samego nauczyciela, które nie miały doświadczeń z oceną kształtującą. Klasa 7c stanowiła grupę badawczą, zaś klasa 7f – grupę kontrolną. Grupa badawcza liczyła 23 uczniów, a grupa kontrolna 18 uczniów. Obie klasy są typowymi klasami szkolnymi, tzn. w każdej klasie jest grupa uczniów, którzy świetnie radzą sobie z matematyką, są uczniowie mający trudności z omawianym materiałem oraz są osoby przeciętne, które opanowują podstawy materiału.

W ramach badań zostało przeprowadzone dwanaście jednostek lekcyjnych. Lekcje dotyczyły dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i kolejności wykonywania działań na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Należy podkreślić, że te zagadnienia nie były dla uczniów nowe. W tych klasach omawiano te treści we wcześniejszych etapach nauki, jednak nadal sprawiają one uczniom dużo trudności. Z tego właśnie powodu ten materiał został wybrany do przeprowadzenia badań. Aby nie wprowadzać dodatkowego czynnika, który mógłby mieć wpływ na efekty nauki, wszystkie lekcje prowadził nauczyciel uczący obie klasy. W grupie badawczej do każdej lekcji miały być podawane cele i kryteria oceniania (w odniesieniu do nich formułowana była ocena kształtująca), które były omawiane przez nauczyciela. Natomiast w grupie kontrolnej był podawany tylko temat lekcji i nauczyciel przystępował do tłumaczenia zagadnień oraz rozwiązywania zadań.

Przed rozpoczęciem badań w grupie badawczej nauczyciel wytłumaczył uczniom na czym polega ocena kształtująca i wyjaśnił, że będą oni oceniani w ten sposób. Uczniowie otrzymywali pisemne oceny kształtujące (informacje zwrotne), w których podkreślane były dobre strony pracy, wskazane błędy, podane instrukcje dotyczące prawidłowego rozwiązania oraz wskazówki dotyczące dalszej pracy ucznia (patrz paragraf 5.3). Trzy oceny kształtujące dotyczyły prac domowych zadanych po drugiej, czwartej i szóstej lekcji. Pierwsza i druga lekcja obejmowała naukę dodawania i odejmowania ułamków zwykłych i dziesiętnych. Trzecia i czwarta lekcja miała wypracować umiejętność mnożenia i dzielenia ułamków zwykłych i dziesiętnych. Piąta i szósta lekcja została poświęcona na naukę obliczania wartości wyrażeń zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne zgodnie z kolejnością wykonywania działań. Natomiast na siódmej i ósmej lekcji była ćwiczona kolejność wykonywania działań, ale na trudniejszych przykładach. Na lekcji dziewiątej odbyła się kartkówka z dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków zwykłych i dziesiętnych oceniona również pisemną oceną kształtującą. Na lekcji dziesiątej nauczyciel oddał kartkówkę i omówił jej treść oraz treści wszystkich zadanych w czasie badania prac domowych. W trakcie jedenastej godziny lekcyjnej uczniowie zmierzyli się ze sprawdzianem obejmującym wszystkie treści, które były omawiane w trakcie trwania badania. Zajęcia dwunaste to oddanie sprawdzianów, przekazanie ocen sumujących uczniom i omówienie zadań. Po oddaniu sprawdzianu uczniowie z grupy badawczej wypełnili przygotowaną dla nich ankietę dotyczącą ich opinii na temat oceny kształtującej i przeprowadzonego eksperymentu.

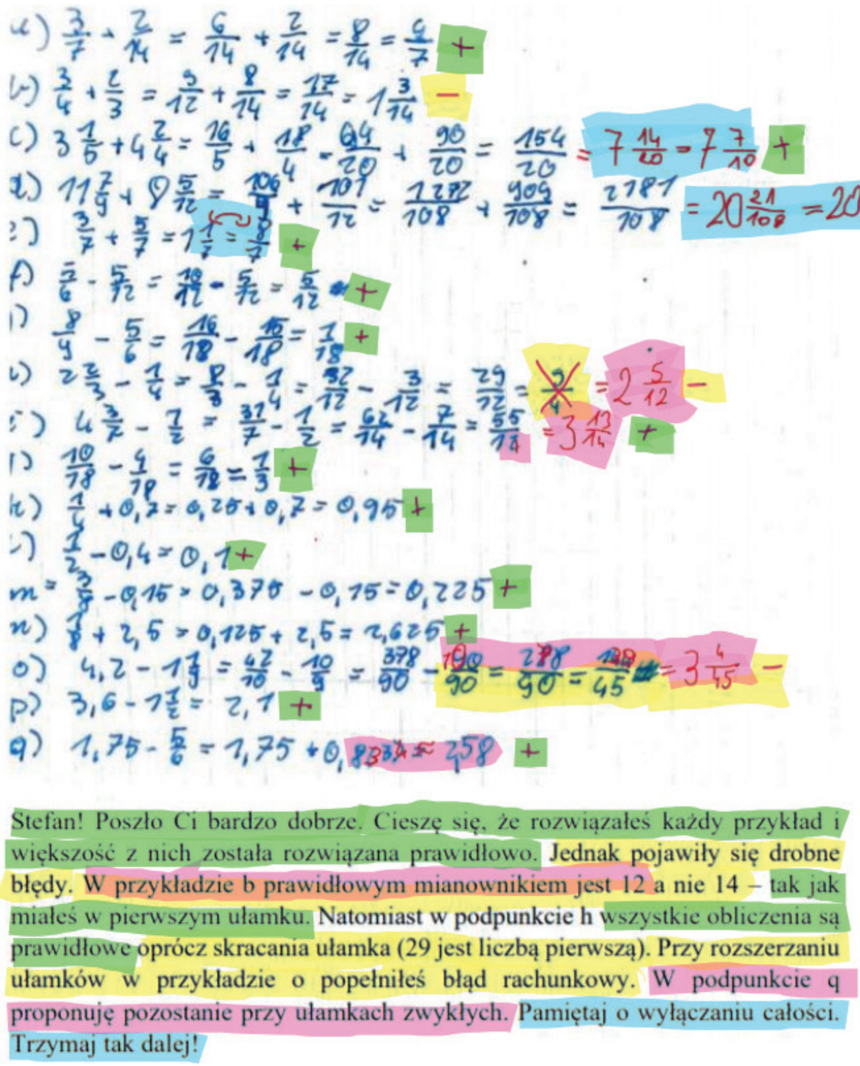
Podczas zajęć prowadzonych w grupie kontrolnej nauczanie odbywało się tak, jak do tej pory. Uczniowie otrzymywali od nauczyciela krótkie informacje (na przykład „dobrze", „źle") o poprawności wykonywanych przez nich zadań. Uczniowie w tej grupie dostawali do rozwiązania dokładnie te same prace pisemne (tj. prace domowe, kartkówka, sprawdzian), co uczniowie z grupy badawczej. Jednak nie otrzymywali oni ocen kształtujących tylko oceny sumujące.

Wszystkie prace pisemne posłużyły do zbadania wpływu oceny kształtującej na poziom umiejętności matematycznych uczniów. W tym celu każda praca została oceniona za pomocą punktów, zaś wyniki zostały wyrażone poprzez procent prawidłowych rozwiązań.

Narzędzia badawcze i cele szczegółowe związane z tymi narzędziami

Przeprowadzony eksperyment dydaktyczny obejmował dwie metody badawcze: analizę prac uczniów i ankietę. Do każdej z tych metod wykorzystano inne narzędzie badawcze. Pisemne prace uczniów z grupy badawczej były uzupełniane o informacje zwrotne i przekazywane uczniom do stałego wglądu. Przykłady takich informacji zostały zaprezentowane na rysunkach 1 i 2. Przekazywane informacje zwrotne zawierały cztery elementy, przy czym niekiedy wskazywanie błędów było od razu łączone z informacją w jaki sposób należy je poprawić. Na poniższych przykładach zostały zaznaczone kolorem poszczególne elementy informacji zwrotnej według następującego oznaczenia:

- zielony – wskazanie dobrych stron pracy,
- żółty – wskazanie błędów,
- różowy – wskazówki jak poprawić błędy,
- niebieski – wskazówki do dalszej pracy.



a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{14}=\frac{6}{14}+\frac{2}{14}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$ +

b) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{14}=\frac{17}{14}=1\frac{3}{14}$ −

c) $3\frac{1}{5}+4\frac{2}{4}=\frac{16}{5}+\frac{18}{4}=\frac{64}{20}+\frac{90}{20}=\frac{154}{20}=7\frac{14}{20}=7\frac{7}{10}$ +

d) $11\frac{7}{9}+9\frac{5}{12}=\frac{106}{9}+\frac{101}{12}=\frac{1272}{108}+\frac{909}{108}=\frac{2181}{108}=20\frac{21}{108}=20\frac{7}{36}$ +

e) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=1\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$ +

f) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}=\frac{10}{12}-\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$ +

g) $\frac{8}{9}-\frac{5}{6}=\frac{16}{18}-\frac{15}{18}=\frac{1}{18}$ +

h) $2\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{3}-\frac{1}{4}=\frac{32}{12}-\frac{3}{12}=\frac{29}{12}=\cancel{\frac{29}{4}}=2\frac{5}{12}$ −

i) $4\frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{31}{7}-\frac{1}{2}=\frac{62}{14}-\frac{7}{14}=\frac{55}{14}=3\frac{13}{14}$ +

j) $\frac{10}{18}-\frac{4}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ +

k) $\frac{1}{4}+0,7=0,25+0,7=0,95$ +

l) $\frac{1}{2}-0,4=0,1$ +

m) $\frac{3}{8}-0,15=0,375-0,15=0,225$ +

n) $\frac{1}{8}+2,5=0,125+2,5=2,625$ +

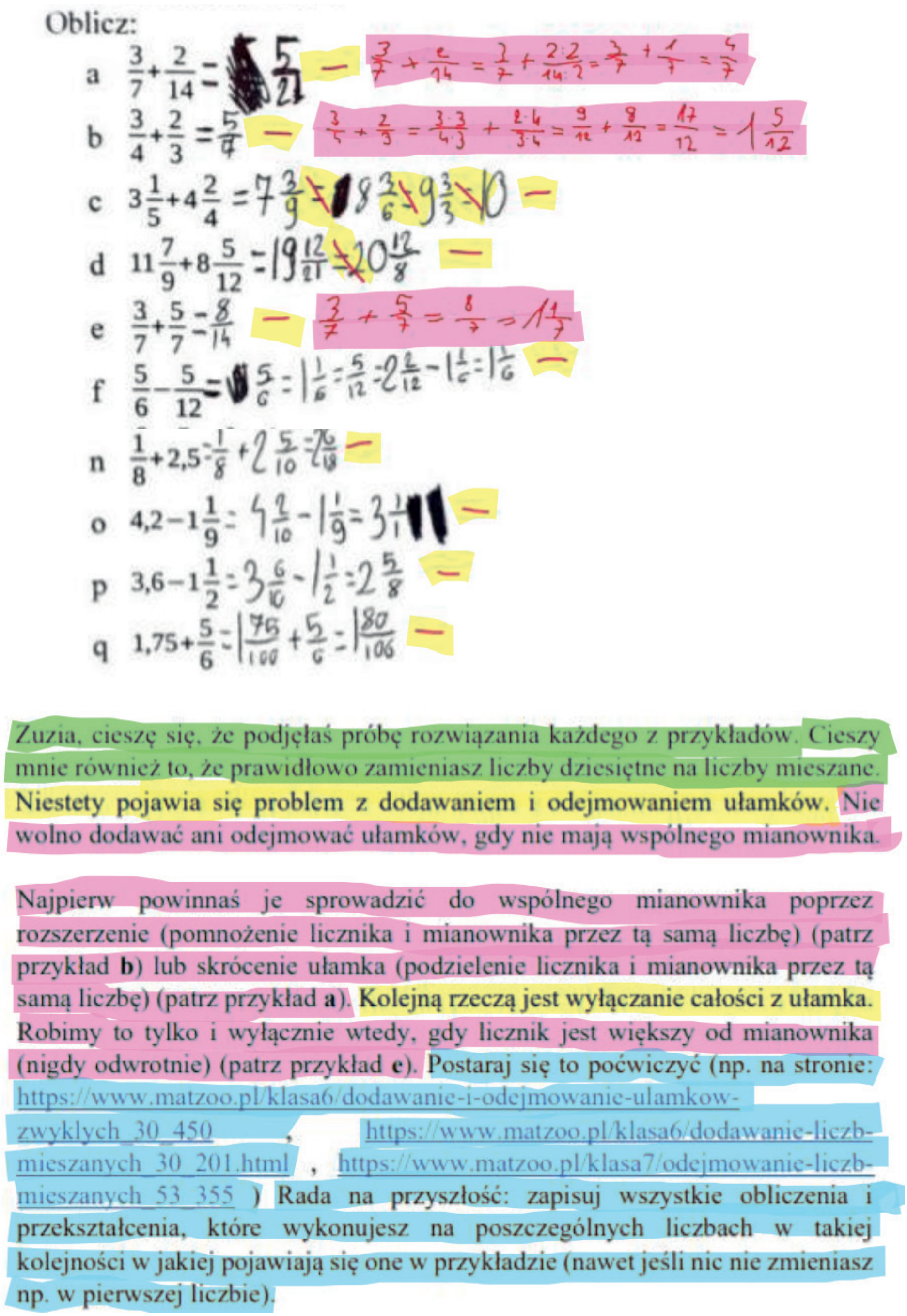
o) $4,2-1\frac{1}{9}=\frac{42}{10}-\frac{10}{9}=\frac{378}{90}-\frac{100}{90}=\frac{278}{90}=\frac{139}{45}=3\frac{4}{45}$ −

p) $3,6-1\frac{1}{2}=2,1$ +

q) $1,75-\frac{5}{6}=1,75+0,8334\approx 2,58$ +

Stefan! Poszło Ci bardzo dobrze. Cieszę się, że rozwiązałeś każdy przykład i większość z nich została rozwiązana prawidłowo. Jednak pojawiły się drobne błędy. W przykładzie b prawidłowym mianownikiem jest 12 a nie 14 – tak jak miałeś w pierwszym ułamku. Natomiast w podpunkcie h wszystkie obliczenia są prawidłowe oprócz skracania ułamka (29 jest liczbą pierwszą). Przy rozszerzaniu ułamków w przykładzie o popełniłeś błąd rachunkowy. W podpunkcie q proponuję pozostanie przy ułamkach zwykłych. Pamiętaj o wyłączaniu całości. Trzymaj tak dalej!

Rysunek 1. Przykład oceny kształtującej przekazanej do pierwszej pracy domowej wraz z zaznaczonymi elementami informacji zwrotnej – praca Stefana



Oblicz:

a $\frac{3}{7}+\frac{2}{14}=\frac{5}{21}$ – $\frac{3}{7}+\frac{2}{14}=\frac{3}{7}+\frac{2:2}{14:2}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$

b $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{5}{7}$ – $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$

c $3\frac{1}{5}+4\frac{2}{4}=7\frac{3}{9}=8\frac{3}{6}=9\frac{3}{3}=10$ –

d $11\frac{7}{9}+8\frac{5}{12}=19\frac{12}{21}=20\frac{12}{8}$ –

e $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}-\frac{8}{14}$ – $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$

f $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}=\frac{5}{6}=1\frac{1}{6}=\frac{5}{12}=2\frac{2}{12}-1\frac{1}{6}=1\frac{1}{6}$ –

n $\frac{1}{8}+2{,}5=\frac{1}{8}+2\frac{5}{10}=\frac{26}{18}$ –

o $4{,}2-1\frac{1}{9}=4\frac{2}{10}-1\frac{1}{9}=3\frac{1}{1}$ –

p $3{,}6-1\frac{1}{2}=3\frac{6}{10}-1\frac{1}{2}=2\frac{5}{8}$ –

q $1{,}75+\frac{5}{6}=1\frac{75}{100}+\frac{5}{6}=1\frac{80}{106}$ –

Zuzia, cieszę się, że podjęłaś próbę rozwiązania każdego z przykładów. Cieszy mnie również to, że prawidłowo zamieniasz liczby dziesiętne na liczby mieszane. Niestety pojawia się problem z dodawaniem i odejmowaniem ułamków. Nie wolno dodawać ani odejmować ułamków, gdy nie mają wspólnego mianownika.

Najpierw powinnaś je sprowadzić do wspólnego mianownika poprzez rozszerzenie (pomnożenie licznika i mianownika przez tą samą liczbę) (patrz przykład **b**) lub skrócenie ułamka (podzielenie licznika i mianownika przez tą samą liczbę) (patrz przykład **a**). Kolejną rzeczą jest wyłączanie całości z ułamka. Robimy to tylko i wyłącznie wtedy, gdy licznik jest większy od mianownika (nigdy odwrotnie) (patrz przykład **c**). Postaraj się to poćwiczyć (np. na stronie: https://www.matzoo.pl/klasa6/dodawanie-i-odejmowanie-ulamkow-zwyklych_30_450 , https://www.matzoo.pl/klasa6/dodawanie-liczb-mieszanych_30_201.html , https://www.matzoo.pl/klasa7/odejmowanie-liczb-mieszanych_53_355) Rada na przyszłość: zapisuj wszystkie obliczenia i przekształcenia, które wykonujesz na poszczególnych liczbach w takiej kolejności w jakiej pojawiają się one w przykładzie (nawet jeśli nic nie zmieniasz np. w pierwszej liczbie).

Rysunek 2. Przykład oceny kształtującej przekazanej do pierwszej pracy domowej wraz z zaznaczonymi elementami informacji zwrotnej – fragment pracy Zuzi

W ramach badań zostały przeprowadzone analizy pisemnych prac uczniów. Zostały porównane liczby poprawnych odpowiedzi (podane w procentach) w grupie kontrolnej i w grupie badawczej z trzech prac domowych, z kartkówki oraz ze sprawdzianu. Prace oceniane były zgodnie z kluczem odpowiedzi. Prace pisemne zawierały od 14 do 19 przykładów analogicznych do tych wykonywanych w trakcie lekcji. Ze względu na to, że sprawdzian zawierał wszystkie rodzaje ćwiczonych działań był on najtrudniejszą pracą. Otrzymane porównania posłużyły do odpowiedzenia na pytania:

- Czy przekazywanie ocen kształtujących wpłynęło na systematyczne podnoszenie wyników uczniów?
- Czy wystąpiły znaczące różnice w wynikach ze sprawdzianu osiągniętych przez uczniów z grupy badawczej w porównaniu do uczniów z grupy kontrolnej?

Dla uczniów z grupy badawczej została przygotowana anonimowa internetowa ankieta, dotycząca opinii uczniów na temat oceniania kształtującego. Ankieta zawierała 14 pytań zamkniętych. Dokładna treść pytań została ukazana przy analizie odpowiedzi uczniów (paragraf 6.2). Poprzez tę ankietę poszukiwano odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

- Czy uczniowie uważają, że ocena kształtująca (informacja zwrotna) pomaga im w nauce matematyki?
- Jakie korzyści ze stosowania oceny kształtującej zauważają uczniowie?
- W jaki sposób uczniowie chcieliby być oceniani w trakcie uczenia się matematyki?

WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Analiza prac uczniów

W trakcie trwania badania były zliczane liczby poprawnych odpowiedzi w pisemnych pracach uczniów w grupie badawczej i w grupie kontrolnej. Prace oceniane były zgodnie z kluczem odpowiedzi. Ze względu na różną liczbę możliwych prawidłowych odpowiedzi w tych pracach, ilość poprawnych odpowiedzi uczniów została wyrażona za pomocą procentów. Wyniki zebrane w obu grupach zostały umieszczone w tabelach poniżej. Brak danych w jakimś miejscu oznacza, że dany uczeń nie napisał danej pracy.

Tabela 1. Liczba poprawnych odpowiedzi z 3 prac domowych, kartkówki oraz sprawdzianu w grupie badawczej

Nr	I praca domowa	II praca domowa	Kartkówka	III praca domowa	Sprawdzian
1	6%	0%	0%	-	0%
2	18%	14%	16%	-	0%
3	65%	-	**79%**	57%	40%
4	24%	7%	**42%**	0%	7%
5	0%	7%	**21%**	7%	-
6	82%	71%	79%	21%	57%
7	88%	86%	**89%**	29%	**90%**
8	76%	100%	84%	93%	93%
9	35%	75%	-	0%	20%
10	82%	93%	74%	36%	70%
11	94%	100%	89%	50%	63%
12	94%	93%	47%	100%	27%
13	94%	89%	58%	29%	67%
14	100%	100%	**100%**	100%	90%
15	94%	-	53%	7%	20%
16	100%	89%	89%	93%	83%
17	47%	100%	68%	21%	-
18	100%	71%	89%	93%	90%
19	-	82%	-	100%	17%
20	-	7%	0%	0%	0%
21	-	7%	**16%**	0%	-
22	-	-	74%	36%	60%
średnia	**55%**	**54%**	**53%**	**40%**	**41%**

Na podstawie tabeli 1 można zauważyć, że w 6 przypadkach (kolor niebieski) oceny kształtujące zastosowane podczas 1. i 2. pracy domowej przełożyły się na utrzymanie wyniku lub poprawienie sytuacji na kartkówce. Patrząc na sprawdzian i inne prace pisemne można zauważyć, że tylko 1 osoba (kolor czerwony) podniosła swój wynik na sprawdzianie. Można zauważyć, że 4 pisemne oceny kształtujące (do 3 prac domowych i kartkówki) prawie wcale nie wpłynęły na podniesienie wyników uczniów w czasie sprawdzianu.

Tabela 2. Liczba poprawnych odpowiedzi z 3 prac domowych, kartkówki oraz sprawdzianu w grupie kontrolnej

Nr	I praca domowa	II praca domowa	Kartkówka	III praca domowa	Sprawdzian
1	94%	100%	**100%**	100%	87%
2	29%	29%	16%	0%	-
3	100%	93%	**100%**	100%	**100%**
4	88%	93%	63%	57%	33%
5	71%	-	21%	43%	0%
6	94%	79%	89%	93%	**100%**
7	12%	0%	11%	0%	7%
8	12%	0%	5%	0%	0%
9	65%	64%	53%	71%	20%
10	65%	-	**79%**	-	53%
11	47%	71%	11%	0%	7%
12	88%	100%	89%	79%	60%
13	94%	79%	**100%**	50%	60%
14	76%	86%	42%	-	-
15	100%	93%	95%	100%	93%
16	100%	93%	**100%**	100%	87%
17	59%	36%	58%	29%	-
18	82%	100%	63%	71%	33%
średnia	**71%**	**62%**	**61%**	**50%**	**41%**

Podobnie jak w grupie badawczej, w grupie kontrolnej (tabela 2) oceny punktowe z pierwszej i drugiej pracy domowej u 5 uczniów (kolor niebieski) spowodowały wzrost lub utrzymanie wyniku poprawnych odpowiedzi na kartkówce. Trzy oceny punktowe z pracy domowych, które zamieniły się w jeden stopień (wystawiono jedną łączną ocenę za prace domowe wyrażoną stopniem) oraz kartkówka na oceny sumujące również prawie wcale nie podniosły, ani nie utrzymały liczby poprawnych odpowiedzi – tylko w 2 przypadkach (kolor czerwony) wynik ze sprawdzianu jest nie mniejszy niż z poprzednich prac.

Analiza prac uczniów pokazała, jakie wyniki uzyskali poszczególni uczniowie w danej grupie z danych prac. Otrzymane wyniki są rozbieżne i trudno jest wyciągnąć jednoznaczne wnioski. Tym samym w każdej z grup zostały policzone średnie dla klasy z poszczególnych prac pisemnych jakie były sprawdzane. Średnie wyniki procentowe w obu grupach malały na przestrzeni czasu (prawdopodobnie ze względu na coraz trudniejsze treści). Uczniowie z grupy badawczej zaczynali ze średnim wynikiem równym 55%, a zakończyli badanie z 41% poprawnych odpowiedzi. Natomiast w grupie kontrolnej spadek średniej liczby poprawnych odpowiedzi był znacznie większy. Pierwsza praca domowa w tej grupie dała wynik 71% poprawnych odpowiedzi, a sprawdzian tylko 41%. Obie grupy zakończyły badanie z takimi samymi średnimi wynikami poprawnych odpowiedzi. Jednak gdy porównamy średnie wyniki pierwszej pracy pisemnej oraz sprawdzianu, to w grupie badawczej zaobserwowano spadek średnich wyników o 14 punktów procentowych, podczas gdy w grupie kontrolnej ten spadek wyniósł 30 punktów procentowych. Dwa razy większy spadek liczby poprawnych odpowiedzi w grupie kontrolnej w porównaniu z grupą badawczą świadczy o tym, że ocena kształtująca ma wpływ na naukę uczniów i sprawia, że wiedza i umiejętności matematyczne są lepiej utrwalone. Należy podkreślić, że kolejne prace pisemne dotyczyły coraz obszerniejszych, a tym samym trudniejszych zagadnień, co może być przyczyną spadku liczby poprawnych rozwiązań. Jednak średnie wyniki z poszczególnych prac pisemnych wskazują, że stosowanie oceny kształtującej pomaga uczniom w zdobywaniu wiedzy, co w tym przypadku przejawiło się dwukrotnie mniejszym spadkiem liczby poprawnych odpowiedzi.

Odpowiedzi na pytania szczegółowe związane z analizą prac uczniów

Bardziej szczegółowa analiza uzyskanych wyników posłużyła poszukaniu odpowiedzi na poniższe pytania szczegółowe.

– Czy przekazywanie ocen kształtujących wpłynęło na systematyczne podnoszenie wyników uczniów?

Przypomnijmy, że oceny kształtujące przekazywane podczas dwóch pierwszych prac domowych tylko w 6 kartkówkach spowodowały podniesienie lub utrzymanie tego samego poziomu poprawnych odpowiedzi. Natomiast u 7 innych uczniów wynik z kartkówki znajdował się pomiędzy wynikiem pierwszej a drugiej pracy domowej. 6 kolejnych uczniów pogorszyło swoje wyniki na kartkówce. Wszystkie oceny kształtujące przekazane przed sprawdzianem podniosły wynik tylko jednej osobie. Procentowa ilość poprawnych odpowiedzi ze sprawdzianu u 8 uczniów była niższa niż wynik ich najsłabszej pracy, a 10 osób zdobyło wynik znajdujący się pomiędzy ich najlepszą i najsłabszą pracą. Jak widać, tylko u jednego ucznia oceny kształtujące wpłynęły na systematyczne podnoszenie wyników. Warto jednak dodać, że 10 osób (z 17 uczniów, którzy pisali zarówno 3. pracę domową, jak i sprawdzian) napisało lepiej sprawdzian niż ostatnią pracę domową. Świadczy to o pozytywnym wpływie oceny kształtującej na podnoszenie wyników uczniów. Co więcej, należy zauważyć, że średnie wyniki uczniów z grupy kontrolnej zmniejszają się z każdą kolejną pracą pisemną, natomiast w grupie badawczej (pomimo wystąpienia tendencji spadkowej) średni wynik ze sprawdzianu jest wyższy od średniej z trzeciej pracy domowej. Można więc stwierdzić, że ocena kształtująca pozwoliła nie tylko znacząco zmniejszyć spadek liczby poprawnych odpowiedzi, ale nawet umożliwiła delikatną poprawę względem ostatniej pracy domowej.

– Czy wystąpiły znaczące różnice w wynikach (ocenach) ze sprawdzianu osiągniętych przez uczniów z grupy badawczej w porównaniu do uczniów z grupy kontrolnej?

Uczniowie z grupy badawczej i grupy kontrolnej osiągnęli taki sam (41%) średni wynik poprawnych odpowiedzi. Jednak uczniowie w grupie badawczej dostali więcej ocen niedostatecznych niż uczniowie w grupie kontrolnej (tabela 3). Liczba pozytywnych (od dopuszczających do celujących) ocen w obu grupach jest taka sama, ale dwóm uczniom z grupy kontrolnej udało się rozwiązać cały sprawdzian bezbłędnie. Na podstawie poniższej tabeli (ukazującej procentowy rozkład ocen w obu grupach) można stwierdzić, że uczniowie z grupy kontrolnej lepiej sobie poradzili na sprawdzianie niż uczniowie z grupy badawczej. Jednak te oceny sumujące nie odzwierciedlają wpływu oceny kształtującej na poziom wiedzy uczniów, gdyż wyniki dwóch pierwszych prac domowych wyraźnie pokazują, że poziom wiedzy uczniów z grupy kontrolnej był lepszy na początku badania. Być może przyczyną takiej sytuacji było to, że uczniowie z grupy kontrolnej, którzy wiedzieli, że otrzymają stopień z pracy domowej wykonali ją bardziej starannie.

Tabela 3. Procentowy rozkład ocen sumujących w grupie badawczej i grupie kontrolnej

Zakres procentowy	Ocena	Grupa badawcza	Grupa kontrolna
0–29%	1 (ndst.)	36%	28%
30–49%	2 (dop.)	5%	11%
50–74%	3 (dst.)	23%	17%
75–89%	4 (db.)	5%	11%
99%	5 (bdb.)	18%	6%
100%	6 (cel.)	0%	11%

Warto jednak podkreślić, że średnia wyników ze sprawdzianu uczniów z obu grup jest taka sama (41% poprawnych rozwiązań). Biorąc pod uwagę, że wyniki grupy kontrolnej z dwóch początkowych prac domowych były znacznie lepsze niż wyniki grupy badawczej, można przypuszczać, że bez zastosowania oceny kształtującej w grupie badawczej, ich oceny ze sprawdzianu byłyby znacznie niższe. Tym samym uzyskanie podobnych ocen ze sprawdzianu można traktować jako pozytywny efekt.

Analiza ankiet

Anonimową ankietę przeprowadzono w grupie badawczej po przeprowadzonym eksperymencie dydaktycznym. Należy podkreślić, że w czasie prowadzenia badań nauczanie odbywało się w formie hybrydowej (ze względu na pandemię), przez co nauczyciel miał częściowo ograniczony kontakt z uczniami. Wpłynęło to na zmniejszenie okazji do przekazywania słownych informacji zwrotnych w trakcie lekcji. Jednak uczniowie otrzymywali pisemne oceny kształtujące, do których mogli wielokrotnie powracać. Tym samym opinia uczniów na temat wpływu oceny kształtującej na uczenie się przez nich matematyki, dotyczy pisemnych informacji zwrotnych.

Poniższe tabele (tabela 4 i tabela 5) zawierają dokładną treść pytań wraz z odpowiedziami uczniów.

Tabela 4. Odpowiedzi uczniów z grupy badawczej dotyczące ich opinii o wpływie ocen kształtujących na ich uczenie się matematyki

Pytania\odpowiedzi	Tak	Chyba tak	Nie wiem	Chyba nie	Nie
Czy ocena kształtująca pomogła Ci się uczyć?	33%	67%	0%	0%	0%
Czy ocena kształtująca pozwalała Ci na lepsze zaplanowanie nauki?	33%	67%	0%	0%	0%
Czy dzięki ocenie kształtującej byłeś bardziej pewny swojej wiedzy i umiejętności?	58%	17%	17%	0%	8%
Czy ocena kształtująca zachęcała i motywowała Cię do pracy?	42%	42%	8%	0%	8%
Czy ocena kształtująca wpłynęła na to, że nie bałeś się popełniać błędów?	42%	33%	8%	0%	17%
Czy ocena kształtująca zachęcała Cię do poszukiwania nowych dróg rozwiązywania zadań?	25%	41%	17%	17%	0%
Czy uważasz, że dzięki ocenie kształtującej mógłbyś nadrobić zaległości?	42%	42%	8%	8%	0%

Czy dzięki ocenie kształtującej czułeś się zauważony przez nauczyciela?	33%	8%	42%	0%	17%
Czy uważasz, że przez ocenę kształtującą nauczyciel wspierał Cię i kierował indywidualnie Twoim procesem uczenia się?	50%	25%	0%	17%	8%
Czy uważasz, że ocena kształtująca wpływała na bieżącą poprawę Twoich wyników z matematyki?	34%	50%	8%	0%	8%
Czy uważasz, że ocena kształtująca wpłynęła na przyspieszenie postępów w nauce?	34%	42%	8%	8%	8%
Czy uważasz, że oceny kształtujące, które otrzymywałeś wpłynęły na ocenę sumującą (stopień) ze sprawdzianu?	16%	25%	25%	17%	17%
Czy chciałbyś, aby ocena kształtująca pojawiła się na stałe na lekcjach matematyki?	75%	8%	17%	0%	0%

Wyniki ankiety (tabela 4) pokazują, że uczniowie dostrzegają korzystny wpływ ocen kształtujących na uczenie się matematyki. Wszyscy uczniowie odpowiedzieli pozytywnie („tak" lub „chyba tak") na pytania o to, czy ocena kształtująca pomogła im się uczyć matematyki oraz czy pomogła lepiej zaplanować naukę, przy czym 33% badanych było tego w pełni pewnych. 84% badanych uważa, że ocena kształtująca motywowała ich do pracy i umożliwia uzupełnienie zaległości. 75% badanych uważa, że ocena kształtująca pomaga w budowaniu pewności siebie dotyczącej umiejętności matematycznych, przez co uczniowie nie bali się popełniać błędów. Przyczyniły się do tego przekazywane informacje dotyczące mocnych stron prac uczniów. 66% ankietowanych zadeklarowało, że ocena kształtująca zachęcała ich do poszukiwania własnych, nowych sposobów rozwiązywania zadań.

Badani mieli trudności z określeniem, czy dzięki ocenie kształtującej czuli się zauważeni przez nauczyciela (42% odpowiedziało „nie wiem"), zaś 41% dostrzegło pozytywny wpływ informacji zwrotnej w tym obszarze.

Warto podkreślić, że 75% uczniów podało, iż za pomocą informacji zwrotnej nauczyciel wspierał i indywidualnie kierował ich procesem uczenia się, z czego 50% jest przekonanych o tej zależności. Co ciekawe, 84% ankietowanych zadeklarowało, że ocena kształtująca wpływała na bieżącą poprawę ich wyników z matematyki, natomiast tylko 41% uważa, że informacja zwrotna wpłynęła na stopień ze sprawdzianu. W pytaniu dotyczącym zależności między oceną kształtującą a oceną sumującą pojawiła się największa rozbieżność w odpowiedziach uczniów – ich zdania były dość równomiernie podzielone. Natomiast 73% uczniów uważa, że ocena kształtująca przyspiesza ich postępy w nauce.

Badani dostrzegając zalety stosowania oceny kształtującej zadeklarowali w większości (83%), że chcieliby aby informacja zwrotna na stałe pojawiła się w nauczaniu matematyki, z czego 75% jest tego pewnych, zaś pozostali nie mają zdania na ten temat.

Tabela 5. Odpowiedzi uczniów z grupy badawczej dotyczące preferowanej oceny

	Feedback	Stopień	Oba	Obojętnie
W czasie zdobywania nowej wiedzy i umiejętności z matematyki wolisz feedback od nauczyciela czy stopień?	58%	0%	25%	17%

Uczniowie zapytani o to jak chcieliby być oceniani w trakcie zdobywania nowej wiedzy i umiejętności z matematyki (tabela 5), w większości (83%) podali, że chcieliby otrzymywać informację zwrotną, przy czym 58% uczniów oczekuje tylko oceny kształtującej, zaś 25% uczniów chce, aby była ona połączona ze stopniem. Dla 17% ankietowanych nie ma znaczenia forma oceny.

Odpowiedzi na wszystkie pytania pokazują, że ocena kształtująca została dobrze odebrana przez uczniów. Pytania w ankiecie (tabela 4) zostały tak skonstruowane, że udzielając odpowiedzi na „tak" potwierdza się zalety płynące ze stosowania oceny kształtującej w nauczaniu matematyki. W 11 pytaniach odpowiedzi na „tak" lub „chyba tak" przekraczają 50%, co oznacza, że ponad połowa badanych dostrzega korzyści w większości obszarów, na które może oddziaływać ocena kształtująca. Część uczniów jest niezdecydowanych i w swych odpowiedziach wskazywali „nie wiem". Natomiast w 11 pytaniach odpowiedzi „nie" lub „chyba nie" nie przekroczyły łącznie 17%, zaś w dwóch pozostałych nie przekraczają 34%.

Podsumowując wyniki ankiety, można stwierdzić, że uczniowie zauważyli korzystny wpływ ocen kształtujących na ich uczenie się matematyki i chcieliby ją otrzymywać w przyszłości. Uczniowie zauważyli różnorodne korzyści (w różnych obszarach) płynące ze stosowania informacji zwrotnej. Jednak nie zauważyli oni bezpośredniego przełożenia oceny kształtującej na wzrost ocen sumujących, co jest zbieżne z otrzymanymi przez nich wynikami ze sprawdzianu.

PODSUMOWANIE

Przeprowadzony eksperyment dydaktyczny wykazał, że ocena kształtująca nie wpłynęła znacznie na poprawę wyników uczniów z matematyki, ponieważ uczniowie w grupie eksperymentalnej nie otrzymali lepszych ocen sumujących niż uczniowie w grupie kontrolnej. Jednak nie można jednoznacznie stwierdzić, że ocena kształtująca nie pomogła w nauce matematyki. Badania wykazały, że dzięki ocenie kształtującej uczniowie w grupie badawczej zanotowali mniejszy spadek średniej liczby poprawnych odpowiedzi niż uczniowie z grupy kontrolnej. Co więcej zarówno uczniowie jak i nauczyciel biorący udział w eksperymencie, zauważyli pozytywny wpływ oceny kształtującej na proces zdobywania wiedzy przez uczniów, o czym świadczą odpowiedzi uczniów z ankiety. Informacja zwrotna pomaga w nauce matematyki poprzez pochwały, które motywują do działania, wskazywanie miejsca, w którym uczeń obecnie się znajduje oraz dawanie indywidualnych wskazówek. Dodatkową zaletą oceny kształtującej jest jej emocjonalność, która pozwala na przełamanie lęku przed popełnieniem błędu oraz otrzymaniem negatywnego stopnia, i przez to może wpływać na podejmowanie prób przez uczniów. Ważnym aspektem oceny kształtującej jest także jej forma pisemna, która może pomóc uzupełnić zaległości lub lepiej wyćwiczyć umiejętności, które nie zostały opanowane w czasie zajęć.

Podsumowując, ocena kształtująca ma dużo zalet i może pomagać w nauce matematyki, dlatego warto ją stosować w nauczaniu, pomimo, że pisanie indywidualnych informacji zwrotnych jest czasochłonne (tu z pomocą mogą przyjść programy przekazujące automatyczną informację zwrotną). Warto jednak podkreślić, że uczniowie potrzebują czasu, aby nauczyć się w pełni wykorzystywać potencjał informacji zwrotnej.

BIBLIOGRAFIA

Barana, A., i Marchisio, M. (2016). Ten good reasons to adopt an automated formative assessment model for learning and teaching Mathematics and scientific disciplines. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *228*, 608–613.

Bąbel, P. (2007). Kształtująca ocena oceniania kształtującego. *Psychologia w szkole*, *4*, 61–64.

Bennett, R. E. (2011). Formative assessment: a critical review. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *27*(5), 5–25.

Black, P., i Wiliam, D. (2010). Inside the Black Box: Raising Standards Through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, *92*(1), 81–90.

Dojer, A., i Swat-Pawlicka, M. (red.) (2016). Zeszyt piąty: Rozwód oceny kształtującej z sumującą. W: *Ocenianie kształtujące: Dzielmy się tym, co wiemy!,* Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Faber, J.M., Luyten, H., i Visscher, A.J. (2017). The Effects of a Digital Formative Assessment Tool on Mathematics Achievement and Student Motivation: Results of a Randomized Experiment. *Computers & Education*, 106, 83–96.

Ginsburg, H. P. (2009). The Challenge of Formative Assessment in Mathematics Education: Children's Minds, Teachers' Minds. *Human Development*, *52*(2), 109–128.

Gregorczyk, M., i Swat-Pawlicka, M. (red.) (2016). Zeszyt trzeci: Informacja zwrotna. W: *Ocenianie kształtujące: Dzielmy się tym, co wiemy!,* Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Jackowska-Boryc, E., i Pyzara, A. (2020). Znaczenie informacji zwrotnej w nauczaniu matematyki. W: E. Juskowiak i H. Kąkol (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki, 8*, 29–54.

McIntosh, M. E. (2010). Formative Assessment in Mathematics. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, *93*(6), 92-96.

Rakoczy, K., Pinger, P., Hochweber, J., Klieme, E., Schütze, B., i Besser, M. (2019). Formative Assessment in Mathematics: Mediated by Feedback's Perceived Usefulness and Students' Self-efficacy. *Learning and Instruction*, *60*, 154–165.

Sterna, D. (2014). *Uczę (się) w szkole*. Warszawa: Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Sterna, D., i Dojer, A. (red.) (2016). Zeszyt pierwszy: Cele lekcji. W: *Ocenianie kształtujące: Dzielmy się tym, co wiemy!,* Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Sterna, D., i Dojer, A. (red.) (2016). Zeszyt drugi: Nacobezu. W: *Ocenianie kształtujące: Dzielmy się tym, co wiemy!,* Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Sterna, D., i Modzelewska-Buławicka, E. (red.) (2016). Zeszyt siódmy: Ocena koleżeńska i samoocena. W: *Ocenianie kształtujące: Dzielmy się tym, co wiemy!,* Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Szyling, G. (2010). Ocenianie kształtujące, czyli o niejednoznaczności. W: *Teraźniejszość i przyszłość oceniania kształtującego*. Kraków: Grupa Tomami, 118–129.

Temperament ucznia a osiągniecia w uczeniu się matematyki

Tomasz Szwed

Akademia Nauk Stosowanych w Raciborzu
tomasz.szwed@akademiarac.edu.pl
ORICID: 0009-0007-1235-2010

Streszczenie

Treść artykułu to relacja z badań przeprowadzonych w 2022 roku. Badaną grupą byli uczniowie trzech szkół licealnych w wieku ok. 18 lat. Celem badań było znalezienie zależności między temperamentem uczniów a ich osiągnięciami matematycznymi. Zależność taka nie została potwierdzona. Uzasadnienie tego faktu zostało przeprowadzone na podstawie analiz trudności zadań testu diagnostycznego w odniesieniu do czterech grup temperamentu oraz analizy porównawczej wyników całościowych testu dla wybranych podgrup, z zachowaniem procedur statystycznych w środowisku R. Respondenci sami dokonywali subiektywnego wyboru spośród czterech typów temperamentów. Wobec braku zależności autor wskazał inne czynniki indywidualne i pedagogiczne mające wpływ na osiągniecia w zakresie matematyki w liceum i technikum.

Abstract

The content of the article is a report on research conducted in 2022. The study involved a group of students from three high schools, aged approximately 18 years. The primary objective of the research was to identify a correlation between the students' temperament and their mathematical achievements. However, no such correlation was confirmed. The justification for this finding was based on an analysis of the difficulty of tasks in the diagnostic test with respect to the four temperament groups, as well as a comparative analysis of the overall test results for selected subgroups, conducted in accordance with statistical procedures in the R environment. Respondents were asked to subjectively choose among the four types of temperament. Given the absence of a correlation, the author highlighted other individual and pedagogical factors that may influence mathematical performance in high school and technical school settings.

WPROWADZENIE

Jednoznaczne wskazanie recepty na skuteczne uczenie się i nauczanie matematyki nie jest możliwe. Po pierwsze dlatego, „że każdy człowiek uczy się na swój sposób" (Clauss, 1987, s. 21). Zakres i rozpiętość różnic indywidualnych w uczeniu się jest bardzo duży. Po drugie różnice mogą występować pomiędzy osobami. Są to różnice interindywidualne. Z kolei różnice występujące u danego człowieka określa się jako intraindywidualne. Nie każdy bowiem człowiek, jak twierdzi Gunter Clauss, uczy się zawsze i wszystkiego w ten sam sposób (Clauss, 1987, s. 22). Różnice indywidualne w uczeniu się wynikają między innymi z tempa uczenia się, staranności, motywacji, regulacji czynności oraz organizacji poznawczej (Clauss, 1987, s. 23). Nauczyciele chcący efektywnie nauczać swoich uczniów powinni sięgać do skarbca dydaktyki i psychologii kształcenia. Efekty kształcenia zależą od wielu czynników, do których zaliczyć można dyspozycje psychiczne uczniów oraz ich sprawność poznawczą. Czesław Kupisiewicz do tych pierwszych zalicza wrażliwość zmysłów oraz spostrzeżenia. Ważną rolę odgrywa również uwaga, zainteresowania oraz motywacja. Nie można zapomnieć o aspiracjach uczniowskich oraz o pamięci będącej podstawowym warunkiem skutecznego uczenia się (Kupisiewicz, 2012, s. 211–213).

Badając uwarunkowania kształcenia matematycznego, należy wziąć pod uwagę cechy indywidualne uczących się. Do tych cech należy również temperament. Jest on jedną z cech składowych osobowości. Z nim się rodzimy. Jest trwały, ale nie niezmienny. Uczniowie w klasach szkolnych cechują się niezwykłą różnorodnością. Każdy ma inną osobowość, inny charakter czy też temperament. Współczesna psychologia dostarcza różnych stratyfikacji cech indywidualnych.

KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA MODELI TEMPERAMENTÓW

Temperament jest pojęciem psychologicznym. Pochodzi od łacińskiego słowa *temperamentum* oznaczającego *umiar*. Wincenty Okoń definiuje temperament jako „zespół względnie stałych cech zachowania i działania osobnika, jak siła i szybkość reagowania, pobudliwość, tempo procesów psychicznych; cechy te są zależne od dziedziczonych właściwości układu nerowego i niewielkim tylko stopniu poddają się wpływom otoczenia" (Okoń, 1996, s. 287). Zgodnie z definicją Jana Strelaua „temperament odnosi się do względnie stałych cech osobowości występujących u człowieka od wczesnego dzieciństwa i mających swoje odpowiedniki w świecie zwierząt. Będąc pierwotnie zdeterminowany przez wrodzone mechanizmy neurobiochemiczne, temperament podlega powolnym zmianom spowodowanym procesem dojrzewania oraz indywidualnie specyficznym oddziaływaniem między genotypem a środowiskiem" (Strelau, Zawadzki 2008, s. 780). Temperament trudno jest zmienić, jest więc cechą osobowości względnie trwałą. Już od dawna wielu badaczy próbuje opisać temperament za pomocą różnych cech szczegółowych, budując ich typologie i grupując te cechy w modele. W literaturze można spotkać opis tzw. Wielkiej Piątki, czyli 1) neurotyczności vs stabilności emocjonalnej, 2) ekstrawersji, 3) intelektu/otwartości na doświadczenie, 4) ugodowości i 5) sumienności (Cieciuch, Strus, Ponikiewska, 2024, s. 12). Kolejnym modelem jest Model Wielkiej Szóstki (HEXACO), w którym do modelu Wielkiej Piątki dodano szóstą cechę, czyli uczciwość-pokorę (Cieciuch, Strus, Ponikiewska, 2024, s.12). Model Wielkiej Dwójki obejmuje jedynie samoregulację oraz dynamizm (Cieciuch, Strus, Ponikiewska, 2024, s. 21)

W skład cech kolejnego modelu – Kołowego Modelu Metacech Osobowości (KMMO) wchodzą: powściągliwość, stabilność, integracja, plastyczność, poszukiwanie wrażeń, rozhamowanie, dysharmonia i pasywność (Cieciuch, Strus, Ponikiewska, 2024, s. 25).

Jeszcze jednym wartym uwagi pedagoga modelem jest model OKC, czyli Objawy–Kompetencje–Cechy. Składa się on z trzech warstw: objawy dobrostanu i problemów, kompetencje osobowościowe oraz cechy temperamentu (Cieciuch, Strus, Ponikiewska, 2024, s. 30). Zgodnie z tym modelem temperament posiada 4 cechy: wrażliwość, wytrzymałość, dynamiczność i inercyjność[1]. Każda z cech jest opisana poprzez trzy aspekty – energetyczny, czasowy i autoregulacyjny.

Po przeanalizowaniu różnych modeli temperamentu nasuwają się dwa kluczowe pytania istotne dla nauczania matematyki. Pierwsze pytanie brzmi: Czy temperament i jego cechy mogą przewidywać skuteczność w nauce matematyki? Drugie: Czy typ i rodzaj temperamentu są istotnymi czynnikami wpływającymi na efektywność nauki uczniów, szczególnie w kontekście przygotowań do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki?

Jeśli odpowiedzi na te pytania byłyby twierdzące, należałoby rozważyć opracowanie metod nauczania dostosowanych do różnych typów i cech temperamentu.

[1] Praktycznie nieznane wśród pedagogów pojęcie. Inercyjność to funkcjonowanie powolne i oszczędne energetycznie z tendencją do kontynuowania działania już rozpoczętego.

Jan Strelau zauważa, że „temperament czyni różnicę”[2] podkreślając, że ludzie działają i zachowują się inaczej w zależności od swojego temperamentu. Czy tak jest w przypadku matematyki? I te pytania stały się inspiracją do przeprowadzenia pilotażowych badań empirycznych.

Nie będąc psychologiem, podjąłem decyzję o zastosowaniu w opisywanych badaniach bardzo czytelnego podziału temperamentu pochodzącego od Hipokratesa. Okoń przejrzyście opisuje typologię antycznego ojca medycyny: „Istnieją cztery typy temperamentów: sangwinik – osobnik o usposobieniu żywym i zmiennym, aktywnym, choć nie dość wytrwały, zapalający się łatwo, lecz szybko zapominający o swoich uczuciach; choleryk – człowiek impulsywny, lecz wytrwały w swoich poczynaniach i uczuciach; flegmatyk – typ mało pobudliwy, o usposobieniu powolnym, lecz opanowany i wytrwały w swoich działaniach; melancholik – typ słabo reagujący uczuciowo, a przy tym nie dość aktywny i niezbyt wytrwały w swoich działaniach i uczuciach” (Okoń, 1996, s. 298).

Każdy z typów temperamentów w modelu Hipokratesa w bardzo przystępny sposób opisują Mirosław Maliński (2000) i Ewy Błaszczak (2017).

Melancholik, czyli wrażliwy introwertyk. Jego cechy to: apatia, sztywność, refleksyjność, powściągliwość, samotność, pesymizm, spokój oraz lęk. Melancholik to typ realizatora: wspierający, rzetelny, życzliwy, pomocny, ciepły, nastawiony na bezpieczeństwo, łagodzący konflikty, dostosowujący się, wykonujący, zorganizowany, zaplanowany, uczuciowy, nastawiony na innych ludzi, wprowadzający harmonię, lubiący małe kroki, hojny, empatyczny, lubiący spokój, lubiący sprawdzone rozwiązania, doceniający innych, współpracujący, lojalny.

Flegmatyk, czyli powolny i spokojny introwertyk. Jego cechy to bierność, ostrożność, pojednawczość, wysoka kontrola, zrównoważenie, solidność, łagodność oraz powaga. Flegmatyk to typ analityka: analityczny, rozsądny, logiczny, formalny, podchodzący z dystansem, ceniący wiedzę, wprowadzający reguły, przestrzegający zasad, rozwiązujący problemy, ostrożny, opanowany, nastawiony na dokładność, analizujący ryzyka, rozważający za i przeciw, dociekliwy, ceniący dane, oszczędny, metodyczny, ceniący indywidualną prace, pedantyczny, bezstronny, poukładany.

Sangwinik, czyli pogodny ekstrawertyk. Jego cechy to towarzyskość, otwartość, gadatliwość, wrażliwość, niefrasobliwość, przywódczość, beztroska oraz żywość. Sangwinik to typ inspiratora: kreatywny, wesoły, wielowątkowy, czarujący, optymistyczny, nastawiony na atmosferę, dusza towarzystwa, bezpośredni, inspirujący, umiejący załatwiać, nastawiony na nowe, entuzjastyczny, energetyczny, instynk-

[2] https://web.swps.pl/strefa-psyche/blog/relacje/16988-temperament?dt=1705082125893 z 20.05.2024.

towny, oryginalny, wystawny, intuicyjny, innowacyjny, spontaniczny, zachwycony sobą, towarzyski, nieschematyczny.

Choleryk, czyli impulsywny ekstrawertyk. Jego cechy to: drażliwość, niepokój, agresja, zmienność, wybuchowość, optymizm, impulsywność oraz aktywność. Choleryk to typ wojownika: wizjonerski, zdeterminowany, skoncentrowany na celu, rywalizujący, twardy, nastawiony na wygraną, przewodzący, dyplomatyczny, delegujący, efektywny, nastawiony na działanie, dynamiczny, przyspieszający, szybki, decyzyjny, pionierski, praktyczny, pewny siebie, celowy, lubiący wyzwania, ambitny, nadający ton.

Warto dodać, że każdy człowiek posiada temperament dominujący oraz uzupełniający.

METODOLOGIA BADAŃ

Badanie miały charakter pilotażowy.

Cel badań: wykazanie zależności (albo jej braku) między temperamentem ucznia a jego osiągnieciami matematycznymi mierzony za pomocą testu szkolnego.

Pytanie badawcze: Czy istnieje zależność między temperamentem ucznia a jego osiągnieciami matematycznymi? Hipoteza: temperament ucznia wpływa na jego osiągnięcia edukacyjne w obszarze edukacji matematycznej.

Badania zostały przeprowadzone na przełomie września i października 2022 roku w 3 szkołach (2 licea i 1 technikum).

Próba badawcza: 285 uczniów (N=285). Badani uczniowie to adolescenci w wieku 18–19 lat.

Przeprowadzono sondaż diagnostyczny, stosując badania ankietowe. Wykorzystano 2 narzędzia: subiektywny test samooceny temperamentu oraz test osiągnięć złożony z 8 zadań punktowanych w skali 0–1 (załączniki).

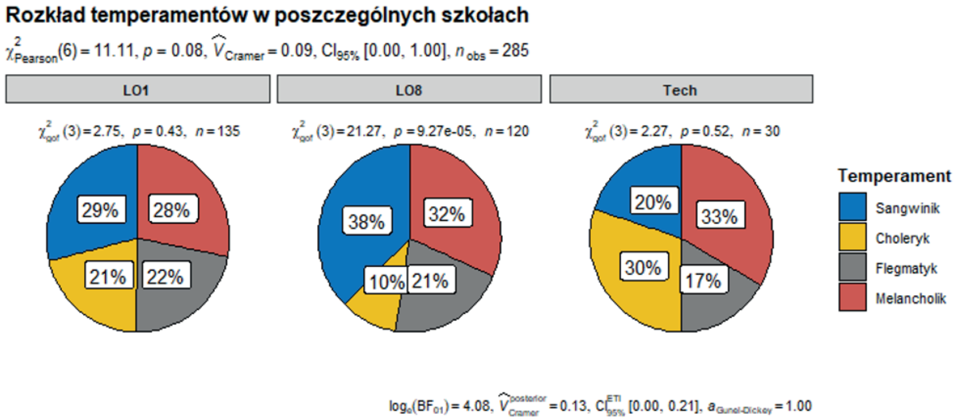
Na udzielenie odpowiedzi oraz na rozwiązanie wiązki 8 zadań respondenci mieli godzinę. Do arkusza wybrano zadania nietypowe jednak niezbyt trudne. Celem badacza było bowiem to, żeby potencjalna trudność zadania nie była przeszkodą w jego rozwiązaniu i jego pominięciu w trakcie rozwiązywania arkusza.

Ankietę uzupełniali w obecności prowadzącego badania albo nauczycieli matematyki uczących w danej szkole.

Wyniki badań zebrano w tabelach arkusza kalkulacyjnego, a następnie poddano je obróbce statystycznej przy wykorzystaniu środowiska języka *R* za pomocą aplikacji *RStudio.* W narzędziu tym została również przygotowana graficzna prezentacja wyników. Zastosowano niezbędne testy statystyczne gwarantujące wiarygodność wyników. W analizach statystycznych przyjęto $p = 0.05$.

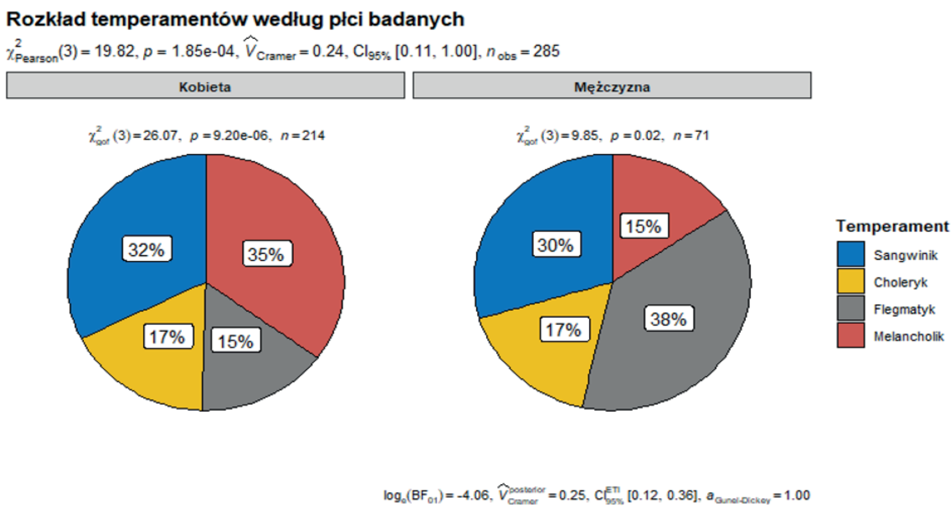
ANALIZA WYNIKÓW ANKIETY

Analiza 1.



Badane szkoły różnią się rozkładem temperamentów uczniowskich. Po zsumowaniu liczby badanych uczniów zauważamy, że najliczniejszą grupę stanowią sangwinicy (32%), dalej melancholicy (30,2%), następnie flegmatycy (21%) i wreszcie cholerycy (17,2%).

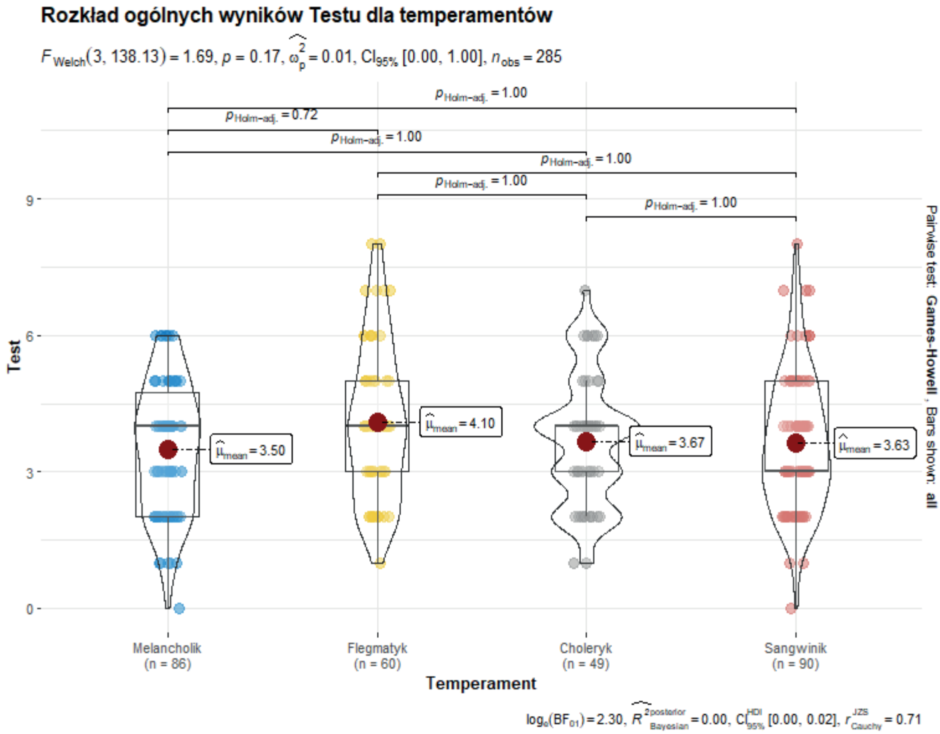
Analiza 2.



Podział temperamentów w ramach płci też nie jest równomierny. Wśród badanych kobiet dominują melancholicy (35%) i sangwinicy (32%), wśród badanych mężczyzn flegmatycy (38%) i sangwinicy (30%). Podział przedstawicieli obu płci rozłożył się w stosunku 1:3 na korzyść kobiet.

<u>Analiza 3.</u>

Każdy z respondentów (N=285) rozwiązywał osiem zadań, za które mógł uzyskać od 0 do 8 punktów. Średnie wyniki punktowe w ramach poszczególnych temperamentów przedstawia wykres poniżej.



Najwyższy wynik osiągnęła grupa respondentów uważających się za flegmatyków (średnio 4,1 pkt). Cholerycy uzyskali średni wynik na poziomie 3,67 pkt. Sangwinicy 3,63 pkt, natomiast grupa melancholików średnio 3,5 pkt.

Po przypisaniu średnich wyników do kompletnego rozwiązania zadań, można zauważyć, że flegmatycy rozwiązali 4 zadania, a pozostałe grupy po 3 całe zadania. Porównanie statystyczne nie daje jednak prawa do stwierdzenia, że wynik flegmatyków jest istotnie różny od pozostałych badanych grup.

ANALIZA WYNIKÓW KOLEJNYCH ZADAŃ W ZALEŻNOŚCI OD TEMPERAMENTU ROZWIĄZUJĄCYCH

Analiza wyników zadania 1.

Zadanie 1. Oblicz $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}$

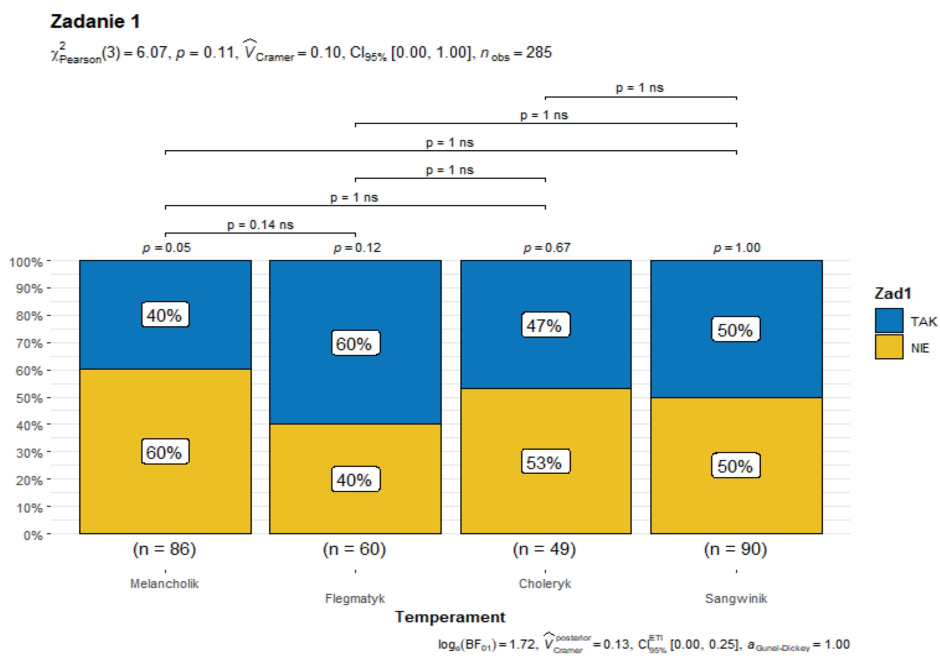
Zadanie obliczeniowe, sprawdzające umiejętność stosowania poprawnej kolejności wykonywania działań.

Stosując podział zadań według ich wskaźników łatwości w skali zaproponowanej przez Bolesława Niemierkę (1999, s. 154), otrzymano następujące wyniki.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,40	trudne
Flegmatyk	0,60	umiarkowanie trudne
Choleryk	0,47	trudne
Sangwinik	0,50	umiarkowanie trudne

Z interpretacji łatwości zadań wynika, że dla każdej z badanych grup zadanie okazało się trudne albo umiarkowanie trudne. Nie można stwierdzić znaczących różnic między grupami.

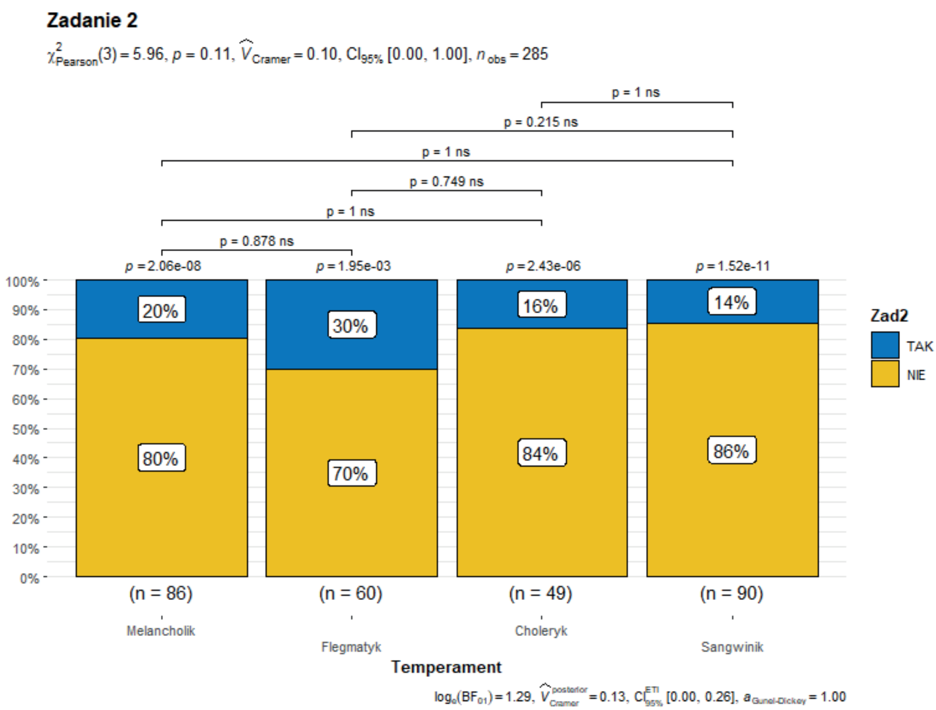
Obserwację potwierdza również analiza porównawcza między typami temperamentów przedstawiona poniżej (TAK oznacza rozwiązanie zadania i zdobycie 1 punktu, NIE oznacza brak rozwiązanie i wynik 0 punktów).



Analiza wyników zadania 2.

Zadanie 2. Cegła waży 3 kg i jeszcze ćwierć cegły. Ile waży cegła?
Zadanie sprawdzające umiejętność układania równania umożliwiającego rozwiązanie problemu.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,20	Trudne
Flegmatyk	0,30	Trudne
Choleryk	0,16	Bardzo trudne
Sangwinik	0,14	Bardzo trudne



Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 2. na bardzo podobnym poziomie.

Analiza wyników zadania 3.

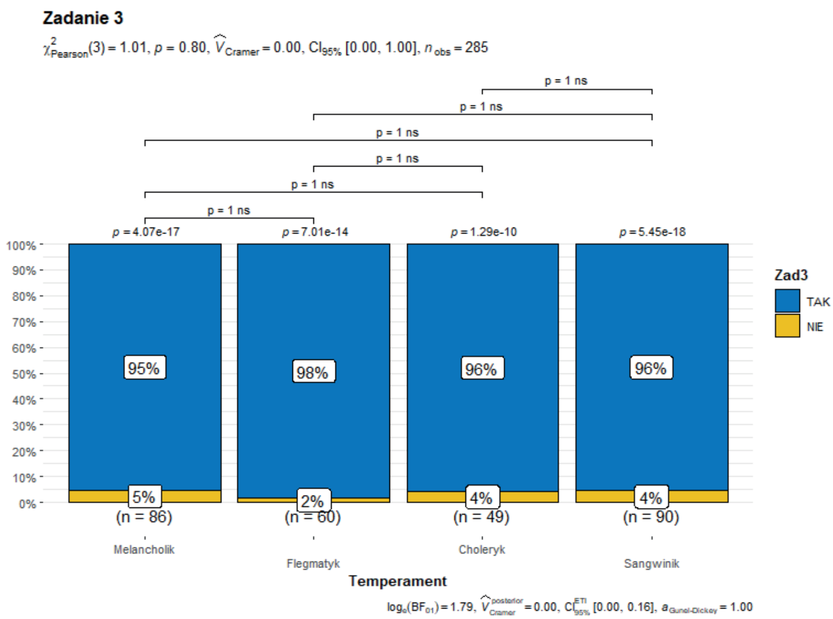
Zadanie 3.

Wpisz liczby 3, 4, 5, 7 i 9, tak aby suma tych liczb w każdej kolumnie, wierszu i na przekątnej była jednakowa. Każdą z liczb możesz wpisać TYLKO jeden raz.

2		6
		1
		8

Zadanie *Kwadrat magiczny*, sprawdzające umiejętność wykonywania prostych działań arytmetycznych.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,95	bardzo łatwe
Flegmatyk	0,98	bardzo łatwe
Choleryk	0,96	bardzo łatwe
Sangwinik	0,96	bardzo łatwe



Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 3. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się bardzo łatwe dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

Analiza wyników zadania 4.

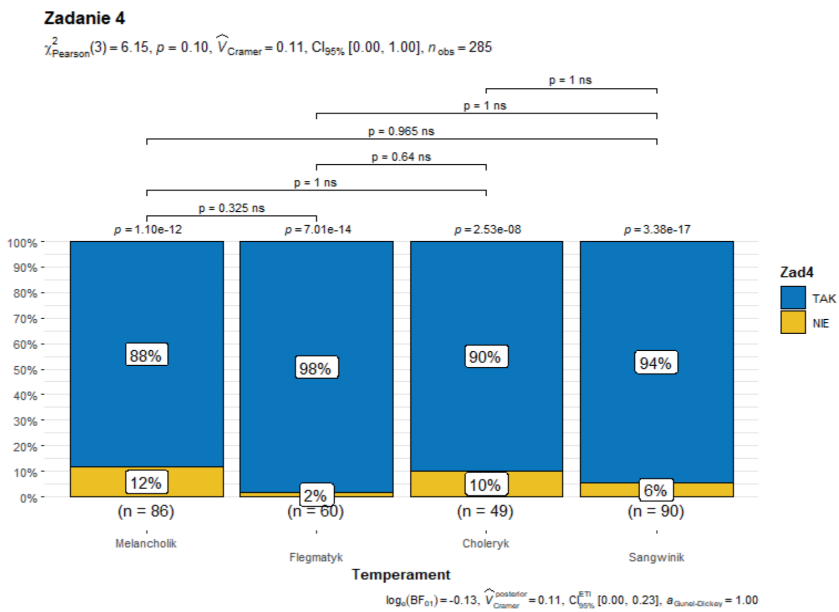
Zadanie 4. W 2019 roku 12-latek z Nigerii, Chika Ofili, zaproponował szybki sposób sprawdzenia podzielności liczby naturalnej przez 7. Rozważmy ten sposób na konkretnych przykładach.

Czy liczba 532 jest podzielna przez 7?
Oddzielamy od liczby 532 cyfrę jedności (2) i postępujemy następująco:
53 + 2 x **5** = 63. Liczba 63 jest podzielna przez 7, czyli liczba 532 też jest podzielna przez 7.
A liczba 135? Czy ona też dzieli się przez 7?
13 + 5 x **5** = 13 + 25 = 38. Liczba 38 nie dzieli się przez 7, czyli 135 też się nie dzieli przez 7.

Stosując test Chiki **sprawdź, czy liczba 105 jest podzielna przez 7.**

Zadanie opisujące bardzo ciekawy algorytm i sprawdzające umiejętność odtworzenia zaprezentowanego w instrukcji sposobu rozwiązania problemu.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,88	bardzo łatwe
Flegmatyk	0,98	bardzo łatwe
Choleryk	0,90	bardzo łatwe
Sangwinik	0,94	bardzo łatwe

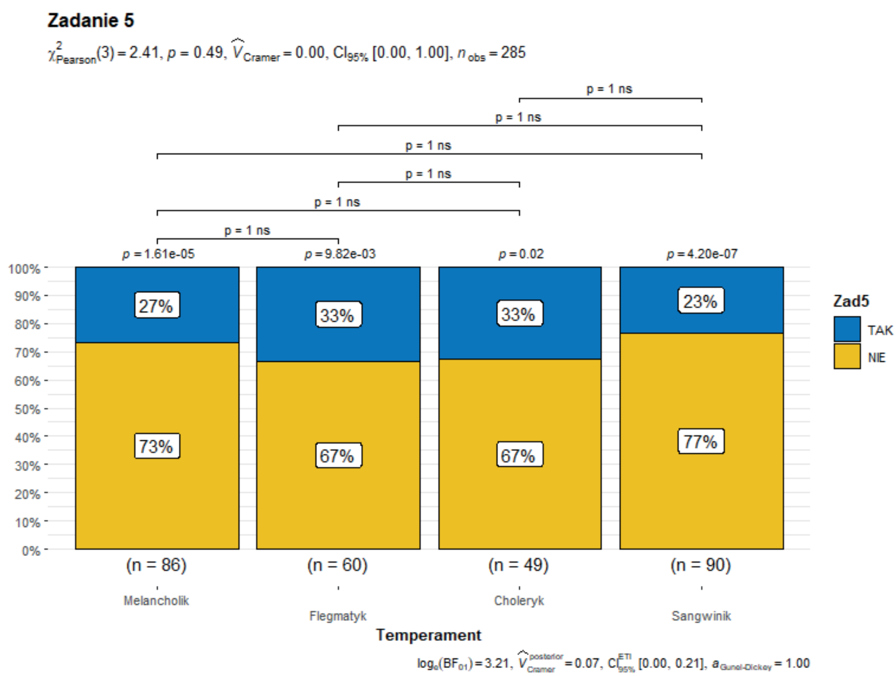


Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 4. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się bardzo łatwe dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

Analiza wyników zadania 5.

Zadanie 5. Liczba pierwsza jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie. Wypisz wszystkie liczby pierwsze ze zbioru {41, 51, 61, 71, 81, 91, 101}. Zadanie sprawdzające właściwe rozumienie pojęcia liczby pierwszej.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,27	trudne
Flegmatyk	0,33	trudne
Choleryk	0,33	trudne
Sangwinik	0,23	trudne



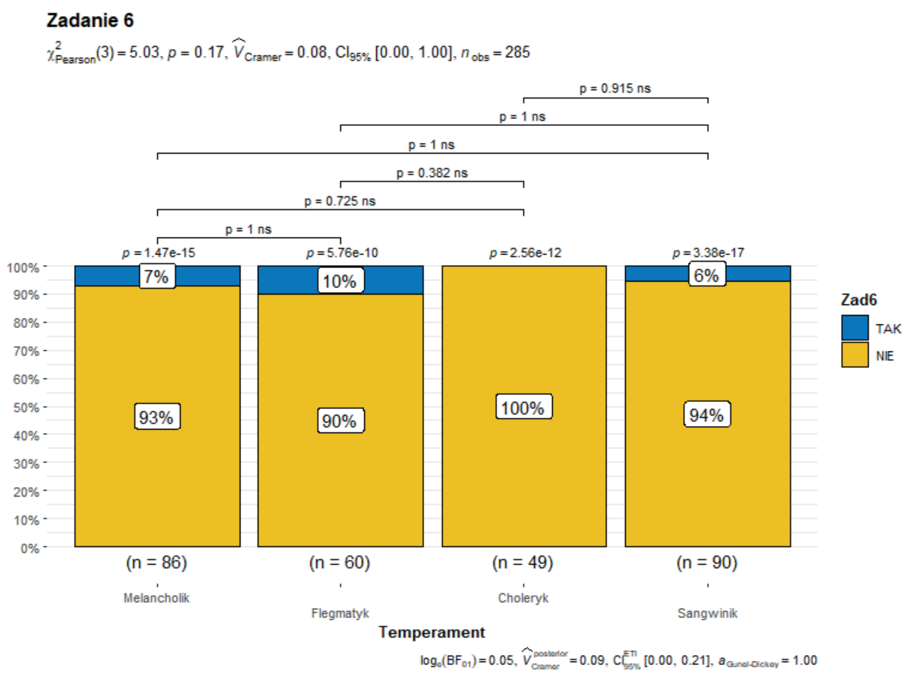
Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 5. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się trudne dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

<u>Analiza wyników zadania 6.</u>

Zadanie 6. Wróćmy do cegły. Jak zmierzyć długość przekątnej cegły mając do dyspozycji trzy jednakowe cegły oraz linijkę? Pomiaru możesz dokonać tylko raz. Opisz krótko procedurę postępowania.

Zadanie problemowe wymagające wyobraźni przestrzennej i niezwykle twórczego podejścia.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,07	bardzo trudne
Flegmatyk	0,10	bardzo trudne
Choleryk	0,00	bardzo trudne
Sangwinik	0,06	bardzo trudne



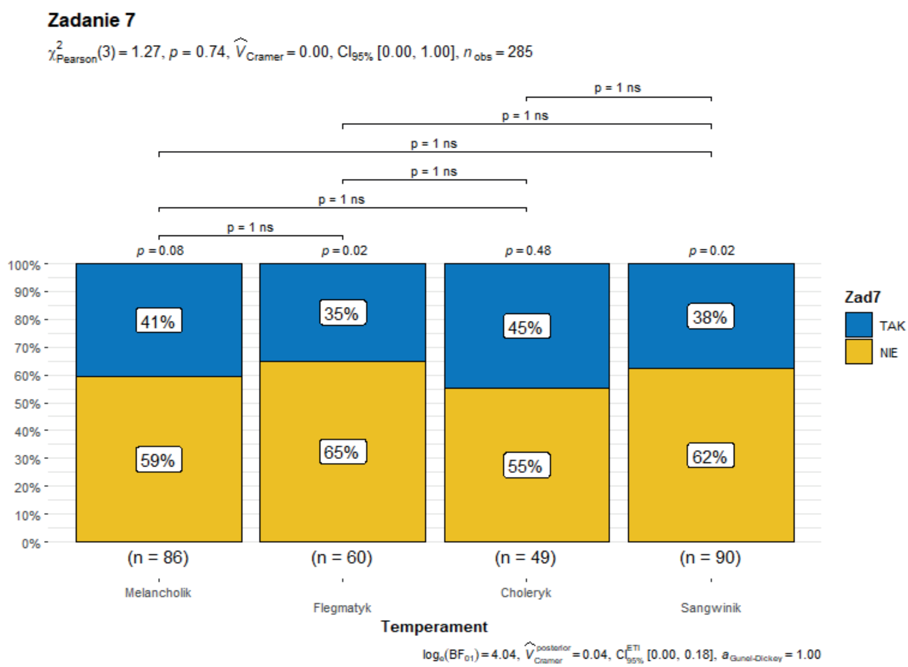
Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 6. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się bardzo trudne dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

Analiza wyników zadania 7.

Zadanie 7. Świeże grzyby zawierają 90% wody. W wyniku suszenia masa grzybów zmniejsza się dziewięciokrotnie. Oblicz, ile procent wody zawierają suszone grzyby.

Zadanie sprawdzające umiejętność rozwiązania problemu związanego z nietypowymi obliczeniami procentowymi.

Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,41	trudne
Flegmatyk	0,35	trudne
Choleryk	0,45	trudne
Sangwinik	0,38	trudne

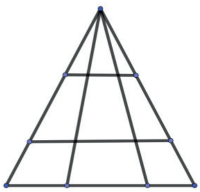


Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 6. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się trudne dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

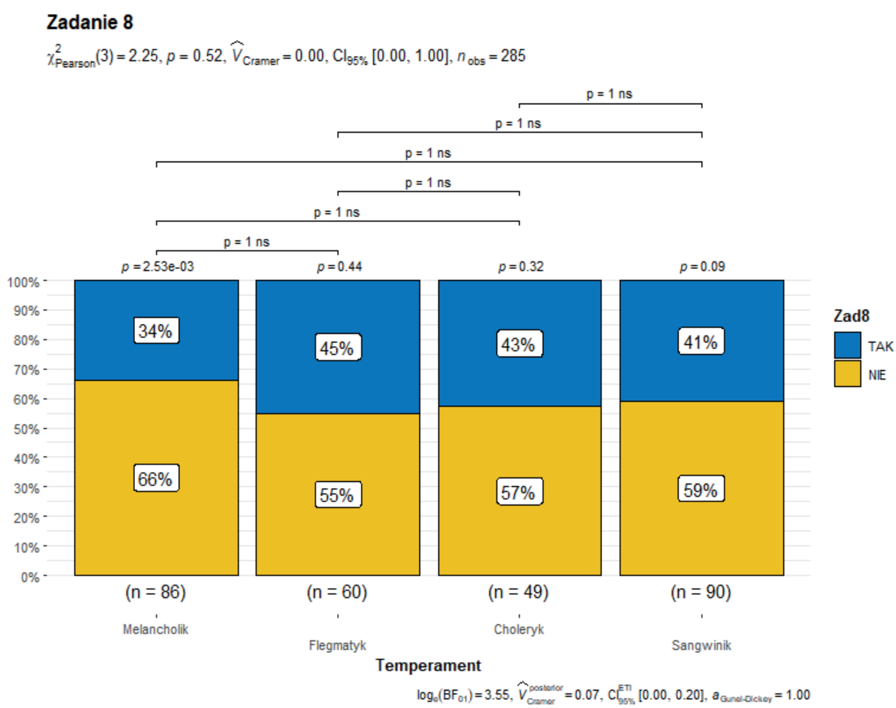
<u>Analiza wyników zadania 8.</u>

Zadanie 8. Przyglądnij się poniższemu rysunkowi. Ile jest na nim trójkątów? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie wymagające spostrzegawczości i zastosowania uporządkowanej metody zliczania trójkątów.



Typ	Współczynnik łatwości zadania	Interpretacja
Melancholik	0,34	trudne
Flegmatyk	0,45	trudne
Choleryk	0,43	trudne
Sangwinik	0,41	trudne



Analiza wskaźników łatwości oraz analiza porównawcza wyników daje podstawy do stwierdzenia, że każda z badanych grup rozwiązała zadanie 8. na bardzo podobnym poziomie. Zadanie okazało się trudne dla zdecydowanej większości badanych uczniów.

KONKLUZJA

Przedstawione wyżej wyniki poparte analizą statystyczną nie dają podstawy do przyjęcia założonej hipotezy badawczej.

W badanej grupie temperament ucznia nie ma wpływu na jego osiągnięcia edukacyjne w matematyce. Wobec tego nie ma zależności między temperamentem ucznia a jego osiągnieciami matematycznymi.

Biorąc pod uwagę specyfikę badań i dość dużą subiektywność udzielanych odpowiedzi, można zarekomendować potrzebę dalszych badań w tym zakresie. Wymaga to jednak dużego zaangażowania sił i środków szczególnie w części psychologicznej. Badania z pewnością wymagałyby zastosowania profesjonalnych testów psychologicznych, wywiadów z respondentami oraz analizy psychologicznej dokonanej przez uprawnionych badaczy.

Wyniki zaprezentowanych badań ich autor może potwierdzić swoim własnym doświadczeniem nauczyciela matematyki. Niezależnie od temperamentu uczący się matematyki musi wykonać pracę. Jego samodzielnie wykonane obowiązki ucznia, świadomy, pełen refleksji namysł nad matematyką realizowany w bezpiecznym i twórczym środowisku uczenia się dają podstawy do osiągnięcia sukcesu. Sukces ten jest jeszcze bardziej możliwy w towarzystwie dobrze przygotowanej i życzliwej kadry pedagogicznej.

REKOMENDACJE

Temperament ucznia **nie może** być wymówką edukacyjną i zwolnieniem z osobistego zaangażowania w proces uczenia się matematyki.

Warto tak zorganizować zajęcia lekcyjne, aby uczniowie rozwiązywali zadania problemowe, nie tylko proste zadania krótkiej odpowiedzi ćwiczące elementarne umiejętności[3]. Dobrze, aby mieli kontakt z zadaniami trudnymi, nietypowymi, wieloetapowymi. Warto pracować w zespole metodą projektu edukacyjnego i zadbać o każdy etap, od planowania aż po publiczną prezentację i ewaluację.

---

[3] Oczywiście ten typ zadań jest bardzo ważny w kształtowaniu kompetencji matematycznych. Nie można jednak na tych zadaniach poprzestawać.

Kształtować postawę i kulturę pracy z błędem oraz reakcjami na porażki i niepowodzenia. Takie zjawiska towarzyszą uczeniu się matematyki. Porażka to lekcja, a nie powód do zaniechania działań. Warto kształtować w uczniach przekonanie, że trudnych rzeczy trzeba uczyć się dłużej, a uczenie się matematyki wymaga czasu. Warto oddziaływać wychowawczo i uświadamiać uczniom, że praca ma znaczenie i zdobywanie kompetencji ma znaczenie. Każde działanie, niezależnie od efektu, to zebranie doświadczenia. A doświadczenie to kapitał jednostki i społeczeństwa. Matematyka jest narzędziem poznawania rzeczywistości. Kształtuje myślenie, uczy odwagi w podejmowaniu wyzwań oraz uczy wytrwałości w osiąganiu celów. Dlatego warto kształtować w uczniach pozytywne nastawienie i podejście do matematyki. To przyniesie większe korzyści niż ciągłe zniechęcenie do matematyki, poprzez stawianie wysokich, nierealistycznych wymagań. Dać czas i szanse uczniom na samodzielne konstruowanie pojęć. Niech uczniowie uczą się mówić o matematyce, w zespołach, a także na forum klasy.

ZAKOŃCZENIE

„W życiu nie chodzi o to, by mieć jak najwięcej talentów, ale jak najmniej wymówek"[4]. To zdanie może stanowić dobre podsumowanie i zakończenie niniejszego artykułu. Obszar uwarunkowań kształcenia matematycznego jest niezwykle rozległy. Istnieje setki rozmaitych czynników mających wpływ na efektywność uczenia się matematyki. Należy do nich grupa czynników indywidulanych z osobowością ucznia na czele. Jednym z elementów osobowości jest temperament. Badania pilotażowe, których wyniki wyżej pokrótce opisałem, nadają pewien kierunek myślenia o zależności między temperamentem a osiągnięciami w uczeniu się matematyki. Okazuje się, że taka zależność najprawdopodobniej nie istnieje. Potwierdzenie jej braku wymaga bardziej dogłębnych badań prowadzonych innymi metodami opartymi na zaawansowanych testach psychologicznych. Powstaje pytanie, co jest tym głównym czynnikiem mającym wpływ na osiągnięcia uczniów? W mojej opinii nie ma na to pytanie jednoznacznej odpowiedzi. Na pewno jednak warto skupić się na pracy, uwadze i zaangażowaniu uczących się. Dobrze jest mądrze organizować bezpieczne środowisko edukacyjne oparte na życzliwości, współpracy i mądrej kontroli postępów związanej z informację zwrotną. Do nauczycieli należy również znalezienie balansu między samodzielnością uczniów a ich umiejętnością współpracy z innymi. Ostatnim istotnym czynnikiem jest profesjonalizm, pasja i dobre nastawienie nauczyciela do uczniów i ich pracy z matematyką.

---

[4] Sylwia Królikowska, profil Facebook, dostęp 15.01.2024.

BIBLIOGRAFIA

Błaszczak, E. (2017). *Kolory, czyli prosta instrukcja obsługi człowieka*. Warszawa: 4Results.

Cieciuch, J., Strus, W., Ponikiewska, K. (2024). Perspektywa psychologii osobowości. W: W. Dragan, M. Rzeszutek (red.) *Różnice indywidualne. Uwarunkowania i konsekwencje*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.

Clauss, G. (1987). *Psychologia różnic indywidualnych*. Warszawa: WSiP.

Kupisiewicz, Cz. (2012). *Dydaktyka. Podręcznik akademicki*. Kraków: Impuls.

Maliński, M. (2020), *Temperamenty*. Wrocław: Wydawnictwo 2 ryby.

Niemierko, B. (1999). *Pomiar wyników kształcenia*. Warszawa: WSIP.

Okoń, W. (1996). *Nowy słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Żak.

Strelau, J., Zawadzki B. (2008). Psychologia różnic indywidualnych. W: J. Strelau, D. Domański (red.) *Psychologia. Podręcznik akademicki*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

https://web.swps.pl/strefa-psyche/blog/relacje/16988-temperament?dt=1705082125893 z 20.05.2024.

Sylwia Królikowska Trainer, profil facebook, dostęp 15.01.2024.

ZAŁĄCZNIKI

1. Subiektywny test samooceny temperamentu.

Już trochę się znasz. Wiesz, jaki masz temperament? Spróbuj to określić. Stosując podział Hipokratesa, Twój temperament można określić jednym ze słów: sangwinik, choleryk, flegmatyk, melancholik. Oczywiście możesz być „mieszanką" temperamentów. Ja na przykład jestem sangwinikiem z domieszką melancholika. Ale dominuje we mnie sangwinik. Oczywiście dokładna diagnoza temperamentu wymagałaby bardzo żmudnych analiz psychologicznych. Mi zależy tylko na Twojej osobistej ***samoocenie****. Na pewno będzie subiektywna.*

Krótka charakterystyka temperamentów

Melancholik (wrażliwy introwertyk)

Apatia. Sztywność. Refleksyjność. Powściągliwość. Samotność. Pesymizm. Spokój. Lęk.
Realizator: wspierający, rzetelny, życzliwy, pomocny, ciepły, nastawiony na bezpieczeństwo, łagodzący konflikty, dostosowujący się, wykonujący, zorganizowany, zaplanowany, uczuciowy, nastawiony na innych ludzi, wprowadzający harmonię, lubiący małe kroki, hojny, empatyczny, lubiący spokój, lubiący sprawdzone rozwiązania, doceniający innych, współpracujący, lojalny.

Choleryk (impulsywny ekstrawertyk)

Drażliwość. Niepokój. Agresja. Zmienność. Wybuchowość. Optymizm. Impulsywność. Aktywność.
Wojownik: wizjonerski, zdeterminowany, skoncentrowany na celu, rywalizujący, twardy, nastawiony na wygraną, przewodzący, dyplomatyczny, delegujący, efektywny, nastawiony na działanie, dynamiczny, przyspieszający, szybki, decyzyjny, pionierski, praktyczny, pewny siebie, celowy, lubiący wyzwania, ambitny, nadający ton.

Flegmatyk (powolny i spokojny introwertyk)

Bierność. Ostrożność. Pojednawczość. Wysoka kontrola. Zrównoważenie. Solidność. Łagodność. Powaga.
Analityk: analityczny, rozsądny, logiczny, formalny, podchodzący z dystansem, ceniący wiedzę, wprowadzający reguły, przestrzegający zasad, rozwiązujący problemy, ostrożny, opanowany, nastawiony na dokładność, analizujący ryzyka, rozważający za i przeciw, dociekliwy, ceniący dane, oszczędny, metodyczny, ceniący indywidualną prace, pedantyczny, bezstronny, poukładany.

Sangwinik (pogodny ekstrawertyk)

Towarzyskość. Otwartość. Gadatliwość. Wrażliwość. Niefrasobliwość. Przywódczość. Beztroska. Żywość.
Inspirator. kreatywny, wesoły, wielowątkowy, czarujący, optymistyczny, nastawiony na atmosferę, dusza towarzystwa, bezpośredni, inspirujący, umiejący załatwiać, nastawiony na nowe, entuzjastyczny, energetyczny, instynktowny, oryginalny, wystawny, intuicyjny, innowacyjny, spontaniczny, zachwycony sobą, towarzyski, nieschematyczny.

Mój dominujący temperament to:
(zaznacz tylko jedno pole)

Melancholik □ Choleryk □ Flegmatyk □ Sangwinik □

2. Arkusz diagnostyczny

Zadanie 1. Oblicz $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}$

Zadanie 2. Cegła waży 3 kg i jeszcze ćwierć cegły. Ile waży cegła?

Zadanie 3. Wpisz liczby 3, 4, 5, 7 i 9, tak, aby suma tych liczb w każdej kolumnie, wierszu i na przekątnej była jednakowa. Każdą z liczb możesz wpisać TYLKO jeden raz.

2		6
		1
		8

Zadanie 4. W 2019 roku dwunastolatek z Nigerii, Chika Ofili, zaproponował szybki sposób sprawdzenia podzielności liczby naturalnej przez 7. Rozważmy ten sposób na konkretnych przykładach.

Czy liczba 532 jest podzielna przez 7?
Oddzielamy od liczby 532 cyfrę jedności (2) i postępujemy następująco:
53 + 2 x 5 = 63. Liczba 63 jest podzielna przez 7, czyli liczba 532 też jest podzielna przez 7.
A liczba 135? Czy ona też dzieli się przez 7?
13 + 5 x 5 = 13 + 25 = 38. Liczba 38 nie dzieli się przez 7, czyli 135 też się nie dzieli przez 7.

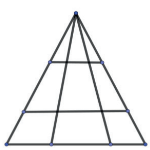
Stosując test Chiki, sprawdź, czy liczba 105 jest podzielna przez 7.

Zadanie 5. Liczba pierwsza jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie.
Wypisz wszystkie liczby pierwsze ze zbioru {41, 51, 61, 71, 81, 91, 101}.

Zadanie 6. Wróćmy do cegły. Jak zmierzyć długość przekątnej cegły mając do dyspozycji trzy jednakowe cegły oraz linijkę? Pomiaru możesz dokonać tylko raz. Opisz krótko procedurę postępowania.

Zadanie 7. Świeże grzyby zawierają 90% wody. W wyniku suszenia masa grzybów zmniejsza się dziewięciokrotnie. Oblicz, ile procent wody zawierają suszone grzyby.

Zadanie 8. Przyglądnij się poniższemu rysunkowi. Ile jest na nim trójkątów? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Część 3

SUGESTIE ROZWIĄZAŃ METODYCZNYCH

SPOJRZENIE PRAKTYKA NA PODNOSZENIE EFEKTYWNOŚCI UCZENIA SIĘ MATEMATYKI

Czy podejście eksploracyjne sprzyja zainteresowaniu myśleniem matematycznym?

Gabriela Biel
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu
gabriela.biel@upwr.edu.pl
ORCID: 0000-0002-9092-6020

Jan Jełowicki
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu
jan.jelowicki@upwr.edu.pl
ORCID: 0009-0005-0959-249X

Bogdan Roszak
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu
bogdan.roszak@upwr.edu.pl
ORCID: 0000-0002-7402-7498

Streszczenie

Inspiracją do podjęcia tematu stały się metody aktywizujące mające na celu zwiększenie zaangażowania studentów studiów inżynierskich w zajęcia praktyczne z przedmiotów okołomatematycznych. W pracy przedstawia się i poddaje krytycznej refleksji podejście eksploracyjne wypracowane na potrzeby ćwiczeń z matematyki, statystyki matematycznej i informatyki. Rozważania dotyczą znaczenia tego podejścia dla kształtowania zarysowanej formalnie sylwetki absolwenta oraz zakresu możliwości stosowania dyskutowanej formy edukacji w zależności od specyfiki kierunku studiów. Doświadczenie wyniesione z zajęć, podczas których metodę eksploracyjną zastosowano w nauczaniu, ukazano w postaci opisu przykładów zadań i problemów, jakie włączono do konkretnych kursów.

Abstract

The topic of the paper was inspired by activity-based methods aimed at increasing involvement of engineering students during classrooms on peri-mathematical subjects. The text presents and takes into critically reflection the exploratory approach developed for practicals in mathematics, mathematical statistics and computer science. Considerations are giv-

en to the importance of this approach to the formation of the formal profile of a graduate, as well as the scope of possible application of the discussed form of education depending on the specifics of the field of study. The experience of classes where the exploratory methods were applied to teaching is shown in descriptive form of examples that were appended into particular courses.

CHARAKTERYSTYKA ZESPOŁU

Doświadczenie dydaktyczne zespołu Katedry Zastosowań Matematyki Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu (KZMat UPWr) budowane jest na przygotowywaniu i prowadzeniu zajęć dla zróżnicowanych kierunków studiów związanych między innymi z budownictwem, geodezją, gospodarką przestrzenną i architekturą krajobrazu, inżynierią i kształtowaniem środowiska, rolnictwem, ochroną środowiska, ekonomią, technologią żywności, biotechnologią, biologią i bioinformatyką. Jednostka jest odpowiedzialna za zajęcia z matematyki (algebra, calculus, elementy równań różniczkowych, kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa), statystyki, logiki, z modelowania procesów przyrodniczych i fizycznych oraz z informatyki (algorytmika, programowanie, bazy danych). Wszyscy członkowie zespołu KZMat mają wykształcenie matematyczne. Wiele doktoratów i habilitacji uzyskano za zastosowania metod matematycznych w naukach inżynieryjnych i przyrodniczych.

Wprowadzenie – diagnoza stanu

Zespoły dydaktyczne matematyków, podobnie jak przedstawicieli innych nauk podstawowych, mają w uniwersytetach przymiotnikowych specyficznie określone ramy działania. Po pierwsze, zależnie od specyfiki kształcenia, pojawiają się wymagania związane bezpośrednio z kierunkiem studiów, dla którego przewidziany jest konkretny kurs. Wymagania te muszą być spełnione z uwagi na konieczność nabycia wiedzy i umiejętności zawodowych, włączając w to wykorzystanie określonych elementów aparatu rachunkowego. Ta część wymagań w ostatnich latach bywa rygorystycznie ujmowana w specyfikacje sylwetek absolwenta i budowane na ich podstawie ramowe cele kształcenia.

Po drugie, wykształcenie wyższe rozumiane jako ugruntowanie samodzielności myślenia i podejmowania decyzji jest w coraz mniejszym stopniu zależne od opanowania konkretnych treści. Paradygmat uczenia się przez całe życie zakłada raczej zachowanie elastyczności pozwalającej na orientację w zmiennej rzeczywistości oraz na zdolność do zmian perspektywy myślowej. Przy tej optyce wagę praktyczną zyskują: myślenie procesowe oraz myślenie i podejmowanie decyzji w warunkach niepełnej informacji. Nabycie sprzyjających im ogólnych nawyków jest naturalnym polem zastosowań szeroko rozumianego myślenia matematycznego.

Po trzecie, czas, jaki można przeznaczyć na kształcenie myślenia matematycznego, jest ze zrozumiałych powodów ograniczony. Zwerbalizowane i niezwerbalizowane oczekiwania poszczególnych stron procesu (decydentów, uczestników, a w pewnej mierze także dydaktyków) nie zawsze są spójne i możliwe do realizacji w założonych ramach czasowych.

Po czwarte wreszcie, przygotowanie studentów do udziału w procesie intelektualnym, jakim jest uprawianie myślenia matematycznego choćby w celach praktycznych, bywa niewystarczające. Przyczyn tego stanu jest wiele. Istotnymi z przedstawianego punktu widzenia są między innymi: system motywacyjny oraz mechanizm doboru studentów.

Motywacja zewnętrzna o charakterze formalnym jest promowana w szkolnictwie (niestety, także w szkolnictwie wyższym) na tyle silnie, że w dużej mierze tłumi ona postawę poznawczą. Utrwalone w trakcie nauki nawyki dotyczące na przykład oczekiwań co do trybu stawiania problemów, trybu rozliczania z pracy, a nawet co do charakteru samych problemów (na przykład preferowanie operacji na konkretnych liczbach) i ich rozwiązań (na przykład preferowanie zadań rachunkowych z jednoznacznym rozwiązaniem) powodują, że zadania typu innego niż spodziewane albo zapamiętane z poprzednich etapów nauczania są podejmowane mniej chętnie, niż te uznane za typowe.

Kolejnym istotnym czynnikiem przesądzającym o gotowości studentów do współuczestniczenia w analizie problemów jest sam mechanizm doboru uczestników zajęć akademickich. Ma on przyczyny naturalne, lecz wiąże się z nim szereg wyzwań. Absolwenci szkół średnich głębiej zainteresowani rozwiązywaniem problemów matematycznych oraz dostrzeganiem w otaczającym świecie regularności opisywanych środkami matematyki, wybierają inne ścieżki edukacyjne. Pozostaje pokorne przyjęcie stanu rzeczy i taki dobór materiału oraz środków, by zrealizować postawione cele.

Warto w tym miejscu wspomnieć o możliwych negatywnych odczuciach wyniesionych z dotychczasowych kontaktów z matematyką szkolną, które mogą być udziałem obecnych studentów (Ma 1999; Ashcraft, Ridley 2005; Maloney, Bellock 2012; Hawrot, Kaczan 2014; Cipora 2015). Z istnienia zjawiska lęku przed matematyką zdają sobie sprawę nie tylko nauczyciele akademiccy, ale także nauczyciele wcześniejszych etapów edukacyjnych. Lęk przed matematyką może mieć zbyt głębokie przyczyny, by dało się go zmienić przez pojedyncze działania[1]. Konsekwen-

[1] Warto w tym miejscu wspomnieć, że za najbardziej długotrwały skutek lęku przed matematyką uznaje się globalne unikanie tej dziedziny wiedzy, ujawniające się jednocześnie z:

– mniejszą motywacją do uczenia się matematyki;

– niedocenianiem użyteczności matematyki w codziennym życiu;

cją lęku jest przekonanie znaczącej frakcji studentów o zasadniczej nieprzydatności opanowania metod matematycznych dla wykształcenia inżyniera. Przekonanie to przeniesione na poziom nauczycieli przyjmuje postać kulturowego przyzwolenia na ignorancję. Ono z kolei pociąga częściową rezygnację przez realizatorów kursów z nowoczesnych metod opisu warsztatu analitycznego inżyniera, co tworzy sprzężenie zwrotne, które streścić można pytaniem: po co uczyć się rzeczy, z których nie korzystają specjaliści przedmiotów i dyscyplin zawodowych? Takie podejście prowadzi do wzmocnienia obecności w kształceniu nurtu, w którym stosowanie procedur wdrażane jest czysto operacyjnie – bez podejmowania wysiłku w kierunku ich zrozumienia umożliwiającego refleksję krytyczną.

Innego źródła sygnalizowanych problemów można doszukiwać się w intensywnym kontakcie z techniką cyfrową i z zasobami sieci globalnej, podczas którego typowy użytkownik stawiany jest w roli konsumenta. Postawą wyuczoną wobec pytań problemowych staje się poszukiwanie gotowej odpowiedzi w zasobach zewnętrznych, a aktywna analiza problemu oraz konstruowanie odpowiedzi i związane z nimi wyzwania jawią się raczej jako przeszkody niż metoda.

Wyznaczenie i konfrontacja celów dydaktycznych

Dalsze rozważania skupiają się wokół dwóch grup celów działania dydaktyków matematyki na studiach o szeroko pojętym profilu inżynieryjnym. Są one następujące:

(*i*) pomoc w zdobyciu kompetencji umożliwiających praktyczne korzystanie z konkretnych metod matematycznych w trakcie nauki i w pracy zawodowej, zgodnie z kierunkiem studiów. Ten cel jest w oczywisty sposób istotny dla odpowiedzialnego kształcenia zawodowego;

(*ii*) pomoc w zdobyciu kompetencji umożliwiających otwarte prowadzenie analiz (często w oparciu o wstępne rozumowanie indukcyjne) i wnioskowania (na podstawie przyjętych założeń, w oparciu o rozumowanie dedukcyjne i abdukcyjne). Ten cel wydaje się w szerokiej perspektywie społecznej nawet bardziej istotny niż pierwszy. Jego osiągnięcie wydaje się trudniejsze –

– negatywnym nastawieniem do innych przedmiotów szkolnych powiązanych z matematyką, w tym także przedmiotów fakultatywnych, których wybór determinuje dalszą edukację;
– negatywną postawą wobec nauczycieli matematyki;
– mniejszym zaangażowaniem w uczenie się matematyki, pogłębiającym deficyty w wiedzy matematycznej.

Zobacz też: Ashcraft, Faust 1994 s. 97–125 za: Cipora 2015, s. 142–144; Hopko 2003, s. 336–351; Ashcraft, Ridley 2005, s. 315–327; Ashcraft, Moore 2009, s. 197–205.

przy czym często jawi się też jako ciekawsze i bardziej satysfakcjonujące zarówno dla studentów, jak i dla dydaktyków. Nie jest jasne, czy miejsce kształtowania tych kompetencji ogranicza się do kursów przedmiotów określanych terminem „matematyka".

Równowaga między sformułowanymi wyżej celami zależy od wielu czynników, w tym od odpowiedzi na pytania: na jakim poziomie matematyczność jest dla tej konkretnej grupy najbardziej kształcąca? Jakie problemy wybrać, by ukazać tok rozumowania jako perspektywę atrakcyjną, wartą podjęcia wysiłku?

W myśl przepisów regulujących organizację kształcenia akademickiego, relacja szkoła wyższa – student traktowana jest jak transakcja potwierdzana zawieraną umową. Takie podejście ugruntowuje potoczne przekonanie o podziale na „kształcących" i „kształconych", z konsekwencjami formującymi w masowej skali charakter kontaktów. Jest to uwarunkowanie, które niekiedy trudno obejść. Wydaje się, że kluczowe jest rozłożenie akcentów: czy bardziej skupiać się na możliwościach otwierania na myślenie, prowokowania do stawiania hipotez i poszukiwania ich uzasadnień, czy też raczej nastawić się – co może mieć znaczenie wobec ograniczeń czasowych – na opanowanie podanych *ex cathedra* treści i rozwiązywanie typowych (głównie rachunkowych) przykładów dla ich ugruntowania.

Na etapie formułowania i porządkowania powyższych dylematów z pomocą przychodzą rozstrzygnięcia definicyjne. Użycie terminu *myślenie matematyczne* – w przeciwieństwie do rzadziej definiowanego określenia, jakim jest *wiedza matematyczna* – wskazuje na „samodzielne czynności umysłowe, [polegające] na rozwiązywaniu problemów matematycznych oraz na ich wypatrywaniu" (por. Klus-Stańska, Kalinowska 2004, s. 19). Takie rozumienie *myślenia matematycznego* łączone jest z nauczaniem matematyki ujętym w podejściu sformułowanym jako *orientacja na proces*, cechującym się poszukiwaniem „nowych możliwości i relacji między danymi oraz zdolnością i gotowością do wykorzystywania takich strategii, jak: odnajdywanie podobieństw, działania przybliżone, odkrywanie własności" (Klus-Stańska, Kalinowska 2004, s. 140). Dla porównania, druga ze strategii nauczania matematyki, jaką jest *orientacja na wynik*, uznawana jest jedynie za „wyposażanie kształconych w zbiór reguł, wzorów, czy gotowych technik obliczeniowych"[2]. Wybranie podejścia, w którym proces jest ważniejszy niż wynik sprawia, że opisany powyżej cel (ii) postrzegany jest w pracy dydaktycznej jako bardziej priorytetowy.

Prowadzone czynności dydaktyczne i próby działań służące realizacji opisanych celów, z uwagi na różnorodny charakter prowadzonych kursów, przedstawione zostaną poniżej za pomocą przykładów, które mają za zadanie zilustrować bardziej ogólne refleksje. Dotyczą one różnych zakresów tematycznych i meto-

---

[2] W kontekście edukacji wczesnoszkolnej patrz Klus-Stańska, Nowicka 2014, s. 137.

dycznych: zajęć z matematyki, algebry, analizy matematycznej, podstaw programowania, algorytmów, logiki, baz danych.

Zanim jednak nastąpi prezentacja przykładów, omówione zostaną dwie kwestie, które niekiedy zdają się determinować powodzenie i przebieg zajęć oraz możliwość wdrażania metody eksploracyjnej i realizacji założonych celów. Są to: kwestie motywacji oraz podejście do błędów w procesie uczenia się.

Motywacja do uczenia się u osób dorosłych

Jedną z teoretycznych perspektyw opisujących motywację do uczenia się jest koncepcja motywacji zewnętrznej i wewnętrznej[3].

W obliczu konieczności[4] oceniania studentów (a więc stosowania znanych im z poprzednich etapów edukacji sposobów wzbudzania motywacji) analizowana jest możliwość stwarzania warunków do przyjmowania postawy aktywnej przez uczestników zajęć i przechylenia szali motywacji w kierunku motywacji wewnętrznej.

Za czynniki motywujące wewnętrznie, istotne z punktu widzenia projektowanych zajęć, uznaje się między innymi: zaciekawienie, wyzwanie poznawcze oraz atrakcyjność wykonawczą związaną z samym zadaniem. Podkreśla się, że zajmowanie się takimi atrakcyjnymi zadaniami wyzwaniami związane jest z utrwaleniem (u dzieci) lub wyzwalaniem (u dorosłych) postawy aktywnej poznawczo, gotowości do ciągłego uczenia się, chęci myślenia i odkrywania (Kwieciński, Śliwerski, 2019, s. 277).

Motywacja do uczenia się osób dorosłych obejmuje szereg czynników, które dobrze jest brać pod uwagę przy projektowaniu zajęć i tworzeniu list zadań. Malcolm S. Knowles i inni (2009) wyróżniają cztery takie elementy. Są to: sukces, wola, wartość i przyjemność. Według szerszego opisu dorośli uczący się chcą odnosić sukcesy, chcą mieć poczucie wpływu na swój proces uczenia się, uczą się, gdy mają przekonanie o wartości przyswajanych treści i gdy uczenie się przynosi im przyjemność. Sukces rozumiany jest przez nich jako możliwość nauczenia się rzeczy nowych, a także takich, które pomogą rozwiązywać problemy, na przykład w życiu zawodowym. Knowles i inni podkreślają, że dorośli chcą i potrzebują uczyć się przez doświadczenie, a uczenie się to dla nich rozwiązywanie problemów.

---

[3] Inna to na przykład koncepcja potrzeb jako czynników wywołujących motywację. Szczególną popularnością cieszy się koncepcja piramidy potrzeb Abrahama Maslowa. Pedagodzy skupiający się na tym podejściu zwracają uwagę na tworzenie warunków do zaspokajania potrzeb osób uczących się (głównie dzieci), a także na akceptację i szacunek do naturalnych czynności, które podejmują.

[4] Konieczność i sposoby oceniania studentów to temat na osobną, niemniej ważną, dyskusję.

W przypadku nauczania matematyki osób dorosłych napotkać można na trudności związane z nastawieniami do matematyki (własnymi i społecznymi), stereotypami krążącymi wokół tego przedmiotu[5], a nade wszystko – z powrotem do silnie naznaczonych szkolnych doświadczeń z przeszłości. Wymienione trudności rzutować mogą na możliwość osiągania sukcesu w tej dziedzinie, a także na możliwość odczuwania przyjemności przy styczności z treściami matematycznymi.

Nie bez podstaw wydają się więc obawy związane z pytaniem, czy droga do zgłębiania matematyki w atmosferze przyjemności, samodzielności i z włączeniem postawy aktywnej jest w zastanych warunkach – włącznie w tymi przedstawionymi we wcześniejszych rozważaniach na temat profilu kandydatów na studia – w ogóle możliwa, czy może tylko trudna[6].

Rola błędu w uczeniu się

> W przestrzeni edukacyjnej uczniowie i nauczyciele coraz częściej zmuszani są do bezbłędnej i szybkiej reakcji na dokonujące się zmiany, co – niestety – w połączeniu z presją społeczną może powodować ich wyczerpanie. Dlatego też warto podejmować dyskurs o roli i znaczeniu błędów w osiąganiu sukcesów (Domagała-Kręcioch, 2019a).

Agnieszka Domagała-Kręcioch wspomina, że podstawy aktywności edukacyjnych osób dorosłych powiązać można zarówno ze stopniem zaspokajania potrzeb[7], jak i z postawą wobec edukacji[8]. Uznaje się, że postawa wobec edukacji uzależniona jest od występowania (bądź braku) znaczących porażek edukacyjnych (Malewski, 2001; za: Domagała-Kręcioch, 2019b), a te z kolei są elementem szerszego zagadnienia, jakim jest szkolna kultura błędów, w której przez lata wzrastają uczniowie, późniejsi kandydaci na studia wyższe. Jeśli weźmie się pod uwagę, że matematyka bywa kojarzona przez słuchaczy z porażkami na poprzednich etapach edukacji, z pewną obawą można myśleć o ich aktywności na zajęciach związanych z tym przedmiotem.

---

[5] Badania związane z nastawieniami do matematyki i stereotypami związanymi z tym przedmiotem szkolnym prowadzone są od wielu lat. Zobacz między innymi: (Fennema, Sherman 1976; Haladyna i inni 1983; Zan, Di Martino 2007; Wong, Chen 2012).

[6] Nie bez znaczenia wydają się też wyróżniane przez Knowlesa i innych cechy osoby edukującej osoby dorosłe, mające znaczenie dla wzbudzania w nich motywacji, a mianowicie: wiedza specjalistyczna, empatia, entuzjazm i przejrzystość.

[7] Zobacz przypis 3.

[8] Domagała-Kręcioch przytacza między innymi przykłady teorii andragogicznych, takich jak Paradygmat Wartości Oczekiwanej Rubensona czy Model Łańcucha Interakcji.

1. Badania pokazują, że lęk przed popełnieniem błędu potrafi determinować sposób uczestnictwa w zajęciach. Danuta Sterna (Sterna 2021) podkreśla, że taki lęk blokuje uczenie się, myślenie i kreatywność. Jednak, gdy – za Zofią Krygowską – potraktujemy błędy studenckie nie jako porażkę, ale jako coś pożądanego, wartościowego, „błogosławionego", dajemy szansę, aby stały się początkiem analiz, wnioskowania i kształcenia rozumowania matematycznego słuchaczy (Ciosek, Żeromska, 2013). Sytuacja, w której uczestnicy procesu edukacyjnego zmieniają sposób postrzegania błędów, czyni z pomyłek narzędzie wspierające rozwój aktywnej i poszukującej postawy, zachęcające do eksploracji (Orzeszek, 2007).
2. W nawiązaniu do powyższych rozważań poszukujemy możliwości odblokowania kreatywności w procesie rozwiązywania problemów matematycznych. Możliwości tych upatrujemy we wprowadzanych podczas zajęć elementów eksploracji problemów, zaczynając od zerowej wiedzy, i taką też gradację przykładów proponujemy w następnym rozdziale.

Elementy eksploracji w scenariuszach zajęć

Przez eksplorację rozumiemy wszelkiego rodzaju doświadczenia związane z poszukiwaniem rozwiązań i eksperymentowaniem, takie jak stawianie pytań, badanie, testowanie, sprawdzanie, czy w końcu weryfikowanie rozwiązania, powiązane z przyglądaniem się własnym błędom i ich wykorzystaniem do dalszych analiz. Zaproponowanie problemów, zadań eksploracyjnych (a nawet tylko ich elementów), otwiera drogę do powyższych działań oraz samodzielnego lub grupowego analizowania niestandardowych zagadnień, również tych wcześniej nieznanych. Tak zwane „dobre zadania" związane z angażowaniem słuchaczy w rozwiązywanie problemów zbliża nas do idei budowania „myślących klas" Petera Liljedahla, której elementy staramy się przenieść na grunt akademicki (Liljedahl, 2020). Wszystko powyższe ma w naszej ocenie niebagatelne znaczenie dla tytułowego sprzyjania zainteresowaniu myśleniem matematycznym. W kolejnych podrozdziałach przedstawiamy opis realizacji elementów eksploracji oraz przyjęte przez nas założenia.

Zarys realizacji zajęć

W spotkaniach ze studentami wprowadzamy elementy dialogu, stawiania hipotez, dociekań, pozwalamy na popełnianie pomyłek/pomyłki i wspólnie poszukujemy ich przyczyn. Zdarza się, że na tak proponowany charakter zajęć odpowiada cisza i niedowierzanie. Głównym problemem wydaje się niechęć do stawiania pytań, które mogą ukazać niewiedzę oraz do robienia błędów, które uznawane są za coś niewłaściwego, skutkującego szybką karą w postaci oceny rozwiązania zadania bądź – co gorsza – samej osoby.

Odwrócenie tego sposobu postrzegania pozwala traktować błędy jako pożądany element procesu dociekania, a osobę poszukującą, pytającą albo błądzącą – jako tę, która ma szansę na odkrycie prawidłowości i krytyczne przyjrzenie się różnym możliwościom. Aby to osiągnąć, budowana jest atmosfera, w której popełnianie błędów jest naturalnym elementem analizy problemu. Wymaga to rezygnacji z gotowych schematów na rzecz stawiania pytań pomocniczych, które otwierają studentów na podejmowanie następnych prób, samodzielne wykonanie kilku kolejnych kroków. Nie nastawiwszy się na otrzymanie ostatecznego rozwiązania w toku zajęć, współpracujące strony mają szansę uczestniczenia w procesie, doceniając (niekoniecznie oceniając) podejmowanie ryzyka, wyzwań i wszelkich prób samodzielności.

Realizacji wymienionych elementów towarzyszą środki techniczne ułatwiające jej przeprowadzenie. Zestawy zadań przeznaczonych do analizy eksploracyjnej są dostarczane w formie opisowej; czasem są to typowe zadania tekstowe, często jednak mają postać tekstowych opisów sytuacji wyidealizowanych. W zespole dydaktycznym Katedry Zastosowań Matematyki nie istnieje jedyny słuszny i idealny model zestawu zadań. Nie ma na przykład zgody co do objętości takich zestawów. Niektórzy współautorzy skłaniają się do dostarczania obszernych (kilkanaście) zestawów zadań, z których poszczególni uczestnicy wybierają na ustalonych zasadach określoną ich liczbę. Inni wolą zogniskowanie pracy całej grupy na niewielkiej liczbie wspólnych problemów. Każde z wymienionych podejść ma swoje wady i zalety.

Na niektórych kursach prowadzone są fora dyskusyjne przeznaczone do wymiany myśli w trakcie rozwiązywania i na publikację rozwiązań. Z przyczyn praktycznych forma ta bywa stosowana przede wszystkim na zajęciach umożliwiających ograniczenie się do notacji tekstowej, czyli w naszym przypadku – logiki oraz różnych dziedzin informatyki. Opanowanie systemów notacji matematycznej na poziomie nadającym się do czytelnego publikowania i komentowania na tekstowych platformach wymiany wiedzy jest dla większości uczestników zbyt trudne, by wymagać regularnego korzystania z nich na kursach przedmiotów matematycznych. Z kolei notacja graficzna utrudnia komentowanie i parafrazowanie wypowiedzi poprzedników.

Zaangażowanie uczestników w działania podejmowane w trakcie kursu jest warunkiem koniecznym powodzenia takich zajęć. Jedną z form aktywizacji jest wymaganie przygotowania ustalonej niewielkiej liczby rozwiązań do przedstawienia na zajęciach albo na forum. W przypadku forów dyskusyjnych wypowiedzi są komentowane nieoceniająco przez zespół prowadzący. Drugą dominującą formą aktywizacji jest praca na bieżąco w małych zespołach wypracowujących rozwiązania podczas zajęć, a następnie ich publiczne przedstawianie i konfrontowanie „na żywo" z całą grupą.

Start od zerowej wiedzy

Wiele wstępnych zadań pojawiających się na zajęciach z matematyki i statystyki, problemów rozpatrywanych na kursach podstaw myślenia algorytmicznego oraz zagadnień na kursach logiki dobieranych jest w sposób, który umożliwia samodzielne rozpoczęcie pracy nad nimi bez korzystania z żadnej wstępnej wiedzy specjalistycznej[9], z uwzględnieniem wiedzy osobistej studentów. Samodzielność jest tu jednym z kluczowym słów – za każdym razem, gdy studenci podejmują próbę samodzielnego rozwiązywania problemów, uruchamia się ich osobiste doświadczenie poznawcze, które tworzy grunt pod wprowadzanie nowych pojęć (Klus-Stańska, Nowicka, 2014, s. 153). Poniżej przytoczono dwa przykłady zadań niewymagających (czy na pewno?) wstępnej wiedzy specjalistycznej.

Przykład 1. (Steinhaus, 1958). Zadanie 20. Sieć trójkątna I

> Jak wiadomo, można pokryć całą płaszczyznę siecią trójkątów równobocznych. Czy można w każdym węźle tej sieci umieścić jeden ze znaków plus, minus tak, żeby w każdym z trójkątów składowych sieci spełniał się przepis, że gdy w dwóch wierzchołkach trójkąta jest jednakowy znak, to w trzecim jest plus, a gdy jest przeciwny – to w trzecim jest minus? Oczywiście można dać wszędzie plusy, ale to banalne rozwiązanie wyłączamy.

Przykład 2. Odmierzanie objętości

> Dysponujesz dwoma nieskalowanymi pojemnikami o objętościach: 3 litry i 11 litrów. Pojemnikami tymi możesz nabierać wodę z jeziora, wylewać ją, a także przelewać z jednego do drugiego. Masz użyć tych pojemników w celu napełnienia zbiornika zadaną objętością *V*. Rozwiązanie ma być dokładne; dolewanie cieczy „na oko" nie wchodzi w grę.*a*. Czy – a jeśli tak, to w jaki sposób – da się napełnić zbiornik do objętości 16 litrów?*b*. Przy jakich objętościach docelowych *V* cel może być osiągnięty, a przy jakich zadanie nie ma rozwiązania?*c*. Jak zmieni się odpowiedź na powyższe pytania wraz ze zmianą objętości pojemników: na 3 i 5 litrów; na 21 i 27 litrów; na 35 i 21 litrów, na *p* i *q* litrów, kiedy *p* i *q* pozostają liczbami naturalnymi?

Powyższe problemy, postawione na pierwszym spotkaniu, wywołują zaskakujące – i bardzo różne reakcje grupy, począwszy od „Co my tu właściwie mamy policzyć?", przez analizę konkretnych sytuacji, uzasadnienie, że układ postulowany w pytaniu ma realizację w praktyce, po analizę różnic jakościowych między poszczególnymi sposobami rozumowania.

---

[9] Na plecaku szkolnym, który w latach gimnazjalnych nosiła córka jednego ze współautorów, widniał nadruk „For these rare people, who have absolutely nothing to do with thinking. Just pure minds!". Przekaz ten – mimo że zamiast „thinking" wolelibyśmy przeczytać „knowledge" – dobrze ilustruje przyjęte podejście.

Zaskoczenie tematem jako okazja do nowego spojrzenia

Założenie braku wstępnej wiedzy specjalistycznej daje możliwość zbudowania intrygujących sytuacji, jednak wydaje się, że repertuar dostępnych tematów jest wtedy ograniczony. Na kolejnym poziomie staramy się ukazać problem w sposób zachęcający do jego analizy z założeniem przydatności uprzednio zdobytego doświadczenia[10]. Na tym etapie operatywność traktowana jest jako kompetencja.

Odnotowaliśmy, że dla uczestników naszych zajęć interesujące są problemy uruchamiające wyobraźnię i pozwalające na swobodne stawianie hipotez w języku niewymagającym formalizacji, przynajmniej w początkowej fazie rozważań. Trzy przytoczone poniżej przykłady tego typu dotyczą problematyki badania przebiegu zmienności funkcji.

Przykład 3.

Oszacowanie chwili śmierci denata na podstawie kilku wykonanych w znanych odstępach czasu pomiarów ciepłoty ciała przy ustalonej i znanej temperaturze otoczenia.

Przykład 4.

Wskazanie na linii autowej boiska piłkarskiego miejsc, z których najłatwiej jest strzelić bramkę.

Analiza treści przykładu 4. wymaga zdobycia wiedzy na temat warunków (wymiary boiska), podjęcia decyzji odnośnie ich reprezentacji (numeryczna czy symboliczna) powodujących odmienne konsekwencje podczas otrzymywania rozwiązania, a być może także poczynienia założeń upraszczających, które nie zostały sformułowane (czy kopnięta piłka porusza się wzdłuż linii prostej?). W następnym etapie badany jest przebieg zmienności funkcji w celu wyznaczenia jej maksimum globalnego.

Przykład 5.

Projektanci parku stoją przed decyzją zaprojektowania ścieżki o przebiegu sinusoidalnym albo ścieżki złożonej z połączonych gładko półokręgów o jednakowym promieniu. Porównaj zakres sektora horyzontu omiatanego wzrokiem przez spacerowiczów w każdym z tych

---

[10] E.H. – jeden ze studentów programu Erasmus biorący udział w kursie podstaw myślenia algorytmicznego i programowania dla inżynierów środowiska, na którym problemy były stawiane w sposób wymagający podejścia eksploracyjnego, w roku 2010 zadał opiekunowi kursu (którym był jeden z współautorów) znamienne pytanie: „Could you explain me what's going on this classroom? I talk to the people; they are not stupid. But each time being here they behave like they see the problems the first time in their lives". Spostrzeżenie odnosiło się kontynuacji pracy rozciągającej się na kilka spotkań.

przypadków. Porównaj wygodę przemieszczania się tymi ścieżkami na rowerze. Wskaż kilka sposobów wyrównania amplitud obu linii; w jaki sposób wpłyną one na odpowiedzi?

Kolejny przykład skłania do dostrzeżenia regularności w generowaniu elementów pewnego ciągu. Takie podejście jest prezentowane nie tylko w wartościowych, choć wysoce specjalistycznych podręcznikach (Graham, Knuth, Patashnik, 1996), lecz także w ambitnych akademickich próbach odświeżenia spojrzenia na obiekty matematyczne na podstawowych kursach matematyki wyższej (Cambridge University School Mathematics Project 1986).

Przykład 6. (Graham, Knuth, Patashnik, 1996, s. 357–358)

Na ile sposobów można całkowicie pokryć prostokąt rozmiaru $2 \times n$ kamieniami domina rozmiaru 2×1? (Pytanie można „ubrać" w język kafelkowania ścieżek w ogrodzie).

Wstępna analiza może polegać na bezpośrednim sprawdzeniu przypadku o konkretnej, niewielkiej długości ścieżki. Na etapie systematyzacji pojawia się poznany wcześniej schemat rekurencyjny, prowadzący do klasycznego ciągu Fibonacciego. Przykład daje możliwość rozszerzenia problemu o pytania dodatkowe, na przykład: ile spośród takich ułożeń ma charakter palindromiczny (tzn. wygląda tak samo przy analizie w obu kierunkach)?

Kolejny przykład pochodzi z kursu podstaw algorytmiki i programowania. Do wspólnej analizy proponowany jest on dopiero po zaznajomieniu z podstawowymi instrukcjami sterującymi.

Przykład 7.

Porównanie różnych wariantów schematu obliczania kompletu współczynników dwumianowych postaci

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n$ przy ustalonej wartości $n \in \mathrm{N}$.

W dalszej części opisu zadania z przykładu 7. zamieszczone są wskazówki w rodzaju: „ile wynosi pierwszy wyraz tworzonego ciągu – czyli n po 0? Czy dysponując numerem porządkowym obliczanego wyrazu i jego wartością, jesteś w stanie obliczyć następny wyraz sposobem prostszym, niż podany w powyższej definicji?" oraz zachęta, by znaleźć – i porównać pod względem efektywności – kilka istotnie różnych sposobów przeprowadzenia obliczeń.

Zadanie to pojawia się na kursie w momencie, w którym uczestnicy znają już schemat Bernoulliego i rozkład dwumianowy. Pierwszy krok zazwyczaj polega na skorzystaniu wprost z podanej definicji konstrukcyjnej i powtórzeniu jej w iteracji dla kolejnych wartości k. Warto nadmienić, że pewna część mało doświadczonych uczestników traktuje to rozwiązanie jako jedyne i ostateczne. Analiza możliwości (przy inspiracji wskazówkami) otwiera pole do dyskusji: o optymalnych decyzjach odnośnie wyboru typu danych, o iteracyjnej realizacji opisów rekurencyjnych oraz o klasach złożoności obliczeniowej. W trakcie analizy przewidywane jest „odkrycie" tożsamości $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$, która nie była wcześniej wprowadzana w sposób „autorytarny".

Konkretność jako droga do ogólności

Wprowadzanie i ugruntowywanie nowych pojęć może być realizowane na drodze formalnej albo poprzez przedstawienie sytuacji, w których pojęcia te pojawiają się w sposób naturalny. Poniższy przykład wprowadza przekształcenia afiniczne na systematycznym kursie geometrii analitycznej płaszczyzny. Uczestnicy znają pojęcie wektora jako reprezentacji położenia punktu na płaszczyźnie oraz działania algebraiczne na wektorach.

Przykład 8.

Przekształcenia afiniczne płaszczyzny w siebie, określone za pomocą reguł postaci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + p \\ cx + dy + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

albo równoważnie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + p \\ cx + dy + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

są badane „doświadczalnie" przy użyciu oprogramowania do grafiki wektorowej, na przykład InkScape albo CorelDRAW, a jednocześnie także systematycznie metodami algebraicznymi.

Przykład 9.

Zadanie dotyczy zaimplementowania przez chętnych studentów, w ramach kursu analizy matematycznej, metod numerycznych rozwiązywania nieliniowego układu równań różniczkowych związanych z modelem Lotki–Volterry rozwoju dwóch populacji („drapieżników" i „ofiar") w określonym ekosystemie. Podczas kilkuetapowej, samodzielnej pracy nad swoją aplikacją studenci, moderowani przez prowadzącego, adaptują znalezione przez siebie informacje na potrzeby coraz lepiej działającej aplikacji. Prezentacja i konfrontacja różnych rozwiązań prowadzi do ciekawych i inspirujących dyskusji angażujących całą grupę.

Przykład 10. Łączenie serii (ciągów) uporządkowanych

> Celem jest ułożenie schematu działania polegającego na utworzeniu ciągu uporządkowanego powstałego przez scalenie *n* dostarczonych ciągów uporządkowanych. Wskazówka: skorzystaj z faktu, że dostarczone ciągi są uporządkowane. Pożądaną cechą tworzonego schematu jest jego optymalna (lub bliska optymalnej) efektywność.

Podczas pracy nad zagadnieniem z przykładu 10. rozwiązanie skuteczne i formalnie poprawne, lecz mało efektywne i nie korzystające z wszystkich założeń

$$\mathrm{sorted}(\mathrm{concatenate}(a(1), ..., a(n)))$$

jest proponowane jako ostateczne przez niektórych uczestników, którzy dowiedzieli się o operacji sortowania, lecz nie zastanawiali się zbyt głęboko nad związkiem „tworzenia ciągu uporządkowanego" z „sortowaniem ciągu elementów". Zachęta, by zastosować ten schemat w praktyce poprzez „zrzucenie" uporządkowanych stosów kartek do jednego pojemnika i uporządkowanie ich od nowa powoduje, że staje się ono postrzegane przez te same osoby jako zbyt pracochłonne. Zatem „konkretna" wersja zadania, z ciągami umieszczonymi na fizycznych analogowych nośnikach – w tym przypadku na kartkach tworzących stosy – jest etapem wstępnym do analizy metody postępowania, poprzedzającym budowę i zapis ostatecznej wersji algorytmu.

W kierunku nieoczekiwanych rozwiązań

Przedstawione dotąd modelowe problemy mają rozwiązania na tyle proste, że da się do nich dojść w drodze pracy indywidualnej albo grupowej ograniczonej do kreatywnego i krytycznego myślenia, bez zasilania pomysłami zewnętrznymi. Taki styl działania buduje poczucie sprawczości uczestników, jednak z oczywistych powodów nie można na nim poprzestać. Nie na wszystko „da się wpaść".

Dobór materiału zewnętrznego stanowiącego inspirację powinien być starannie przemyślany, tak by nie przemycał elementów, które będą stosowane mechanicznie bez zrozumienia i zastanowienia. W przypadku kursów algorytmiki wdzięcznym materiałem do analiz są idee różnych metod sortowania (na przykład Knuth, 2002, cz. 3). Zazwyczaj na poziome wstępnym (nawet przed wprowadzeniem struktur tablicowych) przeprowadzana jest konstrukcja i analiza sieci sortujących. Na etapie systematycznej nauki studenci przedstawiają, implementują i analizują klasyczne schematy sortowania. Ciekawą reakcję uczestników zajęć zaobserwowano na kursie Algorytmów dla bioinformatyki w roku 2021, kiedy studenci znaleźli i przedstawili na zajęciach materiał grupy Algo-Rythmics (The Algo-Rythmics Group) z Sapientia University w Tirgu Mures. Przedstawia on układy choreograficzne oparte na klasycznych algorytmach sortowania *in situ*.

Tego typu aktywności łączą się z postulatem, by analizować – pod warunkiem, że są one dostatecznie proste – profesjonalne algorytmy analizy dostępne w pakietach obliczeniowych, z których korzysta się w codziennej pracy. Kanonicznym przejawem realizacji tego postulatu są końcowe sekcje zadań eksploracyjnych, które można objąć wspólnym tytułem „Zobaczmy, jak robią to profesjonaliści". W przypadku popularnego obecnie systemu przetwarzania bazującego na interpretatorze języka Python (The Python Software Foundation, 2001–2023), wdzięcznym i nieskomplikowanym tematem tego typu analiz są schematy losowania oraz mieszania losowego zamieszczone w standardowym module random. W tym przypadku intensywnie korzysta się z faktu, że kod źródłowy bibliotek języka interpretowanego dostępny jest bezpośrednio jako tekst w każdym systemie, w którym je zainstalowano. Fakt ten często umyka świadomości nawet zaawansowanych użytkowników danego środowiska, którzy raczej gotowi są poszukiwać kodu źródłowego „w internecie" niż na własnym dysku.

Na zakończenie wątku, istotnych dla rozważań wydaje się kilka uwag związanych z doświadczeniem i przemyśleniami na temat związku myślenia algorytmicznego a dostępem do kursów programowania online. Kursy online ze względu na ich modularną strukturę, stopniowanie trudności oraz możliwość powrotu do wcześniej odwiedzonych miejsc (czyli zaangażowanie pamięci kinestetycznej[11]) cieszą się popularnością wśród studentów jako uzupełniająca forma uczenia się. W tym przypadku źródeł motywacji udziału w zajęciach upatrywać można zarówno na zewnątrz (opiekunowie kursów wystawiają certyfikaty uczestnictwa), jak i wewnątrz, gdy atrakcyjnym dla uczestników staje się niepokój poznawczy, wzbudzony i doświadczany w momencie stawiania uszeregowanych zadań. Wartym wspomnienia jest, że studenci uczestniczący z własnej woli w kursach online wykazują się większą inicjatywą i sprawnością podczas poszukiwań rozwiązań. Często jednak w trakcie podejmowanych aktywności nie towarzyszy im pogłębiona refleksja na temat przedmiotu działania[12] – uczestnicy kursów prezentują ugruntowane nawyki „dobrych praktyk" programowania

[11] W tym miejscu autorzy chcieliby podzielić się obserwacją/refleksją nad zastanawiającym nas zjawiskiem, którego szerszy opis zostawiają na inną okazję. Mają bowiem nieodparte wrażenie, że poczucie kinestetyki silnie wzmacniane przez współczesną technologię (choćby przez interfejsy urządzeń mobilnych) nie przekłada się na przekonanie, że notacja matematyczna nie jest obrazkiem, tylko syntetycznym odzwierciedleniem procesu, który ma również konotacje kinestetyczne.

[12] N.N. – uczestnik wspomnianego kursu podstaw myślenia algorytmicznego i programowania w edycji z roku 2019 – tak przedstawił swoje stanowisko dotyczące jego pracy końcowej: „sam napisałem ten program i rozumiem, jak on działa. Nie, nie mogę powiedzieć, co robi ta konkretna instrukcja. Ja myślę globalnie i uczę się globalnie; nie zajmuję się analizą pojedynczych kroków. Tak właśnie ułożyłem ten program".

korporacyjnego – zupełnie nieistotne w omawianym kontekście – jeszcze zanim zyskają nawyk systematycznego myślenia algorytmicznego, do którego są skłaniani na naszych zajęciach. Są bardzo skuteczni w wyszukiwaniu gotowych narzędzi pomagających w przygotowaniu rozwiązania problemu, lecz nie przenosi się to na efektywne prowadzenie rozumowań ani na umiejętność ograniczania repertuaru środków i zasobów. Jako ilustracja tego zjawiska niech posłuży komentarz końcowy do przykładu 10.

PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy rozważania dotyczyły uzupełnienia kursów akademickich związanych z matematyką o elementy wymagające eksploracyjnej aktywności uczestników pracujących samodzielnie lub (co jest korzystniejsze) w małych zespołach. Elementy te związane są z czymś, co można nazwać „powrotem do podstaw" myślenia matematycznego. Wykorzystują one zainteresowanie poza-matematyczną treścią oraz zaskoczenie tematem, co pozwala przynajmniej częściowo uniknąć przeszukiwania opanowanego zestawu schematów jako podstawowej metody działania.

Wobec konieczności wyposażenia studentów poszczególnych kursów w konkretne umiejętności pozwalające im na analizę zagadnień specyficznych dla zdobywanego wykształcenia, teza o objęciu całego materiału takim podejściem wydaje się mało realna. Jednak elementy i zadania eksploracyjne, poprzez budowanie osobistego doświadczenia uczestników, jawią się jako szczególnie cenne, zwłaszcza że stosowane podczas ich analizy elementy myślenia matematycznego – przekształcane w nawyk takiego myślenia – przekraczają bariery przedmiotów szkolnych i dyscyplin naukowych.

BIBLIOGRAFIA

Ashcraft, M.H., Faust, M.W. (1994). Mathematics Anxiety and Mental Arithmetic Performance: an Exploratory Investigation. *Cognition & Emotion*, *8*(2), 97–125.

Ashcraft, M.H., Moore, A.M. (2009). Mathematics Anxiety and the Affective drop in Performance. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 197–205.

Ashcraft, M.H., Ridley, K.S. (2005). Math Anxiety and Its Cognitive Consequences: A Tutorial Review. (s. 315–327). W: J.I.D. Campbell (red.), *Handbook of Mathematical Cognition*. New York: Psychology Press.

Ciosek, M., Żeromska, A. (2013). *Rozumowania w matematyce elementarnej* (s. 37–39). Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie.

Cipora, K. (2015). Lęk przed matematyką z perspektywy psychologicznej i edukacyjnej. *Edukacja*, *132*, 139–150.
Corel Corp. (1989–). *Corel DRAW.* http://www.coreldraw.com/pl/product/graphic-design-software z 20.07.2023.
Domagała-Kręcioch A. (2019a). Refleksje wobec szkolnej kultury błędu. *Kultura i Wychowanie*, *1*, s. 97– 110. DOI: 10.25312/2083-2923.15/2019_05adk
Domagała-Kręcioch A. (2019b). Uczmy się na błędach. *Głos Pedagogiczny*, *108*, s. 45–48 https://www.glospedagogiczny.pl/artykul/uczmy-sie-na-bledach z 9.08.2023.
Fennema, E., Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(5), 324–326; http://www.jstor.org/stable/10.2307/748467 z 9.08.2023.
Graham, R., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1996). *Matematyka konkretna*. Warszawa
Haladyna, T., Shaughnessy, J., Staughnessy, M. (1983). A casual analysis of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), 19–29, http://www.jstor.org/stable/10.2307/748794 z 9.08.2023.
Hawrot, A., Kaczan, R. (2014). Lęk a wyniki nauczania, (s. 135– 170). W: R. Dolata, *„Czy szkoła ma znaczenie”*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
Hopko, D.R. (2003). Confirmatory Factor Analysis of the Math Anxiety Rating Scale – Revised. *Educational and Psychological Measurement*, *63*(2), 336–351.
Klus-Stańska, D., Kalinowska, A. (2004). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak"
Klus-Stańska, D., Nowicka, M. (2014). *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk: Harmonia Universalis
Knowles, M.S., Holton III, E.F., Swonson, R.A. (2009). *Edukacja dorosłych.* Warszawa: PWN.
Knuth, D.E. (2002). *Sztuka programowania*. Warszawa: WNT
Kwieciński Z., Śliwerski B. (red.) (2019). *Pedagogika. Podręcznik akademicki*. Warszawa: PWN.
Liljedahl, P. (2020), *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12. 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Thousand Oaks: Corwin.
Ma, X. (1999). A Meta-analysis of the Relationship between Anxiety Toward Mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), s. 520–540.
Malewski, M. (2021). *Teorie andragogiczne. Metodologia teoretyczności dyscypliny naukowej.* Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.
Maloney E.A., Beilock S.L. (2012). Math Anxiety: Who Has It, Why It Develops, and How to Guard Against It. *Trends in Cognitive Sciences*, *16(8)*, 404–406.
Orzeszek A. (2007), Wykorzystać niezaplanowane sytuacje. *Nauczanie Matematyki*, *8*, s. 459–463.
Python Software Foundation (2001–). *Python 3.10 Documentation. The Python Standard Library.* https://docs.python.org/3.10/library/index.html z 21.08.2023.
Steinhaus, H. (1958). *Sto zadań*. Warszawa: PWN.
Sterna, D. (2021), *Rola błędu w uczeniu się*. Centrum Edukacji Obywatelskiej, listopad 2021.
The Algo-Rythmics Group. *From Dance to Code*, https://www.youtube.com/@AlgoRythmics, z 20.07.2023.

The Cambridge University School Mathematics Project (1986). W: *Matematyka w szkole średniej*, t. 1–3. Warszawa: WSiP.
The Inkscape Project (2003–). *InkScape*. https://inkscape.org z 20.07.2023.
Wong, K., Chen, Q. (2012). *Nature of an Attitudes Toward Learning Mathematics Questionnaire*. http://www.merga.net.au/publications/counter.php?pub=pub_conf&id=2030, z 9.08.2023.
Zan, R., Di Martino, P. (2007). Attitude Toward Mathematics: Overcoming the Positive/negative dichotomy. (s. 157–168). W: *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3.

Znaczenie automatycznej informacji zwrotnej we wzroście jakości wiedzy uczniów z matematyki na przykładzie aplikacji LearningApps

Eliza Jackowska-Boryc

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
eliza.jackowska-boryc@mail.umcs.pl
ORCID: 0000-0002-7562-8623

Katarzyna Siuzdak

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
katarzyna.ceglarz@op.pl

Streszczenie

Zasada aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie uczenia się sprzyja efektywnej nauce. Realizację tej zasady wspiera przekazywanie pełnej informacji zwrotnej będącej jednym z filarów oceniania kształtującego.

W konsekwencji wybuchu pandemii wirusa Covid-19 nauczyciele bardzo szybko musieli nauczyć się nowych narzędzi pracy, które umożliwiały nauczanie zdalne. W odpowiedzi na potrzeby edukacyjne, na rynku pojawiło się wiele aplikacji internetowych, które ułatwiły naukę w czasie izolacji, w tym przekazywanie informacji zwrotnej. W naszym artykule skupimy się na aplikacji LearningApps, która dzięki automatyzacji umożliwia zredukowanie czasu poświęcanego na przekazywanie informacji zwrotnej.

W naszej pracy porównamy wyniki, oraz zaprezentujemy opinie uczniów, którzy wzięli udział w badaniach dotyczących tego czy przekazywanie automatycznej informacji zwrotnej za pośrednictwem aplikacji LearningApps wpływa znacząco na postępy w nauce i motywację do dalszej pracy.

Abstract

The principle of active and conscious participation of the student in the learning process supports effective learning. The realization of this principle is supported by providing good feedback, which is one of the pillars of formative assessment.

As a consequence of the pandemic of Covid-19, teachers very quickly had to implement new work tools that enabled remote teaching. In response to educational needs, many online applications have appeared to facilitate learning during isolation, including providing feedback. In our article, we will focus on the LearningApps application which, thanks to automation, allows users to reduce the time spent on providing feedback.

In our work, we will compare the results and present the opinions of students who took part in research on whether providing automatic feedback via the LearningApps application significantly affects learning progress and motivation for further work.

WPROWADZENIE

Edukacja matematyczna postrzegana jest w kategoriach procesu, w którym nauczyciel na podstawie badania problemów wprowadza matematyczne pojęcia. Uczenie się matematyki w takim procesie zaczyna się od rozwiązywania problemów, a w efekcie uczeń poznaje pojęcia i reguły matematyczne (Nowak-Łojewska, 2015). Zgodnie z założeniami konstruktywicznej teorii uczenia się, uczeń to aktywna jednostka, której myślenie jest uwarunkowane umiejętnością interpretowania i negocjowania znaczeń, nauczyciel zaś występuje w roli inspiratora aktywności uczniów i osoby aranżującej warunki do uczenia się (Nowak-Łojewska, 2015). Niewątpliwie w nauczaniu matematyki należy kierować się zasadą aktywizacji ucznia i jego świadomego zaangażowania w proces zdobywania wiedzy. Cytując słowa Zofii Krygowskiej „Aktywny i świadomy udział ucznia w procesie nauczania jest warunkiem nieodzownym dla realizacji innych zasad nauczania, formułowanych w teorii pedagogicznej" (Krygowska, 1977, s. 3). Stąd możemy postawić stwierdzenie, że aktywne i świadome uczenia się jest warunkiem koniecznym owocnej nauki. Bez tego nawet najlepsi nauczyciele i najbardziej wyszukane metody nauczania nie są w stanie zapewnić sukcesu edukacyjnego.

Realizację zasady aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie nauczania umożliwia ocenianie kształtujące. Jego podstawą jest zwiększenie świadomości ucznia o przebiegu jego procesu zdobywania wiedzy, a dzięki temu zmotywowanie go do własnej aktywności. (Jackowska-Boryc, Pyzara, 2020). Zgodnie z definicją podaną przez Centrum Edukacji Obywatelskiej ocenianie kształtujące to koncepcja, która zakłada prowadzenie i ciągłe doskonalenie procesów uczenia się i nauczania w szkole, w wyniku których uczniowie uzyskują duże i wartościowe doświadczenie. To także efektywna praktyka szkolna, która opiera się na dialogu i szacunku. W centrum jej uwagi znajduje się udzielanie informacji zwrotnej, która wspiera uczniów w procesie uczenia się, a nauczycielowi dostarcza wiedzy, jak ma tego wsparcia udzielać[1].

W dzisiejszych czasach, mocno naznaczonych pandemią wirusa Covid-19, ogromną rolę w edukacji nie tylko matematyki zaczęło odgrywać kształcenie na odległość. W bardzo krótkim czasie nauczyciele musieli sprostać nowym wyzwaniom i dostosować się do korzystania w wielu technologicznych pomocy umożliwiających nauczania zdalne, nawet gdy wcześniej nie korzystali z żadnych technologii cyfrowych. Z powodu nowej sytuacji, w której znaleźli się zarówno uczniowie, jak i nauczyciele, popyt na aplikacje i narzędzia internetowe służące do nauki znacznie wzrósł. Na rynku pojawiło się bardzo wiele nowych pomocy zdalnych, które miały pomóc uczniom przyswajać wiedzę w trudnym, pandemicznym czasie. Wiele z tych narzędzi jest stosowanych nadal w celu wspierania nauki stacjonarnej.

Zobaczywszy, jak wielki potencjał ma wykorzystanie nowoczesnych technologii, postanowiliśmy postawić sobie za cel pytanie: Jak wykorzystać automatyzację, którą umożliwiają nowoczesne aplikacje edukacyjne do szybkiego i skutecznego przekazywania informacji zwrotnej, która jest podstawą oceniania kształtującego, ale zarazem nauczyciel musi poświęcić na jej przygotowanie bardzo dużo czasu.

OCENIANIE KSZTAŁTUJĄCE

Idea oceniania kształtującego trafiła do Polski z Wielkiej Brytanii w 2002 roku. John Hattie (2011) w swoich badaniach dotyczących procesów edukacyjnych doszedł do wniosku, że przekazywanie uczniom informacji zwrotnej w znacznym stopniu przyczynia się do zwiększenia wiedzy uczniów. Ocenianie kształtujące to pewien rodzaj filozofii oceniania pomagającego się uczyć, opartego na budowaniu relacji pomiędzy nauczycielem a uczniami.

Wśród wielu koncepcji, jakie niesie za sobą ocenianie kształtujące, należy wyróżnić następujące cechy:

1. Cele lekcji – jasno przedstawione uczniom na początku każdej lekcji.
2. Kryteria sukcesu – ściśle związane z celami lekcji. Jest to informacja co nauczyciel będzie brał pod uwagę przy ocenianiu ucznia. Kryteria sukcesu stanowią podstawę w przygotowaniu się do powtórek. Cel lekcji mówi o tym, co ma być osiągnięte, a kryteria sukcesu określają jak zostanie dokonany pomiar realizacji celów (Bąbel, 2007, s. 62).

[1] Por. https://ceo.org.pl/ocenianie-ksztaltujace-czyli-szansa-na-rozwoj-ucznia-i-nauczyciela-cz-2/ z 29.01.2025.

3. Informacja zwrotna – stała komunikacja między nauczycielem a uczniem na temat tego, jak i czego mają się uczyć, aby osiągnąć cele lekcji i kryteria sukcesu.
4. Samoocena – refleksja nad własnym procesem uczenia się.
5. Wiara w siebie, motywacja, samodzielność – kształtowanie świadomości własnych możliwości, gotowości do podejmowania wyzwań, suwerenność w podejmowaniu decyzji i czerpanie satysfakcji z czynionych postępów.
6. Współpraca – uczenie się od siebie nawzajem i wspólne dochodzenie do sukcesu.

Nauczyciel stosujący ocenianie kształtujące, poza przedstawionymi fundamentami oceniania kształtującego, powinien:
– rozróżniać funkcje oceny sumującej (stopnie) i kształtującej (informacja zwrotna),
– pamiętać o tworzeniu odpowiedniej atmosfery, w której główną ideą jest efektywne uczenie się i aktywizacja ucznia,
– umiejętnie formułować pytania kluczowe, motywujące uczniów do świadomego udziału w procesie uczenia,
– wprowadzać samoocenę i ocenę koleżeńską,
– stosować efektywną i pełnowartościową informację zwrotną.

Wyniki przedstawione w tej pracy dotyczą oceny kształtującej, a przede wszystkim przekazywania zautomatyzowanej informacji zwrotnej.

INFORMACJA ZWROTNA

Danuta Sterna (2006) podkreśla, że informacja zwrotna jest sednem oceniania kształtującego, które zbiera zasady dobrego nauczania. Pełnowartościowa informacja zwrotna zawiera cztery następujące cechy:

1. Informacja o tym, co uczeń zrobił dobrze.

Docenianie tego co zrobił uczeń jest bardzo ważne. Zgodnie z Dorotą Pintal (2020, s.10) „Wskazywanie uczniom mocnych stron ich pracy ma oddziaływanie motywujące. Każdy człowiek potrzebuje docenienia, więc jeśli wie, co robi dobrze, następnym razem może to powtórzyć." Wspomaga pewność siebie, pobudza konstruktywną krytykę i samoewaluację. Pomaga także zniwelować strach i niepewność często związane z procesem uczenia się matematyki. Jak podaje Danuta Sterna (2006, s.12): „[…] często zdarza się, że nauczyciel wyrabia w uczniach przeświadczenie, że matematyka jest tak trudna, że w zasadzie nie da się jej opanować. Dlatego docenianie tego, co uczeń zrobił dobrze, jest bardzo ważne".

2. Informacja o tym, co wymaga poprawy.

Podczas realizacji drugiej cechy dobrej informacji zwrotnej nauczyciel powinien skupić się na wskazaniu kilku najważniejszych błędów, których naprawa będzie celem ucznia w dalszym procesie edukacyjnym. Zgodnie z regułą stawiania celów SMART, powinny być skonkretyzowane, motywujące, osiągalne, istotne i określone w czasie (specific, motivational, attainable, relevant, time-bound) (Kazimierska, Lachowicz, Piotrowska, 2014). Dorota Pintal (2020, s. 10) podaje: „Przy wskazywaniu uczniom obszarów wymagających poprawy celem nauczyciela nie jest wytykanie błędów, a dążenie do zmiany. Dlatego nie wystarczy wskazać uczniom, co było źle, ale trzeba też dostarczyć informacji, jak błędy poprawić".

3. Przekazuje wskazówki, jak poprawić błędy.

Wskazując błędy, powinniśmy jednocześnie pokazać uczniowi, jak ma je poprawić. W nauczaniu matematyki informacja zwrotna odgrywa istotną rolę, gdyż uczniowie, robiący błąd, często nie wiedzą i nie rozumieją, co zrobili źle. Czasem nie wiedzą, jak zacząć pracę z danym zadaniem. W takich przypadkach wsparcie nauczyciela jest konieczne. Ważne jest tu przekazanie konkretnych wskazówek, w jaki sposób uczeń ma poprawić swoją pracę, a także jak się doskonalić (Jackowska-Boryc, Pyzara, 2020).

4. Wskazuje dalsze kierunki rozwoju ucznia.

Ostatni element informacji zwrotnej dotyczy tego, co zrobić, aby się dalej rozwijać. Nie można go pomijać. Uczeń, zwłaszcza ten, który swoją pracę wykonał dobrze, potrzebuje nowych wyzwań – takich, które będą wymagały od niego również dodatkowego wysiłku. (Pintal, 2020). Manu Kapur i Katerine Bielaczyc (Kapur, Bielaczyc, 2012) pokazują w swoich badaniach, że okazjonalne dawanie uczniom trudnych zadań, które wymagają od nich dodatkowego wysiłku i pozwalanie im na samodzielne zmaganie się z nim przez pewien czas, zanim przystąpi się do korekty i udzielania wskazówek, może podwoić zdolność rozumienia zagadnienia przez uczniów, w porównaniu do sytuacji, gdy uczniowie otrzymują już na początku bezpośrednie instrukcje (Sterna, 2023).

Informacja zwrotna zawierająca wyżej wymienione elementy jest oceną kształtującą. Warto pamiętać o tym, że najlepsze efekty stosowania informacji zwrotnej osiąga się wtedy, gdy jest udzielana systematycznie. Agnieszka Wenda (2018, s. 51), odpowiadając na pytanie „Jak często udzielać informacji zwrotnej?", pisze: „[…] należy robić to tak często, jak się tylko da. Oczywiście zdaję sobie sprawę z tego, że podstawową trudnością jest czasochłonność tego działania, traktuję je jednak jako inwestycję […]". Informacji zwrotnej należy udzielać często i szybko po wykonaniu przez ucznia pracy.

Udzielanie pełnej informacji zwrotnej jest efektywne i daje wiele korzyści dla ucznia (przyspiesza proces uczenia się) i nauczyciela (uczeń sam potrafi poradzić sobie z wieloma trudnościami i nie potrzebuje stałego wsparcia). Niewątpliwie jest to czynność, która wymaga sporego nakładu pracy uczącego. Należy zwrócić uwagę, że informacja zwrotna może być udzielana nie tylko przez nauczyciela, ale także przez innego ucznia (ocena koleżeńska) lub sama sobie (samoocena). Nauczyciel może także dostawać informację zwrotną od swoich uczniów, co jest pewną formą ewaluacji i pozwala na modyfikowanie metod i form pracy stosowanych w czasie lekcji.

Idea przekazywania dobrej informacji zwrotnej zainspirowała nas do zastanowienia się nad tym jak sprawić, aby nie była ona tak czasochłonna dla nauczyciela i jednocześnie jakość oceny kształtującej była wysoka. W duchu idei wykorzystania nowoczesnych technologii internetowych w nauczaniu matematyki postanowiłyśmy zbadać w jakim stopniu automatyczna informacja zwrotna wpłynie na zwiększenie jakości wiedzy uczniów. W badaniach użyłyśmy aplikacji LearningApps.

APLIKACJA LEARNINGAPPS

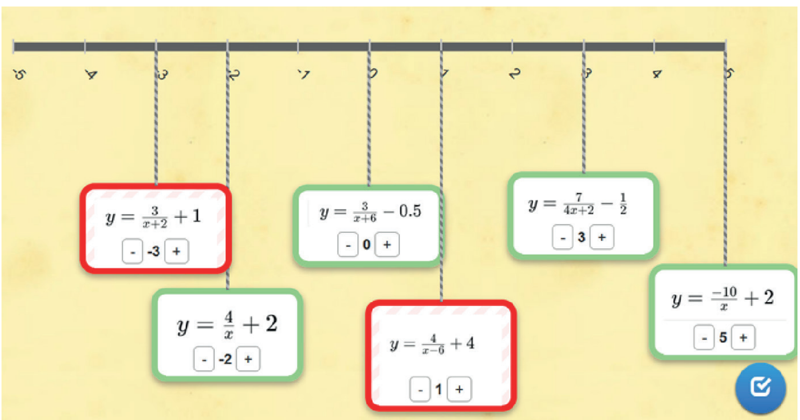
Ze względu na sytuację epidemiologiczną w 2020 roku, szkoły musiały wprowadzić zdalne nauczanie. W związku z tym mocno rozwinęły się różne narzędzia technologiczne i platformy edukacyjne, które miały ułatwić pracę nauczycielom i sprawić, by nauka zdalna była możliwa dla uczniów i przystępna dla nauczycieli. Wśród najpopularniejszych aplikacji i narzędzi technologicznych na rynku edukacyjnym pojawiły się takie, jak między innymi: Kahoot, Duolingo, Math-zoo, Szalone liczby i LearningApps. W swoich badaniach skupiliśmy się na zastosowaniu aplikacji LearningApps.

LearningApps jest darmową aplikacją, z której mogą korzystać uczniowie i nauczyciele. Po założeniu własnego konta otrzymuje się dostęp do wszystkich możliwości aplikacji. LearningApps jest typu Web 2.0, czyli jest to „rodzaj podejścia do komunikacji w internecie, uwzględniający zmianę pozycji odbiorcy, który staje się również pełnoprawnym uczestnikiem dialogu: następuje przejście od biernego obserwatora do czynnego współtwórcy lub twórcy (Kaczmarek-Śliwińska, 2011, s. 143). Podstawową rolę odgrywa treść generowana przez użytkowników tego serwisu. LearningApps wspiera procesy uczenia się i nauczania za pomocą małych interaktywnych, multimedialnych modułów. Nauczyciele, którzy korzystają z platformy, mogą w prosty sposób tworzyć nowe zadania dla uczniów z różnych dziedziny, w tym z matematyki. Następnie swoje zadania (moduły) można łączyć w kolekcje, które mogą być udostępnione uczniom na przykład, jako zadanie domowe. Przykłady modułów są przedstawione na rysunku 1. i 2.

Po utworzeniu kolekcji nauczyciel może poprosić uczniów, aby w odpowiednim miejscu wpisali swoje imię, dzięki czemu nauczyciel będzie miał dostęp do podsumowania, przedstawiającego liczbę wykonanych zadań.

Wśród udogodnień dostępnych w aplikacji można znaleźć wiele szablonów ułatwiających tworzenie własnych zadań, takich jak: pasujące pary, grupowanie, oś liczbowa, test jednokrotnego wyboru lub tekst z lukami. Do zadań można dołączyć różne treści audio i wideo z adnotacjami. Istnieje także możliwość tworzenia własnej rozgrywki znanej z telewizji gry „Milionerzy", bądź zindywidualizowanej krzyżówki. Nauczyciele, poza tworzeniem własnych treści, mogą korzystać również z pomysłów innych użytkowników. Same ćwiczenia nie stanowią jednak kompletnych jednostek edukacyjnych. Przeznaczone są one głównie do ćwiczenia i zwiększania umiejętności, a nie do wyjaśniania nowych pojęć.

Rysunek 1. Moduł „Milionerzy"



Rysunek 2. Moduł „Oś liczbowa"

Aplikacja podzielona jest na 33 kategorie, które dotyczą różnorodnych dziedzin nauki, a następnie rozrastają się na kolejne podkategorie. Dodatkowym ułatwieniem jest również możliwość posortowania treści według poziomu zaawansowania – od edukacji wczesnoszkolnej do kształcenia zawodowego i ustawicznego. Aplikacja jest dobrym narzędziem do współpracy pomiędzy nauczycielem i uczniem, ale może być bardzo dobrą pomocą edukacyjną dla ucznia, który przygotowuje się do sprawdzianu z konkretnego działu, bądź powtarza materiał przed egzaminem ósmoklasisty lub maturą.

Te własności sprawiają, że aplikacja LearningApps może być wykorzystana jako narzędzie do przekazywania dobrej informacji zwrotnej.

METODOLOGIA BADAŃ

Wyniki przedstawione w tym artykule dotyczą badań, które zostały przeprowadzone w 2023 roku i trwały od stycznia do kwietnia. Grupę badawczą stanowili uczniowie w wieku 14 –15 lat z jednego z lubelskich liceów. W czasie trwania badania uczniowie uczęszczali na lekcje matematyki na poziomie podstawowym w programie polskim. Warto podkreślić fakt, że uczniowie przed dokonaniem badania byli świadomi, na czym polega dobra informacja zwrotna i ocenianie kształtujące. Wszystkie tematy badanych lekcji dotyczyły funkcji i ich zastosowań zgodnie z tematyką treści ujętych w polskiej podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkół ponadpodstawowych. Uczniowie zostali podzieleni na dwie podgrupy: grupa dostająca automatyczną informację zwrotną przy użyciu aplikacji LearningApps (12 osób) i grupa otrzymująca oceny (17 osób). Uczestnicy badania zostali przydzieleni do grup w zależności od klas, do których uczęszczali. Grupa korzystająca z aplikacji reprezentowała klasę 1d, natomiast druga grupa uczniów była z klasy 1c. Skutkiem tego był fakt, że badane grupy nie były równoliczne. Wszyscy uczestnicy badania realizowali program z matematyki na poziomie podstawowym. Ze względu na specyfikę szkoły liczba uczniów w grupach badawczych była mniejsza niż 20 osób. Uczniowie z pierwszej grupy podczas trwania badania wykorzystywali podstawowe zadania z podręcznika i ze zbioru zadań wydawnictwa Oficyny Edukacyjnej Krzysztof Pazdro oraz platformę edukacyjna LearningApps, zawierającą wiele zadań pomocniczych związanych z omawianymi tematami lekcji. Ponadto, przez cały czas trwania badania uczniowie mieli na wspomnianej platformie umieszczane zadania powtórkowe i prace domowe mające przygotować ich do prac pisemnych. Co więcej, uczniowie korzystający z aplikacji otrzymywali automatyczną informacją zwrotną po wykonaniu zadania. Przykłady informacji zwrotnych, które otrzymywali uczniowie, są następujące:

„Bardzo dobrze! Potrafisz wyznaczać wartość funkcji dla podanego argumentu".
„Niestety nie. Argument 4 jest liczbą złożoną. Dlatego zostaje jej przyporządkowana wartość o 1 mniejsza, czyli 4 – 1 = 3".
„Gratulacje, ukończyłeś rozwiązywanie testu".
„Jeśli wszystkie Twoje odpowiedzi były poprawne, świetnie opanowałeś podstawowe zagadnienie dotyczące funkcji".
„Jeśli natomiast pojawiły się błędy lub chcesz jeszcze poćwiczyć obliczanie wartości funkcji, polecam rozwiązać test jeszcze raz".

„Świetnie, znalazłeś odpowiednie rozwiązanie. Umiesz rozróżnić kiedy relacja spełnia warunki dla funkcji".
„Świetnie, wszystkie dopasowania wskazałeś poprawnie".
„Bardzo dobrze wskazujesz miejsca zerowe dla funkcji liniowej".

Powyższe przykład informacji zwrotnych wskazywały na to, co uczeń zrobił dobrze (jeśli zadanie były wykonane poprawnie), oraz to, co uczeń zrobił źle, ze wskazówką, jak powinien poprawić błędy (w przypadku gdy zadanie było rozwiązane błędnie). Uczniowie należący do drugiej grupy podczas nauki wykorzystywali jedynie podstawowe środki dydaktyczne: ten sam podręcznik i zbiór zadań co grupa pierwsza. Przez cały czas trwania badania wszyscy uczniowie otrzymywali te same zadania i sprawdziany w wersji papierowej. Narzędziem badawczym były ankieta ewaluacyjna i kolekcje przygotowane w aplikacji LearningApps. Dodatkowej analizie podlegały także wyniki uczniów ze sprawdzianów. Natomiast pytanie badawcze brzmiało: Czy automatyczna informacja zwrotna (AIZ) wpływa na jakość wiedzy uczniów z matematyki na przykładzie aplikacji LearningApps?

Po zakończeniu badań (przełom kwietnia i maja 2023 roku) uczniowie korzystający z aplikacji zostali poproszeni o wypełnienie ankiety ewaluacyjnej składającej się z 12 pytań różnego typu: 9 pytań zamkniętych jednokrotnego wyboru, 1 pytanie zamknięte wielokrotnego wyboru i 2 pytania otwarte zależne od odpowiedź w pytaniach zamkniętych. Oto pytania jakie znajdowały się w ankiecie:

1. Czy korzystanie z portalu LearningApps sprawiło Ci jakiekolwiek trudności?
   a) Nie
   b) Tak
2. Jeśli w powyższym pytaniu zaznaczyłeś(-aś) odpowiedź „Tak", podaj jakie to były trudności. (Pytanie otwarte zależne od odpowiedzi udzielonej na pytanie 1).
3. W skali od 1 do 5 podaj, w jakim stopniu po rozwiązaniu zadań z konkretnego tematu, miałeś(-aś) poczucie zrozumienia zagadnienia?
   a) 1 – temat kompletnie niezrozumiały
   b) 2 – temat niezrozumiały
   c) 3 – temat średnio zrozumiały
   d) 4 – temat zrozumiały
   e) 5 – temat całkowicie zrozumiały
4. W skali od 1 do 5 podaj, w jakim stopniu przekazywana informacja zwrotna była pomocna w zrozumieniu zagadnień?
   a) 1 – całkowicie niepomocna
   b) 2 – niepomocna
   c) 3 – średnio pomocna
   d) 4 – pomocna
   e) 5 – zdecydowanie pomocna
5. W skali od 1 do 5 podaj, w jakim stopniu po rozwiązaniu zadań z konkretnego tematu, byłeś(-aś) przygotowany(-a) do sprawdzianu/kartkówki lub karty pracy?

a) 1 – całkowicie nieprzygotowany
b) 2 – nieprzygotowany
c) 3 – średnio przygotowany
d) 4 – przygotowany
e) 5 – bardzo dobrze przygotowany

6. W jaki sposób LearningApps ułatwił Ci przyswojenie i wyćwiczenie nowych zagadnień? (pytanie wielokrotnego wyboru)
   a) Łatwa dostępność zadań;
   b) Urozmaicone typy zadań;
   c) Automatyczna informacja zwrotna (dotycząca poprawności wskazanej odpowiedzi);
   d) Poprzez wskazówki dołączone do zadań;
   e) Aplikacja nie ułatwiła mi przyswojenia i wyćwiczenia nowych zagadnień;
   f) Inne: (z możliwością wpisania odpowiedzi).
7. Jak informacja zwrotna przekazywana za pomocą platformy LearningApps wpłynęła na Twoją motywację do nauki matematyki?
   a) Znacząco zmniejszyła motywację;
   b) W pewnym stopniu zmniejszyła motywację;
   c) Nie miała wpływu na motywację;
   d) W pewnym stopniu zwiększyła motywację;
   e) Znacząco zwiększyła motywację.
8. Jeżeli w powyższym pytaniu zaznaczyłeś(-aś) pierwszą lub drugą odpowiedź, podaj przypuszczalny powód zmniejszenia motywacji do nauki. (Pytanie otwarte zależne od odpowiedzi udzielonej w pytaniu 7).
9. Czy automatyczna informacja dotycząca poprawności wykonywania konkretnych przykładów wpłynęła pozytywnie na Twoje zaangażowanie w rozwiązywanie kolejnych zadań?
   a) Zdecydowanie tak;
   b) Raczej tak;
   c) Nie mam zdania;
   d) Raczej nie;
   e) Zdecydowanie nie.
10. Czy uważasz, że ilość rozwiązanych przez Ciebie modułów w aplikacji wpłynęła na Twoją ocenę ze sprawdzianu/kartkówki, czy karty pracy?
    a) Zdecydowanie tak;
    b) Raczej tak;
    c) Nie mam zdania;
    d) Raczej nie;
    e) Zdecydowanie nie.
11. W jaki sposób preferujesz rozwiązywać zadania na lekcji matematyki?
    a) Za pomocą platformy LearningApps;
    b) Korzystając ze zbioru zadań;
    c) Wykorzystując obie metody.
12. Czy chciałbyś(-abyś) w przyszłości ucząc się matematyki korzystać z LearningApps?
    a) 1 – nie widzę takiej potrzeby
    b) 2 – raczej nie
    c) 3 – nie mam zdania
    d) 4 – raczej tak
    e) 5 – zdecydowanie tak

WYNIKI BADAŃ

W przeprowadzonym badaniu porównaliśmy wyniki z prac pisemnych uczniów, którzy używali aplikacji z grupą uczniów, którzy jej nie używali. Wyniki przedstawione średnich ocen uczniów korzystający z aplikacji LearningApps są przedstawione w Tabeli 1, natomiast średnie uczniów, którzy nie korzystali z aplikacji pokazane są w Tabeli 2.

Tabela 1. Zestawienie średnich ocen uczniów korzystających z aplikacji

Imię ucznia	Średnia ocen z prac pisemnych
Przemysław	5,33
Dominika	5,00
Julia	4,33
Mateusz	4,33
Maciej	4,17
Milena	3,83
Zofia	3,83
Karol	3,67
Michalina	3,50
Łukasz	3,17
Maja	3,00
Karolina	3,00
ŚREDNIA GRUPY	3,930555556

Tabela 2. Zestawienie średnich ocen uczniów niekorzystających z aplikacji

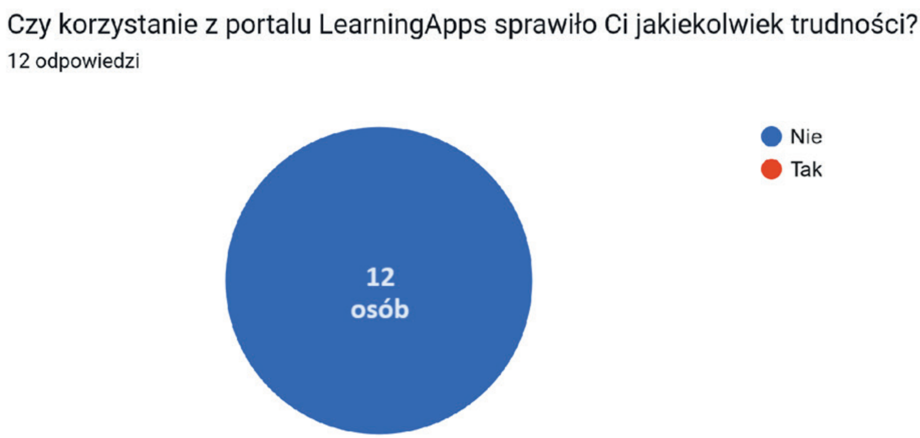
Imię ucznia	Średnia ocen z prac pisemnych
Arkadiusz	1,00
Martyna	2,75
Justyna	5,33
Oliwia	3,67
Julia	4,17
Anna	4,17
Martyna	4,67
Maria Ch	1,33
Lena	3,33
Maria Cz	3,67

cd. tab. 2

Zuzanna	4,83
Dagmara	2,33
Alicja	2,17
Dominika	4,00
Mauro	3,50
Hanna	1,83
Paweł	3,50
ŚREDNIA GRUPY	3,308823529

Porównanie wyników zaprezentowanych w tabelach 1. i 2. wykazało, że średnie średnich ocen prac pisemnych uczniów różnią się w zaokrągleniu o 0,63 na niekorzyść dla grupy uczniów, którzy nie stosowali aplikacji. Różnica ta nie jest duża i nie stanowi twardego dowodu na to, że aplikacja wpłynęła znacząco na wyniki uczniów. Aby dokonać bardziej szczegółowej analizy, należałoby poddać te dane testom statystycznym, co będzie kolejnym tematem naszych badań.

Ponadto skupiliśmy się na wynikach ankiety ewaluacyjnej, wypełnionej przez 12 uczniów, którzy przez cały okres trwania badania używali aplikacji LearningApps. Wyniki ankiety przedstawione są na Rysunkach 3–12.



Rysunek 3. Odpowiedzi na pytanie 1.

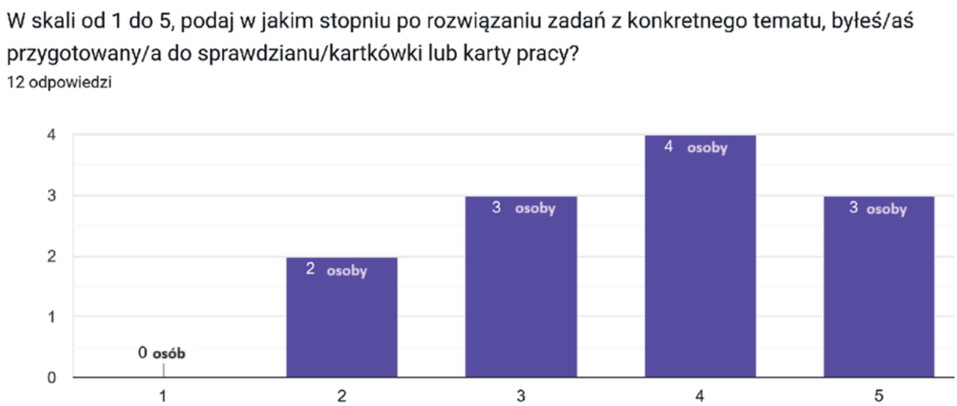
Jak widać na rysunku 3., ankietowani uczniowie nie mieli trudności z używaniem aplikacji LearningApps. Odpowiedzi ankietowanych wskazują na to, że aplikacja jest łatwa w użyciu i przystępna dla użytkowników. Uczniowie zaznaczali w odpowiedziach ustnych, że aplikacja jest bardzo intuicyjna i ma interesującą szatę graficzną. W związku ze stuprocentową odpowiedzią „Nie" na pytanie 1., nikt nie udzielił odpowiedzi na pytanie 2., które było pytaniem zależnym od pytania pierwszego.

Rysunek 4. Odpowiedzi na pytanie 3.

Z odpowiedzi umieszczonych na rysunku 4. możemy wywnioskować, że zdecydowana większość uczniów z grupy badawczej zrozumiała zagadnienie w dobrym lub bardzo dobrym stopniu (8 osób). Co oznacza, że wykorzystywana aplikacja spełniała swoją rolę w kontekście powtórek zadaniowych z danego działu. Należy zwrócić uwagę na fakt, że 3 osoby były niezdecydowane, a 2 odpowiedziały negatywnie. Może to oznaczać, że przerabiane tematy były dość trudne i wymagały większej analizy z nauczycielem.

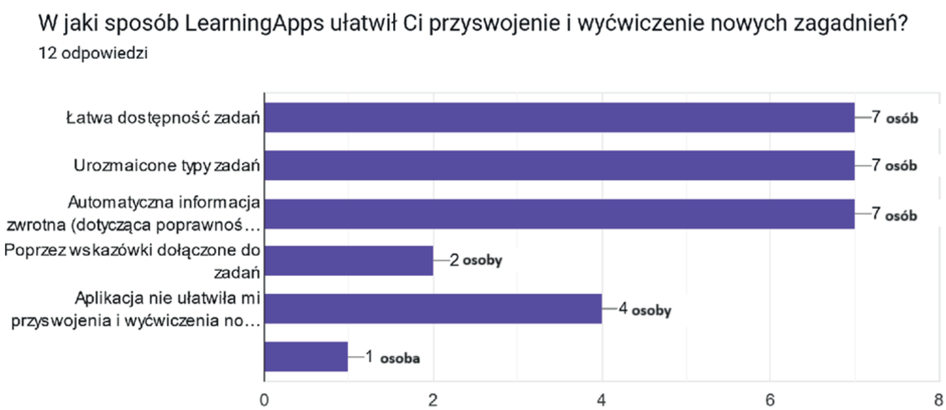
Rysunek 5. Odpowiedź na pytanie 4.

Na pytanie 4. więcej niż połowa ankietowanych odpowiedziała bardzo pozytywnie. Oznacza to, że według 7 osób automatyczna informacja zwrotna, jaką uzyskały za pośrednictwem aplikacji LearningApps, była dla nich pomocna i efektywna. Cztery osoby nie miały zdania, natomiast jedna osoba wypowiedziała się negatywnie. Analizując wyniki tego pytania, można dostrzec pozytywny oddźwięk płynący od użytkowników aplikacji LearningApps na temat udzielanej im informacji zwrotnej. Warto tutaj przypomnieć, że badani uczniowie wiedzieli, na czym polega dobra informacja zwrotna i ocenianie kształtujące.



Rysunek 6. Odpowiedź na pytanie 5.

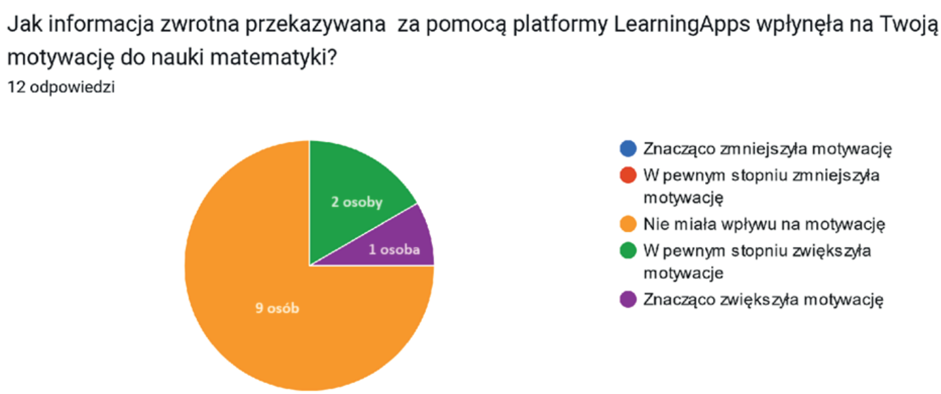
Zgodnie z odpowiedziami na pytanie 5., 3 osoby uważały że były bardzo dobrze przygotowane do formy pisemnej sprawdzającej wiedzę, a 4 osoby czuły się dość dobrze przygotowane. To stanowiło 7 osób, które udzieliły pozytywnych od-



Rysunek 7. Odpowiedź na pytanie 6.

powiedzi. 3 osoby nie miały zdania, natomiast 2 wypowiedziały się za tym, że nie były dobrze przygotowane. Zwróćmy uwagę na to, że w środowisku aplikacji LearningApps nie ma przestrzeni do zadawania pytań dotyczących tematu. Uczniowie jedynie rozwiązują zadania przygotowane wcześniej przez nauczyciela i dostają automatyczną informację zwrotną. W tym przypadku brakuje możliwości rozwiązywania problemów, które pojawią się w trakcie przygotowań, a których nie przewidział nauczyciel.

Zgodnie z odpowiedziami na pytanie 6., najwięcej osób wypowiedziało się za następującymi sposobami „Łatwą dostępnością zadań", „Urozmaiconymi typami zadań", „Automatyczną informacją zwrotną". 4 osoby były niezadowolone z korzystania z aplikacji i uważały, że nie wpłynęła ona na wzrost ich wiedzy. Pozytywnym wynikiem tego pytania jest fakt, że uczniowie docenili automatyczną informację zwrotną przekazywaną im przez aplikację LearningApps (wskazało ją 7 ankietowanych uczniów).



Rysunek 8. Odpowiedź na pytanie 7.

Zdecydowana większość ankietowanych wypowiedziała się, że aplikacja LearningApps nie wpłynęła w żadnym stopniu na ich motywację do nauki. 3 osoby zaznaczyły, że aplikacja w pewnym stopniu zwiększyła ich motywację do nauki. Nikt z ankietowanych nie wypowiedział się negatywnie na to pytanie. Taki rozkład odpowiedzi oznacza, że stosowanie aplikacji LearningApps nie wpływa na motywację uczniów do nauki. W związku z tymi nikt nie udzielił odpowiedzi na pytanie 8., które było zależne od odpowiedzi na pytanie 7.

Rysunek 9. Odpowiedź na pytanie 9.

Odpowiedzi ankietowanych osób na pytanie 9. były bardzo równo rozłożone. Zgodnie z wynikami 4 osoby wypowiedziały się zarówno za „zdecydowanie tak" i „nie mam zdania", natomiast po 2 osoby wypowiedziały się za „raczej tak" i „raczej nie". Odpowiedzi na pytanie 9. są związane z motywacją do nauki, która była tematem głównym pytania 7. Wyniki płynące z odpowiedzi na oba pytania są zbieżne. Oznaczają, że motywacja do rozwiązywania kolejnych zadań płynie nie z aplikacji ale jest zależna od innych czynników.

Rysunek 10. Odpowiedź na pytanie 10.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w odpowiedzi na pytanie 10. nie było osób, które zaznaczyły, że aplikacja LearningApps w żadnym stopniu nie wpłynęła na ich ocenę ze sprawdzianu/kartkówki. 4 osoby uważają, że zdecydowanie wpłynęła, po 3 osoby uważają że raczej wpłynęła i raczej nie wpłynęła. Natomiast 2 nie miały zdania na ten temat.

Rysunek 11. Odpowiedź na pytanie 11.

Pytanie 11. miało na celu zbadanie czy uczniowie chcieliby korzystać z aplikacji LearningApps na lekcjach matematyki w przyszłości. Odpowiedzi na to pytanie były bardzo równo podzielone. 4 osoby chciałyby korzystać z obu metod, 5 osób głównie z aplikacji LearningApps, natomiast 3 preferują klasyczne rozwiązywanie zadań tylko z użyciem zbioru zadań. Niewątpliwie większość ankietowanych uczniów chciałoby korzystać z aplikacji dodatkowo lub używając jej jako głównego środka. Pozytywny oddźwięk odpowiedzi na to pytanie warto porównać z odpowiedziami na pytanie 12. przedstawione na rysunku 12.

Rysunek 12. Odpowiedź na pytanie 12.

Na podstawie odpowiedzi dotyczących pytania 12. możemy stwierdzić, że 9 spośród ankietowanych osób chętnie skorzysta z aplikacji LearningApps w przyszłości. 1 osoba nie miała zdania, natomiast 2 były stanowczo przeciwne. Odpowiedzi na pytania 11. i 12. wskazują na pozytywny oddźwięk wśród ankietowanych osób na zastosowanie aplikacji LearningApps na lekcjach matematyki. Trzeba zwrócić uwagę także na negatywne głosy, które się pojawiły.

Szczegółowe podsumowanie i dyskusja zostaną przeprowadzone w kolejnej sekcji.

DYSKUSJA

Przypomnijmy, że pytaniem badawczym postawionym w naszym badaniu było: Czy automatyczna informacja zwrotna wpływa na jakość wiedzy uczniów z matematyki na przykładzie aplikacji LearningApps? Po przeprowadzeniu ankiety ewaluacyjnej i porównania wyników z prac pisemnych możemy dojść do następujących wniosków. Przede wszystkim po porównaniu średnich z prac pisemnych grupy uczniów, którzy korzystali z aplikacji LearningApps z wynikami uczniów, którzy korzystali jedynie ze zbioru zadań i podręcznika, okazało się, że nie ma istotnej różnicy w średnich ocen całej grupy. Przypomnijmy, grupa korzystająca z aplikacji uzyskała średnią 3,93, natomiast grupa uczniów, którzy nie korzystali z aplikacji uzyskała średnią 3,31 (obie średnie były zaokrąglone do dwóch miejsc po przecinku). Oznacza to, że rozwiązywanie zadań powtórzeniowych i uzyskana informacja zwrotna nie wpłynęły znacząco na wyniki w nauce uczniów.

Analiza odpowiedzi udzielonych na pytania w ankiecie ewaluacyjnej pokazuje, że korzystanie z aplikacji nie sprawiło trudności żadnemu z ankietowanych uczniów. Zdecydowana większość osób była usatysfakcjonowana z poziomu zrozumienia danego tematu i przygotowania do form pisemnych z danych tematów. Uczniowie docenili informację zwrotną, którą uzyskali za pośrednictwem aplikacji LearningApps i wskazali ją jako jedną z najistotniejszych zalet aplikacji równolegle z łatwym dostępem do urozmaiconych typów zadań. Warto jest przypomnieć, że uczniowie, którzy brali udział w badaniu, znają bardzo dobrze ideę oceniania kształtującego i potrafią rozpoznać dobrą informację zwrotną. Analiza odpowiedzi na pytania dotyczące motywacji uczniów wykazała, że w większości przypadków stosowanie aplikacji nie wpłynęło na motywację uczniów do nauki matematyki ani na zaangażowanie uczniów w rozwiązywanie zadań matematycznych. Badani byli także podzieleni, jeśli chodzi o wpływ aplikacji na oceny z prac pisemnych, co było zbieżne z obserwacjami dokonanymi na średnich ocenach w obu badanych grupach. Ostatecznie jeśli chodzi o stosowanie aplikacji LearningApps na lekcjach matematyki, zdania były pozytywne. Większość osób oprócz aplikacji docenia także korzystanie z takich środków dydaktycznych, jak podręcznik i zbiór zadań.

Udzielając odpowiedzi na pytanie badawcze, możemy stwierdzić, że automatyczna informacja zwrotna przekazywana za pomocą aplikacji LearningApps wpływa w pewnym stopniu na jakość wiedzy uczniów. Zgodnie z oceną ankietowanych jest to narzędzie ułatwiające zrozumienie konkretnego tematu i służące do powtórek przed różnymi formami prac pisemnych, jednak nie wpływa bezpośrednio na ich średnie ocen. Zwróćmy uwagę na fakt, że automatyczna informacja zwrotna udzielana przez badaną aplikację nie było doskonała. W informacji zwrotnej udzielanej uczniom były dane dotyczącego tego co uczeń zrobił dobrze, co zrobił źle, jak powinien poprawić błędy (jeśli je popełnił), natomiast nie było tam wskazówek do dalszego samorozwoju. Warto jest zwrócić uwagę na ulepszenie informacji zwrotnej w przyszłych badaniach. Atrakcyjna grafika, łatwość obsługi i urozmaicone zadania w stylu zagadek i gier mogą uprzyjemnić proces nauki i zaktywizować ucznia, ale bez klasycznych środków dydaktycznych efekt może być znikomy. Warto zwrócić uwagę, że przekazywanie automatycznej informacji zwrotnej jest dużym ułatwieniem dla nauczyciela, który w swojej pracy stosuje ocenianie kształtujące. Można więc korzystać z aplikacji w celu udzielania automatycznej informacji zwrotnej i aby okazjonalnie zaktywizować uczniów do nauki w inny sposób niż standardowe rozwiązywanie zadań w zeszycie. Nie może być to jednak główny środek dydaktyczny stosowany na lekcjach matematyki.

BIBLIOGRAFIA

Bąbel, P. (2007). Kształtująca ocean oceniania kształtującego. *Psychologia w Szkole*, *4*, 61–64.

Hattie, J. (2011). *Visible Learning for Teachers.* London: Taylor&Francis.

Jackowska-Boryc E., Pyzara A. (2020). Znaczenie informacji zwrotnej w nauczaniu matematyki. *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki*, *8*, s. 31–53, Bielsko-Biała: Fundacja „Matematyka dla wszystkich".

Kaczmarek-Śliwińska, M. (2011). Social media w działaniach Internet PR przedsiębiorstw polskiego rynku. W: *Public relations we współczesnym świecie: między służbą organizacji i społeczeństwu* (s. 137–153). Warszawa: Oficyna Wydawnicza ASPRA-JR.

Kapur, M., Bielaczyc, K. (2012). Designing for Productive Failure. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(1), 45–83.

Kazimierska, I., Lachowicz, I., Piotrowska, L., (2014). Formułowanie celów rozwojowych według metodologii SMART (s. 22). *Ośrodek Rozwoju Edukacji*, https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.doskonaleniewsieci.pl/upload/artykuly/sore%2520-%2520wsparcie/sore_m3.pdf&ved=2ahUKEwj46anD6t6LAxW8AxAIHchGEScQFnoECBIQAQ&usg=AOvVaw0NyWAiAdFQVFhxDNKE4Y9m, s. 22 z 29.01.2025.

Krygowska Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki cz. 2*. Warszawa: WSiP.

Kurczab M., Kurczab E., Świda E., (2023), *Matematyka. Podrecznik do liceów i techników. Klasa 1. Zakres rozszerzony.* Warszawa: Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

Nowak-Łojewska, A. (2015). *Planowanie pracy nauczyciela na I etapie edukacyjnym – edukacja matematyczna*.Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Pintal, D. (2020). *Ocenianie kształtujące. Od koncepcji do praktycznej realizacji w klasie zróżnicowanej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół ponadpodstawowych. Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2017.

Sterna, D. (2006). Ocenianie kształtujące na lekcjach matematyki, *Gazeta Szkolna*, *50*(352), 12.

Sterna, D. (2023). Ratujmy uczniów na bieżąco, ale nie natychmiast. *EduNewes,* https://osswiata.ceo.org.pl/2023/11/21/ratujmy-uczniow-na-biezaco-ale-nie-natychmiast/ z 29.01.2025.

Wenda, A. (2018). O docenianiu twórczego pisania, czyli o wspierającej sile informacji zwrotnej. *Polonistyka, 5*, 49–53.

Centrum Edukacji Obywatelskiej: https://sus.ceo.org.pl/ocenianie-ksztaltujace/ocenianie-ksztaltujace-2/ z 7.10. 2021.

Oprogramowanie statystyczne w nauczaniu szkolnym statystyki opisowej

Jarosław Kowalski

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie
j.kowalski@ujd.edu.pl
ORCID: 0009-0009-8627-913X

Streszczenie

Statystyka opisowa i rachunek prawdopodobieństwa odgrywają kluczową rolę w edukacji, pomagając w krytycznej analizie danych. Ich nauczanie w szkołach napotyka jednak na trudności, ponieważ zagadnienia te często wydają się uczniom abstrakcyjne i nieciekawe. Skutecznym rozwiązaniem może być wykorzystanie oprogramowania statystycznego, które ułatwia wizualizację danych, przeprowadzanie symulacji i analizę statystyczną. W artykule przedstawiono przykład zastosowania pakietu R jako narzędzia wspierającego naukę statystyki i rachunku prawdopodobieństwa, co sprzyja lepszemu zrozumieniu zagadnień oraz rozwijaniu umiejętności analitycznych i krytycznego myślenia.

Abstract

Descriptive statistics and probability play a key role in education, helping to critically analyze data. However, teaching them in schools is difficult because these topics often seem abstract and uninteresting to students. An effective solution can be the use of statistical software that facilitates data visualization, simulations, and statistical analysis. This article presents an example of using the R package as a tool supporting the learning of statistics and probability, which promotes better understanding of the issues and the development of analytical skills and critical thinking.

WSTĘP

Statystyka opisowa, kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, zwane stochastyką, są działami matematyki, których znajomość jest niezbędna dla wielu zawodów i dziedzin życia. Wiedza ta jest bardzo ważna w dzisiejszym świecie, pomaga nam rozumieć i interpretować zjawiska społeczne, gospodarcze, naukowe i przyrodnicze. Pozwala funkcjonować we współczesnym świecie, w którym zasypywani jesteśmy danymi liczbowymi podawanymi w różnej postaci. Uczy, jak je zbierać, analizować i prezentować w sposób obiektywny i wiarygodny, podejmować racjonalne decyzje oparte na dowodach i prognozach. „Zrozumienie ich jest warunkiem koniecznym do aktywnego udziału każdego człowieka w życiu społecznym, można by nawet powiedzieć, że jest warunkiem koniecznym demokratyzacji społeczeństwa. Natomiast fakt ich niezrozumienia przez większość społeczeństwa z jednej strony utrudnia ludziom możliwość podejmowania rozsądnych decyzji, na przykład w referendach czy wyborach, z drugiej zaś pozwala na manipulowanie społeczeństwem" (Kąkol, Wołodźko, 1998). Stochastyka ma wiele zastosowań w różnych dziedzinach wiedzy, życia i nauki. Jest nie tylko narzędziem dostarczającym metod wspomagania procesu podejmowania decyzji, ale też nauką badającą zjawiska masowe, która rozwija się i dostosowuje do zmieniającego się świata.

NAUCZANIE ELEMENTÓW STOCHASTYKI

Na świecie wprowadzanie elementów stochastyki do edukacji szkolnej było bardzo zróżnicowane w zależności od kraju, sięga końca XIX wieku, kiedy to zaczęto doceniać jej znaczenie w naukach przyrodniczych i społecznych.

„W Polsce po raz pierwszy te treści stochastyczne znalazły się w szkole w roku 1968, w ostatniej klasie szkoły średniej. Nieco później elementy statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa zostały także wprowadzone do programu szkoły podstawowej. Od samego początku problematyka ta nie cieszyła się ani sympatią uczniów, ani specjalnym uznaniem nauczycieli matematyki" (Kąkol, Wołodźko, 1998).

W latach 1975–1976 pojawiły się propozycje programów wprowadzające treści kształcenia poświęcone kształtowaniu umiejętności probabilistycznych i statystycznych w dziesięcioletniej szkole średniej (Krygowska, 1975), które miały wejść w życie w roku szkolnym 1978/1979. W 1982 roku zapadła decyzja o wstrzymaniu realizacji tej reformy i poprzestaniu na ośmioletniej szkole podstawowej oraz zmodyfikowaniu programu dla klas: IV–VIII, w których pojawiły się treści dotyczące rachunku prawdopodobieństwa i statystyki. Zawierały one wprowadzenie działu: Częstość zdarzeń w klasie V oraz działu: Statystyka w klasie VIII (Krygowska, 1986).

W 1987 roku Ministerstwo Oświaty i Wychowania zatwierdziło zmiany w programie nauczania, przenosząc cały dział dotyczący nauczania elementów statystyki w szkole podstawowej do treści zajęć fakultatywnych. Uzasadnieniem tych działań było odciążenie programu nauczania matematyki, a efektem ograniczanie, usuwanie z programów tych treści i ograniczenie tym samym liczby godzin przeznaczonych na nauczanie matematyki (*Zmiany w programach nauczania szkoły podstawowej*, 1987).

„W Polsce idee stochastyczne trafiły ponownie do szkoły podstawowej za sprawą dwóch, zatwierdzonych przez Ministerstwo Edukacji Narodowej (MEN), programów nauczania. Program Matematyka 2001 wprowadza treści statystyczne i elementy rachunku prawdopodobieństwa począwszy od klasy I, natomiast Błękitna Matematyka, treści statystyczne wprowadza, począwszy od klasy V, a treści z rachunku prawdopodobieństwa od klasy VIII" (Kąkol, Wołodźko,1998).

Reforma w 1999 roku zmieniła strukturę szkół na naukę w sześcioletniej szkole podstawowej, która kończyła się sprawdzianem i przejściem na trzy lata do gimnazjum kończącym się egzaminem a następnie wyborem szkoły ponadgimnazjalnej, którą można było zakończyć egzaminem maturalnym (2-letniej szkoły zawodowej, trzyletniego liceum ogólnokształcącego lub profilowanego bądź 4-letniego technikum). Kolejna reforma z 2009 roku obniżyła wiek rozpoczynania nauki w szkole z 7do 6 lat. Stopniowo wprowadzano też nową podstawę programową, która zawierała na każdym etapie kształcenia ogólnego treści z zakresu statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa. Obowiązek szkolny dla 6-latków trwał do 2015 roku i wraz z jego likwidacją zniesiono egzamin po szkole podstawowej. Od 2017 roku rozpoczęto następną reformę systemu szkolnictwa, która ponownie zmieniła strukturę szkół. Zlikwidowano gimnazja i przywrócono 8-letnie szkoły podstawowe. Nauka w liceach ogólnokształcących wydłużyła się do 4 lat, a w technikach – do 5. W miejsce szkół zawodowych powstały szkoły branżowe I i II stopnia. W 2019 roku gimnazja kończyli ostatni absolwenci i pojawili się też pierwsi absolwenci 8-letnich szkół podstawowych. Zmieniono też podstawę programową w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych.

Te kolejne reformy szkolnictwa zmieniły charakter nauczania matematyki na przedmiot kształcenia ogólnego. Jej zadaniem jest przygotowanie człowieka do życia w nowoczesnym społeczeństwie, a do realizacji tego celu potrzebna jest wiedza stochastyczna kształtująca umiejętności zbierania, przetwarzania danych statystycznych, porządkowania ich, przedstawiania w różnej postaci graficznej, analizowania otrzymanych wykresów w celu znalezienia odpowiednich prawidłowości, by na ich podstawie uzyskać odpowiedzi na stawiane pytania, wykorzystując do tego nowoczesną technologię i metody opracowywania danych statystycznych.

Z biegiem lat treści jej stały się nieodzownym elementem programów nauczania. W XX wieku rozwój technologiczny (era komputerów) znacząco wpłynął na metody jej nauczania, umożliwiając bardziej interaktywne i angażujące formy edukacji. W dobie cyfryzacji nauczanie elementów stochastyki przeszło znaczące zmiany. Specjalistyczne oprogramowanie stało się kluczowym narzędziem dydaktycznym wspierającym efektywne przyswajanie wiedzy i umiejętności analizy danych, zwłaszcza w kontekście rosnącej roli danych, informacji w życiu codziennym i różnych dziedzinach nauki oraz biznesu. Wprowadzenie treści stochastyki do nauczania szkolnego ewaluowało wraz ze zmieniającymi się potrzebami społeczeństwa i gospodarki. Coraz większe zrozumienie roli danych oraz rosnącego zapotrzebowania na nie i umiejętności analitycznych sprawiło, że te treści stały się i są teraz uważane za niezbędne dla pełnego wykształcenia matematycznego, co doprowadziło do ich integracji w szkolnych programach nauczania, mającego na celu przygotowanie uczniów do efektywnego funkcjonowania w społeczeństwie opartym na danych poprzez rozwijanie kompetencji analitycznych i statystycznych. Nauczanie elementów stochastyki ma na celu nie tylko przekazanie uczącym wiedzy teoretycznej, ale również rozwijanie kluczowych umiejętności, takich jak krytyczne myślenie, analiza danych, a także zdolność do podejmowania uzasadnionych decyzji na podstawie informacji statystycznych. W kontekście współczesnego społeczeństwa informacyjnego te umiejętności są niezwykle cenne, umożliwiające młodym ludziom lepsze orientowanie się w świecie danych i informacji (Ceglarek, Dąbrowski, Jankowski, Obidniak, Żmijski, 1999).

Elementy statystyki opisowej, których nauczaniem zajmuję się w tym artykule, są obecnie w Polsce integralną częścią nauczania matematyki zarówno w szkole podstawowej, jak i ponadpodstawowej. Dziś program nauczania matematyki w szkole podstawowej i ponadpodstawowej obejmuje podstawowe pojęcia statystyczne, takie jak: średnia, mediana, moda oraz podstawy rachunku prawdopodobieństwa, wprowadzając uczniów w świat analizy danych. Odniesienia do podstawy programowej nauczania matematyki podkreślają znaczenie praktycznego zastosowania wiedzy statystycznej i rachunku prawdopodobieństwa, zachęcając do korzystania z oprogramowania komputerowego i narzędzi cyfrowych.

- Ramowy program nauczania dla szkoły podstawowej obejmuje treści: Matematyka (klasy IV–VIII): – Statystyka i prawdopodobieństwo:
  Zbieranie, organizowanie i interpretowanie danych. Tworzenie i analiza wykresów (słupkowych, liniowych, kołowych). Obliczanie średnich arytmetycznych, mediany, mody. Podstawy rachunku prawdopodobieństwa: eksperymenty losowe, proste eksperymenty prawdopodobieństwa.
  - Użycie technologii:
    Zachęcanie do wykorzystania aplikacji komputerowych do tworzenia wykresów i analizy danych, na przykład Excel lub dedykowane oprogramowanie.
- Ramowy program nauczania dla szkoły średniej obejmuje treści: Matematyka (poziom podstawowy i rozszerzony):
  - Statystyka opisowa:
    Szczegółowa analiza danych statystycznych, w tym miary położenia i rozproszenia. Interpretacja wyników statystycznych i wnioskowanie na ich podstawie.

- Rachunek prawdopodobieństwa:
  Prawdopodobieństwo klasyczne i warunkowe. Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązywania problemów.
- Analiza danych i statystyka matematyczna:
  Stosowanie modeli matematycznych do interpretacji zjawisk losowych. Podstawowa znajomość rozkładów prawdopodobieństwa.
- Użycie technologii:
  Zachęcanie uczniów do korzystania z zaawansowanych narzędzi statystycznych i matematycznych, w tym oprogramowania takiego jak arkusze kalkulacyjne, czy: GeoGebra, R, Python (z bibliotekami do analizy danych) do przeprowadzania obliczeń, symulacji i wizualizacji.

W edukacji podstawowej nauczane są podstawowe idee statystyki opisowej, gdzie uczniowie zbierają dane, tworzą proste wykresy i interpretują zestawy danych. Wykonują projekty polegające na przeprowadzeniu ankiet wśród rówieśników odnośnie ich ulubionych sportów oraz analizę i prezentacje wyników w formie wykresów słupkowych lub kołowych.

Nauczanie staje się bardziej zaawansowane na poziomie szkoły ponadpodstawowej, z naciskiem na analizę statystyczną opisową zbioru danych (miary położenia, miary dyspersji). Uczniowie mogą korzystać z oprogramowania statystycznego, takiego jak Excel czy specjalistycznych programów do analizy statystycznej (R, Phyton, Jamovi), co umożliwia przeprowadzanie skomplikowanych, żmudnych i uciążliwych obliczeń i interpretowanie wyników w kontekście rzeczywistych problemów badawczych.

PROBLEMY W NAUCZANIU ELEMENTÓW STATYSTYKI OPISOWEJ

Nauczanie statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa napotyka na szereg problemów. Do najważniejszych należą:

– Negatywne nastawienie nauczycieli do nauczania statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa.
  Prawdopodobnie niechęć ta ma podstawy w braku merytorycznego i metodycznego przygotowania ich do realizacji tych treści (Tomaszewska, 2006).
– Ograniczony czas na omówienie i przeliczenie przykładów oraz potrzeba odpowiednich narzędzi i znajomości technologii.
  Terminologia związana ze statystyką opisową i rachunkiem prawdopodobieństwa może być dla uczniów trudna do zrozumienia. Nauczyciele muszą znaleźć sposoby na przedstawienie tych koncepcji w sposób przystępny

dla uczniów, usprawnienie metod, sposobów wykonywania żmudnych obliczeń, aby nie skupiać uwagi na rachunkach, a na interpretacji wyników. Brak dostępu do odpowiednich narzędzi i technologii, takich jak oprogramowanie statystyczne czy kalkulatory graficzne oraz brak umiejętności ich efektywnego wykorzystania stanowią ogromny problem.

– Problem w utrzymaniu motywacji uczniów do nauki treści statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa.
  Brak zrozumienia praktycznych zastosowań statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa może prowadzić do spadku motywacji do ich nauki. W arkuszach egzaminacyjnych trudno spotkać zadania zawierające treści statystyki opisowej, co nie motywuje uczniów do poznawania, uczenia się tych treści.

NARZĘDZIA STOSOWANE W NAUCZANIU STATYSTYKI OPISOWEJ

Jednym z narzędzi, które mogą ułatwić i uatrakcyjnić nauczanie statystyki opisowej, a w szczególności pomóc pokonać napotykane problemy, jest oprogramowanie statystyczne, które może wykonać wiele skomplikowanych obliczeń, oszczędzając czas i eliminując błędy ludzkie. Umożliwia ono tworzenie i wyświetlanie różnych rodzajów wykresów, tabel, ułatwia zrozumienie i interpretację danych, umożliwia tworzenie interaktywnych symulacji pozwalających na samodzielne eksperymentowanie z danymi i obserwacje ich zmiany w zależności od różnych parametrów, a także daje dostęp do wielu źródeł danych, które mogą być wykorzystane do nauczania statystyki opisowej do danych dotyczących własnych zainteresowań lub aktualnych problemów społecznych, co sprawia, że nauka statystyki jest atrakcyjniejsza.

W szkole podstawowej nauczanie statystyki opisowej skupia się na wprowadzeniu i rozwijaniu umiejętności interpretacji danych. Uczniowie uczą się zbierać, organizować i prezentować dane za pomocą tabel i prostych wykresów, a także obliczać podstawowe statystyki opisowe, takie jak średnią, medianę i modę – mogą to wykonać, korzystając z oprogramowania statystycznego na przykład arkusza kalkulacyjnego.

Na poziomie szkoły ponadpodstawowej program nauczania statystyki opisowej jest bardziej zaawansowany i obejmuje bardziej szczegółową analizę danych, korzystanie z oprogramowania statystycznego pozwala tu na wyeliminowanie żmudnych skomplikowanych obliczeń i interpretację wyników, symulację procesów losowych i eksperymentów, eksplorację danych.

Stosowane oprogramowanie komputerowe może mieć różnorodną rolę w nauczaniu szkolnym statystyki opisowej w zależności od celów, metod i poziomu nauczania. Przykładem takiego oprogramowania jest Excel – jeden z najbardziej znanych, najpopularniejszych, najczęściej wykorzystywanych arkuszy kalkulacyjnych w szkołach. Inne oprogramowanie komputerowe służące do obliczania miar statystycznych, wizualizacji danych, a także do symulowania i eksperymentowania ze zjawiskami losowymi, generowania rozkładów prawdopodobieństwa, to GeoGebra, Statistica, Phyton, Jamovi czy pakiet R.

Niestety oprogramowanie komputerowe może być bardzo kosztowne i niedostępne dla niektórych szkół, nauczycieli i uczniów, ze względu na brak odpowiedniego sprzętu, oprogramowania, dostępu do internetu, wsparcia technicznego, itp. Może to prowadzić do nierówności i wykluczenia edukacyjnego, a także do problemów z jakością i bezpieczeństwem danych.

Alternatywą wyboru może być środowisko programowe R, na które chciałbym zwrócić szczególną uwagę ze względu na jego możliwości. R to źródłowe oprogramowanie do analizy statystycznej i grafiki znajdujące coraz szersze zastosowanie w nauczaniu na poziomie szkolnym, akademickim jak i w profesjonalnej analizie danych. Wyróżnia się na tle innych programów statystycznych kilkoma aspektami:

- otwartością i dostępnością
  R to oprogramowanie otwartoźródłowe, dostępne bezpłatnie, co czyni je dostępnym dla szkół i uczelni bez konieczności ponoszenia wysokich kosztów licencyjnych.
- wsparciem społeczności
  R to ogromna społeczność użytkowników oferująca liczne pakiety, tutoriale i fora wsparcia, co ułatwia naukę i rozwiązywanie problemów.
- elastycznością
  R jest wyjątkowo elastyczny, umożliwia użytkownikom tworzenie niestandardowych funkcji, pakietów oraz pozwala przeprowadzać zaawansowaną analizę danych, co jest trudniejsze w bardziej zamkniętych systemach statystycznych, takich jak SPSS czy SAS.

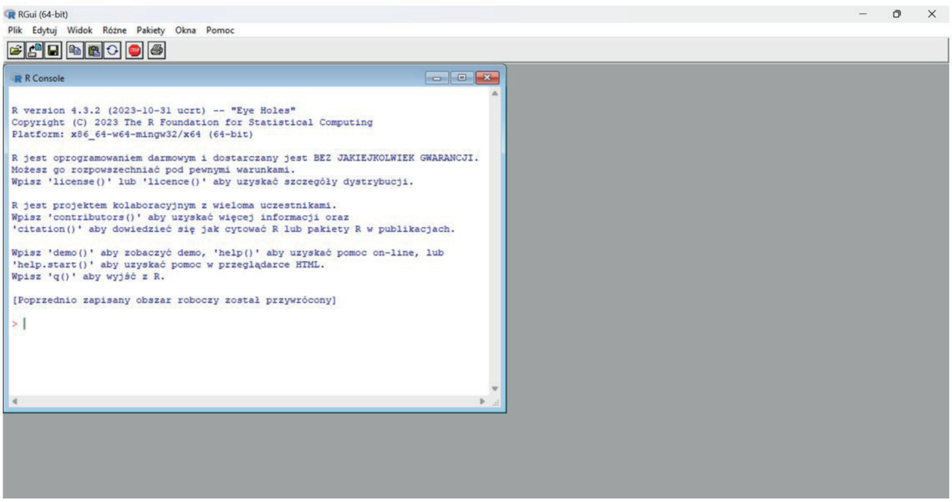
R oferuje bardzo wiele możliwości: umożliwia tworzenie różnych rodzajów wykresów, diagramów, przeprowadzanie różnych operacji na danych, takich jak agregacja, filtrowanie, transformacje itp. Za pomocą różnych funkcji i pakietów wchodzących do tego środowiska programistycznego umożliwia przeprowadzenie bardziej zaawansowanej analizy statystycznej, co czyni go wyjątkowo efektywnym narzędziem w nauczaniu statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa. Jego wykorzystanie w edukacji szkolnej może nie tylko poprawić zrozumienie materiału przez uczniów, ale również przygotować ich do przyszłych wyzwań zawodowych w dziedzinie analizy danych. Zastosowanie R w nauczaniu szkolnym otwiera szerokie możliwości dla uczniów i nauczycieli do praktycznego zgłębiania, nauczania oraz uczenia się statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa. R może być wspaniałym środkiem dydaktycznym integrującym przedmioty nauczania, takie jak matematykę i informatykę.

PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA PAKIETU R

Pliki instalacyjne języka R oraz interfejsu graficznego – programu RStudio, pobieramy ze stron:

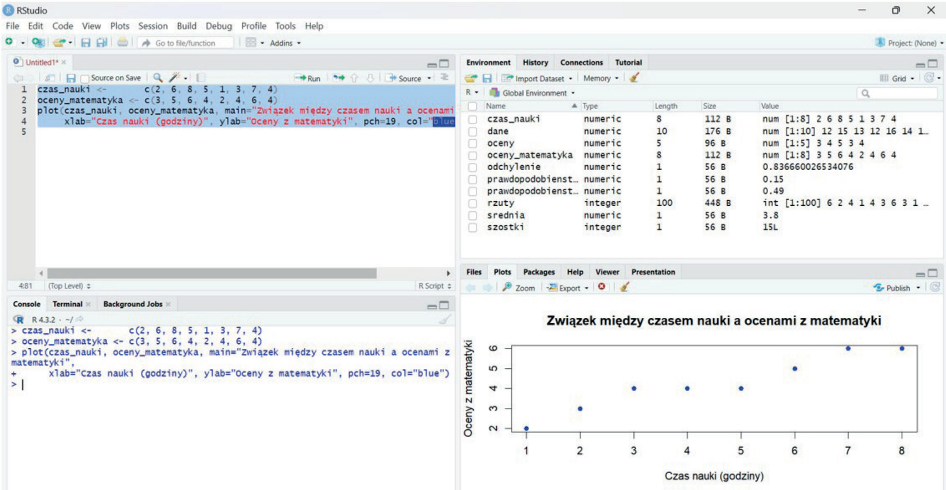
– https://www.r-project.org (oficjalna strona projektu R),
– https://www.rstudio.com (oficjalna strona programu RStudio).

Najpierw instalujemy program R, a następnie RStudio. Instalacja obu programów przebiega w standardowy sposób. Nie różni się od instalowania dowolnego innego programu i sprowadza się do zatwierdzania informacji pojawiających się w kolejnych okienkach. Podstawowy interfejs R jest zdecydowanie spartański, co można zobaczyć na rysunku 1.:



Rysunek 1. Interfejs R

W tym momencie R jest już w pełni gotowy do pracy, choć wyposażony w prymitywny interfejs użytkownika. Znacznie lepiej jest zainstalować i posługiwać się interfejsem dostosowanym do języka R. Istnieje wiele zintegrowanych środowisk programistycznych (Integrated Development Environment – IDE) języka R, jednak najpopularniejszym i zdecydowanie najlepszym z nich jest RStudio. RStudio ma rozległe możliwości dostosowywania, ale podstawowy interfejs wygląda tak, jak na rysunku 2.:



Rysunek 2. Interfejs RStudio

W tym przypadku lewy dolny panel to konsola R, której można używać tak samo jak standardowej konsoli R. Lewy górny panel zawiera edytor tekstowy. Prawy górny panel prezentuje informacje o przestrzeni roboczej, historii poleceń, plikach bieżących. Prawy dolny panel pokazuje wykresy, informacje o pakietach i pliki pomocy.

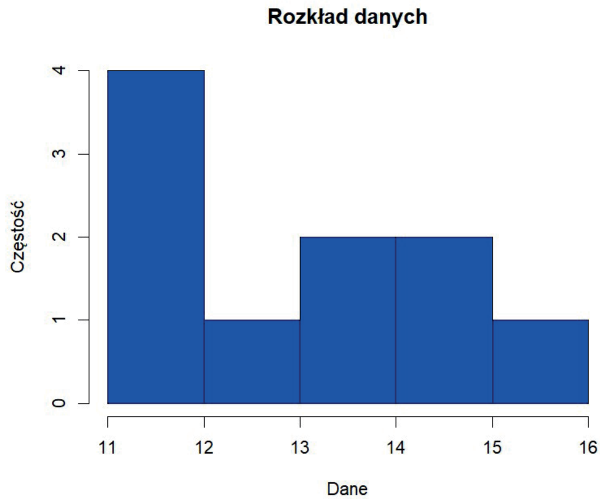
Oto kilka przykładów zadań, które mogą być realizowane w środowisku R, wraz z krótkimi przykładowymi gotowymi skryptami rozwiązań.

Przykład 1. Wizualizacja rozkładu danych

Zadanie: Utwórz histogram dla zestawu danych: 12, 15, 13, 12, 16, 14, 11, 12, 14, 15, pokazując rozkład danego zestawu danych.

 # Definiowanie zestawu danych
dane <- c(12, 15, 13, 12, 16, 14, 11, 12, 14, 15)
 # Tworzenie histogramu
hist(dane, breaks=5, col="blue", main="Rozkład danych", xlab="Dane", ylab="Częstość")

```
> # Definiowanie zestawu danych
> dane <- c(12, 15, 13, 12, 16, 14, 11, 12, 14, 15)
> # Tworzenie histogramu
> hist(dane, breaks=5, col="blue", main="Rozkład danych", xlab="Dane", ylab="Częstość")
```



Przykład 2. Symulacja rzutu monetą

Zadanie: Przeprowadź symulację 100 rzutów monetą i oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia orła za pomocą R.

 # Symulacja 100 rzutów monetą
rzuty <- sample(c(„Orzeł", „Reszka"), size=100, replace=TRUE, prob=c(0.5, 0.5)) print(rzuty)
 # Obliczanie prawdopodobieństwa wyrzucenia orła
prawdopodobienstwo_orla <- sum(rzuty == „Orzeł") / length(rzuty)
print(paste(„Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła:", prawdopodobienstwo_orla))

```
> # Symulacja 100 rzutów monetą
> rzuty <- sample(c(„Orzeł", „Reszka"), size=100, replace=TRUE, prob=c(0.5, 0.5)) > prin-
t(rzuty)
 [1] „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Reszka"
 [10] „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł"
 [19] „Reszka" „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka"
 [28] „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka"
 [37] „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł"
 [46] „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Reszka"
 [55] „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka"
 [64] „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka"
 [73] „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka"
 [82] „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka"
 [91] „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Orzeł" „Orzeł" „Orzeł" „Reszka" „Reszka" „Reszka" [100]
„Reszka"
> # Obliczanie prawdopodobieństwa wyrzucenia orła
> prawdopodobienstwo_orla <- sum(rzuty == „Orzeł") / length(rzuty)
```

```
> print(paste(„Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła:", prawdopodobienstwo_orla))
[1] „Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła: 0.49"
```

Przykład 3. Symulacja rzutu symetryczną kostką sześcienną

Zadanie: Symuluj 100 rzutów sześcienną kością do gry i oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki.
rzuty <- sample(1:6, size=100, replace=TRUE) print(rzuty)
szostki <- sum(rzuty == 6) prawdopodobienstwo <- szostki / 100 print(paste(„Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki:", prawdopodobienstwo))

```
> rzuty <- sample(1:6, size=100, replace=TRUE)
> print(rzuty)
 [1] 6 2 4 1 4 3 6 3 1 4 4 1 2 2 2 2 2 4 5 6 5 6 6 2 2 4 6 2 2 4 6 1 1 4 1 2 2
 [38] 5 2 6 2 1 1 2 5 2 5 3 4 4 1 4 6 1 3 2 6 2 4 5 5 6 3 1 1 2 5 4 3 6 6 4 3 5
 [75] 6 4 5 6 1 1 1 5 6 2 3 4 1 1 3 6 5 5 6 2 6 6 4 5 1 2
> szostki <- sum(rzuty == 6)
> prawdopodobienstwo <- szostki / 100
> print(paste(„Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki:", prawdopodobienstwo))
[1] „Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki: 0.15"
```

Przykład 4. Obliczanie średniej arytmetycznej

Zadanie: Użyj R do obliczenia średniej arytmetycznej otrzymanych ocen z matematyki.
oceny <- c(4, 5, 3, 5, 2) srednia <- mean(oceny) print(paste(„Średnia ocen:", srednia))

```
> oceny <- c(4, 5, 3, 5, 2)
> srednia <- mean(oceny)
> print(paste(„Średnia ocen:", srednia))
[1] „Średnia ocen: 3.8"
```

Przykład 5. Obliczanie odchylenia standardowego

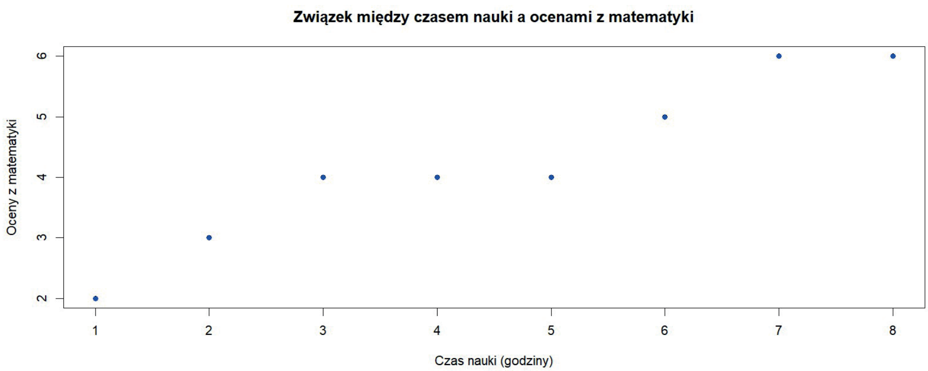
Zadanie: Użyj R do obliczenia odchylenia standardowego z ocen ucznia, aby ocenić ich zmienność.
oceny <- c(3, 4, 5, 3, 4) odchylenie <- sd(oceny)
print(paste(„Odchylenie standardowe ocen:", odchylenie))

```
> oceny <- c(3, 4, 5, 3, 4)
> odchylenie <- sd(oceny)
> print(paste(„Odchylenie standardowe ocen:", odchylenie))
[1] „Odchylenie standardowe ocen: 0.836660026534076"
```

Przykład 6. Rysowanie wykresu rozproszenia

Zadanie: Stwórz wykres rozproszenia pokazujący związek między czasem spędzonym na nauce a ocenami z matematyki.
czas_nauki <- c(2, 6, 8, 5, 1, 3, 7, 4) oceny_matematyka <- c(3, 5, 6, 4, 2, 4, 6, 4)
plot(czas_nauki, oceny_matematyka, main="Związek między czasem nauki a ocenami z matematyki", xlab="Czas nauki (godziny)", ylab="Oceny z matematyki", pch=19, col="blue")

```
> czas_nauki <- c(2, 6, 8, 5, 1, 3, 7, 4)
> oceny_matematyka <- c(3, 5, 6, 4, 2, 4, 6, 4)
> plot(czas_nauki, oceny_matematyka, main="Związek między czasem nauki a ocenami z matematyki",
+ xlab="Czas nauki (godziny)", ylab="Oceny z matematyki", pch=19, col="blue")
```



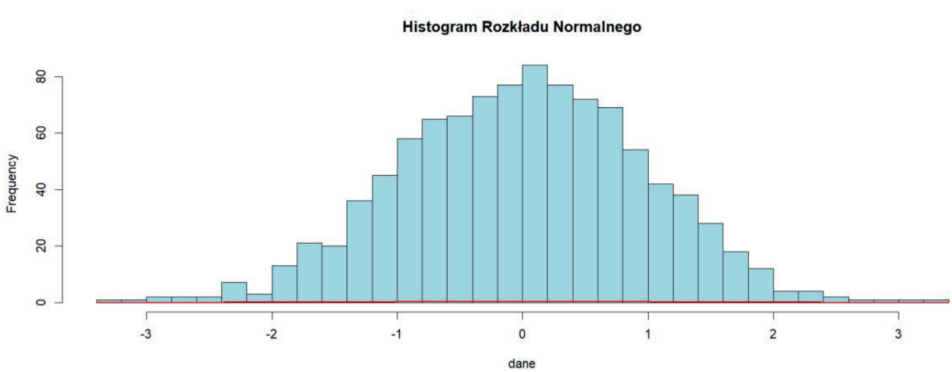
Zastosowanie środowiska R w nauczaniu statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa może obejmować szeroki zakres zadań, od prostych analiz do zaawansowanych symulacji. Każdy z tych przykładów demonstruje, jak środowisko R może być wykorzystane do nauczania kluczowych koncepcji statystycznych, jednocześnie promując rozwój praktycznych umiejętności analizy i wizualizacji danych. Umożliwiają one uczniom nie tylko naukę teorii, ale także praktyczne zastosowanie wiedzy w rzeczywistych scenariuszach badawczych, co znacznie zwiększa zrozumienie materiału.

Przykład 7. Badanie rozkładu normalnego

Zadanie: Użyj R do wygenerowania danych z rozkładu normalnego i stwórz wykres ich rozkładu.
Zilustruj, jak zmienia się kształt rozkładu w zależności od różnych wartości średniej i odchylenia standardowego.
 # Generowanie danych z rozkładu normalnego dane <- rnorm(1000, mean=0, sd=1)
 # Tworzenie wykresu
hist(dane, breaks=30, col="lightblue", main="Histogram Rozkładu Normalnego")
 # Dodawanie linii gęstości curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), add=TRUE, col="red", lwd=2)

```
> # Generowanie danych z rozkładu normalnego
> dane <- rnorm(1000, mean=0, sd=1)
> # Tworzenie wykresu
> hist(dane, breaks=30, col="lightblue", main="Histogram Rozkładu Normalnego")
> # Dodawanie linii gęstości
> curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), add=TRUE, col="red", lwd=2)
```

Zadanie to zapoznaje uczniów z rozkładem normalnym, jednym z najważniejszych rozkładów w statystyce, który znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki. Uczniowie uczą się interpretować parametry rozkładu normalnego (średnia i odchylenie standardowe) i obserwować, jak wpływają one na kształt krzywej rozkładu. Jest to doskonały sposób na zrozumienie pojęć takich jak „reguła trzech sigm".



Przykład 8. Modelowanie regresji liniowej

Zadanie: Zbuduj model regresji liniowej w R, aby zbadać związek między dwiema zmiennymi.
 # Przykładowe dane
*x <- 1:100 y <- 2*x + rnorm(100, mean=0, sd=20) # Budowanie modelu regresji liniowej model <- lm(y ~ x) # Podsumowanie modelu*
summary(model)

```
> # Przykładowe dane
> x <- 1:100
> y <- 2*x + rnorm(100, mean=0, sd=20)
> # Budowanie modelu regresji liniowej
> model <- lm(y ~ x)
> # Podsumowanie modelu
> summary(model) Call: lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-45.662 -14.664 0.263 12.992 50.094

Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) (Intercept) -3.34454 3.79679 -0.881 0.381 x 2.01170 0.06527 30.820 <2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 18.84 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9065, Adjusted R-squared: 0.9055 F-statistic: 949.9 on 1 and 98 DF, p-value: < 2.2e-16

Zadanie to pozwala uczniom zrozumieć, jak zmienna niezależna wpływa na zmienną zależną oraz jak modelować ten związek za pomocą regresji liniowej. Jest to wprowadzenie do modelowania statystycznego i analizy przyczynowo skutkowej, kluczowych umiejętności w nauce o danych.

Poniżej przedstawiam przykłady użycia pakietu R w nauczaniu statystyki opisowej, które można wykorzystać w szkole ponadpodstawowej, pracując na rzeczywistych danych zebranych przez uczniów w klasie:

*# **Zadanie 1.***
 # 1) Stwórz na podstawie ankiety w klasie bazę danych ze wzrostem i wagą dla 10 osób.
 # 2) Stwórz zmienną płeć.
 # 3) Za pomocą odpowiednich komend policz dla wszystkich indeks BMI. # Zapisz w tej samej tabeli indeks BMI.

```
#Skrypt:
ls(); rm(list = ls()); getwd()
wzrost <- c(180,176,184,182, 164, 190, 158,167,170,180) wzrost
waga <- c(62,72,75,83,80,50,52,54,55,62)
waga
tab <- data.frame(wzrost, waga)
tab
tab$plec <- c(‚K', ‚M','K', ‚M','K', ‚M','K', ‚M','K', ‚M') tab
tab$bmi <- tab$waga/(tab$wzrost/100)**2 tab$bmi
tab$bmi <- round(tab$bmi, 2) tab$bmi tab
```

```
> wzrost <- c(180,176,184,182, 164, 190, 158,167,170,180)
> wzrost
 [1] 180 176 184 182 164 190 158 167 170 180
> waga <- c(62,72,75,83,80,50,52,54,55,62)
> waga
 [1] 62 72 75 83 80 50 52 54 55 62
```

```
> tab <- data.frame(wzrost, waga)
> tab wzrost waga 1 180 62
2      176 72
3      184 75
4      182 83
5      164 80
6      190 50
7      158 52
8      167 54
9      170 55
10     180 62
> tab$plec <- c(‚K’, ‚M”K’, ‚M”K’, ‚M”K’, ‚M”K’, ‚M’)
> tab wzrost waga plec 1 180 62 K
2      176 72 M
3      184 75 K
4      182 83 M
5      164 80 K
6      190 50 M
7      158 52 K
8      167 54 M
9      170 55 K
10     180 62 M
> tab$bmi <- tab$waga/(tab$wzrost/100)**2
> tab$bmi
 [1] 19.13580 23.24380 22.15265 25.05736 29.74420 13.85042 20.83000
 [8] 19.36247 19.03114 19.13580
> tab$bmi <- round(tab$bmi, 2)
> tab$bmi
 [1] 19.14 23.24 22.15 25.06 29.74 13.85 20.83 19.36 19.03 19.14
> tab
 wzrost waga plec bmi 1 180 62 K 19.14
2      176 72 M 23.24
3      184 75 K 22.15
4      182 83 M 25.06
5      164 80 K 29.74
6      190 50 M 13.85
7      158 52 K 20.83
8      167 54 M 19.36
9      170 55 K 19.03
10     180 62 M 19.14
```

*# **Zadanie 2.***
 # Opłata, którą ponosisz za telefon, zmienia się z miesiąca na miesiąc. Podaj koszty użytkowania telefonu w każdym z miesięcy ostatniego roku (w PLN).
 # Wprowadź dane do R w formie wektora o nazwie rachunek.

```
# Odpowiedz na poniższe pytania, stosując odpowiednie funkcje w R.
# 1. Ile w sumie kosztowało Cię użytkowanie telefonu w ciągu ostatniego roku? (Podpowiedź:
funkcja sum()). # 2. Jaka była najniższa miesięczna opłata, jaką poniosłeś?
# 3. Jaka była najwyższa miesięczna opłata?
# 4. Przez jaką część roku (wyrażoną w procentach) miesięczna opłata przekraczała 40 PLN?
# 5. Ile średnio płaciłeś miesięcznie za telefon?
# 6.(*) Odrzucając dwie ekstremalne wartości (jedną największą, jedną najmniejszą), ile
średnio miesięcznie płaciłeś?
# 7.(*) Czy rozkład zmiennej miesięczny koszt użytkowania telefonu jest symetryczny?
# Odpowiedz, posługując się: średnią, medianą i modą. # 8.(*) Poniżej jakiej liczby znajduje
się 37% obserwacji?
```

```
#Skrypt: rachunek <- c(46, 33, 39, 37, 46, 30, 48, 32, 49, 35, 30, 48) rachunek
# 1. Ile w sumie kosztowało Cię użytkowanie telefonu w ciągu ostatniego roku? (Podpowiedź:
funkcja sum()). sum(rachunek) # 473
# 2. Jaka była najniższa miesięczna opłata, jaką poniosłeś? min(rachunek) # 30
# 3. Jaka była najwyższa miesięczna opłata? max(rachunek) # 4. Przez jaką część roku (wy-
rażoną w procentach) miesięczna opłata przekraczała 40 PLN?
(sum(rachunek > 40)/12) # Część roku jako część setna (sum(rachunek > 40)/12)*100 # Część
roku jako liczba procent round((sum(rachunek > 40)/12)*100, 2) # Część roku jako liczba
procent z zaokrągleniem # 5. Ile średnio płaciłeś miesięcznie za telefon?
mean(rachunek) # ok. 39.42 zł
# 6. Odrzucając dwie ekstremalne wartości (jedną największą, jedną najmniejszą), ile średnio
miesięcznie
# kosztowało Cię użytkowanie telefonu? mean(rachunek, trim=1/12)
# trim 1/12 oznacza odcięcie 1/12 najwyższych i najniższych wartości (czyli pozbywamy się
wartości z dwóch miesięcy)
# 7. Czy rozkład zmiennej miesięczny koszt użytkowania telefonu jest symetryczny? Odpo-
wiedz, posługując się:
# średnią, medianą i modą. mean(rachunek) median(rachunek) table(rachunek) mean(ra-
chunek); median(rachunek); table(rachunek) # WNIOSEK:
# Średnia wyższa od mediany sugeruje prawoskośność rozkładu. Najczęściej występują trzy
wartości, z czego dwie znajdują się bliżej prawej strony rozkładu.
# 8. Poniżej jakiej liczby znajduje się 37% obserwacji? quantile(rachunek, 0.37)
# Poniżej liczby 35.14
```

```
> rachunek <- c(46, 33, 39, 37, 46, 30, 48, 32, 49, 35, 30, 48)
> rachunek
 [1] 46 33 39 37 46 30 48 32 49 35 30 48
> sum(rachunek) # 473
[1] 473
> min(rachunek) # 30
[1] 30
> max(rachunek)
[1] 49
```

```
> (sum(rachunek > 40)/12) # Część roku jako część setna
[1] 0.4166667
> (sum(rachunek > 40)/12)*100 # Część roku jako liczba procent
[1] 41.66667
> round((sum(rachunek > 40)/12)*100, 2) # Część roku jako liczba procent z zaokrągle-
niem [1] 41.67
> mean(rachunek) # ok. 39.42 zł
[1] 39.41667
> mean(rachunek, trim=1/12)
[1] 39.4
> mean(rachunek)
[1] 39.41667
> median(rachunek)
[1] 38
> table(rachunek) rachunek
30 32 33 35 37 39 46 48 49
 2 1 1 1 1 1 2 2 1
> mean(rachunek); median(rachunek); table(rachunek)
[1] 39.41667 [1] 38 rachunek
30 32 33 35 37 39 46 48 49
 2 1 1 1 1 1 2 2 1
> quantile(rachunek, 0.37) # Poniżej liczby 35.14
 37%
35.14
```

Zadania te zapewniają uczniom praktyczne doświadczenie w korzystaniu z R do rozwiązywania rzeczywistych problemów statystycznych, zachęcając do eksploracji danych i rozwijania umiejętności analitycznych a także pisania skryptów.

Wykorzystanie języka R w nauczaniu statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa znacząco wpływa na zrozumienie materiału przez uczniów i pozwala na:

- aktywne uczenie się
  Praca z R zachęca do aktywnego uczestnictwa w procesie edukacyjnym, co jest zgodne z teorią konstruktywizmu. Uczniowie, angażując się w rozwiązywanie problemów i analizę danych, lepiej przyswajają wiedzę;
- rozwój umiejętności praktycznych
  Nauka R i jego aplikacji w statystyce opisowej przygotowuje uczniów do przyszłych wyzwań zawodowych, gdzie analiza danych odgrywa kluczową rolę;
- zrozumienie abstrakcyjnych pojęć
  Symulacje i wizualizacje wykonane w R ułatwiają zrozumienie abstrakcyjnych pojęć statystycznych, przekształcając je w konkretne, łatwiejsze do zrozumienia przykłady.

KORZYŚCI WPROWADZANIA DO NAUCZANIA SZKOLNEGO STATYSTYKI OPISOWEJ PAKIETU R

Włączenie zaawansowanego oprogramowania statystycznego, takiego jak środowisko R, jego narzędzi do wizualizacji danych oraz zasobów edukacyjnych dostępnych online w proces nauczania i uczenia się znacząco wzbogaca i otwiera nowe horyzonty dla edukacji statystycznej. Jest wspaniałym środkiem dydaktycznym integrującym przedmioty nauczania takie jak matematykę i informatykę. Nauczanie statystyki opisowej z użyciem pakietu R w nauczaniu szkolnym niesie ze sobą liczne korzyści. Rozwija umiejętności analityczne, pozwala uczniom na zrozumienie i interpretację danych, co jest kluczowe w wielu dziedzinach nauki i w życiu codziennym. Nauka korzystania z pakietu R rozwija zdolność krytycznego myślenia oraz umiejętności analizy danych. Uczniowie mają okazję zobaczyć, jak teoretyczne koncepcje matematyczne mogą być zastosowane w praktyce, tak jak w przytaczanych przykładach. Praca z rzeczywistymi danymi zwiększa zaangażowanie i motywację do nauki, a korzystanie z pakietu R łączy umiejętności matematyczne z programowaniem, co jest istotnym aspektem nowoczesnej edukacji. Uczniowie uczą się, jak pisać skrypty, co rozwija ich umiejętności programistyczne i znajomość narzędzi informatycznych. Znajomość pakietu R, który jest powszechnie używany w badaniach naukowych i przemyśle, może być cenną umiejętnością na rynku pracy wyniesioną ze szkoły. Umiejętność pracy z narzędziami do analizy danych jest przecież coraz bardziej poszukiwana w różnych zawodach. Uczniowie mogą pobierać rzeczywiste dane z internetu, importować je do R, a następnie przeprowadzać różne analizy. Dyskutować na temat tego, co mówią obliczone statystyki. Za pomocą pakietu ggplot2 w R uczniowie mogą tworzyć zaawansowane wizualizacje danych, co pozwala na lepsze zrozumienie wyników analiz statystycznych. Wizualizacje pomagają również w komunikowaniu wyników innym osobom. Uczniowie mogą pisać skrypty w R, aby symulować różne zjawiska statystyczne, co pozwala im zrozumieć pojęcia takie jak: rozkład prawdopodobieństwa, próbki i populacje.

Nauczanie statystyki opisowej z R nie tylko wzbogaca program nauczania matematyki, ale również przygotowuje uczniów do wyzwań związanych z analizą danych w różnych kontekstach zawodowych i akademickich.

Nie należy jednak traktować oprogramowania komputerowego jako zastępstwa lub celu nauczania i uczenia się statystyki, ale jako narzędzia lub środka, który może wspierać i uzupełniać tradycyjne metody i formy nauczania i uczenia się.

PODSUMOWANIE

Statystyka opisowa w edukacji szkolnej może być bardzo ciekawa i angażująca – to wyzwanie dla nauczyciela i ucznia. To zbiór wiedzy i procedur, które pozwalają na wiarygodne uczenie się z danych, rozwijanie umiejętności krytycznego myślenia i interpretacji otrzymanych wyników. Ważne jest, aby uczniowie rozumieli, jak statystyka jest używana w codziennym życiu i jak mogą z niej korzystać do podejmowania decyzji. Używanie danych bezpośrednio dotyczących samych uczniów zwiększa ich aktywność i zaangażowanie. Można więc wykorzystać zbierane przez uczniów dane do nauczania statystyki opisowej tak jak w prezentowanych przykładach, zbierać dane na temat wzrostu, wagi, płci, wieku, czasu dojazdu, kosztów używania telefonu itp. Zbieranie danych szkolnych może być świetnym sposobem na to, aby przekonać i zachęcić uczniów do jej uczenia się (Łakoma, 2001).

Wykorzystywane oprogramowanie może być pomocnym narzędziem w nauczaniu szkolnym statystyki opisowej, ale nie może zastąpić nauczyciela ani ucznia. Nauczyciel musi nadal planować, realizować i oceniać proces nauczania, a uczeń musi nadal myśleć, wnioskować i interpretować otrzymane dane, wyniki. Oprogramowanie komputerowe może jedynie ułatwić i uatrakcyjnić te zadania, a także poszerzyć zakres i głębię poznania, może pomóc w rozwijaniu kompetencji cyfrowych uczniów i nauczycieli, które są niezbędne w dzisiejszym świecie, pełnym nowoczesnych technologii. Uczniowie mogą nauczyć się korzystać z różnych programów i aplikacji, które mogą być przydatne nie tylko w nauce statystyki opisowej, ale także w innych przedmiotach i w życiu codziennym. Nauczyciele natomiast mogą podnosić swoje kwalifikacje i dostosowywać się do zmieniających się wymagań rynku pracy.

Oprogramowanie komputerowe może być trudne i skomplikowane w użyciu dla niektórych wykładowców, nauczycieli i uczniów ze względu na brak odpowiedniego szkolenia, wsparcia, motywacji, zaufania itp. Może to prowadzić do frustracji, oporu, stresu, a także do niewłaściwego lub nieefektywnego wykorzystania oprogramowania, może być nieadekwatne i ograniczające dla nauczania i uczenia się statystyki, jeśli nie jest dostosowane do celów, metod i poziomu nauczania. Może to prowadzić do utraty lub zniekształcenia istotnych treści, umiejętności i kompetencji statystycznych, takich jak: rozumowanie, interpretacja, krytyczne myślenie, komunikacja, itp., zatem wybór i dobór oprogramowania komputerowego zawsze należy rozważyć i zrównoważyć w zależności od konkretnych potrzeb.

Oprogramowanie statystyczne odgrywa kluczową rolę w nauczaniu elementów statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa zarówno w szkole podstawowej, jak i średniej. Wykorzystanie go w nauczaniu treści elementów stochastyki zmierza w kierunku zwiększenia efektywności procesu edukacyjnego poprzez wizualizację danych, symulacje oraz praktyczne zastosowanie teorii statystycznej. Jego rola w nauczaniu statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa jest niezaprzeczalna i oferuje możliwości, które jeszcze kilka dekad temu były nieosiągalne.

Jednak integracja takich zasobów w sposób efektywny i umożliwiający dostęp każdemu uczniowi wciąż stanowi wyzwanie dla edukatorów. Stawia pytania i wskazuje na obszary dalszego badania wpływu technologii na nauczanie tych dziedzin, wykorzystanie jej w metodach nauczania poprzez analizę konkretnych przypadków zastosowania tych narzędzi cyfrowych w edukacji w kontekście globalnej cyfryzacji i rosnącej ich dostępności, znaczenia integracji nowoczesnych technologii w proces dydaktyczny. Obszarem moich dalszych badań i poszukiwań jest analiza wpływu stosowania zaawansowanego oprogramowania statystycznego na przykładzie środowiska R na efektywność i optymalizację procesu nauczania i uczenia się stochastyki na poziomie szkoły średniej i studiów wyższych oraz wpływu na rozwój umiejętności analitycznych uczących się i wymagań współczesnego świata.

BIBLIOGRAFIA

Łakoma, E. (1988). O poglądach H. Freudentala na temat nauczania pojęć rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, *Matematyka*, *4*, 204–213.

Łakoma, E. (2001). *Jak uczyć statystyki w zreformowanej szkole*. Warszawa: WSiP.

Ceglarek, B., Dąbrowski, M., Jankowski, B., Obidniak, D., Żmijski, J. (1999*). Projektowanie PROGRAM NOWA SZKOŁA, materiały szkoleniowe dla rad pedagogicznych*. Warszawa: CODN.

Jankowska, Z. (2004). Statystyka opisowa i technologia informacyjna w szkole podstawowej. *Czasopismo Grupy Roboczej SNM, Matematyka i Komputery*, *18*,

Kąkol, H. (1987). *Nauczanie matematyki w klasie ósmej*. Warszawa: WSiP.

Kąkol, H. (1990). *Podstawowe pojęcia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Propozycja dydaktyczna*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP.

Kąkol, H.: (1990). Przykłady wykorzystania komputera w procesie kształcenia pojęć statystycznych i probabilistycznych. *Matematyka*, *4*, 191–195.

Kąkol, H. (1994). *Elementy statystyki opisowej w szkole podstawowej*. Wilkowice: Wydawnictwo „Dla Szkoły".

Kąkol, H., Wołodźko, S. (1998). O pewnej koncepcji dydaktycznej nauczania elementów statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa w szkole podstawowej. *Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie, Rocznik Naukowo -Dydaktyczny. Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki*, *II*, 67–85.

Krygowska, Z. (1957). Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania matematyki. W: *Dziesięciolecie Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie 1946–1956 zbiór rozpraw i artykułów.* Kraków: Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie.

Krygowska, Z. (1975). Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej, a nauczanie matematyki w szkole powszechnej. *Matematyka*, *2*, 103–114.

Krygowska, Z. (1981) *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP.

Krygowska, Z. (1986). Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki***,** *6*, 25–41.

Neyman, J. (1969) *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki*. Warszawa: PWN.

Neyman, J. (1979). Narodziny statystyki matematycznej. *Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II, Wiadomości Matematyczne*, *12*, 91–106.

Oktaba, W. (1965). *Elementy statystyki matematycznej i metoda doświadczalnictwa*. Łódź–Warszawa: PWN.

Olecka, A. (1984). Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa. *Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *3*, 85–154.

Pearson, A.T. (1994). *Nauczyciel. Teoria i praktyka w kształceniu nauczycieli*. Warszawa: WSiP.

Program nauczania matematyki w klasach IV–VIII szkoły podstawowej MATEMATYKA 2001, WSiP, Warszawa 1994, nr DKO-404-2/94/ws, VIII–XII.

Program edukacji matematycznej w szkole podstawowej i gimnazjum „Błękitna Matematyka”, Zatwierdzony przez MEN nr decyzji DKW-4014/16/99.

Tomaszewska, A.Z. (2017). Wyniki badań nad stanem nauczania statystyki opisowej w Polsce. W: *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *1*, 321–334

Tomaszewska, A.Z. (2006). Nauczanie statystyki opisowej a kształtowanie kompetencji kluczowych w klasach IV–VI szkoły podstawowej – fragment badań. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki*, *29*, 209–251.

Zmiany w programach nauczania szkoły podstawowej (1987). Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, Warszawa.

Nauka matematyki podczas gry miejskiej z aplikacją MathCityMap

Anna Pyzara

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
anna.pyzara@umcs.pl
ORCID 0000-0002-8165-3980

Streszczenie

Matematyczne gry miejskie umożliwiają naukę matematyki poza budynkiem szkoły, wykorzystując rzeczywiste sytuacje problemowe i modelowanie matematyczne. Nowoczesne technologie, jak aplikacja MathCityMap, wspierają lekcje terenowe, umożliwiając tworzenie tras edukacyjnych i rozwiązywanie zadań związanych z otoczeniem.

Zadania w grze miejskiej powinny odnosić się do rzeczywistych problemów i wymagać aktywności ucznia. Stosowanie MathCityMap motywuje do nauki, pomaga w długotrwałym zapamiętywaniu treści i ukazuje zastosowania matematyki w praktyce. Badania przeprowadzone w polskiej szkole ponadpodstawowej wykazały, że uczniowie chętnie uczestniczą w takich lekcjach i chcieliby, aby stały się stałym elementem nauczania.

Abstract

Mathematical city games enable learning mathematics outside the school building by using real-world problem situations and mathematical modeling. Modern technologies, such as the MathCityMap application, support outdoor lessons by allowing the creation of educational routes and solving tasks related to the surroundings.

Tasks in city games should relate to real problems and require student activity. Using MathCityMap motivates learning, aids long-term retention of mathematical concepts, and demonstrates their practical applications. Research conducted in a Polish secondary school showed that students eagerly participate in such lessons and would like them to become a permanent part of mathematics education.

WPROWADZENIE

W świecie, który nieustannie się zmienia, nauczanie musi stale być dostosowywane do aktualnej rzeczywistości. Bardzo szybki rozwój technologii powoduje, że nie jesteśmy w stanie przewidzieć, w jakiej rzeczywistości będą żyć dzieci, które obecnie uczymy. Tym samym nie jesteśmy w stanie dokładnie przewidzieć, jakie konkretne umiejętności będą im potrzebne, ale wiadomo, że będą potrzebowali uczyć się nowych treści i umiejętności przez całe życie. Jak zatem ma funkcjonować szkolnictwo? Czego uczyć? Rada Unii Europejskiej określiła 8 kompetencji kluczowych, które opisują potrzebną i niezbędną wiedzę, umiejętności i postawy człowieka dorosłego, by mógł on swobodnie funkcjonować w otaczającej i ciągle zmieniającej się rzeczywistości XXI wieku. Jedną z grup kluczowych kompetencji są kompetencje matematyczne. Ustawa podaje, że „Kompetencje matematyczne to zdolność rozwijania i wykorzystywania myślenia i postrzegania matematycznego do rozwiązywania problemów w codziennych sytuacjach" (Dz.U. UE C z 4.06.2018, s. 9). Oznacza to, że nauczanie matematyki powinno mieć na celu wyposażenie uczniów w wiedzę i narzędzia matematyczne, które umożliwią znalezienie rozwiązania zadania (problemu) matematycznego wynikającego z sytuacji pozamatematycznej (tj. pojawiającej się w rzeczywistym świecie) (Furgoł, 2020; http://bit.ly/419z1I1. Takie zadania wymagają różnorodnych matematycznych aktywności i są ściśle związane z matematyzacją (Krygowska, 1977a) i modelowaniem matematycznym (Blum, Ferri, 2009). Więcej informacji o tych aktywnościach zostanie przedstawionych w dalszej części rozdziału.

Warto zastanowić się zatem, jak pogodzić nauczanie matematyki, które odbywa się w budynku szkolnym, z rozwiązywaniem problemów pozamatemtycznych (napotykanych w świecie rzeczywistym) prowadzących do zadań matematycznych. Krygowska niemal 50lat temu pisała, że „trzeba stwarzać sytuacje, w których uczeń będzie sam matematyzował problem postawiony z zewnątrz" (pozamatematyczny) (Krygowska, 1977b, s. 55). Być może jednym z takich rozwiązań jest opuszczenie szkolnych murów i wyruszenie w teren w ramach matematycznej gry miejskiej.

MATEMATYCZNA GRA MIEJSKA A NAUCZANIE MATEMATYKI

Matematyczna gra miejska

Czym jest *gra miejska*? To gra wykorzystująca przestrzeń miejską jako istotny element rozgrywki. Gry miejskie wykorzystują przestrzeń danego regionu (najczęściej dużego miasta), czyniąc z niego planszę gry, na której uczestnicy rozwiązują przydzielone im zadania, które zazwyczaj składają się na fabułę danej rozgrywki. Uczestnicy gry poruszają się po danym terenie, kierując się na przykład mapą, aplikacją mobilną, kartą gry zawierającą wskazówki, pytania lub zadania. Rozgrywka może odbywać się w ustalonym terminie i/lub podanym czasie (wówczas na trasie gry mogą czekać animatorzy posiadający wskazówki lub asystenci przydzielający uczestnikom punkty) albo każdy uczestnik może wykonać ją w dowolnym dniu i w swoim tempie. Gry te mogą być skierowane zarówno do turystów, jak i do mieszkańców danego regionu (Smalec, 2015).

Specyficznym rodzajem gry miejskiej jest *matematyczna gra miejska*, nazywana też ścieżką *matematyczną*. Jest to gra wykorzystująca przestrzeń miejską jako istotny element rozgrywki, polegającej na rozwiązywaniu zadań matematycznych.

Już w latach 80. XX wieku została opisana matematyczna gra miejska (ścieżka matematyczna) jako zajęcia poza klasą, podczas których mała grupa spacerowała po okolicy i rozwiązywała problemy matematyczne przy określonych obiektach (Lumb, 1980; Blane, 1989).

Można zastanawiać się, czy warto stosować matematyczną grę miejską. Takie zajęcia mają różnorodne zalety (nie tylko matematyczne):
- ścieżki matematyczne są doskonałą okazją do włączenia lekcji plenerowej do programu nauczania matematyki;
- chodzenie na świeżym powietrzu w świetle dziennym może pomóc w zapobieganiu skutkom długotrwałego siedzenia i krótkowzroczności (Lurati, 2018);
- ścieżki matematyczne są doskonałym sposobem na popularyzację matematyki (Blane, 1989).

Gry miejskie zazwyczaj mają charakter edukacyjny. Często wykorzystywane są przez placówki oświatowe celem przybliżenia regionu, w którym się mieszka, dostrzeżenie jego walorów, poznanie historii, zrozumienie, jak zmienia się miejsce w czasie i w jakim kierunku się rozwija. Mogą być także ofertą dla turystów – opowiadać o mieście i jego historii, mogą również nawiązywać do szerszego kontekstu (na przykład smaków regionu). Formy te mogą być wykorzystywane do opanowania treści materiału edukacyjnego, powtórzenia materiału lub mogą służyć rozrywce. Istotna jest w nich także praca zespołowa, dzięki czemu kształtowane i umacniane są więzi społeczne (Smalec, 2015, s. 203).

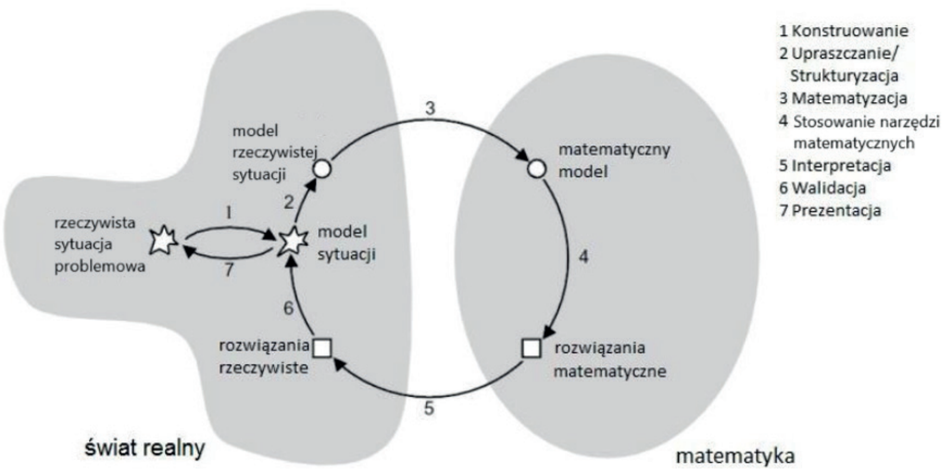
Dla nauczyciela matematyki, oprócz powyższych zalet, ważniejsze jest jak matematyczna gra miejska wpływa na efekty nauczania matematyki. Zastosowanie ścieżki matematycznej pozwala na rozwijanie matematycznych umiejętności oraz zwiększa motywację uczniów do nauki (Zender i in., 2020).

Gra miejska pojawiła się po raz pierwszy prawdopodobnie w latach 30. XX wieku na ulicach Nowego Jorku, gdzie grupy pasjonatów bawiły się w coś podobnego do berka czy chowanego, nazwanego „Ringolevio". Miała ona na celu głównie rozrywkę oraz promowanie regionu (Smalec, 2015). Natomiast matematyczna gra miejska została opisana w latach 80. XX wieku (Blane, 1989). Wówczas celem stworzenia gry była popularyzacja matematyki.

Aktywności matematyczne w matematycznej grze miejskiej

Uczestnik ścieżki matematycznej rozwiązuje zadania, które w jakiś sposób odnoszą się do miejsca, w którym odbywa się gra. Rozwiązywane zadania matematyczne związane są z otaczającą rzeczywistością. Rozwiązanie takich zadań wymaga matematyzacji jakiegoś układu rzeczywistych stosunków, a bardzo często nawet stworzenia modelu matematycznego danej pozamatematycznej sytuacji problemowej. Matematyzacja to konstrukcja matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażeniowej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć na przykład w innej nauce (Krygowska, 1977a, s. 48).

Uczestnik gry miejskiej, często nieświadomie, poszukując rozwiązania zadania, bierze udział w procesie modelowania matematycznego. Proces ten zawiera różne aktywności matematyczne (patrz rysunek 1). Uczeń musi dokonać analizy rzeczywistego problemu (sytuacji pozamatematycznej), wyszukać lub zebrać potrzebne dane, ustalić niewiadome, określić zależności pomiędzy danymi tworząc model matematyczny (na przykład funkcję, równanie, układ równań), następnie rozwiązać problem matematyczny za pomocą narzędzi matematycznych i odnieść uzyskany wynik do aspektów rzeczywistości rozważanej sytuacji. Jeśli uzyskane



Rysunek 1. Aktywności związane z procesem modelowania matematycznego (Blum, Ferri, 2009).

rozwiązanie nie ma sensu w odniesieniu do rzeczywistości, należy powtarzać dany proces tworząc nowy model tak długo, aż walidacja przyniesie satysfakcjonujące efekty, wówczas można zaprezentować rozwiązanie problemu (Blum, Ferri, 2009; Ludwig, Pyzara, 2018; Jablonski, 2021).

Modelowanie matematyczne pozwala ukazywać treści matematyczne w odniesieniu do konkretnych sytuacji z życia codziennego. Takie zadania często są niestandardowe, a przez to ciekawe i rozwijające. Co ważne, wymagają dużej i różnorakiej aktywności ucznia, co przyczynia się do wzrostu jego umiejętności matematycznych (Pyzara, 2018; Ludwig, Jablonski, 2021).

Matematyczne gry miejskie w świetle badań

Prawdopodobnie pierwszego badania dotyczącego ścieżek matematycznych dokonał Kaur (1992) w Singapurze. Okazało się, że uczniowie dzięki matematycznej grze miejskiej są bardziej zmotywowani do nauki, gdyż ich zdaniem jest ona zabawniejsza niż zwykłe lekcje, oraz ukazuje zastosowanie nauczanych treści matematycznych.

W 2006 roku X.H.P. Toh i Y.P.L. Lim pozwolili swoim podopiecznym tworzyć matematyczne gry miejskie w Singapurze. Uczniowie dobrze się bawili i zyskali nowe spojrzenie na matematykę, związane z zastosowaniami matematyki w życiu codziennym (Toh, Lim, 2006).

Nina Callenberg i JessicaJohansson Andersson (2014) przeprowadzili wywiady z uczniami po przeprowadzeniu matematycznej gry miejskiej w Szwecji. Uczniowie stwierdzili, że ścieżka matematyczna jest fajna i pomogła im odkryć matematykę w środowisku.

Jenni Rikala i Marja Kankaanranta (2014) badali ścieżkę matematyczną wspomaganą technologią. Umieścili na przedmiotach kody QR, które prowadziły do zadań matematycznych. W wyniku tych działań uczniowie poradzili sobie lepiej na kolejnym egzaminie, chociaż mieli mniej czasu na ćwiczenia niż zwykle (Rikala, Kankaanranta, 2014).

W Niemczech Nils Buchholtz (2017) oraz Nils Buchholtz i Annette Armbrust (2018) przeprowadzili dwa badania ze ścieżkami matematycznymi utworzonymi za pomocą aplikacji mobilnej Actionbound. W obu badaniach uczniowie byli bardzo zmotywowani dzięki aplikacji i matematycznej grze miejskiej.

Powyższe badania ukazywały pozytywny wpływ matematycznych gier miejskich w różnych grupach wiekowych (szkoły podstawowe, szkoły średnie). Koncentrowały się na aspektach motywacji i przekonań uczniów. Wraz z upływem czasu nauczanie matematyki za pomocą matematycznych gier miejskich stało się ściśle związane ze stosowaniem nowoczesnych technologii. Również w tym obszarze gry miejskie przeszły swego rodzaju ewolucję.

W roku 2000 Departament Edukacji Stanów Zjednoczonych i firma Texas Instruments opublikowały witrynę internetową o nazwie „The National Math Trail", na której użytkownicy mogli przesyłać swoje ścieżki matematyczne w formacie .doc lub .pdf i udostępniać je innym użytkownikom. Podobna inicjatywa powstała w Kanadzie jako „Canadian Math Trail". Obie strony internetowe były aktywne od 2000 do 2002 roku, ale potem przestały generować nowe treści, aż w końcu zniknęły w 2010 roku (Zender i in., 2020). Obecnie matematyczne gry miejskiej wracają do łask między innymi za sprawą aplikacji MathCityMap, którą zaprezentowano w następnym paragrafie.

Przykłady matematycznych gier miejskich w Polsce

W Polsce matematyczne gry miejskie pojawiają się w nauczaniu matematyki, lecz nie jest to powszechna sytuacja. Jest to dość nowe podejście. Ta forma nauki jest wprowadzana w ramach konkursów, projektów lub ciekawostek.

W 2015 roku w Dzień Liczby Pi, w centrum Warszawy odbyła się matematyczna gra miejska „Matematrix". Był to finał konkursu matematycznego organizowanego przez mFundację i Stowarzyszenie Viator. Poprzednie dwa etapy konkursu odbywały się przez internet. Zarejestrowani uczestnicy, działając w niewielkich zespołach, musieli rozwikłać kolejne zadania matematyczne, stanowiące elementy całej rozgrywki. Zadaniem grupy było jak najszybsze rozwiązanie wszystkich matematycznych zagadek i wprowadzenie właściwego kodu, który uratuje ludzkość przed zagładą (https://bit.ly/4aSnNep).

Podobny konkurs odbył się w 2017 roku we Wrocławiu. Gra miejska „Śladami Kopernika" przygotowana została przez Instytuty Matematyczny i Astronomiczny Uniwersytetu Wrocławskiego. Gra była skierowana zarówno do uczniów szkół podstawowych, gimnazjum, jak i ponadpodstawowych. W rozgrywce brały udział patrole 3- lub 4-osobowe, wyłonione w pierwszym etapie konkursu (https://bit.ly/3WUtrqo).

W Poznaniu XXXVIII Dwujęzyczne Liceum Ogólnokształcące organizowało kilkukrotnie matematyczną grę miejską. W 2017 roku powstała ona w ramach projektu „Praktyka czyni mistrza", prowadzonego przez Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (https://bit.ly/40Ra0jD).

W 2018 roku odbyła się druga edycja matematycznej gry miejskiej „Śladami Johannesa Keplera po Wrocławiu". Przygotowali ją studenci uczestniczący w kursie wychowawców kolonijnych. W grze uczestniczyli uczniowie szkół podstawowych, gimnazjum i szkół ponadpodstawowych. Uczestnicy gry rozwiązywali zadania matematyczne, zwiedzając planetarium i obserwatorium astronomiczne UWr (https://fmw.math.uni.wroc.pl/gra-miejska).

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe wraz z Muzeum Miasta Gdyni przygotowało matematyczno-architektoniczną grę miejską „Gdynia się liczy". Pierwsza rozgrywka odbyła się w 2015 roku i miała na celu promocję matematyki oraz modernistyczny układ urbanistyczny Śródmieścia Gdyni. Natomiast w 2022 roku gra miejska „To się liczy!" została stworzona w formie aplikacji mobilnej w celu świętowania stulecia Portu Gdynia (https://bit.ly/3WUFap7)..

W Lublinie w 2023 roku została zaprojektowana matematyczna gra miejska w aplikacji MathCityMap. Stanowiła ona formę zwiedzania miasta dla uczestników konferencji XXXI Szkoła Dydaktyków Matematyki.

Matematyczna gra miejska odbyła się również w Rogoźnie. W październiku 2023 roku uczniowie liceum zwiedzali i poznawali ciekawostki o mieście rozwiązując zadania matematyczne, których treść była związana z danym miejscem na trasie gry.

Tematyka zadań była różnorodna. Młodzież, rozwiązując zadania, musiała wykorzystać wiedzę z wielu zagadnień matematycznych poznawanych w szkole ponadpodstawowej oraz kilka zadań można było rozwiązać za pomocą umiejętności poznanych w szkole podstawowej. Uczniowie mogli zastosować matematykę w niecodzienny sposób. Poza standardowym rozwiązywaniem zadań, musieli czasami coś pomierzyć lub policzyć, aby zdobyć dane do zadania. Rozwiązywane zadania wymagały modelowania matematycznego. Zajęcia przeprowadzili studenci UAM kierunku Nauczanie matematyki i informatyki (https://www.lorogozno.pl/PL-H5/aktualnosci/1772/matematyczna-gra-miejska.html).

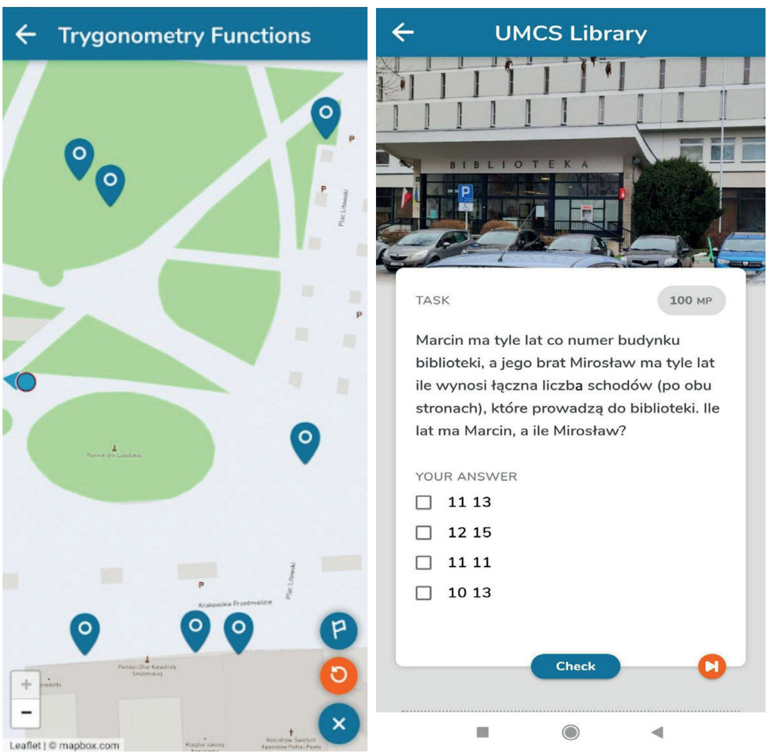
Matematyczne gry miejskie organizowane w Polsce mają zazwyczaj na celu popularyzację wiedzy i umiejętności matematycznych, motywowanie uczniów do nauki matematyki oraz ukazanie zastosowania wiedzy szkolnej w sytuacjach problemowych z realnego świata. Jednocześnie tworzą one uczniom możliwość sprawdzenia swych umiejętności w rywalizacji z innymi uczniami. Także w Polsce twórcy matematycznych gier miejskich coraz częściej wykorzystują nowoczesne technologie.

APLIKACJA MATHCITYMAP W NAUCZANIU MATEMATYKI

Aplikacja MathCityMap

Aplikacja MathCityMap jest darmowa i umożliwia tworzenie i uczestniczenie w matematycznych grach miejskich. Ma na celu zapewnienie nauczycielom, uczniom i osobom w każdym wieku możliwości poznania swojego środowiska z nowej, matematycznej perspektywy. Powstała na Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie nad Menem w ramach projektu MathCityMap (MCM), który łączy tradycyjne ścieżki matematyczne z możliwościami nowych technologii. Pomysł aplikacji MathCityMap został po raz pierwszy przedstawiony w 2012 roku przez prof. dr Matthiasa Ludwiga i jego studentów. Od tego czasu jest on stale rozbudowywany. Na koniec 2023 roku w bazie portalu było 74 226 zadań na całym świecie, z czego około 17 tys. zostało udostępnionych do użytku publicznego. Obecnie różni partnerzy europejscy wspierają i rozbudowują projekt między innymiwe Francji, Włoszech, Portugalii, Hiszpanii, Estonii i Słowacji (https://mathcitymap.eu/en/).

Jest to możliwe dzięki temu, że portal internetowy znajdujący się na stronie mathcitymap.eu umożliwia każdemu założenie własnego konta i swobodne wykorzystywanie dobrodziejstw portalu (i aplikacji). Co więcej, aplikacja jest oparta na Mapach Google. Tym samym nie trzeba tworzyć własnych map, lecz korzysta się z gotowych rozwiązań, które można z łatwością udostępniać za pomocą kodu trasy innym użytkownikom. Wystarczy posiadać telefon z dostępem do internetu, aby móc skorzystać z aplikacji na trzy możliwe sposoby: tworząc własną grę miejską, wyszukując upublicznione zadania lub wprowadzając kod trasy przygotowanej na przykład przez nauczyciela. Na stronie portalu znajdują się instrukcje dotyczące



Rysunek 2. Przykład zadania i ścieżki matematycznej w MathCityMap

obsługi aplikacji, publikacje z wynikami badań oraz artykuły z przykładami ciekawych zadań (Ludwig i in., 2021, https://mathcitymap.eu/en/).

Dla nauczyciela szczególnie istotne jest to, że aplikacja umożliwia przekazywanie uczniowi automatycznej informacji zwrotnej. Zadania wykonywane przez uczniów sprawdzane są automatycznie na podstawie wprowadzonych wcześniej odpowiedzi. Uczeń w trakcie rozwiązywania zadania może skorzystać ze wskazówek nauczyciela i dokonać poprawy (jeśli zadanie nie zostało wykonane poprawnie). Co więcej, aplikacja zlicza wyniki uczniów udostępniając nauczycielowi informację o poczynaniach każdego z nich na danej ścieżce matematycznej (Ludwig, Jablonski, 2021).

Nauczyciel, przygotowując własną grę miejską, może tworzyć własne zadania od podstaw lub skorzystać z bazy udostępnionych zadań i edytować je w celu dostosowania ich do własnych potrzeb (Taranto i in., 2021). Gotową trasę można udostępnić uczniom za pomocą kilkucyfrowego kodu lub pobrać w formie PDF – automatycznie generowana jest karta pracy. Również uczniowie mogą tworzyć własne zadania. Istotne jest jednak to, aby zadania w matematycznej grze miejskiej ilustrowały użyteczność i możliwe zastosowania matematyki (Ludwig, Jablonski, 2021).

Zadania w ścieżce matematycznej

Zadania pojawiające się w grze miejskiej powinny spełniać określone warunki. Przede wszystkim rozwiązywane zadania powinny odnosić się do miejsca, w którym znajduje się uczestnik rozgrywki. Zadania mogą mieć różną formę: luki do uzupełnienia po odszukaniu informacji lub zadanie tekstowe wymagające wpisania rozwiązania liczbowego (często wymagające modelowania matematycznego).

Zadania do ścieżki matematycznej wykonywanej z aplikacją mobilną mogą spełniać więcej warunków, co gwarantuje jeszcze lepsze wykorzystanie tej formy pracy. Poniżej przedstawiona została lista takich warunków.

Kryteria dobrego zadania (https://mathcitymap.eu/en/)

- **Niepowtarzalność.** Każde zadanie powinno zawierać obraz, który pomoże precyzyjnie określić miejsce, sytuację, przedmiot zadania i czego głównie ono dotyczy.
- **Obecność.** Aby rozwiązać zadanie, gracz powinien być obecny w danym miejscu, dlatego dane dotyczące zadania można uzyskać tylko lokalnie. Oznacza to również, że zdjęcie i opis zadania nigdy nie powinny wystarczyć, aby umożliwić rozwiązanie.
- **Aktywność.** Osoba rozwiązująca zadanie musi być aktywna i coś robić (na przykład mierzyć, liczyć, odczytywać informacje).

- **Wiele sposobów rozwiązań.** Zadanie powinno być możliwe do rozwiązania na różne sposoby.
- **Rzeczywistość.** Zadania powinny mieć odniesienie do rzeczywistości i nie powinny pojawiać się zbyt sztucznie. Najlepiej, gdy rozwiązywane zadania dotyczą sytuacji, z którymi człowiek może spotkać się w życiu codziennym.
- **Przydatne wskazówki**. Każde zadanie powinno zawierać przynajmniej jedną podpowiedź.
- **Matematyka szkolna i tagi**. Zadanie powinno mieć nawiązanie do matematyki szkolnej (można skorzystać z przygotowanych tagów lub dodać nowe). Ponadto każde zadanie powinno być przypisane do poziomu trudności (dla której klasy jest dedykowane).
- **Formaty odpowiedzi.** Odpowiedź powinna być reprezentowana jako przedział, dokładna wartość lub wielokrotny wybór.
- **Narzędzia.** Do rozwiązania zadania nie powinny być potrzebne specjalne i dodatkowe narzędzia (lub należy wyposażyć w nie uczniów na przykład taśma miernicza).
- **Przykładowe rozwiązanie.** Należy udostępnić przykładowe rozwiązanie zawierające dane pomiarowe (widoczne tylko w portalu i w pliku PDF rozwiązania) dla nauczycieli, aby mogli porozmawiać o zadaniach na lekcjach i przeanalizować typowe błędy.

Dobre zadania w matematycznej grze miejskiej wymagają modelowania matematycznego. Dotyczą rzeczywistych sytuacji problemowych, które można rozwiązać za pomocą matematycznych narzędzi. Potrzebują analizy i zebrania danych, stworzenia modelu matematycznego rozważanej sytuacji oraz walidacji uzyskanych wyników. To zadania, dla których nie ma gotowego schematu rozwiązania (ale można go zbudować za pomocą narzędzi poznawanych w szkole). Ważny tu jest proces poszukiwania odpowiedniego matematycznego modelu umożliwiającego rozwiązanie zadania (Ludwig, Jablonski, 2021).

Tworzenie tego typu zadań wymaga pewnego doświadczenia, dlatego warto na początku skorzystać z bazy gotowych zadań (Taranto i in., 2021). Przykłady zadań wykorzystywanych w matematycznej grze miejskiej przygotowanej za pomocą aplikacji MathCityMap zostały zaprezentowane w dalszej części artykułu.

MathCityMap w badaniach

Program MathCityMap promuje zadania dotyczące pozamatematycznych sytuacji problemowych (wymagające matematyzacji lub modelowania matematycznego), tym samym umożliwia uczniom stopniowe zdobywanie kompetencji w zakresie modelowania matematycznego. Co więcej, dzieje się to w kontekście prawdziwego życia i przy wsparciu narzędzia cyfrowego. W takim połączeniu zadania wymagające budowania modelu matematycznego, które pojawiają się na tle sytuacji osadzonej w przestrzeni miejskiej, mogą stanowić obiecujące wzbogacenie rozwoju kompetencji modelowania matematycznego w szkołach i na uniwersytetach (Ludwig, Jablonski, 2021, s. 262).

Wykorzystanie technologii cyfrowej może pomóc nauczycielom w ułatwianiu procesu nauczania i uczenia się matematyki podczas lekcji terenowej. Badania prowadzone przez Cahyono i Ludwig wykazały, że uczniowie korzystający z MathCityMap zdobyli doświadczenie matematyczne, a ich wyniki w matematyce poprawiły się (Cahyono, Ludwig, 2019).

Badania prowadzone przez Joerga Zendera, Iwana Gurjanowa, Adi Nur Cahyono, MatthiassaLudwig (2020) w grupie 520 osób w Indonezji i w Niemczech, pokazały, że zastosowanie gry miejskiej z aplikacją MathCityMap zamiast regularnych lekcji zwiększa efektywność wyników uczenia się matematyki. W obu badaniach stwierdzono, że wkrótce po badaniu wyniki matematyczne grupy eksperymentalnej były lepsze niż grupy kontrolnej. Poza tym z badań prowadzonych w Niemczech wynika, że jest to efekt długoterminowy. Wyniki pokazały, że grupa kontrolna zapomniała po pół roku, czego nauczyła się na zajęciach, podczas gdy grupa eksperymentalna miała stabilną pamięć tego, czego się nauczyła. Co więcej, spacer ścieżką matematyczną prowadzi do lepszych wyników w matematyce niż zwykły wykład bez wychodzenia na zewnątrz. Pozytywnie wpływa na pamięć długoterminową i motywację wewnętrzną (Zender i in., 2020).

MATHCITYMAP W POLSKIEJ SZKOLE – BADANIA

Metodologia

Badania prowadzone przez twórców projektu MathCityMap wykazały pozytywny wpływ zastosowania matematycznej gry miejskiej na efektywność nauczania. Istnieje potrzeba weryfikacji, jak zastosowanie tej aplikacji zostanie odebrane w polskiej szkole. W związku z tym w marcu 2023 roku przeprowadzono eksperyment badawczy, który polegał na wykorzystaniu matematycznej gry miejskiej z aplikacją MathCityMap w nauczaniu szkolnym. Celem badania jest poznanie opinii polskich uczniów na temat zastosowania aplikacji MathCityMap w nauczaniu matematyki. Badanie ma zweryfikować, czy polscy uczniowie pozytywnie ocenią użycie MathCityMap w ramach lekcji matematyki. Badanie zostało przeprowadzone w jednej z lubelskich szkół ponadpodstawowych. Grupa badawcza to 15 osób z pierwszej klasy liceum ogólnokształcącego realizujących nauczanie matematyki na poziomie podstawowym. Uczniowie wzięli udział w matematycznej grze miejskiej przygotowanej przez ich nauczyciela w aplikacji MathCityMap.

Lekcja (na potrzeby badania nazywana w skrócie lekcją terenową) dotyczyła powtórzenia wiadomości z funkcji trygonometrycznych.

Uczniowie w ramach przygotowania do lekcji zostali wcześniej zapoznani z obsługą aplikacji MathCityMap i pobrali ją na swoje telefony. W trakcie gry miejskiej uczniowie musieli posiadać własne telefony z dostępem do internetu, przy czym gra odbywała się w centrum miasta, gdzie można korzystać z darmowego dostępu do sieci. Lekcja odbyła się na terenie Placu Litewskiego w Lublinie w słoneczny dzień.

Uczniowie po dotarciu z nauczycielem do miejsca rozgrywki otrzymali taśmy miernicze o długości 1 metra oraz kod dostępu do ścieżki matematycznej zawierającej 16 zadań (w tym dwa zadania o podwyższonym stopniu trudności). Uczniowie na wykonanie zadań mieli 90 minut. Pracowali w parach i jedna grupa była trzyosobowa. Badani nie musieli rozwiązywać zadań zgodnie z ich numeracją w aplikacji (mogli wybrać ich kolejność), przy czym niektóre z zadań wymagały użycia wyników uzyskanych w poprzednio rozwiązanych zadaniach.

Zadania wymagały dokonania pewnych pomiarów oraz wykorzystania funkcji trygonometrycznych. Uczniowie, aby rozwiązać dane zadanie musieli odnaleźć miejsce wskazane na mapie i tam dokonać pomiarów. Pomocna dla uczniów mogła być znajomość tego miejsca, gdyż mogli oni rozpoznać na zdjęciu w aplikacji charakterystyczne budynki i szybko przejść do wskazanego punktu. Przykłady zadań zaprezentowano na rysunkach 3–7.

Aplikacja automatycznie sprawdzała poprawność odpowiedzi i udzielała informacji zwrotnej, przy czym (ze względu na możliwe błędy pomiaru) za poprawne odpowiedzi uznawano wyniki znajdujące się w zielonych przedziałach, zaś wyniki zawarte w żółtych przedziałach uznawano za bliskie poprawnemu rozwiązaniu i za nie można było uzyskać część punktów. Uczniowie mieli dostęp do tablic trygonometrycznych.

Warto nadmienić, że ukazane tu zadania dotyczą powtórzenia wiadomości o funkcjach trygonometrycznych. Tym samych ukazane zadania mają charakter pararealistyczny – ich treść jest sztuczniejsza niż zadania na modelowanie matematyczne napotykane w codziennym życiu. Niemniej jednak zadania pozwalały na budowanie modelu matematycznego rozważanej sytuacji.

Przeprowadzenie tej gry miejskiej było uwarunkowane dobrą (słoneczną) pogodą, gdyż w kilku zadaniach uczniowie musieli zmierzyć długość cienia rzucanego przez dane obiekty. Co więcej, w trakcie przygotowań danej trasy, nauczyciel dokonując wcześniejszych pomiarów, wykonywał je o tej samej porze, o której została później przeprowadzona lekcja, aby długość padającego cienia nie zmieniła się.

Ustalenie dnia, w którym została przeprowadzona lekcja, było poprzedzone sprawdzeniem prognoz pogody. Dodatkowo w trakcie lekcji terenowej nauczyciel miał zapisane, jakie długości cienia powinny rzucać wybrane obiekty i w razie nagłej zmiany pogody mógłby podać uczniów niezbędne informacje – w trakcie badania nie było takiej sytuacji.

1. Task: Zadanie 1

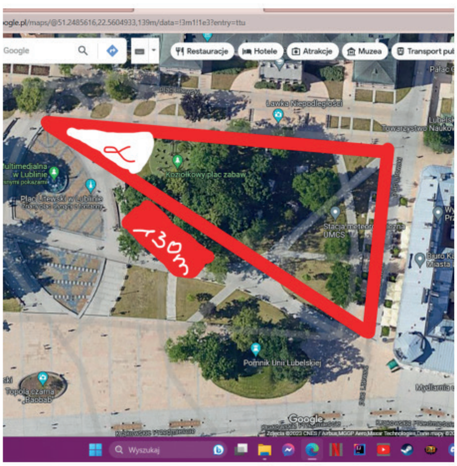
Definition of task

Oblicz kąt padania promieni słonecznych, wiedząc, że odległość od ziemi do głowy orła widniejącego na budynku poczty jest równa 18,6 m.

Answer

Rysunek 3. Przykład zadania z matematycznej gry miejskiej w Lublinie (zadanie 1)

4. Task: Zadanie 4



Definition of task

Spójrz na rysunek dołączony do zadania, jest na nim narysowany trójkąt prostokątny, którego podana jest długość przeciwprostokątnej. Zmierz odpowiednie długości, a następnie oblicz i podaj miarę kąta alpha.

Answer

Rysunek 4. Przykład zadania z matematycznej gry miejskiej w Lublinie (zadanie 4)

7. Task: Zadanie 7

Definition of task

Odnajdź trójkąt prostokątny oznaczony białym X
Wyznacz miary jego kątów ostrych.

Answer

alpha:	18	22
beta:	68	72

Rysunek 5. Przykład zadania z matematycznej gry miejskiej w Lublinie (zadanie 7)

15. Task: Zadanie 16

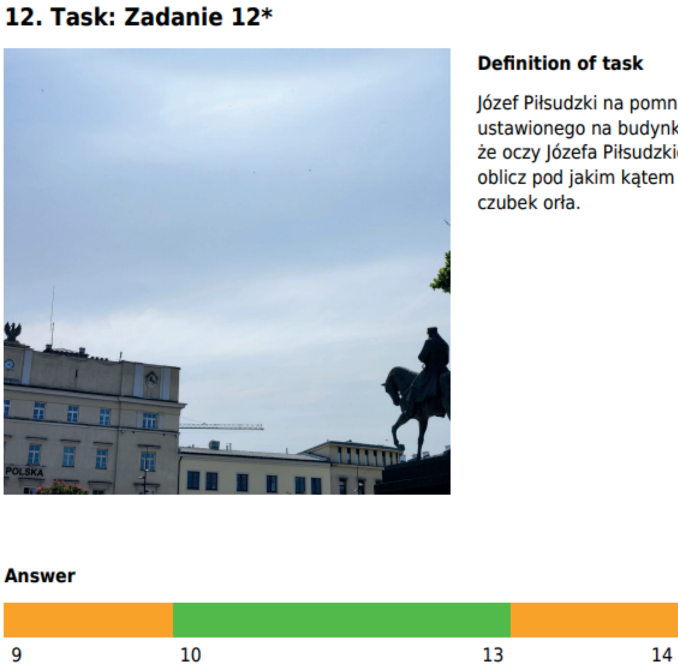
Definition of task

Oblicz jaką musi mieć wysokość panel z obrazem, jeżeli długość cienia by została taka sama, a kąt padania promieni słonecznych byłby równy 30 stopni
Wynik podaj w cm, zaokrąglając do całości

Answer

85 90 100 105

Rysunek 6. Przykład zadania z matematycznej gry miejskiej w Lublinie (zadanie 16)



Rysunek 7. Przykład zadania o podwyższonym poziomie trudności (zadanie 12)

Po przeprowadzonej lekcji uczniowie wypełnili anonimową ankietę (będącą narzędziem badawczym) dotyczącą ich opinii na temat lekcji terenowej.

Ankieta zawiera 8 pytań (zdań), w których uczniowie oceniali (w skali od 1 do 5), na ile zgadzają się z danym stwierdzeniem, używając następującej skali:

1 – zdecydowanie się nie zgadzam,
2 – raczej się nie zgadzam,
3 – nie mam zdania,
4 – raczej się zgadzam,
5 – zdecydowanie się zgadzam.

Treść pytań została przedstawiona wraz z odpowiedziami uczniów w następnym paragrafie.

Opinie uczniów na temat lekcji przeprowadzonej w formie matematycznej gry miejskiej – wyniki badań

Uczniowie pierwszej klasy liceum, którzy brali udział w lekcji terenowej, anonimowo udzielili odpowiedzi na pytania zawarte w ankiecie. Ich odpowiedzi zgodnie z określoną skalą znajdują się w poniższej tabeli.

Tabela 1. Lista opiniowanych stwierdzeń wraz z odpowiedziami uczniów

Stwierdzenie	1 – Zdecydowanie się nie zgadzam	2 – Raczej się nie zgadzam	3 – Nie mam zdania	4 – Raczej się zgadzam	5 – Zdecydowanie się zgadzam
1. Lekcje z użyciem aplikacji matematycznych wpływają na lepsze zapamiętywanie materiału	1	5	5	3	1
2. Lekcje terenowe są mniej nużące niż lekcje w sali	0	2	2	1	10
3. Lekcje terenowe powinny na stałe wejść do programu nauczania	0	0	2	4	9
4. Lekcja terenowa pomogła Ci w utrwaleniu wiadomości z funkcji trygonometrycznych	2	1	5	6	0
5. Lekcje matematyki z użyciem MathCityMap są lepsze od lekcji w sali	0	5	2	4	4
6. Zastosowanie matematyki na realnych przykładach sprawiło, że lepiej rozumiesz funkcje trygonometryczne	0	1	3	7	4
7. Lekcje terenowe z użyciem aplikacji dydaktycznych powinny odbywać się częściej	0	0	1	5	9
8. Chciałabym/Chciałbym samodzielnie stworzyć własną trasę (lub własne zadania) w aplikacji MathCityMap	6	2	2	3	2

Odpowiedzi uczniów odnosiły się do ich pierwszego doświadczenia lekcji w formie matematycznej gry miejskiej przeprowadzonej z aplikacją MathCityMap. Analiza ich odpowiedzi została umieszczona wraz z dyskusją w następnym paragrafie.

DYSKUSJA I PODSUMOWANIE

Młodzież uczestnicząca w lekcji terenowej wyraziła swoje opinie na temat tego doświadczenia w anonimowej ankiecie. Ich odpowiedzi nie są jednoznaczne w każdym pytaniu, ale wyraźnie wskazują pewne aspekty.

Badani mają różne zdania na temat tego, czy lekcje z użyciem aplikacji matematycznych wpływają na lepsze zapamiętywanie materiału – są oni dość sceptyczni w tym względzie. Tylko dwie osoby udzieliły zdecydowanych, aczkolwiek rozbieżnych odpowiedzi („zdecydowanie się zgadzam", „zdecydowanie nie zgadzam się"). Odpowiedzi pozostałych ankietowanych (5 osób „raczej nie zgadzam się", 5 osób „nie mam zdania", 3 osoby „raczej się zgadzam") wskazują rozbieżność opinii na ten temat. Może to wynikać z faktu, że nie mieli oni możliwości zweryfikować swoich opinii po dłuższym czasie (co warto zrobić w dalszych badaniach). Na podstawie ankiety można stwierdzić, że uczniowie mieli różnorodne odczucia co do wpływu stosowania aplikacji na jakość zapamiętywania materiału. Natomiast badania prowadzone między innymi przez Ludwiga i Zendera wskazywały na lepsze przechowywanie nauczanego materiału w pamięci długotrwałej po zastosowaniu do nauczania aplikacji MathCityMap (Zender i in., 2020).

Jednakże uczniowie zdecydowanie potwierdzili (10 osób „zdecydowanie się zgadza" i 1 osoba „raczej się zgadza"), że lekcje terenowe są mniej nużące niż lekcje w sali. Również pozytywnie badani odpowiedzieli w kwestii tego, czy lekcje terenowe powinny na stałe wejść do programu nauczania (9 osób „zdecydowanie tak", 4 osoby „raczej tak" i tylko 2 nie miały zdania). Oznacza to, że nauka w formie matematycznej gry miejskiej jest dla uczniów ciekawą propozycją, w której chcieliby uczestniczyć. Odpowiedzi na te pytania są zgodne z wynikami badań, które wskazują motywujący wpływ MathCityMap na naukę matematyki (Zender i in., 2020). Tym samym ścieżka matematyczna może zostać potraktowana jako dobra motywacja do nauki.

Odpowiedzi na dwa następne pytania układały się niejednoznacznie. Na pytanie, czy lekcja terenowa pomogła ci w utrwaleniu wiadomości z funkcji trygonometrycznych, 5 osób było neutralnych („nie mam zdania"), 6 osób odpowiedziało "raczej tak", 1 osoba wskazała "raczej nie" i 2 osoby „zdecydowanie nie". Lekcje matematyki z użyciem MathCityMap są lepsze od lekcji w sali dla 8 osób (4 – „zdecydowanie tak", 4 – „raczej tak"), zaś 5 osób raczej nie zgadza się z tym stwierdzeniem, natomiast 2 osoby pozostały neutralne. Niestety w ankiecie nie było miejsca na uzasadnienie swych odpowiedzi, dlatego też trudno stwierdzić, z czego wynika taka rozbieżność odpowiedzi w powyższych pytaniach. Być może respondenci udzielając swych odpowiedzi, zwrócili swą uwagę na różne aspekty. Na podstawie ankiety widzimy jedynie, że w tych dwóch stwierdzeniach opinie badanych były różne. Natomiast porównując odpowiedzi badanych na drugie i piąte stwierdzenie, możemy zauważyć, że w opinii uczniów lekcje terenowe są zdecydowanie mniej nudne (co motywuje do nauki) oraz połowa uczniów twierdzi, że są one lepsze od lekcji w sali. Ogólna ocena lekcji („lepsze") nie jest już tak zdecydowana jak ocena atrakcyjności, niestety nie wiadomo, jakie aspekty oceny jakości lekcji uczniowie brali pod uwagę. Jest to obszar do dalszych badań.

Większość uczniów potwierdziła, że zastosowanie matematyki na realnych przykładach sprawiło, że lepiej zrozumieli funkcje trygonometryczne (4 osoby zdecydowanie się z tym zgadza oraz 7 osób raczej się z tym zgadza). 3 osoby nie miały zdania na ten temat i 1 osoba raczej się z tym nie zgadza. Rozwiązywanie zadań dotyczących rzeczywistych sytuacji problemowych wymagających modelowania matematycznego zmusiło uczniów do zastosowania funkcji trygonometrycznych w tworzonych modelach matematycznych rozważanego problemu, przez co zostali zmobilizowani do analizy tego narzędzia matematycznego. Taka sytuacja w opinii uczniów pozytywnie wpłynęła na ich zrozumienie funkcji trygonometrycznych. Opinie opierały się na subiektywnych odczuciach badanych dotyczących „lepszego zrozumienia funkcji trygonometrycznych".

Pytania drugie, czwarte oraz szóste dotyczyły opinii uczniów na temat wpływu aplikacji MathCityMap na efektywność nauczania. Ankieta dotyczyła subiektywnych odczuć ankietowanych, zaś oni sami mieli trudność w ocenie tego wpływu, stąd wiele odpowiedzi „nie mam zdania". Różnie uczniowie określali zależność między lekcją terenową a „lepszym zapamiętaniem materiału" czy „pomocą w utrwaleniu wiadomości". Natomiast 11 osób stwierdziło, że zastosowanie matematyki na realnych przykładach przyczyniło się do lepszego zrozumienia trygonometrii, i w tym obszarze badani dostrzegli pozytywny wpływ na naukę matematyki.

Kolejne (siódme) pytanie potwierdza pozytywny odbiór przez młodzież matematycznej gry miejskiej –14 osób podało, że lekcje terenowe z użyciem aplikacji dydaktycznych powinny odbywać się częściej (9 badanych zdecydowanie się z tym zgadza oraz 5 osób raczej się z tym zgadza). 1 osoba nie miała zdania w tej kwestii. Głosy w tym pytaniu niemal pokrywają się z odpowiedziami na trzecie pytanie, w którym uczniowie stwierdzili, że lekcje terenowe powinny wejść do programu nauczania. Pytania te są dość podobne, jednak kładą inny akcent na podejście do gry miejskiej. W stwierdzeniu siódmym młodzi pytani są o to, czy lekcja terenowa była na tyle atrakcyjna, że chcieliby, aby takie lekcje odbywały się częściej, zaś w stwierdzeniu trzecim pytamy o to, czy zdaniem badanych nauczanie za pomocą matematycznej gry miejskiej stanowi na tyle istotną zmianę, że uważają, iż lekcja terenowa powinna zostać narzucona jako obowiązkowy element nauczania. Uczniowie opowiedzieli się za wprowadzeniem lekcji terenowych w obu przypadkach.

Licealiści biorący udział w eksperymencie zostali zapoznani z działaniem aplikacji MathCityMap, w szczególności dowiedzieli się, w jaki sposób można tworzyć w niej zadania oraz całe ścieżki matematyczne. Tworzenie zadań na modelowanie matematyczne wymaga więcej aktywności matematycznych niż samo ich rozwiązywanie. Badani zapytani o to, czy chcieliby samodzielnie stworzyć własną trasę w aplikacji (lub własne zadania) udzielali różnych odpowiedzi: 6 osób zdecydowanie nie oraz 2 osoby raczej nie chciałyby tego robić; 2 osoby nie mają zdania; 3 osoby raczej chciałyby się tym zająć i 2 osoby są zdecydowanie chętne. Jednak więcej uczniów nie chciało tworzyć własnych zadań niż było ich chętnych. To pytanie miało na celu sprawdzenie, czy uczniowie są zainteresowani podejmowaniem dodatkowych aktywności.

Warto nadmienić, że przeprowadzona lekcja w formie matematycznej gry miejskiej z aplikacją mobilną była pierwszym tego typu doświadczeniem uczniów oraz nauczyciela. Nauczyciel zapoznał się z aplikacją i stworzył ścieżkę matematyczną na potrzeby opisanego tu badania. Okazało się, że odbiór tej lekcji był na tyle pozytywny, że inny nauczyciel z tej samej szkoły poprosił o dostęp do trasy i zabrał swoje klasy na lekcję terenową dotyczącą funkcji trygonometrycznych. Uczniowie byli zadowoleni z udziału w tej lekcji.

Podsumowując, gra miejska może być wykorzystywana do nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. W opinii uczniów zastosowanie gry miejskiej powoduje, że lekcje są ciekawsze. Badani deklarowali chęć uczestnictwa w kolejnych lekcjach w takiej formie oraz docenili ukazanie treści matematycznych w zadaniach dotyczących sytuacji problemowych z rzeczywistości. Uczniowie chcieliby, aby lekcje w formie matematycznej gry miejskiej weszły na stałe do nauczania matematyki. Zastosowanie aplikacji mobilnej jest dodatkowym czynnikiem mobilizującym współczesną młodzież, gdyż zwiększa ono atrakcyjność lekcji. Natomiast badani mieli różnorodne opinie na temat efektywności nauczania matematyki w formie gry miejskiej. Omówione badanie nie wskazywało przyczyn tej rozbieżności. Jest to obszar do dalszych badań.

Matematyczna gra miejska jest niecodzienną formą nauki. Częściej stosowana jest jako rodzaj konkursu lub ciekawostki popularyzującej matematykę, jednak można wykorzystać ją od czasu do czasu jako nietypową lekcję pozwalającą głębiej zrozumieć treści matematyczne poprzez ukazanie ich w realnych sytuacjach problemowych. Gra miejska obliguje uczestników rozgrywki do działania, zaś zadania wymagające stworzenia modelu matematycznego wymuszają wiele matematycznych aktywności. Dla nauczyciela istotną zaletą aplikacji MathCityMap jest możliwość śledzenia w czasie rzeczywistym postępów każdego z uczniów oraz możliwość przekazywania automatycznej informacji zwrotnej. Zastosowanie aplikacji MathCityMap do nauczania matematyki może stwarzać dla uczniów pozory zabawy, natomiast nauczyciel może dzięki niej nauczać matematyki w atrakcyjny, nietypowy sposób.

BIBLIOGRAFIA

Blane, D. (1989). Mathematics trails. *ICMI Papers on The Popularization of Mathematics*. Leeds, Anglia, 126–132.

Blum, W., i Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Buchholtz, N. (2017). How Teachers Can Promote Mathematising by Means of Mathematical City Walks. W: G.A. Stillman, W. Blum i G. Kaiser (red.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (s. 49–58). Cham: Springer International Publishing.

Buchholtz, N. i Armbrust, A. (2018). Ein mathematischer Stadtspaziergang zum Satz des Pythagoras als außerschulische Lernumgebung im Mathematikunterricht [A mathematical city walk on the Pythagorean theorem as an out-of-school learning environment in mathematics education]. W: S. Schukajlow, i W. Blum (red.), *Evaluierte* Lernumgebungen *zum Modellieren* (s. 143–163). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Cahyono, A.N., Ludwig, M. (2019). Teaching and Learning Mathematics around the City Supported by the Use of Digital Technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(1), em1654, 1–8.

Callenberg, N. i Johansson Andersson, J. (2014). *Math trail: Enstudie om elevers uppfattningar av mathtrail i matematikundervisning [Math trail: A single study of students' perceptions of math trail in mathematics teaching].* Högskolan i Halmstad, Sektionen för lärarutbildning (LUT).

Furgoł, S. (2020). *Wzorcowe materiały dydaktyczne w zakresie: KOMPETENCJE KLUCZOWE Część II. Poziom – Szkoła Ponadpodstawowa*, https://www.wcdn.wroc.pl/dsc/wzorcowe_materialy_SP_i_LO/DSC_kompetencje_kluczowe_ponadpodstawowa.pdf, dostęp z 5.01.2024.

Kaur, B. (1992). *Attitudinal outcomes from environmental activities.* 6th Annual Conference of the Educational Research Association. Singapore.

Krygowska, Z. (1977a). *Zarys dydaktyki matematyki*, tom 1. Warszawa: WSiP.

Krygowska, Z. (1977b). *Zarys dydaktyki matematyki*, tom 3. Warszawa: WSiP.

Ludwig, M., i Jablonski, S. (2021). Step by step: simplifying and mathematizing the real world with MathCityMap. *Quadrante*, *30*(2), 242–268.

Ludwig, M., Barlovits, S., Jablonski, S., Milicic, G. i Wetzel, S. (2021). Outdoor Learning in Mathematics Education (s. 106–108). W: M. Inparsitha, N. Changsri i N. Boonsena (red.). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Volume 1. Khon Kaen: PME.

Lumb, D. (1980). Mathematics Trails in Newcastle. *Mathematics in School*, *9*(2), 5.

Lurati, A.R. (2018). Health Issues and Injury Risks Associated With Prolonged Sitting and Sedentary Lifestyles. *Workplace Health & Safety*, *66*(6), 285–290.

Pyzara, A. (2018). Algorithmization as mathematical activity and skills in connection with mathematical modelling. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *10*, 139–155.

Rikala, J. i Kankaanranta, M. (2014). Blending Classroom Teaching and Learning with QR Codes (s. 141–148) . W: *International Association for Development of the Information Society (10th, Madrid, Spain, Feb 28-Mar 2, 2014),*

Smalec, A. (2015). Gry miejskie oraz Questing jako formy komunikacji i kierowania wizerunkiem regionu. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 867, Problemy Zarządzania, Finansów i Marketingu nr 40, Wyd. Naukowe US, 193–205.

Taranto, E., Jablonski, S., Recio, T., Mercat, C., Cunha, E., Lázaro, C., Ludwig, M., i Mammana, M. F. (2021). Professional Development in Mathematics Education – Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics. *Mathematics*, *9*(22), 2975.

Toh, X.P. i Lim, Y.P.L. (2006). *A Pilot Study of Mathematical Investigation for the High Achievers in Mathematics.* Singapore: Chongzheng Primary School, Ministry of Education.

Zender, J., Gurjanow, I., Cahyono, A.N., i Ludwig, M. (2020). New studies in mathematics trails. *International Journal of Studies in Education and Science (IJSES), 1*(1), 1–14.

Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej Seria C 2018.189.1 z 4 czerwca 2018 r. *Kompetencje kluczowe w procesie uczenia się przez całe życie.*

Strony internetowe:

https://mathcitymap.eu/en/ z 8.09.2023.

https://www.ore.edu.pl/images/files/POWER/zarzadzanie_oswiata/Kompetencje%20kluczowe%20-%20definicje%20i%20opis.pdf z 4.01.2024.

https://www.mbank.pl/informacje-dla-klienta/post,6189,matematyka-kluczem-do%E2%80%A6-matematrixa-startuje-gra-miejska-mfundacji-i-stowarzyszenia-viator.html z 4.01.2024.

https://imprezy.trojmiasto.pl/Gra-miejska-Gdynia-sie-liczy-imp407376.html z 4.01.2024.

https://liceum38.poznan.pl/informacje/matematyczna-gra-miejska/ z 5.01.2024.

https://fmw.math.uni.wroc.pl/dla-uczni%C3%B3w/gra-miejska/gra-miejska-%C5%9Bladami-kopernika z 5.01.2024.

https://www.lorogozno.pl/PL-H5/aktualnosci/1772/matematyczna-gra-miejska.html z 5.01.2024.

https://fmw.math.uni.wroc.pl/gra-miejska z 5.01.2024.

ISBN 978-83-232-4245-1 (PDF)
ISBN 978-83-232-4244-4 (Print)