

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Nauk Społecznych
Instytut Filozofii

Wizualizacje w matematyce wobec tradycji epistemologicznej

Michał Sochański

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Ewy
Piotrowskiej

Poznań 2011

Spis treści:

Wstęp.....	5
Rozdział 1. Wizualizacje w matematyce i filozofii greckiej.....	27
1.1. Wizualizacje w pierwszej fazie rozwoju matematyki greckiej.....	27
1.2. <i>Elementy</i> Euklidesa.....	34
1.3. Konstrukcja jako metoda pokazania istnienia obiektów matematycznych.....	45
1.4. Kategoria przestrzeni w matematyce greckiej.....	47
1.5. Diagramy w filozofii matematyki Platona.....	48
1.6. Diagramy geometryczne w wybranych fragmentach pism Arystotelesa.....	56
Rozdział 2. Wizualizacje w matematyce i filozofii XVII oraz XVIII wieku.....	63
2.1. Dyskusja nad statusem dowody przez nałożenie/superpozycję w filozofii i metodologii matematyki XVII i XVIII wieku.....	64
2.2. Rozwój algebry a wizualizacje.....	68
2.3. Wizualizacje a początki rachunku różniczkowo-całkowego.....	73
2.4. Miejsce wizualizacji w poglądach Kartezjusza	79
2.5. Leibniz o roli wizualizacji w poznaniu matematycznym.....	82
2.6. Empiryzm brytyjski a reprezentacje przestrzenne w geometrii.....	87
2.7. Spór empiryzmu z racjonalizmem w filozofii geometrii a kategoria przestrzeni.....	92
2.8. Newton o przestrzeni oraz poznaniu geometrycznym.....	94

Rozdział 3. Filozofia geometrii Immanuela Kanta a wizualizacje.....	95
3.1. Ogólne uwagi o epistemologii Kanta.....	97
3.2. Charakterystyka zdań apriorycznych, analitycznych oraz Koniecznych.....	100
3.3. Matematyka jako nauka syntetyczna <i>a priori</i>	104
3.4. Kategoria konstrukcji w poznaniu geometrycznym.....	108
3.5. Rola czystej naoczności w dowodach geometrycznych.....	111
3.6. Wybrane aspekty interpretacji filozofii Kanta.....	114
Rozdział 4. Rozwój geometrii nieeuklidesowych a rola intuicji przestrzennej w geometrii.....	119
4.1. Filozofia geometrii XIX wieku – przegląd problemów.....	120
4.2. Źródła problematyki geometrii nieeuklidesowych – piąty postulat Euklidesa.....	126
4.3. Pierwsze geometrie nieeuklidesowe oraz zagadnienie struktury matematycznej przestrzeni fizycznej.....	131
4.4. Filozofia geometrii Bernharda Riemanna a wizualizacje.....	137
4.5. Filozofia geometrii Hermanna Helmholtza a wizualizacje.....	141
4.6. Niektóre aspekty dalszego rozwoju geometrii nieeuklidesowych a intuicja przestrzenna.....	148
4.7. Aksjomatyzacja geometrii a wizualizacje.....	151
4.8. Konsekwencje rozwoju geometrii nieeuklidesowych dla zagadnienia roli wizualizacji w poznaniu geometrycznym.....	158
Rozdział 5. Wybrane XIX-wieczne koncepcje intuicji geometrycznej i jej roli w poznaniu matematycznym.....	163
5.1. Bolzano o pojęciach i intuicji w poznaniu geometrycznym.....	164

5.2. Felix Klein o intuicji naiwnej i wzmocnionej w matematyce.....	147
5.3. Wizualizacje w filozofii skrajnego empiryzmu J.S. Milla.....	172
5.4. Frege o syntetyczności geometrii i czystej naoczności przestrzeni....	180
5.5. Wizualizacje w kontekście filozofii geometrii Henri Poincarégo.....	187

Rozdział 6. Diagram w filozofii matematyki Charlesa Sandersa

Peirce'a.....199

6.1. Matematyka jako nauka dotycząca hipotetycznych stanów rzeczy...	201
6.2. Rola diagramów w poznaniu matematycznym.....	203
6.3. Rozumowania kororaliarne i teorematyczne.....	209
6.4. Elementy teorii znaku Peirce'a a matematyczne poznanie diagramowe.....	213
6.5. Ogólność rozumowań diagramowych i ich konkluzji	217
6.6. Peirce o podziale na zdania analityczne i syntetyczne.....	220

Rozdział 7. Wprowadzenie do współczesnej dyskusji nad

wizualizacjami w matematyce.....234

7.1. Diagramy w filozofii matematyki pierwszej połowy XX wieku....	234
7.2. Epistemologia matematyki jako badanie jej logicznych podstaw...	238
7.3. Filozofia <i>quasi</i> -empiryzmu w matematyce.....	240
7.4. Epistemologia matematyki ostatnich kilkudziesięciu lat – zwrot ku praktyce matematyków.....	244
7.5. Problem wizualizacji w literaturze współczesnej.....	250

Rozdział 8. Wizualizacje w różnych działach matematyki -

przykłady, dyskusja i próba klasyfikacji.....255

8.1. Wykresy funkcji rzeczywistych jako diagramy metryczne.....	256
8.2. Diagramy dyskretne.....	257
8.3. Wizualne eksperymenty.....	263

8.4. Marcus Giaquinto o myśleniu wizualnym.....	272
8.5. Systemy diagramowe.....	279
Rozdział 9. Dwa ujęcia roli wizualizacji w geometrii	
euklidesowej.....	283
9.1. Ujęcie rozumowań euklidesowych Kenetha Mandersa i Johna Mummy.....	285
9.2. Marcusa Giaquinto ujęcie elementarnych rozumowań euklidesowych.....	295
Rozdział 10. Podstawowe własności diagramów.....	316
10.1. Dziewięć zasadniczych cech reprezentacji diagramowych.....	318
10.2. Marcus Giaquinto o graficznych i symbolicznych aspektach reprezentacji obiektów matematycznych.....	330
Rozdział 11. Rola wizualizacji w dowodach i rozumowaniach	
matematycznych.....	334
11.1. Ogólne uwagi o pojęciu dowodu i rozumowania.....	335
11.2. Przykłady rozumowań diagramowych	338
11.3. Przegląd stanowisk odnośnie rozumowań i twierdzeń wizualnych.....	346
11.4. Wizualny wymiar rozumowań i dowodów matematycznych – dyskusja	359
11.5. Rozumowania diagramowi a dychotomia pojęcia/intuicja.....	363
11.6. Ogólność i niewiarygodność rozumowań diagramowych.....	370
Zakończenie.....	375
Bibliografia.....	384

Wstęp

*... jeśli ludzie rodziliby się ślepcami, filozofia byłaby
doskonalsza, ponieważ brakłoby w niej wiele fałszywych
założeń które zostały przyjęte przez zmysł wzroku¹*

*w rysunkach jest bowiem coś szczególnie ‘dotykalnego’.
Słowa mają charakter abstrakcyjny, rysunki –
konkretny, niejako cielesny²*

*Mówi się, że: patrzenie = łatwe, myślenie = trudne. Nie są to jednak właściwe
równania. Prawdziwym pytaniem powinno być: co każde z nich ma do
zaoferowania?³*

myśli bez treści naocznej są puste, dane naoczne bez pojęć – ślepe⁴

Wielki matematyk francuski Jacques Hadamard (1865 - 1963) uważał, że
myśl matematyczna jest w swojej istocie wizualna. Jak miał się sam przekonać,
większość wielkich matematyków jego czasów w jakimś stopniu się z tym

¹ Przypisywane Galileuszowi, za: Polyshyn, Z.W., *Seeing and Visualizing*, MIT Press, 2003. str. xi.

² Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes. Tajemnice najśłynniejszego palimpsestu świata*, Wydawnictwo Magnum, Warszawa 2007, str. 93.

³ Davis, P., *Visual Theorems*, “Educational Studies in Mathematics”, 1993, Vol. 24, No. 4, str. 333.

⁴ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu, Tom*, PWN Warszawa, 1986, A51/B75.

zgadzało⁵. Pierwiastek wizualny jest silnie obecny także we współczesnej matematyce. Jest niezaprzeczalnym faktem, że diagramy, rysunki, wykresy, czy wizualizacje komputerowe są szeroko używane w praktyce matematyków. Pojawiają się one w czasopismach matematycznych, na tablicach i kartkach papieru. Co więcej, w ostatnich latach komputery otworzyły przed matematykami możliwości wizualizacji o wiele bardziej skomplikowanych obiektów matematycznych niż dotychczas.

Rola wizualizacji w poznaniu matematycznym interpretowana jest bardzo różnie (przez wizualizacje rozumiem zarówno same diagramy, jak i wizualizacje wewnętrzne - czyli subiektywne przedstawienia obiektów matematycznych w wyobraźni przestrzennej)⁶. Waha się ona od ich zupełnego odrzucenia jako źródła poznania matematycznego, do uczynienia ich jego nieusuwalnym elementem, nadającym pojęciom matematycznym treść i ułatwiającym dowodzenie twierdzeń.

W rzeczywistości jednak rola i funkcja tego, co postrzegalne zmysłem wzroku w poznaniu matematycznym, jest zagadnieniem bardzo słabo zbadanym. Systematyczne badania nad diagramami, czy szerzej – wizualizacjami – są intensywnie prowadzone dopiero w ostatnich latach, i to wbrew utartemu pogładowi, iż nie pełnią one istotnej roli w poznaniu matematycznym.

Z wizualizacjami łączy się bardzo wiele zagadnień filozoficznych. Oto ważniejsze z nich: jaką rolę odgrywają wizualizacje w poznaniu matematycznym? Jaka jest więc, jak pyta współczesny badacz wizualizacji w matematyce, Marcus Giaquinto, „natura przyczynowej ścieżki od doświadczenia wizualnego (wzroku albo wyobraźni) do przekonania matematycznego”⁷? Powstaje pytanie, jaką funkcję pełnią diagramy w szczególności w dowodzie matematycznym? Czy są jedynie heurystykami, dodatkiem do dowodów? Jaka jest rola i funkcja wizualizacji w uzasadnianiu twierdzeń matematycznych, a także na ile mogą stanowić wiarygodne źródło poznania matematycznego? Można również zapytać o specyficzną naturę procesów poznawczych związanych z analizą diagramów, odmienną od poznania

⁵ Por. Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures in Number Theory*, “The American Mathematical Monthly”, 2001, Vol. 108, No. 10, str. 897.

⁶ Terminologię stosowaną w pracy omawiam szerzej w dalszej części wstępu.

⁷ Giaquinto, M., *Visual Thinking in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford New York, 2007, str. 2.

opartego na pojęciach i zdaniach. Rodzi się pytanie, czy obecny w matematyce pierwiastek wizualny potwierdza jej związki z naukami empirycznymi, czy wyróżnia ją jako naukę empiryczną? Czy poznanie wizualno-matematyczne ma charakter syntetyczny, czy też pozapojęciowy? Wreszcie, jaka jest natura intuicji przestrzennej jako władzy poznawczej aktywnej w procesie analizy diagramów? Spraw do rozstrzygnięcia jest więc bardzo dużo, są też różnorodnej treści i charakteru.

Wśród wspomnianych zagadnień epistemologicznych pojawiają się również problemy o charakterze metodologicznym. Tu pojawia się pytanie, jaką rolę diagramy odgrywają, i jaką mogą odgrywać w dowodach. W jakich okolicznościach wnioskowanie matematyczne może w uprawniony sposób korzystać z diagramów? Wreszcie, czy mogą one, jako obiekty jednostkowe, sankcjonować twierdzenia ogólne?

W filozofii matematyki XX wieku, dominował pogląd, iż diagramy są w poznaniu matematycznym zbędne, a często nawet szkodliwe. Zgodnie z takim stanowiskiem, wizualizacje mogą w poznaniu matematycznym pełnić co najwyżej rolę heurystyczną, bądź też pedagogiczną, nie powinny być jednak nigdy rozważane w kontekście uzasadniania. W filozofii matematyki ostatnich lat następuje wzrost zainteresowania rolą wizualizacji w poznaniu matematycznym, a wiele elementów opisanego powyżej stanowiska ulega rewizji. Zwraca się tu uwagę na różnorodność roli, jakie wizualizacje grają w poznaniu matematycznym; są to między innymi „inspiracja i odkrycie, nieformalna komunikacja oraz nieformalny dowód (*demonstration*), jak również nauczanie i uczenie się (...)”⁸. Najczęściej rozważanym aspektem diagramów jest ich rola w dowodach, czy szerzej w rozumowaniach matematycznych i sposobach uzasadniania zdań matematyki. W ostatnich latach pojawiają się również w dużym stopniu nowe zagadnienia – w szczególności związane z eksperymentami komputerowymi, ale również np. z kognitywnymi aspektami wizualizacji.

Podstawowym zagadnieniem omawianym w niniejszej pracy jest miejsce wizualizacji, jak również intuicji przestrzennej w szeroko pojętej epistemologii

⁸ Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures...*, str. 898.

matematyki, której przedmiotem jest przede wszystkim natura poznania matematycznego, sposoby uzasadniania prawd matematycznych, rozumienie pojęć matematycznych, oraz kształtowanie się naszych przekonań ich dotyczących. Moim zasadniczym celem jest wydobycie i przedstawienie różnorodności funkcji, jakie wizualizacje grają w poznaniu matematycznym. Zwracam tu uwagę nie tylko na tradycyjnie związane z diagramami geometrię, czy analizę matematyczną, ale również na inne gałęzie matematyki, jak teoria liczb czy teoria grafów. Poddaję analizie różne cechy diagramów jako reprezentacji, cechy aktów poznawczych do nich się odwołujących, oraz status ich wytworów, czyli twierdzeń matematycznych. Rozważam trudności związane z analizą diagramów, jak i charakterystyki wizualizacji, które można rozważać jako ich zalety. Rozważam wreszcie ogólnie, co wnosi wizualny wymiar matematyki do poznania matematycznego.

W niniejszej pracy, w pierwszej kolejności przedstawiam proces rozwoju problematyki wizualizacji w szerokim kontekście historycznym. Można powiedzieć, iż jest to cecha wyróżniająca mojej pracy. We współczesnych badaniach nad wizualizacjami tradycja filozoficzna jest zazwyczaj ujmowana zdawkowo, ograniczając się do krótkich odniesień do Kanta, lub do filozofii geometrii przełomu XIX i XX wieku. Uważam jednak, iż szersze przedstawienie kontekstu historycznego jest uzasadnione. Kwestia roli wizualizacji w poznaniu matematycznym jest bowiem obecna w refleksji nad matematyką od starożytności. Przedstawienie kontekstu historycznego umożliwi więc prezentację szerokiego wachlarza stanowisk, które niesie z sobą tradycja filozoficzna, co stworzy kontekst dla współczesnych rozważań nad wizualizacjami. Warto również dodać, iż niektóre z rozważanych problemów pozostają aktualne do dziś, inne pozostają istotne, choć w innej formie, jeszcze inne stają już dziś nieaktualne. W szczególności należy tu wspomnieć, iż do XX wieku problematyka wizualizacji dotyczyła głównie geometrii oraz analizy matematycznej, w ostatnich latach rozważa się natomiast rolę wizualizacji również w innych gałęziach matematyki, jak teoria grafów, teoria fraktali, czy nawet teoria liczb. Na wszystkie wymienione tutaj aspekty rozwoju problematyki wizualizacji będą zwracał uwagę w mojej pracy.

Oprócz problemów czysto filozoficznych, omawiam niektóre zagadnienia

związane z historią i metodologią matematyki. Analiza taka jest konieczna w celu pełnego przedstawienia filozoficznych zagadnień związanych z wizualizacjami. Jeśli chodzi o problemy metodologiczne, należy tu przede wszystkim wymienić wady diagramów jako reprezentacji obiektów matematycznych – są to jednostkowość, nadmiarowość, oraz niewiarygodność diagramu. Problemy te, istotne dla całości pracy, omówione są bliżej w ostatniej części wstępu.

Jednym z głównych celów pracy jest przedstawienie wizualizacji na tle „tradycyjnych” problemów epistemologicznych związanych z matematyką. Poniżej omówię bliżej, o jakie problemy tu chodzi, i jak powiązane są z wizualizacjami.

Pierwszym z nich jest dychotomia intuicja/pojęcia w poznaniu matematycznym⁹. Dychotomię tę można rozważać na kilku płaszczyznach. Przeciwstawia się więc algebraiczne i geometryczne metody czy też style myślenia w matematyce. Istotny jest również kontrast pomiędzy dwoma typami reprezentacji w matematyce – „zwykłą” reprezentacją symboliczną z jednej strony i diagramami z drugiej. Można również przeciwstawiać to, co przestrzenne w reprezentacjach, oraz wizualizacjach wewnętrznych, temu, co nie jest przestrzenne. Tendencja do rozważania wizualizacji w kontekście tych dychotomii obecna była już w matematyce XVII i XVIII wieku, kiedy to żywe były debaty pomiędzy zwolennikami geometrycznego i algebraicznego podejścia do matematyki. Przeciwstawienie intuicji (naoczności) oraz pojęć w poznaniu matematycznym jest jednym z fundamentów, na których zbudowana jest epistemologia Kanta. Nawiązania do tej dychotomii pojawiają się również w jakiś sposób w rozważaniach większości filozofów omawianych w pierwszych rozdziałach pracy. Współczesne badania koncentrują się z kolei na roli intuicji przestrzennej w dowodach i rozumowaniach matematycznych. Rozważane są takie pytania, jak: na ile sposób postrzegania diagramu wiąże się rzeczywiście z wyróżnioną władzą poznawczą – intuicją – dającą specyficznego typu poznanie? Czy doświadczenia wizualne są źródłem innego typu poznania niż symbole, a jeśli tak, to jakiego? Czy można mówić o rozumowaniach i dowodach wizualnych – a więc dowodach

⁹ Dodajmy tutaj, iż intuicja przestrzenna, czy intuicja wizualna jest jedną z odmian intuicji w matematyce. Szerzej piszę o tym w dalszej części wstępu.

odmiennego typu niż zwykle dowody polegające na przekształcaniu symboli? Czy rozumowania takie przeprowadzane są bez udziału pojęć? Czy mają charakter pozalogiczny? Te pytania będę między innymi rozważał w mojej pracy.

Drugim zagadnieniem jest spór empiryzmu z aprioryzmem. Wizualizacje zajmują w tym sporze, szczególne miejsce. Można bowiem powiedzieć, iż istnieją trudno uchwytnie różnice pomiędzy empirystyczną a apriorystyczną interpretacją procesu poznawczego związanego z diagramami. Diagramy są nam dostępne dzięki zwykłej percepcji zmysłowej, są bowiem fizycznymi i jednostkowymi obiektami. Wszelkie wnioski na nich oparte mają zatem, w pewnym sensie, empiryczny charakter. Charakter taki wypływa również z jednostkowości, zwodniczości oraz niewiarygodności diagramów. Z drugiej strony typ poznania związany z diagramami jest w subtelny sposób odmienny od zwykłych rozumowań nauk empirycznych, wyciągających indukcyjne wnioski z obserwacji. Wielu filozofów, jak m.in. Peirce, Frege, czy współcześnie – Giaquinto, broni więc fundamentalnie apriorycznej natury rozumowań opartych na wizualizacjach. Tak interpretował wizualny wymiar matematyki oczywiście również Kant, argumentując, iż pierwiastek przestrzenny w naszym poznaniu geometrycznym ma charakter wrodzony, będąc tym samym źródłem aprioryczności sądów geometrii. Stąd też problem interpretacji wizualizacji, oraz intuicji przestrzennej w ramach sporu empiryzmu z aprioryzmem jest wciąż otwarty.

Trzecim „tradycyjnym” zagadnieniem epistemologicznym, na które będę tu zwracał uwagę jest podział na zdania analityczne i syntetyczne. Jak wiadomo, według Kanta geometria jest nauką syntetyczną, ponieważ jej dowody muszą odwoływać się do czystej naoczności przestrzeni, którą można rozważać jako pewien typ intuicji. W istocie, podział na zdania analityczne był od czasów Kanta jedną z ważniejszych płaszczyzn, na których rozważano zagadnienie roli intuicji przestrzennej w poznaniu matematycznym. Stąd też problem podziału na zdania analityczne i syntetyczne nieuchronnie pojawia się w pierwszych rozdziałach pracy. Problem ów jest jednak w bardzo niewielkim stopniu obecny we współczesnych rozważaniach nad wizualizacjami. Mimo to, w zakończeniu pracy spróbuję dokonać oceny, na ile współczesne badania nad wizualizacjami rzucają

światło na historyczny spór o analityczność matematyki.

Niektóre zagadnienia są w mojej pracy omińnięte. Nie będę zajmował się kwestią roli wizualizacji w zastosowaniach matematyki. W niewielkim stopniu rozważam badania z zakresu psychologii poznawczej i kognitywistyki, chociaż pozostają one obecne w analizowanych przez mnie blisko rozważaniach Marcusa Giaquinto. Nie interesują mnie tu również badania nad percepcją wzrokową z zakresu psychologii poznawczej, bowiem w centrum mojej pracy pozostają tradycyjne zagadnienia epistemologiczne, a nie badania nad funkcjonowaniem naszego systemu wizualnego. Jeśli chodzi o historyczną część pracy należy wspomnieć, iż nie rozważam tu filozofii intuicjonistów, ani Wittgensteina. Podkreślę wreszcie, że, o ile praca dotyczy epistemologii matematyki, w niewielkim stopniu obecne będą w niej rozważania ontologiczne. Ontologia i epistemologia matematyki są oczywiście ściśle powiązane, problem odniesienia przedmiotowego diagramów rozważam mimo to jedynie o tyle, o ile powiązany on jest z poznaniem matematycznym. Wyjątkiem od tej zasady jest ostatni rozdział i zakończenie pracy, gdzie rozważam interpretację wizualizacji w matematyce w ogóle, oraz w szczególności eksperymentów komputerów, w duchu realizmu matematycznego.

W dalszej części wstępu omówię literaturę analizowaną w pracy. Omawiając rolę wizualizacji w filozofii matematyki przed XX wiekiem odwołuję się przede wszystkim do źródeł i opracowań polsko-, angielsko- i niemieckojęzycznych. Poniżej omawiam ważniejsze z analizowanych prac współczesnych dotyczących wizualizacji w matematyce dokonując ich tematycznego podziału. Są to w znacznej większości prace anglojęzyczne¹⁰.

Autorzy części prac koncentrują się na wydzieleniu różnego typu zastosowań diagramów. Pracami takimi są np., *Visible Structures in Number Theory* Petera Borweina i Loki Jörgensona, czy *The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium* Richarda Palaisa. W pierwszej analizowane są diagramy w teorii liczb a w drugiej m.in. w teorii równań

¹⁰ Chciałbym w tym miejscu podkreślić, iż wszystkie tłumaczenia fragmentów prac anglojęzycznych są wykonane przez mnie.

różniczkowych.

Prace dotyczące wizualizacji w dowodach mają charakter częściowo filozoficzny, a częściowo metodologiczny. Na rolę diagramów w dowodach zwracają uwagę m.in. Jon Barwise i John Etchemendy w pracy *Visual information and valid reasoning*, oraz Philip Davis w artykule *Visual Theorems*. Bliższy zagadnieniom metodologicznym jest artykuł Zenona Kulpy pt. *Main Problems of Diagrammatic Reasoning. Part I: The generalization problem*, w którym ma na celu wykazanie, iż diagramy mogą dostarczać wiedzy ogólnej. Wartościową pracą przeglądową dotyczącą roli wizualizacji w dowodach jest matematycznych jest *Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives* Gili Hanna i Nathana Sidoli.

Duża część prac poświęconych diagramom ma charakter prawie wyłącznie metodologiczny, względnie logiczny. W pracach tych rozważa się różne sposoby formalizacji rozumowań diagramach. Ten nurt będzie nie będzie tutaj omówiony w wyczerpujący sposób, gdyż zasadniczą tematyką poruszaną w mojej pracy jest epistemologia matematyki w ogóle, nie natomiast formalne aspekty rekonstrukcji wybranych typów rozumowań. W mojej pracy szerzej omawiam jedynie pracę *Proofs, pictures, and Euclid* Johna Mummy, w której rekonstrukcji poddane są rozumowania *Elementów* Euklidesa; przyjrę się również pracy Erica Hammera pt.: *Reasoning with Sentences and Diagrams*, w której dokonuje on formalizacji rozumowań opartych o diagramy Venn'a.

Jeśli chodzi o prace dotyczące filozoficznych aspektów zastosowań komputerów, można wymienić np. *Experimentation in Mathematics. Computational Paths to Discovery*, Borweina, Bailey i Girgensohn, R., czy przeglądowy artykuł *Experimental Mathematics*, Bakera.

Jeśli chodzi o interpretację roli wizualizacji w duchu filozofii realizmu matematycznego, należy wymienić pracę Jamesa Roberta Browna pt.: *Naturalism, Pictures and Platonic Intuitions*. Dodajmy, iż J. R. Brown jest również autorem książki pt. *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, w której wprowadza w problematykę filozofii matematyki, kładąc duży nacisk na rolę diagramów.

Zauważalnym nurtem tworzą wreszcie prace, w których ocenie poddaje się rolę diagramów w matematyce greckiej. Mają one charakter zarówno filozoficzny, jak i metodologiczny. Analizuję tu prace takich badaczy, jak Kenneth Manders (*The Euclidean Diagram*), wspomniany John Mumma (*Proofs, pictures, and Euclid*), Reviel Netz (*The shaping of deduction in Greek mathematics: A study of cognitive history*) czy Ken Saito (*Reading ancient Greek mathematics*).

Polską autorką godnych uwagi prac dotyczących niektórych aspektów wizualizacji jest Anna Lemańska. Można tu wymienić jej artykuły *Zagadnienie obrazowości niektórych rozumowań w matematyce*, w którym autorka podaje wiele przykładów rozumowań diagramowych i rozważa rolę diagramów w dowodach, oraz *Eksperyment komputerowy a istnienie obiektów matematycznych*, w którym rozważany jest status ontologiczny wizualizacji komputerowych.

Korzystam również z wartościowych artykułów przeglądowych dotyczących wizualizacji: *Visualization in Logic and Mathematics* autorstwa Paolo Mancosu, oraz *Vizualizing in Mathematics* autorstwa Marcusa Giaquinto.

Najistotniejszą, dla moich potrzeb badawczych pracą dotyczącą wizualizacji w matematyce jest książka *Visual Thinking in Mathematics* wspomnianego powyżej Marcusa Giaquinto. Rozwija on w niej najbardziej chyba szczegółowe, i jednocześnie wyróżniające się na tle pozostałych, ujęcie roli diagramów w matematyce. M. Giaquinto, podkreśla, iż zgodnie z „tradycyjnym” poglądem, wizualizacje mają znaczenie co najwyżej *psychologiczne*, ale nie *epistemologiczne*, przy czym sam nie zgadza się z taką oceną roli diagramów¹¹. W swoich badaniach, które – jak podkreśla – mają charakter epistemologiczny, podejmuje M. Giaquinto wiele z klasycznych zagadnień teorii poznania, wykorzystując m.in. osiągnięcia kognitywistyki czy psychologii eksperymentalnej. W centrum jego analiz nie jest dowód, czy dowodzenie, ale wizualne *myślenie* w matematyce. M. Giaquinto podkreśla różnorodność funkcji epistemicznych, jakie mogą pełnić wizualizacje, szczególną uwagę zwracając na odkrycie, „nie twierdząc, że ma ono jakkolwiek

¹¹ Por. Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 1.

rolę w konstrukcji dowodów”¹². Mimo to rola wizualizacji w uzasadnianiu twierdzeń matematycznych jest bardzo ważnym aspektem pracy M. Giaquinto. Zdaniem Paolo Mancosu, autor *Visual Thinking...* rozważa w swojej książce w istocie następujące pytania: jakie są „mechanizmy zdobywania przekonań matematycznych?”; „na jaki sposób ludzie zdobywają swoje wyjściowe (nie wyprowadzone z innych) przekonania matematyczne?” (*how do people know... their initial beliefs*)¹³. Według P. Mancosu, jednym z głównych zagadnień pojawiających się w pracy M. Giaquinto jest wreszcie: „jaka jest natura przyczynowej drogi od doświadczenia wizualnego (mającego swoje źródło w zmyśle wzroku bądź intuicji), do matematycznego przekonania?”¹⁴.

Dodam, że *Visual Thinking in Mathematics*, mimo, iż M. Giaquinto stara się jej nadać znamion jednolitej całości, jest zestawieniem częściowo od siebie niezależnych rozważań nad licznymi aspektami wizualizacji w różnych gałęziach matematyki. Zgodnie z tym, nawiązania do *Visual Thinknig in Mathematics* pojawiają się w różnych miejscach mojej pracy. Na koniec dodam, iż myśl Giaquinto pod wieloma względami nawiązuje do filozofii kantowskiej. Giaquinto krytycznie odnosi się więc do empirystycznej interpretacji wizualizacji, rozważając w wielu miejscach rolę wrodzonego, „wizualnego” aparatu poznawczego¹⁵.

¹² Hanna, G., Sidoli, N., *Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives*, “ZDM Mathematical Education” 2007, Vol. 39, str. 75.

¹³ Mancosu, P., *Visualization in Logic and Mathematics*, w: *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Dordrecht 2005, str. 23.

¹⁴ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 2.

¹⁵ Można tu również wspomnieć o francuskim projekcie „Géométrie et cognition” prowadzonym przez G. Longo, J. Petitota oraz B. Teissiera w ENS w Paryżu. Grupa ta podkreśla potrzebę sformułowania „kognitywnych podstaw dla matematyki”, pozostając pod dużym wpływem rozwoju kognitywistyki, i psychologii poznawczej, szczególnie teorii percepcji (Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str. 22). Nawiązuje ona do podejścia Kleina i Poincarégo oraz do tradycji geometrii syntetycznej. Kładzie tu się nacisk m.in. na genezę pojęć matematycznych, czy „konstytutywną rolę umysłu w konstruowaniu matematyki, w szczególności geometrii” (zob. tamże, str. 22). Projekt „Géométrie et cognition” nie będzie w mojej pracy omawiany.

Konstrukcja pracy jest rzeczowo-chronologiczna. Składa się z ona z jedenastu rozdziałów. Pierwszy rozdział dotyczy roli diagramu w matematyce i filozofii matematyki starożytnej Grecji. Kładę tu szczególny nacisk na analizę *Elementów* Euklidesa (do której będę wracał w późniejszych rozdziałach) oraz na filozofię matematyki Platona. Drugi rozdział dotyczy wizualizacji w XVII wieku. Rozważam tu dwie grupy zagadnień: metodologiczne – związane z algebraizacją geometrii w XVII wieku oraz pewnymi problemami, które pojawiły w kontekście zastosowań diagramów w geometrii oraz rachunku różniczkowo-całkowym. W ramach zagadnień filozoficznych omawiam uwagi o wizualizacjach formułowane przez największych filozofów XVII i XVIII stulecia, m.in. Leibniza, Kartezjusza i Berkeleya. W trzecim rozdziale przechodzę do filozofii matematyki Kanta, którego stanowisko jest szczególnie dla zagadnienia roli wizualizacji i intuicji przestrzennej w matematyce. W czwartym rozdziale przyglądam się rozwojowi geometrii nieeuklidesowych. Pokażę w nim jak rozwój tych geometrii wpłynął na formowanie się różnych stanowisk odnośnie intuicji przestrzennej w geometrii. Przedstawiam tu zarówno kontrowersje związane z piątym postulatem Euklidesa, jak również poglądy konkretnych filozofów, jak Helmholtz, Riemann czy Klein. Rozdział piąty poświęcony jest analizie pięciu stanowisk odnośnie roli diagramów w geometrii. omawiam tu Bolzano, Klein'a, Mill'a, Fregego i Poincarego. Każde z nich prezentuje odmienną interpretację roli diagramów w poznaniu matematycznym. Rozdział szósty dotyczy bardzo oryginalnej filozofii C.S. Peirce'a, który z diagramu uczynił centralne pojęcie epistemologiczne matematyki. W rozdziale siódmym rozważam powody, dla których wizualizacje stają się na początku XX wieku obiektami „niepożądanymi”, oraz powody, dla których zainteresowanie nimi w ostatnich latach powróciło. W rozdziale ósmym omawiam różne typy reprezentacji przestrzennych, jakie są rozważane w pracach ostatnich lat. Rozważam tu różne działy matematyki. Rozdział dziewiąty poświęcony jest pogłębionemu omówieniu dwóch ujęć poznania związanego z elementarną geometrią. W rozdziale dziesiątym podejmuję próbę ogólnej charakterystyki reprezentacji wizualnych, jako przeciwstawionych reprezentacjom symbolicznym. Wymieniam tu główne ich własności, zarówno takie, które można postrzegać jako

ich wady, jak i takie, które są ich silną stroną. W rozdziale jedenastym analizuję wreszcie rolę, jaką diagramy grają w rozumowaniach i dowodach matematyków. Rozważam w szczególności, na ile można mówić o tzw. dowodach wizualnych, oraz jaką rolę w dowodach matematycznych gra intuicja.

Analiza podstawowych terminów i problemów związanych z wizualizacjami

W dalszej części wstępu chciałbym poddać bliższej analizie terminy, które pojawiają się w mojej pracy. Należą do nich takie pojęcia, jak: wizualizacja, diagram, reprezentacja przestrzenna, rozumowanie diagramowe, intuicja przestrzenna itd. Terminów tu używanych jest więc dużo, część z nich jest przy tym bliskoznaczna. Stąd ważne jest określenie ich znaczenia. W niektórych przypadkach rozważę różne możliwości rozumienia pewnych terminów, czy kontrowersje związane z konkretnymi interpretacjami.

Po pierwsze, kluczowym dla pracy, jest pojęcie **diagramu**. Diagramami są, w moim ujęciu, ogólnie rzecz biorąc konkretne, fizyczne, układy kresek, kropek i innych kształtów, tworzone w celu reprezentacji, jak również zaistnienia, obiektów matematycznych. Pojęcie diagramu rozumiem tu bardzo szeroko, są to zatem **rysunki** trójkątów, kwadratów i innych obiektów geometrycznych, jak również **wykresy**, jak np. wykresy funkcji. Jako diagram traktuję również np. **grafikę komputerową**, czy komputerowo generowane obrazy, tworzone w celu reprezentacji obiektów matematycznych. Należy tu też od razu podkreślić, iż pojęcia diagramu i **reprezentacji przestrzennej**, jak również **reprezentacja wizualna** obiektów matematycznych uważam za równoznaczne. Diagram jest w tym sensie przeciwstawiony symbolowi. Przez **symbol** rozumiem tu po prostu narysowane liczby albo litery, czyli obiekty syntaktyczne.

Należy też zauważyć, iż istnieją pewne rozbieżności co do interpretacji znaczenia terminu „diagram”. Po pierwsze można zapytać, czy za diagram uznamy

tylko „czyste diagramy”, tzn. nie zawierające w ogóle naniesionych symboli? Takie ujęcie jest usprawiedliwione, jeśli przyjmujemy ostrą dychotomię diagram-symbol, czy intuicja-pojęcie. W takim ujęciu ostro rozróżniamy pomiędzy symbolem, czyli literami, czy cyframi, oraz diagramem, czyli układem kresek, kropek, itd., nie będących literą ani cyfrą. Nie byłoby rozsądnym jednak traktować diagramów opatrzonych komentarzami słownymi jako odrębny rodzaj obiektu. Stąd tego rodzaju „reprezentacje mieszane” będę również traktował jako diagramy. W takich przypadkach – używając pojęcia „diagramu” – będę jednak nawiązywał do jego pozajęzykowych aspektów poznania z nim związanego.

Należy tutaj zaznaczyć, iż występują również inne ujęcia – dla Charlesa S. Peirce’a, który szczegółowo analizuje rolę diagramów w poznaniu matematycznym – diagramem jest w równym stopniu rysunek trójkąta, co równanie algebraiczne¹⁶. W takim ujęciu, zarówno trójkąt, jak i cyfra „5” są reprezentacjami przestrzennymi, o ile umiejscowione są w przestrzeni, a ich rozmieszczenie w przestrzeni jest w jakiś sposób istotne dla ich rozumienia. Diagram jest więc tutaj pojęciem bardzo szerokim tak, iż również symbole są typami diagramu.

W niniejszej pracy nie przyjmuję jednak perspektywy C.S. Peirce’a, pozostając przy tradycyjnej perspektywie, zgodnie z którą reprezentacje można podzielić na dwa rodzaje – diagramy (czy reprezentacje przestrzenne) oraz symbole. Chciałbym przy tym zaznaczyć, iż postępuję tak w celu nadania odpowiedniego kształtu zawartej w tej pracy dyskusji nad charakterystyką tego co „wizualne” w matematyce – czynię to więc niejako „roboczo”. Dyskusję, na ile taka dychotomia jest uzasadniona zostawiam na koniec pracy.

Przejdźmy do kolejnego kluczowego terminu, tzn. wizualizacji. Termin ten przyjął się w literaturze anglojęzycznej, widnieje on w tytułach prac dotyczących wizualnego aspektu matematyki, stąd odgrywa on w mojej pracy najważniejszą rolę.

Przez **wizualizację** będę ogólnie rozumiał zarówno reprezentację przestrzenną obiektów matematycznych, jak i wewnętrznie wytwarzane ich

¹⁶ Por. Peirce, C.S., *The Logic of Mathematics in Relation to Education*, (w:) From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, V. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 635.

wyobrażenia¹⁷. Każdy diagram jest więc wizualizacją. Wizualizacją jest jednak także obiekt przedstawiany w wyobraźni przestrzennej, a więc **wizualizowany**. Trudno przy tym odróżnić akt wizualizowania sobie takiego obiektu od jego wytworu, rozróżnienia takiego nie będę więc wprowadzał, używając dla ich określenia terminu **wizualizacji wewnętrznej**. Podsumowując, terminu wizualizacja używam więc w kontekstach, w których może chodzić zarówno o sam diagram, jak i o wewnętrzne przedstawienie owego diagramu, bądź innego obrazu związanego z omawianym problemem.

Obok diagramów będę również pisać o **dynamicznych wizualizacjach**. Są to wewnętrzne wyobrażenia zmieniających swój kształt diagramów, bądź też np. zmieniająca swój kształt grafika komputerowa. Nie są zazwyczaj traktowane na równi z diagramami, bowiem ich status poznawczy jest też w pewnym stopniu odmienny. Niemniej jednak dynamiczne wizualizacje mogą również pełnić rolę w poznaniu matematycznym, należy je w związku z tym również w niniejszym zestawieniu uwzględnić.

W mojej pracy pojawiać się będzie również pojęcie **poznania diagramowego**. To bardzo ogólne pojęcie rozumiem jako oznaczające każdy typ rozumienia i zapoznawania się z obiektami matematycznymi, jak również uzasadniania zdań matematycznych (w tym dowodzenia), w którym w istotny sposób korzysta się z wizualnych reprezentacji. Jest to więc jakiegokolwiek poznanie, które zaistniało w jakimś stopniu w wyniku kontaktu wzrokowego z diagramem. Może to być subiektywne przekonanie, odkrycie, czy wykonanie w dowodzie kroku odwołującego się do diagramu¹⁸. Typem poznania diagramowego są **rozumowania diagramowe**, czyli takie rozumowania które przeprowadzane są w

¹⁷ Podobne ujęcie diagramu i wizualizacji jest dość powszechnie używane w literaturze. Cytowany tu już znany filozof matematyki Paolo Mancosu, proponuje termin „wizualizacja” również rozumieć szeroko, tak aby w jego znaczeniu zawierała się „zarówno wizualizacja przy pomocy obrazów mentalnych (*mental image*), jak również wizualizacje otrzymywane przy pomocy komputerowo generowanych obrazów, bądź obrazów narysowanych na papierze, np. diagramów, itd.” (Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str. 13). Również często tu cytowany Marcus Giaquinto pisze, iż wizualizacja to zarówno diagram, jak i „indywidualne doświadczenia, które odbywają się w wewnętrznej przestrzeni mentalnej” (Giaquinto, M., *Visual Thinking*).

¹⁸ To, na ile poznanie diagramowe różni się od poznania opartego na manipulacji symbolami będzie dalej jednym z głównych zagadnień rozważanych w tej pracy.

jakimś sensie w oparciu o wizualizacje. W analizowanych przez mnie pracach pojawia się również pojęcie **dowodu wizualnego (diagramowego)**, które rozważę dopiero w dalszej części pracy, jako, że nie ma jasności, na ile w ogólności uprawnione jest jego używanie. Pojęciem ogólniejszym, niekoniecznie związanym z kontekstem uzasadnienia, jest pojęcie **myślenia wizualnego**. Odnosi się ono do jakiegokolwiek rozważania obiektów matematycznych jako przedstawionych w przestrzeni, jak np. dokonywania na nich manipulacji w wewnętrznej przestrzeni wyobraźniowej.

Chciałbym też wspomnieć o kilku innych pojęciach. Pierwsze z nich jest w języku angielskim oddawane jako „*visual evidence*”; na j. polski można je przetłumaczyć jako dane wizualne, wizualny materiał dowodowy. Kluczowym aspektem kategorii „*visual evidence*” jest jej empiryczny rys – „*visual evidence*” to dana *obserwacyjna* uzyskana przez empiryczną analizę diagramu, jako obiektu fizycznego, w celu analizowana pod kątem wykorzystania jej w dowodzeniu.

Z wizualnymi danymi ściśle związane są kolejne pojęcia, które chciałbym tu wprowadzić. Jest to przede wszystkim wyróżnienie **własności graficznych (wizualnych)** i **własności matematycznych**. Te pierwsze to nieinterpretowane dane zmysłowe, jak np. „kreska się zagina”, czy „kropka jest wewnątrz okręgu”¹⁹. Przykładem może tu być wizualna własność „bycia nieprzerwaną kreską”, którą łączymy z wykresami funkcji ciągłych. Matematyczna własność jest z kolei ściśle określona przez definicję. W ramach ogólnych ustaleń terminologicznych, uznaję ogólną równoważność kategorii „wizualności” i „przestrzenności”. Nie rozróżniam więc np. pomiędzy „myślenie wizualnym” a „myśleniem przestrzennym”.

Chciałbym poczynić tu jeszcze jedną uwagę natury językowej. Otóż w moich rozważaniach często pojawiać się będzie przymiotnik odnoszący się do typu poznania, rozumowania, czy reprezentacji związanej z diagramami. W języku angielskim w powszechnym użyciu jest tu przymiotnik „*diagrammatic*”, używany w takich zwrotach, jak „*diagrammatic reasoning*” (rozumowanie diagramowe), czy „*diagrammatic representation*” (reprezentacja, przedstawienie diagramowe). W

¹⁹ Dane te są nieinterpretowane w tym sensie, że nie nadaje się im z góry określonego znaczenia matematycznego.

języku polskim nie ma bezpośredniego odpowiednika takiego przymiotnika (słowo „rysunkowy” wydaje się zbyt kolokwialne, a „obrazowy” nie zawsze oddaje znaczenie terminu „*diagrammatic*”).

Będę stąd używał przymiotnika „diagramowy”.

Przejdźmy wreszcie do kluczowego również terminu „**intuicja**”. Nie chcę w tym miejscu przeprowadzać szerszej jego analizy, warto jednak przyjąć kilka ustaleń. Należy tutaj jednak podkreślić, iż można rozważać różne znaczenia terminu intuicja w matematyce, czy też różne odcienie i własności intuicji matematycznej. Oto podstawowe znaczenia terminów „intuicja” i „intuicyjne” w matematyce²⁰:

1) intuicyjne w naszym poznaniu jest wszystko to, co jest nieściśle, niejasne bądź też niekompletne (wymagające doprecyzowania matematycznego, ściślejszego ujęcia);

2) jak piszą amerykańscy matematycy w pracy *Świat matematyki*, „przy braku dowodu, intuicyjne oznacza prawdopodobne lub przekonujące”, czy inaczej stanowiące „rozsądne przypuszczenie”²¹;

3) intuicyjne oznacza „holistyczne lub scalające w przeciwstawieniu do szczegółowego lub analitycznego”²²;

4) intuicja, w jej innym, choć pokrewnym rozumieniu, daje bezpośredni, natychmiastowy wgląd, nie zapośredniczony przez wnioskowanie, czy pojęcia. Intuicja bywa w tym sensie przeciwstawiana dedukcji, bądź też poznaniu uzyskanemu przy pomocy pojęć²³;

²⁰ Por., Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A., *Świat matematyki*, PWN, Warszawa 2001, str. 374-375, Parsons, C., *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge 2008, str. 138-144.

²¹ Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A., *Świat matematyki*, str. 374.

²² Tamże, str. 375.

²³ Por. Parsons, C., *Mathematical Thought*, ...str. 142 (zauważmy, że tak intuicję rozumiał m.in. Kartezjusz).

5) intuicja ujęta w duchu platonizmu matematycznego, rozumiana jest jako władza poznawcza dająca bezpośredni dostęp do świata idei. W ten sposób pojęcie intuicji rozumiał np. Kurt Gödel;

6) intuicyjne oznacza wreszcie to, co w naszym poznaniu łączymy z wizualizacjami, czy jakiegoś rodzaju treściami wizualnymi.

Intuicja związana z wizualizacjami jest więc jednym ze znaczeń tego terminu. Będę ją określał najczęściej terminem **intuicja przestrzenna**, choć pojawia się tu również terminu „intuicja wizualna”, bądź po prostu „intuicja”. Dodajmy, iż każde z pozostałych wymienionych znaczeń tego terminu może również w jakimś stopniu charakteryzować intuicję przestrzenną (intuicję przestrzenną postrzegają więc niektórzy autorzy jako nieściśłą, czy też dającą bezpośredni wgląd). Dodajmy, iż przez intuicję rozumie się na ogół pewną władzę poznawczą.

Chciałbym wprowadzić tutaj również, za Charlesem Parsonsem, rozróżnienie na „intuicję, że” (*intuition that*), oraz „intuicję o” (*intuition of*)²⁴. W pierwszym znaczeniu intuicja przestrzenna powoduje pojawienie się wskutek kontaktu wzrokowego z diagramem, pewnych konkretnych przekonań, jak: „trójkąt na diagramie jest prostokątny”, czy „proste na diagramie są równoległe”. M. Giaquinto w ten sposób właśnie rozumie intuicję, określając ją jako „wizualne oczekiwania (*visual expectations*)”²⁵. Podkreślmy, iż w tym przypadku intuicja funkcjonuje w ten sposób, że sugeruje prawdziwość konkretnych *zdań*.

Drugi typ, czy drugi wymiar intuicji – „intuicja o” – pozwala jedynie osiągnąć lepsze rozumienie danego pojęcia matematycznego. Jeśli mamy pewną intuicję kwadratu (czyli łączymy z jego pojęciem pewną treść wizualną), to nie musimy tym samym jeszcze postulować prawdziwości żadnych twierdzeń jego dotyczących. Tego rodzaju intuicja jest mniej uchwytana, związana raczej z

²⁴ Por. Tamże, str. 139.

²⁵ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 3.

formowaniem się pojęć i niewyraźnymi obrazami z nimi związanymi, niż z prawdziwością konkretnych twierdzeń. Dodam, iż w niektórych kontekstach termin „intuicja” nawiązywał będzie do jednego z tych dwóch jego wymiarów, w innych natomiast kontekstach do obu.

Na koniec dodam, iż intuicję interpretuje się zarówno jako władzę poznawczą mającą charakter empiryczny, aprioryczny, bądź też w jakimś sensie „pośredni”. Jest to związane ze wspomnianymi wcześniej kontrowersjami odnośnie empirycznej, czy też apriorycznej natury poznania diagramowego. Do tych kwestii będę również nawiązywał w mojej pracy.

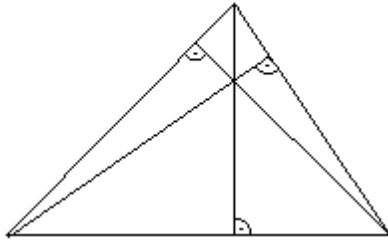
W ostatniej części wstępu przyjrę się bliżej najistotniejszym trudnościom związanym z diagramami, a mianowicie jednostkowości, niewiarygodności oraz nadmiarowości. Własności owe, przypisywane zazwyczaj niektórym, albo wszystkim, diagramom, są ich podstawowymi wadami. Filozofowie zwracali na nie uwagę już od starożytności, są one również omawiane w pracach współczesnych, stąd też warto się im w tym miejscu bliżej przyjrzeć. Zaczniemy od jednostkowości diagramów:

1) Każdy diagram, rysunek, czy wykres jest konkretnym, jednostkowym obiektem, bowiem przedstawiony jest na nim tylko pewien konkrety obiekt matematyczny, np. trójkąt ostrokątny, nie są zatem reprezentatywne dla szerszej klasy obiektów. Stąd dowody, w których wykazuje się własności takiej właśnie klasy (np. wszystkich trójkątów), korzystanie z diagramu wydaje się kontrowersyjne, czy nawet nieuprawnione.

Stąd, co często się przyjmuje, diagram nie może sankcjonować twierdzeń ogólnych.

Dla zobrazowania tej trudności podam przykład bardzo prostego rozumowania, które podaje w artykule *Main Problems of Diagrammatic Reasoning. Part I: The generalization problem* Zenon Kulpa²⁶. Rozważmy więc poniższy diagram:

²⁶ Por. Kulpa, Z., *Main Problems of Diagrammatic Reasoning. Part I: The generalization problem*, “Foundations of Science” 2009, vol. 14, str. 81.



Rys.1. Wysokości w trójkącie

Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, można również przeprowadzić formalne rozumowanie to pokazujące. Stąd można ulec wrażeniu, iż poniższa własność (przecinanie się w jednym punkcie leżącym wewnątrz trójkąta) odnosi się do wszystkich trójkątów. Jednak prosty przykład trójkąta rozwartokątnego pokazuje, że wysokości mogą się również przecinać poza trójkątem (choć również w jednym punkcie). W ten sposób popełniliśmy błąd niewłaściwego uogólnienia na podstawie jednostkowego diagramu. Błędy takie mogą się oczywiście również pojawiać w bardziej skomplikowanych rozumowaniach

2) Nadmiarowość diagramów jest bezpośrednio powiązana z jednostkowością. Zasada się ona na tym, że na diagramie zawarta jest większa ilość informacji niż ta, która jest potrzebna dla reprezentacji danego pojęcia, czy też dla tego, co jest istotne dla danego twierdzenia i co jest wykorzystywane w dowodzie. W istocie, diagram jest obiektem fizycznym, postrzegalnym zmysłowo, który cechuje się wieloma charakterystykami nieistotnymi dla poszczególnych rozumowań. Mogą to być wzajemne położenie fragmentów diagramu w przestrzeni, czy dajmy na to, grubość kresek reprezentujących odcinki czy linie, czy niedoskonałości jeśli chodzi o kształt prostych, czy krzywych. Wnioskując o obiekcie reprezentowanym przez diagram, nie bierzemy oczywiście pod uwagę większości z tych charakterystyk – nie będziemy np. na podstawie diagramu twierdzić, że dany trójkąt jest czarny, bądź że jest trójkątem prostokątnym, jeśli dany kąt na rysunku wydaje się „na oko” być kątem prostym. Sztandarowym przykładem własności charakterystycznej dla

konkretnego diagramu geometrycznego jest np. długość boków (pisał o tym już Arystoteles, o czym wspominam w kolejnym rozdziale). Niebezpieczeństwo zasadza się więc w tym, iż – jak pisze Ayer – geometra „może być skłonny (*is tempted*) czynić założenia, które są w sposób przypadkowy (akcydentalny) prawdziwe o danej figurze, którą traktuje jako ilustrację”²⁷.

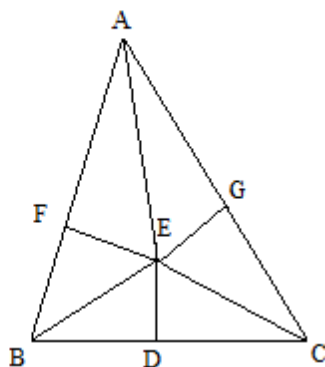
3) Przyjrzyjmy się dalej niewiarygodności, czy zwodniczości diagramów. Diagram może być zwodniczy na kilka sposobów. Po pierwsze, wspomniane powyżej jednostkowość i nadmiarowość diagramów można uznać za własności diagramów świadczące o ich zwodniczości. Można jednak wymienić jeszcze inne takie własności reprezentacji przestrzennych.

- a) Niedokładnie wykonany rysunek może spowodować, iż obiektom matematycznym przez nie reprezentowanym można przypisać własności, których nie posiadają. Niepoprawność ta może być spowodowana niestarannością, albo też błędnie wykonanym diagramem, bądź nieadekwatnie przeprowadzoną wizualizacją wewnętrzną.
- b) Intuicja przestrzenna może w kontakcie z (poprawnie wykonanym) diagramem sugerować, na podstawie czystych danych wizualnych, fałszywe twierdzenia. Jest tak gdy nasz zmysł wzroku nie jest w stanie wychwycić pewnych własności diagramu, bądź też gdy sam diagram nie jest w stanie uchwycić pewnych własności przedstawianego obiektu (poprzez np. zbyt dużą grubość kreski reprezentującej wykres funkcji). Może tak być np. w przypadku poszukiwania na podstawie diagramu stycznych do krzywej.
- c) Ogólnie przyjmowana wizualna interpretacja danych pojęć prowadzi do przekonań niezgodnych z ustaleniami formalnymi. Jest tak np. w przypadku piątego postulatu Euklidesa (wizualna interpretacja pojęcia równoległości sugeruje niedopuszczalność jego negacji), czy w przypadku funkcji ciągłych nigdzie-różniczkowalnych.

²⁷ Ayer, A., *Language, Truth and Logic*, za: Manders, K., *The Euclidean Diagram (1995)*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 88.

- d) Intuicja przestrzenna może sugerować nieuprawnione kroki w rozumowaniu. Przykładem może być drugie twierdzenie pierwszej księgi *Elementów*, w którym zakłada się istnienie przecięcia okręgów w dwóch punktach (oczywistego na podstawie obserwacji rysunku), który to krok jest uzasadniony dopiero przez przyjęcie bardzo silnych środków logicznych, w szczególności aksjomatu ciągłości.

Poniżej przedstawię znany przykład rozumowania, które ukazuje, jak posługiwanie się niedokładnie wykonanym diagramem w rozumowaniu może prowadzić do błędów. Pochodzi ono od Kleina, a „dowodzi” się tu, iż wszystkie trójkąty są równoramienne. Rozważmy następujący diagram, który przedstawia trójkąt (w domyśle – dowolny trójkąt).



Rys.2. Niedokładnie narysowany trójkąt Klein’a.

Metoda konstrukcji tej figury jest następująca²⁸. Należy przedłużyć dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ oraz symetralną boku BC tak, aby spotkały się w punkcie E . Punkt E łączymy dalej z B oraz z C . Wreszcie z punktu E prowadzimy odcinki prostopadłe do boku AB oraz AC (oraz z nimi się stykające). Stosując własności przystawiania trójkątów możemy stwierdzić, iż $AF = AG$ oraz $FB = GC$. Stąd $AB = AC$. Oznacza to, iż badany trójkąt jest równoramienny, oraz jeśli ma on reprezentować wszystkie

²⁸ Por. Mumma, J., *Proofs, pictures, and Euclid*, “Synthese”, 2010, Vol. 175, Nr.2, str. 261.

trójkąty, dowodzi, że wszystkie trójkąty są równoramienne. Jest to oczywista nieprawda. Niepoprawność tego rozumowania ma swoje źródło w niedokładności rysunku – dwusieczna nie dzieli kąta dokładnie na pół, podobnie jest w przypadku symetralnej. W rzeczywistości w trójkącie, który nie jest równoramienny, E leży poza trójkątem, a tylko jeden z pary punktów F , G leży poza trójkątem. Dwusieczna kąta i symetralna boku leżącego naprzeciw tego kąta nie mogą przecinać się wewnątrz trójkąta, o ile trójkąt ten nie jest równoramienny. Stąd równości boków wyprowadzone pod koniec „dowodu” nie muszą wcale zachodzić²⁹. Rysunek jest jedynie tak przedstawiony, że wydaje się to być „rozsądne”, a umysł wydaje się dość łatwo za tą intuicją podążać. Przykład ten pokazuje więc, jak niewielki błąd w wykonaniu rysunku może wpływać na wnioski. Ciekawym jest przy tym, iż intuicja przestrzenna – nawet w połączeniu z odpowiednimi pojęciami – w pierwszym momencie nie wykrywa tego błędu i każe nam sądzić, że rysunek przedstawia trójkąt równoramienny. Inne dane zmysłowe pokazują, że tak jednak nie jest.

Pozostałe typy błędów związanych z wizualizacjami w tym miejscu ominę, jako, że wiele przykładów je ilustrujących pojawiać się będzie w trakcie pracy. Dodajmy na koniec, iż oczywiście nie wszystkie diagramy muszą prowadzić do błędów. W istocie – większość rozumowań opartych na diagramach jest przeprowadzanych w sposób zupełnie poprawny. Dodatkowo, diagramy posiadają jako typ reprezentacji dużo zalet. O tym jednak więcej napiszę dalej, w tym miejscu miałem na celu jedynie pokazanie problemów związanych z diagramami jako motywacji ku ich odrzuceniu jako wartościowych narzędzi w rozumowaniach matematycznych.

²⁹ Por. tamże, str. 261-262.

Rozdział 1. Wizualizacje w matematyce i filozofii greckiej

W pracy dotyczącej wizualizacji w matematyce nie może zabraknąć choć ogólnego ujęcia ich roli w matematyce greckiej. W niniejszym rozdziale podejmuję próbę scharakteryzowania roli diagramów w matematyce greckiej. W pierwszej części rozważam rolę diagramów w pierwszej fazie rozwoju greckiej matematyki. W dalszej kolejności omawiam rolę diagramów w *Elementach* Euklidesa. Dzieło to jest zdecydowanie najszerzej komentowaną pracą matematyki greckiej, stąd warto poświęcić mu uwagę. Dalej rozpatruję rolę diagramów w filozofii matematyki Platona. Rozdział kończę obszernym podsumowaniem, w którym spróbuję zestawić najważniejsze charakterystyki diagramów greckich.

1.1. Wizualizacje w pierwszej fazie rozwoju matematyki greckiej

Na wstępie należy zaznaczyć, iż badania nad historią geometrii w starożytnej Grecji napotykają na wiele problemów. O początkowym okresie rozwoju matematyki greckiej wiemy bardzo niewiele. Nie zachowały się żadne dzieła matematyczne napisane przed *Dialogami* Platona, oraz niewiele prac poprzedzających *Elementy* Euklidesa³⁰. Niewiele więcej tekstów zachowało się z epoki hellenistycznej, która była świadkiem ogromnego rozkwitu matematyki, znajdującego swój wyraz choćby w pracach genialnego Archimedesza. Jak

³⁰ Por. Hodgkin, L., *A History of Mathematics. From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press Oxford 2005, str. 40.

podkreśla Luke Hodgkin, na okres 1000 lat działania greckiej matematyki znamy około 20 większych dzieł i nieco większą liczbę dzieł mniejszej wagi³¹. Równocześnie, interpretacja dzieł, które się zachowały, napotyka wiele trudności³². W związku z powyższym trudno jednoznacznie odpowiedzieć na wiele ważnych i interesujących pytań dotyczących geometrii greckiej. W szczególności tyczy się to problemu diagramów i wizualizacji: w jaki sposób Grecy korzystali z diagramów, oraz na ile byli świadomi ich poznawczej słabości? Jaka rolę odgrywały one w dowodach? Jak Grecy zapatrywali się na naturę procesu poznawczego związanego z diagramem? Czy miał on w szczególności dla nich w jakim sensie naturę empiryczną? Te pytania są zresztą wciąż tematem debat historyków matematyki. Należy więc stwierdzić, iż tezy odnośnie tego, jak Grecy rozumieli swoją praktykę matematyczną, jaką rolę w poznaniu matematycznym przypisywali rysunkowi itd., należy stawiać zawsze bardzo ostrożnie. Nieco więcej można powiedzieć o *Elementach* Euklidesa, ponieważ część badań historycznych jest poświęconych temu dziełu, wraz ze specyficznymi dla niego problemami. Mimo tych trudności, i będąc ich świadomym, spróbuję nakreślić ogólny obraz zagadnienia roli wizualizacji w matematyce greckiej.

Geometria wyrosła niewątpliwie z pewnych praktycznych potrzeb, jak mierzenia gruntu, stąd zresztą pochodzi zapewne jej nazwa – *geo* (ziemia) *metria* (mierzenie)³³. Pierwszymi trójkątami badanymi przez matematyków, były więc skrawki ziemi, czy też fragmenty budynków. Jak wiadomo, przekształciła się ona z czasem w naukę abstrakcyjną, badającą takie obiekty, jak punkt, linia, czy kwadrat, które Grecy oznaczali literami alfabetu (która to konwencja stosowana jest do dziś).

³¹ Por. Tamże, str. 41.

³² Por. Saito, K., *Reading ancient Greek mathematics*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 803.

³³ Por. Murawski, R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, str. 192. Warto dodać, że sami Grecy szukali niekiedy korzeni geometrii w Egipcie. Matematyk i zarazem uczeń Arystotelesa Eudemos pisał, iż „geometria została odkryta w pierw przez Egipcjan i wyrosła z pomiarów ich ziemi. Były one konieczne, ponieważ Nil wylewał i zakrywał granice pomiędzy ich posiadłościami”. (...) Tales, który podróżował do Egiptu, jako pierwszy wprowadził tę naukę w Grecji. (za: Artmann, B., *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc.. 1999, str. 11). Dzieło Eudemoso dotyczące historii matematyki zaginęło, powyższy jego fragment został zachowany dzięki dziełu Proklosa *Komentarz do I Księgi 'Elementów' Euklidesa*. Dodajmy, iż również Herodot doszukiwał się korzeni geometrii greckiej w Egipcie.

W centrum greckiej geometrii umiejscowiony jednak był rysunek. Wszystkie pojęcia geometryczne były nieodłącznie powiązane z ich reprezentacjami przestrzennymi. Również z pojęciem liczby, będącym przedmiotem badań arytmetyki, związana była jego reprezentacja graficzna, tzn. odcinek o danej długości odpowiadającej tej liczbie. Dalej, jak mawiał historyk matematyki greckiej David Fowler, u Greków każde twierdzenie to „sporządzenie rysunku, a potem opowiadanie o nim”³⁴. Dowody i rozumowania w geometrii odnosiły się zawsze do rysunku. Jak pisze znawca matematyki greckiej, Ken Saito „z wyłączeniem pewnych bardzo prostych przypadków, zrozumienie twierdzenia bez diagramu jest niemożliwe”³⁵. Diagramy były więc niewątpliwie jednym z kluczowych aspektów matematyki (i w szczególności geometrii) greckiej.

Zanim poddam grecki diagram bliższej analizie, warto wspomnieć, iż często podkreśla się wizualność kultury greckiej w ogóle. Wydaje się, że można wyróżnić ogólny rys umysłowości greckiej, zgodnie z którym poznanie przyrównuje się do „widzenia”. Zgodnie z tą metaforą, poznawać to tyle, co „widzieć prawdę”. Według historyka matematyki Ladoslava Kvasza, kultura grecka – a wraz z nią cała cywilizacja Zachodu – jest, „cywilizacją ‘geometrycznego ducha’, cywilizacją dla której zrozumieć oznacza osiągnąć wgląd”³⁶. Metafory widzenia są w pismach filozofów greckich (a także matematyków i innych naukowców) powszechnie spotykane, służąc oddaniu różnych aspektów poznania. Związek pomiędzy myślą a doświadczeniem wizualnym jest więc, według Ladoslava Kvasza, jądrem greckiego *episteme*³⁷. Píše on również, iż „podstawową metaforą leżącą u podstaw greckiego pojęcia wiedzy teoretycznej jest widok z odległości (*view from a distance*). Aby osiągnąć wgląd w problem, musimy wykonać krok do tyłu, musimy stworzyć dystans, wyzwolić się z wszystkiego co nas z nim łączy”³⁸. Metafora ta bywa też odnoszona do poznania matematycznego. Według L. Kvasza, nawet w *Elementach* „w trakcie dowodów nie musimy wykonywać żadnej *czynności*; aby rozpoznać

³⁴ Por. Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes...*, str. 83.

³⁵ Saito, K., *Reading ancient...*, str. 817.

³⁶ Kvasz, L., *The History of Algebra and the Development of the Form of its Language*, “Philosophia Mathematica” Vol. III 2006, str. 289.

³⁷ Por. Tamże, str. 291.

³⁸ Tamże, str. 291.

prawdę, wystarczy jedynie *patrzeć*³⁹. Teza ta, w odniesieniu do tego akurat dzieła, jest dyskusyjna, o czym będzie mowa w dalszej części rozdziału. Wydaje się jednak, iż „wizualny” rys kultury greckiej nie jest bez znaczenia również dla epistemologii matematyki.

Jednocześnie, tym co wyróżniało matematykę grecką na tle matematyki rozwijanej w innych kulturach była z pewnością rola ścisłych dowodów w matematyce. Mając na uwadze powyżej zarywaną rolę wizualizacji w matematyce greckiej, pojawiają się od razu pewne pytania. Jaka rolę w rozumowaniach matematycznych miały pojęcia, a jaką wizualne doświadczenie rysunku, czy też po prostu percepcja? Czy efektem finalnym dowodów miało być „widzenie” prawdy, i jaką rolę grały w tym diagramy? Czy diagramy dostarczały czegoś na kształt wizualnych danych, potwierdzających prawdziwość dowodzonej tezy? Można tu też zwrócić uwagę na dwoistości doświadczenia wizualnego – z jednej strony poznanie wizualne odbywa się dzięki „oku rozumu”, a z drugiej dzięki oku fizycznemu.

Rozważanie tych kwestii można rozpocząć od analizy etymologii greckiego odpowiednika terminu „dowód”, czy „dowodzić”. Przytoczymy tu bardzo interesujące analizy węgierskiego historyka matematyki, Árpáda Szabó. Źródłosłowem dla wspomnianych terminów jest więc greckie słowo *δείκνυμι*. Jak podkreśla Szabó, w większości słowników wyróżnia się trzy główne znaczenia tego słowa: „1) pokazywać, wskazywać, 2) uczynić znanym (szczególnie za pomocą słów), wyjaśniać; oraz 3) pokazywać, dowodzić”⁴⁰. Pierwsze z tych znaczeń związane jest z pewnością ze wspomnianym „widzeniem” prawd matematycznych, czy to za pomocą oka fizycznego, czy też oka rozumu; w takim znaczeniu miał też, według Szabó, używać tego słowa Platon. Równie często jednak można spotkać się z użyciem tego słowa w drugim znaczeniu – „uczynić znanym z pomocą słów”⁴¹. W dalszym wywodzie Szabó przytacza tezę, iż wczesne dowody w geometrii greckiej wiązały się często z podaniem „wizualnego danych” (*visual evidence*),

³⁹ Tamże, str. 291. Jest dyskusyjne, na ile taka ocena dowodów euklidesowych jest trafna. Więcej o roli wizualizacji w *Elementach* piszę w dalszej części pracy.

⁴⁰ Szabó, Á., *The Beginnings of Greek Mathematics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston 1978, str. 188.

⁴¹ Szabó podkreśla, że to dwoiste znaczenie terminu *δείκνυμι* jest już widoczne w *Iliadzie* i *Odysei*.

związane były ze wskazywaniem, czy uczynieniem faktów widocznymi⁴². Węgierski historyk matematyki uznaje, iż taki ich charakter można łączyć co najwyżej z początkami matematyki greckiej i stosowania w niej pojęcia *δείκνυμι*. Jako przykład podaje tu proste rozumowanie z platońskiego *Menona*, które opiszę w kolejnych akapitach.

Na kluczową rolę wizualizacji i diagramów we wczesnych etapach rozwoju geometrii greckiej uwagę zwraca wielu uczonych, m.in. historyk geometrii Roberto Torretti, który pisze, iż „na pierwsze dowody (*demonstrations*) geometryczne składały się diagramy, które naocznie (*plainly*) przedstawiały relacje, których istnienie miały wykazać”⁴³. Nie musi to jednak oznaczać, iż takie „wizualne dowody” obywaty się bez komentarzy słownych. Podkreśla to Szabó, pisząc, iż nawet w tym wczesnym etapie rozwoju geometrii rysunek łączył się z komentarzem słownym aby utworzyć pełny dowód; w istocie, zdaniem Szabó, w żadnym momencie historii matematyki nigdy nie był tak, „dowody matematyczne nie były niczym więcej, niż uczynieniem faktów widzialnymi”. Dowód jest, według niego, zawsze „otrzymywany przez namysł nad tym co zostało zobaczone/postrzeżone, oraz wyciągnięciu z tego właściwych wniosków”⁴⁴.

Dyskusyjne jest jednak przypisywanie w takim stopniu „wizualnego” charakteru geometrii okresu Euklidesa oraz późniejszej. Szabó twierdzi na przykład, iż grecka matematyka (w tym geometria) z czasem przeszła transformację, której konsekwencją było to, iż wizualne rozumowania przestały być akceptowane jako dowody. Rewolucję tę określa Szabó mianem rewolucji anty-empirycznej i anty-wizualnej⁴⁵. Na pewnym etapie jej rozwoju „wizualne i empiryczne metody musiały być (...) w sposób świadomy i celowy usunięte (*deliberately excised*) z matematyki”⁴⁶. Ten anty-empiryczny zwrot widoczny jest,

⁴² Por. Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 189.

⁴³ Torretti, R., *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-London 1978, str. 2.

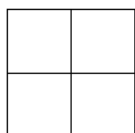
⁴⁴ Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 190. Pamiętajmy, że uwagi Szabó należy tu traktować jako hipotezy (czego on sam, jak się wydaje, nie podkreśla wystarczająco silnie) – nie ma przecież prawie żadnych źródeł dotyczących matematyki z okresu życia Platona, a tym bardziej wcześniejszej.

⁴⁵ Tamże, str. 197.

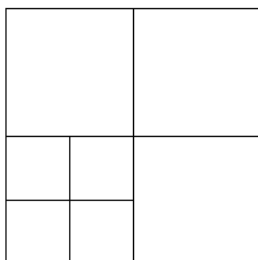
⁴⁶ Tamże, str. 191.

według Szabó, choćby w *Elementach* Euklidesa (do czego wrócę dalej). Również Torretti pisał, że geometrzy greccy rozwinęli, już krótko po Talesie, „metodę dowodu, która nie opiera się na tym, co może być zobaczone przez patrzenie na wzajemne położenie punktów i linii na diagramie, lub szeregu diagramów, ale raczej na tym, co można wnieść (*can be gathered*) z rozumienia znaczenia słów w zdaniu, bądź zbiorze zdań”⁴⁷.

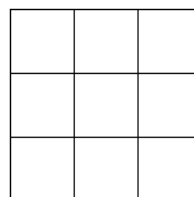
Jednym z pierwszych zachowanych greckich zapisów rozumowania matematycznego jest dialog Sokratesa z niewolnikiem w platońskim *Menonie*⁴⁸. To rozumowanie bywa też przytaczane jako typowe dla wczesnego etapu rozwoju matematyki greckiej, stąd warto mu się nieco bliżej przyjrzeć. Jest on więc interesujący nie tylko dla filozofa, ale również dla historyka matematyki. Filozofowie zwracają przy tym najczęściej uwagę na znajdującą tu wyraz teorię anamnezy, a więc wrodzoności wiedzy matematycznej, historycy natomiast na rozumowanie matematyczne⁴⁹. To natomiast ewidentnie korzysta z obserwacji rysunku. Jak wiadomo, Sokrates chce przez rozmowę z niewolnikiem udowodnić *Menonowi*, że wiedza matematyczna ma charakter wrodzony, że odpowiednie twierdzenia geometryczne „tkwią” już w jakiś sposób w niewolniku, mimo jego braku przygotowania matematycznego. Tekst wskazuje, że Sokrates rysuje najpierw przed niewolnikiem kwadrat⁵⁰. Jest on dalej podzielony na cztery równe części dwoma odcinkami, równoległymi do boków kwadratu (zob. rys 1a).



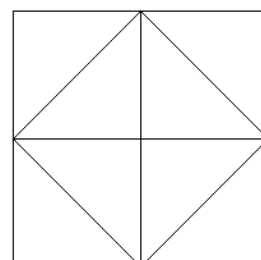
Rys. 1a.



Rys. 1b.



Rys. 1c.



Rys. 1d.

⁴⁷ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 2.

⁴⁸ Streszczona dalej rozmowa Sokratesa z niewolnikiem pochodzi z *Menona* 82B-85B (Platon, *Dialogi, Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 1999).

⁴⁹ Filozofii Platona poświęcony jest osobny podrozdział. Tu robię wyjątek dla słynnego fragmentu z *Menona*, skupiając się raczej na jego metodologicznym, niż filozoficznym aspekcie.

⁵⁰ Sokrates pyta: „Powiedz mi chłopcze, ty wiesz, że tak wygląda czworobok?” (*Menon*, 82C).

Bok tego kwadratu ma więc, jak zauważają Sokrates wraz z niewolnikiem, dwie stopy, a pole równe jest czterem stopom⁵¹. Problem matematyczny, który stawia on przed niewolnikiem jest dalej następujący: jakiej długości jest bok kwadratu o polu dokładnie dwa razy większym, niż pole narysowanego kwadratu. Pole to powinno mieć, co liczby sam chłopiec, 8 stóp. Następnie postawiona jest hipoteza, iż bok takiego kwadratu powinien mieć cztery stopy („dwa razy więcej, niż dwa”), a następnie trzy stopy. Jednocześnie rysowane są rysunki, z których *widać*, iż pola te są za duże, tzn. większe niż osiem stóp (można się o tym przekonać, licząc „małe kwadraciki” o polu równym jednej stopie, które składają się na większe kwadraty – zob. rys 1b,1c). Na końcu Sokrates sugeruje niewolnikowi, aby rozważył figurę, którą przedstawia rys. 1d, a w szczególności przedstawiony na niej „przechylony” kwadrat, którego bok jest równy przekątnej wyjściowego kwadratu. Chłopiec „odczytuje” dalej, będąc kierowanym przez Sokratesa, powstałe „małe kwadraciki” i trójkąty, dochodząc do wniosku, iż kwadrat oparty na przekątnej wyjściowego kwadratu ma pole równe 8 stóp. Tym samym zadanie zostaje rozwiązane. Dodajmy, że Sokrates na koniec formułuje *ogólny* wniosek, iż pole kwadratu o boku długości równej przekątnej innego kwadratu, ma pole dwa razy większe niż pole tegoż drugiego kwadratu.

Rozumowanie (być może można nawet powiedzieć – dowód) Sokratesa wymaga wykonania pewnych prostych obliczeń (chłopiec musi potrafić liczyć pomniejsze kwadraciki, oraz umieć dokonać prostego mnożenia). Dowód nie jest więc „czysto wizualny”. Jednak tezy dowodzi „ogląd” rysunku, „odczytanie” z jego własności. Szabó uważa, że czwarty rysunek można określić „wizualnym dowodem” uzasadnianej tezy; stwierdza również, że całe rozumowanie dostarcza bardzo dobrej ilustracji sposobu, w jaki twierdzenia były dowodzone we wczesnej fazie rozwoju matematyki, ukazując pierwotne znaczenia słowa „dowód”⁵². Do uwag Szabó można dodać, że w dowodzie omawianego twierdzenia ważny jest też niewątpliwie sam pomysł dokonania konstrukcji .

⁵¹ Pola figur są tutaj, za tekstem *Menona*, podawane w „stopach”, a nie – jak to jest już od dawna robione – w „jednostkach kwadratowych” jakiegoś typu.

⁵² Por. Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 190.

Wydaje się, że nie ma jasności, czy takie rozumowanie było dla Platona wzorem ścisłości, oraz na ile członkowie Akademii Platońskiej dysponowali również innymi metodami dowodu tego twierdzenia. Hodgkin stawia hipotezę, iż Sokrates celowo prowadzi niewolnika stosując metodę czysto geometryczną, obrazkową, zdając sobie sprawę z trudności i ograniczeń, jakie mogą wyniknąć z rozumowania korzystającego z konkretnych wartości liczbowych (chodzi tu chociażby o przypadek w którym przekątna kwadratu jest liczbą niewymierną)⁵³. Pisze on, iż „chłopiec nigdy nie otrzyma prawidłowej odpowiedzi, zgadując różne liczby; Sokrates może jednak narysować diagram, który rozwiązuje problem”⁵⁴. „Wizualność” dowodu, odwołania do diagramu, można by wtedy traktować jedynie jako heurystykę, ułatwiającą zrozumienie prawdziwości tezy. Nawiązując do teorii anamnezy Platona, można zapytać, jaką rolę grał rysunek w procesie „wydobywania” wiedzy z niewolnika? Pojawiają się tu trudności związane z kontrastem pomiędzy pozazmysłową naturą poznania matematycznego u Platona, a fizycznością rysunku. Do tej kwestii wrócę jeszcze przy analizie filozofii Platona. Mimo powyższych wątpliwości wydaje się, że Platon uznawał, iż obserwacja rysunku jest jedną z dróg prowadzących do poznania prawd geometrycznych, oraz akceptował tego rozumowania, jako dopuszczalne.

1.2. *Elementy* Euklidesa

Szczególne znaczenie w dyskusjach nad rolą diagramów w poznaniu matematycznym miały z pewnością *Elementy* Euklidesa. Nie trzeba wspominać, iż dzieło to jest największym osiągnięciem matematyki greckiej, oraz, że było dla późniejszych matematyków ideałem ścisłości i piękna myśli matematycznej jeszcze ponad 2000 lat po jego napisaniu. Badania nad *Elementami* trwają do dziś – w istocie, wiąże się z nimi bardzo dużo interesujących zagadnień historycznych i

⁵³ Por. Hodgkin, L., *A History...*, str. 35.

⁵⁴ Tamże, str. 35

metodologicznych. Nie ma tu oczywiście miejsca na ich szerszą analizę, zwróćmy więc tylko uwagę na rolę wizualizacji w geometrii Euklidesa. Można więc zapytać, na ile wizualne doświadczenie obiektów matematycznych było ważne w metodologii *Elementów*? Na ile rozumowania odwołują się do czystych danych zmysłowych, tak jak to wydaje się mieć miejsce w *Menonie*? Pytania te będą przedmiotem analiz zawartych w kilku kolejnych akapitach.

Elementy Euklidesa przedstawiają dedukcyjny system, w ramach którego wyprowadzona jest cała znana współczesnym geometria. System ten oparty jest, jak wiadomo, na definicjach, aksjomatach oraz postulatach. W pierwszej kolejności Euklides definiuje podstawowe pojęcia, jak punktu, prostej, czy też dalej kąta i poszczególnych figur geometrycznych (na początku każdej z 13 ksiąg *Elementów* lista definicji jest przy tym poszerzana). I na przykład dla Euklidesa „punkt jest tym, co nie ma części lub nie ma żadnej wielkości”, a „prosta to linia jednakowo położona względem swoich punktów”⁵⁵. Aksjomaty określały podstawowe własności wielkości, jak liczba, odcinek pole. Część z nich dotyczyła nie tylko obiektów geometrycznych, ale wielkości w ogóle. Można powiedzieć, iż ich odpowiednikiem we współczesnych teoriach aksjomatycznych są aksjomaty logiczne. Postulaty natomiast stwierdzały możliwość wykonania pewnych konstrukcji geometrycznych. Pierwsze trzy postulaty rzeczywiście posiadają w sposób widoczny taki konstrukcyjny charakter, możliwość wykonania konstrukcji przez nie postulowanych wydaje się też być intuicyjnie oczywista. Mniej konstrukcyjny charakter ma postulat czwarty i w szczególności piąty, o którym będzie mowa szerzej w rozdziale dotyczącym geometrii nieeuklidesowych⁵⁶. Dalej przechodzi Euklides do właściwej części pracy, czyli formułowania dowodów i twierdzeń. Dowody te odwołują się prawie zawsze do rysunków, dokonanych

⁵⁵ Euklides, *Z Księgi I Elementów*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 44.

⁵⁶ Oto treść postulatów: 1. Można poprowadzić prostą od któregośkolwiek punktu do któregośkolwiek punktu. 2. Ograniczoną prostą można przedłużyć nieskończenie. 3. Można zakreślić okrąg z któregośkolwiek punktu jako środka dowolną odległością. 4. Wszystkie kąty proste są równe. 5. Jeżeli prosta przecinając dwie proste tworzy z nimi kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przecinają się po tej stronie, po której znajdują się kąty o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych. (Euklides, *Z Księgi I Elementów*, str. 46.)

wyłącznie według metod określonych w postulatach. Rysunki te są oczywiście jednostkowe, konkretne. Jak pisze Artmann, Euklides „wyraża swoje twierdzenia na dwa sposoby: najpierw w terminach ogólnych, a następnie po raz drugi, w bardziej konkretny sposób, oznaczając poszczególne punkty, linie, kąty i tak dalej, poprzez różne litery”⁵⁷. Rozumowanie odnoszące się do jednostkowego, konkretnego rysunku kończy się więc dalej zawsze tezą wyrażoną w terminach ogólnych. Rysunek jest zawsze pomyślany jako reprezentujący większą liczbę przypadków, jest on, jak pisze Asper „pseudo-jednostkowy” (*pseudo-actual*)⁵⁸. Na ile taki ogólny charakter można rzeczywiście diagramom euklidesowym nadać, jest kwestią dyskusyjną (o czym będę dalej pisał).

Przyjrzyjmy się na ile jednak same rozumowania mają charakter „wizualny”. Przytoczmy najpierw stanowisko węgierskiego historyka matematyki, Árpáda Szabó. Otóż jest on, jak wspominałem, zdania, iż Euklides faktycznie oddala się od wizualno-empirycznego komponentu w rozumowaniach matematycznych. *Elementy* mają być wyrazem tendencji anty-empirycznej i anty-wizualnej w rozwoju matematyki. Euklides unika, według Szabó, argumentów wizualnych, czyniąc to w celu zapewnienia swoim rozumowaniom większej ogólności⁵⁹. Twierdzi on, że „dowody Euklidesa nie mają na celu (*are not concerned with*) uczynienie niczego widzialnym”⁶⁰. Dla podkreślenia faktu, iż Euklides unikał wizualizacji, Á. Szabó przytacza czysto arytmetyczne dowody zawarte w *Elementach*. Twierdzenia 21-34 z IX księgi *Elementów* dotyczą podstawowych własności liczb parzystych i nieparzystych. W ich dowodach Euklides nie podejmuje nawet próby nadania im interpretacji graficznej. Szabó podkreśla też, że Euklides nie czyni w nich nic widzialnym, a wręcz, że jego argumentacje nie da się w ogóle uczynić wizualnymi, czy też przedstawić wizualnie⁶¹. Przykład ten dotyczy oczywiście arytmetyki, a nie geometrii, w której z rysunku zrezygnować o wiele trudniej, również w niej jednak, według Á. Szabó, autor *Elementów* miał unikać

⁵⁷ Artmann, B., *Euclid – The Creation...*, str. 21.

⁵⁸ Asper, M., *The two cultures of mathematics in ancient Greece*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 115.

⁵⁹ Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 194.

⁶⁰ Tamże, str. 191.

⁶¹ Por., Tamże, str. 195.

odwołań do tego, co widzialne: „jasnym jest, że Euklides starał się unikać wizualizowalności (*visualizability*) nawet w przypadku geometrii. Było to oczywiście trudniejsze zadanie, niż w przypadku arytmetyki. Mimo to, czynił co potrafił, aby nie podkreślać wizualnych własności figur geometrycznych”⁶².

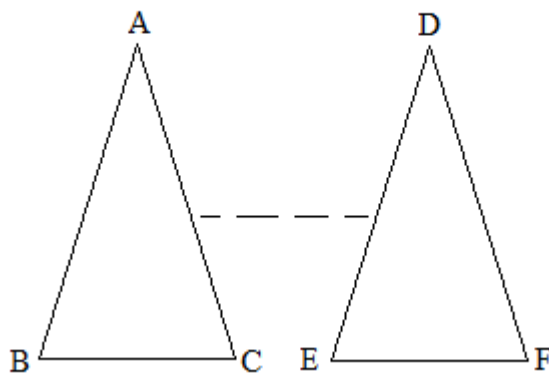
Wydaje się jednak, iż wbrew temu, co twierdził Á. Szabó, rozumowania zawarte w *Elementach* nie są wolne od odwołań do intuicji przestrzennej. Widać to w pewnych niuansach metodologicznych. Zacznijmy od przypomnienia, iż logiczna struktura dowodów euklidesowych nie odpowiada standardom współczesnym. W szczególności, w wielu rozumowaniach wykonywane są „kroki”, które nie są wsparte jedynie aksjomatami, postulatami, czy poprzednio wykazanymi twierdzeniami. Na owe „luki logiczne” zwracali uwagę wyraźnie XX-wieczni logicy. Należy tu w każdym razie stwierdzić, iż kroki te najczęściej odwoływały się w jakiś sposób do intuicji przestrzennej. Można wymienić przynajmniej trzy typy sytuacji, w których miały miejsce odwołania do intuicji przestrzennej. Po pierwsze są to dowody, które można określić (niezbyt zgrabnie) dowodami „przez nałożenie”, czy „przez superpozycję”. Po drugie korzysta Euklides z intuicji przestrzennej, gdy stwierdza przecinanie się np. okręgów w dwóch punktach (bądź styczność w jednym), o ile sugeruje to rysunek, jak ma to miejsce już w drugim twierdzeniu Księgi I *Elementów*. Po trzecie natomiast z intuicji przestrzennej wydają się w jakimś sensie korzystać dowody, które odwołują się do jednostkowych własności diagramu ilustrującego twierdzenie.

W pierwszym typie „podejrzanego” rozumowania istotną rolę gra „nałożenie” na siebie dwóch uprzednio skonstruowanych figur, w celu wykazania ich identyczności. Euklides dowodzi w ten sposób co prawda jedynie trzech twierdzeń, pierwsze z nich jest jednak używane w *Elementach* wielokrotnie⁶³. Jest to czwarte twierdzenie pierwszej księgi:

⁶² Tamże, str. 197.

⁶³ Chodzi o twierdzenia I.4, I.8, oraz III.24 (Por. Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, New York, Oxford 1996, str. 29).

Tw. I.4. Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są równe dwom bokom drugiego trójkąta i jeżeli równe są też kąty zawarte między tymi równymi bokami, to podstawa jednego trójkąta będzie równa podstawie drugiego, trójkąty będą sobie równe oraz równe będą i pozostałe kąty zawarte między równymi bokami⁶⁴.



Rys.2.

Dowód zilustrowany jest przedstawionym powyżej rysunkiem. Zakłada się tu równość odpowiednio boków AB i DE , oraz boków AC i DF , jak również kątów pomiędzy bokami. Wykazana ma być równość boków BC i EF , oraz pozostałych par kątów. Oto pierwsza fragment dowodu (podaję jedynie jego część dla zobrazowanie ogólnej postaci rozumowania): „Jeżeli przyłożymy trójkąt ABC do trójkąta DEF , tak by punkt A pokrył się z punktem D , prosta zaś AB przystawała do prostej DE , to punkt B pokryje się z punktem E , ponieważ prosta AB jest równa prostej DE . Skoro dalej prosta AB przystaje do prostej DE , to również prosta AC przystawać będzie do prostej DF , ponieważ kąt BAC jest równy kątowi DEF . Również punkt C pokryje się z punktem F , gdyż prosta AC jest równa prostej DFStąd też cały trójkąt ABC przystawać będzie do całego trójkąta DEF i będzie mu równy”⁶⁵. Euklides korzysta tu z aksjomatu 8, zgodnie z którym „wielkości, które przystają do siebie są równe”⁶⁶; jak pisze Mancosu, aby zastosować aksjomat

⁶⁴ Euklides, *Elementy*, str. 47.

⁶⁵ Tamże, str. 48.

⁶⁶ Tamże, str. 46.

„koniecznym aby figury, bądź linie były nałożone, bądź zastosowane (*applied or superposed*) do siebie”⁶⁷. Trudno nie odnieść wrażenie, iż zaangażowana jest tu intuicja przestrzenna, a w istocie i mechaniczna. Ten element w dowodach Euklidesa zwrócił już uwagę filozofów epoki renesansu, o czym będzie jeszcze mowa w dalszej części pracy.

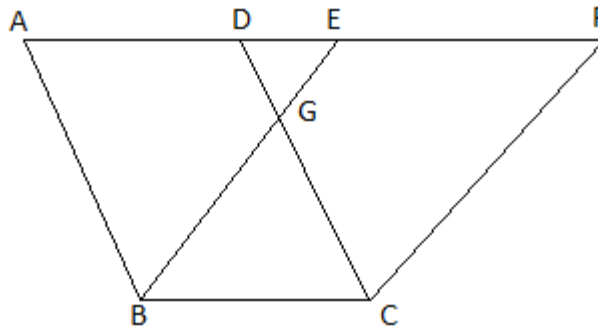
Jeśli chodzi o drugi element dowodów euklidesowych, pojawia się on już w dowodzie pierwszego twierdzenia. Dla jego wykazania konieczne jest, aby okręgi przecinały się w dwóch punktach. Stwierdzenie, iż tak rzeczywiście jest nie wynika jednak z aksjomatów ani postulatów Euklidesa. Jest ono oparte na intuicji przestrzennej, było też krytykowane przez wielu komentatorów Elementów, m.in. już od Proklosa⁶⁸.

W każdym z tych przypadków zawieramy intuicji przestrzennej, która podpowiada nam, albo wręcz narzuca odpowiednie fakty matematyczne. Dodatkowo pojawia się tu problem jednostkowości diagramów. Dowody są bowiem przeprowadzane w odwołaniu do konkretnych diagramów. Euklides dokłada wszelkich starań, by dowody wykazywały odpowiednich tez w ogólności, należy też podkreślić, że nie popełnia on żadnych błędów, nie dowodzi przez jednostkowość stosowanych diagramów twierdzeń fałszywych. Mimo to w wielu przypadkach dowody odnoszą się do takich własności przysługujących konkretnym narysowanym diagramom. Przytoczmy tu tylko jeden przykład takiego, a mianowicie twierdzenia 35 z pierwszej księgi⁶⁹. Głosi ono, iż każde dwa równoległoboki, które są ograniczone tymi samymi prostymi równoległymi, oraz posiadają jedną podstawę wspólną, mają takie samo pole. Dowód przeprowadzony jest w nawiązaniu do przedstawionego poniżej rysunku:

⁶⁷ Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 29.

⁶⁸ Por. Saito, K., *Reading ancient...*, str. 806.

⁶⁹ Twierdzenie to przywołują L. Hodgkin, jak i J. Mumma, do których analiz będę się tu odwoływał. Dowód twierdzenia tłumaczę za *Proofs, Picture, and Euclid*, J. Mummy (str. 265).



Rys. 3.

Dowód:

Niech $ABCD$ oraz $EBCF$ będą równoległobokami posiadającymi wspólną podstawę BC , oraz których boki równoległe do BC zawierają się w prostej AF (and in the same parallels AF, BC). Jako, że $ABCD$ jest równoległobokiem, AD równe jest BC (tw. 34). Podobnie, EF równe jest BC . Stąd AD jest równe EF (aksjomat 1). Dwie wielkości równe tej samej wielkości są równe między sobą, stąd AE jest równe DF (aksjomat 2). Stąd, iż $ABCD$ jest równoległobokiem wnosimy znów, iż AB jest równe DC (tw.34), oraz że kąt EAB jest równy kątowi FDC (tw. 29). Stąd, iż trójkąty takie, że dwa boki jednego z nich są równe dwóm bokom drugiego, oraz równe są kąty zawarte między nimi, wiemy, iż trójkąty EAB oraz FDC są sobie równe (tw. 4). Odejmując trójkąt EDG od każdego z tych trójkątów, mamy, iż trapez $ABGD$ jest równy trapezowi $EGCF$ (aksjomat 3). Jeśli dalej dodamy do każdego z nich trójkąt GBC , otrzymamy, iż $ABCD$ jest równy $EBCF$ (aksjomat 2).

Przyjrzyjmy się nieco bliżej powyższemu dowodowi. Rozumowanie odwołuje się oczywiście do rysunku. W szczególności, punkt G jest „zdefiniowany”, czy określony, jedynie za jego pomocą. Poszczególne kroki dowodu odwołują się do takiego a nie innego położenia tego punktu, tzn. do faktu, iż CD oraz BE przecinają się w punkcie G , leżącym pomiędzy równoległymi BC oraz AF (tak, jest to pokazane na diagramie). W szczególności na takim położeniu punktu G oparta jest obserwacja, iż DE zawarte jest w AD , która to obserwacja

służy do wykazania, iż AD jest równe EF ⁷⁰. Jak zauważa więc Hodgkin, dowód nie byłby poprawny, gdyby punkt G był w innym miejscu⁷¹.

Czy powyższe rozważania dowodzą, iż Á. Szabó nie miał racji podkreślając anty-wizualny charakter rozumowań euklidesowych? Zaczniemy od uwag niejako wspierających ocenę Á. Szabó. Otóż wiele wskazuje na to, że Euklides rzeczywiście dążył do wyrugowania z *Elementów* odwołań do danych wzrokowych. Można tu wskazać np. na nie-wizualny, a w szczególności nie-mechaniczny charakter niektórych definicji. Jak pisze Roman Murawski, „w definicjach stara się Euklides uchwycić głównie to, co jest stałe, niezmiennie”⁷². Również Sir TH. L. Heath, redaktor najbardziej chyba znanego anglojęzycznego wydania *Elementów*, twierdził, iż celem definicji linii prostej było wyjaśnienie bez jakiegokolwiek odwołania do zmysłu wzroku, co znaczyło być prostą⁷³. Euklides mógł przecież, jak podkreśla Szabó, zdefiniować linię jako „ślad punktu”, a linię prostą jak „jednolity i niezakłócony przebieg (*undeviating flow*)”. Autor *Elementów* unika więc intuicji mechanicznych – można ogólnie powiedzieć, iż skłaniał się raczej ku statyczno-eleackiej koncepcji geometrii⁷⁴. Z drugiej strony wiele definicji odwołuje się w dużym stopniu do intuicją przestrzenną (choć niekoniecznie mechaniczną). Jak podkreśla Ken Saito, definicja linii w ogóle („Linia to długość bez szerokości”⁷⁵) jest oparta na „rodzaju intuicji ciągłości”, nie jest rozumiana jako zbiór punktów, jak ma to miejsce dzisiaj⁷⁶.

Należy dalej podkreślić, iż ideałem matematycznym była dla Euklidesa niewątpliwie metoda dedukcyjna. Prawdziwość twierdzeń miała mieć źródło przede wszystkim w aksjomatach, a nie w jakimś akcie „widzenia” prawdy w efekcie oglądu rysunku. Na potwierdzenie tego faktu (i dla przeciwwagi dla powyższych przykładów twierdzeń wspierających się na intuicji przestrzennej) można zwrócić

⁷⁰ Mumma, J., *Proofs...*, str. 265.

⁷¹ Por. Hodgkin, L., *A History...*, str. 37.

⁷² Murawski, R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, str. 43.

⁷³ Por. Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 313.

⁷⁴ Por. Murawski, R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, str. 43.

⁷⁵ Euklides, *Elementy*, str. 44.

⁷⁶ Saito, K., *Reading ancient...*, str. 806. Saito podkreśla, że można to wytłumaczyć tym, iż linia była dla matematyków greckich zupełnie innym obiektem niż punkt, nie było ona sprowadzalna do punktów choćby dlatego, że ten ostatni nie miał jej zasadniczej własności - rozciągłości.

uwagę na liczne twierdzenia *Elementów*, które wydają się być wizualnie oczywiste, są jednak ściśle dowiedzione w oparciu o aksjomaty i postulaty. Wydaje się też, że Euklides był świadom zagrożeń płynących ze stosowania diagramów i starał się swoje dowody uczynić jak najbardziej ogólnymi. Ken Saito pisze na przykład, „nie sądzę, aby Euklides, rysując dla swoich twierdzeń geometrycznych jednostkowe (*over-specific*) rysunki, nie miał na uwadze ogólności. Przeciwnie, uważam, iż dążył do zapewnienia ogólności, ale w bardzo odmienny sposób, niż może się nam to wydawać”⁷⁷.

Podsumowując powyższe rozważania, wydaje się, że niełatwo jest jednoznacznie ocenić rolę diagramów i intuicji przestrzennej w rozumowaniach euklidesowych. Z jednej strony wiele wskazuje na to, iż Euklides unikał „wizualizowania” w poszczególnych krokach dowodowych. Z drugiej jednak strony wiele rozumowań korzysta z faktów wizualnych, bądź też z poszczególnych cech jednostkowych diagramów. Nie wydaje się też uzasadnionym teza, iż ideałem Euklidesa byłoby wyrugowanie z dowodów diagramów jako niosących z sobą ryzyko błędów w rozumowaniu i związanych ze swojej natury z empirycznymi rozumowaniami. Wydaje się, że diagram był w *Elementach* używany nie jako „zło konieczne”, ale jako nieusuwalny składnik rozumowania, a nawet pewnym sensie nawet przedmiot, którego ono dotyczy (o czym będzie jeszcze mowa w dalszej części pracy).

W ramach podsumowania spróbujmy nawiązać znów do stanowiska Á. Szabó i zadać pytanie: na ile można mówić o obecności wizualnych rozumowań (*visual/empirical arguments*) w *Elementach*? Należałoby dokładniej przyjrzeć się pytaniu, czym mogło by być takie wizualne rozumowanie. Można tu wymienić następujące możliwości:

⁷⁷ Saito, K., *Reading ancient...*, str. 820. Saito sugeruje mianowicie, iż specyficzny styl Euklidesa, unikający nadawania obiektom takim jak pola czy objętości, a nawet wielkościom arytmetycznym rozważanym w dowodzie, konkretnych wartości liczbowych, jest wyrazem dążenia Euklidesa do większej ogólności wywodu (por. tamże, str. 806, 820).

1) rozumowanie, w ramach którego korzysta się z pojęć zdefiniowanych w sposób nawiązujący do intuicji (choć intuicje te niekoniecznie muszą grać istotną rolę w samych rozumowaniach)

2) rozumowanie które opiera się na kształcie i charakterystykach diagramu jako na materiale dowodowym, tzn. dla którego stanowią one pewien rodzaj wizualnego danych (*visual evidence*). W przypadku takich rozumowań (dowodów), prawdziwość wykazywanego twierdzenia w jakimś stopniu wynika z wizualnego doświadczenia; można również powiedzieć, nawiązując do sformułowań Á. Szabó, iż jest ona ukazana (*shown*), bądź uczyniona widzialną.

3) rozumowania, które zmuszają czytelnika do wyobrażenia sobie czegoś, co nie jest widoczne na samym diagramie, odwołują się na przykład do intuicji mechanicznych

4) rozumowanie odwołujące się do pewnych konkretnych własności jednostkowego diagramu będącego jego ilustracją. Odwołania te powodują, iż dowód nie jest zrozumiały bez dostępnego diagramu.

5) rozumowanie, które korzysta z diagramu jako środka heurystycznego, rodzaju reprezentacji, która wspomaga zrozumienie dowodu, ale nie gra w nim istotnej roli.

Rozumowania pierwszego rodzaju pojawiają się z pewnością u Euklidesa – są zresztą cechą charakterystyczną geometrii aż do końca XIX wieku. Wydaje się, że Euklides próbuje unikać wizualnych rozumowań w drugim sensie. Jak wspominałem, nie zawsze mu się to jednak udawało⁷⁸. Tym bardziej rozumowania w trzecim sensie były przez Euklidesa unikane, choć tu również należy wymienić wspomniane tw. I.4, które wydaje się nawiązywać do pewnych intuicji mechanicznych. W *Elementach* bardzo często pojawiały się rozumowania czwartego typu. Nie wydaje się przy tym, aby Euklides uważał je za w jakiś sposób

⁷⁸ Przypomnijmy, że rozumowanie tego rodzaju przeprowadzone było w *Menonie*.

wadliwe. Nie wydaje się również, aby był gotów uznać, iż rozumowania takie są w jakikolwiek sposób empiryczne. Ostatni punkt wyraża powszechne współcześnie stanowisko odnośnie roli diagramów w dowodach. Nie wyraża on adekwatnie roli diagramów w rozumowaniach euklidesowych, które przecież w większość przypadków są bez diagramu niezrozumiałe.

Na koniec dodajmy kilka słów o arytmetyce *Elementów*. Niezależnie od tego, jak ocenimy rolę doświadczenia wizualnego w rozumowaniach geometrycznych, z pewnością można powiedzieć, że arytmetyka opisana w *Elementach* (jak również szerzej, arytmetyka grecka) oddalała się od jakkolwiek rozumianych wizualizacji. Można tu przytoczyć choćby dowody twierdzeń ze IX księgi *Elementów*; są to np. słynny dowód istnienia nieskończonej ilości liczb pierwszych, czy dowody dotyczące prostych własności liczb parzystych i nieparzystych (np. „różnica liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta”). Jak podkreślają Á. Szabó oraz R. Torretti, dowody tych twierdzeń w ogóle nie korzystają z rysunków w rozumowaniu. Reprezentacja poszczególnych liczb za pomocą odcinków nie oddałaby istoty tych dowodów. Pozostając przy temacie arytmetyki, dodajmy, iż jedną z pierwszych oznak wyzbycia się odwołań do treści wizualnych w dowodach było, według R. Torrettiego, wykazanie istnienia liczb niewymiernych. Podkreśla on, że gdyby greccy matematycy nie rozwinęli niewizualnych metod dowodów (w szczególności arytmetycznych), tej, zdaniem Torrettiego, „metody potężnego (*forceful*), a jednocześnie nieintucyjnego myślenia, (...) nie mogliby nigdy wykazać, że istnieją niewspółmierne wielkości, takie jak, na przykład, pary odcinków, które nie mogą być całkowitymi wielokrotnościami tego samego jednostkowego odcinka, niezależnie od tego, jak małą będzie miał długość”⁷⁹.

W tym punkcie zostawiam analizę *Elementów* Euklidesa. Wróć do nich w drugiej części pracy, w której przyjrę się pewnym współczesnym ujęciom roli

⁷⁹ Torretti, R., *Philosophy of geometry...*, str. 3. Wiele problemów arytmetycznych jest rzeczywiście bardzo oddalonych od intuicji przestrzennej – jak np. odróżnić liczbę parzystą od nieparzystej, liczbę 87 od 88 za pomocą rysunków? Dodajmy, że powyższe odnosi się do reprezentacji liczb jako odcinków – w drugiej części pracy mowa będzie o reprezentacji liczb za pomocą dyskretnych obiektów, jak koła, czy kropki. Taka reprezentacja umożliwia wizualne zobrazowanie pewnych prostych twierdzeń arytmetycznych. Grecy jednak, o ile mi wiadomo, liczb w ten sposób nie reprezentowali.

diagramów w dziele Euklidesa. Autorzy, jak R. Netz, J. Mumma czy K. Manders, próbowali pokazać, że nawiązania do diagramów były w *Elementach* dokonywane uważnie i w sposób nie prowadzący do błędów. W tym celu dokonali oni rekonstrukcji rozumowań euklidesowych, mając przy tym m.in. na celu ukazanie, czemu dowody euklidesowe zawdzięczają swoją poprawność. Prace wspomnianych autorów wpisują się we współczesny nurt w filozofii matematyki, który bada rolę wizualizacji w poznaniu matematycznym, którego analiza jest przedmiotem drugiej części niniejszej pracy, stąd dopiero w tej części pracy będą one omówione. Przyjrzyć się tam głównie jednej ze współczesnych rekonstrukcji rozumowań euklidesowych, sformułowanej przez Johna Mumme.

1.3. Konstrukcja jako metoda pokazania istnienia obiektów matematycznych

Warto tu dodać kilka uwag o konstrukcjach geometrycznych w matematyce greckiej, a dokładniej o ich związku z istnieniem obiektów matematycznych. Zwróćmy tu uwagę jedynie na kilka problemów. Otóż można spotkać się z poglądem, iż dla matematyków greckich istnienie obiektu matematycznego wynikało z możliwości jego konstrukcji. Problemy związane z możliwością wykonania prostych konstrukcji za pomocą jedynie linijki i cyrkla poszczególnych obiektów geometrycznych były w istocie charakterystyczne dla greckiej geometrii. Znane są trzy wielkie problemy konstrukcyjne podwojenie sześcianu, trysekcja kąta i kwadratura koła. W *Elementach* Euklidesa figury geometryczne powstają zgodnie z metodami określonymi w postulatach. Jednak konstrukcja wydaje się procesem empirycznym, praktycznym. Jej wytwór – rysunek – jest przedmiotem fizycznym. W ten sposób o istnieniu pewnych obiektów matematycznych możemy się przekonać (przynajmniej częściowo) drogą empiryczną, tzn. za pomocą percepcji połączonej z wykonaniem pewnych czynności. Czy można więc powiedzieć, że typ

istnienia obiektu geometrycznego, który wynika z konstrukcji ma więc jakiś empiryczny charakter?

Zaznaczmy najpierw, iż nie można zignorować roli analizy intelektualnej w procesie konstrukcji. W *Elementach* na przykład możliwość konstrukcji poszczególnych obiektów wynika z postulatów, przekonujemy się więc o niej na mocy dedukcji. Dowodzona jest możliwość wykonania nawet bardzo prostych konstrukcji, jak narysowania trójkąta, poprowadzenia odcinka o długości równej długości danego odcinka, itd., których przeprowadzenie wydaje się wizualnie oczywiste. Można więc powiedzieć, iż nie wystarcza tylko „patrzeć”, aby dowiedzieć się, iż dana konstrukcja możliwa jest do wykonania.

Jednak pewien empiryczny element pozostaje obecny w greckich konstrukcjach geometrycznych. Dla dowodu istnienia, rozumianego jako konstrukcja, nie starcza przekonanie się okiem rozumu, trzeba wykonać rysunek. Jest to w pewnym stopniu problem dla platonika, dla którego rysunek pozostaje zawsze częścią dostarczającego jedynie mniemań świata fizycznego, który oddalony jest ze wszech miar od istnienia „rzeczywistego”, czyli sposobu, na jaki istnieją platońskie idee. Jak stwierdza Szabó, „idea, iż konstrukcja geometryczna może stanowić dowód istnienia była zupełnie obca Platonowi. W ostatecznym rozrachunku, takie konstrukcje są przeprowadzane w dziedzinie przedmiotów zmysłowych, a Platon uważał, iż ‘istnienie’ ma inną naturę (*ist to be found elsewhere*)”⁸⁰. Dalej węgierski historyk matematyki stwierdza, iż dla filozofów, którzy pozostawali pod wpływem Platona oraz Eleatów, „pozostawało wątpliwym, czy figury geometryczne rzeczywiście ‘istniały’, czy też ich istnienie było zaledwie ‘złudzeniem’, bądź też przedmiotem ‘wiary’”⁸¹. Należy zaznaczyć, że mimo powyższych uwag, to właśnie neoplatonik Proklos uważał, że „konstrukcje w pierwszych trzech twierdzeniach [*Elementów*] służą jako rodzaj dowodu istnienia”⁸². Takie ujęcie było przez wiele lat często spotykane. Jak podkreśla Ken Saito, dopiero od ok. 25 lat ten dogmat ten jest podważany, a właściwie odrzucony,

⁸⁰ Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 319. Szabó przytacza tu poglądy A. Frajesa, z którymi się jednak, jak dalej podkreśla, w pełni zgadza.

⁸¹ Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 321. Szabó nawiązuje tu do greckiego pojęcia *doxa*, pełniącego istotną rolę w epistemologii Platona, do czego przejdę dalej.

⁸² Saito, K., *Reading ancient...*, str. 808.

zgodnie ze stwierdzeniem, iż „problem istnienia nie jest zawsze powiązany z konstrukcją, ani też konstrukcja nie służy zawsze dowodom istnienia”⁸³.

Dodajmy, że kwestia, które środki są dopuszczalne przy wykonywaniu konstrukcji, była w starożytności przedmiotem sporu (przynajmniej w pewnych okresach). Na kształt kanonu metod konstrukcyjnych jako ograniczony do stosowania cyrkla i linijki miał zapewne silny wpływ Platon⁸⁴. W IV p.n.e. spór o rozumienie terminu „konstruować” był bardzo silny, dzieląc matematyków na dwa stronnictwa (szerszy wachlarz metod konstrukcyjnych dopuszczał na przykład Archytas z Tarentu)⁸⁵. Jeśli łączyć istnienie obiektów geometrycznych z możliwością ich konstrukcji, to spory ontologiczne w geometrii stają się bezpośrednio związane ze sporami metodologicznymi.

1.4. Kategoria przestrzeni w matematyce greckiej

Warto wreszcie wspomnieć o bardzo istotnym od XVII w. problemie przestrzeni i jej roli dla epistemologii i ontologii geometrii. Pytanie o miejsce kategorii przestrzeni w matematyce greckiej pojawia się naturalnie, przynajmniej w kontekście, znanego nam dziś stanu i dalszego rozwoju geometrii. W rzeczywistości jednak trudno jest dokładniej określić, jak w epistemologii geometrii starożytnych Greków umiejscowić pojęcie przestrzeni. Po pierwsze nie wskazuje na to, aby geometria była przez starożytnych rozumiana jako nauka dotycząca przestrzeni jako swojego przedmiotu. Co więcej, jak podkreśla Roberto Torretti, w starożytnej grece, ani w filozofii greckiej nie funkcjonowało pojęcie przestrzeni, rozumiane w sposób podobny do któregoś ze współczesnych nam jego znaczeń. Podkreśla on, że mimo, iż greckie słowa *topos* (miejsce), czy *kenon* (pustka) tłumaczy się czasem jako „przestrzeń”, nie oznaczały one tego, co dziś

⁸³ Saito, K., *Reading ancient...*, str. 809.

⁸⁴ Por. Kordos, M., *Wykłady z historii matematyki*, SCRIPT, Warszawa 2006, str. 63.

⁸⁵ Por. Tamże, str. 60.

najczęściej rozumiemy przez „przestrzeń”⁸⁶. Starożytna (jak i średniowieczna) filozofia, ani matematyka, nie używała w szczególności pojęcia przestrzeni w takim znaczeniu, które pojawiło się u Newtona, tzn. jako pustego, niezmiennego, pojemnika w którym umieszczone są ciała fizyczne⁸⁷. Według R. Torrettiego „miejsce” – *topos* – było na przykład rozumiane relatywnie do ciała fizycznego, które je zajmuje, tzn. było w starożytnej grece rozumiane, jako miejsce położenia ciała. Pojęcie *kenon* (jeśli używane w kontekście filozoficznym, np. przez atomistów) było z kolei rozumiane raczej jako próżnia, która znajduje się *pomiędzy* ciałami, niż pojemnik, w którym te ciała są umiejscowione⁸⁸.

Dodajmy, że zdecydowana większość filozofów starożytnych (jak i średniowiecznych) przyjmowała, że świat fizyczny jest skończony i ograniczony; stąd geometria euklidesowa nie mogła być uznana za prawdziwą o świecie fizycznym – choćby dlatego, że w takim świecie linie proste nie mogą być w dowolnym stopniu przedłużane. Można więc powiedzieć, że mimo częściowo empiryczno-pragmatycznych korzeni geometrii, jej powiązanie z tym, co wizualne nie świadczyło, według Greków, o jej empirycznym charakterze jako nauki o przestrzeni fizycznej.

1.5. Diagramy w filozofii matematyki Platona

Filozofia Platona nie jest zazwyczaj kojarzona z rozważaniami dotyczącymi reprezentacji przestrzennych w poznaniu matematycznym. Stanowi, ona jak wiadomo, paradygmatyczny przykład skrajnego aprioryzmu w odniesieniu do matematyki, umiejscawiając jej przedmiot w niematerialnym świecie idei, oraz przyznając jej odpowiadającą osobną władzę poznawczą. Ta właśnie okoliczność skłania jednak do zadania kilku pytań. Jak pogodzić ową pozamysłową, platońską,

⁸⁶ Mam tu na myśli Newtonowskie pojęcie przestrzeni, o którym więcej napiszę w dalszej części.

⁸⁷ Torretti, R., *Philosophy of geometry...*, str. 25-26.

⁸⁸ Tamże, str. 26-27.

naturę idei, oraz matematyki w ogóle z wszechobecnymi w geometrii, postrzegalnymi zmysłem wzroku, diagramami? Czy doświadczenie fizyczne diagramu może nam dać jakąś wiedzę, czy też jest ze swej natury złudne? Jaką rolę w uzyskiwaniu poznania matematycznego (w szczególności – geometrycznego) ma u Platona-idealisty zwykły fizyczny diagram? Jedną z charakterystycznych elementów myśli Platona jest przecież teza, iż poznanie zmysłowe dostarcza jedynie złudzeń i nietrwałych, przemijających obrazów, podczas gdy wiedza prawdziwa była wiedzą o tym, co niewidzialne i do czego dostęp mamy jedynie przy pomocy rozumu. Odpowiedzi na wspomniane pytania można, według mnie, szukać w specyficznej, naturze matematyki, jako nauki pośredniczącej pomiędzy światem idei i światem fizycznym. To na ile można rzeczywiście przyznać taki status, oraz to jakie jest w ogóle jej miejsce w dualnym platońskim świecie, jest kwestią w pewnej mierze otwartą na interpretacje. Będę starał się pokazać, iż można znaleźć w pracach Platona znaleźć potwierdzenie takiego ujęcia matematyki, oraz że jest ono ściśle związane ze statusem wizualizacji. Wydaje się przy tym, że można wyróżnić dwa znaczenia, w których matematykę można postrzegać jako naukę pośredniczącą. Pierwszą jest pośredniość epistemologiczna, a dowiadujemy się o niej z przedstawionej w *Państwie* metaforze odcinka. Po drugie mowa jest o pośredniości ontologicznej, związanej ze specyficzną naturą obiektów matematycznych (idei), które cechuje wielość.

Przyjrzyjmy się więc w pierwszej kolejności platońskiemu *Państwu*. W słynnej metaforze odcinka, dokonuje Platon podziału władz poznawczych. Przypomnijmy, krótko, w jaki sposób ów podział jest przeprowadzony: górną, dłuższą część odcinka obejmuje *gnosis* – wiedza o przedmiotach idealnych, a dolną, krótszą *doxa*, czyli wiedza o świecie widzialnym zmysłowo. *Gnosis* jest podzielona na dwa odcinki – *nus*, wiedzę o idei dobra, piękna, duszy czy np. trójkąta ogólnie, wiedzę którą daje nam głównie bliżej tu nie omawiana dialektyka, oraz *dianoię* – wiedzę o obiektach matematycznych. *Doxa* jest natomiast podzielona na *pistis*, wiedzę o konkretnych widzialnych przedmiotach i *eikasia* – o ich odbiciach takich jak cienie czy obrazy⁸⁹. Dowiadujemy się zatem, że

⁸⁹ Platon, *Państwo*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 2001, 509D-511E.

przedmioty matematyki są przedmiotami myślowymi – jednak ich poznanie różni się od poznania dialektycznego. Tak pisze Platon ogólnie o poznaniu matematycznym: „ci, którzy się geometriami i rachunkami, i takimi tam rzeczami bawią, zakładają to, co nieparzyste i parzyste, i kształty, i trzy postacie kątów, i inne rzeczy tym pokrewne, zależnie od tego lub owego zdania, bo niby już wiedzą, robią z tego treść założeń i uważają za właściwe ani sobie samym, ani drugim nie rozwijać i nie uzasadniać już tych rzeczy w żaden sposób, bo one są każdemu jasne”⁹⁰.

Matematyka posługuje się więc, w rozumieniu Platona, kategoriami parzystości i nieparzystości (arytmetyka), oraz kształtami i postaciami kątów (geometria). Poznając matematykę, jej adepci posługują się rysowanymi bądź zapisywanymi obiektami, ale „oni się nimi posługują znowu tylko tak jak obrazami, a starają się dojrzeć tamte *rzeczy same*, których nikt nie potrafi dojrzeć inaczej, jak tylko myślą”⁹¹. Dalej pisze Platon również, iż „to, że posługują się przy tym postaciami widzianymi i mówią o nich, jednakże nie te widziane postacie mając na myśli, tylko tamte, do których widziane są tylko podobne”⁹². Poznanie matematyczne nie jest zatem dla Platona poznaniem bezpośrednim – musi posługiwać się „obrazami” oraz założeniami. Wspiera się ono również na hipotezach – ale rozumianych jako „szczyty i początki” (w przeciwieństwie do hipotez dialektyki). Wspomniane „rzeczy same” to idee – trójkąta, czy też liczby. Matematyk nie poznaje ich jednak bezpośrednio - „dusza się założeniami pewnymi musi posługiwać, kiedy je badać zechce, i nie do szczytu i początku wtedy zmierza, bo nie potrafi wyjść z tego, w czym tkwi, i wznieść się ponad założenia; jako obrazów używa wtedy dusza tych przedmiotów, które się odwzorowują w jeszcze niższych, bierze je za rzeczy same i ceni je jako naoczne i wyraźne”⁹³.

Podsumowując, platońskie poznanie matematyczne dotyczy pozafizycznych idei (rzeczy samych), nie daje jednak o nich wiedzy bezpośredniej. Jest tak, ponieważ posługuje się obrazami (czyli np. rysunkami, diagramami), oraz

⁹⁰ Tamże, 510C.

⁹¹ Tamże, 510E.

⁹² Tamże, 510D.

⁹³ Tamże, 511A.

posługuje się hipotezami. Te pierwsze są niejako odbiciami idei, będąc do nich w jakimś sensie podobne (choć ich status ontologiczny jest zupełnie inny). W tym też sensie geometria jest „pośrednia”, pomiędzy

U Platona można się również doszukiwać innego, bardziej ontologicznego aspektu pośredniości matematyki. Wydaje się, że dużą rolę w zwróceniu na niego uwagę badaczy, miał następujący fragment *Metafizyki* Arystotelesa: „Platon twierdził (...), że obok świata zmysłowego oraz Idei istnieją przedmioty matematyki, które zajmują pośrednią pozycję, różniąc się od rzeczy zmysłowych tym, że są wieczne i niezmienne, a od Idei tym, że jest ich wiele podobnych, podczas gdy każda Idea jest zawsze jedna”⁹⁴. Byty matematyczne w platońskim rozumieniu dzielą więc z Ideami większość ich właściwych cech⁹⁵. Historyk filozofii Giovanni Reale, syntetyzując teorię idei, podaje 6 takich właśnie podstawowych własności idei: inteligibilność, niecielesność, bytowość w sensie pełnym (idee są bytem, który istnieje naprawdę), niezmienność, samoistność i jedność⁹⁶. Zgodnie z Arystotelesem, byty matematyczne posiadają wszystkie cechy idei poza tą ostatnią, co czyni je bliższym obiektom fizycznym. Wydaje się, że ujęcie takie znajduje potwierdzenie w pismach Platon; zacytujmy choćby następujący fragment *Państwa*: „każde z osobna [tzn. każda z idei] jest czymś jednym, ale dzięki temu, że się to wiąże z działaniami i z ciałami, i ze sobą nawzajem [z innymi ideami], wszędzie się każde z nich naszej wyobraźni przedstawia jako wiele rzeczy”⁹⁷.

Spróbujmy zestawić te dwa ujęcia matematyki, jako pośredniczącej pomiędzy ideami a fizycznością. W *Państwie* istotną zasadą podziału świata inteligibilnego jest nie wielość lub jedność występowania obiektów matematycznych, ale bezpośredniość lub pewna pośredniość sposobu w jaki je poznajemy. Matematyka nie jest tam ściśle rzecz biorąc przedstawiona jako pośrednia pomiędzy zmysłowością światem idei – odpowiada jej raczej status

⁹⁴ Arystoteles, *Metafizyka*, 987 b.

⁹⁵ Trudnym interpretacyjnie aspektem tego fragmentu z Arystotelesa jest to, iż obiekty matematyczne nie są tu ideami, z czym wielu interpretatorów Platona jednak by się nie zgodziło. Nie ma tu jednak miejsca na dyskusję tego zagadnienia.

⁹⁶ Reale, G., *Historia filozofii starożytnej, Tom II*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2001, str. 91-92.

⁹⁷ Platon, *Państwo*, 475E- 476A.

ontologiczny i typ poznania właściwy rzeczom niematerialnym (choć „mniej doskonałego” typu niż Idea Dobra i poznanie dialektyczne). Wydaje się, że powiązania pomiędzy tymi dwoma ujęciami można szukać w uwagach na temat metodologii matematyki, tzn. sposobu w jaki jest ona faktycznie uprawiana, oraz uwagach dotyczących zastosowaniom matematyki.

Przyjrzyjmy się najpierw, co Platon pisał o zastosowaniach matematyki. W Księdze VII *Państwa* Platon zaleca, aby zajmować się nie matematyką, która służy kupcom, kramarzom, czy dla celów wojennych, matematyką, która dzieli jednostki, mnoży i wiąże je z ciałami fizycznymi. Matematyk-filozof powinien się przy tym zajmować jednostką, którą pojmuje się jako „zawsze równą każdej innej, i nie różniącą się od innej w najmniejszym stopniu, i nie mającą w sobie żadnej części” – o liczbach, „o których tylko myśleć można”⁹⁸. Również w *Filebie* rozróżnia Platon dwa rodzaje arytmetyki – stosowaną dla celów praktycznych oraz tą, którą zajmują się filozofowie. Ci pierwsi „zliczają jedności nierówne, jak na przykład dwa obozy i dwa woły, i dwie rzeczy najmniejsze, i dwie największe ze wszystkich. A drudzy za nic w świecie z nimi by nie poszli, jeżeliby ktoś nie przyjął jednostek nie różniących się niczym od siebie nawzajem, choćby ich była ilość nieprzebrana”⁹⁹.

Z drugiej strony w tej samej Księdze VII pisze Platon, jak się wydaje, bardziej o praktyce matematyków zajmujących się – jak dziś byśmy powiedzieli – matematyką czystą, tzn. nie ukierunkowaną na zastosowania. Platon wydaje się tu sugerować, że czynności i wyobrażenia związane z uprawianiem matematyki odciągają od matematyki uprawianej tylko dla poznania i zajmującej się tym, co „istnieje wiecznie”, a nie „co się kiedyś tam czymś staje i znowu ginie”¹⁰⁰. Matematycy bowiem „stwarzają wszystkie swoje słowa, jakby coś robili, i z praktycznego punktu widzenia mówią o kwadraturach i przedłużeniach, i o dokładaniu, i wszystko tak u nich brzmi”¹⁰¹. Język matematyki i sposób jej uprawiania tworzy więc pozór, iż wykonujemy pewne manipulacje na obiektach

⁹⁸ Tamże, 526A.

⁹⁹ Platon, *Fileb*, (w:) *Dialogi, Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 1999, 56E.

¹⁰⁰ Platon, *Państwo*, 527B

¹⁰¹ Tamże, 527A.

matematycznych¹⁰². Manipulacje dotyczą diagramów, wyobrażeń związanych z dodawaniem, mnożeniem oraz wszelkimi mechanicznymi intuicjami związanymi z matematyką. Stoi jednak w jawnej sprzeczności z właściwą naturą obiektów matematycznych. Ma to oczywiście bezpośredni związek z tym, co wspomniane było powyżej o specyficznej naturze *dianoï* – jako posługującej się obrazami obiektów matematycznych, które mają jednak (mimo pewnych podobieństw) od nich zasadniczo odmienny status ontologiczny¹⁰³.

Zwróćmy uwagę, że pojawia się tu pewien problem: czy „pośredniczący” aspekt matematyki, (związany z tym, iż jej obiekty nie są „jednościami” i poprzez to są bliższe obiektom fizycznym) jest bardziej związany z matematyką stosowaną, czy też z praktyką matematyków w zakresie matematyki czystej? W pierwszym przypadku obiekty matematyki stosowanej byłyby „wielkościami”, a czyste „jednościami”; w drugim przypadku obiekty matematyki czystej byłyby wielościami, a jednościami liczby wyższego „ponadmatematycznego” typu¹⁰⁴. Nie będę podejmował się odpowiedzi na to pytanie. Można jednak podjąć się następującej interpretacji Platon w zakresie natury matematyki czystej: wymiar praktyki matematyków związany z „wielością” jest związany właśnie z obrazami, którymi oni się posługują, czyli np. z diagramami. Diagramów takich jest wiele, są one podobne do przedmiotów fizycznych; własność bycia jednością miałby z kolei pojęcia *ogólne* – trójkąta w ogóle, czy liczby w ogóle. Te abstrakcyjne pojęcia ogólne są właśnie ideami, i można je uchwycić jedynie myślą.

Obraz roli różnego rodzaju reprezentacji obiektów matematycznych uzupełnia *List VII*, któremu dalej krótko się przyjrzę. Każdy przedmiot naszego

¹⁰² Por. Lloyd, G.E.R., *What was mathematics in the ancient world? Greek and Chinese perspectives*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 14.

¹⁰³ Jak pisze Szabó, „natura geometrii stoi w jawnej sprzeczności z językiem używanym przez geometrów” (Szabó, A., *The Beginnings...*, str. 312).

¹⁰⁴ Istnieje również inna interpretacja tego, czym są „czyste”, jednostkowe obiekty matematyczne. Reale pisze o nich (podkreślając, iż jest to trudna doktryna), że nie są to liczby matematyczne, ale *metafizyczne*, są one nie samymi liczbami, ale *istotą* liczb, nie utożsamiają się więc z liczbami pod względem ontycznym. Jako byty niematematyczne nie można ich także od siebie dodawać ani odejmować. Według Realnego, łatwiej naukę tę zrozumieć traktując liczby idealne jako pewne *relacje*, - w tych metafizycznych relacjach mają pozostawać do siebie wszystkie idee, i w tym sensie liczby idealne stanowią najbardziej pierwotną część struktury świata idei, będąc oczywiście poznawalne tylko przez dialektykę (zob. Reale, G., *Historia...*, str. 124-128).

poznania możemy rozważać na pięciu płaszczyznach. Trzy pierwsze to przedstawienia tego przedmiotu: „pierwszym jest nazwa, drugim określenie, trzecim obraz”¹⁰⁵; czwartym przedstawieniem jest wiedza o przedmiocie, jego umysłowe ujęcie, a piątym przedmiot sam. Owo czwarte ujawnienie jest tutaj tym, które określa sposób poznawania obiektów matematycznych. Jest to według Platona „wiedza, umysłowe ujęcie i właściwe mniemanie o rzeczy, (...) nie tkwi ono w dźwiękach mowy ani w kształtach materialnych, lecz tylko w duszy, co wskazuje, że jest czymś innym zarówno od istoty samego ‘koła’, jak też od wymienionych poprzednio trzech jego ujawnień”¹⁰⁶. Jaką rolę w poznaniu matematycznym przypisuje przy tym Platon trzem typom przedstawienia koła, a w szczególności ujawnienie trzecie? Uściślijmy najpierw za greckim filozofem, że „trzecim ujawnieniem jest koło, które się rysuje i ściera, lub to , które tokarz sporządza i które ktoś niszczy”¹⁰⁷. Narysowane koło, tak jak i inne jego przedstawienia odsłaniają jedynie *jakości* koła, a nie jego *istotę*. Są przez to niedoskonałe i niejasne przez co łatwo je obalić. W istocie, „każde (...) z owych czterech ujawnień rozpościera przed duszą, zarówno przy pomocy słowa, jak też i na faktach, to, do czego nie dąży ona wcale”¹⁰⁸. Czytamy również u Platon, iż „każde z kół, które w codziennym użyciu rysujemy, lub które tokarz sporządza, wykazuje w całej pełni to, co przeciwne jest zgoła ‘piątemu’ – we wszystkich punktach swych bowiem styka się z prostą, podczas gdy ‘koło’ jako takie, stwierdzamy, nie zawiera s siebie w ogóle, ani w mniejszej ani w większej mierze, czegoś, co mu z natury jest przeciwne”¹⁰⁹. Mimo to, co chciałbym tutaj mocno podkreślić, według Platona „jeżeli ktoś jakoś nie uchwyci owych czterech ujawnień tego wszystkiego [czyli zarówno bytów matematycznych jak barw, czy wartości moralnych] nigdy całkowicie wiedzy piątego ujawnienia nie stanie się uczestnikiem”¹¹⁰. Również analiza diagramu (w przypadku geometrii, w przypadku

¹⁰⁵ Platon, *List VII*, (w:) *Listy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, 34A-B.

¹⁰⁶ Tamże, 342C.

¹⁰⁷ Tamże, 342C. Zwróćmy tu uwagę, iż Platon w jednej linii wymienia diagram i konkretny fizyczny kształt, fizyczną interpretację pojęcia koła. Można to traktować jako argument za tym, iż

¹⁰⁸ Tamże, 343C.

¹⁰⁹ Tamże, 343A.

¹¹⁰ Tamże, 342E.

arytmetyki być może innego fizycznego przedstawienia idei matematycznych) jest więc koniecznym etapem w procesie poznania matematycznego.

Wydaje się, że Platon nie postuluje w powyższych rozważaniach, jakiejś zasadniczej różnicy pomiędzy geometrią i arytmetyką. W *Państwie* pisze Platon w jednej linii o kształtach oraz o tym co parzyste i nieparzyste jako obrazach, odbiciach idei. Wydaje się, że w cytowanych fragmentach nie można więc odnaleźć potwierdzenia idei, że to nie wyłącznie *wizualność* reprezentacji przestrzennych, oraz sposobu myślenia o przedmiotach geometrii przybliża ją do empirii (choć ona oczywiście również). Z fizycznością w równym stopniu, jak się wydaje, związana jest wielość, czy parzystość liczb. Również trzy ujawnienia pojęć matematycznych opisane w *Liście VII* – nazwa, definicja (określenie), oraz obraz – są przez Platona traktowane na równi. Na ich łącznym świadectwie opiera się dopiero możliwość uzyskania pełnego poznania matematycznego.

Warto wspomnieć, iż nie wszyscy interpretatorzy Platona zgodziliby się z takim ujęciem; można też doszukiwać się u Platona argumentów za tym, że geometria jest bliższa przedmiotów fizycznych niż arytmetyka. Tak argumentuje cytowany tu Árpád Szabó, który zwraca uwagę na fragment w *Timaiosie*, w którym Platon pisze, iż obok świata fizycznego oraz świata idei, „trzeci rodzaj istnieje. Jest nim zawsze przestrzeń”¹¹¹. Dalej czytamy, że „można ją bez pomocy zmysłów uchwycić za pomocą rozumowania gorszego gatunku, a wierzyć jej trudno”¹¹². Á. Szabó twierdzi też, że inne fragmenty dialogów platońskich – w szczególności *Państwa* – „potwierdzają fakt, że identyfikuje on ‘rozumowania gorszego gatunku’ z geometrią”¹¹³. Á. Szabó wnosi stąd, iż to geometria jest właściwą nauką pośredniczącą a jest tak po części dlatego, że jej przedmiotem jest przestrzeń. Trudno powiedzieć, czy taka interpretacja Á. Szabó jest uzasadniona. Dyskusyjne jest, na ile w platońskich rozważaniach dotyczących geometrii pojawia się rzeczywiście w istotny sposób kategoria przestrzeni.

Podsumowując, przypomnijmy przede wszystkim o dwóch głównych aspektach poznania geometrycznego. Po pierwsze geometria musi odwoływać się w swoich

¹¹¹ Platon, *Timaios*, (w:) *Dialogi. Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty, 1999, 52A.

¹¹² Tamże, 52B.

¹¹³ Szabó, Á., *The Beginnings...*, str. 311.

analizach do reprezentacji, czy przedstawień przestrzennych, stąd osiąga jedynie pośrednie poznanie idei. Po drugie reprezentacje przestrzenne są na poziomie ontycznym obiektami zupełnie odmiennymi od idei, w szczególności jest ich wiele oraz mogą być dowolnie tworzone i niszczone. Jest to przy tym związane ze statusem matematyki jako nauki pośredniej pomiędzy światem idei a światem fizycznym.

Dodajmy, iż wspomniany wcześniej tekst *Menona* pokazuje, że Platon doceniał rolę heurystyczną diagramów. Niejasne natomiast pozostaje pytanie o stopień (i naturę) podobieństwa pomiędzy diagramem i ideą. O ile rysunek powoduje, iż niewolnikowi „przypominają się” prawdy matematyczne, podobieństwo takie wydaje się zachodzić. Z drugiej strony obiekty matematyki są zasadniczo odmiennego rodzaju, niż obiekty fizyczne. Nie będę tu dalej rozstrzygał tej kwestii¹¹⁴.

Problem relacji pomiędzy diagramem a ideami pozostaje więc na gruncie filozofii Platona trudnym (jest on związany z ogólnym problemem relacji pomiędzy ideami i przedmiotami fizycznymi). Na koniec warto zauważyć, iż filozofia platońska przyczyniła się do rozpowszechnienia się wśród matematyków greckich wizji matematyki jako nauki statycznej, oddalonej od ruchu jak również od zastosowań. Stąd matematycy greccy pozostający pod wpływem Platona (a do takich należy, jak się wydaje, zaliczyć Euklidesa) unikali intuicji mechanicznych w rozumowaniach matematycznych.

1.6. Diagramy geometryczne w wybranych fragmentach pism Arystotelesa

Nie będę tu bliżej analizował miejsca reprezentacji przestrzennych w szerszym kontekście filozofii Arystotelesa. Warto zauważyć jednak kilka uwag

¹¹⁴ Przypomnijmy, że w *Liście VII* pisze Platon, iż reprezentacja przestrzenna odkrywa jakości obiektów, ale nie ich istotę.

metodologicznych, które Arystoteles poczynił odnośnie geometrii, jako nauki korzystającej z diagramów, czy reprezentacji przestrzennych. Arystoteles zauważa więc trudności i zagrożenia związane z rozumowaniami odnoszącymi się do rysunków. W szczególności zwraca uwagę, na to, że pewne cechy diagramów są istotne dla rozumowania, pewne natomiast „przypadkowe”. Taką własnością jest w wielu dowodach geometrycznych długość boków. Píše więc Arystoteles, że „w rysowaniu figur geometrycznych, choć nam wcale nie zależy na dokładnych wymiarach trójkąta, mimo to rysujemy go ze ściśle określonymi wymiarami”¹¹⁵. Wydaje się, że konieczność korzystania z reprezentacji przestrzennych w geometrii (a taką najpewniej przyjmował) uważał za jej słabość. W *Analitykach wtórych* pisze Stagiryta o wyższości wiedzy bardziej abstrakcyjnej nad wiedzą mniej abstrakcyjną. Jedną z charakterystyk tej pierwszej jest natomiast mniejsza ilość założeń: „ta nauka jest pewniejsza i wcześniejsza, która się opiera na nielicznych zasadach w porównaniu z nauką, wymagającą dodatkowych elementów, jak np. arytmetyka w porównaniu z geometrią. Przez ‘dodatkowe elementy’ rozumiem to, że np. jedność jest substancją bez położenia, natomiast punkt jest substancją posiadającą położenie; to ‘położenie’ jest właśnie dodatkowym elementem”¹¹⁶. „Położenie” obiektów geometrycznych można rozumieć jako ich przestrzenny charakter, to, iż muszą znajdować się „w jakimś miejscu”. Jest to warunek konieczny uprawiania geometrii, który stawia geometrię poniżej arytmetyki.

Dodajmy jednak również, że Arystoteles nie zgodziłby się z pewnością z poglądem, iż przedmiotem geometrii, jej dowodów, definicji, itd., jest sam fizyczny diagram. W *Analitykach wtórych* czytamy, co następuje: „nie są też hipotezy geometry fałszywe, jak utrzymują niektórzy, twierdząc, że nie wolno się posługiwać fałszem, a geometra posługuje się fałszem, gdy dowodzi, że linia jest długa na jedną stopę, gdy nie jest taka, albo że linia jest prosta, gdy nie jest prosta.

¹¹⁵ Arystoteles, *O pamięci i przypominaniu sobie*, za: Kulpa, Z., *Jednostkowość diagramów*, 2006, źródło: <http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob10pdf>, str. 55. Jak podkreśla Zenon Kulpa, przekład polski nie do końca oddaje intencji Arystotelesa, który podkreślał, że w wielu dowodach geometrycznych nie korzystamy w żaden istotny sposób z faktu, że bok narysowanego trójkąta ma taką, czy inną długość – jest to fakt w dowodzie w zupełności pomijalny. Ten nacisk na rolę rysunku w dowodzie geometrycznym ma być, według Kulpy, uwzględniony w tłumaczeniu angielskim.

¹¹⁶ Arystoteles, *Analityki wtóre*, 87a.

Jednakże geometra nie wyciąga wniosku z faktu istnienia konkretnej linii, o której mówi, lecz z tego, co ta linia symbolizuje¹¹⁷. Stagiryta krytykuje więc pogląd, zgodnie z którym właściwym przedmiotem geometrii są narysowane linie, oraz o nich właśnie prawdziwe są twierdzenia geometrii. Ważnym jest to, co diagram symbolizuje. Pytanie, co dokładnie symbolizuje diagram, a więc w istocie o przedmiot geometrii u Arystotelesa jest odrębnym pytaniem, którym nie będę tu się zajmował.

W ostatniej części rozdziału dokonam podsumowania kilku głównych charakterystyk greckiej matematyki, oraz filozofii matematyki, w zakresie stosowania przez nią diagramów. Obok podsumowania dokonanych już analiz, wspomnę o kilku kwestiach po raz pierwszy. Poniższe podsumowanie ma więc na celu oddanie ogólnego obrazu roli diagramów w poznaniu matematycznym w matematyce greckiej.

1) Ogromna większość twierdzeń i dowodów zapisanych w greckich dziełach matematycznych (w szczególności geometrycznych) odwołuje się do diagramów. Tekstu często nie można zrozumieć bez diagramu, ponieważ poszczególne kroki dowodowe do niego się odnoszą.

2) Mimo, że nie wszystkie (znane nam) rozumowania greckie odnoszą się do rysunków,

Grecy mieli tendencję do geometryzowania problemów matematycznych. Jak pisze Asper, „grecka matematyka jest prawie wyłącznie geometryczna”¹¹⁸

3) To, czy figury geometryczne jako takie można rozumieć jako przedmiot rozumowań geometrycznych jest w pewnym stopniu dyskusyjne. Wydaje się, że dla większości matematyków przedmiot matematyki można w większym stopniu

¹¹⁷ Tamże, 76b-77a.

¹¹⁸ Asper, M., *The two cultures...*, str. 114.

scharakteryzować jako analizę diagramu niż jako przekształcanie formuł. O ile jednak każdy diagram jest obiektem jednostkowym, a przedmiotem rozumowań były obiekty abstrakcyjne, raczej niż empiryczne, nie oznacza to empiryzmu w starożytnej filozofii geometrii¹¹⁹.

4) Grecka matematyka dążyła do ideału wiedzy ogólnej i oderwanej od empirii¹²⁰. Wielu greckich matematyków wyraźnie oddzielał zastosowania matematyki od matematyki „czystej”¹²¹. Dowód dotyczy w matematyce antycznej wyidealizowanych, abstrakcyjnych obiektów, nie polega na przykład na mierzeniu konkretnych własności rzeczywistych obiektów¹²². Empirycznego charakteru nie miała władza poznawcza, którą dziś nazwalibyśmy intuicją przestrzenną, ani też geometria nie wykazywała cech nauki empirycznej jako nauka o przestrzeni fizycznej.

5) Matematycy greccy nie opierali się na wizualnych danych (*visual evidence*) jako materiale dowodowym. W dojrzałej matematyce greckiej nie było miejsca na „odczytywanie” faktów z diagramu, wnioskowanie na bazie wizualnie postrzegalnych własności diagramu. Potwierdza to fakt, iż dowodzone były nawet „wizualnie oczywiste” twierdzenia. Można tu podać przykład Archimedesesa, który za pomocą wyrafinowanego rozumowania pokazuje, że obwód wielokąta opisanego

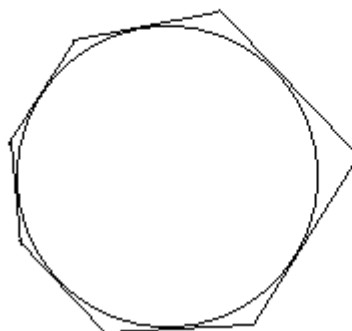
¹¹⁹ Wydaje mi się, iż dyskusyjnym jest, czy Grecy uważali rysunki za tylko pewną formę reprezentacji obiektów matematycznych (jedną z możliwych). Wydaje się, że trójkąt był dla nich w pierwszym rzędzie trójkątem postrzegalnym zmysłem wzroku, a nie zbiorem punktów, czy jakkolwiek inaczej, pozawizualnie, określonym obiektem matematycznym.

¹²⁰ Nie ulega również wątpliwości, że Grecy dążyli do ideału nauki obiektywnej, Spisana grecka matematyka posiadała wiele cech charakterystycznych dla matematyki współczesnej – bezosobowy styl, w którym pisane były teksty matematyczne, standaryzacja języka i technik dowodowych, wyłączenie kontekstu odkrycia (por. Asper, M., *The two cultures...*, str. 118, 126). W ten sposób tworzone były „autonomiczne teksty, tzn. teksty, które były w stanie wykluczyć same w sobie wszystkie nieporozumienia, były w stanie zmusić czytelników do konsensusu poprzez zrozumienie (*realizing*) prawdy matematycznej” (tamże, str. 126). Nie powodu aby nie sądzić, iż również diagram grał w tak rozumianej nauce, istotną rolę.

¹²¹ Istnieje słynna anegdota, zgodnie z którą Euklides miał zaoferować dwa obole i odesłać osobę, która chciała uczyć się geometrii dla zysku. Dodajmy, iż uważa się czasem, iż na oddalenie matematyki od zastosowań (przynajmniej w deklaracjach) miała wpływ filozofia Platona.

¹²² Asper, M., *The two cultures...*, str. 118.

na okręgu ma zawsze dłuższy obwód, niż ów okrąg¹²³. Archimedes podaje tutaj ścisły dowód, mimo, że aby się o tym przekonać wystarczy rzucić okiem na poniższy diagram:



Rys. 4.

Z drugiej strony można argumentować, iż dane wizualne nie były bez znaczenia jako pewne heurystyczne wsparcie dowodów. Asper podkreśla na przykład, że diagram miał na celu „dodanie siły logicznej dowodowi za pomocą wizualnych danych (*visual evidence*)”¹²⁴.

6) Diagram, mimo, iż jest w swojej istocie obiektem konkretnym, służył Grekom do dowodzenia twierdzeń ogólnych. Wydaje się, że matematycy greccy byli świadomi problemów i utrudnień związanych z dowodzeniem twierdzeń ogólnych na podstawie jednostkowych rysunków.

7) Dużą rolę diagramu w matematyce greckiej można częściowo wiązać z relatywnie słabo rozwiniętą algebrą. Jak podkreślają W. Noel i R. Netz, charakterystyczną cechą greckiej matematyki był na przykład brak równań, zapisywanych i przekształcanych w takiej postaci, jak równania używane współcześnie¹²⁵. Według Noela i Netza, dla starożytnych Greków to nie równania

¹²³ Tamże, str. 116.

¹²⁴ Tamże, str. 119.

¹²⁵ Por. Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes...*, 82. Grecy posługiwali się oczywiście relacją równości, oraz znali jej podstawowe własności, o czym mowa już była przy okazji omawiania *Elementów* Euklidesa.

służyły przekazywaniu wiedzy, prawd matematycznych – czyniły to rysunki; w istocie, „dzisiejsza nauka to nauka ‘równaniowa’, natomiast nauka starożytna była ‘rysunkowa’”¹²⁶. Brak dostępnych nam środków logicznych można też wiązać z rolą intuicji przestrzennej w niektórych dowodach: „konstruowanie niezależnych od intuicji przestrzennej obiektów geometrycznych, nie było możliwe aż do czysto aksjomatycznej konstrukcji liczb rzeczywistych w XIX w.”¹²⁷. Dodajmy, że z drugiej strony można uznać, iż mogła mieć miejsce zależność odwrotna – zbyt silna tendencja do wizualnego reprezentowania obiektów matematycznych spowodowała, iż rozwój algebry został zahamowany.

8) Jak podkreślają niektórzy współcześni historycy matematyki – w szczególności cytowany tu już R. Netz – diagramy nie miały na celu tylko towarzyszenie tekstowi matematycznemu, obrazowaniu go. Były one same źródłem informacji, metodą podania, czy prezentacji, założeń poszczególnych twierdzeń. Noel i Netz twierdzą, iż rysunki były przez matematyków greckich świadomie traktowane jako ujmujące założenia poszczególnych rozumowań: „rysunki nie są rodzajem ilustracji, służące do łatwiejszego zrozumienia wywodów, ale dostarczają nam podstawowych informacji. Podają dane do twierdzenia, mówiąc, która litera oznacza który obiekt”¹²⁸.

9) W wielu przypadkach diagram ma ukierunkować myśl na odpowiednie kroki dowodu, być ilustracją dla metody; niekoniecznie miał natomiast być wierną kopią przedmiotu, którego dotyczy twierdzenie, czy też choćby charakteryzować się strukturalnym doń podobieństwem. Potwierdzeniem tego może być choćby dowód twierdzenia III.3. w Elementach. Jest to ono wykazane przy pomocy dowodu „nie wprost”, a rozumowanie wsparte jest rysunkiem nieistniejącej figury¹²⁹! Figura ta, jak podkreśla Ken Saito, adekwatnie przedstawia założenia dowodu nie wprost¹³⁰.

¹²⁶ Tamże, str. 82.

¹²⁷ Saito, K., *Reading ancient...*, str. 806.

¹²⁸ Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes...*, str. 86. Więcej o tej funkcji diagramów Reviel Netz pisze w książce *The shaping of deduction in greek mathematics: A study of cognitive history*

¹²⁹ Por. Saito, K., *Reading ancient...*, str. 822.

¹³⁰ Por. Saito, K., *Reading ancient...*, str. 824.

10) Dodajmy na koniec, iż w filozofii matematyki starożytnej Grecji nie pojawia się pojęcie intuicji. Oczywiście nie dziwi to, o ile słowo to wywodzi się z języka łacińskiego. Można oczywiście szukać analogii pomiędzy pojęciem intuicji a grecką episteme, czy dianoia. Wydaje się jednak, iż należy stwierdzić, iż w filozofii greckiej nie był obecny spór o rolę intuicji w poznaniu matematycznym, w takiej przynajmniej postaci, w jakiej obecny jest w filozofii współczesnej.

Rozdział 2. Wizualizacje w matematyce i filozofii XVII oraz XVIII wieku

W drugim rozdziale chciałbym zająć się wybranymi zagadnieniami związanymi z matematyką XVII i XVIII wieku. Jak wiadomo, po upadku Cesarstwa Rzymskiego matematyka europejska popadła w długi okres stagnacji. Okres renesansu oraz w dalszej kolejności oświecenia był powrotem do greckiej matematyki, w którym to odkryto „na nowo” najbardziej zaawansowane metody greckiej geometrii. Jednocześnie jednak matematyka europejska doby średniowiecza i wczesnego renesansu była pod wpływem rozwiniętej przez matematyków arabskich algebry. Doprowadziło to do ciekawego zderzenia arabskiej myśli algebraiczno-symbolicznej z grecką myślą wizualną. Z drugiej strony w okresie tym prowadzony był spór empiryzmu z racjonalizmem.

W nawiązaniu do tych dwóch interesujących mnie zagadnień, rozdział składa się z dwóch zasadniczych części – metodologicznej i filozoficznej. Część metodologiczną zaczynam od „*case study*” – wspomnianego w poprzednim rozdziale problemu rozumowań przez „nałożenie” w *Elementach* Euklidesa. W dalszej części piszę o kontrowersjach i różnicach dotyczących stosunku poznania osiąganego za pomocą symboli, oraz za pomocą diagramów. Część metodologiczną kończę krótką analizą roli diagramu w rachunku różniczkowo-całkowym. Część filozoficzną zaczynam od analizy roli wizualizacji w racjonalizmie Kartezjusza i Leibniza. Rozdział kończę uwagami na temat kategorii przestrzeni w XVII-wiecznej filozofii geometrii.

2.1. Dyskusja nad statusem dowodów przez „nałożenie” w filozofii i metodologii matematyki XVII i XVIII wieku

Pierwszy z nich z problemów, który chciałbym omówić związany jest ze wspomnianymi w poprzednim rozdziale euklidesowymi dowodami przez „nałożenie”. Spór ten jest wyrazem nieufności matematyków wobec mechanicznych intuicji w matematyce, co w dużym stopniu wiąże się również z wizualizacjami.

Jak wspominałem w poprzednim rozdziale, w dowodach trzech twierdzeń *Elementów* jeden z kroków dowodowych zawiera „nałożenie” na siebie, czy superpozycję, dwóch figur geometrycznych w celu przekonania się o ich identyczności. Jak zauważa Paolo Mancosu (na którego pracy będę w tej części rozdziału bazował), dowody te wydawały się nie wzbudzać wątpliwości matematyków starożytnych. W XVI i XVII wieku jednak toczona była dyskusja nad poprawnością tego typu dowodów. Zaczniemy od stanowiska jednego z pierwszych krytyków omawianego typu dowodów, Jacquesa Peletier (1517-1582). Píše on o ich dwóch zasadniczych słabościach. Po pierwsze, jeśli dowody przez nałożenie zostałyby w pełni przyjęte w matematyce, wiele dowodów euklidesowych okazałoby się zbędnymi¹³¹. Po drugie „metoda nakładania nie jest godna geometrii, ponieważ ma w sobie coś mechanicznego”¹³². Jest tak natomiast, jak podkreśla P. Mancosu, ponieważ „pociąga ona zmianę położenia bądź ruch obiektów, które należy na siebie nałożyć (*implies a displacement or a morion of the*

¹³¹ J. Peletier wspomina tu na przykład o tw I.2 z *Elementów*, które głosi, iż z danego punktu można zawsze poprowadzić odcinek o długości równej długości danego odcinka. Dość wyrafinowane rozumowanie Euklidesa (bazujące na postulatach i aksjomatach) można by wtedy zastąpić przez proste „przeniesienie” odpowiedniego odcinka, tak aby jeden z jego końców pokrywał się ze wspomnianym w twierdzeniu punktem. Jest to operacja wizualnie oczywista, ale jako „dowód” wysoce dyskusyjna.

¹³² Mancosu, P. *Philosophy of Mathematics...*, str. 29. Uwagi J. Peletier pochodzą z opublikowanego w 1557 r. dzieła *In Euclidis Elementa Geometria Demonstrationum Libri XV*. Dodajmy, iż matematyk ten uważał, iż w związku z powyżej opisanymi trudnościami, twierdzenie I.4 należy przyjąć jako aksjomat.

objects being superposed)”¹³³. Według innego komentatora *Elementów*, Flussasa Candalliego (1502-1594), rozumowanie takie sięga po obce matematyce mechaniczne instrumenty, zamiast posługiwać się rozumem¹³⁴. W obronie rozumowania Euklidesa występowali m.in. Christopher Clavius (1538-1612) oraz Giuseppe Biancani (1566-1624). Ten pierwszy uważa, iż rozumowanie Euklidesa wymaga intelektualnego, a nie mechanicznego nałożenia na siebie odpowiednich trójkątów; ma tu bowiem miejsce nie „rzeczywista (*real*) superpozycja, ale taka, która jest ujęta tylko w myśli”¹³⁵. Według Biancaniego z kolei, „nałożenie” odgrywa w dowodach Euklidesa rolę konstrukcji, a nie kroku dowodowego. Sama superpozycja trójkątów jako coś fizycznego, nie mogło być, według Biancaniego, uprawnionym krokiem dowodowym¹³⁶. Dodajmy, że wszyscy obrońcy euklidesowej metody podkreślali również, iż odrzucenie twierdzenia I.4 i jego konsekwencji byłoby podważeniem niewzruszonej przecież pewności *Elementów*, co uważali za niedopuszczalne.

Zagadnienie to jest również wyrazem właściwych dla epoki tendencji unikania w matematyce tego, co związane z ruchem oraz intuicjami mechanicznymi. W tendencję tą wpisuje się choćby dokonane przez Kartezjusza w pracy *Géométrie* rozróżnienie na krzywe mechaniczne i geometryczne. To, co geometryczne określa w tym kontekście Kartezjusz jako „ściśle i dokładne”, której to własności nie ma to, co mechaniczne¹³⁷. Warte uwagi jest to, iż Kartezjusz akceptował jako geometryczne krzywe, które skonstruowane są przez dokładnie określony co do swojego przebiegu, pojedynczy ruch punktu po płaszczyźnie. Nie można jednak zaakceptować jako ścisłych i dokładnych (i tym samym geometrycznych) krzywych, które powstają przez jednoczesne dwa ruchy, pomiędzy którymi „nie zachodzi relacja, którą można by mierzyć w sposób

¹³³ Tamże, str. 29.

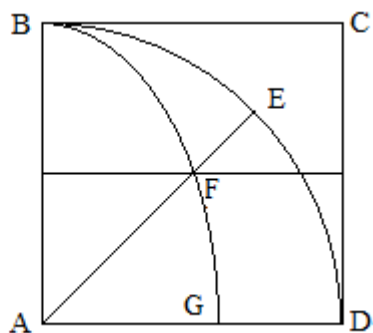
¹³⁴ Por. tamże, str. 30.

¹³⁵ Clavius, *Euclidis Elementorum Libri XV* (1589), za: tamże, str. 30.

¹³⁶ Por. tamże, str. 31-32.

¹³⁷ Por. tamże, str. 72. Kartezjusz nawiązuje tu do analogicznego starożytnego podziału. Mancosu podkreśla jednak, iż rozróżnienie francuskiego filozofa nie do końca pokrywa się z rozróżnieniem starożytnych, zauważa także, iż Kartezjusz źle je interpretował (por. tamże, str. 71-72). Tymi kwestiami nie będę się tu jednak bliżej zajmował.

dokładny”¹³⁸. Przykładem jest tutaj konstrukcja kwadratrysy¹³⁹. Krzywa ta powstaje w następujący sposób¹⁴⁰: niech $ABCD$ będzie kwadratem, a BED łukiem okręgu o środku w A . Wyobraźmy sobie teraz, że odcinek AB przesuwa się w kierunku odcinka AD tak, by punkt B przesuwał się po wspomnianym łuku aż do punktu D . Jednocześnie przesuujemy odcinek BC w kierunku odcinka AD , w taki sposób, aby pozostawał cały czas do niego



Rys. 1.

równoległy. O ile oba ruchy rozpoczynają się i kończą w tym samym momencie, oraz odbywają się w jednostajnym tempie, punkt przecięcia poruszających się odcinków nakreśla oznaczoną na rysunku krzywą BFG , którą nazywamy właśnie kwadratrysą. Matematycy XVII wieku nie posiadali narzędzi analitycznych potrzebnych do sformułowania ścisłej matematycznej charakterystyki tej krzywej, stąd też wielu z nich uważało ją za niedostatecznie ścisłą, by nazwać ją „geometryczną”¹⁴¹.

Nie ma tu miejsca na dalszą analizę tych metodologicznych sporów. Warto jednak krótko rozważyć, jak powyższe rozważania mają się do roli intuicji

¹³⁸ Kartezjusz, *Géométrie*, za: tamże, str. 73.

¹³⁹ Kwadratrysa została skonstruowana już przez Hipiasza z Eildy połowie V wieku p. n. e. i wykorzystywana przez niego w celu rozwiązania problemu trysekcji kąta i kwadratury koła.

¹⁴⁰ Por. tamże, str. 74

¹⁴¹ Uznanie kwadratrysy za dobrze określoną krzywą matematyczną krytykował już w starożytności Pappus. Bywała ona wykorzystywana m.in. do badań nad kwadraturą koła oraz trysekcji kąta. Krytykował to Pappus, który podkreślał, że dostosowanie dwóch ruchów potrzebnych do konstrukcji jako ściśle jednoczesnych i jednostajnych zakłada już możliwość przeprowadzenia kwadratury koła, a więc odnalezienia kwadratu, którego pole jest dane polu danego koła (por. tamże, str. 74). W XVII wieku dyskusję nad kwadratrysą podjął m.in. Clavius, który podał taką jej konstrukcję, która, według niego, nie wymagała dwóch odrębnych ruchów.

przestrzennej w matematyce. Zaznaczmy najpierw, iż mechaniczne intuicje wydawały się mieć w sobie pierwiastek empiryczny – niedokładny, taki, który przez brak precyzyjnego i jednoznacznego określenia wymyka się ścisłemu, rozumowemu ujęciu. Niechęć do mechanicznych intuicji jest z pewnością po części związana z wpływem platońskiej wizji matematyki jako statycznej, badającej niezmiennie pozazmysłowe obiekty. Jak jednak podkreśla Mancosu, również w tradycji arystotelejskiej odnaleźć można stwierdzenia, iż geometria powinna abstrahować od ruchu¹⁴².

Intuicje mechaniczne są z pewnością w pewnym stopniu związane z wizualizacjami. Ruch punktu, który tworzy kwadratrysta przedstawiany jest przecież w intuicji przestrzennej. Jest to zawsze ruch obiektu przestrzennego z jednego położenia w inne, co postrzegane jest z konieczności zmysłem wzroku (bądź przestawiane za pomocą „wizualizacji wewnętrznej”). Wydaje się, że w zrozumieniu kształtu kwadratrysty istotną rolę gra więc intuicja przestrzenna. Czy jednak niedostateczna dokładność tej konstrukcji, czy też wątpliwości związane z dowodem twierdzenia I.4 *Elementów* Euklidesa, wypływają z niedoskonałości intuicji przestrzennej? Wydaje się, że nie – to niedokładność ruchu, czy trudności związane z jego precyzyjnym opisem, są tutaj matematycznie podejrzane, a nie fakt, iż ruch ten jest przedstawiany za pomocą intuicji przestrzennej. Z drugiej jednak strony ruch odbywa się w przestrzeni, a brak możliwości jego precyzyjnego określenia jest w jakimś stopniu również związany z niedoskonałością zmysłu wzroku, z niemożliwością w pełni precyzyjnego jego opis.

Dalej przejdźmy do omówienia innego XVII-wiecznego sporu metodologicznego powiązanego z wizualizacjami – sporu o status algebry.

¹⁴² Por., Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 30.

2.2. Rozwój algebry a wizualizacje

Z rolą wizualnych reprezentacji w poznaniu matematycznym związana jest z pewnością rosnąca rola algebry w matematyce europejskiej epoki renesansu oraz niektóre kontrowersje z tym związane. Po okresie względnej stagnacji, matematyka europejska zaczęła się gwałtownie rozwijać. Jednym z przejawów tego rozwoju była przejmowanie osiągnięć arabskiej matematyki, która w okresie średniowiecza stała na wyższym poziomie rozwoju, niż matematyka europejska.

Wkład Arabów w matematykę polegał przede wszystkim na rozwijaniu przez nich algebry. Interesująco pisze o tym cytowany już w poprzednim rozdziale historyk matematyki Ladoslav Kvasz. Uważa on, jak wspominałem, iż matematyka europejska odziedziczyła po Grekach geometrycznego ducha, dla którego zrozumieć, to osiągnąć wgląd. Arabowie z pewnością zawdzięczali wiele matematyce greckiej, którą zresztą dokładnie studiowali. Jednak, jak podkreśla Kvasz, „w kulturze arabskiej znika bliski związek pomiędzy myślą i doświadczeniem wizualnym”¹⁴³. Źródła różnic w tym względzie pomiędzy kulturą grecką i arabską są na pewno różnorodne, nie ma tu miejsca na ich analizę (choć jest to zagadnienie bardzo ciekawe). Kvasz tłumaczy to m.in. tym, iż w islamie metafora wzroku nie odgrywała istotnej roli w dążeniu do transcendencji¹⁴⁴. W każdym razie to arabscy matematycy rozwijali w średniowieczu algebrę – wprowadzili pojęcie zmiennej, którą nazywali po prostu „rzeczą”, badali metody rozwiązywania równań, wprowadzili też m.in. pozycyjny zapis liczb¹⁴⁵. Metody przez nich rozwijane polegały na manipulacji „rzeczą”; były to algorytmy, czy reguły werbalne, których zastosowanie gwarantowało rozwiązanie danego problemu (dodajmy, że same terminy „algorytm” i „algebra” pochodzą z języka

¹⁴³ Kvasz, L., *The History of Algebra and the Development of the Form of its Language*, „Philosophia Mathematica” Vol. III 2006, str. 291.

¹⁴⁴ Tamże, str. 291.

¹⁴⁵ Por. tamże, str. 292. Ściśle rzecz biorąc, arabscy matematycy nie znali jeszcze pojęcia równania w naszym rozumieniu, rozważali algorytmy, „przepisy” na rozwiązanie poszczególnych problemów algebraicznych.

arabskiego). Nie korzystano przy tym prawie w ogóle z reprezentacji przestrzennych.

Kiedy w epoce renesansu, algebraiczne metody były przyswajane przez matematyków europejskich, z początku napotykały na pewien „opór poznawczy”. Kvasz pisze, że rozpoczął się wtedy „dialog pomiędzy duchem zachodniej matematyki i zasadniczo odmiennym, choć równie głębokim, duchem algebry. Dialog ten był zdominowany przez próby wizualizowania, przez dążenie do przeniesienia wszystkich sztuczek i przekształceń algebraicznych do sfery wizualnej w celu osiągnięcia w nie wglądu”¹⁴⁶. Pozostała jednak tendencja (widoczna u wielu filozofów i matematyków) do wizualizowania obiektów, działań i dowodów matematycznych; co więcej często przybierała ona formę preferencji tych metod i obiektów matematycznych, które można wizualizować, czyli wyobrazić sobie przestrzennie, bądź przedstawić na rysunku. Wielu matematyków przyznawało, że łatwiej pojmowalne są dla nich pojęcia i rozumowania wsparte rysunkami, inni otwarcie wątpili w wartość poznawczą bądź poprawność wyników, które nie posiadają reprezentacji wizualnej.

Warte uwagi jest przeprowadzone przez Kvasza zestawienie metody geometrycznej i algebraicznej, oraz typów poznania z nimi związanych:

1) Uniwersum matematyczne jest dla geometry otwarte na ogląd, jest rozpostarte przed podmiotem poznającym, który obserwuje je pozostając w pewnym stopniu od niego oddalonym. Poznając, geometra dokonuje wglądu, pozostając w trakcie aktu poznawczego w pewnym sensie biernym.

2) Uniwersum algebry jest „stworzone przez reifikację czynności podmiotu poznającego. Liczby 3, czy $\sqrt{5}$ są symbolicznie zreifikowanymi aktami liczenia bądź wyciągania pierwiastka”¹⁴⁷. Praktyka algebry oparta jest więc na

¹⁴⁶ Tamże, str. 291.

¹⁴⁷ Tamże, str. 288.

„doświadczeniu motorycznym, na przekształceniach, działaniach”¹⁴⁸. Tu poznanie nie sprowadza się do wglądu, ale uwidacznia się w umiejętnościach w zakresie obliczeń i przekształceń. Poznanie algebraicznie to zawsze proces, w którego trakcie aktualizowane jest zawsze tylko jedno w danym momencie przeprowadzane obliczenie

Kvasz podkreśla, że geometra (jako podmiot epistemiczny) posiada pewien punkt widzenia (*viewpoint*). Inaczej jest w przypadku algebry: jej świat „nie jest otwarty dla naszego wzroku. Jest raczej światem motorycznych schematów. Jeśli ślepiec nauczy się poruszać po budynku, np. w szkole, uczy się na pamięć wszystkich ruchów, które może wykonać, a budynek jest w jego umyśle reprezentowany jako struktura konstytuowana przez te właśnie ruchy”¹⁴⁹. Jak podkreśla Kvasz, można się nauczyć poruszać po „budynku”, którym jest struktura algebraiczna. Algebra nie może jednak dostarczyć takiego samego typu wglądu, jak geometria.

Ogromnym krokiem w kierunku integracji geometrii i algebry było wydane 1637 roku epokowe dzieło Kartezjusza pt. *Géométrie*. Francuski matematyk określił w nim m.in. metody, za pomocą których pojęcia algebraiczne (jak mnożenie, potęgowanie, pierwiastkowanie) można interpretować geometrycznie i odwrotnie – zagadnienia geometryczne sprowadzać do rozwiązywania równań algebraicznych¹⁵⁰. Kartezjusz ustanowił tym samym pewną wymiennność pojęć algebraicznych i geometrycznych – uważał na przykład, iż wielkości były rozważane albo ze względu na ilość albo na kształt, dla jednych celów mogły być analizowane numerycznie, dla innych natomiast geometrycznie¹⁵¹. Warto wspomnieć, że upowszechnienie się metod algebraicznych wzbudzało niepokój

¹⁴⁸ Tamże, str. 289.

¹⁴⁹ Tamże, str. 311.

¹⁵⁰ Metoda ta umożliwiała w szczególności rozwiązywanie problemów geometrycznych metodami czysto algebraicznymi – dla pokazania jej efektywności Kartezjusz rozwiązał w *Geometrie* nierozwiązany od starożytności problem Pappusa (por. Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 78)

¹⁵¹ Shabel, L., *Apriority and Application: Philosophy of Mathematics in the Modern Period*, w: *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford 2000, str. 32.

wielu „tradycyjnie” nastawionych matematyków. Algebra wywoływała przy tym kontrowersje zarówno z powodów natury filozoficznej jak i metodologicznej, które to problemy – jak pisze Paolo Mancosu – były w dużym stopniu obecne w umysłach XVII-wiecznych matematyków i filozofów. Po pierwsze stawiano problem, czy algebrę należy traktować jako osobny dział matematyki, czy jedynie pewną metodę? Rozważano więc, czy „algebra jest nauką, czy też tylko pewną sztuką”¹⁵². Jak pisze P. Mancosu, zapytywano „jaki typ myślenia jest związany z algebraicznym symbolizmem – jaka jest natura myśli opartej na symbolizmach gdy przeciwstawimy ją, dajmy na to, klasycznej myśli geometrycznej, oraz czy jest to w ogóle jakiś rodzaj myśli?”¹⁵³. I tak, niektórzy matematycy, jak John Wallis (1616-1703), uznawali wyższość arytmetyki i algebry nad geometrią, twierdząc, iż obiekty tej pierwszej są wyższej i bardziej abstrakcyjnej natury niż obiekty geometrii¹⁵⁴. Inni, jak Thomas Hobbes (1588-1679), czy nauczyciel Newtona, Isaac Barrow (1630-1677), ubolewali nad rosnącą algebraizacją matematyki. Ten pierwszy uważał, iż symboliczną (tzn. z algebraizowaną) geometrię za chorobę prawdziwej geometrii, która zaraziła współczesnych mu geometrów¹⁵⁵. Zaznaczmy, iż przyczyną sceptycyzmu odnośnie algebry były zarówno kwestie epistemologiczne jak i ontologiczne. Filozof Thomas Hobbes zastanawiał się na przykład, jak możliwe jest rozumowanie za pomocą symboli. Z drugiej strony podnoszono wątpliwości odnośnie przedmiotu algebry. W szczególności, wielu matematyków zwracało uwagę na brak geometrycznego odpowiednika wielu pojęć algebraicznych. I. Barrow pisał np., o równaniach algebraicznych i innych pojęciach algebry, iż „albo nic nie jest przez nie pojmowane (*understood*) ani w rzeczywistości oznaczane, ale są nierzeczywistymi (*imaginery*) chimerami i potworami, albo też odpowiada im coś po stronie geometrii, co oznaczają i reprezentują”¹⁵⁶. W szczególności wiele wątpliwości budził status ontologiczny liczb zespolonych, ale w pewnym okresie również liczb ujemnych¹⁵⁷. Jak pisze

¹⁵² Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 85.

¹⁵³ Tamże, str. 85.

¹⁵⁴ Tamże, str. 86.

¹⁵⁵ Tamże, str. 87.

¹⁵⁶ Barrow, *Lectiones Mathematicae*, za: tamże, str. 87.

¹⁵⁷ Por. tamże, str. 88.

Paolo Mancosu, w oczach matematyków omawianego okresu „liczby są akceptowalne jedynie wtedy, gdy są ugruntowane w rzeczywistości geometrycznej”¹⁵⁸.

Jednym z największych przeciwników algebraizacji matematyki był Isaac Newton. Ów wielki fizyk był również doskonałym matematykiem i jako taki uznawał zdecydowany prymat geometrii nad algebrą. Filozof i historyk matematyki, David Sepkoski w pracy *Nominalism and constructivism in seventeenth-century mathematical philosophy* stwierdza, iż Newton miał podejrzliwy stosunek do pojęć algebraicznych. Wielki fizyk angielski był przekonany o pierwotności intuicji wizualnej, fizycznej; narzekał przykładowo na wprowadzanie przez niektórych geometrów do geometrii analitycznej krzywych, które są dowolne (*arbitrary*) i nie są zakorzenione w geometrii. Głównym powodem przyjęcia takiej perspektywy była zapewne fizykalistyczna filozofia matematyki Newtona, przekonanie o centralnej roli zastosowań matematyki dla oceny wartości poznawczej jej poszczególnych działów. Stąd zapewne wynikało jego przeświadczenie, że „matematyczne reprezentacje powinny być blisko powiązane z własnościami ciał fizycznych i z ich ruchami”¹⁵⁹. Geometry stosujący często metody algebraiczne zajmują się więc – według angielskiego matematyka – w zbyt dużym stopniu spekulacjami związanymi z samymi równaniami, zamiast aspektem fizycznym zagadnień¹⁶⁰. Co ciekawe, metody czysto geometryczne były dla Newtona bardziej ściśle i ogólne, niż metody algebraiczne. Jak pisze David Sepkoski, sceptycyzm Newtona „wywodzi się z przekonania, że euklidesowa syntetyczna geometria w sposób wiarygodny reprezentuje mechanicznie skonstruowane krzywe, akceptując krzywe, które nie zostały w ten sposób skonstruowane, analityczni geometrycy ryzykują utratę racjonalnej ścisłości (*rational rigor*) geometrii”¹⁶¹. Podejście algebraiczne było, według Newtona, zbyt spekulatywne, cechując się dodatkowo mniejszym stopniem ogólności: „wiarygodna wiedza nie może być osiągnięta metodami analitycznymi, ponieważ

¹⁵⁸ Tamże, str. 87.

¹⁵⁹ Sepkoski, D., *Nominalism and constructivism in seventeenth-century mathematical philosophy*, “Historia Mathematica” Vol. 32, 2005, str. 53.

¹⁶⁰ Tamże, str. 53-54.

¹⁶¹ Tamże, str. 54.

analiza jest wygodna w badaniu konkretnych problemów a nie dostarczaniu ogólnych rozwiązań”¹⁶². Nie mamy tu jednak do końca jasności, co Newton rozumiał przez *ogólne* rozwiązania. Wnioskujemy zatem, że wyższość geometrii nie polegała dla Newtona tylko na jej wyższości jako narzędzia heurystycznego, ale na jej wyższości jako narzędzia poznawczego, jako środka do uzyskiwania wartościowej wiedzy¹⁶³. Dodatkowo Newton był przekonany o bardziej praktycznym charakterze rozumowań czysto geometrycznych. O newtonowskiej filozofii geometrii napiszę jeszcze nieco więcej w kolejnym podrozdziale, dotyczącym pojęcia przestrzeni.

Podsumowując, można stwierdzić, iż zrozumieć, a także wyjaśnić źródła prawdziwości danego twierdzenia, oznaczało dla wielu XVII-wiecznych europejskich matematyków wciąż tyle, co „zobaczyć”, czy ująć wzrokowo. Wydaje się, że reprezentacje przestrzenne nie odgrywały tutaj jedynie roli dodatków, czy heurystyk, ale stanowiły wyjaśnienie prawdziwości twierdzeń, oraz w pewnym sensie przedmiot rozumowań matematycznych. Wydaje się też, że w oczach niektórych matematyków, zastrzeżenia odnośnie algebry były związane z jej ontologią a dokładniej jej brakiem.

W dalszej części rozdziału przyjrę się, jakie zagadnienia pojawiały się w związku ze stosowaniem wizualizacjami w XVII-wiecznej analizie matematycznej.

2.3. Wizualizacje a początki rachunku różniczkowo-całkowego

Rozdźwięk pomiędzy przestrzennym i algebraicznym stylem myślenia oraz uprawiania matematyki były również widoczne w pierwszej fazie rozwoju rachunku różniczkowo-całkowego. Jego początki związane są z problemami typowo geometrycznymi, których sformułowanie wiąże się (albo może się wiązać) z wizualną analizą własności rysunku; były to mianowicie problemy odnalezienia

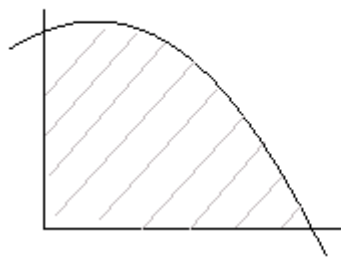
¹⁶² Tamże, str. 54.

¹⁶³ Tamże, str. 54-55.

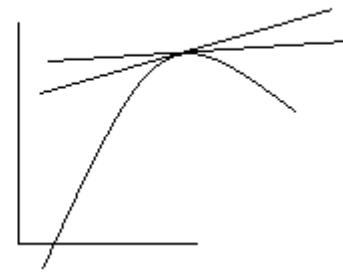
pola pod krzywą, oraz problem odnalezienia stycznej wykresu krzywej w danym punkcie. Zagadnieniem pól pod wykresami krzywych, jak również objętości brył zajmowali się już starożytni matematycy, jak Eudoksos, czy w szczególności Archimedes, a następnie matematycy XVII-wieczni¹⁶⁴. Problemów tych jednak nie można rozwiązać przez samo badanie wizualnie postrzegalnych własności wykresów. Problematyczne było tutaj nieuchronnie pojawiające się tutaj pojęcie nieskończoności; wydawało się, że w celu obliczenia pola pod wykresem należało nadać jakiś sens sumie nieskończonej ilości pól wielokątów, natomiast w celu podania stycznej – pojęciu nieskończonej bliskości punktów. Powyższe problemy zostały rozwiązane przez epokowe osiągnięcie, jakim było wprowadzenie przez Newtona i Leibniza rachunku różniczkowo-całkowego. Jak wiadomo, zarówno Newton, jak i Leibniz opierali swój rachunek na wielkościach nieskończenie małych. Z infitezymaliami wiązały się oczywiście znane metodologiczne i pojęciowe trudności; zasadniczą ich cechą była jednak z pewnością niemożliwość ich wizualizacji, brak wizualnie postrzegalnej interpretacji. Była to jeden z powodów krytyki infitezymaliów, choć z pewnością nie najistotniejszy. Mimo związanego z tym oddalenia metodologii rachunku różniczkowo-całkowego od wizualizacji, jego interpretacja newtonowska była z pewnością bardziej zbliżona do zastosowań i intuicji geometrycznych, niż interpretacja Leibniza. Newton pojmował zagadnienia związane z tym rachunkiem jako zadania geometryczno-fizyczne i wyrażał je językiem mechaniki, Leibniz z kolei jako geometryczno-analityczne i wyrażał językiem arytmetyki lub algebry. Zamiarem Newtona był przede wszystkim opis świata fizycznego, praca Leibniza można z kolei rozważać w kontekście jego ideału *characteristica universalis*.

¹⁶⁴ Matematycy starożytni posługiwali się metodą wyczerpywania, która polegała przybliżaniu pola pod parabolą i kołem nieskończonymi sumami trójkątów bądź wielokątów. Metodę tą stosowano jeszcze w XVI i XVII wieku. Podam jeden przykład takiego rozumowania, które pochodzi od Keplera: aby obliczyć pole koła, dzielimy je na nieskończoną ilość trójkątów równoramiennych, których jeden wierzchołek leży w środku trójkąta, a dwa pozostałe na okręgu. Teraz wiedząc, iż pole trójkąta jest równe połowie pola podstawy pomnożonej przez wysokość, Kepler wnioskuje, iż pole koła jest równe połowie obwodu pomnożonej przez promień (gdyż długości wysokości trójkątów dążą do długości promienia). Jak się okazuje, jest to wynik dokładny, choć uzyskany niezbyt ścisłą metodą (podobny sposób Kepler obliczał też m.in. objętość kuli) (Por. Eves, H., *An Introduction to the history of mathematics*, Howard Eves, str. 322).

Nie ma tu miejsca na szerszą analizę rozwoju rachunku różniczkowo-całkowego. Zaznaczmy tylko, iż w początkowej fazie swojego rozwoju był on wciąż silnie związany z intuicjami geometrycznymi. Rachunek ten był w XVII wieku wciąż bardzo mocno związany z analizą wykresu, co można zapewne wytłumaczyć tym, iż z analizą wykresu wpływały problemy odnalezienia pola pod wykresem, czy odnalezienia stycznych do



Rys. 2a. Jakie jest pole pod wykresem?



Rys. 2b. Która prosta jest styczną w danym punkcie?

Niego (zob. rys. 2a, 2b); te problemy stanowiły też jedną z głównych inspiracji do rozwoju rachunku różniczkowo-całkowego. Pisze o tym również historyk i filozof matematyki Giovanni Ferraro, podkreślając, iż wczesne prace z analizy matematycznej były „złożoną mozaiką figur i wyrażań analitycznych związanych z wykresami oraz geometrycznymi wielkościami z nimi związanymi”¹⁶⁵. Zdaniem innego historyka matematyki, Craiga Fressera, postrzeganie przedmiotu rozważań rachunku różniczkowo-całkowego „w terminach własności wykresów oraz częsta praktyka reprezentowania relacji pomiędzy wielkościami graficznie za pomocą wykresów doprowadziło do tendencji postrzegania wczesnego rachunku różniczkowo-całkowego, jako czegoś przede wszystkim (*essentially*)

¹⁶⁵ Ferraro, G., *Analytical Symbols and Geometrical Figures in Eighteenth-Century Calculus*, “Studies in History and Philosophy of Science”, Vol. 32, No. 3, 2001, str. 535.

geometrycznego”¹⁶⁶. W pierwszej fazie rozwoju rachunek różniczkowo całkowy był więc silnie związany z intuicjami przestrzennymi oraz z geometrią, a wielu rozumowań (np. tych formułowanych przez Newtona) nie sposób było – podobnie, jak u Greków – zrozumieć bez diagramu¹⁶⁷.

Analiza matematyczna XVIII wieku dąży do uwolnienia swoich rozważań od interpretacji geometrycznej – cechowała ją, zdaniem G. Ferraro, „świadoma eliminacja figur” ze swoich rozumowań¹⁶⁸. W przedmowie do *Institutiones calculi differentialis* Leonhard Euler (1707-1783) stanowczo odrzuca możliwość konfirmacji twierdzeń na podstawie danych wizualnych, a odnośnie przedstawianego tam rachunku różniczkowo-całkowego podkreśla, że „żadna figura nie jest konieczna aby wyjaśnić reguły rządzące tym rachunkiem”¹⁶⁹. Joseph Lagrange (1763–1813) pisze z kolei o swoim dziele dotyczącym analizy matematycznej, iż nie odnajdzie się w nim rysunków, a „metody, które przedstawiam nie wymagają ani konstrukcji ani geometrycznych czy mechanicznych rozumowań, a jedynie operacji algebraicznych”¹⁷⁰. Matematycy ci dążyli do uniezależnienia rozumowań od diagramów, dążąc do sformułowania rachunku różniczkowo-całkowego jako czysto językowego systemu dedukcyjnego. Matematyka XVIII wieku nie osiągnęła jednak jeszcze w pełni tego ideału poznawczego. Jak pisze G. Ferraro – „przynajmniej część dowodu geometrycznego pozostawała zależna od figur w tym sensie, że niektóre kroki dowodowe mogły być wykonane przez analizę (*scrutinizing*) figur, bez werbalnego ich wyrażenia”¹⁷¹. W sposób w pełni niezależny od diagramów i intuicji przestrzennej analizę matematyczną rozwinęli dopiero na początku XIX wieku Augustyn Cauchy oraz Bernard Bolzano. Jak pisze redaktor wykorzystywanej w mojej pracy antologii

¹⁶⁶ Fraser, C.G., *The Background to and Early Emergence of Euler's Analysis*, (w:) *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, red. Otte, M., Panza, M., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/London 1997, str. str. 61.

¹⁶⁷ Ferraro, G., *Analytical Symbols...*, str. 545. Należy tu powtórzyć, iż Leibniz formułował, z drugiej strony, swoje ujęcie rachunku różniczkowo-całkowego w sposób algebraiczny, unikając możliwie najbardziej użycia diagramów. Jednak również jego ujęcie odwoływało się do obiektów geometrycznych; nie było tu również mowy o ogólnym pojęciu funkcji, które wprowadzone zostało znacznie później.

¹⁶⁸ Tamże, str. 536.

¹⁶⁹ Euler, L., *Institutiones calculi differentialis*, za: tamże, str. 537.

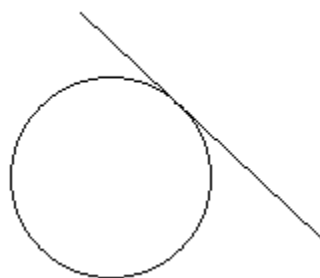
¹⁷⁰ Lagrange, *Traité de Mécanique analytique*, za: tamże, str. 538.

¹⁷¹ Tamże, str. 539.

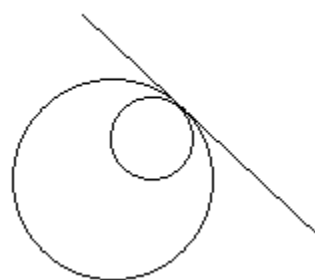
tekstów z filozofii matematyki, Ewald, „Bolzano był pierwszym matematykiem, który wyraźnie odrzucił tradycyjne geometryczne i przestrzenne podejście do podstaw [analizy matematycznej]” poszukując w zamian „czysto analitycznego” ugruntowania rachunku różniczkowo-całkowego – to znaczy oparcia go na arytmetyce”¹⁷². Niemiecki matematyk stanowczo postulował eliminację intuicji przestrzennej i diagramów z analizy matematycznej. Zarówno on, jak i A. Cauchy dowodzili więc metodą analityczną nawet twierdzeń, które wydają się oczywiste, gdy rozważyć ich interpretację graficzną. Stanowisku B. Bolzana przyjrzyć się nieco dokładniej w rozdziale piątym.

Na zakończenie tego podrozdziału przedstawię krótko jedną z kontrowersji dotyczących XVII-wiecznej analizy diagramu. Nie dotyczy ona ściśle rzecz biorąc, rachunku różniczkowo-całkowego, pojawiła się bowiem jeszcze przed jego powstaniem. Obrazuje ona jednak dobrze leżące u jego zarania problemu związane z wizualną analizą diagramów. Otóż w XVII wieku miała miejsce debata dotycząca wielkości kątów pomiędzy krzywymi a stycznymi do nich. Jak piszą autorki pracy *Visualizations in Mathematics*, Kajsa Bråting i Johanna Pejlar, XVII-wieczni matematycy debatowali nad dwoma pytaniami:

- „1. Czy istnieje kąt pomiędzy okręgiem i jego styczną?
2. Jeśli taki kąt istnieje, to czy jest równy 0, czy też wielkości nieskończenie małej (lub jakiejś innej wartości)?”¹⁷³



Rys. 3a



Rys. 3b

¹⁷² Ewald, W.B., *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 168.

¹⁷³ Bråting, K., Pejlar, J., *Visualizations in Mathematics*, str. 350.

W 1656 r. wspomniany już John Wallis twierdził, że kąt kontaktu jest równy 0. Sprzeciwiał mu się Thomas Hobbes, według którego „coś, co można dostrzec na rysunku na papierze nie mogło być niczym (równe 0)”¹⁷⁴. T. Hobbes podaje jeszcze inny argument. Zwraca uwagę, że jeśli narysować większy i mniejszy okrąg (jak na rys. 3b), wydaje się, że kąt pomiędzy większym okręgiem a prostą jest mniejszy, niż kąt pomiędzy mniejszym okręgiem i prostą. Thomas Hobbes, nawiązując do tej obserwacji oraz, jak się wydaje, do klasycznej teorii proporcji, twierdził, że tam, gdzie istnieje „więcej i mniej, tam też istnieje jakaś wielkość”¹⁷⁵.

Dziś zagadnienie to nie sprawia problemu, ponieważ „odpowiedzi na pytania 1 oraz 2 nie zależą od rysunku na papierze, ale od używanej przez nas definicji kąta”¹⁷⁶. Jeśli przyjmiemy definicję kąta, zgodnie z którą można jedynie mówić o kątach pomiędzy przecinającymi się odcinkami, odpowiedzią na pytanie 1 byłoby „nie”. Jeśli jednak przyjmiemy, (jak czyni się to w geometrii różniczkowej) że kąt pomiędzy krzywymi jest to inaczej kąt pomiędzy stycznymi w punkcie przecięcia się tych krzywych, to odpowiedzią na pierwsze pytanie byłoby „tak”, a na drugie – „0”¹⁷⁷. Podobne (choć oczywiście nieco inne) problemy związane były z próbami „odczytywania” z wykresu postaci stycznej do niego w danym punkcie. Powyższy przykład obrazuje więc dobrze trudności związane z wykorzystywaniem samego wykresu dla odpowiedzi na poszczególne pytania z dziedziny geometrii, czy analizy matematycznej, oraz jaką rolę odgrywa tu odpowiedni aparat pojęciowy. I tak problem odnalezienia stycznej do wykresu został rozwiązany przez opracowanie odpowiedniego aparatu pojęciowego przez Newtona i Leibniza.

Konkludując uwagi odnośnie rozwoju analizy matematycznej, można powiedzieć, że niedoskonałości intuicji przestrzennej były jednym ze źródeł arytmetyzacji, czy ogólnie symbolizacji analizy matematycznej i uniezależnienia jej od diagramów (jako drugie istotne źródło należy oczywiście wymienić problemy metodologiczne i filozoficzne związane z wielkościami małymi). Sama „naiwna”

¹⁷⁴ Tamże, str. 350.

¹⁷⁵ Tamże, str. 350.

¹⁷⁶ Tamże, str. 351.

¹⁷⁷ Por. tamże, str. 351.

wizualna analiza diagramów nie mogła doprowadzić do rozwiązań zagadnień takich jak kwadratury, choć analiza diagramów była z pewnością jednym ze źródeł problematyki prowadzącej do rozwoju rachunku różniczkowo-całkowego. To, iż w pierwszym okresie swojego rozwoju analiza matematyczna polegała na reprezentacjach przestrzennych spowodowane było zapewne zarówno niedostatecznym stopniem rozwoju metod czysto analitycznych, jak i naciskiem na to, aby pojęcia matematyczne miały swoje interpretacje graficzne. Jak pisze G. Fraser, pozwoliło to matematykom XVII wieku „doświadczyć [rachunku różniczkowo całkowego] jako działu matematyki który jest zinterpretowany, oraz odwołuje się do pewnej treści (*meaningful body of mathematics*)”¹⁷⁸.

2.4. Miejsce wizualizacji w poglądach Kartezjusza

Podstawowym założeniem epistemologii matematyki Kartezjusza (1596-1650) jest, jak wiadomo, koncepcja poznania jasnego i wyraźnego. W przypadku matematyki – jasne *ujęcie* prawd matematycznych to takie, „które jest uważnemu umysłowi obecne i odsłonięte”, takie, które „jasno widzimy”; wyraźne poznanie, czy ujęcie, to natomiast te, które „będąc jasne – tak jest od wszystkich innych oddzielone i odcięte, że nie zawiera w sobie niczego innego, jak tylko to, co jest jasne”¹⁷⁹. Poznanie jasne i wyraźne narzuca się umysłowi jako prawdziwe w taki sposób, iż nie może on go odrzucić. Jest to poznanie rozumowe, wiele z prawd w ten sposób pojmowanych to również, według Kartezjusza prawdy wrodzone. Są to m.in. prawdy matematyczne, a w szczególności aksjomaty.

Kartezjusz wyróżnia dalej dwie, jak sam o nich pisze, czynności naszego umysłu: intuicję i dedukcję. Za pomocą tej pierwszej poznajemy m.in. aksjomaty. Tak o niej pisze Kartezjusz: „przez intuicję rozumiem nie zmienne świadectwo zmysłów lub zwodniczy sąd źle tworzącej (*componentis*) wyobraźni, lecz tak łatwe

¹⁷⁸ Fraser, C.G., *The Background...*, str. 61.

¹⁷⁹ Kartezjusz, *Principia philosophiae*, za: Dadaczyński, J., *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Biblos-OBI, Tarnów, Kraków, 2000, str. 124.

i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy (...) każdy może ująć intuicyjnie, że istnieje, że myśli, że trójkąt jest ograniczony trzema tylko bokami, a kula jednolita powierzchnią¹⁸⁰. Przez dedukcję z kolei rozumie Kartezjusz „to wszystko, co daje się wysnuć z koniecznością z jakichś innych rzeczy poznanych w sposób pewny”¹⁸¹.

Jaką rolę w intuicji i dedukcji pełnią reprezentacje przestrzenne? Intuicja gwarantuje, według Kartezjusza, poznanie bezpośrednie, pozazmysłowe i całościowe – daje wgląd w obiektywny przedmiot matematyki. Jest ona więc władzą poznawczą z definicji prawie przeciwnej natury niż percepcja zmysłowa. W tym sensie kartezjańskie ujęcie intuicji jest zupełnie odmienne od ujęcia np. kantowskiego, czy któregośkolwiek z tych, które wiążą ją jakoś z poznaniem zmysłowym. Terminu „intuicja” używało w tym (lub podobnym) znaczeniu wielu filozofów w XX wieku było to m.in. Kurt Gödel. Wydaje się, że tak rozumiana intuicja nie potrzebuje reprezentacji przestrzennych. Tak też uważa polski filozof matematyki, Jerzy Dadaczyński, podkreślając, iż prawdy, które odkrywamy dzięki intuicji są u Kartezjusza „odnajdywane w umyśle i tylko przy pomocy umysłu”¹⁸². Warto przytoczyć dłuższy fragment pracy J. Dadaczyńskiego: „dotyczący m.in. roli wizualizacji w poznaniu matematycznym: „Kartezjusz podkreślał, że w wypadku ujmowania, które odznacza się najwyższym stopniem jasności, nie musi być niczego ze zmysłowej czy wyobraźniowej naoczności. Wystarcza czysto intelektualne rozumienie, że jest tak a tak. Podobnie, jak można sądzić, nie wymagał on od jasnych ujęć przedmiotów matematyki jakiejś naoczności, przedstawienia sobie, narysowania, skonstruowania w jakimś medium – na przykład trójkąta”¹⁸³. Wydaje się więc, że należy się zgodzić z J. Dadaczyńskim, iż racjonalizm i koncepcja intuicji Kartezjusza pociągają, iż poznanie geometryczne nie wymagało, wobec niego, w sposób konieczny odwołań do wizualizacji w żadnej postaci.

¹⁸⁰ Kartezjusz, *Prawidła kierowania umysłem*, PWN, Warszawa 1958, str. 12.

¹⁸¹ Tamże, str. 13.

¹⁸² Dadaczyński, J., *Filozofia matematyki...*, str. 138.

¹⁸³ Tamże, str. 128.

Przyjrzyjmy się również bliżej kartezjańskiej koncepcji przestrzeni, która rzuca ciekawe światło na filozofię geometrii francuskiego myśliciela. Po pierwsze, nie istnieje według Kartezjusza żadna rzeczywista różnica pomiędzy przestrzenią, a ciałami w niej zawartymi. Inaczej mówiąc, przestrzeń nie istnieje niezależnie od ciał, nie ma w jakimkolwiek sensie odrębnego od fizyczności statusu ontologicznego. Najistotniejszą (i nieodłączną) cechą wszystkich ciał fizycznych jest przy tym rozciągłość. Do ujęcia tej ostatniej w doskonały sposób nadaje się z kolei geometria. Według historyka filozofii Janusza Sytnik-Czetwertyńskiego, stanowisko Kartezjusza można więc ująć następująco: „ciała materialne są rozciągle. Rozciągłość to przestrzenność. Matematyką rozciągłości jest więc matematyka przestrzeni, czyli geometria”¹⁸⁴. Należy przy tym podkreślić, że w ten sposób rozumiana geometria stosowana jest nauką aprioryczną. Ma bowiem za swój przedmiot nie fizyczne obiekty jako takie, ale ich obiektywny aspekt – rozciągłość-przestrzeń. Poznanie geometryczne dotyczące przestrzeni dostarcza więc wiedzy absolutnie pewnej, osiągającej bezpośredni wgląd w przedmioty, które bada, oraz wrodzonej (stąd też nie wiedza ta nie ma źródła jedynie w doświadczeniach zmysłowych)¹⁸⁵. Jak pisze filozof matematyki Lisa Shabel, Kartezjusz w trakcie introspekcji, o której czytamy w *Medytacjach*, rozpoznaje, że „intelekt jest narzędziem poznawczym, które pozwala mu postrzegać rozciągłość wszystkich rzeczy materialnych: jego postrzeganie istotowej cechy substancji materialnej nie ma źródła ani w percepcji zmysłowej ani wyobraźni, ale w ‘czysto umysłowej władzy’ (*purely mental scrutiny*), która umożliwia jasne wyraźne postrzeganie (*perception*) czystej rozciągłości”¹⁸⁶.

Takie ujęcie geometrii i przestrzeni rodzi pewne problemy. Po pierwsze, są one związane z ontologią matematyki. Czy można powiedzieć, iż w rozciągłość-przestrzeń stanowi przedmiot geometrii, że obiekty geometryczne istnieją jakiś

¹⁸⁴ Sytnik-Czetwertyński, J., *Metafizyczne zasady wszechświata. Kartezjusz, Newton, Leibniz*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006, str. 31.

¹⁸⁵ Dodajmy, że Kartezjusz sprzeciwił się arystotelesowej tradycji, której hołdowali jeszcze Galileusz i Kepler, uważał, utrzymując, iż przestrzeń jest nieograniczona (tzn. nie istnieje granica, wraz z którą przestrzeń się kończy – por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 24). W tym sensie miał większe przesłanki niż starożytni, do stwierdzenia, że geometria jest prawdziwa o świecie fizycznym, czy o przestrzeni fizycznej.

¹⁸⁶ Shabel, L., *Apriority and Application...*, str. 37.

sposób w rzeczach materialnych? A jeśli nie, jaka relacja zachodzi pomiędzy obiektami matematycznymi a doskonale odpowiadającymi im obiektami fizycznymi¹⁸⁷? Nasuwa się również pytanie o rolę reprezentacji przestrzennych w matematyce. Można bowiem zapytać: skoro możliwe jest aprioryczne poznanie rozciągłości, to czy przestrzenny charakter reprezentacji obiektów geometrycznych ma rzeczywiście charakter czysto zmysłowy i przez to nie gra żadnej roli w procesie poznania matematycznego? Nie podejmuję się w tym miejscu odpowiedzi na to pytanie.

2.5. Leibniz o roli wizualizacji w poznaniu matematycznym

Jeszcze mniejszą niż Kartezjusz wagę do wizualizacji przywiązywał wielki niemiecki filozof i matematyk, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nie ma tu oczywiście miejsca analizę jego złożonej i wieloaspektowej filozofii – monadologii, czy nawet szerszego kontekstu Leibniziańskiej teorii poznania. Wskażę najpierw krótko na kilka głównych założeń jego filozofii, które wskazują na to, iż diagramy, czy w ogólności poznanie wizualne, nie mają istotnego miejsca w jego epistemologii matematyki. Dalej przytoczę kilka fragmentów z jednego z jego najważniejszych dzieł, *Nowych rozważań dotyczących rozumu ludzkiego*, które przybliżają stanowisko Leibniza w kwestii roli reprezentacji przestrzennych w poznaniu matematycznym.

Ocena roli diagramów w epistemologii matematyki Leibniza jest po pierwsze naznaczona – podobnie, jak było to w przypadku Kartezjusza – skrajnym aprioryzmem. Matematyka jest nauką wrodzoną, wiedza o przedmiotach matematycznych nie pochodzi więc od zmysłów. Tym bardziej zawodne z natury doświadczenie zmysłowe nie przybliży nas do ich poznania. Leibniz dzieli wszystkie sądy dwie klasy: do pierwszej należały sądy analityczne, konieczne oraz

¹⁸⁷ Zagadnienie to dość szeroko rozważa Dadaczyński, konkludując, iż „Kartezjusz nie rozstrzygnął kwestii, jakie jest istnienie przedmiotów czystej matematyki w substancji rozciągłej” (tamże, str. 139).

aprioryczne, do drugiej należą sądy przypadkowe i *a posteriori*. Prawdy matematyki należą do pierwszej z tych klas. Są one prawdami rozumu, są prawdziwe „we wszystkich możliwych światach”. Dzielą się przy tym na te, które są poznawane przez intuicję (prawdy pierwotne) oraz te, które można do nich sprowadzić za pomocą analizy logiki, czy też jak również pisze Leibniz – poprzez związki idei pośrednich.

Leibniz postulował również powszechną algebraizację i symbolizację nauki. Wyrazem tego była m.in. koncepcja języka uniwersalnego – *characteristica universalis*. Miał być to w zamyśle niemieckiego filozofa doskonały język, który pozwoli rozwiązać każdy problem przez proste rachowanie, czyli przez syntaktyczne przekształcanie symboli. Jak już wspominałem powyżej, także rachunek różniczkowo-całkowy w postaci przez niego rozwijanej był w duchu raczej algebraicznym i symbolicznym, a nie graficznym. Wreszcie, Leibniz znany jest ze swojej relacyjnej koncepcji przestrzeni. W odróżnieniu od Kartezjusza uważa on przestrzeń za „coś czysto względnego (...) porządek współistnienia rzeczy”¹⁸⁸. Dla Leibniza przestrzeń nie jest realnie istniejącym bytem, nie można więc o niej powiedzieć, ani że jest bytem fizycznym ani też pozafizycznym¹⁸⁹.

Konkludując, można stwierdzić, iż przestrzeń nie jest dla Leibniza w jakimkolwiek sensie przedmiotem geometrii, a obiekty matematyki nie mają z natury charakteru przestrzennego. Poznajemy je za pomocą intuicji, będącej czysto rozumową władzą poznawczą, niezależną od wszelkiego świadectwa zmysłów. Dowody matematyczne powinny natomiast według niemieckiego filozofa polegać na przekształcaniu symboli, a nie na analizie diagramów. Inaczej mówiąc – algebra ma pierwszeństwo nad geometrią, a symbol nad diagramem. W tak rozumianej koncepcji wydaje się nie być miejsca dla diagramów jako przedmiotu matematyki, czy środka w rozumowaniach. Leibniz nie pisze również, o ile mi wiadomo, o intuicji przestrzennej jako władzy poznawczej odgrywającej jakąkolwiek rolę w poznaniu matematycznym, ani nawet o heurystycznej roli diagramów.

¹⁸⁸ Leibniz, *Trzeci list Leibniza*, za: Sytnik-Czetwertyński, J., *Metafizyczne zasady...*, str. 101.

¹⁸⁹ Leibniz ma podobne poglądy na naturę czasu, tu będę się odwoływał jedynie do kwestii natury przestrzeni.

Przejdźmy dalej do bliższej analizy kilku fragmentów z *Nowych rozważań...*, nawiązujących do roli wizualizacji w poznaniu matematycznym. Dzieło to rozpoczyna się obroną doktryny prawd wrodzonych, poddanych surowej krytyce w *Rozważaniach dotyczących umysłu ludzkiego* Johna Locke’a. Leibniz stwierdza tutaj, iż „cała arytmetyka i geometria są wrodzone i są w nas w sposób potencjalny”, oraz można „zbudować te nauki w czterech ścianach swojej pracowni nawet z zamkniętymi oczyma, nie dowiadując się ani wzrokiem ani nawet dotykiem o prawdach, których się potrzebuje”¹⁹⁰. Jest to zgodne z definicją aprioryczności jako poznania, które nie opiera się na świadectwie zmysłów, choć Leibniz nie definiuje tu pojęcia sądu *a priori*. Niemiecki filozof wydaje się więc utrzymywać, iż wizualizacje nie są w ogóle konieczne (przynajmniej z zasady) w poznaniu geometrycznym – nie tylko jako źródło prawd geometrycznych, ale również jako sposób zaznajamiania się z obiektami geometrycznymi. Dalej podkreśla jednak Leibniz, jak czyni to również wielu innych racjonalistów podkreśla, iż poznanie zmysłowe można rozumieć jako stopień, prowadzący do poznania prawd absolutnych, pozazmysłowych. Przyznaje, że „prawdą jest, że nie przedstawialibyśmy sobie idei, o które chodzi, gdybyśmy nigdy niczego nie widzieli ani nie dotykali. Przez cudowną bowiem ekonomię natury nie moglibyśmy mieć myśli abstrakcyjnych, które by nie wymagały czegoś zmysłowego choćby to były tylko znaki takie, jak kształty liter lub głoski, mimo że nie ma żadnego koniecznego związku między takimi dowolnymi znakami i takimi właśnie myślami”¹⁹¹. Dane zmysłowe są potrzebne, „aby mu [umysłowi] dostarczyć okazji i pobudzić uwagę w tym kierunku i skierować go raczej ku jednym niż ku drugim”¹⁹². Leibniz uznaje więc pomocniczą rolę reprezentacji postrzegalnych zmysłem wzroku (w tym, jak się wydaje, również diagramów) w edukacji. Czy można więc uznać, iż również kontakt wzrokowy z diagramem jest koniecznym warunkiem zaistnienia poznania geometrycznego? Kolejny z analizowanych fragmentów *Nowych rozważań..* pokazuje jednoznacznie, że jednak nie.

¹⁹⁰ Leibniz, G.W., *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, PWN, Warszawa 1955, str. 53-54.

¹⁹¹ Tamże, str. 54.

¹⁹² Tamże, str. 54.

Przytoczę tu mianowicie interesujące uwagi niemieckiego filozofa o procesie poznania geometrycznego osoby niewidomej i kalekiej. Należy tu najpierw wprowadzić ważne rozróżnienie na idee i wyobrażenia. Kategoria idei jest bardzo szeroka – idea to ogólnie wewnętrzny, bezpośredni przedmiot myśli. Leibniz podkreśla, że idee istnieją również poza umysłem ludzkim i jako przedmioty tym odróżniają się od obiektów zmysłowych, że mogą bezpośrednio oddziaływać na duszę¹⁹³. Wyobrażenia to z kolei po prostu forma wrażeń zmysłowych. Leibniz podkreśla, że „bardzo trzeba odróżniać *wyobrażenia* od *ściślych idei*, opartych na definicjach”¹⁹⁴. Widać to na następującym problemie: wyobraźmy sobie, że ślepiec, który zawsze odróżniał figury geometryczne za pomocą dotyku, nagle odzyskuje wzrok i proszony jest o odróżnienie tylko za pomocą zmysłu wzroku kuli od sześcianu. Leibniz uważa, iż ślepiec jest zdolny dokonać takiego odróżnienia. Otóż nie ma on co prawda wyobrażeń wzrokowych związanych figurami geometrycznymi, wie jednak, iż np. kula nie posiada żadnych punktów wyróżnionych, sześcian posiada ich za to osiem”¹⁹⁵. Te właśnie, jak pisze Leibniz, dodane do doświadczenia zmysłowego zasady rozumowe powodują, że ślepy poznaje geometrię jedynie za pomocą zmysłu dotyku, a paralityk („albo ktoś inny pozbawiony prawie że zupełnie dotyku”) jedynie za pomocą zmysłu wzroku¹⁹⁶. Podkreśla, iż „ślepi od urodzenia mogą się nauczyć geometrii, (...) chociaż najczęściej uczymy się geometrii tylko wzrokowo, (...) jak mógłby i powinien robić paralityk albo ktoś inny, pozbawiony prawie że zupełnie dotyku. I trzeba, by te dwie geometrie: niewidomego i paralityka, spotykały się i zgadzały, a nawet sprowadzały do tych samych idei, chociaż nie ma w nich wspólnych wyobrażeń”¹⁹⁷. W procesie poznawania obiektów geometrycznych kluczowe są więc dla Leibniza „zasady rozumowe”, a w tym przypadku ślepy może poznać geometrię, „o ile zależy ona od wyraźnych idei matematycznych”¹⁹⁸. Wyobrażenia,

¹⁹³ Tamże, str. 101.

¹⁹⁴ Tamże, str. 142.

¹⁹⁵ Tamże, str. 142.

¹⁹⁶ Tamże, str. 141

¹⁹⁷ Tamże, str. 141.

¹⁹⁸ Tamże, str. 141.

które wiążą się z reprezentacją przestrzenną – bądź jakkolwiek inną postrzeganą zmysłami – nie są konieczne dla poznania geometrycznego.

Stanowisko Leibniza w kwestii roli diagramów w poznaniu matematycznym uzupełnia dodatkowo podział idei na jasne i wyraźne – jedno z wielu rozróżnień które podaje Leibniz w odniesieniu do idei. Otóż według Leibniza. „idea jest jasna, gdy wystarcza do rozpoznania i odróżnienia rzeczy”¹⁹⁹. Natomiast „nazywamy wyraźnymi nie te wszystkie, które są dobrze odróżniające czyli które odróżniają przedmioty, ale te, które są dobrze zróżnicowane, tzn. które są wyraźne same w sobie i wyróżniają w przedmiocie cechy, pozwalające go poznać, co daje jego analizę lub definicję”²⁰⁰. Idea może być przy tym jednocześnie jasna i niewyraźna. W szczególności chodzi tu o idee jakości zmysłowych – a także te związane z narysowanymi figurami geometrycznymi.

Postrzegając rysunek dziesięcioboku, który to przykład podaje Leibniz, potrafimy, posiadając pewną sprawność wzrokową, łączyć z nim jasną ideę tegoż dziesięcioboku²⁰¹. Dalej czytamy, iż „jednakowoż owo *jasne wyobrażenie* albo poczucie, jakie można odnieść do dziesięcioboku (...) polega tylko na idei niewyraźnej, ponieważ nie pozwala ono wykryć natury i własności (...) dziesięcioboku, co wymaga idei wyraźnej. A ten przykład pomaga do lepszego zrozumienia różnicy pomiędzy ideami albo raczej między ideą a wyobrażeniem”²⁰². Reprezentacje przestrzenne dają nam więc idee niewyraźne, poznanie obiektów matematycznych za pomocą diagramu jest dopiero możliwe, gdy zastosujemy ściśle idee wyraźne.

Podsumowując, rozumowanie w geometrii polega według Leibniza zawsze na analizie pojęć. Dobrze obrazuje to następujący dłuższy fragment jednego z listów Leibniza, który stanowi jednocześnie dobre podsumowanie jego stanowiska w kwestii roli diagramów w poznaniu matematycznym: „Nie zgadzam jednak z

¹⁹⁹ Tamże, str. 325-326.

²⁰⁰ Tamże, str. 327.

²⁰¹ Leibniz pisze tu też o ograniczeniach zmysłu wzroku, który nie pozwala na przykład rozpoznać w danej figurze tysiącboku. „tylko niewyraźną ideę i kształtu, i jego liczebności, dopóki nie *wyróżnię* liczby, rachując. Ale znalazłszy ją, znam bardzo dobrze naturę i własności pokazanego wieloboku, jako takich, które przysługują tysiącbokowi” (tamże, str. 336)

²⁰² Tamże, str. 337. Dodajmy, że ostatni zdanie sugeruje, jakoby idea niewyraźna była bliższa wyobrażeniu.

tym, co wydajesz się utrzymywać, że ten rodzaj ogólnej pewności jest zapewniany w matematyce przez ‘jednostkowe rozumowania’ dotyczące narysowanego diagramu. Musisz zrozumieć, że geometrycy nie wywodzą swoich dowodów z rysunków, mimo iż sposób ich przedstawienia może wywoływać takie wrażenie. Zasadność rozumowania jest niezależna od rysunku, którego jedyną rolą jest ułatwienie zrozumienia jego treści oraz skoncentrowanie jego uwagi. Rozumowanie zasadza się na ogólnych sądach, definicjach, aksjomatach oraz twierdzeniach, które już zostały udowodnione, wystarczyłyby one dla owego rozumowania nawet, gdyby nie powstał żaden rysunek”²⁰³. W powyższym fragmencie widzimy jednocześnie, jak Leibniz ustosunkowuje się do problemu natury rozumowań opartych o jednostkowy diagram. Rozumowania geometryczne są zawsze ogólne ponieważ oparte są na pojęciach, a nigdy na samym rysunku.

Podsumowując krótko analizę stanowisk Kartezjusza i Leibniza zwróćmy uwagę, iż w pewnym sensie nadają oni reprezentacjom przestrzennym w matematyce jeszcze mniejsze znaczenie, niż np. Platon; dla tego ostatniego bowiem – jak wspominałem – diagramy są koniecznym składnikiem poznania geometrycznego. Według Kartezjusza i Leibniza wiedza matematyczna jest wrodzona – wrodzoność ta dotyczy przy tym prawd matematycznych, czy też po prostu zdań²⁰⁴. Nie ma tu więc mowy o wrodzoności przestrzennego charakteru poznania geometrycznego, o której pisał Kant, a następnie wielu innych myślicieli (o czym piszę w dalszej części pracy). W ramach stanowisk dwóch omawianych filozofów, wgląd w przedmiot matematyki odbywa się w zupełności poza reprezentacjami przestrzennymi.

2.6. Empiryzm brytyjski wobec reprezentacji przestrzennych w geometrii

²⁰³ Za: Burge, T., *Frege on apriority*, w: *New essays on the a priori*, Oxford University Press, Oxford 2001, str. 32.

²⁰⁴ Ściślej rzecz biorąc, Leibniz przyjmuje nieco ostrożniejsze stanowisko – odnośnie prawd wrodzonych pisze, że „ich aktualne poznanie nie jest bynajmniej wrodzone ale to, co można nazwać poznaniem potencjalnym, jest wrodzone” (Leibniz, *Nowe rozważania...*, str. 68). Wrodzone są więc pewne dyspozycje, ale do okrycia konkretnych prawd (jak prawdy matematyki).

Trudniej jest natomiast ocenić rolę diagramu w epistemologii matematyki empirystów brytyjskich. Wydaje się, że zarówno John Locke jak i George Berkeley, o których będzie tu mowa, jako empiryści genetyczni nie widzieli trudności w posługiwaniu się reprezentacjami przestrzennymi w matematyce. Jeśli cała nasza wiedza pochodzi ze zmysłów, to także pojęcia geometryczne (jak i arytmetyczne) wywodzą się z percepcji.

Epistemologia empirystów opiera się w dużym stopniu na szerokiej kategorii idei. Idee – w tym idee związane z matematyką – mają u wszystkich empirystów źródło w doświadczeniu zmysłowym. Nie pojawia się tu w szczególności rozróżnienie pomiędzy ideą a wyobrażeniem w takiej postaci, w jakiej wprowadził je Leibniz. Wydaje się, że w przeciwieństwie do Leibniza, dla brytyjskich empirystów idea trójkąta nie jest czymś odrębnym bądź też odmiennym od diagramu (jako np. jedynie wyobrażenie). Idea trójkąta wydaje się dla każdego z trzech wspomnianych filozofów nierozzerwalnie związana z diagramem, z wizualną reprezentacją. Nie oznacza to jednak, iż fizyczny diagram jest w filozofii empiryzmu brytyjskiego rzeczywistym przedmiotem rozumowań geometrycznych. W poglądach Locke’a nie znajdujemy na przykład potwierdzenia tezy, iż zdania matematyki są indukcyjnymi uogólnieniami danych zmysłowych²⁰⁵. Według Locke’a geometria dowodzi twierdzeń absolutnie prawdziwych w tym sensie, że dowodzą one związków pomiędzy ideami, które zachodzą zawsze i wszędzie. Pisze on, np. iż postrzegając „trzy kąty w trójkącie mają tę samą sumę, co dwa kąty proste, cóż innego postrzegamy jak nie to, iż bycie równym dwóm kątom prostym w sposób konieczny zgadza się, i jest nierozłącznie powiązane z byciem trzema kątami w trójkącie?”²⁰⁶. Na tym poprzestaną, jeśli chodzi o kwestie filozoficzne. Poniżej przyjrzę się zagadnieniom metodologicznym, a mianowicie stanowisku Locke’a i Berkeleygo odnośnie kontrowersyjnej, jednostkowej natury diagramów.

²⁰⁵ Stanisław Janeczek podkreśla, że kategoria indukcji jest prawie nieobecna, posługuje się nią jednak w pracy *On the conduct of reasoning*. (Por. Janeczek, S., *Logika czy epistemologia?*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2003, str. 396)

²⁰⁶ Locke, J., *Essay concerning Human Understanding*, w: *From Descartes to Locke*, red., T.V. Smith, M. Grene, The University of Chicago Press, Chicago, London 1967, str. 418.

Locke zauważa problem jednostkowości diagramów. Píše on, iż kiedy matematyk udowodniłby „twierdzenie dotyczące jednego trójkąta, albo okręgu, jego wiedza nie sięgałaby poza jednostkowy diagram”²⁰⁷. Jednak matematyka daje wiedzę ogólną (w powyżej opisanym znaczeniu). Tym, co pokazuje matematykowi, że „jeśli trzy kąty trójkąta były raz równe dwóm kątom prostym, zawsze będą równe dwóm kątom prostym”, jest idea „niezmienności (*immutability*) tych samych relacji pomiędzy tymi samymi niezmiennymi (*immutable*) rzeczami”²⁰⁸. Przywołując w myśli dowód tego twierdzenia, prawdziwość twierdzenia ogólnego wypływa z postrzegania (*perception*), że badany związek zachodzi zawsze. Dalej pisze on, iż „tylko na tej podstawie jednostkowe (*particular*) dowody w matematyce dają wiedzę ogólną”²⁰⁹.

Trudno oprzeć się wrażeniu, że uwagi Locke’a nie są w pełne zadowalające. Bardziej wnikliwe są, jak się wydaje, uwagi Berkeley’a pochodzące z *Traktatu o zasadach ludzkiego poznania*²¹⁰. Chodzi tu o jego znaną krytykę abstrakcyjnych pojęć ogólnych. Według irlandzkiego filozofa, nie istnieje w naszych umysłach, ani nie jest możliwe wytworzenie np. ogólnej idei trójkąta, czy idei trójkąta w ogóle. Kto z bowiem z nas, zapytuje Berkeley, mógłby przedstawić sobie ideę trójkąta, który nie jest ani prosty, ani rozwartokątny, ani równoboczny, itd., ale jest wszystkimi nimi na raz i jednocześnie żadnym z nich²¹¹? Zawsze przedstawiamy sobie więc jednostkową ideę geometryczną, czyli jednostkowy diagram. Możemy przy tym powiedzieć, iż idea jest ogólna tylko w tym sensie, że rozważamy ją jako reprezentującą, czy zawierającą większą ilość jednostkowych idei: „jednostkowy trójkąt, który rozważam, nieistotne jakiego rodzaju, w równym stopniu reprezentuje (*stand for and represent*) wszystkie trójkąty i w tym sensie jest ogólny”²¹². W dowodach geometrycznych rozważana jest tak właśnie rozumiana idea trójkąta, poprawne dowody geometryczne nie odwołują się więc do jednostkowych cech

²⁰⁷ Tamże, str. 422.

²⁰⁸ Tamże, str. 422.

²⁰⁹ Tamże, str. 422.

²¹⁰ Korzystam tekst oryginalnego, tłumaczenia jego fragmentów są również wykonane przeze mnie.

²¹¹ Por. Berkeley, G., *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 25.

²¹² Tamże, str. 26.

diagramu, który stanowi jego ilustrację: „prawdą jest, iż diagram, który mam przed oczyma (*I have in view*) zawiera wszystkie te cechy jednostkowe (*particulars*), jednak w dowodzie nie są one w ogóle wspomniane. Nie jest w nim powiedziane, że trzy kąty równe są dwóm prostym, ponieważ jeden z nich jest prosty, bądź ponieważ boki pomiędzy którymi leży są tej samej długości. Wystarcza to do pokazania, że kąt prosty mógł być kątem rozwartym, a boki różnej długości, i dla tych przypadków dowód byłby również poprawny”²¹³.

Ogólność twierdzenia wypływa więc z odpowiedniej konstrukcji dowodu (nie nawiązującego w swoich krokach do jednostkowych własności trójkątów jako prostokątnych, itd.), a nie z nawiązania ani udziału w nim ogólnej idei trójkąta. Inaczej mówiąc dowód nie dotyczy pojęcia ani idei trójkąta w ogóle, ponieważ takowy nie istnieje. Istnieją jedynie jednostkowe trójkąty i ich jednostkowe diagramy, przez odpowiednią konstrukcję dowodu możemy jednak wykazywać prawdy ogólne, tzn. ważne dla większej ilości figur.

Przypomnijmy, że idea trójkąta łączy się dla Berkeleyya z odpowiadającym mu diagramem. Ideę powyższego wywodu można więc również ująć następująco: rozważając figury geometryczne, np. w rozumowaniach czy dowodach, przedstawiamy sobie jednostkową figurę geometryczną. Korzystanie z nich w dowodach twierdzeń ogólnych (dotyczących większej ilości jednostkowych trójkątów) robimy to w taki sposób, że jednostkowy diagram reprezentuje większą ilość figur, a dowód nie odwołuje się do żadnych jednostkowych narysowanego diagramu.

Dodajmy, że w jednym z listów Berkeley wskazuje, iż nisko ocenia nawet heurystyczną wartość diagramów; pisze: „wydaje mi się, że w rozumowaniach geometrycznych nie dokonujemy żadnego odkrycia przez rozważanie idei linii, których własności badamy”²¹⁴. W szczególności widać to w przypadku problemów analizy matematycznej, jak poszukiwania stycznych do linii. Tu co prawda „figura jest narysowana na papierze i w ten sposób zasugerowana twemu umysłowi

²¹³ Tamże, str. 27.

²¹⁴ Berkeley, G., *Letter to Samuel Molyneux (1709)*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 1. red. Ewald, W.B, Clarendon Press, Oxford 1996, str. 20.

(*suggested to your Fancy*)”²¹⁵, jednak „równania, albo natura krzywej w ten sposób wyrażona, a nie idea z nią związana, prowadzi do rozwiązania”²¹⁶.

2.7. Spór empiryzmu z racjonalizmem w filozofii geometrii a kategoria przestrzeni

Rozważając empiryzm w filozofii geometrii XVII i XVIII wieku warto wspomnieć o relacji geometrii do kategorii przestrzeni. Otóż w okresie tym rozpowszechniony był pogląd, iż geometria jest, jak stwierdził Michał Heller, „nauką o rzeczywistym świecie, a mianowicie o stosunkach przestrzennych, zachodzących w świecie, i tym tylko różni się od innych nauk doświadczalnych, że skrajnie idealizuje przedmiot swoich badań”²¹⁷. Przy takim ujęciu natury geometrii stosunki przestrzenne, albo sama przestrzeń stają się jej przedmiotem²¹⁸. W konsekwencji geometrię można w pewnym sensie uważać za naukę empiryczną, o tyle przynajmniej, że dotyczy zajmuje się badaniem własności świata fizycznego (nie chcę wchodzić w to, na ile stwierdzenie to adekwatnie wyraża stanowisko omawianych empirystów brytyjskich, ale na pewno jest z nimi zgodne w ogólnych zarysach). Stanowisko to pozostawało jednakowoż w konflikcie z powszechnym również w XVII i XVIII wieku przekonaniem o absolutnej pewności twierdzeń geometrii, o najwyższej ścisłości pojęć i rozumowań geometrycznych, jak również przekonaniem, iż dowody matematyczne nie są prawdami eksperymentalnymi. Lisa Shabel uważa, że pogodzenie tych dwóch stanowisk było jednym z głównych problemów, przed którymi stała filozofia matematyki okresu nowożytnego. Sprowadzało się ono do następującego pytania: „przy założeniu, że w skład ontologii matematyki wchodzi m.in. mierzalne (*quantifiable*) obiekty *empiryczne*,

²¹⁵ Tamże, str. 20.

²¹⁶ Tamże, str. 20.

²¹⁷ Heller, M., *Filozofia Przyrody*, Wydawnictwo Znak, Kraków 2007, str. 81.

²¹⁸ Dodajmy, iż taki sposób rozumienia geometrii był w XVII wieku jeszcze względnie nowy, był też z pewnością związany z szerokimi zastosowaniami geometrii w naukach przyrodniczych (por. Hodgkin, L., *A History...*, str. 197-198).

jak wyjaśnić paradygmatyczne cechy czysto matematycznych rozumowań: ogólności, pewności, konieczności²¹⁹. Wydaje się, że przed tym problemami stali wszyscy powyżej wspomniani filozofowie, z wyjątkiem Leibniza, który w sposób najwyraźniejszy odciął geometrię od związków z tym, co wizualnie postrzegalne. Wydaje się więc, że przekonanie o empirycznym przedmiocie geometrii współistniało z apriorystyczną epistemologią.

Jak można odnieść ów stan rzeczy do zagadnienia roli diagramów w matematyce? Można ogólnie stwierdzić, iż wspomniane „napięcie” pomiędzy empiryczną i apriorystyczną interpretacją geometrii odnosi się również do interpretacji roli diagramu. Z jednej strony można go bowiem postrzegać jako „pośredniczący” pomiędzy przestrzenią fizyczną, którą wyraża, a umysłem matematyka. Z drugiej jednak strony geometria jest nauką dedukcyjną. Nie bada ona więc diagramów jako obiektów empirycznych, przekształciło by ją to bowiem w naukę indukcyjną, którego to statusu nie przyznawali jej nawet empiryści brytyjscy. W tym miejscu poprzestaną jedynie na tych ogólnych uwagach dotyczących kategorii przestrzeni. Relacji pomiędzy kategorią przestrzeni i epistemologią matematyki przyjrę się szerzej w rozdziale dotyczącym geometrii nieeuklidesowych.

2.8. Newton o przestrzeni oraz poznaniu geometrycznym

Na koniec tej części rozdziału dodam kilka uwag o filozofii geometrii Isaaca Newtona, która dobrze obrazuje powyżej opisany rozdźwięk pomiędzy empirystyczną a racjonalistyczną interpretacją natury geometrii. W pierwszym rzędzie należy podkreślić, iż to Newtonowskie pojęcie przestrzeni stało się najbardziej wpływowym w fizyce i filozofii aż do początku XX wieku. Dla Newtona, przestrzeń była nieruchomym, jednorodnym, ciągłym oraz nieskończonym bytem, w którym, jak w pojemniku, umieszczone są fizyczne ciała.

²¹⁹ Shabel, L., *Apriority and Application...*, str. 30.

W przeciwieństwie do Kartezjusza, Newton uważał, że przestrzeń jest pozafizyczna oraz istnieje w sposób niezależny od ciał w niej się znajdujących.

Jak taka przestrzeń ma się do geometrii? Wielu komentatorów uważa, iż przestrzeń stanowi dla Newtona przedmiot geometrii. Jak podkreśla Lisa Shabel, u Newtona poznanie geometryczne dostarcza nam wiedzy o nieskończonej rozciągłej, nieruchomej, wiecznej, ciągłej i niezniszczalnej przestrzeni²²⁰. L. Shabel pisze, iż, „według Newtona nasza wiedza dotycząca rzeczy mierzalnych (*quantifiable*) (które zajmują części przestrzeni) jest osiągnięta poprzez wiedzę o ogólnej naturze rozciągłości, wiedzę o tym, w jakim stosunku części przestrzeni pozostają do przestrzeni rozumianej jako nieskończona całość”²²¹. Taką wiedzą jest dla Newton właśnie geometria. Poznanie geometryczne wypływa jednak z doświadczeń związanych z ciałami fizycznymi oraz ich ruchem. Jak pisze sam Newton we wstępie do pierwszego wydania słynnych *Matematycznych zasad filozofii przyrody*, „geometria jest oparta na praktyce mechanicznej i jest niczym innym jak tylko częścią ogólnej mechaniki, która ściśle stawia twierdzenia i przeprowadza dowody w dziedzinie sztuki mierzenia”²²². Geometria jest, w przekonaniu Newtona, nauką badającą wielkości ciał, podczas gdy mechanika bada ich ruchy, a „mechanika tym różni się od geometrii, że to, co jest idealnie dokładne, nazywa się geometrycznym; to zaś, co jest mniej dokładne, nazywa się mechanicznym”²²³.

Kwestia możliwości poznawczych umysłu ludzkiego w zakresie poznania

²²⁰ Por. tamże, str. 39.

²²¹ Tamże, str. 39. Warto dodać, że Newton pisze o przestrzeni absolutnej, jak również o przestrzeni względnej. Przestrzeń absolutna jest rzeczywista i obiektywna, podczas gdy przestrzeń względna „powstaje na gruncie indywidualnych postrzeżeń” (Sytnik-Czetwertyński, J., *Metafizyczne zasady...*, str. 62). Jest ona tworem praktycznego rozumu, a odnosi się do pewnych postrzegalnych zmysłowo przestrzeni, zależnych od danego układu odniesienia – np. przestrzeni ziemskiej nas otaczającej, która sprawiając wrażenie absolutnej, jest pewnym układem poruszającym się wraz z Ziemią dookoła Słońca, ale nie posiadającym cechy absolutności, jednorodności itd. Jest ona tworem praktycznego rozumu, jest w związku z tym relatywna i pozorna, w przeciwieństwie do i rzeczywistej i obiektywnej przestrzeni absolutnej. Newton podkreśla również, że przestrzeń absolutna i względna nie są tym samym pod względem matematycznym, numerycznym (por. Sytnik-Czetwertyński, J., *Metafizyczne zasady...*, str. 62 oraz str. 104). Wydaje się przy tym, że geometria euklidesowa dotyczy się przede wszystkim obszarów przestrzeni absolutnej. O ile mi wiadomo Newton nie określił bliżej własności matematycznych przestrzeni względnej.

²²² Newton, I., *Selections from the Mathematical Principles of Natural Philosophy*, (w:) *From Descartes to Locke*, red., T.V. Smith, M. Grene, The University of Chicago Press, Chicago, Londre 1967, str. 331 (tłumaczenie za: Heller, M., *Filozofia Przyrody...*, str. 82).

²²³ Tamże, str. 330, (tłumaczenie za: Heller, M., *Filozofia Przyrody...*, str. 81).

przestrzeni fizycznej ujawniają jednak rozdzarcie Newtona pomiędzy epistemologią empirystyczną i apriorystyczną. Z jednej bowiem strony Newton sądził, iż „posiadamy narzędzia poznawcze, potrzebne do uzyskania apriorycznej wiedzy o matematycznych aspektach (*features*) świata fizycznego”²²⁴. Lisa Shabel zauważa również, że „Newton podąża śladami Kartezjusza postulując władzę rozumienia jako rzeczywiste źródło poznania matematycznego, narzędzie za pomocą którego możemy zrozumieć (*comprehend*) wieczną i niezmienną (*immutable*) naturę rozciągłości, którą rozumie jako nieskończoną przestrzeń (*which he conceives as infinite space*)”²²⁵. Z drugiej natomiast strony zauważa Newton oddalenie obiektów geometrii od empirii, oraz jest sceptykiem w zakresie możliwości poznania świata fizycznego przy pomocy geometrii. Według Newtona „obiekty geometryczne nie są bezpośrednimi reprezentacjami ani jednostkowych bytów fizycznych, ani wyidealizowanych, ogólnych form (*idealized universal forms*)”²²⁶; wielki fizyk uważał je raczej „za twory idealne, abstrakcyjne, urojone”²²⁷.

Podsumowując, w Newtonowskim podejściu do matematyki widać rozdźwięk pomiędzy przekonaniem, że „czysta’ matematyka (w szczególności geometria) jest absolutnie pewna i prawdziwa” oraz tym, że był świadom, że „moc ludzkiego intelektu jest ograniczona”²²⁸. Z drugiej strony natomiast Newton twierdzi, iż przedmiotem geometrii jest przestrzeń, jednocześnie pozostając ogólnie przy apriorystycznej epistemologii matematyki – choć, jak pokazałem wcześniej, akcentując w niej rolę diagramu, jako kierującego umysł ku prawdzie matematycznej.

²²⁴ Shabel, L., *Apriority and Application...*, str. 40.

²²⁵ Tamże, str. 39.

²²⁶ Sepkoski, D., *Nominalism and constructivism...*, str. 55.

²²⁷ Sytnik-Czetwertyński, J.: *Metafizyczne zasady...*, str. 105.

²²⁸ Sepkoski, D., *Nominalism and constructivism...*, str. 51.

Rozdział 3. Filozofia geometrii Immanuela Kanta a wizualizacje

Rozważając rolę wizualizacji w poznaniu matematycznym nie można ominąć filozofii Immanuela Kanta. Można powiedzieć, iż na nowo postawiła ona problem roli wizualizacji w poznaniu matematycznym oraz stała się punktem odniesienia dla wszystkich dalszych ujęć roli wizualizacji w poznaniu matematycznym. Również większość współczesnych prac dotyczących wizualizacji w matematyce odwołuje się w jakiś sposób do Kanta, nawet jeśli czyni to za pomocą krótkiego komentarza historycznego. Wymieńmy więc w pierwszej kolejności główne powody, dla których filozofia Kanta ma takie znaczenie, uzasadniając tym samym wagę tego rozdziału dla dalszej części pracy.

Po pierwsze, Kant jako pierwszy przedstawia systematyczną epistemologiczną charakterystykę roli przestrzennego pierwiastka w poznaniu geometrycznym. Przestrzenny charakter reprezentacji postrzega przy tym Kant jako źródło apriorycznego charakteru poznania matematycznego. Posługując się kategoriami czystej naoczności przestrzeni oraz konstrukcji, Kant rozwiązuje też (w swoim mniemaniu) klasyczny problem ogólności rozumowań opartych o jednostkowy diagram.

Po drugie, wraz z filozofią kantowską nowego znaczenia nabiera termin „intuicja”. Kant oddaje ów termin niemieckim pojęciem *Anschauung*, które tłumaczy się zwykle jako „naoczność”, które można jednak również przełożyć jako „intuicja” (kwestiom terminologicznym związanym z terminami „intuicja” oraz „naoczność” przyjrzyć w dalszej części rozdziału). Do *Anschauung* nawiązują XIX wieczni filozofowie geometrii jako do intuicji przestrzennej, przestrzeni wyobrażeniowej – władzy poznawczej, bądź też struktury poznawczej, która nadaje kształt naszym reprezentacjom przestrzennym i „narzuca” umysłowi prawdziwość,

bądź fałszywość poszczególnych twierdzeń. Dodajmy, że „intuicję” tą zestawia Kanta z pojęciami jako drugim zasadniczym źródłem poznania. Dychotomia intuicja-pojęcia staje się centralnym punktem kantowskiej filozofii. Każde poznanie matematyczne musi dla Kanta zawierać zarówno pierwiastek intuicyjny, jak i pojęciowy.

Po trzecie, do filozofii Kanta często nawiązywano, bowiem w odniesieniu do niej przedstawiało wielu filozofów w XIX i XX wieku swoje poglądy na temat geometrii i intuicji przestrzennej. Rzeczywiście, prawie wszyscy filozofowie rozważający rolę intuicji przestrzennej w poznaniu geometrycznym nawiązywali w jakiś sposób do Kanta – zwłaszcza jeśli chodzi o epistemologię. Co więcej, nawet ci, którzy pod wieloma względami oddalają się od myśli kantowskiej (jak np. Frege) podkreślają, iż ich prace są w pewnym sensie jej kontynuacją.

Od Kanta pochodzi wreszcie nowy poznawczy kontekst, w którym prowadzone są rozważania na temat roli wizualizacji w poznaniu matematycznym – mianowicie podział na zdania analityczne i syntetyczne. Geometria jest, według Kanta, nauką syntetyczną, co oznacza, iż analiza pojęć geometrycznych nie wystarcza do przeprowadzenia dowodów geometrycznych – konieczne jest, jak sądzi, odwołanie do rysunku.

W rozdziale tym omawiam filozofię geometrii Kanta, omijając jego filozofię arytmetyki – pojawia się ona w tym rozdziale tylko o tyle, o ile używam terminu „matematyka”, pisząc wtedy o tym, co jest wspólne zarówno dla arytmetyki jak i geometrii. W pierwszej kolejności podam kilka ogólnych uwag o epistemologii Kanta. Wspomnę w szczególności ogólnie o istotnych dla kantowskiego ujęcia dychotomii intelekt-zmysłowość, oraz pojęcia-naoczność. W dalszej kolejności przyjrę się kantowskim podziałom na zdania analityczne i syntetyczne z jednej, oraz *a priori* i *a posteriori* z drugiej strony, aby następnie wyjaśnić w jakim sensie geometria jest dla Kanta nauką syntetyczną *a priori*. Następnie spróbuję przybliżyć, w jakim sensie rozumowania geometryczne odwołują się do czystej naoczności. Tu przedstawię najpierw pojęcie konstrukcji oraz rolę, jaką ono gra w uzasadnianiu ogólności poznania matematycznego. Dalej przyjrę się zestawieniu roli intuicji (naoczności) i pojęć w rozumowaniach geometrycznych.

Analizie poddaję tu tylko filozofię krytyczną Kanta, tzn. *Krytykę czystego rozumu* i *Prolegomenę*. Chciałbym tu podkreślić, iż w niewielkim stopniu analizuję tu ogromną tradycję interpretacji Kanta. Można tu wymienić XIX- i XX-wiecznych neokantystów, po drugiej wojnie światowej chociażby Jaako Hintikę, Charlesa Parsonsa i Michaela Friedmana czy w filozofii polskiej prace Ewy Piotrowskiej. Moim celem jest tu jednak przede wszystkim analiza tekstów źródłowych. Do kilku ważniejszych interpretacji filozofii geometrii Kanta w kontekście wspomnianej roli czystej naoczności przestrzeni w rozumowaniach geometrycznych nawiązuję jedynie krótko w ostatniej części rozdziału.

3.1. Ogólne uwagi o epistemologii Kanta

W mojej pracy nie ma oczywiście miejsca na dokładną analizę epistemologii Kanta, ani też jej specyficznych problemów z nią związanych. Zarysuję tu ogólnie główne aspekty systemu królewieckiego filozofa, w szczególności natomiast te jej aspekty, które są istotne dla przedstawienia jego filozofii geometrii.

Filozofia Kanta zawiera zarówno elementy racjonalizmu jak i empiryzmu, bowiem z jednej strony Kant wychodzi z charakterystycznego dla racjonalizmu założenia, że istnieją sądy konieczne oraz prawdziwe *a priori*, tzn. takie, których poznanie dokonuje się niezależnie od poszczególnych, konkretnych doświadczeń zmysłowych oraz nie dotyczy obiektów fizycznych jako swoich przedmiotów. Kant neguje również możliwość istnienia jakiegokolwiek koniecznej i ogólnej wiedzy opartej wyłącznie na doświadczeniu fizycznym; w słowach Kanta, „doświadczenie poucza nas wprowadzić, że coś jest takie a takie, nie zaś, że nie może być inne”²²⁹. Z drugiej natomiast strony, jak czytamy we wstępie do *Krytyki czystego rozumu* „żadne poznanie nie wyprzedza w nas doświadczenia i wszelkie się z nim

²²⁹ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, B3.

rozpoczyna”²³⁰. Kant odrzuca więc możliwość istnienia wiedzy wrodzonej, w postaci sądów, czy nawet predyspozycji do ich wydawania, które istnieją w duszy (czy rozumie) przed zaistnieniem doświadczenia zmysłowego i niezależnie od niego. Według Kanta więc całe poznanie pochodzi od zmysłów – choć „nie całe poznanie wypływa z tego doświadczenia”²³¹. Poznanie nasze jest bowiem ograniczone i zdeterminowane przez wrodzone struktury poznawcze. Aprioryczną wiedzę możemy osiąść jedynie o tych właśnie strukturach poznawczych, samej formie wszelkiego poznawania: „Jeżeli oglądanie przedmiotów musiałoby się stosować do ich własności, to nie rozumiem, jak można by o nich cokolwiek powiedzieć *a priori*, jeżeli natomiast przedmiot jako obiekt zmysłów stosuje się do własności naszej zdolności oglądania, to mogę sobie całkiem dobrze przedstawić tę możliwość”²³². Takie podejście pozwala utrzymać tezę o istnieniu poznań *a priori*, przy czym „tylko to z rzeczy poznajemy *a priori*, co sami w nie wkładamy”²³³.

Również matematyka jest u Kanta określona przez owe wrodzone struktury poznawcze – odnosi się ona do nich w pewnym sensie jako do swojego przedmiotu. Geometria kantowska dotyczy natomiast w szczególności czystej naoczności przestrzeni, apriorycznej formy wszelkiego postrzegania obiektów w przestrzeni. Czysta naoczność przestrzeni uprawomocnia aprioryczność sądów geometrii, jednocześnie jednak łączy się z nią szereg istotnych problemów filozoficznych. Najważniejszy z nich dotyczył natomiast syntetyczności geometrycznego poznania. Te właśnie problemy będą też w dużym stopniu przedmiotem niniejszego rozdziału.

Dalsze rozważania zaczniemy od przedstawienie dwóch fundamentalnych władz poznawczych i związanych z nimi typów poznania. Według Kanta istnieją mianowicie „dwa pnie ludzkiego poznania, które, być może, wyrastają ze wspólnego, lecz nam nieznanego korzenia, mianowicie zmysłowość i intelekt.

²³⁰ Tamże, B I.

²³¹ Tamże, B I. Kant uważa, iż taka filozofia jest swoistym przewrotem kopernikańskim w filozofii, „dotychczas przyjmowano, że wszelkie poznanie musi się dostosowywać do przedmiotów. (...) spróbujmy więc raz, czy się nam lepiej nie powiedzie przy rozwiązywaniu zadań metafizyki, jeżeli przyjmiemy, że to przedmioty muszą się dostosowywać do naszego poznania” (tamże, B XVI).

²³² Tamże, B XVII.

²³³ Tamże, B XVIII.

Przez pierwszą z nich przedmioty są nam dane, przez drugi zaś są pomyślane²³⁴. Zmysłowość (*Sinnlichkeit*) to zdolność uzyskiwania wyobrażeń, czy odbiorczości wrażeń zmysłowych, intelekt (*Verstand*) jest natomiast „zdolnością wytwarzania samemu przedstawień lub też samorzutnością poznania”, intelekt to „zdolność pomyślenia przedmiotu naoczności zmysłowej”²³⁵. Z podziałem tym związana jest bezpośrednio druga kluczowa dla kantowskiej filozofii dychotomia pojęcia-intuicje. Nie ma tu miejsca na bliższą charakterystykę natury pojęć u Kanta, ani na związaną z nimi transcendentalną dedukcję kategorii. Można tu jedynie stwierdzić, iż według niemieckiego filozofa pojęcia nie odnoszą się bezpośrednio do przedmiotu poznania, swoje źródło mają w charakteryzującej intelekt samorzutności poznania. Na początku *Estetyki Transcendentalnej* określa natomiast Kant naoczność jako „sposób, w jaki odnosi się ono [poznanie] do przedmiotów bezpośrednio i do którego jako środka do celu zmierza wszelkie myślenie”²³⁶. Dalej rozróżnia on naoczność zmysłową, czy też empiryczną (*empirische Anschauung*) oraz czystą naoczność (*reine Anschauung*). Naoczność zmysłowa składa się z poszczególnych danych zmysłowych, czysta naoczność to sama forma poznania, a również to, co poznanie umożliwia. Kategoria czystej naoczności jest, jak wiadomo, kluczowa dla filozofii matematyki Kanta, ją też analizuję w dalszej części rozdziału. Kończąc te ogólne uwagi należy podkreślić, iż każde poznanie ma według Kanta wymiar pojęciowy oraz naoczny. Jak podkreśla królewiecki filozof, naoczności oraz pojęcia „stanowią składniki wszelkiego poznania, tak że ani pojęcia bez odpowiadającej im w pewien sposób naoczności, ani naoczność bez pojęć nie może dostarczyć poznania”²³⁷. Jak pisze dalej Kant, „bez zmysłowości nie byłby nam dany żaden przedmiot, bez intelektu żaden nie byłby pomyślany”²³⁸.

W pierwszej kolejności zwrócę jednak uwagę na kantowskie podziały na zdania analityczne i syntetyczne, oraz *a priori* i *a posteriori*. Należy tu jednak poczynić pewną istotną uwagę terminologiczną odnoszącą się do kategorii „intuicji”. Otóż tłumacz *Krytyki czystego rozumu*, Roman Ingarden, podkreśla, iż

²³⁴ Tamże, A15/B29.

²³⁵ Tamże, A51/B75

²³⁶ Tamże, A19/B33.

²³⁷ Tamże, A50/B74.

²³⁸ Tamże, A51/B75.

termin ten odpowiada dokładnie terminowi łacińskiemu *intuitus*. Rezygnuje jednak z użycia polskiego terminu „intuicja” ze względu na liczne konotacje znaczeniowe, które w międzyczasie do tego terminu przyrosły (w szczególności wspomina o znaczeniu, które temu terminowi nadał Henri Bergson). Warto zarazem zwrócić uwagę, iż tłumacze angielscy decydują się jednak tłumaczyć termin *Anschauung* jako *intuition*. Do takiego tłumaczenia będę też nawiązywał w mojej pracy, m.in. ze względu na szeroko cytowaną tu literaturę anglojęzyczną. Otóż stosowany jest tam często termin „intuition” w znaczeniu ogólnie odpowiadającym polskiemu terminowi „intuicja”, a jednak w jakimś sensie nawiązującym do filozofii Kanta. Nawiązanie to byłoby utracone, gdyby rygorystycznie trzymać się terminu „naoczność” w kontekście filozofii kantowskiej, oraz „intuicja” w pozostałych kontekstach, wyraźnie te znaczenia oddzielając. Termin „naoczność” będę więc w niektórych miejscach tłumaczył jako „intuicja”, o ile pojawia się w różnych komentarzach do Kanta. Pozostając jedynie w obrębie myśli Kanta będę jednak, utartym zwyczajem, stosował termin „naoczność”. Zaznaczam przy tym zawsze, kiedy termin „intuicja” nawiązuje do Kanta, a kiedy nadaje mu się znaczenie nie związane bezpośrednio z filozofią kantowską. Dodam, iż w jednym z podrozdziałów w niniejszym rozdziale piszę o relacji między pojęciem a intuicją w poznaniu geometrycznym. W tym miejscu zdecydowałem się na użycie terminu „intuicja”, gdyż zestawienie jej roli z „pojęciem” jako takim jest jednym z głównych wątków w mojej pracy. Kantowska dychotomia pojęcia-naoczność jest przy tym szczególnym przypadkiem dychotomii pojęcia-intuicja, w tym, szerszym kontekście chciałbym ją więc umiejscowić.

3.2. Charakterystyka zdań apriorycznych, analitycznych oraz koniecznych

Przejdźmy do istotnej dla dalszej części pracy charakterystyki podziałów na sądy *a priori* i *a posteriori* z jednej, oraz analityczne i syntetyczne z drugiej strony. Zaznaczmy na początku, iż Kant pisze zarówno o sądach jak i poznaniach *a*

*priori*²³⁹. Nie wchodząc w analizę relacji tych dwóch terminów (które wydają się dla Kanta być w tym kontekście bliskoznaczne), stwierdźmy, iż poznanie *a priori* to takie, które jest „niezależne od doświadczenia, a nawet od wszelkich podnieć zmysłów”²⁴⁰. Przy czym będziemy „przez poznanie *a priori* rozumieli nie takie poznanie, które dokonuje się niezależnie od tego lub owego, lecz od wszelkiego doświadczenia”²⁴¹. Taką definicją sądu apriorycznego można chyba uznać za klasyczne ujęcie aprioryczności. Warto tu dodać, iż Kant wiąże bardzo silnie pojęcie aprioryczności z pojęciem konieczności²⁴². Zakłada on, podkreślając to od razu na pierwszych stronach Wstępu do *Krytyki czystego rozumu*, iż empiria nie może dostarczyć nam poznania pewnego. Pisze, iż „doświadczenie poucza nas wprawdzie, że coś jest takie a takie, nie zaś, że nie może być inne”²⁴³. Stąd żaden konieczny sąd nie może być wyprowadzony z doświadczenia: „jeżeli mamy twierdzenie, które myślimy wraz z jego koniecznością, to jest to sąd *a priori*”²⁴⁴. Z tekstu *Krytyki* można przy tym wywnioskować, że zależność ta zachodzi również w drugą stronę: „co bowiem wedle wszelkich pozorów poznaje się *a priori*, to już tym samym uchodzi za konieczne”²⁴⁵. Wydaje się więc, iż klasa sądów *a priori*, oraz sądów koniecznych jest dla Kanta identyczna. Należy tu dalej podkreślić związek pomiędzy apriorycznością oraz ogólnością sądów. Doświadczenie nigdy nie dostarcza sądom jego dotyczącym ścisłej ogólności, a jedynie „ogólność przyjętą umownie i porównawczą (przez indukcję)”²⁴⁶ – nie istnieją więc ściśle ogólne sądy *a posteriori*. Z drugiej strony ogólność przysługuje, jak się wydaje wszystkim sądom *a priori*, co potwierdza następujący, podsumowujący powyższe rozważania,

²³⁹ Nie rozważam tutaj różnic pomiędzy pojęciem zdania i pojęciem sądu. Kant pisze tu o głównie o sądach (*Urteil*), ja będę jednak również wymiennie pisał o zdaniach analitycznych, apriorycznych, itd. Można jednak u Kanta odnaleźć uwagi o rozróżnieniu pomiędzy zdaniem i sądem, tą kwestią jednak nie będę się w mojej pracy zajmował.

²⁴⁰ Tamże, B2.

²⁴¹ Tamże, B3.

²⁴² Sądy konieczne Kant nazywa również apodyktycznymi.

²⁴³ Tamże, B3.

²⁴⁴ Tamże, B3.

²⁴⁵ Kant, I., *Prolegomena*, PWN, Warszawa 1993, str. 40.

²⁴⁶ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, B3.

fragment: „konieczność i ścisła ogólność są przeto niezawodnymi (*sichere*) znamionami poznania *a priori* i należą też do siebie nieodłącznie”²⁴⁷.

Dalej wprowadza Kanta słynne rozróżnienie na sądy analityczne i syntetyczne. Zacytuję tu dłuższy fragment, kluczowy dla dalszych rozważań związanych z syntetycznością geometrii:

„We wszystkich sądach, w których pomyślany jest stosunek podmiotu do orzeczenia (...) stosunek ten jest możliwy w sposób dwojaki. Albo orzeczenie B należy do podmiotu A jako coś, co jest (w sposób ukryty) zawarte w pojęciu A, albo B leży całkiem poza pojęciem A, choć pozostaje z nim w związku. W pierwszym przypadku nazywam sąd analitycznym, w drugim zaś syntetycznym. (Twierdzące) sądy analityczne są więc sądami, w których powiązanie orzeczenia z podmiotem jest pomyślane przez utożsamienie, sądy natomiast, w których to powiązanie pomyślane jest bez utożsamienia, nazywać się winny syntetycznymi. Pierwsze można nazwać sądami wyjaśniającymi, drugie zaś sądami rozszerzającymi [naszą wiedzę], tamte bowiem nie dorzucają swym orzeczeniem nic do pojęcia podmiotu, lecz jedynie przez rozbiór rozbijają je na pojęcia składowe, które już były w nim, choć mętnie, pomyślane”²⁴⁸.

W dalszej części tekstu Kant dodaje również, iż wszystkie sądy analityczne „opierają się całkowicie na zasadzie sprzeczności”, sądy syntetyczne natomiast „nigdy nie mogą powstać na podstawie samej tylko zasady analizy, mianowicie zasady sprzeczności”²⁴⁹.

Można wyróżnić trzy główne charakterystyki kantowskiego sądu analitycznego, które wyłaniają się z przytoczonych tu poglądów Kanta:

1) W sądzie analitycznym orzeczenie jest już pomyślane (przez utożsamienie) w pojęciu podmiotu.

²⁴⁷ Tamże, B4.

²⁴⁸ Tamże, B10-11.

²⁴⁹ Kant, I., *Prolegomena*, str. 21-22.

2) Sądy analityczne (w przeciwieństwie do syntetycznych) nie rozszerzają wiedzy – w orzeczeniu nie jest zawarte nic, co nie byłoby już pomyślane w pojęciu podmiotu.

3) Sądy analityczne (w przeciwieństwie do syntetycznych) opierają się na zasadzie sprzeczności, tzn. można je „wyprowadzić” z zasady sprzeczności.

Powyższe charakterystyki są bardzo ważne dla historii pojęcia analityczności. Z każdego z tych trzech znaczeń wyrasta pewien typ rozumienia kategorii analityczności. W dalszej kolejności przyjrze się więc krótko każdemu z nich. Warto od razu podkreślić, iż powyższe charakterystyki pojęcia analityczności (w szczególności pierwsza z nich, w najmniejszym trzecia) odnoszą się do podmiotowo-orzecznikowej struktury zdania. Można je jednak rozważać w oderwaniu od tak pojętej struktury zdania.

Do pierwszej ze wspomnianych charakterystyk – mimo, że opartej na podmiotowo-orzecznikowej strukturze zdania – nawiązuje ogólne hasło łączenia analityczności z „prawdziwością na mocy znaczenia terminów występujących w zdaniu”. Zgodnie z tym rozumieniem analityczności zdania analityczne są, ogólnie rzecz biorąc, prawdami czysto pojęciowymi, tzn. takimi, których prawdziwość można pokazać przez czystą analizę znaczeń pojęć. Zauważmy, że pojawiają się tu od razu pewne problemy: czym jest znaczenie pojęcia, i czym „zawieranie się w pojęciu”? Kolejnym istotnym pytaniem jest: na jakiej mocy ustalane jest znaczenie pojęcia, skąd płynie fakt, iż orzeczenie się w nim zawiera i skąd o tym wiemy? Pytania te będą miały również znaczenie w kontekście roli wizualizacji w poznaniu matematycznym.

Taka analiza pojęciowa (jako metoda uzasadniania zdań analitycznych) jest zgodnie z drugą charakterystyką analityczności łączona z analizą logiczną. Jak pisze Kant, „jeżeli sąd jest analityczny, to (...) prawdziwość jego musi się zawsze móc dać dostatecznie poznać przy pomocy zasady sprzeczności”²⁵⁰. W jego ujęciu oznaczało to tyle, że zaprzeczenie zdania analitycznego jest sprzeczne

²⁵⁰ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, B190.

wewnętrznie, nie można utrzymywać, iż jest ono prawdziwe. Takie rozumienie analityczności było zapewne inspiracją do bezpośredniego łączenia pojęcia analityczności z logiką w XX wieku. Kant zakładał, iż logika jest nauką analityczną, takie też założenie przyjmowało się prawie zawsze w XX wiekowych rozważaniach nad pojęciem analityczności. W tym kontekście pojawiało się więc często pytanie: czy matematyka jest w tym sensie nauką podobną do logiki? Czy można wyprowadzić ją z logiki (choć oczywiście już w innym znaczeniu niż Kant), bądź też – czy można wyprowadzić ją z rozważań czysto pojęciowych? W tym kontekście sądy syntetyczne (w tym sądy geometryczne) łączono często z sędami, których uzasadnienie ma w jakimś stopniu naturę pozapojęciową i pozalogiczną. Jak dalej będę pokazywał Kant nadaje taki właśnie charakter – pozapojęciowy i pozalogiczny intuicji, czy naoczności w matematyce.

Charakterystyka zdania syntetycznego jako „rozszerzającego wiedzę” wydaje się być ogólnie rzecz biorąc najmniej jasna. U Kanta wiąże się ona z wykraczaniem w poznaniu poza to, co zawarte jest w pojęciu. Kant wydaje się też sugerować, iż wychodząc poza pojęcie, wychodzimy poza to, co w sposób *świadomy* w to pojęcie włożyliśmy. Kryteria, które zdanie musi spełniać aby rozszerzać wiedzę bywają jednak różnie rozumiane, stąd własność „rozszerzania wiedzy” nie nadaje się raczej na definicyjną charakterystykę pojęcia syntetyczności. Dodajmy, że Kant zakłada, iż zdanie, które jest prawdziwe na mocy znaczenia zawartych w nim terminów nie rozszerza wiedzy. Ta implikacja nie jest oczywista, nie przyjmował jej na przykład Frege.

3.3. Matematyka jako nauka syntetyczna *a priori*

Przypomnijmy na początek kilka znanych aspektów stanowiska Kanta. Aprioryczność matematyki jest więc dla królewieckiego filozofa bezdyskusyjna. Kant filozof pisze, że „właściwe twierdzenia matematyczne są zawsze sędami *a priori*, a nie sędami empirycznymi, gdyż odznaczają się koniecznością, której nie

można zaczerpnąć z doświadczenia”. Jak wiadomo, matematyka jest według Kanta również nauką syntetyczną. O stwierdzeniu, że sądy matematyki są syntetyczne pisze Kant, iż „zdanie to dotychczas, jak się zdaje, uszło całkowicie uwagi analityków rozumu ludzkiego, a nawet wydaje się wprost przeciwne wszelkim ich przypuszczeniom, choć jest niezaprzeczenie pewne, a w skutkach swych nader ważne”²⁵¹. Kwestia: jak uzasadnić i wytłumaczyć to, że matematyka jest nauką syntetyczną *a priori* staje się kluczowym dla dalszych rozważań Kanta²⁵².

Dlaczego więc zdania matematyki są syntetyczne? W słowach Kanta, „Co jest tutaj niewiadomą = X, na której opiera się intelekt, gdy sądzi, znajduje poza pojęciem przedmiotu A obce mu orzeczenie B, które mimo to uważa za połączone z nim?”²⁵³. Zanim odpowiem na pytanie, należy przedstawić bliżej kantowską teorię czystej naoczności przestrzeni. Dane zmysłowe pojawiają się w umyśle w postaci zgodnej z pewną ogólną formą postrzegania zmysłowego. W słowach Kanta „natrafiamy przeto *a priori* w umyśle na czystą formę zmysłowych treści naocznych w ogóle, w której oglądamy w pewnych stosunkach wszystko to, co różnorodne w zjawiskach. Ta czysta forma zmysłowości nazywa się także samą czystą naocznością (*reine Anschauung*)”²⁵⁴. Dane naoczne są więc w określony sposób ustrukturyzowane przez nasz sposób postrzegania. Według Kanta istnieją dwie czyste naoczności - przestrzeń i czas²⁵⁵. W przypadku matematyki ta pierwsza związana jest z geometrią, a druga z arytmetyką.

Czysta naoczność przestrzeni – czy inaczej przestrzeń – jest dla Kanta w ogólności „koniecznym wyobrażeniem *a priori* leżącym u podłoża wszelkich

²⁵¹ Kant, I., *Prolegomena*, str. 23.

²⁵² Zaznaczmy tutaj, iż uzasadnienie i wytłumaczenie tego, że istnieją syntetyczne sądy *a priori*, jest chyba najważniejszym celem, jaki Kant stawia sobie w *Krytyce*. Kant stwierdza, iż „można powiedzieć, że cała filozofia transcendentálna, która z konieczności poprzedza wszelką metafizykę, nie jest niczym innym, jak całkowitym rozwiązaniem postawionego tutaj pytania [tzn. o możliwość poznania syntetycznego *a priori*], tylko że w systematycznym porządku i we wszystkich szczegółach” (Kant, I., *Prolegomena*, str. 40).

²⁵³ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, B13

²⁵⁴ Tamże, B34.

²⁵⁵ Warto dodać, że są one, według Kanta, jedynymi czystymi naocznościami. Jest tak, ponieważ „wszystkie pozostałe pojęcia należące do zmysłowości, nawet pojęcie ruchu, które łączy w sobie obydwaj czynnik [tzn. przestrzeń i czas], zakładają coś empirycznego. Ruch zakłada bowiem spostrzeżenie czegoś poruszającego się. W przestrzeni zaś, rozważanej samej w sobie, nie ma nic ruchomego; to, co ruchome, musi więc być czymś, co w przestrzeni znajdujemy tylko przez doświadczenie, a więc pewnym *datum* empirycznym”.

zewnątrznych danych naocznych”²⁵⁶, i dalej, „formą wszelkich zjawisk zmysłów zewnątrznych”²⁵⁷. Nie jest ona pojęciem empirycznym ani dyskursywnym; nie ma w przestrzeni również zróżnicowania – nie składa się ona z odrębnych części²⁵⁸. Przestrzeń jest dalej czysto subiektywna, tzn. nie istnieje w żaden sposób poza umysłem – w takim choćby sensie, jak rozumiał to chociażby Newton, czy Kartezjusz. Geometria odnosi się więc w pewnym sensie, w rozumieniu Kanta, do przestrzeni jako do swojego przedmiotu, nie do samych przedmiotów doświadczenia zmysłowego, ale do tak właśnie rozumianej czystej naoczności przestrzeni, która ma „swą siedzibę tylko w podmiocie jako jego formalna właściwość”²⁵⁹. W tym też sensie jej twierdzenia mogą, według Kanta, być konieczne i *a priori* – poznanie matematyczne jest bowiem niezależne od jakiegokolwiek jednostkowego doświadczenia zmysłowego – ma swoje źródło w pełni w podmiocie poznającym.

Aby przybliżyć dalej syntetyczną naturę sądów geometrii, należy wrócić do definicji sądu syntetycznego (i analitycznego). Przypomnijmy więc, że sąd jest, według Kanta, syntetyczny, jeśli orzeczenie nie jest zawarte w podmiocie; dla stwierdzenia, czy taki sąd jest prawdziwy, nie wystarcza tylko analiza pojęcia, które odpowiada podmiotowi (jak pisze Kant, analiza tego, co w to pojęcie włożyliśmy). Według Kanta sama analiza pojęć geometrycznych nie wystarcza więc w celu dowodzenia prawd geometrycznych. W sądach syntetycznych musimy wyjść „poza dane [mi] pojęcie, żeby coś całkiem innego niż to, co było w nim pomyślane, rozważyć w [pewnym] do niego stosunku, który nie jest przeto nigdy stosunkiem tożsamości ani sprzeczności”²⁶⁰. Aby możliwe było wyjście poza pojęcie, potrzebny jest udział „trzeciego czynnika, w którym jedynie może powstać synteza dwóch pojęć”²⁶¹. Tym trzecim czynnikiem jest właśnie czysta naoczność. Aby móc stwierdzić, czy orzeczenie zawarte jest w podmiocie, musimy przedstawić sobie to pojęcie w odpowiadającej mu czystej naoczności. Na

²⁵⁶ Tamże, B 38.

²⁵⁷ Tamże, B 42.

²⁵⁸ Tamże, B38-B40.

²⁵⁹ Tamże, B 41.

²⁶⁰ Tamże, B193-194.

²⁶¹ Tamże, B194.

poziomie praktyki matematycznej oznacza to po prostu wykonanie rysunku, a równie, jak się wydaje, wewnętrzna wizualizacja przestrzenna. I tak według niemieckiego filozofa zdania „prosta jest najkrótszą linią między dwoma punktami” nie możemy uzasadnić tylko przez analizę pojęcia „prosta”. Jak pisze Kant, „moje pojęcie tego, co proste, nie zawiera w sobie niczego z wielkości, lecz tylko pewną jakość. Pojęcie tego, co najkrótsze, dołącza się więc w zupełności do pojęcia linii prostej i nie można go z niego wysnuć przy pomocy żadnej analizy. Trzeba tu przeto wziąć do pomocy naoczność, dzięki której jedynie możliwa jest synteza”²⁶². Podobnie dowodząc własności figur geometrycznych, matematyk „musi wytworzyć figurę z tego, co sam, stosując się do pojęcia, myślą w nią włożył *a priori* i przedstawił (za pomocą konstrukcji)”²⁶³. Aby wykazać, iż suma kątów w trójkącie równa jest dwóm kątom prostym, nie wystarcza analiza pojęć trójkąta, liczby trzy, itd. Dopiero przedstawienie sobie pojęcia trójkąta w czystej naoczności przestrzeni pozwoli wykazać wspomniane twierdzenie. Wtedy też, dowodząc tego twierdzenia, matematyk „wiedziony przez dane naoczne – dochodzi w łańcuchu wniosków do całkowicie zrozumiałego, a zarazem ogólnego rozwiązania zagadnienia”²⁶⁴. Podsumowując, czysta matematyka (a w szczególności geometria) musi, według Kanta, wszystkie swe pojęcia przedstawić w czystej naoczności, - tylko w takiej naoczności „może być dany materiał do sądów syntetycznych *a priori*”²⁶⁵. Rozszerza ona wiedzę, o ile jej zdania muszą odwoływać się w swoich dowodach do czystej naoczności, wychodząc tym samym poza tym, co myślimy w samych pojęciach, np. trójkąta czy prostej. Rozważenie samych pojęć geometrycznych nie pozwala również stwierdzić, czy negacja któregoś z rozważanych powyżej twierdzeń geometrycznych jest niemożliwa, czy sprzeczna wewnętrznie. Dopiero przedstawienie sobie w czystej naoczności pozwala się przekonać o prawdziwości danego twierdzenia.

²⁶² Tamże, B16.

²⁶³ Tamże, B XII.

²⁶⁴ Tamże, A7167-717/B744-745. Można tu wymienić jeszcze jeden przykład pochodzący z *Krytyki*: „dwoma prostymi liniami nie można zamknąć żadnej przestrzeni, a więc zbudować z nich żadnej figury”; jeśli spróbujemy „wywieść to twierdzenie z pojęć linii prostej i liczby dwa” okaże się, że „nasze usiłowanie będzie daremne i zobaczymy, że będziemy musieli uciec się o pomoc do naoczności, jak to też stale czyni geometria” (tamże, B65).

²⁶⁵ Kant, I., *Prolegomena*, str. 47.

Dalej przejdźmy do innego ważnego zagadnienia – konstrukcji pojęć geometrycznych w czystej naoczności przestrzeni.

3.4. Kategoria konstrukcji w poznaniu geometrycznym

Kant nie może uniknąć oczywiście klasycznego problemu związanego z diagramami: w jaki sposób pogodzić ogólność poznania geometrycznego z koniecznością stosowania w geometrii diagramów, które są obiektami jednostkowymi? Czym jest dalej przedstawianie sobie obiektów matematyki w czystej naoczności, skoro każda reprezentacja fizyczna jest w istocie naocznością empiryczną? Te m.in. zagadnienia omawia Kant obszernie w *Metodologii transcendentalnej*, ostatniej części *Krytyki czystego rozumu*. Najogólniej, Kant daje tu objaśnienie różnicy pomiędzy poznaniem matematycznym a poznaniem filozoficznym. Zgodnie z jego główną tezą „poznanie filozoficzne jest poznaniem rozumowym [uzyskiwanym] na podstawie pojęć, matematyczne poznanie zaś poznaniem na podstawie konstrukcji pojęć”²⁶⁶.

Przyjrzyjmy się więc bliżej roli konstrukcji w poznaniu geometrycznym, do którego dalej przechodzi Kant, pisząc co następuje: „skonstruować (...) pojęcie to znaczy przedstawić odpowiadającą mu naoczność *a priori*”²⁶⁷. Konstruując pojęcie trójkąta, przedstawiamy sobie je w czystej naoczności przestrzeni; dana naoczna odpowiadająca rysunkowi określana jest więc nie w naoczności empirycznej ale w czystej naoczności, która to jest źródłem apriorycznego charakteru twierdzeń matematyki. Dane naoczne składające się na rysunek przedstawiane są „*a priori* zgodnie z pojęciami”²⁶⁸. Poznanie matematyczne nie płynie więc u Kanta z samych pojęć, ale z ich konstrukcji – to za pomocą konstrukcji poznajemy własności danego pojęcia (któremu odpowiada rysunek), tym samym dokonując syntezy owego pojęcia i danych naocznych odpowiadających rysunkowi.

²⁶⁶ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, A713/B741

²⁶⁷ Tamże, A713/B741.

²⁶⁸ Tamże, A718/B746.

Kant twierdzi dalej, że poznanie geometryczne oparte na jednostkowych figurach (dających empiryczne dane naoczne) ma, poprzez specyficzną naturę konstrukcji, charakter ogólny. Taki uzasadnia to niemiecki filozof: „każda wyrysowana figura indywidualna jest empiryczna, a mimo to służy do wyrażenia pojęcia bez szkody dla jego ogólności, ponieważ przy tej empirycznej naoczności zważa się zawsze tylko na czynność konstruowania pojęcia, dla którego zupełnie obojętnych jest wiele określeń [danej figury], np. wielkości, boków i trójkątów, i wobec tego abstrahuje się od tych różnic, które nie zmieniają pojęcia trójkąta”²⁶⁹. Wydaje się, że ideę Kanta można przedstawić w następujący sposób: uprawiając geometrię korzystamy zawsze z konkretnego diagramu, ale nie rozważamy go jako figury empirycznej, ale jako figurę daną w czystej naoczności, w której diagram został skonstruowany. W czystej naoczności „to, co wynika z ogólnych warunków konstrukcji, musi obowiązywać ogólnie także o przedmiocie skonstruowanego pojęcia”²⁷⁰. Nie zważamy więc na „przypadkowe” cechy np. trójkąta, tzn. charakterystyczne jedynie dla konkretnej narysowanej figury – ale jedynie na to, co ogólne. Wydaje się przy tym, że związane jest to z odpowiednio przeprowadzoną konstrukcją, a następnie specyficznym sposobem postrzegania rysunku – „widzenia” w nim tego, co ogólne, za pośrednictwem czystej naoczności.

Podsumowując więc, moje rozważania, dochodzimy do wniosku, że twierdzenia geometryczne (i matematyczne w ogóle) mogą być ogólne, ponieważ matematyka, zdaniem Kanta, „swe poznanie wyprowadza nie z pojęć, lecz z ich konstrukcji, tzn. z naoczności, które może być *a priori* dana jako odpowiadająca pojęciom”²⁷¹. W ten również sposób „matematyka może to, co ogólne, rozważać *in concreto* (w poszczególnych danych naocznych)”²⁷².

Zwróćmy dalej uwagę na inny aspekt kantowskiej filozofii, a mianowicie naukę o transcendentalnej jedności apercpcji. Zgodnie z nią „sąd to nic innego, jak tylko sposób doprowadzania danych poznań do przedmiotowej jedności

²⁶⁹ Tamże, A714/B743.

²⁷⁰ Tamże, A715-6/B743-4.

²⁷¹ Tamże, A734/B762.

²⁷² Tamże, A735/B763. Dodajmy, że tu matematyka różni się od filozofii, która rozważa zdania ogólne *in abstracto*.

apercepcji²⁷³. Wszelkie połączenie przedstawień wymaga jedności świadomości w przeprowadzeniu ich syntezy²⁷⁴. Również w przypadku sądu geometrycznego, warunkiem dokonania sądu jest jedność świadomości. Według Kanta więc różnorodność poszczególnych jednostkowych reprezentacji empirycznych łączymy w jednym, świadomym akcie; w słowach królewieckiego filozofa, „wszystko, co różnorodne w naoczności, podlega warunkom pierwotnej syntetycznej jedności apercepcji”²⁷⁵. W pojęciu trójkąta na przykład łączymy to, co różnorodne w naoczności, aby dokonać pojedynczego, świadomego aktu syntezy.

Koncepcja Kanta, choć uważnie przez niego sformułowana, nie jest w pełni jasna. Jaką rolę odgrywa bowiem czysta naoczność w zwykłym sporządzaniu rysunków? Czy każde wykonanie diagramu można określić jako aprioryczny akt konstrukcji? Kant stwierdza, że nacisk na to, iż synteza jest świadomym aktem łączenia tego, co różnorodne, sugerując, że „widzenie” w diagramie trójkąta tego, co prawdziwe o pojęciu trójkąta w ogóle, wymaga odpowiedniej aktywności umysłu. Poznanie prawdziwości sądu syntetycznego nie byłoby wtedy, dla Kanta, efektem biernej, receptywnej postawy. Jaką czynność musi jednak umysł wykonać, aby konstrukcja pojęcia przebiegała w odpowiedni sposób? Czy jest to związane z zastosowaniem odpowiedniej metodologii? Kant niewiele pisze o metodologicznych aspektach dowodów geometrycznych. Można tu dodać, iż zgodnie z interpretacją Michaela Friedmana, „Kant głosił dynamiczną koncepcję ‘figuracywnej (*figurative*) syntezy’”, a geometria jako nauka o przestrzeni jest rezultatem dynamicznego procesu wyobraźni”²⁷⁶. M. Friedman, odwołuje się tu do następujących słów Kanta „nie mogę sobie przedstawić żadnej linii, choćby była dowolnie mała, nie rysując jej w myśli, tj. nie wytwarzając od pewnego punktu wszystkich jej części jedna po drugiej i nie uzyskując w ten sposób dopiero tej naoczności”²⁷⁷.

²⁷³ Tamże, B141.

²⁷⁴ Tamże, B137.

²⁷⁵ Tamże, B136.

²⁷⁶ Majer, U., *The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry*, w: *Intuition and the Axiomatic Method*, red: E. Carson and R. Huber, Springer 2006, str. 52.

²⁷⁷ Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, A162-163, B203.

3.5. Rola czystej naoczności w dowodach geometrycznych

Chciałbym postawić tutaj następujące pytanie: jaką rolę w rozumowaniach i dowodach matematycznych gra konstrukcja i czysta naoczność przestrzeni i w jakim sensie są one konieczne do orzekania o prawdziwości sądów geometrycznych? Czy naoczność odgrywa rolę tylko w momencie konstrukcji diagramu, czy w konkretnych krokach dowodowych, a jeśli tak, to jakich? Czy można takie kroki wyróżnić np. w konkretnych dowodach z *Elementów* Euklidesa, czy w prostszych rozumowaniach geometrycznych? Z drugiej strony, czy jest ona może pewnym pozamatematycznym warunkiem koniecznym, który musi spełnić dowód geometryczny, nie pojawiając się przy tym w żadnym z jego kroków? Niestety dość niewielka liczba (i jeszcze mniej zróżnicowana) przykładów geometrycznych w *Krytyce* nie pozwala w pełni odpowiedzieć na pytanie dotyczące roli czystej naoczności w poznaniu geometrycznym. Stąd też bardzo trudno jednoznacznie i wyczerpująco odpowiedzieć na te pytania. Nie będę się więc w tym miejscu podejmował sformułowania takiej odpowiedzi, ograniczę się jedynie do kilku komentarzy.

Po pierwsze należy jeszcze raz stwierdzić, iż czysta naoczność jest, według Kanta, z pewnością konieczna w dowodach geometrycznych. Dobrze obrazuje to następująca jego wypowiedź: „matematyka zawiera dowody unaoczniające, ponieważ swe poznanie wyprowadza nie z pojęć, lecz z ich konstrukcji, tzn. naoczności, która może być a priori dana jako odpowiadająca pojęciom”²⁷⁸. W owych dowodach unaoczniających matematyk „wciąż wiedziony przez dane naoczne – dochodzi w łańcuchu wniosków do całkowicie zrozumiałego, z zarazem ogólnego rozwiązania zagadnienia”²⁷⁹.

Tyle ogólnie o „dowodach unaoczniających”. Kant nie daje jednak żadnych wskazówek metodologicznych co do przebiegu takiego dowodu. Podkreśla, iż przy

²⁷⁸ Tamże, A734/B762.

²⁷⁹ Tamże, A716-7/B744-5.

pomocy naoczności „wychodzimy poza pojęcie” – ale jak to ma dokładnie zachodzić, nie wiemy. Według Kanta pojęciem trójkąta to przede wszystkim jego definicja, królewiecki filozof nie podaje jednak metodologicznych wskazówek co do tego, jaką moc dedukcyjną ma taka „sama definicja”²⁸⁰. Nie będę tu więc podejmował próby podania systematycznej odpowiedzi na pytanie o rolę naoczności w dowodach. Można tutaj jedynie sformułować kilka uwag. Po pierwsze, wydaje się, że dla Kanta, diagram jest raczej ogólnym warunkiem przeprowadzenia dowodów w geometrii, niż uzasadnieniem konkretnych, wydzielonych kroków dowodowych. Dopiero konstruując go, możemy rozumować o pojęciu, o którym nic nowego nie jesteśmy w stanie stwierdzić rozważając je samo w sobie. W trakcie tego rozumowania matematyk jest „wiedziony” przez dane naoczne (jak czytamy w cytacie z poprzedniego akapitu). Wydaje się więc, że nie jest tu mowa o konkretnych krokach dowodowych. Zwróćmy tu też uwagę, że odwołania do naoczności nie mogą mieć charakteru elementów *logicznego* rozumowania, skoro mają charakter pozalogiczny i dane są w sposób bezpośredni, natychmiastowy²⁸¹.

²⁸⁰ Na bezpośredni związek pomiędzy pojęciem a definicją wskazuje następujący fragment *Krytyki*...: „nie powinienem bowiem zwracać uwagi na to, co rzeczywiście myślę w mym pojęciu trójkąta (nie jest to nic innego jak sama tylko definicja)” (tamże, A718/B746). Inne aspekty filozofii Kanta każą jednak też sądzić, że „pojęcie” trójkąta jest czymś więcej, niż jedynie definicją. Nie będę w tym miejscu dalej rozstrzygał tej kwestii.

²⁸¹ Warto wspomnieć o pewnej kontrowersji związanej, bezpośrednio z powyższymi rozważaniami. Otóż niektóre fragmenty pracy Kanta każą zadać pytanie, czy *wszystkie* zdania matematyki są syntetyczne i tym samym czy w każdym z nich konieczne jest odwołanie do czystej naoczności. Po pierwsze, Kant nie neguje, że „niektóre nieliczne podstawowe twierdzenia, które zakładają geometry, są rzeczywiście analityczne i opierają się na prawie sprzeczności” (tamże, B16)²⁸¹. Są to proste zdania, takie, jak $a=a$, czy $a+b>a$. Co więcej, w często komentowanym *Krytyki* Kant pisze, iż „twierdzenie syntetyczne (...) można bez wątplenia zrozumieć i uznać (*einsehen*) na mocy prawa sprzeczności, ale tylko w ten sposób, że przyjmie się jakieś inne twierdzenie syntetyczne, z którego tamto da się wywnioskować, nigdy zaś wprost samo w sobie”(tamże, B14). Fragment ten jest dość zastanawiający. Przez „inne twierdzenia syntetyczne” mógł Kant rozumieć aksjomaty bądź postulaty euklidesowe. Taka interpretacja wydaje się jednak niezgodna z wieloma przytaczanymi powyżej wypowiedziami niemieckiego filozofa – dużo wskazuje na to, że *każde* rozumowanie korzystające z rysunku wymaga konstrukcji w czystej naoczności. W innym miejscu pisze również Kant, iż prawo sprzeczności nie wystarcza w pierwszym rzędzie do udowodnienia głównych zasad (*Grundsätze, Prinzipien*) matematyki, pozostałe rozumowania są zgodne z zasadą sprzeczności (por. tamże, B140). Nie ma jednak do końca jasności, czy takimi zasadami są jakieś konkretne zdania (aksjomaty?) czy ogólne, filozoficzne, metazasady. Można tu odczytywać uznanie Kanta dla logicznych aspektów rozumowań euklidesowych. Można też pójść dalej, twierdząc, iż w pełni syntetyczne są dla Kanta jedynie aksjomaty. Można też argumentować, iż analityczne są te rozumowania, w których wykorzystywane są jedynie aksjomaty (a nie postulaty) Euklidesa. Kant niestety jednak nie rozważa szerzej, ile geometra jest w stanie osiągnąć bez kontaktu z diagramem,

W końcu chciałbym poczynić jeszcze kilka krótkich uwag odnośnie pytania: jaka jest rola pojęć, a jaka intuicji (naoczności) w rozumowaniach matematycznym? Jest to pytanie i zagadnienie wciąż aktualne we współczesnych dyskusjach nad wizualizacjami (jak również w mojej pracy). Zastanówmy się więc krótko, jaka brzmi na nie odpowiedź w kantowskiej filozofii. Twierdzenia są wyprowadzane z konstrukcji pojęć, (niektóre być może z samych pojęć), ale nigdy nie opierają się jedynie na intuicji (naoczności). Intelpekt sądzi u Kanta zawsze za pośrednictwem pojęć – naoczności dostarczają jedynie „surowego materiału” dla pojęć, bez których żadne twierdzenie nie może być udowodnione. Nie można więc w kontekście filozofii Kanta mówić o „dowodach wizualnych”. Królewiecki filozof nie byłby gotów uznać, iż odpowiednio stworzony i oznaczony diagram wystarcza jako rodzaj uzasadnienia dla twierdzenia. Wydaje się, że taki jest też sens słynnego stwierdzenia Kanta: „myśli bez treści naocznej są puste, dane naoczne bez pojęć – ślepe”²⁸². Kant podkreśla tu wzajemny związek pomiędzy naocznością a pojęciami.

3.6. Wybrane aspekty interpretacji filozofii Kanta

Prace filozoficzne Kanta doczekały się, jak już wspominałem, bardzo dużej ilości komentarzy, i nie ma tu miejsca na przedstawienie choćby części tej bogatej interpretacyjnej tradycji. W tym miejscu wspomnę jedynie krótko o dwóch sposobach interpretacji roli czystej naoczności w poznaniu matematycznym, które nawiązują do roli diagramów w rozumowaniach euklidesowych. Według pierwszej

a więc za pomocą samych pojęć. Nie będę tu się podejmował interpretacji tego – jak podkreśla wielu komentatorów – trudnego w interpretacji fragmentu (Por. de Jong, de Jong, W.R., 1997 *Kant's Theory of Geometrical Reasoning and the Analytic-Synthetic Distinction. On Hintikka's Interpretation of Kant's Philosophy of Mathematics*, “Studies in History and Philosophy of Science”, Vol. 28, No.1, str. 142).

²⁸² Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, A51/B75

z nich, rola ta polega na zapełnianiu „luk logicznych” w rozumowaniach euklidesowych. Druga natomiast rolę czystej naoczności widzi w nieredukowalnej do logiki, a zatem przestrzennej treści rozumowań geometrycznych.

Od końca XIX wieku istnieje tradycja – odświeżona ostatnio przez Michaela Friedmana – wiązania syntetyczności geometrii z lukami logicznymi cechującymi rozumowania z *Elementów* Euklidesa²⁸³. Uważa się mianowicie, że logika okresu Kanta była na tyle słabo rozwinięta, że nie mogła oddać sensu całości rozumowań euklidesowych – konieczne było założenie dodatkowego źródła poznania. Pogląd taki wyrażał już Bertrand Russell, podkreślając, iż „Kant zaobserwował, że współcześni mu geometrycy nie mogli udowodnić swoich twierdzeń za pomocą nie wspartego przez dodatkowe środki rozumowania (*unaided argument*), ale potrzebowali odniesienia do rysunku, stworzył więc teorię rozumowania matematycznego, zgodnie z którą wnioskowanie nie jest nigdy czysto logiczne, ale zawsze wymaga wsparcia czegoś, co nazywał ‘naocznością’”²⁸⁴. W XX wieku pogląd taki był podzielany przez logików i matematyków E. Betha, J. Hintikka oraz wspomnianego Michaela Friedmana.

Jak pisze filozof geometrii Ulrich Majer, według M. Friedmanna, „Kanta koncepcja logiki była tak zawężona, że musiał przyjąć istnienie drugiego źródła wiedzy, słynnej intuicji przestrzeni, aby przedstawić geometrię w postaci logiczno-dedukcyjnej”²⁸⁵. Dziś jednak, jak pisze Majer, „posiadamy o wiele silniejszą logikę, mianowicie logikę matematyczną, przy użyciu której możemy uniknąć jakiegokolwiek odwołania do doświadczenia”²⁸⁶. Współcześnie najbardziej znanym reprezentantem takiej interpretacji czystej intuicji Kanta jest wspomniany Friedmann, według którego filozofia matematyki Kanta rekompensowała brak środków logicznych dostępnych niemieckiemu filozofowi²⁸⁷. Interpretuje on czystą

²⁸³ Friedman przedstawia swoje poglądy m.in. w artykule *Geometry, construction and intuition in Kant and his successors* (2000), oraz książce *Kant and the exact sciences* (1992).

²⁸⁴ B. Russell, *Introduction to mathematical logic*, za: de Jong, W.R., *Kant's Theory of Geometrical Reasoning and the Analytic-Synthetic Distinction. On Hintikka's Interpretation of Kant's Philosophy of Mathematics*, “Studies in History and Philosophy of Science”, Vol. 28, No.1, str. 142-143.

²⁸⁵ Majer, U., *The Relation of Logic...*, str. 48.

²⁸⁶ Tamże, str. 48.

²⁸⁷ Jagnow, R. *Review of Lisa Shabel's Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*, “Philosophia Mathematica”, Vol. III, 2007, str. 367.

intuicję jako “logiczny wypełniacz (*stopgap*) w dedukcyjnej teorii geometrii Kanta”²⁸⁸. Można wymienić kilka rodzajów wspomnianych „luk logicznych”. Są to, po pierwsze, opisywane już szeroko dowody przez „nałożenie” na siebie figur geometrycznych. Po drugie wymienić można tzw. problem ciągłości. Związany jest z tym m.in. problem w ustalaniu istnienia punktów przecięcia krzywych – „Euklides przyjmuje istnienie, istnienie punktów przecięcia, jeśli pojawiają się one na diagramie”²⁸⁹. Współczesna logika wymaga w celu ścisłego wykazania istnienia użycia aksjomatu ciągłości, którym Euklides oczywiście nie dysponował. Wspomniane luki miały z pewnością źródło w tym, że sylogistyka (która była w czasach Kanta jedyną obowiązującą wykładnią logiki) nie wystarczała do formalizacji wszystkich wnioskowań obecnych w *Elementach*.²⁹⁰

Powstaje pytanie, czy Kant mógł sformułować teorię czystej naoczności w reakcji na niedoskonałości *Elementów* Euklidesa, czy słaby rozwój współczesnej mu logiki? Wątpliwym jest, iż Russell miał rację twierdząc, że, Kant był świadom niedoskonałości logicznych *Elementów* i to właśnie było motywacją do uznania geometrii za naukę syntetyczną. Wydaje się, że Kant żywił przekonanie, iż z czysto metodologicznego punktu widzenia, rysunki są nieusuwalne z rozumowań geometrycznych, który to pogląd był na początku XVIII wieku dość powszechny. W końcu XVIII wieku istniała już wprawdzie silna tendencja unikania rysunków w rozumowaniach, dotyczyła ona jednak w większym stopniu analizy matematycznej, niż geometrii. Motywacja Kanta nie wydawała się jednak być metodologiczna, ale, jak sądzę, szersza, umiejscowiona bowiem w kontekście całości jego filozofii. Wydaje się, że według Kanta odwołanie do rysunku jest konieczne w celu przeprowadzenia wielu rozumowań geometrycznych, a myślenie przestrzenne jest nieodzownym elementem poznania geometrycznego; być może było to jedną z inspiracji do sformułowania teorii czystej naoczności przestrzeni.

Druga główna linia interpretacyjna Kanta, którą można wyróżnić według Majera, wiąże się przede wszystkim z Charlesem Parsonsem i Emily Carson i ich

²⁸⁸ Majer, U., *The Relation of Logic...*, str. 50

²⁸⁹ Mumma, J., *Proofs, Pictures...*, str. 4.

²⁹⁰ Jak wiadomo, sylogistyka nie potrafi choćby wyrażać predykatów dwuargumentowych, oraz zdań, w których występuje więcej niż jeden kwantyfikator. W szczególności są to zdania typu „dla każdego x , istnieje taki y , że xRy ”; taką strukturę posiadały m.in. niektóre z aksjomatów Hilberta.

interpretacją kantyzmu. W ich analizach, czysta naoczność nie jest związana z „lukami logicznymi” w rozumowaniach geometrycznych, ale ze szczególną treścią twierdzeń geometrycznych, która nie jest redukowalna do logiki. Treść ta nie jest może być oddana po prostu przez stwierdzenie, że interpretacją predykatów (rozumianych jako obiekty syntaktyczne) są relacje przestrzenne (semantyka)²⁹¹. Według C. Parsonsa i E. Carson, tak sformułowane aksjomatyczne ujęcie geometrii nie oddaje w pełni jej treści. Majer pisze, że w tej interpretacji „geometria zdecydowanie wykracza poza logikę pierwszego rzędu i myślenie dyskursywne za pomocą ogólnych abstrakcyjnych pojęć”. Autorzy ci podkreślają też wreszcie, że intuicja przestrzenna jest konieczna do sformułowania aksjomatów geometrii. Zgodnie z tą interpretacją, “nawet jeśli Kant dysponowałby współczesną logiką predykatów (z dwu- i więcej członowymi relacjami, zamiast monadycznej sylogistyki Arystotelesa), odwołanie do logiki pozostałoby konieczne w celu rozpoznania prawdziwości geometrii euklidesowej, w szczególności prawdziwości aksjomatów”²⁹². Jednym z nieredukowalnych do logiki wyróżników geometrii, czy poznania geometrycznego, jest natomiast jego bezpośredniość. Według C. Parsonsa „intuicja przestrzenna jest jedynym sposobem bezpośredniego, natychmiastowego zapoznania (*immediately acquainted*) się z obiektami zewnętrznymi, podczas, gdy pojęcia prowadzą jedynie do pośredniego poznania tych obiektów”²⁹³. Przypomnijmy, iż bezpośredniość była u Kanta kluczową cechą tego, w jaki sposób dane są nam dane naoczne.

Przejdźmy zatem do wniosków końcowych o odniesieniu do epistemologii Kanta.

²⁹¹ Por. Majer, U., *The Relation of Logic...*, str. 48.

²⁹² Tamże, str. 49.

²⁹³ Tamże, 51.

- 1) Twierdzenia geometrii są, według Kanta, syntetyczne: aby wykazać, iż pojęciu trójkąta przysługuje jakaś własność (orzeczenie), musimy wyjść poza to, co jest w tym pojęciu pomyślane, co sami w nie włożyliśmy m.in. za pomocą definicji. Aby to uczynić, musimy odwołać się do czystej naoczności przestrzeni.
- 2) Geometria zawiera „dowody unaoczniające”, tzn. takie, w których jesteśmy prowadzeni ku konkluzji przez dane naoczne.
- 3) Przestrzeń nie rozumiana po kantowsku jako „przestrzeń fizyczna”, ale jako wrodzona struktura poznawcza, która determinuje sposób postrzegania obiektów geometrycznych. Będąc niezależną od wszelkich konkretnych doświadczeń zmysłowych, przestrzeń – jako przedmiot geometrii – jest źródłem jej apriorycznej, a nie empirycznej natury.
- 4) Matematyka, w rozumieniu kantowskim, wyprowadza swe twierdzenia nie z pojęć, ale z konstrukcji pojęć.
- 5) Konstruując pojęcia, przedstawiamy je sobie w czystej naoczności przestrzeni, która dana jest a priori, tzn. niezależnie od wszelkiego doświadczenia.
- 6) Pojęciom, według Kanta, odpowiadają czyste naoczności.
- 7) Rozważając rysunek, zważamy tylko na czynność konstrukcji pojęcia, dla którego obojętne są cechy przypadkowe diagramu. Dzięki temu twierdzenie uzasadniane na podstawie jednostkowego diagramu może mieć charakter ogólny.
- 8) W poznaniu geometrycznym konieczny jest zarówno element pojęciowy, jak i intuicyjny.

Filozofia kantowska nie jest wolna od trudności, w szczególności nie ma jasności jaką dokładnie rolę w dowodach gra czysta naoczność przestrzeni. Jak już wspominałem wstępie, jest jednak bardzo ważna z historycznego punktu widzenia.

Jest poza tym pierwszym tak obszernym ujęciem roli diagramów i pierwiastka wizualno-intuicyjnego w ogóle w poznaniu geometrycznym. To było zapewne jedną z przyczyn, dla której tak szeroko do Kanta nawiązywano.

Rozdział 4. Rozwój geometrii nieeuklidesowych a rola intuicji przestrzennej w geometrii

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie ogólnego zarysu procesu rozwoju geometrii nieeuklidesowych, oraz poglądów filozoficznych jej twórców, w celu wykazania zmian w ocenie roli wizualizacji w poznaniu geometrycznym.

Powstanie geometrii nieeuklidesowych było niewątpliwie punktem zwrotnym w historii geometrii, a nawet matematyki jako całości oraz jej podstaw filozoficznych. Możliwość sformułowania „alternatywnych” wobec euklidesowej geometrii spowodowała z pewnością, iż geometria euklidesowa straciła swoją wyróżnioną pozycję. Będę tu próbował pokazać, jak geometrie nieeuklidesowe wpłynęły na epistemologię geometrii, a w jej obrębie na status intuicji przestrzennej. W konsekwencji rozwoju systemów nieeuklidesowych, pojęcia geometryczne oddaliły się od intuicji przestrzennych, a przedmiot diagramu od świata fizycznego. Zmniejszyło się również zaufanie matematyków do intuicji przestrzennych w poznaniu geometrycznym (oraz matematycznym w ogóle). Interesujące będą tu dla mnie w szczególności poglądy twórców geometrii nieeuklidesowych oraz ich własna interpretacja znaczenia wyników matematycznych dla epistemologii geometrii – m.in. w związku z ujęciem kantowskim.

Pierwsza część rozdziału jest poświęcona przybliżeniu tychże właśnie ogólnych zagadnień XIX-wiecznej filozofii geometrii. W kolejnej jego części przechodzę do nakreślenia historycznego zarysu problematyki matematyczno-filozoficznej związanej z piątym postulatami Euklidesa. W kontekście piątego

postulatu – prób jego udowodnienia na bazie pozostałych postulatów Euklidesa oraz przyczyn, dla których uznawany był za prawdziwy, czy odwrotnie, wątpliwy – po raz pierwszy pojawiają się istotne wątpliwości odnośnie natury intuicji geometrycznej. W dalszej kolejności omawiam pierwszy etap rozwoju geometrii nieeuklidesowych – związany z pracami Mikołaja Łobaczewskiego (1792-1956), Carla Friedricha Gaussa (1777-1855) oraz Janosa Bolyaia (1802-1860). W następnej kolejności spróbuję ocenić, co do filozofii geometrii wniosła teoria n -rozmaitości Bernharda Riemanna (1826-1866). oraz rozgrywający się w jej kontekście spór o naturę przestrzeni fizycznej. Przybliżę też filozofię geometrii Hermanna Helmholtza (1821-1894) , który nawiązuje do tegoż sporu; rozwija on również własną, interesującą wersję empiryzmu geometrycznego, oraz teorię percepcji, w kontekście której umiejscawia interesujące rozważania nad intuicją przestrzenną. W dalszej części rozdziału omawiam krótko rolę intuicji przestrzennej w dalszym rozwoju geometrii nieeuklidesowych, skupiając się na ujęciu Felixa Kleina i „modelach” geometrii nieeuklidesowych Eugenio Beltramiego (1835-1900). Omawiam również krótko znacznie aksjomatyzacji geometrii dla problematyki roli wizualizacji w poznaniu geometrycznym. W ostatniej części rozdziału dokonuję szerokiego podsumowania znaczenia rozwoju geometrii euklidesowych dla zagadnienia intuicji przestrzennej oraz dla interpretacji filozofii geometrii Kanta.

4.1. Filozofia geometrii XIX wieku – przegląd problemów

Warto w pierwszej kolejności przedstawić główne punkty sporne, wokół których toczyła się XIX-wieczna (jak i wcześniejsza) dyskusja nad filozofią geometrii i reprezentacjami przestrzennymi. Są to spór empiryzmu z aprioryzmem, oraz spór o miejsce kategorii przestrzeni w poznaniu matematycznym.

Jedną z głównych płaszczyzn, na których toczyły się spory związane z geometrią i wizualizacjami był więc spór empiryzmu z aprioryzmem. Zauważmy,

że tendencja do traktowania geometrii jako nauki bliższej empirii, niż pozostałe działy matematyki była zawsze obecna w filozofii matematyki. Za empiryczną naturą geometrii przemawiają różne obserwacje. Szukano jej więc w pierwszym rzędzie w ontologii geometrii. Można przy tym wymienić co najmniej trzy główne drogi określania empirycznego przedmiotu geometrii. Po pierwsze, można uznać, iż właściwym przedmiotem geometrii są narysowane, postrzegalne zmysłem wzroku, figury geometryczne (np. w rozumieniu J.S. Milla, o którym więcej piszę w kolejnym rozdziale). Po drugie pojawiał się pogląd, że przedmiotem geometrii są ciała, ruchy i siły leżące u ich podstaw, jak również wielkości, które tym ciałom przysługują. Tego typu poglądy utrzymywał m.in. wspomniany tu krótko Łobaczewski. Po trzecie, utrzymywano, że przedmiotem geometrii jest przestrzeń fizyczna. Ta interpretacja była zapewne najczęstsza, jej też w tym rozdziale poświęcę najwięcej uwagi.

Empiryzmu można również szukać wychodząc od charakterystyk *poznania* geometrycznego. Można tu więc utrzymywać, iż jego źródłem jest empiryczna intuicja, bądź argumentując, iż poznanie geometryczne jest pod pewnym względem podobne do poznania nauk empirycznych. Empiryzmowi przeciwstawiony jest oczywiście aprioryzm, który w XIX wieku występował najczęściej w postaciach nawiązujących do Kanta. Aprioryzm jest jednak również stanowiskiem zróżnicowanym. Może on głosić tezę o wrodzoności źródła poznania geometrycznego, o konieczności, czy absolutnej prawdziwości twierdzeń geometrii, bądź też, po trzecie, o niezależności procesu poznania od doświadczenia. Zaznaczymy od razu, iż geometrie nieeuklidesowe zmusiły filozofów do uważniejszej analizy kwestii aprioryzmu w geometrii – w szczególności do różnicowania pomiędzy wymienionymi trzema typami aprioryzmu.

Warto od razu stwierdzić, iż nie jest oczywiste, jakie dokładnie konsekwencje dla tego sporu płyną z powstania geometrii nieeuklidesowych. Geometrie te zmusiły do zrewidowania pewnych postaci empiryzmu oraz powstania nowych, podważyły również aprioryzm w wersji kantowskiej. Jakie dokładnie z ich istnienia należy wyciągnąć wnioski jest dyskusyjne, o czym będzie mowa w poniższym rozdziale.

W sporze empiryzmu z racjonalizmem, jak również i innych rozważaniach dotyczących geometrii, na czoło wysuwa się kategoria **przestrzeni**. Powstała kwestia, czy przestrzeń jest bytem fizycznym, czy konstrukcją, bądź formą poznawczą, jak chciał Kant? Jeśli tak, to jak owa konstrukcja ma się do świata fizycznego? Jeśli jest w jakimś sensie bytem fizycznym, to czy istnieje niezależnie od ciał, czy też jest w jakiś sposób rozumianą sumą ciał? Przede wszystkim natomiast, jak przestrzeń ma się do poznania geometrycznego? Czy jest jego przedmiotem – a jeśli tak, czy świadczy to o empiryczności geometrii? Jeśli nawet założymy, że przestrzeń nie jest właściwym przedmiotem geometrii, ale w jakiś sposób rozumiane kategorie przestrzenne odgrywają istotną rolę w poznaniu matematycznym – czy wtedy można wciąż utrzymywać, że geometria ma w jakimś sensie naturę empiryczną?

W celu systematyzacji dyskusji, można, za autorem książki omawiającej matematykę Bernharda Riemanna, D. Laugwitzem, wyróżnić trzy ogólne rozumienia terminu „przestrzeń”, które pojawiają się w filozofii geometrii (oraz w niniejszym rozdziale). Są to:

- a) przestrzeń fizyczna
- b) przestrzeń wyobrażeniowa (*Anschauungsraum*)
- c) przestrzeń jako obiekt matematyczny²⁹⁴.

Pierwsza z wymienionych, przestrzeń fizyczna, jest, jak podkreśla D. Laugwitz, wobec nas zewnętrzna. Drugą z nich można z kolei rozumieć jako subiektywną – jako „arenę”, w której postrzegamy obiekty matematyczne w trakcie ich „wizualizowania”. To rozumienie przestrzeni jest oczywiście najistotniejsze dla tematyki mojej pracy. Przestrzeń tą określa D. Laugwitz kantowskim terminem *Anschauungsraum*, co można oddać wyrażeniem „przestrzeń wyobrażeniowa”. Przestrzeń ta może być rozumiana jako aprioryczna, czysta forma zmysłowości – ale również jako jakiegoś rodzaju porządek, zgodnie z którym postrzegamy za

²⁹⁴ Por. Laugwitz, D., *Bernhard Riemann, 1826-1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1996, str. 220.

pomocą „wewnętrznego” wzroku obiekty fizyczne (bądź też jeszcze inaczej). Jeśli chodzi o przestrzeń matematyczną, jest to oczywiście zwykły, odpowiednio zdefiniowany obiekt matematyczny. Zwróćmy tutaj uwagę, że geometria euklidesowa nie posługiwała się jednoznacznie zdefiniowanym pojęciem przestrzeni, bądź takim, które odgrywałoby rolę w dowodach np. *Elementów* Euklidesa. Matematyczne pojęcie przestrzeni w sposób w pełni ścisły, zaczyna funkcjonować wraz z szerzej przez mnie rozpatrywanym podejściem do geometrii B. Riemanna.

Zauważmy, że samo postrzeganie przestrzeni jako obiektu fizycznego (czyli w pierwszym podanym przez mnie jego rozumieniu) tego rodzi pewne wątpliwości. Po pierwsze można zapytać, jaki status wśród obiektów fizycznych ma przestrzeń? Czy jest ona jakimś konkretnym ciałem, czy też sumą ciał? Przede wszystkim jednak problematyczna jest kwestia odpowiedników pojęć geometrycznych po stronie rzeczywistości fizycznej – czyli problem relacji przestrzeni matematycznej oraz przestrzeni fizycznej. Jeśli przestrzeń matematyczna składa się z punktów, odcinków i innych obiektów matematycznych, które pojawiają się w twierdzeniach, to jakie są ich odpowiedniki po stronie przestrzeni fizycznej? Nie wydaje się, by w przestrzeni fizycznej – przynajmniej tej postrzegalnej zmysłowo – można było odnaleźć bezwymiarowe punkty, bądź jednowymiarowe, nieskończone proste. Problem ten jest oczywiście wersją „tradycyjnego” sporu relacji języka do rzeczywistości wraz z wszystkimi trudnościami z nią związanymi.

Wydaje się, że między innymi te właśnie trudności przyczyniły się do tego, iż termin „przestrzeń” rozumiano często jako byt *pośredniczący* pomiędzy przestrzenią matematyczną a fizyczną. W ten sposób nadaje się „przestrzeni” status bytu obiektywnego (w przeciwieństwie do *Anschauungsraum*), ale niekoniecznie tego samego typu co zwyczajne obiekty fizyczne. Filozof geometrii Roberto Torretti zauważa, iż „do końca wieku XIX termin „przestrzeń (*spatium, Raum*) oznaczał niematerialny byt pośredniczący (*medium*), w którym punkty geometryczne miały być albo aktualnie istniejące, albo tylko potencjalnie pojmowalne (*discernible*).(...) Problem przestrzeni dotyczył więc ontologicznego

statusu tego bytu pośredniczącego”²⁹⁵. Tak rozumiana przestrzeń miała pośredniczyć pomiędzy światem fizycznym a przestrzenią rozumianą jako obiekt matematyczny (mogła zawierać się w jednej z tych dwóch dziedzin). Może ona być rozumiana jako byt fizyczny, ale również jako нефизyczny, bądź w jakimś sensie pośredni, cokolwiek miałyby to oznaczać.

Takie, ogólniejsze, spojrzenie na problem przestrzeni pozwala utrzymywać pogląd o jej obiektywnym istnieniu i jej statusie jako przedmiotu geometrii. Od odpowiedzi na pytania o naturę tego bytu pośredniczącego (jako przedmiotu geometrii) w dużym stopniu zależy kwestia empiryzmu w geometrii. Poniższy dłuższy fragment z dzieła Torrettiego dobrze podsumowuje tendencję wyprowadzania empirycznej natury geometrii z fizycznej natury przestrzeni, jako jej przedmiotu: „pojęcie (*the conception*) przestrzeni jako bytu pośredniczącego, który zawiera wszystkie punkty, które są przedmiotem twierdzeń geometrii w naturalny sposób motywuje pogląd, zgodnie z którym geometria jest nauką opisującą własności przestrzeni (*science of space*). Jeśli założyć, że przestrzeń w jakiś sposób istnieje w *rerum natura*, nieuniknionym prawie jest myślenie o geometrii jako o nauce przyrodniczej, która określa swój przedmiot w kolejnych przybliżeniach, pod kierunkiem i przy kontroli doświadczenia (*under the direction and control of experience*)”²⁹⁶

Wróćmy jednak do ważniejszego dla mojej pracy pojęcia przestrzeni wyobrażeniowej. Pojawia się tu pytanie: jak owa przestrzeń ma się do intuicji przestrzennej? U Kanta kategorie te zostały w zasadzie utożsamione: czysta naoczność przestrzeni to właśnie intuicja – *Anschauung* (pamiętając podział na intuicję – naoczność – czystą i empiryczną). Takie podejście, choć reprezentowane nie tylko przez Kanta, nie jest oczywiście jedynym. Wydaje się, że różnicę pomiędzy tymi dwoma kategoriami epistemologicznymi można przedstawić następująco: „intuicja przestrzenna” to w ogólności władza poznawcza, a w związku z tym również źródło poznania geometrycznego. Przestrzeń wyobrażeniową można wtedy rozumieć jako sposób przedstawiania sobie obiektów

²⁹⁵ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 25.

²⁹⁶ Tamże, str. 33-34.

geometrycznych, wewnętrzną, subiektywną formę w jakiej dokonujemy tego przedstawienia, czy też „porządek naszych wrażeń zmysłowych”. Mimo tej różnicy, znaczenia tych pojęć są w wielu kontekstach zbliżone. Jeśli przyjmiemy istnienie zarówno wspomnianej władzy poznawczej, jak i subiektywnej formy poznawczej, to każda intuicja przestrzenna wydaje się być dokonywana w przestrzeni wyobrażeniowej. Zwroty „przedstawić sobie w przestrzeni wyobrażeniowej” oraz „przedstawić sobie za pomocą intuicji przestrzennej” mają wtedy bardzo zbliżone znaczenie. Uważam więc, iż w wielu kontekstach nie zachodzi potrzeba odróżniania między omawianymi pojęciami, będę ich więc używał wymiennie.

Na koniec tego podrozdziału chciałbym poczynić jeszcze jedną uwagę. Jeden z dominujących problemów XIX-wiecznej filozofii geometrii związany był z kwestią, który system geometryczny w sposób adekwatny opisuje przestrzeń fizyczną. Aby odpowiedzieć na pytanie „czy geometria X jest prawdziwa o przestrzeni?” nie trzeba bowiem korzystać z wizualizacji, rozwiązania tego problemu należy szukać w rozważaniach ogólnofilozoficznych, bądź też w eksperymencie (jak chcieli niektórzy XIX-wieczni filozofowie). Można jednak doszukiwać się związku pomiędzy tym zagadnieniem a problematyką wizualizacji w następujący sposób: jeśli przestrzeń fizyczną uznać za przedmiot geometrii, same wizualizacje – jako środki używane w celu poznania przestrzeni fizycznej – muszą pozostawać z nią w jakimś istotnym związku. Aby przybliżyć naturę tego związku, należałoby rozstrzygnąć, w jakiej relacji pozostaje przestrzeń wyobrażeniowa i przestrzeń fizyczna. Tak postawiony problem wydaje się jednak dosyć niejasny; wychodzi się tu również z założenia, iż przedmiotem geometrii jest przestrzeń fizyczna (które w dalszej części pracy odrzucam). Mimo to, będę nawiązywał do tego zagadnienia, gdyż jest ono kluczowe dla zrozumienia XIX-wiecznej filozofii geometrii, jak również zagadnienia roli intuicji przestrzennej w poznaniu matematycznym.

W dalszej kolejności przyjrę się, w jaki sposób dyskusje nad piątym postulatem Euklidesa wiążą się z wizualizacjami w geometrii.

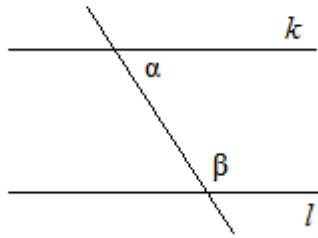
4.2. Źródła problematyki geometrii nieeuklidesowych – piąty postulat Euklidesa

Źródłem geometrii nieeuklidesowych były przede wszystkim kontrowersje związane z piątym postulatem Euklidesa – jego specyficzną poznawczą naturą oraz związkiem z pozostałymi postulatami *Elementów*. Jak wcześniej wspominałem, działło to oparte jest zarówno na postulatach jak i na aksjomatach, te drugie określają przy tym podstawowe własności wielkości, jak liczba, odcinek pole. Część z nich dotyczyła nie tylko obiektów geometrycznych, ale wielkości w ogóle. Można powiedzieć, że ich odpowiednikiem we współczesnych teoriach aksjomatycznych są aksjomaty logiczne. Postulaty natomiast stwierdzały możliwość wykonania pewnych konstrukcji geometrycznych. Pierwsze postulaty rzeczywiście posiadają w sposób widoczny taki konstrukcyjny charakter, możliwość wykonania konstrukcji przez nie postulowanych wydaje się też być intuicyjnie oczywista²⁹⁷. Na ich tle piąty postulat się wyróżnia; wydaje się być bardziej skomplikowany i mniej oczywisty. Zacytujmy go na początek:

Jeżeli prosta przecinając dwie proste tworzy z nimi kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przecinają się po tej stronie, po której znajdują się kąty o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych.²⁹⁸

²⁹⁷ Oto treść pierwszych czterech postulatów: „1. Można poprowadzić prostą od któregośkolwiek punktu do któregośkolwiek punktu., 2. Ograniczoną prostą można przedłużyć nieskończenie., 3. Można zakreślić okrąg z któregośkolwiek punktu jako środka dowolną odległością. 4. Wszystkie kąty proste są równe”. (Euklides, *Elementy*, str. 46). Konstrukcyjny charakter pierwszych trzech postulatów jest oczywisty; można natomiast podważać taki charakter czwartego postulatu, tym jednak nie będę się tu zajmował.

²⁹⁸ Euklides, *Elementy*, str. 46.



Rys. 1. Zgodnie z piątym postulatem, jeśli $\alpha + \beta < 180^\circ$, to proste k oraz l spotykają się po stronie, po której znajdują się kąty α oraz β .

Wielu komentatorów zwraca uwagę, iż Euklides wprowadził ów postulat z powodów praktycznych, tzn. raczej w celu udowodnienia odpowiednich twierdzeń, niż dlatego, że jest on w swojej istocie oczywisty i niezaprzeczalny²⁹⁹. Torretti pisze, na przykład, że “jego precyzyjne sformułowanie, w zestawieniu z przejrzystością (*bluntness*) pozostałych czterech postulatów jest zrozumiałe, jeśli prawdą jest, że postulat ten został świadomie skonstruowany (*designed*) aby dostarczyć brakującego ogniwa w łańcuchach dowodowych: Euklides włożył w niego dokładnie tyle, ile potrzebował, aby przeprowadzić swoje dowody”³⁰⁰. Rzeczywiście, na piątym postulacie opiera się teoria prostych równoległych, jak i wiele istotnych twierdzeń dotyczących trójkątów (jak np. twierdzenie głoszące, że sumą kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°).

Jeśli narysujemy odpowiedni diagram, przedłużając w wyobraźni linie proste wymienione w postulacie w nieskończoność, łatwo można dojść do przekonania, iż powinny one się przeciąć. Euklides dowodzi dodatkowo (bez korzystania z piątego postulatu), iż *jeśli* prosta przecinająca dwie inne proste, tworzy z nimi równe kąty naprzemianległe, *to* dwie proste są równoległe (a więc, z definicji równoległości, nie przecinają się)³⁰¹. Intuicja wydaje się więc podpowiadać, że również piąty postulat powinien być prawdziwy (jeśli zmienimy nieznacznie wartości kątów naprzemianległych, a więc wzajemne nachylenie obu prostych, wydaje się proste

²⁹⁹ Uważa się, iż wprowadził go dopiero Euklides, bądź też został wprowadzony krótko przed nim (por. Artmann, B., *Euclid...*, str. 47).

³⁰⁰ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 42-43.

³⁰¹ Por. Artmann, B., *Euclid...*, str. 31-32. Aby udowodnić implikacji w drugą stronę, potrzebny już jest piąty postulat.

powinny się przeciąć po którejś ze stron). Wydaje się więc, że sam piąty postulat powinien również dać się udowodnić na bazie innych aksjomatów, a w każdym razie, że przemawiają za nim silne argumenty heurystyczne.

Począwszy już od starożytności wielu matematyków wyrażało przekonanie, iż piąty postulat jest niewystarczająco ścisły i oczywisty, aby być przyjętym bez dowodu. Takie opinie odnośnie piątego postulatu wyrażał m.in. Proklos (410-485), który pisał, iż „zdanie to należy całkowicie wykreślić z ciągu postulatów”³⁰². Postulat ów powoduje wiele trudności - skąd na przykład, pyta Proklos, pewność, że linie, które się do siebie zbliżają kiedyś się przetną³⁰³? Wielu matematyków (począwszy od starożytności, aż do XVIII wieku) podejmowało więc próby wyprowadzenia piątego postulatu z pozostałych założeń *Elementów*³⁰⁴. Sformułowano wiele dowodów, wszystkie jednak wymagały dodatkowych założeń. Założenia te mogły wydawać się bardziej lub mniej przekonujące, były one jednak zawsze logicznie niezależne od pozostałych aksjomatów, stąd tak naprawdę zastępowały piąty postulat innym stwierdzeniem. Były one na ogół nie mniej niepewne, niż sam piąty postulat. Oto niektóre z takich „zastępczych” założeń:

- 1) „w czworokącie o dwóch sąsiednich kątach prostych, naprzeciw kąta ostrego leży krótszy bok” (Nasir ad-Din (1201 - 1274)),
- 2) „istnieją podobne sobie trójkąty o różnej wielkości” (John Wallis),
- 3) „na trójkącie można opisać okrąg”³⁰⁵ (Joseph Legendre).

Zdania te mogą się rzeczywiście wydawać intuicyjnie przekonujące. Dla wielu matematyków były nawet na tyle intuicyjnie przekonujące, że ich zaprzeczenia wydawały się absurdem. I tak włoski jezuita, Girolamo Sacheri w

³⁰² Proklos, *Z komentarza do Elementów Euklidesa*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 57.

³⁰³ „Zbliżanie się do siebie prostych jest konieczne i rzeczywiście ma miejsce; to jednak, że przy dalszym przedłużaniu przetną się one kiedyś, jest tylko prawdopodobne, ale nie konieczne” (tamże, str. 57).

³⁰⁴ Wywieść piąty postulat z pozostałych założeń próbował już Ptolemeusz, Proklos, matematycy Arabscy, w XVII wieku John Wallis i wielu innych (por. Gray, J, *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, Springer, London 2007, str. 80- 81).

³⁰⁵ Por. Kordos, M., *Wykłady...*, str. 220.

opublikowanej w 1733 roku książce pt. *Euklides oczyszczony ze wszystkich skaz*, podjął próbę „dowodu” piątego postulatu przez *reductio ad absurdum*. Wykazana „sprzeczność” nie była jednak sprzecznością czysto logiczną, ale niezgodnością ze zdaniem podobnym do trzech wspomnianych powyżej – była to więc raczej sprzeczność z intuicyjnymi przekonaniem (dodajmy, że prawdziwość piątego postulatu próbował też tą metodą wykazać Lambert).

Intuicyjne przekonania o prawdziwości piątego postulatu było wśród matematyków bardzo silne. Wielu z nich (jak choćby wspomniany tu Sacheri), pracując nad jego dowodem, dążyło w swojej pracy raczej do przekonania siebie i innych, że jest on prawdziwy, niż do jego odrzucenia. Przekonanie to z pewnością ma swoje źródło w dużym stopniu w wizualnym kontakcie z figurami geometrycznymi, jak linie proste czy trójkąty. Niemiecki matematyk Georg Simon Klügel (1739-1812) stwierdza na przykład, że „jest możliwym, że nie przecinające się linie proste są zbieżne”; z drugiej strony, że jest to „absurdem, wiemy nie dzięki ścisłym wnioskowaniom, ani dzięki poszczególnym pojęciom/określeniom (*notions*) linii prostej i krzywej, ale dzięki doświadczeniu i osądowi naszych oczu”³⁰⁶. Stąd też wiele „dowodów” piątego postulatu związanych było czynnością narysowania, bądź wyobrażania sobie danej figury. Przytoczmy tu tylko jeden interesujący przykład takiego „dowodu”. Podał go arabski matematyk Ibn al-Haytham (865-901), który odwoływał się do intuicji wizualno-mechanicznych. Rozumował on następująco: niech dany będzie punkt P nie leżący na linii l_1 , oraz odcinek PS , prostopadły do l_1 , przy czym punkt S leży na prostej l_1 . Jeśli zaczniemy przesuwać PS wzdłuż prostej l_1 , zostanie skonstruowana nowa linia l_2 . Linia ta jest równoległa do l_1 , ponieważ odległość pomiędzy P i l_1 pozostaje zawsze niezmienną³⁰⁷. Tego rodzaju potwierdzenia, (czy, jak niektórzy sądzili, dowody) można nazwać „dowodami przez wizualizację”. Jak wiadomo, okazały się one wszystkie niekonkluzywne.

³⁰⁶ Za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 48.

³⁰⁷ De Cruz, H., *An Enhanced Argument for Innate Elementary Geometric Knowledge and its Philosophical Implications*, w: *New Perspectives on Mathematical Practices*, red. B. van Kerkhove, World Scientific, New Jersey, London, Singapore 2009, str. 199. Warto dodać, iż pomysł ten nie pozostał bez oddźwięku wśród matematyków arabskich. Omar Khayyam (1048-1131) zarzucił powyższemu, że ruch jest atrybutem materii i nie powinien być wprowadzany do świata matematyki (por. tamże str. 199).

W czym tkwi intuicyjne przekonanie o prawdziwości piątego postulatu Euklidesa? Jaki miała charakter i skąd wpływała intuicja podpowiadająca matematykom prawdziwość piątego postulatu? Czy była to intuicja przestrzenna, związana z doświadczeniem diagramu, czy może miała charakter bardziej matematyczny, tzn. związany z dobrym rozumieniem geometrii euklidesowej oraz wycuciem tego, co może być udowodnione, a co nie? Zapewne oba czynniki odgrywały tutaj rolę, choć pierwszy zdecydowanie przeważał. Jak wspominałem, kontakt z diagramem, bądź odpowiednia wizualizacja łatwo rodzi przekonanie, że proste spełniające założenia piątego postulatu się przecinają. Prostem faktem, potwierdzającym w oczach niektórych matematyków była sama możliwość narysowania pewnych rysunków. Istnienie (oraz możliwość konstrukcji) idealnego kwadratu, czy trójkąta równobocznego o sumie kątów równej 180° stopni są konsekwencjami piątego postulatu, a możliwość narysowania tych figur wydaje się intuicyjnie niezaprzeczalna (zaznaczmy przy tym, iż problematycznym jest, czy nawet taki narysowany jednostkowy kwadrat może dowodzić jakiegokolwiek ogólnej tezy).

Zadajmy wreszcie pytanie, gdzie intuicja fizyczna rozmięła się z faktyczną logiczną niezależnością od pozostałych postulatów? Dlaczego – wbrew intuicji – proste równoległe mogą się jednak przeciąć? Wydaje się, że jednym z powodów może być to, iż wyobrażenia przestrzenna nie wychwytuje wszystkich definicyjnych subtelności związanych z teorią prostych równoległych. W intuicji pojęcia „równoległości”, „równej odległości” oraz „nie przecinania się” wydają się być (w odniesieniu do linii prostych) równoważne – własności te wydają się być w wyobraźni przestrzennej (na płaszczyźnie) postrzegane „na raz”. Pojęcia te nie są jednak w ogólności sobie równoważne³⁰⁸. Scharakteryzowane powyżej intuicje okazały się jednak błędne. Należy przy tym pamiętać, że nie były one „fałszywe” w tym sensie, że doprowadzały do fałszywego przekonania o prawdziwości piątego postulatu. Piąty postulat nie jest zdaniem fałszywym – okazało się po prostu, że jego negacja jest również niezależna od pozostałych postulatów, i tym samym dopuszczalna logicznie. Stąd intuicje prowadziły do błędnego przekonania w tym

³⁰⁸ Zgodnie z definicją Euklidesa, proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy się nie przecinają.

sensie, że sugerowały niemożliwość alternatywy dla geometrii nieeuklidesowej – niemożliwość przecinania się prostych równoległych, czy niemożliwość istnienia trójkątów o sumie kątów innej niż 180° .

Obok przekonań matematyków odnośnie prawdziwości piątego postulatu, opartych na wizualnym kontakcie z diagramem, rozważano możliwość jego empirycznej weryfikacji, tzn. przez badania świata fizycznego, czy też przestrzeni fizycznej. O tym jednak więcej napiszę w dalszej części rozdziału.

4.3. Pierwsze geometrie nieeuklidesowe oraz zagadnienie struktury matematycznej przestrzeni fizycznej

Badania nad piątym postulatem – w szczególności jego wspomniane „dowody” nie wprost pochodzące od Sacheriego – przyczyniały się do wyprowadzanie ciekawych poznawczo konsekwencji logicznych z negacji piątego postulatu. Dopiero jednak na początku XIX wieku kilku matematyków odważyło się uznać poprawność tych konsekwencji, oraz przyjąć możliwość istnienia innej geometrii niż euklidesowa³⁰⁹. Byli to wspomniani C.F. Gauss, M. Łobaczewski i J. Bolyai. Jak się wydaje, to Gauss jako pierwszy rozważał na poważnie możliwość zbudowania geometrii opartej na negacji piątego postulatu, z obawy przed „krzykiem Beotów” nie opublikował jednak częściowych wyników, które udało mu się uzyskać. Łobaczewski i Bolyai zdecydowali się wyprowadzić pełne konsekwencje z negacji piątego postulatu, stworzyli kompletne systemy nieeuklidesowe oraz zdecydowali się opublikować swoje wyniki³¹⁰. W systemach tych wyprowadzonych było wiele twierdzeń, będących w sprzeczności z

³⁰⁹ Dodajmy, że geometrie przeczące intuicjom euklidesowym znane były już przed XIX wiekiem. Były to geometria rzutowa (jeszcze w dość wczesnej fazie rozwoju), oraz geometria sferyczna. Nie uważano jednak, aby były one „prawdziwe o przestrzeni fizycznej”, nie uważano również, aby naruszały niewzruszoną prawdziwość systemu euklidesowego.

³¹⁰ Pracami Bolyaia nie będę się w tej pracy zajmował. Z matematycznego punktu widzenia jego wyniki były bardzo podobne do wyników Łobaczewskiego. Nie pozostawił on natomiast, o ile mi wiadomo, żadnych prac ani komentarzy odnośnie filozoficznych konsekwencji swoich wyników.

twierdzeniami Euklidesa. Można było w nich np. wykazać, iż suma kątów w trójkącie jest różna od 180° stopni, jak również wiele innych konsekwencji negacji piątego postulatu, jak trzy zdania podane powyżej. Nie ma tu miejsca na przedstawienie szczegółów matematycznych tych systemów. Dla potrzeb dalszej dyskusji wspomnę tylko, iż konsekwencją ujęć Łobaczewskiego i Bolyaia było istnienie (czy też możliwość konstrukcji) nieskończonej ilości geometrii euklidesowych. W systemie Łobaczewskiego pojawia się po prostu stała, która może przyjąć nieskończenie wiele wartości, a która w przypadku geometrii euklidesowej przyjmowała wyróżnioną wartość równą 1 (stałą tą można określić jako jednostkę odległości)³¹¹.

Geometrie nieeuklidesowe zmusiły do postawienia pytania: czy geometria euklidesowa rzeczywiście w sposób absolutnie prawdziwy opisuje własności przestrzeni fizycznej (o ile oczywiście ta ostatnia jest przedmiotem geometrii)? Jeśli nie ona, to która z nieskończenie wielu geometrii nieeuklidesowych to czyni? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy określić, która ze wspomnianych powyżej stałych występujących w teorii Łobaczewskiego reprezentuje ową geometrię. Jak obliczyć tę stałą? Wielu matematyków, w tym Łobaczewski, czy opisywany dalej Riemann, uważało, że można tego dokonać wykonując odpowiednie badania empiryczne. Weryfikacja empiryczna piątego postulatu nie wydaje się możliwa, m.in. ze względu na jego specyficzną, nieskończoną naturą. Aby przekonać się bowiem, czy dwie nieskończone proste spełniające jego założenia się przecinają, należałoby mieć możliwość przesłedzenia potencjalnie nieskończonej ich części. Jak pisze Gray, „jasnym jest, że w trakcie, gdy suma dwóch kątów zbliża się do π , punkt w którym linie się przecinają coraz bardziej się oddala, w ogólności (*in principle*) poza granice galaktyki³¹²” – co wydaje się uniemożliwiać empiryczną weryfikację. Pozostaje więc odwołanie się do konsekwencji logicznych piątego postulatu. Można na przykład określić trójkąt w przestrzeni fizycznej – najlepiej możliwie duży – a następnie stwierdzić, czy suma miar jego kątów równa jest 180° stopni. Trójkąty obserwowalne w warunkach ziemskich są jednak za małe, aby

³¹¹ Por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 57-59.

³¹² Gray, J, *Worlds Out of Nothing...*, str. 80.

wykryć ewentualną minimalną różnicę pomiędzy ich sumą kątów a wartością 180° stopni. Łobaczewski wychodził jednak z założenia, iż taki eksperyment można przeprowadzić – tyle tylko, że musiałby być przeprowadzony na ogromną skalę. Miał on m.in. pomysł aby rozważać pewne trójkąty, których dwoma wierzchołkami byłyby odległe gwiazdy. Osiągnął w tej kwestii pewne wyniki, ostatecznie doszedł jednak do wniosku, iż możliwość błędów obliczeniowych uniemożliwia tutaj jakąkolwiek ostateczną decyzję co do wartości stałej³¹³.

Zwróćmy uwagę na jeszcze inne problemy związane z podobnymi badaniami. Po pierwsze, pojawia się problem interpretacji pojęć geometrycznych po stronie świata fizycznego, która musi być w jakiś sposób określona, aby przeprowadzić jakikolwiek eksperyment. Jakiego typu obiektem fizycznym powinna być interpretacja geometrycznego pojęcia linii *prostej*³¹⁴? Najczęściej wymienia się tu promień światła, mogą to być jednak również inne obiekty, jak choćby napięta lina, czy ściana budynku. Można dalej zapytać, czy geometryczne własności przysługują ciałom, przestrzeni fizycznej (cokolwiek by przez to nie rozumieć), czy przestrzeni rozumianej jako „byt pośredniczący”, jako niefizyczny pojemnik w którym umieszczone są ciała.

Chciałbym zwrócić uwagę na opisane w powyższych akapitach dwie płaszczyzny rozważań nad prawdziwością piątego postulatu. Z jednej bowiem jest on rozważany jako przedstawiony w przestrzeni wyobrażeniowej, czy intuicji

³¹³ Tamże, str. 119.

³¹⁴ Zagadnienie definicji linii prostej i problem jej empirycznej interpretacji jest zagadnieniem powiązaniem z problematyką piątego postulatu. Wśród definicji *Elementów* czytamy, że „prosta to linia jednakowo położona względem swoich punktów” (Euklides, *Elementy*, str. 44). Znaczenie tego sformułowania można też oddać następująco: linia jest prosta, jeśli przy rotacji powierzchni zawierającej tę linię wokół dwóch punktów na niej leżących, linia ta nie zmienia położenia (Łobaczewski, N.: *The Theory of Parallels*, w: Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*, Dover Publications, Inc, 1955, str. 11). Można sobie zadać pytanie, Czy nie można powiedzieć, że Łobaczewski, Bolyai czy Gauss nadawali w rzeczywistości inne znaczenie terminowi „linia prosta”? Byłaby to pewna odpowiedź na rozterki wszystkich tych, dla których zgodnie z intuicyjnym rozumieniem prostych równoległych, nie mogą się one spotkać. Torretti argumentuje jednak, że Łobaczewski nie rozumie jednak pojęcia linii prostej w sposób zasadniczo inny niż czyni się to zazwyczaj.

W tym sensie, jak podkreśla Torretti, użycie pojęcia „linia prosta” nie stanowi odejścia od konwencjonalnego sposobu użycia tego terminu; podkreśla on, że już „Proklos i najprawdopodobniej Euklides wiedzieli, [konwencje te] nie wymagają, by prostymi nazwać jedynie te linie, które spełniają postulat piąty” (Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 63). Jest to bardzo interesujące zagadnienie, wymagające jednak osobnej analizy, na którą nie ma tutaj miejsca.

przestrzennej. Z drugiej natomiast jako prawdziwy (bądź fałszywy) o przestrzeni fizycznej. W pierwszym przypadku wizualizacja dotyczy diagramu (narysowanego bądź wyobrazonego), a w drugim dokonujemy interpretacji fizycznej systemu geometrycznego – zmysł wzroku gra wtedy rolę nie w kontekście analizy diagramu, ale obserwacji różnego rodzaju obiektów fizycznych. Można powiedzieć, że te dwa aspekty przestrzeni – subiektywny (intuicyjny) i obiektywny (fizyczny) – oddalają się od siebie wraz z rozwojem geometrii nieeuklidesowych. Eksperyment, który miałby rozstrzygnąć, która geometria w sposób prawdziwy opisuje własności przestrzeni nie wymaga w sposób istotny udziału wyobraźni. Podobnie to, co przedstawiamy sobie w intuicji przestrzennej nie musi mieć jakiegokolwiek związku ze strukturą przestrzeni fizycznej. Teza o powiązaniu tych dwóch kategorii była z pewnością *implicite* przyjmowana przez wielu filozofów i matematyków przed XIX wiekiem, musiała być jednak w świetle rozwoju geometrii nieeuklidesowych odrzucona. Do tej kwestii będę jeszcze krótko wracał w tym, jak i w kolejnych rozdziałach. O ile pytanie, która geometria jest prawdziwa „o świecie fizycznym” nie ma kluczowego znaczenia dla kwestii roli wizualizacji w poznaniu matematycznym, nie będzie ono w centrum moich dalszych rozważań.

Problemy filozoficzne związane z relacją geometrii do przestrzeni fizycznej, oraz miejsca wizualizacji w tym sporze dobrze obrazują poglądy obrazują poglądy Carla Friedricha Gaussa. Ów niemiecki uczony był przede wszystkim genialnym i wszechstronnym matematykiem, uwagi filozoficzne wygłaszał raczej rzadko. Z jego rozrzuconych uwag można jednak zrekonstruować zręby ciekawego stanowiska odnośnie znaczenia istnienia geometrii nieeuklidesowych dla filozofii matematyki.

Początkowo Gauss był przekonany o apriorycznym charakterze geometrii; tak jak wielu poprzedzających go matematyków, próbował również wywieść piąty postulat z pozostałych założeń *Elementów*. Kiedy jednak z czasem przekonał się, że jest to niemożliwe, przyjął pogląd na naturę geometrii, który nosi wiele cech empiryzmu. W jednym z listów do Olbersa z 1817 r. Gauss pisze, iż „konieczność naszej geometrii nie może być udowodniona – w każdym razie nie *przez* ani *dla* naszego ludzkiego rozumienia (...) Powinniśmy klasyfikować (*class*) geometrię nie

z arytmetyką, która pozostaje czystą nauką *a priori*, ale, powiedzmy, z mechaniką”³¹⁵. Empiryczny charakter geometrii związany jest więc według Gaussa z faktem, iż jest ona nauką odnoszącą się do przestrzeni. Stanowisko Gaussa jest dalej rozjaśnione przez następującą wypowiedź: „zgodnie z moim najgłębszym przekonaniem, teoria przestrzeni zajmuje zupełnie inne miejsce w naszej wiedzy *a priori*, niż ta, którą zajmuje czysta teoria dotycząca wielkości (*pure theory of quantity*). W naszej wiedzy o tej pierwszej brak jest pełnego przekonania o jej konieczności (jak również absolutnej prawdziwości), która cechują tę drugą”³¹⁶.

Geometria nie jest więc nauką konieczną, w każdym razie z punktu widzenia naszych możliwości poznawczych. Dodajmy przy tym, że przez konieczność, jak się wydaje, rozumiał Gauss prawdziwość, absolutną prawdziwość odnośnie natury przestrzeni, jako przedmiotu geometrii. Sama przestrzeń jest rozumiana jako zewnętrzna wobec nas przestrzeń fizyczna. Jak pisze Gauss, „przestrzeń istnieje w sposób rzeczywisty i odrębny od naszego umysłu”, a jej praw „nie potrafimy w zupełności i *a priori* opisać”³¹⁷. Natura tej przestrzeni wymyka się nam, nie jest możliwe jej ujęcie za pomocą samego rozumu – a jest to przede wszystkim konsekwencją istnienia geometrii nieeuklidesowych; nie możemy udowodnić, że geometria euklidesowa opisuje w sposób prawdziwy własności przestrzeni i w ten sposób wykazać jej konieczności. Możemy zrobić to jedynie odwołując się do doświadczeń fizycznych, chociaż wątpliwe jest, iż mogą one rozstrzygnąć, która z nieskończenie wielu geometrii jest prawdziwa „o przestrzeni fizycznej”. Dodajmy, że Gauss wydaje się przy tym uważać, iż istnieje geometria – jedna z nieskończenie wielu możliwych – która opisuje w sposób prawdziwy własności przestrzeni. Będąc nauką empiryczną, geometria pozostaje więc dla Gaussa nauką, „której twierdzenia podlegają wartościowaniu w kategoriach prawdy i fałszu”; jednak „jedynie doświadczenie może rozstrzygnąć, która geometria jest ‘prawdziwa’”³¹⁸.

³¹⁵ Gauss, C.F., *Werke*, za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 256.

³¹⁶ Gauss, C.F., *From the letter of Gauss to Bessel, 9 April 1830*, w: *From Kant to Hilbert...*, str. 302.

³¹⁷ Tamże, str. 302.

³¹⁸ Lubomirski, *Henri Poincarégo filozofia geometrii*, Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1974, str. 35.

Nie jest jasne, na ile tak rozumiany empiryczny charakter geometrii jest związany z intuicją przestrzenną. Wydaje się, że niedookreśloność, niedoskonałość geometrii (która wynika z niemożliwości określenia na gruncie matematyki, która geometria jest prawdziwa o świecie fizycznym) jest też powiązana z niedoskonałością, niedookreślonością intuicji przestrzennej. Z uwagi na bardzo niewielką ilość filozoficznych tekstów, a właściwie uwag Gaussa, trudno tu jednak podjąć się szerszej interpretacji jego poglądów w tej kwestii. Szereg wypowiedzi niemieckiego matematyka wskazuje jednak na to, iż rolę reprezentacji przestrzennych w poznaniu matematycznym cenił on bardzo wysoko. W jednej z recenzji pisze on co następuje o roli intuicji (*Anschauung*) w geometrii: „każdy, kto jest zaznajomiony z istotą geometrii wie, że nie są one [tzn. środki czysto logiczne, jak definicje] same w sobie w stanie nic osiągnąć; pozostają one bezowocne, jeśli żywa i płodna intuicja [*Anschauung*] samego obiektu nie wypełnia naszego poznania (*prevails everywhere*)³¹⁹”.

Intuicja przestrzenna jest więc dla Gaussa bardzo istotnym elementem procesu poznania w matematyce³²⁰. Jednocześnie, przedmiotem geometrii jest według niego przestrzeń fizyczna. Intuicja przestrzenna jako źródło wiedzy o tej przestrzeni jest jako władza poznawcza zawodna i niewiarygodna (dodajmy, przy tym, że używając terminu „intuicja” miał Gauss, jak się wydaje, na myśli intuicję wyobrazeniową – *Anschauung*). Poglądy niemieckiego matematyka ukazują więc niezależność intuicji przestrzennej rozumianej jako źródło empirycznego poznania geometrycznego dotyczącego przestrzeni fizycznej, oraz intuicji przestrzennej jako

³¹⁹ Gauss, C.F., *From the review of J.C. Schwab and Matthias Metternich (1816)*, (w:) *From Kant to Hilbert...*, str. 300.

³²⁰ W jednym z listów Gauss narzeka na przykład na praktyczne trudności, jakie napotykał przy sporządzeniu rysunku towarzyszącego jego dowodowi fundamentalnego twierdzenia algebry: „Wciąż pozostaje prawdą, że twierdzeniami mającymi postać negacji (*negative theorems*) jak to twierdzenie, przekształcenie osobistych przekonań w obiektywne wymaga ogromnie skrupulatnej pracy. Aby zwizualizować całą różnorodność przypadków, należałoby przedstawić graficznie ogromną liczbę równań w postaci krzywych; każda krzywa musiałaby być narysowana w oparciu o naniesienie na wykres jej punktów (*by its points*), a określenie współrzędnych każdego punktu z osobna wymaga ogromnej ilości obliczeń. Z rys.4 z mojej pierwszej pracy z roku 1799 nie widać, ile pracy było potrzebne w celu wykonania odpowiedniego rysunku krzywej” (*List do Ch.C.Schumachera*, za: Borwein, P. Jörgenson, L./ str. 897). Wydaje się, że cytat ten potwierdza przywiązanie Gaussa do graficznej reprezentacji pojęć i wyników matematycznych.

dostarczającej metody reprezentacji obiektów matematycznych oraz rozumowania o nich.

W kolejnym podrozdziale omówię krótko wkład, jaki do dyskusji nad geometryczną charakterystyką przestrzeni fizycznej, oraz rolę wizualizacji w geometrii wniósł Bernhard Riemann.

4.4. Filozofia geometrii Bernharda Riemanna

W połowie XIX wieku na zupełnie nowe tory rozwoju sprowadził geometrię matematyk niemiecki Bernhard Riemann. Dzięki jego pracom, geometria wkroczyła na znacznie większy poziom ogólności i abstrakcji, jednocześnie „oddalając” poznanie geometryczne od intuicji przestrzennej. Riemann, będąc wielkim matematykiem, nie stronił również od uwag filozoficznych (sformułował on m.in. ciekawą wersję stanowiska empirystycznego w filozofii matematyki)³²¹. Z pracami Riemanna związana jest też nowa postać pytania o to, która geometria w sposób prawdziwy opisuje przestrzeń fizyczną.

Nowe podejście do geometrii przedstawił Riemann w słynnym wykładzie habilitacyjnym, wygłoszonym w 1854 roku, zatytułowanym *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen)*³²². Teoria Riemanna przenosi rozważania o przestrzeni na zupełnie nowy, znacznie ogólniejszy poziom³²³. Centralną rolę odgrywa tu pojęcie n -wymiarowej rozmaitości. We współczesnym sformułowaniu taką n -rozmaitość można po prostu nazwać zbiorem n -wymiarowych punktów, a więc punktów o n współrzędnych. „Tradycyjna” przestrzeń, czy powierzchnia staje się wtedy szczególnym przypadkiem rozmaitości, mianowicie

³²¹ Riemann interesował się jednocześnie fizyką. Jose Ferreirós uważa nawet, że „ewolucja myśli Riemanna dostarcza lepszego przykładu magicznego trójkąta [matematyki, filozofii i fizyki] w działaniu, niż ta Einsteina z okresu 1905-1916” (Ferreirós, J., *Riemann's Habilitationsvortrag At the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy*, w: *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2006, str. 67).

³²² Wykład był wygłoszony w 1854 roku, wydania wersji tekstowej doczekał się w roku 1868 (por. Ewald, W.B., *From Kant to Hilbert...*, str. 649-650).

³²³ Warto tu wspomnieć, iż Riemann nie interesował się problemami związanymi z aksjomatyką Euklidesa, które były jeszcze w centrum prac m.in. Łobaczewskiego, nie ma w jego pracach nawet nawiązań do prac rosyjskiego matematyka. Riemann wprowadza o wiele ogólniejszy schemat pojęciowy niż ten, w którym rozważania swoje prowadzili geometryści do początku XIX wieku, schemat, który nie wymaga w ogóle nawiązań do aksjomatyki Euklidesa (por. Gray, J., *Worlds Out of Nothing...*, str. 193, Laugwitz, D., *Bernhard Riemann...*, str. 224).

rozmaitością 3-wymiarową w pierwszym, i 2-wymiarową w drugim przypadku. Riemann nie dysponował współczesnym pojęciem zbioru, ani n -tek uporządkowanych. W pracy *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* pisze w zamian o „wielokrotnie rozciągniętej wielkości” (*mehrfach ausgedehnte Grösse*). Wymiarom odpowiadały tu pewne aspekty rozciągłości danej wielkości – w ten sposób, że „ustalenie pozycji w ramach n -krotnie rozciągniętej rozmaitości jest zredukowane do n określeń wielkości”; w przypadku ciągłych rozmaitości takie określenia wielkości mogą być wykonywane za pomocą pomiarów³²⁴. Dla każdej n -rozmaitości można dodatkowo obliczyć pewien parametr, zwany jej krzywizną, każda n -wymiarowa rozmaitość dopuszcza dodatkowo różne metryki, tzn. można w niej mierzyć odległość na różne sposoby. Odległości między punktami jak i inne parametry obliczane są w n -rozmaitościach za pomocą metod analizy matematycznej, jak całkowanie, czy równania różniczkowe³²⁵.

Konsekwencją takiego ujęcia jest oczywiście to, iż, jak zaznacza J. Gray, „istnieje wiele geometrii, jedna dla każdego typu powierzchni i każdej definicji odległości”³²⁶. Żadna z nich nie miała przy tym wyróżnionej pozycji. W tym kontekście na nowo można sformułować pytanie o to, która geometria (przestrzeń n -wymiarowa) jest prawdziwa „o przestrzeni fizycznej”. Pojawia się tu szereg kwestii: czy jest to przestrzeń 3-wymiarowa? Czy posiada stałą krzywiznę, czy zmienną? Jeśli jest to krzywizna stała, to jaka jest jej wartość liczbowa? Dla Riemanna był to autentyczny, istotny problem; sam przez „przestrzeń” (*der Raum*) rozumiał „pojedynczy (*unique*) byt, który jest areną dla ciał fizycznych i który stanowi (*locus*) ruchów fizycznych”³²⁷. Uważał też, że pytanie o to, która geometria prawdziwie opisuje przestrzeń ma sens, oraz, że jest problemem empirycznym, „który należy rozwiązać przez eksperymentalne badania zjawisk fizycznych”³²⁸. W słowach Riemanna, „geometryczne własności przestrzeni nie

³²⁴ Riemann, B., *On the hypotheses which lie at the foundation of geometry*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 654. Rozmaitości, które rozważa Riemann są przy tym prawie wyłącznie rozmaitościami ciągłymi.

³²⁵ Por. Gray, J., *Worlds Out of Nothing...*, str. 191. Wprowadzenie tychże metod do geometrii interpretowano czasem jako sprowadzenie geometrii do analizy matematycznej.

³²⁶ Tamże, str. 193. Geometria euklidesowa jest geometrią o stałej krzywiznie równej zero, systemy Łobaczewskiego posiadają z kolei stałą krzywiznę, ale ujemną. Przykładem nowych geometrii, wprowadzonych przez Riemanna są geometrie eliptyczne (stała krzywizna dodatnia)

³²⁷ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 83.

³²⁸ Tamże, str. 84. Riemann zakładał, że przestrzeń fizyczna jest 3-rozmaitością, czy też „potrójnie rozciągniętą wielkością”. Najprawdopodobniej jest też rozmaitością ciągłą, którą można traktować jako zbiór punktów, z pewną nadaną strukturą (por. tamże, str. 103). Dodajmy, że przestrzeń fizyczna

mogą być wyznaczane jedynie za pomocą ich własności topologicznych, ale muszą być wyznaczane przez obserwację i eksperyment”³²⁹. Nie ma tu miejsca na szerszą analizę „problemu przestrzeni” w ujęciu Riemannowskim. Dodajmy tylko, że niemiecki matematyk, sugeruje, że na najgłębszym poziomie, „podstawa dla relacji pomiędzy wielkościami (*der Grund der Massverhältnisse*) musi być poszukiwana w siłach działających na przestrzeń”³³⁰.

Jak Riemann zapatrywał się na rolę intuicji przestrzennej, czy przestrzeni wyobrażeniowej w poznaniu geometrycznym? Jak wspominałem, z matematycznego punktu widzenia, teoria Riemanna oddalała sam proces uprawiania geometrii od intuicji przestrzennej; w jej centrum były teraz przekształcenia analityczne, a biorąc pod uwagę różnorodność przestrzeni, różne typy krzywizn i dowolną ilość ich wymiarów, osąd intuicji staje się tu wysoce niejasny, nieinformatywny, albo w ogóle niemożliwy. Również sam Riemann wydawał się nie przypisywać większej wagi roli intuicji przestrzennej w poznaniu matematycznym. Z jego notatek wynika, że podzielał tu pogląd filozofa pierwszej połowy XIX wieku, Johanna Friedricha Herbart (1776-1841)³³¹. Z notatek tych można wnioskować, iż Riemann odrzucał kantowską teorię czystej naoczności przestrzeni, jako „zupełnie pozbawioną treści, nic nie mówiącą, nieadekwatną hipotezę”³³². Wymieniając podstawowe charakterystyki przestrzeni z kantowskiej *Krytyki czystego rozumu*, Laugwitz stwierdza, że „Riemann nie zgodziłby się z żadną z nich”³³³. Niemiecki matematyk nie rozumie więc z pewnością przestrzeni jako subiektywnej formy poznania. Dodatkowo, Riemann wydawał się nie przypisywać większego znaczenia roli intuicji przestrzennej w poznaniu matematycznym. Jak pisze Ferreirós, „Riemann podkreślał, że pojęcie rozmaitości (...) jest całkowicie niezależne od intuicji geometrycznej (*Anschauung*)”³³⁴. Dla

jest dla Riemanna „fizyczną realnością (*physikalische Wirklichkeit*) daną w doświadczeniu” (Laugwitz, D., *Bernhard Riemann...*, str. 283).

³²⁹ Riemann, B., *On the hypotheses...*, str. 651.

³³⁰ Laugwitz, D., *Bernhard Riemann...*, str. 222.

³³¹ Por. tamże, str. 283.

³³² Za: tamże, str. 283.

³³³ Tamże..., str. 283.

³³⁴ Ferreirós, J., *Riemann's Habilitationsvortrag...*, str. 93. Ferreirós pisze, że poglądy Riemanna ulegały zmianom zanim niemiecki matematyki przyjął powyżej wspomniany pogląd. Wyjściowo traktował Riemann podejście abstrakcyjne jako jedynie teoretyczną możliwość, która może się

praktyki geometrii, oraz poznania geometrycznego w ogóle, istotna jest dla Riemanna przede wszystkim umiejętność operowania pojęciami, a mniejszą rolę pełni wyobraźnia, czy intuicja; również reprezentacje przestrzenne mają znaczenie tylko o tyle, że są służą prezentacji pewnych idei, czy wyników³³⁵. Badając 3-, 4-, czy 15-wymiarowe przestrzenie, powinniśmy polegać przede wszystkim na umiejętnościach analitycznych oraz badać konsekwencje przyjętej krzywizny i metryki – a nie posługiwać się wyobraźnią przestrzenną. Dodajmy, iż Riemann uznawał, iż przestrzenny charakter jest w jakimś stopniu narzucony naszym percepcjom. Są one, według niego uporządkowane „jako będące obok siebie bądź pomiędzy sobą w ten sposób, że nie możemy ich ogarnąć (*zusammenfassen*) inaczej, niż na sposób przestrzenny”³³⁶. Tak rozumiany pierwiastek przestrzenny – jak i intuicja geometryczna – nie mają jednak wpływu na poznania matematyczne, a z pewnością nie na wartość logiczną poszczególnych zdań matematycznych.

Dodajmy, iż Riemann był pod wpływem Herbarta empirystą w filozofii matematyki. Jego stanowisko było przy tym mocno zainspirowane wspomnianym powyżej Herbartem. Tym, co Riemann przejął od Herbarta była, jak pisze Ferreirós, w szczególności „teoria wiedzy i powiązana z nią metodologia”³³⁷. Zgodnie z tym ujęciem epistemologii matematyki, ma ona korzenie w poznaniu zmysłowym, jej twierdzenia są obalalne, nadto kładziony jest tu nacisk na rozwój historyczny matematyki. Riemann uważa przy tym wraz z Herbartem, iż oprócz percepcji zmysłowej posiadamy władzę poznawczą, którą – z braku lepszego terminu – można oddać terminem refleksja (*Nachdenken*). Jest ona źródłem ścisłych pojęć i „spójnych koncepcji rzeczywistości”, za pomocą których reorganizujemy i interpretujemy doświadczenie fizyczne³³⁸. Empirystyczne stanowisko B. Riemann nie jest jednak bezpośrednio związane z wizualizacjami, nie będę go tutaj więc szerzej omawiał. Warto tu tylko zauważyć, iż empiryzm Riemanna – nie będąc w swej istocie bezpośrednio związany z problematyką

okazać nieowocna i zaciemniająca to, co jest jasne w intuicyjnym języku przestrzennym (por. tamże, str. 93). Ten pogląd niemieckiej matematyka uległ jednak zmianie.

³³⁵ Por. Ferreirós, J., *Riemann's Habilitationsvortrag...*, str. 70.

³³⁶ Za: Laugwitz, D., *Bernhard Riemann...*, str. 283.

³³⁷ Ferreirós, J., *Riemann's Habilitationsvortrag...*, str. 72.

³³⁸ Tamże, str. 74.

przestrzeni fizycznej i intuicji przestrzennej – wychodzi poza XIX-wieczne postaci empiryzmu, wykazując raczej podobieństwa ze współczesnym quasi-empiryzmem w filozofii matematyki, związanym I. Lakatosem, W.V.O. Quinem czy P. Kitcherem³³⁹.

4.5. Filozofia geometrii Hermanna Helmholtza a wizualizacje

Hermann Helmholtz był jednym z największych i najbardziej wpływowych filozofów i naukowców XIX wieku. Zajmował się zarówno fizyką optyką, akustyką, jak i filozofią oraz matematyką. Był jednym z pierwszych naukowców, którzy przeprowadzali empiryczne badania nad percepcją, sformułował również własną teorię ujmującą naturę percepcji. Dla mnie szczególnie interesujący jest przy tym fakt, iż Helmholtz odnosił te badania do kwestii roli intuicji przestrzennej w geometrii euklidesowej, jak i nieeuklidesowej. Zagadnienie geometrii nieeuklidesowych żywo go interesowało, zarówno w zakresie wspomnianej intuicji przestrzennej, jak i pytania o strukturę przestrzeni fizycznej. Pracował zresztą również nad matematyczną stroną geometrii nieeuklidesowych, miał uzyskać niezależnie od Riemanna, częściowe wyniki zgodne z jego pracami. Dodajmy, że Helmholtza można uznać jednoznacznie za reprezentanta empiryzmu w filozofii geometrii.

³³⁹ Tamże, str. 95. Według Riemanna „wiedza polega zawsze na uzupełnianiu tego, co zaobserwowane, na dodawaniu hipotetycznych elementów do danych doświadczenia” (tamże, str. 78). powstaje ona zawsze efekcie wzajemnych oddziaływań doświadczenia zmysłowego i *Nachdenken*. Za pomocą *Nachdenken*, a więc między innymi pojęć, które a niej wypływają, tworzymy „hipotezy, które wychodzą poza to, co jest dane bezpośrednio”; hipotezy są – zarówno według B. Riemanna jak i Herbart – wyrazem twórczej i aktywnej roli umysłu w poznaniu naukowym (por. tamże, str. 74). Hipoteza to wszystko, co jest „dodane w myśli do wrażeń zmysłowych” (*Alles zu den Erscheinungen Hinzugedachte*) (tamże, str. 75). Również matematyka ma swoje źródło w doświadczeniu oraz oparta jest na hipotetycznych postulatach (por. tamże, str. 94-95). Matematyka, podobnie jak nauki przyrodnicze, powstaje też w wyniku wzajemnych oddziaływań doświadczenia i *Nachdenken*. W istocie, matematyka jest integralną częścią całości nauk przyrodniczych, a jej twierdzenia, podobnie, jak hipotezy naukowe, nie mogą nigdy osiągnąć poziomu absolutnej pewności i są otwarte na modyfikacje.

Jedną z głównych charakterystyk teorii przestrzeni Helmholtza jest przyrównanie postrzeżeń zmysłowych do znaków: zgodnie z tym ujęciem, „surowe dane zmysłowe powinny być rozumiane jako niezinterpretowane znaki”³⁴⁰. Znaki te nie mają u Helmholtza z początku żadnej konkretnej treści i nie dają nam bezpośredniej wiedzy o obiektach fizycznych. Nabierają one „znaczenia, które czyni je siłą napędową nauki, w trakcie długiego procesu kojarzenia i porównywania, rozpoczynającego się we wczesnym dzieciństwie”³⁴¹. W ten sposób, w wyniku szeregu nieświadomie wykonywanych wnioskowań indukcyjnych nabywamy przekonania odnośnie świata zewnętrznego; wnioskowania te są przeprowadzane „na śladach pamięciowych, a nie czymś, co jest wyrażalne w słowach oraz zdaniach”³⁴². Ich przesłankami i wnioskami są więc nie zdania, ale ślady pamięciowe³⁴³.

Helmholtz formułuje dość nowoczesną jak na jego czasy ideę, iż spostrzeżenia, czy ich treść, nie odpowiadają w bezpośredni i jednoznaczny sposób obiektom fizycznym, które je wywołują. Według Helmholtza nie jesteśmy jedynie biernymi odbiorcami wrażeń zmysłowych, które pojawiają się w nas w zawsze ten sam sposób, określony jedynie fizyczną charakterystyką postrzeganych przedmiotów. O takim stanowisku pisze jako o „dawniejszej koncepcji intuicji, która przyjmuje, że coś jest nam dane za pomocą intuicji, jeśli reprezentacja tego czegoś wkracza (*enters*) do świadomości jednocześnie z wrażeniem zmysłowym, oraz bez refleksji i wysiłku”³⁴⁴. Używając współczesnej terminologii filozofii percepcji, można powiedzieć, że Helmholtz podważył stanowisko realizmu bezpośredniego. Na stanowisko to składają się m.in. tezy, iż przedmioty fizyczne

³⁴⁰ Merrick, T., *What Frege Meant When He Said: Kant is Right about Geometry*, “*Philosophia Mathematica*”, Vol. 14 (III), 2007, str. 49.

³⁴¹ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 163.

³⁴² Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 50.

³⁴³ H. Helmholtz uzasadnia takie ujęcie m.in. tym, że obraz powinien wykazywać podobieństwo do rzeczy, którą reprezentuje, podczas gdy symbol nie musi takiego podobieństwa wykazywać. Tymczasem, według Helmholtza, spostrzeżenia (jako wewnętrzne wytwory aktów percepcji) nie są jako takie wcale podobne do przedmiotów zewnętrznych, które je wywołują (por. Helmholtz, H., *The Facts in Perception* (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, V. I.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 695). Jest to związane z odrzuceniem przez Helmholtza realizmu bezpośredniego w filozofii percepcji (o czym mowa będzie dalej).

³⁴⁴ Helmholtz, H., *The Facts in Perception*, str. 702.

istnieją, a my postrzegamy je w sposób bezpośredni, oraz że percepcja dostarcza nam wiedzy wiarygodnej, tzn. poprawnie odzwierciedlającej własności tych przedmiotów³⁴⁵. Stanowisko to jest „klasycznym” w filozofii percepcji i w XIX wieku przyjmowane było dość powszechnie (również w wieku XX było szeroko rozpowszechnione). Helmholtz nie neguje co prawda, że przedmioty fizyczne będące istnieją, podważa jednak bezpośredniość ich percepcji – to, jakie spostrzeżenia pojawiają się w naszych umysłach, uzależnione jest również od naszej wiedzy, struktury umysłu, oraz znaczenia, jakie przywykliśmy im nadawać w trakcie dotychczasowych aktów percepcji³⁴⁶.

W kontekście takiego ujęcia aktów i procesu percepcji rozważa Helmholtz naturę intuicji przestrzennej. Czyni to m.in. w cytowanych tu, na podstawie angielskiego tłumaczenia, pracach *The Origin and Meaning of the Geometrical Axioms*, oraz *The Facts in Perception*. W pierwszej z nich podkreśla, iż samo przedstawienie sobie w wyobraźni obiektów geometrycznych powoduje, iż pojawiają się w nas automatycznie pewne przekonania. Oto przykłady takich przekonań:

- Istnieje tylko jedna linia prosta przechodząca przez dwa dane punkty.
- Każde trzy punkty określają dokładnie jedną powierzchnię w przestrzeni.
- Bryła jest ograniczoną powierzchnią.
- Ruch punktu określa linię, ruch linii powierzchnię, a ruch powierzchni bryłę.
- Możemy przemieszczać w przestrzeni obiekty geometryczne, bez zmiany ich kształtu oraz wielkości³⁴⁷.

Do listy tej dołącza Helmholtz również piąty postulat Euklidesa. Są to przedzałożenia, które narzucają się nam jako konieczne. Nie są one jednak

³⁴⁵ Por. Woleński, J., *Epistemologia*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2005, str. 393. Powyżej wymieniłem tylko niektóre główne charakterystyki realizmu bezpośredniego.

³⁴⁶ Filozofia percepcji Helmholtza jest tu siłą rzeczy ujęta skrótowo. Nie rozważam tu również jej krytyki. Istotne dla mnie jest odrzucenie przez niemieckiego filozofa realizmu bezpośredniego oraz relacja jego filozofii percepcji do kwestii intuicji przestrzennej.

³⁴⁷ Por. Helmholtz, H., *The Origin and Meaning of Geometrical Axioms*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 666-667.

koniecznościami logicznymi, ani nie przysługuje im jakaś absolutna prawdziwość. Mają źródło w doświadczeniu fizycznym, w kontakcie z ciałami fizycznymi w codziennym doświadczeniu. Wpływają one ze wspomnianych wcześniej nieświadomie dokonywanych wnioskowań indukcyjnych. I tak na przykład (nawiązując do ostatniego z wymienionych przekonań) „dowód przystawiania [figur] opiera się na fakcie, o którym dowiadujemy się jedynie z doświadczenia”³⁴⁸. Stąd też są to przekonania empiryczne. O ile jednak spostrzeżenia są znakami (a nie kopiami postrzeganych przedmiotów), możemy nadawać im różne znaczenia – również te odpowiadające własnościom obiektów geometrycznych w geometriach nieeuklidesowych. Tym samym możemy wizualizować również pewne fakty, czy „sytuacje” w geometriach nieeuklidesowych. W tym celu musimy dokonać pewnego wysiłku oderwania się od przyzwyczajień, w czym pomaga opanowanie i zastosowanie metod formalnych geometrii nieeuklidesowych: „zadanie przedstawienia sobie relacji przestrzennych w przestrzeniach metamatematycznych (*metamathematical* - tzn. systemach nieeuklidesowych) w istocie wymaga pewnej praktyki w rozumieniu metod analitycznych, konstrukcji perspektywy oraz zjawisk optycznych”³⁴⁹. Helmholtz podaje również przykłady takich wizualizacji. Jeden z nich pierwszy związany jest z wyobrażeniem sobie wklęsłego lustra, w którym odbija się „zwykła” przestrzeń³⁵⁰. Spekuluje on również na temat istot żyjących w innego typu przestrzeniach niż nasza – np. takich, dla które zamieszkują powierzchnię kuli, płaszczyznę, czy innego typu przestrzeń o charakterze nieeuklidesowym, bądź o innej liczbie wymiarów niż 3. Istoty żyjące w tych przestrzeniach inaczej przestawiać sobie będą prostą, inaczej będą wizualizowały i konceptualizowały najkrótszy odcinek między dwoma punktami, inaczej też w tych światach wyglądać będą poszczególne figury geometryczne. Wizualizując sobie to, jak mogą wyglądać obiekty w takich przestrzeniach, musimy podjąć wysiłek wyobrażenia sobie, jak mogą „wyglądać” sytuacje w tych przestrzeniach. Czym byłaby jednak taka wizualizacja sytuacji nieeuklidesowej, której nigdy nie doświadczyliśmy w doświadczeniu zmysłowym? Tak o tym pisze Helmholtz:

³⁴⁸ Tamże, str. 668.

³⁴⁹ Helmholtz, H., *The Facts in Perception*, str. 702.

³⁵⁰ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 169.

„poprzez często nadużywany termin ‘przedstawić sobie wizualnie (*sich vorstellen*)’, lub ‘być w stanie wyobrazić sobie w jaki sposób coś się wydarza’, rozumiem – nie wiedząc, jak może być przez ów termin rozumiane cokolwiek innego, jeśli nie ma on stracić wszelkiego znaczenia – władzę wyobrażenia sobie całego szeregu wrażeń zmysłowych, które w takim wypadku byłyby doświadczane”³⁵¹. Wizualizacja jest więc przestawieniem sobie szeregu wrażeń zmysłowych, które mogą doprowadzić do takiego, lub innego przekonania.

Warto tu jeszcze dodać kilka uwag o empiryzmie w filozofii geometrii Hermanna Helmholtza. Wiąże się on bezpośrednio z ostatnim z wymienionych powyżej „empirycznych przekonań” odnośnie geometrii, które uzyskujemy dzięki doświadczeniu zmysłowemu. Fakt, iż w doświadczeniu fizycznym możemy przemieszczać figury bez zmian ich kształtu i wielkości oraz, że możemy „nakładać” na siebie w przestrzeni różne figury przystające ma istotne znaczenie dla rozwoju geometrii euklidesowej. Należy bowiem podkreślić, że własności tej nie mają figury w wielu geometriach nieeuklidesowych – w szczególności tych o ujemnej krzywiznie. Jest on też, jak podkreśla Helmholtz, warunkiem możliwości dokonania pomiarów; pomiar tymczasem, „aksjomaty geometrii nie są zdaniem dotyczącymi (*pertaining*) jedynie czystej teorii przestrzeni. (...) dotyczą one również wielkości (*quantity*). O wielkościach możemy mówić dopiero wtedy, gdy znamy jakąś metody ich porównywania, dzielenie oraz mierzenia. Każdy typ pomiaru przestrzennego, a stąd ogólnie pojęcia wielkości zastosowane do przestrzeni, zakładają możliwość poruszania się obiektów (*figures*) bez zmiany ich kształtu czy rozmiarów”³⁵². Istnienie ciał fizycznych (oraz możliwość ich obserwacji), jest więc warunkiem istnienia geometrii jako takiej. Bez ciał i ich pomiarów nie można mówić o geometrii³⁵³. Dodajmy, że, według Helmholtza,

³⁵¹ Helmholtz, H., *The Origin...*, str. 668.

³⁵² Tamże, str. 681.

³⁵³ Dokładniej, Helmholtz dochodzi do wniosku, iż aby pomiary i ich porównywanie było możliwe, potrzebne jest założenie o istnieniu ciał doskonale sztywnych (*perfectly rigid bodies*). Dopiero takie założenie ma umożliwić pełne wyprowadzenie geometrii z empirii. Istnieje tu jednak pewien problem – ciała doskonale sztywne nie obserwujemy przecież w doświadczeniu fizycznym, dyskusyjny jest więc stwierdzenie. Helmholtz był świadom tego problemu. Przyznał nawet, że w pewnym sensie pojęcie ciała doskonale sztywnego można rozważać jako pojęcie transcendentalne w sensie Kanta. Dyskusyjny więc pozostaje ich empiryczny charakter (tzn. czysto zmysłowe źródło pojęcia ciał doskonale sztywnych).

geometria dotyczy również mechaniki, tzn. zachowania ciał stałych w ruchu. Według Torrettiego Helmholtzowi można nawet przypisać pogląd, iż geometria „nie tyle dostarcza podstaw mechanice, ale musi być rozwijana wspólnie z nią”³⁵⁴. Dodajmy, iż jest to stanowisko bardzo podobne do empiryzmu Łobaczewskiego, choć zapewne bardziej subtelne i przemyślane.

Warto tu jeszcze dodać kilka uwag odnośnie relacji filozofii Helmholtza z filozofią kantowską. Jak zostało pokazane, Helmholtz był daleki od tezy, iż percepcja ma w sposób konieczny charakter zgodny z geometrią euklidesową. Jaka rolę przypisuje jednak niemiecki filozof *przestrzennej* charakterystyce naszej percepcji, którą Kant uważał za determinującą formę wszelkich wrażeń zmysłowych? Helmholtz uważał, iż „początkowe oddziaływania (*initial effects*) przedmiotów na naszych narządach zmysłowych nie są uporządkowane ani przestrzennie, ani czasowo, różnią się jedynie w zakresie jakości i nasilenia”³⁵⁵. Można jednak powiedzieć, iż każda percepcję-znak ma w pewnym stopniu przestrzenny charakter. Jak pisze Merrick, według Helmholtza „pewien minimalny poziom relacji przestrzennych, wypływający z uwarunkowań psychofizycznych, jest wymuszony na polu percepcji,”³⁵⁶. Ów minimalny charakter przestrzenny nie ma jednak znaczenia epistemicznego; z faktu jego istnienia nie wynika, „że poszczególne wrażenia zmysłowe muszą występować jednocześnie tzn. że jeśli dany trójkąt jest równoboczny, jego kąty muszą mieć miarę $\pi/3$ ”³⁵⁷. W istocie, nie mają one żadnej wymuszonej przez cokolwiek struktury matematycznej. Helmholtz odrzuca więc zdecydowanie kantowską teorię czystej naoczności jako źródła poznania prawdziwości *twierdzeń*. Co więcej, ani ślady pamięciowe, ani ich przestrzenny charakter nie są tworamii językowymi. Tu też leżała, według Helmholtza, jedna ze słabości filozofii Kanta – to, iż „badał jedynie poznania, które znajdowały wyraz w języku”³⁵⁸. Relacje przestrzenne, które narzucone są na postrzegane przedmioty, są przy tym relacjami dość prostymi, takimi, jak „x jest

³⁵⁴ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 169.

³⁵⁵ Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 49.

³⁵⁶ Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 52.

³⁵⁷ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 166.

³⁵⁸ Za: Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 51-52.

obok y' , itd. Takie proste relacje zachodzą między wszystkimi postrzeganymi zmysłem wzroku przedmiotami.

Istnienie geometrii nieeuklidesowych uważał Helmholtz za argument przeciwko aprioryzmowi Kanta. Helmholtz był przekonany, że kantowska koncepcja geometrii jako nauki *a priori* oparta jest na tezie, że „jesteśmy w stanie wizualizować sobie (*anschaulich vorstellen*) jedynie takie relacje przestrzenne, które korespondują (*agree*) z geometrią euklidesową”³⁵⁹, z którą, jak wspominałem, się nie zgadzał. Poza tym empiryczność intuicji wyobrazeniowej, empiryczny charakter przekonań na niej bazujących, wyklucza możliwość stwierdzenia, czy nasza przestrzeń wyobrazeniowa odpowiada przestrzeni euklidesowej. W tym celu nie wystarcza zbadanie sposobu przedstawiania sobie w niej obiektów geometrycznych. Wizualizacje nie są na tyle dokładne, aby stwierdzić choćby, czy dwie proste równoległe się przetną, czy nie. Jak pisze Helmholtz, „niedoskonałe oszacowania wzrokowe nie mogą uchodzić za transcendentálną naoczność, która wymaga absolutnej precyzji”³⁶⁰.

Dodajmy jeszcze kilka krótkich uwag odnośnie prób Helmholtza rozwiązania problemu przestrzeni, tzn. określenia, który system geometryczny w sposób prawdziwy oddaje jej strukturę przestrzeni. Helmholtz, wzorem Riemanna, stawia pytanie, która z nieskończenie wielu n -rozmaitości powinna być określona jako geometria przestrzeni? Helmholtz stawia tu, w odniesieniu kilka konkretnych

³⁵⁹ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 164.

³⁶⁰ Za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 164-165. Dodajmy jeszcze kilka krótkich uwag odnośnie prób Helmholtza rozwiązania problemu przestrzeni, tzn. określenia, który system geometryczny w sposób prawdziwy oddaje jej strukturę przestrzeni. Helmholtz, wzorem Riemanna, stawia pytanie, która z nieskończenie wielu n -rozmaitości powinna być określona jako geometria przestrzeni? Helmholtz stawia tu, w odniesieniu kilka konkretnych pytań, m.in. 1) czy przestrzeń jest rozmaitością? 2) czy ma 3 wymiary?, 3) czy jej krzywizna jest stała, 4) czy jest równa zeru? (por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 156-157). Twierdząca odpowiedź na drugie pytanie była dla Helmholtza oczywista; fakt, że przestrzeń jest rozmaitością, miał dla niego wynikać z samych pojęć rozciągłości, czy przestrzenności (w tym sensie, ów fakt miał być analityczny oraz *a priori*) (tamże, str. 156). Pozostawała kwestia krzywizny przestrzeni. Jej stała wartość wynikała, według Helmholtza ze wspomnianej już ważnej obserwacji empirycznej, mianowicie, obserwacji, że „kształt i wielkość ciał nie zależy od ich położenia i ruchów w przestrzeni” (tamże, str. 157). Stąd, można powiedzieć, że dla Helmholtza problem przestrzeni jest równoważny z pytaniem, „która z nieskończenie wielu geometrii, których matematyczna realność (*viability*) została wykazana przez teorię rozmaitości Riemanna jest kompatybilna z ogólnymi warunkami możliwości pomiaru fizycznego?” (tamże, str. 154). Dodatkowo, krzywizna przestrzeni fizycznej ta nie może mieć wartości dodatniej, ponieważ jest nieskończona (której to własności nie mają przestrzeni o krzywiznie dodatniej).

pytań, m.in. 1) czy przestrzeń jest rozmaitością? 2) czy ma 3 wymiary?, 3) czy jej krzywizna jest stała, 4) czy jest równa zero? (Por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 156-157). Twierdząca odpowiedź na drugie pytanie była dla Helmholtza oczywista; fakt, że przestrzeń jest rozmaitością, miał dla niego wynikać z samych pojęć rozciągłości, czy przestrzenności (w tym sensie, ów fakt miał być analityczny oraz *a priori*) (tamże, str. 156). Pozostawała kwestia krzywizny przestrzeni. Jej stała wartość wynikała, według Helmholtza ze wspomnianej już ważnej obserwacji empirycznej, mianowicie, obserwacji, że “kształt i wielkość ciał nie zależy od ich położenia i ruchów w przestrzeni” (tamże, str. 157). Stąd, można powiedzieć, że dla Helmholtza problem przestrzeni jest równoważny z pytaniem, „która z nieskończenie wielu geometrii, których matematyczna realność (*viability*) została wykazana przez teorię rozmaitości Riemanna jest kompatybilna z ogólnymi warunkami możliwości pomiaru fizycznego?” (tamże, str. 154). Dodatkowo, krzywizna przestrzeni fizycznej ta nie może mieć wartości dodatniej, ponieważ jest nieskończona (której to własności nie mają przestrzeni o krzywiznie dodatniej).

4.6. Niektóre aspekty dalszego rozwoju geometrii nieeuklidesowych a intuicja przestrzenna

Dalszy rozwój geometrii nieeuklidesowych przebiegał wielotorowo. Kolejny istotny krok w ich rozwoju został wykonany przez niemieckiego matematyka Felixa Kleina (1849-1925)³⁶¹. Klein rozwijał geometrię rzutową, pokazał również jak przy jej pomocy można wywieść główne twierdzenia geometrii nieeuklidesowych³⁶². W centrum rozwiniętej przez niego metody unifikacji geometrii było jednak pojęcie grupy; zaproponował on „traktowanie geometrii jako teorii niezmienników pewnych grup przekształceń. Tak więc

³⁶¹ Klein wprowadził również interesujący podziały intuicji, któremu przyjrze się bliżej w kolejnym rozdziale.

³⁶² Gray, J, *Worlds Out of Nothing...*, str. 226.

geometria to para (X, G) , gdzie X to zbiór, a G to pewna ciągła grupa przekształceń”³⁶³. Podejście Kleina, podobnie jak Riemanna, stanowi bardzo ogólny kontekst pojęciowy, w ramach którego można mówić o różnorodnych typach geometrii w ramach jednego systemu pojęciowego. Geometrię euklidesową można zgodnie z nim traktować jako badającą niezmienniki grupy metrycznej, geometrie nieeuklidesowe natomiast jako badające niezmienniki grupy rzutowej (chodzi tu dokładniej o geometrie rzutowe z metryką Cayleya)³⁶⁴.

Warto tu dodać kilka uwag o intuicji przestrzennej w kontekście geometrii rzutowych. Geometrie rzutowe mają swój początek w badaniach renesansowych malarzy nad perspektywą, metod geometrii rzutowej jako pierwsi używali już Kepler, czy Pascal (1623-1662). Podstawowa idea „rzutu” jest dość intuicyjna i prosta – jest to pewien sposób przedstawienia w dwóch wymiarach pewnej sytuacji 3-wymiarowej; sposób, dodajmy, zgodny z tym jak my sami widzimy trzy wymiary. Jednak geometria rzutowa w postaci rozwijanej przez matematyków XIX wieku, choć wyrasta w pewnym sensie z tej intuicji, oddala się od niej znacząco. Nie ma tu miejsca na dokładną matematyczną charakterystykę tych geometrii. Warto tylko wspomnieć o dwóch najbardziej nieintuicyjnych jej aspektach – niemetryczności oraz punktach „w nieskończoności”. „Niemetryczność” geometrii rzutowych ma takie następstwa, że ignoruje w pewnym sensie odległości pomiędzy obiektami geometrycznymi i ich wielkości. Fakt, iż wizualizowane i postrzegane przedmioty mają jasno określone wymiary jest przecież jednym z najbardziej intuicyjnych faktów (jak podkreślał choćby Helmholtz). W związku z powyższym Torretti stwierdza, że „geometria rzutowa jest o wiele bardziej ‘nienaturalna’ od, powiedzmy, geometrii Bolyaia-Łobaczewskiego, która to neguje jedynie postulat Euklidesa, którego intuicyjna oczywistość była podważana przez stulecia, podczas gdy w geometrii rzutowej, podstawowe relacje liniowego porządku oraz styczności (*neighbourhood*) pomiędzy punktami przestrzeni są naruszone”³⁶⁵.

³⁶³ Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 197.

³⁶⁴ Por. tamże, str. 197.

³⁶⁵ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 110.

Drugim nieintuicyjnym aspektem geometrii rzutowych jest to, że dopuszczają sytuację, w której dwie proste przecinają się w „punkcie w nieskończoności”. Jak podkreśla J. Gray punkt przecięcia się prostych „w nieskończoności” nie może mieć jakiegokolwiek interpretacji geometrycznej – jest intelektualną abstrakcją³⁶⁶. Twierdzi on więc, że geometrie rzutowe są „logicznie bez zarzutu, ale pozbawione treści empirycznej”³⁶⁷. Dodajmy, iż obok punktów w nieskończoności, pojawiają się również proste w nieskończoności, oraz płaszczyzny w nieskończoności, jeszcze bardziej oddalone od jakichkolwiek treści wizualnych, czy empirycznych.

Drugim istotnym krokiem w rozwoju geometrii nieeuklidesowych, o których można tu wspomnieć, były konstrukcje euklidesowych modeli dla geometrii nieeuklidesowych. Pionierem był tu włoski matematyk Eugenio Beltrami (1835-1900). Beltrami zaproponował dokonać tłumaczenia, czy też interpretacji pojęć geometrii nieeuklidesowej Łobaczewskiego-Bolyaia na pojęcia trójwymiarowej geometrii euklidesowej – a następnie pojęć tej ostatniej na koło bez brzegu w 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej³⁶⁸. Przy tej interpretacji punktom euklidesowym odpowiadają punkty w przestrzeni nieeuklidesowej, płaszczyznom, obszary okręgu złożone z punktów, a liniom prostym, cięciwy koła³⁶⁹. Odpowiednim własnościom obiektów „nieeuklidesowych” odpowiadają też własności ich euklidesowych interpretacji. Odpowiednie relacje pomiędzy elementami koła odpowiadają też relacjom pomiędzy obiektami nieeuklidesowymi. Zaznaczmy, iż nie można tu mówić o „modelach” we współczesnym rozumieniu tego terminu, ukształtowanym głównie w drugiej połowie XX wieku. Tak tego z pewnością nie rozumiał Beltrami, nie posiadając odpowiednich narzędzi logicznych.

Zwróćmy uwagę, że euklidesowe modele geometrii nieeuklidesowych pozwalają skorzystać ze „zwyczajnej”, euklidesowej intuicji dla rozważania obiektów nieeuklidesowych. Wraz z rozwojem geometrii konstruowano różnego

³⁶⁶ Por. Gray, J, *Worlds Out of Nothing...*, str. 327.

³⁶⁷ Tamże, str. 327.

³⁶⁸ Por. tamże, str. 207.

³⁶⁹ Por. Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*, Dover Publications, Inc, 1955, str. 164.

rodzaju przekształcenia i wzajemne modelowanie różnych przestrzeni geometrycznych, tak, iż to, co „wizualnie postrzegalne” przestało posiadać jakiegokolwiek „z góry” ustalone znaczenie matematyczne. To, jakie obiekty reprezentuje dany rysunek zależy wtedy od odgórnych ustaleń. Sytuacja ta miała jeszcze jedną, interesującą konsekwencję. Dzięki euklidesowym „modelom”, można „wyrobić” sobie pewne intuicje odnośnie obiektów, czy faktów z dziedziny geometrii nieeuklidesowych. Wymaga to oczywiście znacznej wiedzy matematycznej i pewnego wysiłku wyobraźni. Są to również z pewnością intuicje częściowe (jak to jest np. w przypadku modelu Beltramiego). Fakt, iż jest to możliwe z pewnością jednak dowodzi elastyczności intuicji przestrzennej, jest również uzupełnieniem opisanych powyżej „eksperymentów intuicyjnych” Helmholtza.

Na tym zakończę omawianie geometrii nieeuklidesowych i przejdę do omówienia aksjomatyzacji geometrii, która miała również duże znaczenie dla kwestii roli intuicji przestrzennej w geometrii.

4.7. Aksjomatyzacja geometrii a wizualizacje

Finalnym efektem rozwoju geometrii nieeuklidesowych były badania nad ujęciem nowo powstałych geometrii w ramach systemów aksjomatycznych. Badania związane z aksjomatyzacją geometrii nabrały rozmachu w końcu XIX wieku. Wcześniejszy rozwój geometrii – teoria n -rozmaitości Riemanna, a następnie teoria grup przekształceń Sophusa Liego (1842-1899) i Kleina – dostarczały bardzo szerokiego i abstrakcyjnego systemu pojęciowego w ramach którego można było dokonać uporządkowania i klasyfikacji obiektów geometrycznych³⁷⁰. Szereg matematyków dążyło do syntezy XIX-wiecznych wyników geometrycznych za pomocą metody aksjomatyczno – dedukcyjnej.

³⁷⁰ Należałoby tu również wspomnieć o pracach Beltramiego, który w mojej pracy dotychczas się nie pojawił.

Można wymienić dwie główne postaci, które przyczyniły się do tego procesu – byli to Moritz Pasch (1843-1930), oraz przede wszystkim David Hilbert³⁷¹. Ten ostatni podał pełny układ geometrycznych pojęć pierwotnych oraz aksjomatów ich dotyczących, udowodnił również niesprzeczność swojego systemu – przy założeniu niesprzeczności arytmetyki³⁷². Nie ma tu miejsca na omawianie tego procesu. Spróbujmy więc ogólnie ocenić, co aksjomatyzacja geometrii oraz przytoczmy kilka ważniejszych głosów w tej kwestii.

Główną tendencją, która towarzyszyła aksjomatyzacji geometrii było pozbawienie jej rozumowań odniesienia do intuicji przestrzennych. Szerzej można powiedzieć o traktowaniu pojęć matematycznych jako symboli pozbawionych znaczenia, w szczególności treści intuicyjnych, czy przestrzennych, które w przypadku geometrii z pewnością stanowią jego istotny składnik. Dodajmy, że proces pozbawiania pojęć matematycznych towarzyszących im przestrzennych intuicji był stopniowy. W kierunku tym podążały już praca B. Riemanna i F. Kleina. Nawet Moritz Pasch nie miał jeszcze na celu zupełnego wyeliminowania intuicji przestrzennych z badań nad geometrią – podstawowymi pojęciami, przy pomocy których budował swojej aksjomatyczne ujęcie geometrii były pojęcia punktu, przestrzeni, czy styczności (*incidence*), a więc pojęcia odwołujące się do intuicji przestrzennej – sam Pasch zresztą umiejscawiał swoją pracę w tradycji geometrii syntetycznej³⁷³. Mimo to, już Pasch postulował, aby rozumowania geometryczne odbywały się na sposób czysto formalny. Píše on co następuje: „jeżeli geometria ma być rzeczywiście nauką dedukcyjną, to proces wyprowadzania [twierdzeń] musi być całkowicie niezależny od znaczenia pojęć czy figur geometrycznych. Jediną rzeczą, która ma tu znaczenie, są relacje zachodzące pomiędzy poszczególnymi pojęciami ustalone za pomocą twierdzeń i definicji³⁷⁴”.

³⁷¹ Można tu dodać, że na prace Pascha wpłynęły prace matematyków włoskich, jak Giuseppe Veronese, czy Giuseppe Peano (zob. Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 198). O filozofii matematyki Hilberta szeroko pisze polska filozof matematyki Ewa Piotrowska.

³⁷² Por. Lubomirski, A., *Henri Poincarégo...*, str. 45.

³⁷³ Epple, M. *Styles of argumentation in late 19th century geometry*, w: *Analysis and Synthesis in Mathematics*, red. M. Otte, M. Panza, Kluwer Dordrecht, Boston, London 1997, str. 181.

³⁷⁴ Pasch, za: Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 198.

Kulminacją tendencji, którą dążyła do wyrugowania elementów intuicyjnych w rozumowaniach geometrycznych było podejście Davida Hilberta. Wielki niemiecki matematyk dążył do aksjomatyzacji geometrii w taki sposób, aby wszelkie jej rozumowania można było sprowadzić do operacji na symbolach. Jak ponoć sam kiedyś powiedział - powinno się zawsze móc mówić o stołach, krzesłach i kuflach, zamiast o punktach, liniach i powierzchniach³⁷⁵. Celu swój osiągnął w epokowej pracy *Grundlagen der Geometrie*. W pracy tej do przekształceń na symbolach zostały sprowadzone takie operacje, jak wspomniane „nakładanie” na siebie figur geometrycznych, jak również wszelkie rozumowania odwołujące się do rysunków. Wprowadzony został tu również aksjomat ciągłości, który zapewniał np. że dwa okręgi są do siebie styczne w dokładnie jednym punkcie. *Grundlagen der Geometrie (Podstawy geometrii)* stały się więc symbolem usunięcia z rozumowań geometrycznych bezpośrednich odwołań do intuicji przestrzennej. Jak pisze Murawski, „przyjmuje się zazwyczaj, że wraz z dziełem Hilberta nastąpiło ostateczne i całkowite zerwanie geometrii z rzeczywistością empiryczną. Geometria stała się matematyką czystą. Aksjomaty przestały być prawdami oczywistymi czy koniecznymi”³⁷⁶.

Moritz Pasch, David Hilbert, jak i ich zwolennicy byli zgodni, iż z zasady, odwołania do rysunków czy diagramów w rozumowaniach matematyków nie są nigdy konieczne. Przestrzenne reprezentacje obiektów matematycznych były do przyjęcia jedynie w kontekście odkrycia, jako heurystyki, czy środki pomocnicze, ale miały zostać wyeliminowane z procesu rozumowania. Paolo Mancosu podkreśla tu, iż „wizualizacje wydawały się tracić swoją siłę w kontekście uzasadniania, będąc jednocześnie dopuszczane w kontekście odkrycia, i jako coś, co upraszcza poznanie, nie mogąc go ugruntować”³⁷⁷. Pasch pisze tu np., że rysunek „w sposób istotny zwiększa rozumienie relacji, o których mówi twierdzenie oraz konstrukcji dowodu. Co więcej, jest on owocnym narzędziem odkrycia takich relacji czy konstrukcji. Jeżeli jednak nie obawiamy się poświęcenia czasu i wysiłku, można te rysunki opuścić w dowodzie każdego twierdzenia;

³⁷⁵ Gray, J, *Worlds Out of Nothing...*, str. 254.

³⁷⁶ Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 200.

³⁷⁷ Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str., 14.

twierdzenia jest w istocie dopiero wtedy naprawdę udowodnione, gdy dowód jest w zupełności niezależny od rysunków³⁷⁸. W *Grundlagen der Geometrie*, natomiast wspomina Hilbert, że jego rozumowania będą często korzystały z rysunków, ale „nigdy nie będą na nich polegać (*niemals auf sie verlassen*)”³⁷⁹.

Należy tu dodać, iż Hilbert – mimo, iż pokazywał zbędność intuicji przestrzennych w rozumowaniach matematycznych – nie odrzucał idei, iż intuicja przestrzenna stanowi źródło poznania geometrycznego. Zauważa o tym m.in. Ulrich Majer, podkreślając, iż „zadanie ‘ustanowienia (*establishing*) aksjomatów geometrii’ musi, zgodnie z poglądem Hilberta, odwoływać się (*have recourse to*) naszej ‘intuicji przestrzennej’ oraz poddawać tę intuicję analizie logicznej przy pomocy metody aksjomatycznej, w celu odnalezienia logicznych zależności pomiędzy aksjomatami”³⁸⁰.

W kolejnym podrozdziale dokonam podsumowania rozważań związanych z XIX wieczną geometrią i filozofią geometrią dla kwestii roli wizualizacji w poznaniu matematycznym, jak również dla kantowskiej filozofii geometrii.

4.8. Konsekwencje rozwoju geometrii nieeuklidesowych dla zagadnienia roli wizualizacji w poznaniu geometrycznym

W niniejszym podrozdziale dokonam oceny statusu i znacznie poznawczej intuicji przestrzennej w geometrii w świetle dotychczasowych rozważań. Ogólnie można uznać, iż główną konsekwencją rozwoju geometrii nieeuklidesowych było

³⁷⁸ Za: tamże, str. 14.

³⁷⁹ Za: tamże, str. 15. Warto dodać, że świadome unikanie korzystania z reprezentacji przestrzennej w istotny sposób było związane m.in. z rozwojem geometrii nieeuklidesowych. Jak wspominałem, w trakcie owego rozwoju rosło przekonanie o zawodności intuicji przestrzennej w rozstrzyganiu problemów w poszczególnych geometriach. Postępujący ich rozwój domagał się więc coraz większego oparcia na formalizmach, zamiast intuicji. Innym powodem krytycznego stosunku do reprezentacji przestrzennych były rozbieżności pomiędzy intuicjami przestrzennymi a niektórymi twierdzeniami z dziedziny analizy matematycznej. O tym dokładniej będzie mowa w dalszej części rozdziału.

³⁸⁰ Majer, U., *The Relation...*, str. 61.

ukazanie niewiarygodności oraz ograniczeń intuicji przestrzennej. Intuicja przestrzenna – jako władza poznawcza umożliwiająca samo przedstawienie sobie odpowiednich obiektów geometrycznych – nie radzi sobie (albo radzi sobie z trudnością) z przestrzeniami wielowymiarowymi, przestrzeniami o zmiennych krzywiznach, czy z niemetrycznością geometrii rzutowych. Intuicja przestrzenna jest też niewiarygodna, czy zwodnicza, w tym sensie, że sugeruje ona fałszywość twierdzeń, których nie należy ściśle rzecz biorąc uznać za fałszywe (jak chociażby negacja piątego postulatu i jej konsekwencje). Jeśli chodzi o geometrie nieeuklidesowe, można powiedzieć, iż często utrudnia ona, raczej niż wspiera poznanie. Konsekwencją tych ograniczeń było oddalenie praktyki geometrycznej od wizualizacji, a zbliżenie jej do formalizmów i reprezentacji symbolicznych, czego kulminacją była wspomniana aksjomatyzacja geometrii.

Istotnym zwrotem związanym z zagadnieniem roli wizualizacji w poznaniu matematycznym było jego uniezależnienie się od kwestii matematycznej charakterystyki przestrzeni fizycznej. Przed odkryciem geometrii nieeuklidesowych powszechne było przekonanie, iż przestrzeń ma strukturę euklidesową, a geometria euklidesowa oraz odpowiadająca jej intuicja przestrzenna idealnie nadaje się do badania jej struktury. Istnienie geometrii euklidesowych zmusiło do rewizji przekonania o istnieniu takiego związku pomiędzy dwoma typami przestrzeni. Proponowane metody stwierdzenia, która z przestrzeni geometryczny opisuje przestrzeń nie odwoływały się do intuicji przestrzennej. Rozwiązania proponowane przez Riemanna, czy Helmholtza odwoływały się do eksperymentu albo ogólnych spekulacji filozoficznych. Intuicja przestrzenna wydawała się władzą poznawczą zbyt niedokładną i niewiarygodną aby osiągnąć w tej materii jakiegokolwiek jednoznaczne konkluzje. W istocie, nie musi ona mieć żadnego związku z właściwą geometrią przestrzeni, najprawdopodobniej niedostępną naszym zmysłom³⁸¹.

³⁸¹ Na istotne ograniczeni intuicji przestrzennej w zakresie orzekania o własnościach przestrzeni fizycznej zwrócił uwagę Felix Klein. Zwrócił on uwagę na prosty fakt, iż wszystko, co potrafimy zbadać, jak również przedstawić sobie w wyobraźni przestrzennej, umiejscowione jest w ograniczonym obszarze przestrzennym. Wiadomo tymczasem, że ograniczony obszar homeomorficzny ze spójnym podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej może należeć do wielu różnych przestrzeni topologicznych (por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 149).

W ramach podsumowania problemu matematycznej charakterystyki przestrzeni fizycznej dodajmy, iż pod koniec XIX wieku Henri Poincaré poddał w wątpliwość możliwość rozwiązania „problemu przestrzeni” jakimkolwiek metodami. Francuski filozof i matematyk twierdził, iż założenie, że można sprawdzić prawdziwość (o przestrzeni fizycznej) zdań geometrii jest z gruntu błędne. Aby poddać jakiegokolwiek zdanie matematyczne (w istocie, w ogóle jakiegokolwiek zdanie) weryfikacji empirycznej, należy dysponować metodą interpretacji jej terminów. Przy takiej interpretacji desygnatami terminów matematycznych są jednak obiekty fizyczne, a nie sama przestrzeń (czy jej części), nie rozstrzyga się tym samym nic odnośnie tej ostatniej. Tak stanowisko Poincarégo ujmuje J. Gray: „Każdy eksperyment wiąże się z pewną interpretacją. Zawsze można powiedzieć, że promienie światłne (lub cokolwiek co grałoby rolę linii prostych w eksperymencie) są rzeczywiście proste, i w konsekwencji przestrzeń jest nieeuklidesowa (jeśli na to właśnie wydają się wskazywać pomiary). Alternatywnie można by powiedzieć, że przestrzeń jest euklidesowa, a promienie światłne są zakrzywione. Nie istnieje jednak możliwość rozstrzygnięcia pomiędzy tymi alternatywami na gruncie logiki”³⁸². Dodam, iż rozumowanie to widział Poincaré również jako argument przeciwko empiryzmowi w filozofii geometrii, rozumianemu jako teza, iż geometria odnosi się do przestrzeni fizycznej jako swojego przedmiotu³⁸³.

W dalszej kolejności chciałbym omówić szerzej problem „euklidesowości przestrzeni wyobrazeniowej”. Wielu filozofów uznawało mianowicie, iż – w

³⁸¹ Lokalne własności topologiczne przestrzeni nie determinują zawsze własności globalnych, a stąd obserwacje skończonego obszaru przestrzeni nie mogą dać definitywnej odpowiedzi na pytanie o strukturę całości. Tak pisze o tym sam Klein: nasze pomiary empiryczne mają swoje górne ograniczenie, określone przez rozmiar przedmiotów, które są nam dostępne, albo które są obserwowalne. Co wiemy relacjach przestrzennych w ogromnej skali (*im Unmessbar-Grossen*)? Zupełnie nic. Możemy jedynie odwołać się do postulatów. Stąd uznaję wszystkie topologicznie odmienne formy przestrzenne (*space-forms*) za w równym stopniu kompatybilne z doświadczeniem Klein, *Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises* 1897, za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 152.

³⁸² Gray, J, *Worlds Out of Nothing...*, str. 292.

³⁸³ Jak wiadomo, problemowi charakterystyki fizycznej przestrzeni pewne konkretne znaczenie nadała fizyka relatywistyczna: bada ona czasoprzestrzeń jako 4-wymiarową geometrię nieeuklidesową, której (ujemna) krzywizna uzależniona jest od ilości masy. Krzywizna ta jest określona lokalnie, w zależności od ilości masy w danym obszarze przestrzeni.

świetle braku możliwości stwierdzenia, czy przestrzeń fizyczna jest euklidesowa – można rozważać przestrzeń wyobrażeniową jako posiadającą charakterystykę euklidesową. Jest to dość niejasne zagadnienie. Czy nasz system percepcyjny może mieć jakąś strukturę matematyczną? Jeśli natomiast rozważamy intuicję przestrzenną, pojawia się pytanie, czy władzy poznawczej można przypisać własność, czy charakterystykę matematyczną³⁸⁴? Można zaproponować następującą odpowiedź na te pytania: intuicja przestrzenna – jako władza poznawcza – ma charakter euklidesowy w tym sensie, że mamy naturalną predyspozycję do uznawania prawdziwości zdań euklidesowych na podstawie diagramów, czy w ogóle danych wizualnych. Jeśli natomiast uznamy przestrzeń wyobrażeniową za „porządek naszych wrażeń zmysłowych”, (jest to w ogólnych zarysach zgodne z koncepcją Kanta), można uznać, iż ma on naturę euklidesową o tyle, o ile obiekty postrzegamy jako euklidesowe, tzn. jako spełniające aksjomaty *Elementów*.

Mimo, iż tezy te mogą się w ogólnych zarysach wydawać słuszne, pozostają wciąż niejasne. Należy tu od razu wspomnieć, iż nawet, jeśli pojawia się w nas tendencja do kategoryzowania danych zmysłowych i ich interpretacja zgodne z geometrią euklidesową, to nie jest to przecież żadnego rodzaju konieczność. Przypomnijmy, iż H. Helmholtz, czy F. Klein pokazywali, iż możemy przedstawić sobie za pomocą intuicji przestrzennej również obiekty nieeuklidesowe. Można, za H. Poincaré, postawić hipotezę, iż kategoryzacja wrażeń zmysłowych zgodna z geometrią euklidesową jest po prostu najwygodniejsza i najprostsza, stąd ją właśnie, ewolucyjnie, obiera nasz mózg. Jako dalszy czynnik powodujący, iż postrzegamy świat jako „euklidesowy” można natomiast wskazać przyzwyczajenie³⁸⁵.

Zwróćmy uwagę, że można również podważać tezę, iż kategoryzacja wrażeń zmysłowych jest zawsze zgodna z geometrią euklidesową, a intuicja przestrzenna ma tym samym fundamentalnie euklidesowy charakter. Po pierwsze, nie wszystkie zdania euklidesowe narzucają się ze swoją prawdziwością. Bardziej skomplikowane twierdzenia są wysoce nieoczywiste, gdy rozważyć je jedynie za

³⁸⁴ Zwróćmy uwagę, że problemy te pojawiały się już z pewnością w kontekście filozofii kantowskiej.

³⁸⁵ Filozofię geometrii H. Poincarégo omawiam dokładniej w kolejnym rozdziale.

pomocą zmysłu wzroku. Dodatkowo, intuicja przestrzenna może być zwodnicza także w przypadku geometrii euklidesowej. Drugi, z pewnością wart uwagi problem, związany jest z tym, że same pojęcia geometrii euklidesowej są pod wieloma względami oddalone od tego, co postrzegamy za pomocą zmysłu wzroku. Narysowane przez nas kreski reprezentują przecież linie bez grubości, a kropki bezwymiarowe punkty. Obiekty geometrii takie, jakie są badane przez matematyków nie występują w naturze, a nawet nie mogą w niej występować. Czy możemy więc rzeczywiście przedstawić sobie w wyobraźni przestrzennej takie idealne figury, czy chociażby bezwymiarowy punkt? Odpowiedź wydaje się nie być jednoznaczna. Kwestię tę rozważał na przykład XIX wieczny filozof Beno Erdmann (1851-1921); będąc (jak twierdził) empirystą o filozofii geometrii, uważał, iż nie jesteśmy w stanie wytworzyć w sobie definitywnych, wyraźnych, przedstawień, czy reprezentacji intuicyjnych np. powierzchni, czy prostych. Polemizując z nim, Roberto Torretti stwierdza, iż „jeśli możemy mieć wyraźne i jednoznaczne (*definitive*) reprezentacje ciała musimy mieć reprezentację jego granic, a te są właśnie powierzchniami”³⁸⁶. Jak pisałem w poprzednim rozdziale, również Klein uważał, iż idealizowanie danych zmysłowych, mające swój efekt w abstrakcyjnych pojęciach punktu, powierzchni, itd. jest procesem naturalnym. Nie będę tu rozstrzygał tego sporu. Wydaje się w każdym razie, że przedstawienie sobie obiektów euklidesowych w wyobraźni wymaga już konceptualizacji, pewnego podejścia teoretycznego jak również idealizacji. Wydaje się również, iż jest dyskusyjnym, czy owa konceptualizacja ma jakąś z góry narzuconą formę, czy przebieg.

Przypomnijmy też, iż w fundamentalnie euklidesowy charakter intuicji przestrzennej każe wątpić fakt, iż jesteśmy w stanie przedstawić sobie w niej obiekty, czy „sytuacje” nieeuklidesowe, a nawet lepiej je dzięki tej intuicji zrozumieć. Można tu wspomnieć choćby „modele” Beltramiego, czy „eksperymenty” myślowo-przestrzenne Helmholtza. Relacja „podobieństwa”, jeśli

³⁸⁶ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*. Jak zauważa dalej Torretti, powierzchnie postrzegane zmysłowo są jednak nieregularne, nie mogą więc być same w sobie źródłem pojęcia idealnej matematycznej powierzchni. Erdmann w związku z tym podkreśla, że „nie jesteśmy w stanie rozpoznać tych nieregularności jako takich, jeżeli nie posiadamy pojęcia reguły/zasady, od której są one odstępstwem” (tamże, str. 270).

można tak powiedzieć, pomiędzy rysunkiem a obiektem przez niego reprezentowanym jest tu „luźniejsza” niż w przypadku geometrii euklidesowych. Łuk w okręgu euklidesowym może reprezentować proste nieeuklidesowe jedynie pod pewnymi względami, tzn. adekwatnie odzwierciedla tylko niektóre jego własności.

Podkreślmy dalej, że w książkach i artykułach dotyczących geometrii nieeuklidesowych również pojawiają się rysunki. Można powiedzieć, że z prostymi, czy figurami na nich występującymi łączymy po prostu inne fakty, inne skojarzenia, itd. Dodajmy, że takie „nieostre” powiązanie pomiędzy rysunkiem a pojęciami jest też spójne z podziałem na intuicję naiwną i wzmocnioną Kleina: samemu rysunkowi nie odpowiada jeszcze w jednoznaczny sposób żaden obiekt matematyczny. Dopiero uzbrojeni w odpowiednie pojęcia możemy dokonać odpowiedniej interpretacji rysunku.

Podsumowując, należy stwierdzić, iż teza o euklidesowym charakterze intuicji wyobrazeniowej, czy przestrzeni wyobrazeniowej jest niejasna. Wydaje się więc, iż należy przyjąć stanowisko Poincarégo, czy Helmholtze’a, którzy wskazywali, iż przestrzeń wyobrazeniowa nie ma jako taka charakteru matematycznego. Dopiero dysponując odpowiednimi pojęciami odpowiednio kategoryzujemy i interpretujemy „kreski”, „kropki”, łączymy z wrażeniami zmysłowymi pojęcia matematyczne, nadając tym wrażeniom w pewnym sensie matematyczny charakter. Wtedy też dopiero intuicja przestrzenna może spełniać rolę władzy poznawczej sugerującej prawdziwość odpowiednich zdań (a więc rolę „intuicji, że”)³⁸⁷. Interpretacja euklidesowa diagramów matematycznych może się więc wydawać najprostsza, najbardziej naturalna, ale z pewnością nie jest jedyna.

W ostatnim części niniejszego podrozdziału podsumuję konsekwencje rozwoju geometrii nieeuklidesowych dla filozofii geometrii Kanta. Czasem podkreśla się, że filozofia geometrii Kanta została definitywnie obalona. Falsyfikacja kantowskiej filozofii miała płynąć z trzech, zewnętrznych wobec niej, źródeł: powstania geometrii nieeuklidesowych, aksjomatyzacja geometrii, oraz fizyka relatywistyczna

³⁸⁷ Intuicja tę można wtedy scharakteryzować, zgodnie z omawianym w kolejnym rozdziale rozróżnieniem F. Kleina, jako intuicję wzmocnioną.

Alberta Einsteina. Dodatkowo można oczywiście wymienić problematyczne kwestie, związane z samym tekstem *Krytyki czystego rozumu*. Chciałbym się tutaj zastanowić, w jakim stopniu można rzeczywiście twierdzić, iż filozofia geometria Kanta została obalona, bądź też jakie jej aspekty są nie do utrzymania, jakich też niemieckiego filozofa można z kolei bronić. W pierwszej kolejności rozważę kantowskie tezy, które w świetle rozwoju XIX-wiecznej geometrii należy, jak się wydaje, uznać za fałszywe.

Po pierwsze, należy podkreślić, iż obalona została teza Kanta, iż zgodnie z którą dowody geometryczne *muszą* zawierać odwołania do naoczności. Aksjomatyzacja geometrii jest dowodem na to, że dowody w geometrii można zawsze rekonstruować jako ciągi symboli, a dowody geometryczne nie muszą być zawsze dowodami „unaoczniającymi”. Co więcej, intuicja przestrzenna może być w dowodach szkodliwa, co pokazał rozwój geometrii nieeuklidesowych

Po drugie, należy również odrzucić pogląd Kanta, iż pojęcia geometryczne związane są nierozzerwalnie z pewną treścią wizualną”. Pojęciom geometrycznym nie jest „dana” w nierozzerwalny i jednoznaczny sposób jakaś konkretna naoczność. Poszczególne pojęcia można różnie przedstawiać wizualnie, a tym samym pojęciom mogą odpowiadać różne reprezentacje wizualne.

Po trzecie, jeżeli przyjmiemy, iż według Kanta każde wrażenie zmysłowe postrzegane jest w zgodzie z czystą naocznością, która ma charakter euklidesowy, to również tę tezę należy uznać za fałszywą. Jak bowiem pokazali Klein, czy Beltrami, możemy tworzyć wizualne reprezentacje obiektów geometrii nieeuklidesowej.

Mocno podważona jest dalej teza, iż intuicja za pomocą której przedstawiamy sobie obiekty geometrii nie ma charakteru empirycznego, ale aprioryczny, a czysta naoczność przestrzeni jest źródłem aprioryczności i konieczności twierdzeń geometrycznych. Przypomnijmy, iż u Kanta aprioryczność była ściśle związana z koniecznością. Trudno jednak bronić tezy, iż czysta naoczność jest źródłem konieczności twierdzeń geometrycznych, skoro ich konieczność (niemożliwość negacji pewnych zdań geometrii) należy, w świetle rozwoju geometrii nieeuklidesowych, odrzucić. Można jednak przyjąć klasyczną definicję

aprioryczności („zdanie jest a priori, gdy jego prawdziwość nie zależy od konkretnych doświadczeń zmysłowych”), nie łącząc jej z pojęciem konieczności. Wtedy czysta naoczność przestrzeni – którą można ogólnie rozumieć jako formę naszego poznania, – można rozumieć jako a priori determinującą sposób postrzegania i konstrukcji obiektów geometrycznych. Na takim stanowisku stoi na przykład współczesna filozof geometrii Helen De Cruz, według której “stworzenie geometrii nieeuklidesowych nie podważało automatycznie kantowskiego ujęcia przestrzeni jako apriorycznej i euklidesowej”³⁸⁸. Z drugiej jednak strony można utrzymywać, iż intuicja przestrzenna jest władzą poznawczą dającą poznanie empiryczne, tzn. dającą jedynie jednostkowe poznanie empirycznych obiektów. Tak uważało już wielu filozofów XIX wieku. Niemiecki przedstawiciel empiryzmu w filozofii geometrii, Friedrich Überweg pisał co następuje: „nawet, jeśli przestrzeń jest dana *a priori*, w żadnym momencie naszego życia nie jesteśmy świadomi czystej naoczności przestrzeni, chyba, że uda nam się oddzielić ją od całości doświadczenia empirycznego”³⁸⁹. To jednak nie wydaje się być możliwe – zanim wyprowadzimy zasady geometrii z czystej naoczności, czy z jakkolwiek pojmowanej abstrakcyjnej idei przestrzeni, musimy ją wyprowadzić z konkretnej, empirycznej intuicji. W konsekwencji, według Überwega, Kant nie pokazuje, że taka czysta naoczność – nawet jeśli istnieje – może zapewniać aprioryczną naturę geometrii w ogóle, oraz jej pierwszych zasad. Jak pisze Torretti, „nawet, jeśli filozofowi udałoby się wyprowadzić geometrię z istoty (*essence*) przestrzeni, nie odkryłby poprzez to podstaw dla ogólnego przekonania o jej prawdziwości (*general belief in its validity*)”³⁹⁰.

Podsumowując powyższe rozważania, można bronić tezy, iż wrodzona struktura poznawcza określa nasze poznanie obiektów przestrzennych w jakiś określony sposób (w jaki dokładnie jest już kwestią interpretacji). Nie determinuje ona jednak prawdziwości żadnych poszczególnych twierdzeń geometrycznych.

³⁸⁸ De Cruz, H. *An Enhanced Argument...* str. 201.

³⁸⁹ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 261.

³⁹⁰ Tamże, str. 262. Również inny empirysta, Beno Erdmann uważał, że „nowa geometryczna teoria przestrzeni, którą przypisuje Riemannowi i Helmholtzowi, potwierdza empirystyczną teorię intuicji przestrzennej i obala filozofię przestrzeni i geometrii Kanta” (por. tamże)

Wiele z tez Kanta można jednak bronić, choć przy osłabieniu założeń krytycznej filozofii, oraz w oderwaniu od jej całościowego kontekstu.

Po pierwsze, można uznać, iż intuicja przestrzenna jest konieczna przynajmniej w celu sformułowania aksjomatów geometrii jak również zrozumienia pojęć geometrycznych. Na takim stanowisku stało wielu filozofów matematyki, włączając w to Hilbera i Fregego (stanowisko tego ostatniego bliżej analizuję w kolejnym rozdziale).

Po drugie, można uznać, jak podkreślałem wcześniej, iż przestrzeń wyobrazeniowa ma charakter euklidesowy. Teza ta, nie będąc sfalsyfikowana przez samo istnienie geometrii nieeuklidesowych, czy przez aksjomatyzację geometrii, pozostaje dyskusyjna. W tym miejscu warto zwrócić uwagę na pewną interpretację filozofia geometrii Kanta, zgodnie z którą powyższa teza może być utrzymana. Przypomnijmy więc, iż według Kanta, geometria – jako nauka syntetyczna – *nie* jest oparta na zasadzie sprzeczności. Nie można więc, zgodnie z myślą królewieckiego filozofa, dowieść twierdzeń geometrycznych pokazując, iż ich negacje są sprzeczne wewnątrznie (rozważając samo pojęcia geometryczne). O ile powyższe uwagi tyczą się geometrii euklidesowej, można uznać, iż nie dotyczą geometrii nieeuklidesowych. Kantysta może uznać, iż pozostają one logiczną możliwością, choć są niezgodne z czystą naocznością przestrzeni. Zdania tych geometrii byłyby wtedy tak zdaniami analitycznymi, opartymi na definicjach i formalizmach, ale nie mającymi związku z intuicją przestrzenną (czy czystą naocznością przestrzeni). W tym też sensie przestrzeń wyobrazeniowa (rozumiana jako czysta naoczność przestrzeni) pozostawałaby euklidesowa.

Po trzecie można utrzymywać, iż matematyka wypływa w pewnym stopniu z *pozapojęciowego* źródła poznania. Tezę taką głosił Kant, wskazując tu na czystą naoczność przestrzeni. Zarówno analizowane w kolejnym rozdziale stanowiska Felixa Kleina i Henri Poincarego, jak i ramach współczesnej filozofii geometrii, rozważa się iż geometria wypływa w jakimś stopniu z doświadczenia zmysłowego, bądź też z ukształtowanych przez nie ewolucyjnie struktur poznawczych.

Rozdział 5. Wybrane XIX-wieczne koncepcje intuicji geometrycznej i jej roli w poznaniu matematycznym

Niniejszy rozdział nie ma, strukturę odmienną od poprzedniego. Przedstawiam tu kilka XIX-wiecznych stanowisk odnośnie roli intuicji przestrzennej w geometrii, oraz po części w matematyce w ogóle. Każde z wymienionych tu stanowisk jest warte uwagi i wnosi, jak się wydaje, nowy element do rozważań nad rolą wizualizacji w poznaniu matematycznym. Omówieni będą tu B. Bolzano, F.Klein, J.S. Mill, G. Frege oraz H. Poincaré.

W pierwszej kolejności przyjrę się pracy *Contributions to a Better-grounded Presentation of Mathematics* filozofa i logika niemieckiego Bernarda Bolzano (1781-1848)³⁹¹. Bolzano krytykuje w niej filozofię geometrii Kanta, argumentując, iż geometria jest nauką analityczną. Twierdzi on, iż intuicja nie pełni istotnej roli w dowodach geometrycznych, a rozumowania przeprowadzane są wyłącznie za pomocą pojęć, nie odwołując się do intuicji.

Dalej przedstawiam poglądy matematyka niemieckiego Felixa Kleina (1849-1925) na rolę intuicji w poznaniu matematycznym. Klein wprowadza w szczególności ciekawe rozróżnienie na naiwną intuicję (*naive intuition*) i intuicję wzmocnioną (*refined intuition*), któremu nieco bliżej się przyjrę. Omówię niektóre ciekawsze uwagi Kleina odnośnie roli intuicji przestrzennej w matematyce.

W dalszej kolejności podejmę bardziej pogłębioną analizę stanowisk Johna Stuarta Milla, Henri Poicarégo i Gottloba Fregego. Stanowisko J.S. Milla (1806-1873) warto wspomnieć, ponieważ jest on reprezentantem skrajnego empiryzmu w filozofii geometrii. W swoim empiryzmie idzie on dalej niż John Locke czy George

³⁹¹ Tytuł oryginału to *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik*.

Berkeley i stawia tezę, iż narysowane diagramy są przedmiotem geometrii, a jej rozumowania mają charakter empiryczny i oparte na analizie fizycznego diagramu.

Kolejnym filozofem (oraz logikiem), któremu poświęcę tu nieco więcej miejsca jest Gottlob Frege (1848-1925). Niemiecki filozof znany jest z poglądu, iż geometria jest nauką syntetyczną. Pogląd ten jest zastanawiający w świetle całości filozofii Fregego, skłaniającej się raczej w stronę racjonalizmu, której to kwestii się również przyjrę.

Wreszcie omówię filozofię geometrii Henri Poincarégo (1854-1912). Stanowisko Poincarégo jest ciekawe z kilku powodów. Po pierwsze, formułuje on interesujące stanowisko w filozofii geometrii, któremu warto się krótko przyjrzeć. Po drugie, pisze o roli przestrzeni wyobraźniowej w poznaniu geometrycznym. Warto się też przyjrzeć bardzo interesującym uwagom Poincarégo na temat dwóch typów umysłowości: matematyków bardziej skłonnych do myślenia intuicyjnego (w tym przestrzennego), oraz matematyków preferujących metody algebraiczno-analityczne. W końcowej części rozdziału dokonam syntetycznego podsumowania i zestawienia wszystkich analizowanych tu stanowisk,

5.1. Bernard Bolzano o pojęciach i intuicji w poznaniu geometrycznym

Filozof i teolog niemiecko-czeski, Bernard Bolzano, znany jest przede wszystkim ze swoich poglądów antycypujących logicyzm w filozofii matematyki. Stanowisko praskiego filozofa ma wiele cech wspólnych z filozofią Leibniza. W szczególności podkreśla B. Bolzano pojęciowy charakter poznania matematycznego, odmawiając w nim istotnej roli intuicji przestrzennej. W niniejszym podrozdziale przedstawiam kilka zwięzłych, ale treściwych uwag B. Bolzano odnośnie roli diagramów i intuicji w geometrii, które sformułował on we wspomnianej pracy *Contributions to a Better-grounded Presentation of*

Mathematics. B. Bolzano formułuje je w kontekście analizy kantowskiej podziału na sądy analityczne i syntetyczne, od jej omówienia też zaczniemy.

Bernard Bolzano pisze o filozofii kantowskiej z dużym uznaniem. Uznaje zasadność samego podziału na zdania analityczne i syntetyczne – podkreśla, że zwrócenie uwagi na to, że nasza wiedza dzieli się na analityczną i syntetyczną jest zasługą Kanta. Mimo to sceptycznie podchodzi on do kantowskiej odpowiedzi na pytanie: na czym opiera się prawdziwość zdań syntetycznych.

Bolzano stawia pytanie, które leży w centrum rozważań dotyczących podziału na zdania analityczne i syntetyczne: na czym opiera się prawdziwość zdań syntetycznych, a na czym analitycznych? Prawdziwość tych ostatnich opiera się, jak podkreśla, na zasadzie sprzeczności, chociaż niekoniecznie w swojej tradycyjnej postaci; niemiecki matematyki pisze, że zdania analityczne, o ile są prawdziwe, „opierają się wszystkie na jednym ogólnym sądzie, który wyraża się formułą: $(A \text{ cum } B)$ jest rodzajem A . Jeśli nazwać ów sąd prawem identyczności albo niesprzeczności, to można zawsze stwierdzić, iż prawo sprzeczności jest ogólnym źródłem wszystkich sądów analitycznych”³⁹². Pojawia się więc pytanie: na czym opiera się prawdziwość zdań syntetycznych, o ile jasnym jest, że nie opierają się na zasadzie sprzeczności?

W pierwszym rzędzie należy tu odpowiedzieć na pytanie: jaką rolę pełnić mogą intuicje w uprawomocnianiu twierdzeń geometrycznych? Bolzano podnosi kwestię: jak sądy oparte na intuicji mogą mieć charakter ogólny? Spekuluje on, że odpowiedź kantysty na takie pytanie może być następująca: „jeśli połączę ogólne pojęcie, na przykład *punktu*, bądź *kierunku* albo *odległości*, z *intuicją*, tj. wyobrazić sobie *jednostkowy punkt*, *jednostkowy kierunek* albo *odległość*, wtedy dowiaduję się, że ten, czy inny predykat należy do tych *jednostkowych* przedmiotów i jednocześnie czuję, że rzeczy się tak *również* mają dla *wszystkich pozostałych* przedmiotów, które podpadają pod to pojęcie³⁹³”. Wciąż jednak nie jest jasne, według Bolzana, jak przechodzimy do sądu ogólnego: „jak przechodzimy od intuicji owego *jednostkowego przedmiotu*, do *odczucia*, że to, co w nim dostrzegamy stosuje się również do każdego innego? Poprzez to, co jest

³⁹² Bolzano, B, *Contributions to a Better-grounded Presentation of Mathematics*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B, Clarendon Press, str. 220.

³⁹³ Tamże, str. 222.

jednostkowe i indywidualne w tym przedmiocie, czy przez to, co jest w nim ogólne? W oczywisty sposób tylko przez to drugie, tzn. poprzez *pojęcie*, nie przez *intuicję*³⁹⁴”.

Wydaje się, że Bolzano dociera tu, używając prostych, nieformalnych zwrotów do sedna problemu ogólności rozumowań diagramowych. Pyta się on: co powoduje, iż obserwując diagram jednostkowy formułujemy sąd odnośnie innych obiektów, podobnych do obserwowanego? Skąd to „odczucie”, iż twierdzenie jest ogólne? Bolzano wbrew Kantowi uważa, że tym, co ogólne w diagramie jest wyłącznie pojęcie. Intuicje nie mają nigdy charakteru ogólnego. Obserwując diagram, dostrzegamy więc w nim to, co ogólne za pomocą pojęcia, przy jego pomocy przeprowadzamy też odpowiednie rozumowanie.

Sądy ogólne nie mogą więc – według Bolzano – opierać się na intuicji przestrzennej. Matematyka jest według niego w ogólności – podobnie jak filozofia – nauką o analizie czystych pojęć³⁹⁵. Intuicja przestrzenna ani rysunki nie grają w poznaniu matematycznym żadnej istotnej roli. W słowach Bolzano: „rysunek, który towarzyszy naszemu czystemu pojęciu punktu nie jest z nim połączony w sposób istotny, ale jedynie przez skojarzenie idei (*association*), ponieważ często myśleliśmy je obie jednocześnie”³⁹⁶. Rysunki mogą być różnie postrzegane przez poszczególnych ludzi, a pojęcia matematyczne mogą być za pomocą rysunków reprezentowane na różne sposoby. Są one użyteczne w budowaniu przekonań odnośnie obiektów matematycznych – ale nie konieczne. Nie odgrywają w szczególności żadnej ważnej roli w dowodach matematycznych. Taki pisze o tym sam Bolzano: „uwzględam, że dowody matematyczne mogą być, i muszą, wyprowadzane z czystych pojęć”³⁹⁷. Sądy matematyczne są przy tym oczywiście sędami apriorycznymi: wyrażając sądy a priori „podstawa, na mocy której przypisuję podmiot orzecznikowi nie może w żaden sposób leżeć gdzie indziej, niż w *samym podmiocie*”. Intuicje nie mogą odgrywać w sędzie apriorycznym owej roli uprawomocniającej – rolę połączenia podmiotu i orzeczenia odgrywać mogą jedynie w przypadku sądów doświadczalnych czy takich, w których wchodzi w grę

³⁹⁴ Tamże, str. 222.

³⁹⁵ Por. Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 111.

³⁹⁶ Bolzano, B., *Contributions...*, str. 223.

³⁹⁷ Bolzano, B., *Wissenschaftslehre*, za: Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics...*, str. 111.

prawdopodobieństwo³⁹⁸. Dodam, że Bolzano uzasadnia swój krytyczny stosunek do intuicji również tym, że „istnieją twierdzenia geometrii, dla których nie posiadamy żadnych intuicji”³⁹⁹. Takim jest np. twierdzenie, że każda linia prosta może być przedłużona w nieskończoność. W stereometrii mamy wreszcie do czynienia z wieloma obiektami, których nie potrafiłaby sobie przedstawić w intuicji nawet sprawna wyobraźnia.

5.2. Felix Klein o intuicji naiwnej i wzmocnionej w matematyce

Felix Klein był przede wszystkim matematykiem, o filozofii pisał więc rzadko i niewiele. Mimo to sformułował bardzo interesujące filozoficznie stanowisko odnośnie roli intuicji przestrzennej w matematyce (Klein używał tu terminu *Anschauung*). Jak pisze Roberto Torretti, Klein „wydawał się być przekonany (*he apparently believed*), że każdy normalny dorosły człowiek posiada umiejętność tworzenia obrazów geometrycznych zgodnie z ustalonym wzorcem (*according to a fixed pattern*). Tę umiejętność, bądź jej stosowanie, nazywał *intuicją (Anschauung)*”⁴⁰⁰. Intuicja ta leży u podstaw wiedzy geometrycznej i jest dla niej niezbędna. Ta geometryczna intuicja jest „wrodzonym talentem”, rozwijana jest jednak przez doświadczenie⁴⁰¹. Klein wyróżnia jednak dwa rodzaje intuicji – intuicję naiwną (*naive intuition*) i „ulepszoną”, czy też „wzmocnioną” (*refined intuition*). Ta pierwsza to zwykła, „nieuzbrojona” w pojęcia matematyczne intuicja wzrokowa, za pomocą której postrzegamy narysowane obiekty geometryczne. Jest ona jednak niewystarczająca w celu „jednoznacznego określania pojęć geometrycznych, oraz w celu określenia pewnych wzajemnie sprzecznych twierdzeń geometrycznych”⁴⁰². Aby poradzić sobie z niedokładnością

³⁹⁸ Bolzano, B, *Contributions...*, str. 222

³⁹⁹ Tamże, str. 224.

⁴⁰⁰ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 147.

⁴⁰¹ Tamże, str. 147.

⁴⁰² Tamże, str. 147.

intuicji fizycznej idealizujemy dane percepcyjne, nadając im „przymusem intelektualnym” dokładność, której ta pierwsza nie może posiadać. W ten sposób, przez kontakt z wyidealizowanymi obiektami geometrycznymi rozwijamy w sobie „wzmocnioną” intuicję. Wzmocniona intuicja nie jest właściwie intuicją *sensu stricte*; jest ona władzą poznawczą opartą na pojęciach, i ścisłą i jak zauważa Klein, „powstaje w wyniku rozwoju logicznego począwszy od aksjomatów, które są traktowane jako absolutnie dokładne prawdy”⁴⁰³. Taka ulepszona intuicja jest potrzebna i konieczna aby określać prawdziwość wspomnianych zdań, z którymi nie radzi sobie naiwna intuicja, ale również aby przeprowadzać dowody euklidesowe. *Elementy* Euklidesa są dla Kleina w istocie przykładem teorii aksjomatycznej, która – mając korzenie w intuicji naiwnej – budowana jest przy użyciu intuicji ulepszonej; Euklides bowiem, jego zdaniem, “uważnie rozwija swój system opierając się na dobrze sformułowanych aksjomatach, jest w pełni świadomy konieczności dokładnych dowodów itd.”⁴⁰⁴. Aksjomaty nie są przy tym ani arbitralne, ani nie są zdaniami *a priori* – są idealizacjami danych percepcyjnych, które uzyskujemy dzięki naiwnej intuicji⁴⁰⁵.

Powtórzmy, że według Kleina intuicja naiwna jest konieczna dla rozwoju matematyki. Pisał, iż jest „przekonany, że dla celów badawczych łączenie intuicji z aksjomatami jest zawsze koniecznością”⁴⁰⁶. Podaje następnie wyniki matematyczne – m.in. Sophusa Lie’go, dotyczące krzywych algebraicznych, czy te występujące w geometrii elementarnej, które według niego nie mogłyby być osiągnięte bez ciągłego udziału intuicji. Przytoczmy tu wypowiedź Kleina’a dotyczącą geometrii nieeuklidesowych: „uważam, iż rozwijanie geometrycznych rozważań nie jest możliwe, jeżeli nie mam przed sobą cały czas rysunku do którego się odnoszą. (...) Czysto obliczeniowa geometria analityczna, która *obywa* się bez rysunków, nie może być uważana za prawdziwą (*genuine*) geometrię (...) Aksjomat jest żądaniem, przy pomocy którego w ramach niedokładnej intuicji formułujemy

⁴⁰³ Za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 147.

⁴⁰⁴ Za: tamże, str. 147

⁴⁰⁵ Bråting, K., Pejlare J., *Visualisations...*, str. 348.

⁴⁰⁶ Za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 148.

dokładne sądy (*die Forderung, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlege*)”⁴⁰⁷.

Zapytajmy więc, jaka jest relacja roli intuicji i roli pojęć w poznaniu matematycznym? Prawdziwa geometria nie może obyć się więc bez intuicji, która konstytuuje treść twierdzeń matematycznych. Jak piszą Brating i Pejlar, „aksjomaty i logika nadają teorii szkielet/strukturę (skeleton), ale to intuicja ożywia teorię”.

Klein zdaje sobie oczywiście sprawę z ograniczeń intuicji. Jak pisze, zdarzają się sytuacje, w przypadku których „wnioski wyprowadzone przy pomocy czysto logicznego rozumowania wychodzącego z dokładnych definicji nie mogą być zweryfikowane przez intuicję”⁴⁰⁸. Potwierdzają one konieczność formułowania ścisłych definicji i przeprowadzania ścisłych dowodów.

Wydaje się, że można zauważyć podobieństwa pomiędzy filozofią Kleina a empiryzmem Riemanna. *Nachdenken*, podobnie jak wzmocniona intuicja, są władzami poznawczymi „nadbudowanymi” nad doświadczeniem fizycznym. Dla Riemanna wszelkie sądy mają przy tym charakter hipotetyczny, dla Kleina natomiast pojęcia matematyczne są idealizacjami. Nadają one jednak danym zmysłowym postaci, dzięki której możliwe staje się formułowanie twierdzeń i ich ścisłe dowodzenie. Warto podkreślić, iż według Kleina posiadamy naturalną, silną tendencję do idealizacji danych percepcyjnych; jesteśmy na przykład skłonni postrzegać linię jako prostą, bądź powierzchnię jako gładką nawet jeśli takie nie są⁴⁰⁹. Percepcja nie ma więc dla Kleina charakteru zasadniczo odmiennego od poznania pojęciowego. Postrzegamy obiekty fizyczne w taki sposób, który niejako „nasuwa” wyidealizowaną, quasi-matematyczną konceptualizację danych zmysłowych (można przy tym oczywiście zadać pytanie, na ile postrzegania prostej jako 1-wymiarowej ma źródła w tym, że już posiadamy określone pojęcia matematyczne, czy też jest od nich niezależne, tzn. w pewnym sensie wrodzone).

Wspomnijmy jeszcze w kilku słowach o koncepcji metodologii Felixa Kleina oraz jej relacji do powyższych uwag. F. Klein preferował intuicyjny styl

⁴⁰⁷ Klein, F., *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 149.

⁴⁰⁸ Tamże, str. 149.

⁴⁰⁹ Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 147.

rozumowania, tzn. taki, w którym badanym pojęciom towarzyszą reprezentacje przestrzenne. Taki styl uprawiania matematyki nie był – według Kleina – słabością, czy zubożeniem matematyki; nie „odciągał” umysłu od właściwego przedmiotu matematyki, jak chciał tego Platon czy Leibniz. Przeciwnie – „mieszana” – „pojęciowo-intuicyjna” metodologia czyni poznanie matematyczne bardziej wartościowym, ożywia je i wzbogaca.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że do ok. połowy XIX żywa była kontrowersja dotycząca stosowania metod algebraicznych w geometrii. Jej wyrazem było pojawienie się w geometrii całego metodologicznego nurtu, który je odrzucał oraz postulował powrót do metod czysto geometrycznych. Nurt ten rozpoczął francuski matematyk Gaspard Monge (1746-1818) wraz z uczniami. Tak uprawiana geometria była z czasem nazywana geometrią syntetyczną – w przeciwieństwie do geometrii analitycznej, która korzystała z narzędzi algebry⁴¹⁰. Zwolennicy syntetycznego podejścia do geometrii unikali „algebraicznego sformułowania relacji geometrycznych, które okazały się tak owocne od czasu ukazania się *Geométrie Kartezjusza*” – choć nie mieli oczywiście na celu w zupełności z nich zrezygnować⁴¹¹. W zamian dążono do stosowania metod czysto geometrycznych. Tak różnicę między tymi podejściami do geometrii charakteryzuje Klein: „geometria syntetyczna bada figury jako takie, bez odwoływania się do formuł, podczas gdy geometria analityczna używa w sposób

⁴¹⁰ Zwolennicy podejścia syntetycznego byli przekonani o większej wartości poznawczej metod korzystających z diagramów. Warto przytoczyć główny argument, mający wykazać wyższość tego podejścia do geometrii, ma on bowiem mocno epistemologiczny wydźwięk. Twierdzi się tu więc, że „w szeregu algebraicznych przekształceń danej formuły, niemożliwym może być prześledzenie szeregu geometrycznych kroków, którym formalne przekształcenia powinny odpowiadać”⁴¹⁰. I dalej w słowach jednego ze zwolenników podejścia syntetycznego, Chaslesa, „czy jest więc w filozoficznych i elementarnych (*basic*) badaniach danej nauki wystarczającym wiedzieć, iż coś jest prawdziwe, jeśli się nie wie dlaczego takim jest, oraz jakie ma ono miejsce w szeregu prawd, do którego należy?” (Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, za: Epple, M. *Styles of argumentation...*, str. 180). Kryje się tu idea, że analityczne (czy algebraiczne) uzasadnienie nie ukazuje istoty rozumowania, która jest związana z przekształceniami na wizualnie postrzegalnych figurach. O ile rysunki pokazują dlaczego dane twierdzenie jest prawdziwe, można też powiedzieć, iż dostarczają *wyjaśnienia* dla tej prawdziwości. Metody algebraiczne wydają się poza tym dla Chasles podejrzane, niewiarygodne. Są prawie jak sztuczki, które odciągają umysł od istoty rzeczy (por. tamże, str. 180). Dodajmy, iż spór analitycznej i syntetycznej tradycji w geometrii jest echem wspomianej przez mnie XVII-wiecznej dyskusji nad statusem poznawczym algebry.

⁴¹¹ Epple, M. *Styles of argumentation...*, str. 178.

niesprzeczny tych formuł, które można zapisać po przyjęciu odpowiedniego układu współrzędnych”⁴¹². Sam F. Klein był przeciwny zarówno pierwszemu, jaki drugiemu pryzmowi metodologicznemu. Niemiecki matematyk podkreślał wagę, oraz wymiennosc, obu podejść do praktyki matematycznej. Felix Klein podkreślał również, iż różnica pomiędzy wspomnianemu metodologiami utraciła z czasem na znaczeniu, ponieważ „sposoby rozumowania stosowane przez każdą ze stron stopniowo wyewoluowały do bardzo podobnych form”⁴¹³.

Warto tu dodać, za Moritzem Epplera, iż matematyka staje się, według Kleina, dzięki takiej „mieszanej” metodologii w pewnym sensie ogólniejsza. Eppler podkreśla, że ogólnosc rozumie się w kontekście aksjomatycznego ujęcia matematyki. Tu wiąże się ona z minimalizacją założeń wyjściowych oraz pozabawieniem pojęć matematycznych z góry nadanej interpretacji. Geometryczne systemy aksjomatyczne są więc ogólniejsze w tym sensie, że poszczególne geometrie są tylko fragmentem szerszego systemu aksjomatycznego, a dana „wizualna” interpretacja jedynie jednym ze sposobów interpretacji podstawowych, pewną konkretyzacją. Z drugiej strony, w ramach wizji matematyki Kleina, „tym co miało pokazać ogólne znaczenie prezentowanych idei, było właśnie zagęszczenie kontekstu rozumowania, bogata różnorodność dyskutowanych tematów i punktów widzenia”⁴¹⁴.

Dodajmy, iż według Kleina intuicja (tu używał terminu *Anschauung*) jest przydatna w wielu działach matematyki, nie tylko w geometrii. Klein podkreślał m.in. rolę intuicji w analizie matematycznej, szczególnie w pierwszym okresie jej rozwoju.

Przejdźmy dalej do ujęcia wizualizacji w empiryzmie J.S. Millera.

⁴¹² Klein, *Elementary mathematics from a higher standpoint*, za: Eppler, str. 180.

⁴¹³ Klein, *Erlanger Programm*, za: Klein, str. 181.

⁴¹⁴ Eppler, M. *Styles of argumentation...*, str. 183.

5.3. Wizualizacje w filozofii skrajnego empiryzmu J.S. Milla

John Stuart Mill jest filozofem, którego często wymienia się jako paradygmatyczny przykład skrajnego empirysty w odniesieniu do filozofii matematyki. Dla J.S. Milla matematyka nie różni się w żaden zasadniczy sposób od pozostałych nauk empirycznych, zarówno pod względem epistemologicznym jak i ontologicznym. Jej przedmiotem jest więc świat fizyczny, zaś źródłem poznania matematycznego – indukcja.

Co więcej, rozumowania w geometrii nie posługują się prawdami ogólnymi i nie dowodzą prawd ogólnych – są one indukcyjnymi, empirycznymi rozumowaniami, w których korzystamy z diagramów jako ze świadectwa zmysłów. Przedmiotem geometrii są natomiast fizyczne proste, okręgi itd., których idealizacjami są narysowane figury geometryczne. Mill przyjmuje więc skrajną postać empiryzmu, idącą dalej, niż stanowiska dotychczas analizowanych filozofów.

W najpełniejszy sposób, oraz w kontekście ogólnej teorii nauki i wnioskowania, przedstawia Mill swoją filozofię matematyki w dziele *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, na którym będę opierał moje dalsze analizy. Ogólnie rzecz biorąc, jak we wstępie do polskiego wydania *Systemu Logiki* pisze Klemens Szaniawski, „zadaniem, jakie sobie Mill postawił, jest analiza sposobów zdobywania wiedzy”⁴¹⁵. Mill stawia tam sobie m.in. za cel stworzenie ogólnej teorii wnioskowań, która wszystkie z nich sprowadza do różnych typów indukcji. Głównym natomiast celem jest „logice indukcji (...) nadać postać naukową, analogiczną do teorii sylogizmu”⁴¹⁶.

Wzorem m.in. Johna Locke’a, czy Davida Hume’a, zaczyna Mill swoje dzieło od analizy języka (nazw, definicji, itd.), dalej przechodzi do analizy rozumowań by przejść do wyróżnienia różnych postaci rozumowań indukcyjnych. Zaczniemy od kilku uwag odnośnie nazw i zdań. Warto na początek stwierdzić, iż dla Milla znaczenie nazwy „polega na tym, co ona konotuje, nie zaś na tym, co

⁴¹⁵ Zob. VIII.

⁴¹⁶ Coplestone, F., *Historia Filozofii, Tom VIII*, Warszawa 1989, str. 55.

denotuje”⁴¹⁷. Nazwa konotuje natomiast jakichś zbiór *cech* – np. nazwa „człowiek” konotuje pewien zbiór cech, jak rozumność czy śmiertelność. Cechy z kolei odpowiadają pewnym określonym zbiorom impresji zmysłowych.

Dla Milla, podobnie jak dla większości logików jego czasów „zdanie (...) jest to wypowiedź, w której orzecznik zostaje stwierdzony lub zaprzeczony w odniesieniu do jakiegoś podmiotu”⁴¹⁸. Mill wprowadza dalej podział na zdania realne i werbalne. Zdanie werbalne to zdanie, które zdaje relację ze znaczenia nazwy poprzez wymienienie cech, które ona konotuje. Takie zdania nie odnoszą się (przynajmniej w zakresie treści, jaką stwierdzają) do świata fizycznego. Stąd nie mówią one nic o rzeczywistości: „zdanie tego rodzaju nie daje żadnej informacji temu, kto uprzednio rozumiał całe znaczenie danych terminów”; wreszcie: „są one faktycznie zdaniem, stwierdzającymi tożsamość”⁴¹⁹. Natomiast „w zdaniu realnym stwierdzamy lub zaprzeczamy o podmiocie jakiś atrybut, którego nie kontroluje nazwa podmiotu, lub stwierdzamy czy zaprzeczamy fakt, którego nie obejmuje znaczenie nazwy podmiotu”⁴²⁰. Przedmiotem zdań realnych jest, według Milla, ogólnie empirycznie stwierdzane „współistnienie dwóch zjawisk, albo ich następstwo”⁴²¹. Dodatkowo Mill podkreśla, że przedmiotem zdania jest zawsze rzeczywistość empiryczna – nie są nim relacje pomiędzy naszymi pojęciami, czy np. pomiędzy samymi nazwami. Stwierdza więc Mill wyraźnie, że „zdania (...) nie są twierdzeniami, dotyczącymi naszych idei rzeczy, lecz twierdzeniami, dotyczącymi samych rzeczy”⁴²². Podział na zdania realne i werbalne odpowiada z grubsza kantowskiemu podziałowi na zdania analityczne i syntetyczne, choć z uwagi na odmienne założenia systemu Milla, ma inny wydźwięk filozoficzny⁴²³.

⁴¹⁷ Tamże, str. 59.

⁴¹⁸ Mill, J.S. *System logiki*, Tom I, Warszawa 1962, str. 121.

⁴¹⁹ Mill, str. 173.

⁴²⁰ Coplestone, F., *Historia Filozofii*, str. 60.

⁴²¹ Mill, J.S. *System logiki*, str. 153

⁴²² Tamże, str. 136. Można dodać, że zdania (realne) stwierdzają w ogólności o świecie fizycznym jedną z pięciu rzeczy: „istnienie, porządek w przestrzeni, porządek w czasie, związek przyczynowy oraz podobieństwo” (tamże, str. 169).

⁴²³ „To rozróżnienie odpowiada temu, jakie Kanta oraz inni metafizycy przeprowadzali między terminami sąd analityczny i sąd syntetyczny, z których pierwszy był tym, jaki można wyprowadzić ze znaczenia użytych terminów” (tamże, str. 179).

Przyjrzyjmy się dalej, jak Mill przedstawiał w zestawieniu z innymi naukami proces poznania matematycznego. Zacznijmy od kilku uwag co do przedmiotu matematyki. Na poziomie ontologicznym Mill jest oczywiście w pełni empirystą, także w odniesieniu do matematyki. Odrzuca on w szczególności stanowiska, które nazywa realizmem i konceptualizmem; przedmioty matematyki nie są oderwane od myśli (realizm), ani też nie jest matematyka wyłącznie konstrukcją ludzkiego umysłu (konceptualizm). Nie zgadza się więc w szczególności z Kantem, by przedmioty geometryczne, będąc wytworem czystej naoczności, budowały naukę *a priori* – taka koncepcja byłaby, według Milla, „niepoprawna psychologicznie”⁴²⁴.

Co dokładnie jest więc przedmiotem zdań i nazw geometrii? Zacznijmy od tego, iż Mill, nawiązując w tym miejscu do stanowiska kantowskiego, uważa, że nie poznajemy rzeczy samych w sobie: „nie ma najmniejszej racji, iżby uważać, że to, co nazywamy cechami zmysłowymi jakiegoś przedmiotu, to typ czegoś, co tkwi w tym przedmiocie czy też ma jakieś pokrewieństwo z jego własną naturą”⁴²⁵. Mill odrzuca więc zdecydowanie tezę, iż pojęciom geometrycznym, jak pojęciu punktu czy prostej odpowiada coś po stronie świata fizycznego, bowiem „ich istnienie, o ile możemy stworzyć sobie jakiś sąd o tym, okazałoby się niezgodne z fizyczną strukturą co najmniej naszej planety, jeśli nie wszechświata”⁴²⁶. Mill stoi tu więc znów przed problemem, na który zwracał chociażby Arystoteles: jak, pozostając na stanowisku skrajnego empiryzmu, uniknąć konkluzji, iż twierdzenia geometrii (dotyczące np. bezwymiarowych punktów czy linii bez szerokości) są fałszywe? Angielski myśliciel, jakoby drogą eliminacji poglądów, które uważa za nie do przyjęcia, dochodzi do empirystycznej filozofii matematyki mówiąc, że: „skoro więc ani w naturze, ani w umyśle ludzkim nie istnieją przedmioty, dokładnie odpowiadające definicjom geometrii, i skoro przecież nie można przyjąć, że nauka ta zajmuje się rzeczami nie istniejącymi, przeto nie pozostaje nic innego, jak uważać, że geometria zajmuje się takimi liniami, kątami i figurami, jakie istnieją

⁴²⁴ Tamże, str. 349.

⁴²⁵ Tamże, str. 95.

⁴²⁶ Tamże, str. 349. Idea punktu jest według Milla “po prostu ideą tego, co jest *minimum visibile*, ideą najmniejszej cząstki powierzchni, jaką możemy ujrzeć” (tamże, str. 349).

rzeczywiście”⁴²⁷. W związku z tym, Mill stawia przewrotną, z punktu widzenia standardowego ujęcia matematyki, tezę: to nie rzeczywiste trójkąty i koła są przybliżonymi i niedoskonałymi kopiami obiektów matematycznych, ale odwrotnie – obiekty matematyki są przybliżeniami, zawsze niedoskonałymi, obiektów fizycznych; nie są więc – jak zwykle by się powiedziało, idealizacjami, w których poprzez abstrakcję od pewnych cech jesteśmy w stanie formułować precyzyjniejsze sądy. Także więc zdania geometrii są prawdziwe w przybliżeniu – o fizycznych kołach, trójkątach itd., a w szczególności o diagramach je przedstawiających. Ściśle rzecz biorąc, twierdzenia nie są nigdy prawdziwe o figurach geometrycznych. Definicje geometryczne są natomiast hipotezami - w tym sensie, że zakładają w hipotetyczny i kontrfaktyczny sposób, iż obiekty matematyki mają pewne własności (jak bezwymiarowość, itd.)⁴²⁸..

Przyjrzyjmy się dalej ważniejszym uwagom Milla odnośnie natury rozumowań w geometrii, koncentrując się na roli diagramu. Angielski filozof rozważa następujący klasyczny zarzut przeciwko empiryzmowi: gdyby stwierdzenie prawdziwości np. piątego postulatu (czy innych zdań geometrii) miało mieć źródło tylko w doświadczeniu zmysłowym, to moglibyśmy co do niego przekonać się jedynie za pomocą zmysłów, tymczasem robimy to „w myśli”⁴²⁹. Inaczej mówiąc, prawd matematycznych dowodzimy, jak chce J.S.Mill, w oparciu o dane zmysłowe, np. eksperyment, ale możemy to uczynić przez czysto psychiczną aktywność. Na to J.S.Mill odpowiada następująco: istnieje bezpośrednia analogia pomiędzy fizycznie narysowanymi obiektami geometrycznymi, a tymi „pomyślanymi”, czy inaczej „dokładne podobieństwo naszych idei kształtu do

⁴²⁷Tamże, str. 350.

⁴²⁸ Definicje nie są, według Milla, o swoich przedmiotach literalnie prawdziwe: „elementem hipotetycznym w definicjach geometrii jest założenie, iż dokładnie prawdziwe jest to, co jest bardzo bliskie prawdy. Tę ścisłość, która nie jest ścisłością rzeczywistą, można nazwać równie dobrze fikcją, jak i hipotezą” (tamże, str. 353).

⁴²⁹ Mill rozważa również inny argument przeciw empiryzmowi, zgodnie z którym nie można obalić twierdzeń geometrycznych na podstawie doświadczenia, ponieważ nie spotykamy w doświadczeniu prostych idealnych, nie może ono więc falsyfikować twierdzeń geometrycznych. Tu Mill powołuje się na wspomnianą tezę, iż pojęcia geometryczne są przybliżeniami. Jeśli uwzględnimy więc w analizie prawdziwości zdań geometrii to, że są przybliżeniami, zrozumiemy że również one mogą być potwierdzane empirycznie.

wrażeń, które nam myśl o tych kształtach poddaje”⁴³⁰. Angielski filozof uważa, „iż można je [kształty geometryczne] malować sobie w wyobraźni z dokładnością i wyrazistością równą jak w rzeczywistości”⁴³¹. To podobieństwo ma być wytłumaczeniem pewnej wymienności myślenia o przedmiotach geometrycznych jako obiektach myśli i obiektach fizycznych. Mill twierdzi jednak, że to drugie znaczenie jest pierwotne; formułuje w związku z tym dość silną epistemologiczną tezę: „Twierdzę, że nie wierzymy w tę prawdę po prostu na podstawie intuicji wyobrazeniowej, lecz dlatego, że wiemy, iż linie wyobrażone dokładnie odpowiadają liniom realnym, i że możemy wyprowadzać z nich konkluzje, dotyczące linii rzeczywistych z tą samą zupełnie pewnością, jak moglibyśmy wyprowadzać wniosek z jednej linii rzeczywistej o innej”⁴³². Wydaje się, że kryją się tu, w rozumieniu angielskiego filozofa, dwie idee. Po pierwsze Mill wydaje tu się zakładać, że rozumując, orzekając prawdziwość, bądź fałszywość twierdzeń geometrycznych, kierujemy się intuicją przestrzenną, czy wewnętrznymi wizualizacjami obiektów geometrycznych. Te natomiast – po drugie – jak również rozumowania ich dotyczące (jakkolwiek te „rozumowania” postrzegać), odpowiadają w zupełności postrzeganiu i rozumowaniom dotyczącym fizycznych, narysowanych diagramów. Obserwacja „wewnętrzna”, oraz „zewewnętrzna” są więc dwoma równoprawnymi źródłami wiedzy dotyczącej obiektów geometrii.

Przyjrzyjmy się dalej kolejnemu kluczowemu elementowi epistemologii Milla. Poznanie matematyczne – w tym oczywiście geometryczne – jest mianowicie, według Milla, poznaniem indukcyjnym. Angielski filozof w wielu miejscach równocześnie podkreśla, że konkluzje matematyki są wnioskami indukcyjnymi z obserwacji. W szczególności konkluzje dotyczące figur geometrycznych są uprawomocnione przez powtarzalne doświadczenie zmysłowe z nimi związane. W konsekwencji, zdania matematyki tracą status zdań koniecznych a, jak pisze Mill, w przypadku tych zdań „doświadczenie może stwierdzić i opisywać, co zaszło; ale nie może ustalić w żadnym przypadku ani w żadnym

⁴³⁰ Tamże, str. 363.

⁴³¹ Tamże, str. 363.

⁴³² Tamże, str. 364.

nagromadzeniu przypadków żadnej podstawy tego, że to *musi* zachodzić⁴³³”. Prawdą indukcyjną jest więc np. dla Milla słynny piąty postulat Euklidesa. Przedstawiając szczegółowo swoje słynne kanony indukcji, Mill nie przybliży jednak indukcyjnej natury poznania matematycznego, eksplikacja tego, jak przebiega „indukcja matematyczna” rodzi więc pewne trudności. Dodatkowo należy tu podkreślić, iż angielski myśliciel uznaje rolę dedukcji w nauce, podkreślając, iż jest ona szczególnie często stosowana w matematyce. Można więc poglądy Milla interpretować w sposób następujący: w sposób indukcyjny poznajemy definicje i aksjomaty, o których prawdziwości przekonujemy się poprzez poszczególne doświadczalne dane – dalsze twierdzenia uzyskujemy natomiast przy pomocy dedukcji. W tym duchu pisze też znany historyk matematyki Frederick Copleston, twierdząc, że Mill „nie sugeruje, że nasza znajomość wszystkich zdań matematycznych jest faktycznie wytworem indukcyjnego uogólnienia. W rezultacie mówi on natomiast, że ostateczne przesłanki dowodzenia matematycznego są hipotezami empirycznymi”⁴³⁴. Aksjomaty te byłyby przy tym poznawane przy pomocy indukcji enumeratywnej, a więc niesystematycznej, przednaukowej indukcji dotyczącej niepowiązanych na pozór ze sobą obiektów, czy zdarzeń fizycznych. Tak twierdzi Skorupski pisząc, iż według Milla matematyka „pochodzi (...) z tych ‘spontanicznych’ i ‘nienaukowych’ indukcji enumeratywnych”⁴³⁵. Należy przy tym podkreślić, iż o zdaniach matematyki można powiedzieć, że są konieczne tylko o tyle, o ile wynikają z aksjomatów: „konieczność ta polega w rzeczywistości tylko na tym, że one poprawnie wypływają z założeń, z jakich myśmy je wyprowadzili dedukcyjnie”⁴³⁶. Nie jest to więc w żadnym sensie konieczność „metafizyczna”. Jednak nawet przy takiej interpretacji myśli Milla, twierdzenia matematyki pozostają prawdami indukcyjnymi, o ile wynikają w ostatecznym rozrachunku z przyjmowanych na podstawie indukcji aksjomatów.

⁴³³ Tamże, str. 368-369.

⁴³⁴ Coplestone, F., *Historia Filozofii...*, str. 64-65.

⁴³⁵ Por. Skorupski, J., *Later Empiricism and Logical Positivism*, w: *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford 2000, str.63. Drugim jej rodzajem jest systematyczna indukcja, której rodzaje Mill opisuje jako słynne kanony indukcji (nazywa się ją też indukcją eliminatywną).

⁴³⁶ Mill, J.S. *System logiki...*, str. 352.

Na koniec poddamy analizie zagadnienie ogólności twierdzeń geometrii, oraz jednostkowości diagramów. Otóż indukcyjna charakterystyka poznania matematycznego prowadzi Milla również do przyjęcia, iż zdania matematyki nie są w istocie ogólne oraz nie są potwierdzane jako ogólne (jest to przy tym znów charakterystyka wszystkich zdań, nie tylko matematycznych). Specyfiką matematyki, jak się zazwyczaj uważa, jest to, że dowodzi ona w sposób ostateczny zdań ściśle ogólnych. Według Milla, zdanie ogólne nigdy nie wyraża jakiegoś faktu innego, niż suma faktów szczegółowych, jest „agregatem prawd szczegółowych”⁴³⁷. Matematyka nie jest tutaj znów żadnym wyjątkiem, bowiem każde jej stwierdzenie, np. o trójkącie, zawsze odnosi się do jakiegoś konkretnego trójkąta, lub można je rozumieć jako sumę dotychczas stwierdzonych zdań o trójkątach. Nie jest w każdym razie na pewno prawdą ogólną o wszelkich trójkątach. Mill pozbawia w ten sposób matematykę jej specyficznej własności, ogólności, mającej ją odróżnić od innych nauk. Co więcej, Mill uważa, że zdania ogólne w rzeczywistości nigdy nie stanowią przesłanek wnioskowań⁴³⁸. Według angielskiego filozofa, „wszelkie wnioskowanie przechodzi od szczegółów do szczegółów; zdania ogólne to tylko po prostu spisy takich wnioskowań, już dokonanych, i krótkie formuły, służące do dalszych wniosków”⁴³⁹. Wnioskowanie oparte na zdaniach ogólnych, bazuje w rzeczywistości, według Milla, na prawdach szczegółowych; te prawdy szczegółowe są też podstawą do uznania prawdy ogólnej - stąd wnioskując z prawd ogólnych są według angielskiego filozofa wykonujemy niepotrzebnie „szeroką aprioryczną drogę”.

Mill jest przekonany, że również w matematyce prawdy ogólne nie są konieczne do przeprowadzania wnioskowań. Podaje jako przykład geometrię: „gdy wnioskujemy, że AB jest równe CD , ponieważ każde z nich jest równe EF , to najbardziej nieukształcony rozum, skoro tylko pojmie znaczenie zdań, zgodzi się na wniosek, chociaż nigdy nie słyszał o ogólnej prawdzie, iż ‘rzeczy, które są równe

⁴³⁷ Tamże, str. 288.

⁴³⁸ Mill szczególnie dokładnie analizuje tu słynny sylogizm: Wszyscy ludzie są śmiertelni, Sokrates jest człowiekiem, a więc Sokrates jest śmiertelny. Według niego wniosek jest tu w istocie zawarty w przesłankach, a we wnioskowaniu nie korzystamy w istocie ze zdania ogólnego.

⁴³⁹ Tamże, str. 299.

tej samej rzeczy, są równe między sobą”⁴⁴⁰. W tym przypadku wnioskujemy więc na podstawie własności poszczególnych obiektów – nie praw ogólnych. Idąc dalej, Mill podkreśla, że aksjomaty oraz definicje – jako prawdy ogólne, stosujące się do wszystkich obiektów danego typu – nie są konieczne w dowodzeniu prawd geometrii, oraz że „wszelki dowód u Euklidesa można by przeprowadzić bez nich”⁴⁴¹. Jeśli dowodzimy jakiejś własności danego obiektu, np. koła, dowodzimy jej tylko dla tego konkretnego koła; tym samym stosując w takim dowodzie aksjomaty i definicje, używamy ich jako zastosowane tylko do tego konkretnego koła, niekoniecznie zaś jako prawdy ogólne.

Podsumowując, geometria zajmuje według Milla takimi liniami, kątami i figurami, jakie istnieją rzeczywiście (tzn. w świecie fizycznym). Geometria nie jest nauką apriorioryczną; poznanie prawdziwości jej zdań odbywa się co prawda, według Milla, „w myśli”, tzn. bez odwołań do doświadczenia zmysłowego, jednak takiemu poznaniu odpowiada wizualny kontakt z diagramem. Mill sugeruje tutaj, iż o prawdziwości zdań geometrii przekonujemy się na podstawie danych wizualnych – zewnętrznych, bądź wizualizowanych wewnętrznie (co jest zgodne z założeniem, iż przedmiotem geometrii są fizyczne diagramy). Zdania geometrii nie są wreszcie zdaniami ogólnymi. Są zawsze zdaniami jednostkowe, dotyczące konkretnego diagramu. Dodajmy na koniec, iż zdania geometrii są, według Milla, zdaniami realnymi. Jako, że nie są zdaniami apriorycznymi, ich „realność” ma inny wydźwięk, niż kantowska syntetyczność geometrii. Zdania geometrii nie wymagają więc odwołań do czystej naoczności aby uzasadnić jej aprioryczność, ponieważ są one po prostu zdaniami empirycznymi. Geometria nie jest nauką ograniczającą się do rozważań nad znaczeniem pojęć (tzn. operującą zdaniami werbalnymi), ponieważ jej przedmiotem są fizyczne diagramy.

⁴⁴⁰ Tamże, str. 295.

⁴⁴¹ Tamże, str. 296.

5.4. Frege o syntetyczności geometrii i czystej naoczności przestrzeni

Gottlob Frege znany jest przede wszystkim z tego, iż położył podwaliny pod logikę predykatów. Arytmetykę uważał Frege za naukę analityczną i wyprowadzalną z logiki. Mimo bronionego konsekwentnie logiczystycznego i racjonalistycznego stanowiska, Frege utrzymuje, iż geometria jest nauką syntetyczną, a w poznaniu geometrycznym konieczna jest czysta naoczność przestrzeni. W tym podrozdziale dokonam pogłębionej analizy tego, jak Frege rozumiał syntetyczność geometrii oraz jaki wkład w poznanie geometryczne miała według niego intuicja przestrzenna.

Według Fregego samo wprowadzenie do filozofii podziału na zdania analityczne i syntetyczne było wielką zasługą Kanta, do myśli kantowskiej nawiązuje też wielokrotnie w kontekście tego podziału⁴⁴². Zacytujmy szerszy fragment, w którym Frege definiuje pojęcia analityczności i aprioryczności, pochodzący z jego dzieła *Grundlagen der Arithmetik*: Głównym zagadnieniem staje się znalezienie dowodu danego sądu, i prześledzenia go aż do prawd podstawowych. Jeżeli w trakcie tego procesu napotykamy jedynie ogólne prawa logiki oraz definicje, wtedy prawda jest analityczna (...). Jeżeli jednak nie jest możliwe podanie dowodu bez użycia prawd które nie są ogólnej logicznej natury, lecz należą do jakiejś nauki szczegółowej, wtedy sąd jest syntetyczny. Aby prawda była *a posteriori*, niemożliwym musi być skonstruowanie jej dowodu bez odwołania się do faktów, tzn. do prawd, które nie mogą być udowodnione i nie są ogólne, jako że zawierają stwierdzenia odnoszące się do konkretnych obiektów. Jeśli, z drugiej strony, dowód może być oparty wyłącznie na ogólnych prawach, które same w

⁴⁴² Według Fregego, „Wielką zasługą Kanta jest to, iż dokonał rozróżnienia między sędami syntetycznymi a analitycznymi (...) oraz że nazwał prawdy geometryczne syntetycznymi *a priori*” (Frege G., *Podstawy arytmetyki*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 199). Frege podkreśla nawet, że jego myśl nie odbiega zasadniczo od Kanta. Niemiecki logik uważał, że jego filozofia wprowadza jedynie poprawki i udoskonalenia w stosunku do filozofii kantowskiej.

sobie nie potrzebują dowodu ani w ogóle nie mogą być udowodnione, wtedy prawda jest *a priori*⁴⁴³”.

W pierwszej kolejności omówmy szerzej podział na zdania analityczne i syntetyczne. Analityczność zdania definiuje Frege przez odniesienie do metody jego uzasadnienia, a nie – jak u Kanta – do znaczenia zawartych w nim terminów. Zdanie analityczne to – najzwęższej rzecz ujmując – zdanie, które jest wyprowadzane z logiki. Frege nawiązuje tu do kantowskiej charakterystyki zdania analitycznego, jako wypływającego z zasady sprzeczności, choć terminy „logika” oraz „wyprowadzalny z logiki” oznaczały dla Fregego coś zupełnie innego niż dla Kanta. Fregeowska logika różni się bowiem od logiki Kanta zarówno pod względem formalnym, jak i pod względem jej statusu⁴⁴⁴. Z formalnego punktu widzenia Frege był, jak wiadomo, twórcą rachunku predykatów, który ma znacznie szersze możliwości wyrazu niż sylogistyka. Dwaj myśliciele różnili się dodatkowo w kwestii filozoficznej interpretacji statusu logiki. Jak pisze Sullivan, według Kanta logika była dodatkiem do właściwych nauk, czy środkiem pomocniczym (*adjunct or auxilliary*)⁴⁴⁵. Sąd logiczny natomiast „jest zaledwie formalnym ograniczeniem, z którym zgodność jest tylko koniecznym, ale nigdy samo w sobie wystarczającym warunkiem dla prawdy”. Dla Fregego z kolei, logika jest samodzielną, odrębną nauką, a „jej zasady nie są schematami, ale w pełni zinterpretowanymi, autentycznymi prawdami (*genuine truths*)”⁴⁴⁶. Odnosi się ona do obiektywnej sfery myśli; w celu opisu, i formalnego ujęcia owej obiektywnej sfery stworzył właśnie w znanej pracy *Begriffsschrift* („pismo pojęć”) Frege swój system logiczny. Podsumowując, Frege nawiązuje do kantowskiej charakterystyki zdania analitycznego jako wypływającego z zasady sprzeczności, choć

⁴⁴³ Frege, *Podstawy arytmetyki*, za: deJong, W., *Analytic/Synthetic distinction and the classical model of science*

⁴⁴⁴ Dyskusyjne jest, na ile Frege nawiązuje tu rzeczywiście do myśli Kanta. Przypomnijmy, że u Kanta zdania konieczne – a więc również wszystkie analityczne – miały być „wyprowadzalne” z zasady sprzeczności. Być może do tej idei nawiązywał Frege definiując zdania analityczne jako wyprowadzane z logiki. Wtedy „wyprowadzalność z zasady sprzeczności” byłaby synonimem dla „wyprowadzalności z logiki”. O roli zasady sprzeczności jednak Frege (o ile mi wiadomo) nie pisze, jej znaczenia jako inspiracji dla takiej a nie innej filozofii logiki można jedynie się domyślać.

⁴⁴⁵ Sullivan, *Frege's Logic*, w: *Handbook of the History of Logic*, str. 670.

⁴⁴⁶ Tamże, str. 680.

Zdanie syntetyczne jest więc zdaniem, które nie jest wyprowadzane z logiki. Ma to ogólnie mówiąc swoje źródło w tym, iż poznanie geometryczne wypływa z czystej intuicji (naoczności) przestrzeni. W *Podstawach arytmetyki* pisze Frege, iż Kant „nazywając prawdy geometryczne syntetycznymi i *a priori* odsłonił ich prawdziwą istotę”⁴⁴⁷. Frege pisze tam również, że „wszystko (...) co geometryczne musi być w swym pochodzeniu oparte na intuicji (*anschaulich*)”⁴⁴⁸. Także aksjomaty geometryczne mają swoje źródło w czystej intuicji. Niemiecki logik trzymał się tego poglądu konsekwentnie przez całe życie. Piętnaście lat po napisaniu powyżej zacytowanego zdania Frege, w liście do Hilberta wciąż podkreśla, że „intuicja przestrzeni” jest „pozalogeniczną podstawą” aksjomatów geometrycznych⁴⁴⁹. W tekście z 1921 roku pt.: *Źródła poznania matematycznego i zmatematyzowanych nauk przyrodniczych* Frege wyróżnia trzy możliwe źródła poznania:

- 1) Poznanie zmysłowe,
- 2) Logiczne źródło poznania,
- 3) Geometryczne źródło poznania⁴⁵⁰.

Poznanie geometryczne wyróżnia się tym, że wypływa z czystej intuicji – czy też czystej naoczności przestrzeni. Obiektywne poznanie analityczne jest poznaniem czysto rozumowym, poznaniem, które nie musi powoływać się na żadne elementy pozalogeniczne, czyli w szczególności naocznościowe. Z powyższych rozważań można wnioskować, iż jeśli w dowodzie zdania, poddanemu dokładnej analizie, jak pisze Frege – bez „skoków” omijających niektóre z kroków rozumowania, nie musimy się powoływać na intuicje, dane naoczne, czy czyste naoczności, jest ono analityczne. Zdania syntetyczne natomiast charakteryzują się tym, że ich dowód opiera się – i musi się opierać – na prawach pozalogenicznych: „pochodzą one bądź z doświadczenia zmysłowego, jak w wypadku twierdzeń nauk empirycznych, bądź z

⁴⁴⁷ Frege, G., *Podstawy arytmetyki*, str. 199.

⁴⁴⁸ Tamże, str. 181.

⁴⁴⁹ Por. Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 44.

⁴⁵⁰ Frege, F., *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Wissenschaften*, w: *Frege: Schriften zur Logik*, F.Meiner, Hamburg 1971, str. 227.

intuicji przestrzeni, jak w przypadku twierdzeń geometrii”⁴⁵¹. Uznając intuicję przestrzeni za źródło poznawcze konieczne dla poznania geometrycznego, Frege wyraźnie nawiązuje do Kanta używając tego samego terminu co on, tzn. *Anschauung*.

W jaki sposób korzystamy jednak w poznaniu geometrycznym z czystej intuicji? Czy nawiązują do niej poszczególne kroki dowodowe, a jeśli tak to które? Interpretacja myśli Fregego nie jest w tym miejscu łatwa. W pierwszej kolejności warto wskazać, jakiej roli intuicja przestrzenna na pewno *nie* gra na gruncie filozofii matematyki Fregego. Zwróćmy więc uwagę, iż istotnym aspektem filozofii logiki Fregego była nowa koncepcja zdania. Zrywa on z podmiotowo-orzecznikową koncepcją, proponując w zamian traktować zdanie jako funkcję zdaniową. Frege nie wyróżnia w sądzie podmiotu orzeczenia, co więcej, według Arkadiusza Guta, „oczyszczenie logiki z rozróżnienia podmiotu i predykatu jest – w opinii Fregego – bodaj najważniejszym elementem jego nowej logiki”⁴⁵². W sądzie orzekamy, czy dane przedmioty spełniają funkcję *n*-argumentową. W szczególności funkcją 1-argumentową jest pojęcie, rozumiane jako obiektywnie istniejące⁴⁵³. Prawdziwość takiego sądu uzależniona jest od tego, czy pod dane pojęcie „podpada” przedmiot (zbiór takich przedmiotów rozumiany jest wtedy jako ekstensja pojęcia). Nie ma tu oczywiście miejsca na dalsze szczegóły odnośnie fregowskiej logiki. Zauważmy tu jedynie, że na gruncie fregowskiej koncepcji logiki nie można stwierdzić, iż w geometrycznym sądzie syntetycznym dane pojęcie łączone jest z innym za pomocą odwołania do czystej naoczności, rozszerzając w ten sposób wiedzę. Dodatkowo, Frege w ogóle nie wiązał poznania syntetycznego z poznaniem rozszerzającym wiedzę. Również niektóre zdania analityczne – w szczególności zdania arytmetyki – rozszerzają, zdaniem Fregego, wiedzę⁴⁵⁴.

⁴⁵¹ Tuchańska, B., *Koncepcje wiedzy apriorycznej i analitycznej a status logiki i matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1995, str. 82.

⁴⁵² Gut, A., *Gottlob Frege i problemy filozofii współczesnej*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2005, str. 163.

⁴⁵³ Por. tamże, str. 113.

⁴⁵⁴ Według Fregego, „Kant w sposób oczywisty nie doceniał wartości sądów analitycznych” (Frege, G., *Podstawy arytmetyki*, str. 198). Wynikało to ze zbyt wąskiej definicji pojęcia królewieckiego filozofa. Frege sprzeciwia się więc ujmowaniu pojęć, jako określonych przez „przyporządkowane

O pełną charakterystykę fregowskiej interpretacji czystej naoczności (intuicji) przestrzeni jednak bardzo trudno. Jak pisze historyk filozofii T. Burge, „Frege nie daje dokładnego wyjaśnienia, jak intuicja pomaga ‘ugruntować’ naszą wiedzę”⁴⁵⁵. Z pewnością traktuje on ją jako władzę poznawczą posiadającą charakter pozapojęciowy i pozalogiczny. Jak dalej podkreśla Burge, można uznać, iż „Frege, podobnie jak Kant, wiąże źródło (*capacity for*) czystej naoczności (przynajmniej u ludzi) ze zmysłowością – zdolnością posiadania doświadczeń zmysłowych”⁴⁵⁶. Frege nie wyjaśnia jednak bliżej (jak starał się to zrobić Kant), jaką rolę intuicja pełni w rozumowaniach w geometrii i poznaniu geometrycznym w ogóle. W szczególności, jak podkreśla T. Burge, „Frege nie daje (...) dokładnego wyjaśnienia tego, jak jego przekonanie o aprioryczności geometrii jest kompatybilne z jej ich zależnością od czystej intuicji – władzy poznawczej wytwarzającej reprezentacje jednostkowe”⁴⁵⁷.

Wiele uwag Fregego wskazuje, iż intuicja jest w pierwszym rzędzie konieczna do sformułowania aksjomatów geometrii. To o nich pisze najczęściej, jako prawdach geometrii, które wywodzą się z czystej intuicji. Być może więc Frege zgodziłby się, iż aksjomaty wywodzą się z intuicji przestrzeni, a pozostałe prawdy geometrii, wyprowadzane z tych aksjomatów, uzyskiwane są już za pomocą metod dedukcyjnych. Czysta intuicja motywowałaby wtedy wybór tych, a nie innych aksjomatów, jednocześnie stanowiąc pewne ich uprawomocnienie. Tak

cechy charakterystyczne (*beigeordnete Merkmale*)”, jest to według niego jeden z najmniej owocnych sposobów definiowania pojęć (tamże, str. 198). Owocna definicja pojęcia nie charakteryzuje go przez określenie zespołu cech, które mają odpowiadać jego desygnatom. Taka definicja pozwoliłaby łatwo stwierdzić, czy zbiór cech odpowiadających jednemu pojęciu zawiera się w zbiorze odpowiadającym innemu i czyniłaby przez to zdania analityczne mało wartościowymi poznawczo; zdania analityczne tymczasem, jako zdania obiektywnie prawdziwe, taką wartość poznawczą posiadają. Tak pisze o tym Frege: „Bardziej owocne definicje pojęć wytyczają granice, które dotąd nie były jeszcze dane. Nie widać z góry, co da się z nich wywnioskować; nie wyciąga się przy tym ze skrzyni czegoś, co już wcześniej tam się włożyło. Wnioski takie poszerzają naszą wiedzę i powinno się je, za Kantem, uważać za syntetyczne. Mogą one być jednakże udowodnione w sposób czysto logiczny, są więc analityczne. W rzeczywistości są one zawarte w definicjach, ale tak, jak rośliny w nasionach, a nie jak belki w budynku”(tamże, str. 199). W przypadku zdań, które zdefiniowane są w sposób – a w taki sposób zdefiniowanych jest, jak wydaje się sądzić Frege, wiele pojęć arytmetyki, wniosek jest zawarty w definicji w drugim sensie („jak rośliny w nasionach”). Wtedy, jak się wydaje, zawarty jest w niej w sposób nieoczywisty, nie „dany” od razu, bądź wyprowadzany w oczywisty, automatyczny sposób.

⁴⁵⁵ Burge, T., *Frege on apriority*, str. 32.

⁴⁵⁶ Tamże, str. 31.

⁴⁵⁷ Tamże, str. 32.

Frege interpretuje również Burge, pisząc, iż niemiecki filozof „wydawał się przyznawać czystej intuicji rolę (at least) w uprawomocnianiu aksjomatów geometrii”⁴⁵⁸.

Warto tu wspomnieć o jeszcze jednej kontrowersji, która wiąże się z powyższą problematyką, a mianowicie z pytaniem o obiektywność geometrii. Pojęcie obiektywności odgrywało centralną w filozofii Fregego. Jak wspominałem, logika (a wraz z nią arytmetyka) odnosi się do obiektywnej sfery myśli. Frege w wielu miejscach wyraźnie oddziela subiektywne przedstawienia od obiektywnych pojęć. Przedstawienie „należy do treści (...) świadomości” osoby je posiadającej, jest ono również „zindywidualizowane do jednego nosiciela”⁴⁵⁹. Pojęcia istnieją, z drugiej strony, niezależnie od naszego poznania, są odkrywane i nie są ufundowane w naoczności⁴⁶⁰.

Termin „intuicja” należy przy tym wiązać w przypadku poglądów Fregego na pewno z tym, co subiektywne oraz przestrzenne. Frege często podkreśla bowiem, że wiedza obiektywna, obiektywność w ogóle jest ideą funkcjonującą poza przestrzennością, oraz że nauka obiektywna nie może opierać się na przestrzenności. Tak pisze o tym Frege: „obiektywność rozumiem jako oznaczającą to, co jest niezależne od wrażeń zmysłowych, intuicji i wyobraźni oraz od wszelkiej konstrukcji obrazów mentalnych z pamięci oraz wcześniejszych wrażeń zmysłowych”⁴⁶¹. Podobnie relację między tym, co postrzegane za pomocą intuicji a tym, co obiektywne widzi Teri Merrick we wspomnianym tu już artykule *What Frege Meant When He Said: Kant is Right about Geometry*. Przypomina tam, iż według Fregego intuicje są subiektywne, a właśnie subiektywne idee są z reguły znacząco odmienne u poszczególnych ludzi – w przeciwieństwie do idei obiektywnych, które są takie same dla wszystkich⁴⁶². Pojawia się tu znów problem, który nie znajduje w pismach Fregego jednoznacznego rozwiązania.

Kończąc uwagi o filozofii geometrii Fregego, poddam analizie dłuższy fragment z *Grundlagen*, w którym Frege tłumaczy, w jaki sposób jednostkowy

⁴⁵⁸ Tamże, str. 39.

⁴⁵⁹ Gut, A., *Gottlob Frege...*, str. 103.

⁴⁶⁰ Por, tamże, str. 104-105.

⁴⁶¹ Frege, G., za: Merrick, T., *What Frege Meant...*, str. 45.

⁴⁶² Por. tamże, str. 45.

rysunek może w geometrii stanowić uzasadnienie sądu ogólnego. Pisze on co następuje: „przedstawiane za pomocą intuicji punkty, proste, powierzchnie nie są w rzeczywistości w ogóle jednostkowe, stąd mogą być traktowane jako reprezentujące całość gatunku⁴⁶³”. Nietrudno dostrzec, iż w tym fragmencie Frege umniejsza jednostkowy charakter obiektów geometrycznych, próbując w efekcie przekonać czytelnika, że „przedmioty (obiekty) czystej intuicji w wyobraźni geometrycznej nie są w sposób autentyczny jednostkowe (*genuinly particular*)”⁴⁶⁴. Autor *Grundlagen der Arithmetik* wydaje się więc twierdzić, iż przedstawienia poszczególnych prostych, czy kwadratów są nieodróżnialne i mogą w ten sposób być traktowane jako reprezentujące szerszą klasę obiektów. Zwróćmy uwagę, iż jest to nieco inne rozwiązanie problemu jednostkowości rysunku niż wszystkie z analizowanych dotychczas. Frege nie twierdzi, jak Leibniz, iż wizualne własności diagramu są zupełnie nieistotne dla rozumowania. Różni się również od Kanta, który podkreślał jednostkowość diagramów, podkreślając jednocześnie aprioryczność aktu konstrukcji⁴⁶⁵. Frege odmawia w ogóle reprezentacjom przestrzennym natury jednostkowej. Takie podejście usuwa problemy filozoficzne związane z jednostkowością diagramów (związanych m.in. z empirycznością rozumowań opartych na diagramach). Z drugiej strony pozostają problemy metodologiczne – czy i w jaki sposób uprawnieni jesteśmy wnioskować na podstawie wizualnych własności diagramów oraz, skąd wiadomo jaką dokładnie klasę obiektów reprezentuje dany element na rysunku? Tymi kwestiami Frege się już bliżej nie zajmuje.

Podsumowując, według Fregego geometria opiera się na specyficznym, geometrycznym, źródle poznania, które nazywa za Kantem czystą naocznością (intuicją) przestrzeni, z tego źródła wypływa nadto nasza znajomość aksjomatów. Zdania geometrii są syntetyczne, co dla Fregego oznacza, iż dla ich uzasadnienia nie wystarczą same prawa logiki, zatem konieczne jest więc odwołanie do mającej charakter pozapojęciowy i pozalogiczny intuicji przestrzennej. Trudno jednak

⁴⁶³ Frege, *Podstawy arytmetyki*, za: Burge, str. 31.

⁴⁶⁴ Burge, str. 32.

⁴⁶⁵ Według cytowanego tu często Burgego, Frege w tym momencie zasadniczo oddala się od filozofii geometrii Kanta (zob. Berge, str. 34).

dokładnie określić, jaką odgrywa ona rolę w rozumowaniach geometrycznych. Problem jednostkowości diagramów rozwiązuje z kolei Frege postulując ogólny (a nie jednostkowy) charakter przedstawionych na rysunku obiektów geometrycznych.

5.5. Wizualizacje w kontekście filozofii geometrii Henri Poincarégo

Kolejnym, ostatnim myślicielem, którego poglądami się tu zajmę jest Henri Poincaré. Omówię tu przede wszystkim pracę *Nauka i hipoteza*, w której francuski filozof formułuje cenne uwagi odnośnie roli intuicji w poznaniu matematycznym. Warto jednak również przyjrzeć się filozofii geometrii Poincarégo. Łączy on w niej bowiem umiejętnie elementy empiryzmu i aprioryzmu, nawiązując zarówno do myśli Kanta jak i Felixa Kleina. Poincaré rozważa więc rolę tego, co wrodzone w poznaniu geometrycznym oraz tego, co ma źródło w percepcji zmysłowej. Filozofia geometrii Poincarégo stanowi również tło dla uwag o roli intuicji w poznaniu matematycznym, od niej zacznę więc moją analizę. W ostatniej części rozdziału zestawię filozofię Poincarégo, a w szczególności jego stanowisko odnośnie natury intuicji w matematyce, ze stanowiskiem Kanta.

Poincaré krytykował zarówno empiryzm jak i aprioryzm w „czystej” postaci. Tezę o aprioryczności geometrii należy, według niego, odrzucić, ponieważ „gdyby którykolwiek z systemów geometrycznych był prawdziwy *a priori*, nie można byłoby sobie wyobrazić (*conceive*) przeciwstawnego mu, w równym stopniu racjonalnego systemu”⁴⁶⁶. Krytykując empiryzm w filozofii geometrii, Poincaré wymienia zazwyczaj dwa argumenty. Po pierwsze, geometria nie jest nauką empiryczną, ponieważ jej zdania nie podlegają falsyfikacji przez doświadczenie fizyczne. Według Poincarégo „gdyby geometria była nauką eksperymentalną, nie byłaby nauką ścisłą, ulegałaby nieustannym zmianom. Co mówią? Dowiedzono by natychmiast, że jest błędna, ponieważ wiemy, że nie istnieją ciała stałe ściśle

⁴⁶⁶ Za: Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 329.

niezmiennie”⁴⁶⁷. Po drugie geometria nie jest dla francuskiego filozofa nauką empiryczną, ponieważ jest ścisła i dokładna. Gdyby była eksperymentalna, byłaby „nauką przybliżoną i prowizoryczną”⁴⁶⁸. Poincaré broni więc konsekwentnie stanowiska konwencjonalizmu w filozofii geometrii. Konwencjonalizm Poincarégo jest, jak sądzę, stanowiskiem wieloaspektowym, jego główną tezę można jednak oddać w następujący sposób: żaden spośród nieskończenie wielu systemów geometrycznych nie posiada wyróżnionej pozycji jako teoria matematyczna. Każdy z systemów geometrycznych ma prawo bytu w matematyce – o ile jest teorią niesprzeczną⁴⁶⁹. Wybór pewnej konkretnej geometrii jest wyborem odpowiadającej aksjomatyki. Tu ujawnia się kolejny aspekt konwencjonalizmu Poincarégo; aksjomaty są bowiem „konwencjami, ukrytymi definicjami, definicjami *implicite* pojęć pierwotnych”⁴⁷⁰. Wyboru tego dokonujemy kierując się prostotą aksjomatów oraz doświadczeniem fizycznym, faktami eksperymentalnymi. Poszczególne „geometrie”, czy „systemy geometryczne” rozumie Poincaré zgodnie z teoriogrupowym podejściem do geometrii Kleina. Francuski filozof traktuje więc, jak zauważa Andrzej Lubomirski, „każdą geometrię jako teorię niezmienników określonej grupy przekształceń”⁴⁷¹. Konwencjonalistyczne stanowisko Poincarégo zawiera więc elementy zarówno empiryzmu, jak i aprioryzmu. W szczególności należy tu wymienić koncepcję genezy pojęcia grupy, jako źródła matematycznej przestrzeni oraz genezy i natury subiektywnej przestrzeni.

Pojęcie grupy ma źródła po części empiryczne i po części aprioryczne. Ma ono źródło zmysłowe w tym sensie, że wrażenia zmysłowe są konieczne dla możliwości zaistnienia i rozwoju poszczególnych grup i tym samym, typów geometrii. Dokładniej, warunkiem niezbędnym dla konstrukcji grup przekształceń jest możliwość ruchu ludzkiego ciała oraz w ogóle samo istnienie ciał⁴⁷². Z drugiej

⁴⁶⁷ Poincaré, H., *Nauka i hipoteza*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, str. 247. Pisząc o ciałach stałych ściśle niezmiennych, nawiązuje Poincaré do filozofii geometrii Helmholtza. Według niego, opierając się na fakcie, iż nie istnieją ciała stałe ściśle niezmiennie, można wykazać, iż geometria nie może być nauką empiryczną.

⁴⁶⁸ Tamże, str. 247.

⁴⁶⁹ Por. Lubomirski, A., *Henri Poincarégo...*, str. 52-53.

⁴⁷⁰ Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 202.

⁴⁷¹ Lubomirski, A., *Henri Poincarégo...*, str. 58.

⁴⁷² Por. Lubomirski, A., *Henri Poincarégo...*, str. 69.

jednak strony, Poincaré sugeruje niedwuznacznie w wielu pracach, iż pojęcie grupy ma w jakimś stopniu charakter wrodzony. Lubomirski uważa, że można na ich podstawie stwierdzić, iż według Poincarégo „w umyśle ludzkim preegzystuje potencjalnie (...) ogólne pojęcie grupy, ogólna kategoria przestrzeni geometrycznych. Natomiast fakt, że przemieszczenia tworzą pewną konkretną grupę jest odkrywany w doświadczeniu; przy czym odkrycie to nie jest bierną rejestracją danych doświadczenia, lecz wymaga (...) aktywności umysłu”⁴⁷³. Pojęcie grupy nie jest więc pojęciem empirycznym, przynajmniej nie w tym sensie, że jest jakoś abstrahowane z doświadczenia. Aby „uaktywnić” predyspozycję do jego zastosowań musi – podobnie, jak u Kanta – zaistnieć doświadczenie zmysłowe, a dokładniej percepcja wzrokowa.

O dwoistej - częściowo apriorycznej i częściowo empirycznej – genezie pojęcia grupy, jak również pojęcia przestrzeni, pisze Poincaré w pracy *On the Foundations of Geometry*. Wyróżnienie tych dwóch zagadnień związane jest z poczynionym w tej pracy rozróżnieniem pomiędzy przestrzenią geometryczną – którą, jak wspominałem, utożsamiał Poincaré z grupą przekształceń – i przestrzenią wyobraźniową (*sensible space*)⁴⁷⁴. Ogólny zarys koncepcji przestrzeni ujawnia się już w pierwszych zdaniach tej pracy. Poincaré podkreśla, że „wrażenia zmysłowe same w sobie nie mają charakteru przestrzennego” i „nie mogą dać nam pojęcia przestrzeni”⁴⁷⁵. Dalej pisze, że „kategoria przestrzeni geometrycznej jest aprioryczną, podmiotową strukturą, preegzystującą potencjalnie w ludzkim umyśle”⁴⁷⁶. Kategoria przestrzeni nie ma więc swojego źródła w zmysłowości, ale również wrażenia zmysłowe nie posiadają w sposób konieczny charakteru przestrzennego, jak chciał Kant. Z drugiej strony pojęcie przestrzeni ma jednak swoje źródło, w zgodzie z filozofią Kanta, we wrodzonym uposażeniu umysłów ludzkich.

⁴⁷³ Tamże, str. 78.

⁴⁷⁴ Cytowana praca została przez Poincarégo napisana w języku angielskim, termin „sensible space” pochodzi więc z oryginalnego tekstu.

⁴⁷⁵ Poincaré, H., *On the Foundations of Geometry*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B. . Clarendon Press, Oxford 1996, Poincaré, str. 982-983.

⁴⁷⁶ Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 202.

Jak wspominałem, Poincaré pisze o dwóch typach przestrzeni – przestrzeni geometrycznej oraz wyobrażeniowej. Wyjaśnijmy więc bliżej, czym jest druga z nich. Kształt wrażeń zmysłowych, oraz sama możliwość ich zaistnienia, nie zakładają, jak wspominałem, pojęcia przestrzeni. Jest ono jednak konieczne, jak podkreśla Poincaré, w celu porównywania, zestawiania i klasyfikacji wrażeń zmysłowych, czy też porządkowania ze względu na pewne ich własności. Aby tego porównania dokonać, musimy odnieść nasze wrażenia zmysłowe do kategorii, którą jest właśnie przestrzenią wyobrażeniową⁴⁷⁷. W tym też sensie przestrzeń wyobrażeniowa jest „formą (*rubric*) albo kategorią preegzystującą w naszych umysłach”⁴⁷⁸. Przestrzeń wyobrażeniowa jest więc „dla nas konieczna jedynie dla celu porównywania wrażeń zmysłowych, dla rozumowania o wrażeniach zmysłowych”⁴⁷⁹. Są to jednak porównania i rozumowania bardzo proste – kategoria przestrzeni wyobrażeniowej pozwala stwierdzić, czy pewna wielkość obecna we wrażeniu zmysłowym jest większa od innej – ale nie, że jest 2 lub 3 razy większą wartością. Nie zakłada więc użycia pojęcia liczby.

Przestrzeń wyobrażeniowa to oczywiście nie to samo, co przestrzeń geometryczna – w istocie, ta pierwsza „nie ma nic wspólnego z przestrzenią geometryczną”⁴⁸⁰. Przestrzeń geometryczna to obiekt matematyczny, czyli – zgodnie z ujęciem Poincarégo – określona grupa przekształceń⁴⁸¹. Matematyczne własności poszczególnych przestrzeni geometrycznych są pierwszym wskaźnikiem ich odmienności od przestrzeni wyobrażeniowej. Ta ostatnia bowiem nie jest przecież ani nieskończona, ani jednolita czy izotropiczna (*homogenous and isotropic*). Dalej, „nie możemy przedstawić sobie przedmiotów w przestrzeni geometrycznej, ale jedynie rozumować o nich, tak jakby istniały w tej przestrzeni”⁴⁸²; „przestrzeń geometryczna (...) nie jest formą naszej zmysłowości.

⁴⁷⁷ Przestrzeń wyobrażeniowa gra swoją rolę w porównywaniu wrażeń zmysłowych jedynie przy aktywnym udziale umysłu, oraz aktywnej percepcji dokonuje się to przy tym w sposób konieczny przy udziale aktywnego udziału umysłu, przy udziale aktywnej percepcji wzrokowej (mówiąc najprościej – aby porównać dwie wielkości musimy dokonać ruchu gałki ocznej).

⁴⁷⁸ Poincaré, H., *On the Foundations...*, str. 983.

⁴⁷⁹ Tamże, str. 984.

⁴⁸⁰ Tamże, str. 985.

⁴⁸¹ Podział przestrzeni wyobrażeniowa – przestrzeń geometryczna obecny u Poincarégo pokrywa się zasadniczo z podziałem Laugwitz, o którym pisałem na początku rozdziału.

⁴⁸² Tamże, str. 985.

Może nam służyć jedynie w naszych rozumowaniach. Jest ona formą naszego rozumienia”⁴⁸³.

Można zadać pytanie, jaki jest związek pomiędzy dwoma przestrzeniami? W szczególności, czy poznanie geometryczne jest jakoś zakorzenione w przestrzeni wyobrażeniowej jako idealizacja wrażeń zmysłowych? Wydaje się, że Poincaré nie zgodziłby się z takim poglądem. Można co prawda szukać źródeł pojęcia grupy – jako źródła geometrii – w empirii, a dokładniej w prostych wrażeniach zmysłowych związanych z ruchem, przemieszczaniem się obiektów fizycznych. Jeśli przemieszczenia te rozumieć jako „obiekty”, a ich składanie jako „działania”, można postawić hipotezę, iż są wrażenia zmysłowe z nimi związane stanowią empiryczne źródło pojęć związanych z grupami⁴⁸⁴. Jednak doświadczenie fizyczne – o czym była już mowa wcześniej – nie może dać nam stopnia ścisłości i precyzji, jaka przysługuje obiektom matematycznym. Poincaré pisze tu o materii grupy jako o zakorzenionej w świecie fizycznym treści pojęć występujących w grupie oraz ich formie – jako ich matematycznej strukturze. Francuski filozof podkreśla, że „istnieje uderzający kontrast pomiędzy topornością (*grossness*) tej materii oraz subtelną dokładnością formy naszej grupy”. Źródło tej subtelności nie może leżeć w doświadczeniu – pojęcie grupy ma więc charakter wrodzony⁴⁸⁵.

Można więc postawić następujące pytanie: co dokładnie należy, według Poincarégo, uznać za wrodzone? Niektóre wypowiedzi wskazują, że wrodzonym jest ogólne pojęcie grupy. W pracy *On the Foundations...*, pisze Poincaré, że „pojęcie ciągłej grupy istnieje w naszych umysłach w sposób poprzedzający wszelkie doświadczenie (*prior to all experience*)”⁴⁸⁶. Lubomirski uważa, że pojęcie grupy w ogóle ma, według francuskiego filozofa, wrodzony charakter, bo jego zdaniem „sama kategoria przestrzeni geometrycznych jest (...) aprioryczną

⁴⁸³ Tamże, str. 985.

⁴⁸⁴ Torretti uważa, że „cała konstrukcja Poincarégo jest oparta na teorii percepcji, która nie jest do utrzymania” (por. Torretti, R., *Philosophy of Geometry...*, str. 340).

⁴⁸⁵ Można tu jeszcze dodać, że teza konwencjonalizmu stosuje się jedynie do pojęcia przestrzeni geometrycznej – nie do pojęcia przestrzeni wyobrażeniowej. wybór określonej przestrzeni geometrycznej jako modelu dla świata fizycznego, jest kwestią konwencji, przestrzeń wyobrażeniowa jest jednolitą strukturą poznawczą, na której kształt nie mamy wpływu.

⁴⁸⁶ Poincaré, H., *On the Foundations...*, str. 1010.

podmiotową strukturą preegzystującą potencjalnie w umyśle ludzkim⁴⁸⁷. Ważna jest tu również inna uwaga Lubomirskiego – sugeruj on mianowicie, iż z całokształtu koncepcji Poincarégo wynika, że „w umyśle ludzkim preegzystują nie takie czy inne pojęcia matematyczne (takie jak przestrzeń, grupa, continuum czy liczba), lecz jedynie *zdolność umysłu do skonstruowania tych pojęć*, pewna *potencjalna aktywność*, dzięki której możliwa jest w ogóle organizacja danych doświadczenia⁴⁸⁸. W tym duchu pisze też Poincaré, że „pojęcie to [tzn. grupy] jest rozwinięte (*built up*) przez umysł ze składników, które w nim preegzystują⁴⁸⁹. W umyśle nie są obecne więc „gotowe” pojęcia matematyczne, ale jedynie składniki i predyspozycje potrzebne dla ich sformułowania.

Omówmy dalej najbardziej mnie tu interesujące uwagi Poincarégo o roli intuicji w matematyce, które zamieścił w pracy *Nauka i hipoteza*. Problematyka ta dotyczy ona właściwie nie tyle samej filozofii geometrii, co poznania matematycznego w ogóle. Jest jednak związana z rolą geometrycznej, przestrzennej intuicji w poznaniu matematycznym, przez co jest ściśle związana z tematyką tego rozdziału i mojej pracy w ogólności.

W pracy *Nauka i hipoteza* Poincaré pisze o dwóch „zupełnie różnych typach umysłu” – tych, które opierają się na intuicji i kierują nią w swoich poczynaniach, oraz tych, które skupiają się na logice. Matematyków obdarzonych umysłem pierwszego typu nazywa Poincaré analitykami, a tych drugich geometrami, lub intuicjonistami. Czym różnią się te dwa typy umysłowości? Po pierwsze tym, co jest dla nich w matematyce oczywiste (*evident*). Logik uzna twierdzenie za oczywiste, tzn. będzie przekonany o jego prawdziwości, dopiero, gdy przeprowadzi rozumowanie „krok po kroku”, w sposób nie budzący żadnej wątpliwości. „Intuicjonista” natomiast kieruje się intuicyjnym przekonaniem płynącym z myśli, obrazami, jest skłonny przyjąć przekonanie matematyczne bazując jedynie na takich obrazach. Matematycy tego typu, jak Klein, są skłonni uznać, iż dane intuicji

⁴⁸⁷ Lubomirski, A., *Henri Poincarégo...*, str. 59.

⁴⁸⁸ Tamże, str. 79.

⁴⁸⁹ Poincaré, H., *On the Foundations...*, str. 982.

dają – jeśli nie dowód – to przynajmniej „moralną pewność”⁴⁹⁰. Inną różnicą jest to, do jakich zagadnień poszczególni matematycy sprowadzają różne problemy matematyczne. I tak, zdaniem Poincarégo, Weierstrass „sprowadza wszystko do rozważań nad szeregami i ich analitycznymi przekształceniami (*analytic transformations*)”, a Riemann zawsze „w pierwszym rzędzie przywołuje na pomoc geometrię; każda z jego idei jest obrazem (*image*) którego zapomnieć nie może nikt, kto uchwycił jego znaczenie”⁴⁹¹. Co ciekawe, Poincaré sądzi, iż matematycy są najczęściej umysłowościami tylko jednego z tych typów – co więcej, charakterystyka ta ma podłoże i charakter wrodzony.

Poincaré podkreśla, że wspomniane „oba typy umysłu są w równym stopniu konieczne dla postępu nauki”⁴⁹². Francuski filozof jest jednak oczywiście świadom słabości myślenia intuicyjnego. Zauważa zwodniczość intuicji w analizie matematycznej, która ujawnia się np. w przypadku funkcji ciągłych różniczkowalnych (o których mowa będzie w kolejnym rozdziale). Intuicja więc „nie może dać nam ścisłości, ani nawet pewności”⁴⁹³. Przedmioty matematyki, takie jakie przedstawia je sobie intuicja są niedookreślone i w pewnym stopniu rozmyte. W konsekwencji nie można na nich oprzeć ścisłych rozumowań. Aby to uczynić, konieczne są ścisłe definicje sformułowane na gruncie logiki. Dopiero na takich ścisłych pojęciach możemy bazować w naszym rozumowaniu.

Wszystkie przytoczone okoliczności powodują, iż logika, oraz myślenie analityczne w ogóle są konieczne dla rozwoju matematyki; co więcej, w czasach Poincarégo pełniły one dominującą rolę. Mimo to, również intuicja jest konieczna dla rozwoju matematyki. Jest tak, ponieważ „czysta logika może dać nam wyłącznie tautologie; nie może wytworzyć nic nowego; z jej samej nie może wyrosnąć żadna nauka”⁴⁹⁴. Matematyka – aby być nauką, która rozszerza wiedzę – musi wyrastać z czegoś innego, niż jedynie logika. Tym czymś jest intuicja, o czym przekonany był Poincaré.

⁴⁹⁰ Poincaré, *Science and Hypotheses*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B. . Clarendon Press, Oxford 1996, str. 1013.

⁴⁹¹ Tamże, str. 1013.

⁴⁹² Tamże, str. 1013.

⁴⁹³ Tamże, str. 1014.

⁴⁹⁴ Tamże, str. 1015.

Czym jednak dokładnie jest owa intuicja i jaką rolę gra w poznaniu matematycznym? Intuicja przestrzenna nie jest jej jedyną odmianą; w istocie, według Poincarégo, można wydzielić trzy główne typy intuicji:

- 1) intuicja odwołująca się do świadectwa zmysłów oraz wyobraźni,
- 2) uogólnienie indukcyjne na wzór nauk przyrodniczych,
- 3) intuicja czystej liczby⁴⁹⁵

Pod pierwszy typ intuicji jest głównym przedmiotem moich rozważań intuicja przestrzenna. Z intuicji liczby wypływa możliwość stosowania zasady indukcji w matematyce; stąd też jak pisze Poincaré, jest ona jedynym typem intuicji, która może dać ścisłą i pewną wiedzę matematyczną, nie opierając się ona przy tym na świadectwie zmysłów. Tego typu intuicji nie będę tu dalej analizował⁴⁹⁶.

Poincaré pisze o kilku istotnych funkcjach, jakie pełni intuicja (każdy z jej typów) w poznaniu matematycznym. Po pierwsze, jest narzędziem odkrycia oraz inwencji twórczej w matematyce. Po drugie, podczas gdy logika daje nam szereg metod dowodowych i technik, za pomocą których możemy osiągać wiedzę ścisłą i wiarygodną, nie wystarcza ona do wyjaśnienia, kiedy zastosować którą z owych metod; jednakże właśnie tą wiedzę, czy „wycucie”, posiadamy dzięki intuicji⁴⁹⁷. Po trzecie, co Poincaré w omawianej tu pracy wielokrotnie podkreśla, intuicja umożliwia nam widzenie wewnętrznej jedności, całości w matematyce. Logika podążając „krok po kroku” może dać jedynie fragmentaryczny obraz pojęć matematycznych, jak również samych rozumowań. Posługując się natomiast jedynie logiką postępujemy jak zoolog, który bada słonia jedynie za pomocą mikroskopu, ale nie widział go nigdy w całości. Nierozsądnym byłoby sądzić, iż matematyk podąża w ten sposób, bez jakiegokolwiek wizji tego, co chce osiągnąć na końcu drogi. W słowach Poincarégo „potrzebujemy władzy poznawczej, która pozwoli nam dojrzeć cel (*end*) z oddali, a władzą tą jest intuicja”⁴⁹⁸. Całościowe myślenie w matematyce jest też potrzebne aby rozszerzać naszą wiedzę o

⁴⁹⁵ Por., tamże,, str. 1016.

⁴⁹⁶ Warto dodać, zasada indukcji matematycznej jako wypływająca z intuicji, a nie z logiki jest dla Poincarégo zdaniem syntetycznym *a priori*.

⁴⁹⁷ Por. Tamże, str. 1017.

⁴⁹⁸ Tamże, str. 1018.

matematyce. Aby być twórcą, matematyk musi „posiadać bezpośrednie wyczucie (*direct sense*) tego, co stanowi o jedności rozumowania, tego, co jest, nazwijmy to, jego duszą i wewnętrznym życiem”⁴⁹⁹. Poincaré podkreśla wreszcie ogromną rolę intuicji w nauczaniu matematyki, jak również w jej zastosowaniach⁵⁰⁰. Podkreśla, że bez intuicji wielu młodych matematyków nie byłoby w ogóle w stanie zrozumieć, dlaczego i w jaki sposób dany formalizm dobrze opisuje jakąś klasę zjawisk fizycznych – inaczej mówiąc, bez intuicji prawie niemożliwe byłoby stosowanie matematyki do świata fizycznego.

Przyjrzyjmy się wreszcie, jak filozofia Henri Poincarégo – a w szczególności jego poglądy w kwestii roli intuicji w poznaniu matematycznym – mają się do stanowiska Kanta. Francuski matematyk, podobnie jak Kant, poszukiwał drogi pośredniej pomiędzy empiryzmem i aprioryzmem, jednak na nieco inny sposób. Główna różnica związana jest z rozumieniem pojęcia przestrzeni. Francuski matematyk odrzuca kantowski pogląd, iż przestrzenność jest formą każdego wrażenia zmysłowego oraz że jest źródłem wartości logicznej zdań matematyki, czy ich aprioryczności. Można jednak, według Poincarégo, mówić o dwóch innych typach wrodzonej przestrzeni: przestrzeni geometrycznej i wyobrażeniowej. Przez wrodzoność przestrzeni geometrycznej rozumie się tu wrodzoność predyspozycji do konstrukcji pojęcia grupy przekształceń. Za osądem Romana Murawskiego można dodać, że „Poincaré traktował te uwarunkowania bardziej operacjonistycznie, jako *a priori* dany zbiór możliwych operacji konstruktywistycznych, a nie jako określone, do dwóch ograniczone, formy zmysłowości, czy jako zdeterminowane kategorie czystego rozumu (jak to było u Kanta)”⁵⁰¹. Przestrzeń wyobrażeniowa jest z kolei konieczna aby zestawiać i porównywać ze sobą wrażenia zmysłowe – ale tylko pod względem jakościowym, a nie ilościowym (numerycznym). Jest ona więc pewnym warunkiem wstępnym i ogólnym kontekstem, w którym zestawiane są dane zmysłowe z pojęciami geometrycznymi, z pewnością nie gra natomiast istotnej roli w procesie uzasadniania twierdzeń geometrycznych.

⁴⁹⁹ Tamże, str. 1019.

⁵⁰⁰ Tamże, str. 1017.

⁵⁰¹ Murawski, R., *Filozofia matematyki...*, str. 203.

Zwróćmy przy tym uwagę, że w ogólnych zarysach ujęcie Poincarégo jest podobne do kantowskiego: według obu filozofów można wyróżnić dwa źródła geometrii – zewnętrzne, empiryczne oraz związane ze strukturą ludzkiego umysłu i w tym sensie aprioryczne..

Dodajmy, że jeśli chodzi o aprioryczność, Poincaré oddala się od Kanta, odrzucając aprioryczność rozumianą jako konieczność zdań geometrii. Z drugiej strony, pozostaje w duchu filozofii kantowskiej odmawiając doświadczeniu możliwości wpłynięcia na prawdziwość zdań matematyki, na proces wnioskowania.

Zatrzymajmy się wreszcie na roli intuicji w poznaniu matematycznym u Kanta oraz Poincarégo. Według Kanta czysta intuicja (naoczność) jest matematyczną formą wszelkich postrzeżeń zmysłowych, intuicje empiryczne natomiast są tożsame z danymi zmysłowymi. Poincaré rozumie intuicję inaczej – żaden z powyższych aspektów poznania nie ma zasadniczego wpływu na proces poznawczy w matematyce. Istnieją jednak pewne ogólne podobieństwa pomiędzy ujęciami intuicji obu filozofów.

Zacznijmy od zauważenia, że dla każdego z nich (jak i w istocie, dla wielu innych filozofów) intuicja, jako źródło poznania matematycznego, jest przeciwstawiona logice. Poincaré niejako zakłada, że sama logika, jej metody i pojęcia nie wystarczają dla uprawiania matematyki. Proces poznania matematycznego nie polega również jedynie na analizie definicji pojęć, ani na wnioskowaniu dedukcyjnym. Poincaré jest również przekonany, że tautologie logiczne nie rozszerzają naszej wiedzy.

Matematyka musi więc, według Poincarégo, poza logikę wykraczać. Jest to możliwe właśnie dzięki intuicji, a dokładniej jej różnym typom. Można więc mówić o intuicji liczby (związanej m.in. z indukcją matematyczną) i intuicji odwołującej się do świadectwa zmysłów, wyobraźni. Ta ostatnia pełni funkcję pomocniczą w przypadku wielu typów poznania matematycznego, istnieje typ umysłowości matematyka – geometry, czy intuicjonisty – który przy jej właśnie pomocy przeprowadza najchętniej wszelkie rozumowania matematyczne. Istnieją w szczególności trzy aspekty poznania matematycznego, które nie mają swego źródła

w logice: odkrycie, rozumienie kiedy należy stosować którą z metod logicznych, oraz całościowe postrzeganie badanego działu matematyki. Przestrzeń wyobrazeniowa, którą można postrzegać jako typ intuicji w trzecim ze wspomnianych znaczeń jest z kolei konieczna dla rozwoju geometrii.

Intuicja we wszystkich swych postaciach daje – według Poincarégo – poznanie pozapojęciowe, źródło jego natomiast jest różne – inne w przypadku geometrii i inne w przypadku arytmetyki. Ta ogólna charakterystyka stanowiska francuskiego filozofa zbliża ją więc do stanowiska kantowskiego, w tym też sensie twierdzenia matematyki są dla Poincarégo syntetyczne.

Omawiane w tym rozdziale filozofowie reprezentują spektrum stanowisk odnośnie roli wizualizacji w poznaniu matematycznym. Pierwsze ze skrajnych stanowisk reprezentuje John Stuart Mill, dla którego geometria zajmuje się fizycznymi diagramami oraz jest nauką indukcyjną. Dane wizualne są w tym ujęciu zwyczajnym materiałem dowodowym, a twierdzenia geometrii są zdaniami jednostkowymi. Dla Bernarda Bolzano twierdzenia geometrii są z drugiej strony ogólne. Charakter taki zawdzięczają jednak wyłącznie pojęciom – intuicja nie odgrywa, według B. Bolzano, jakiegokolwiek roli w rozumowaniach matematycznych. Stanowisko pośrednie wydaje się reprezentować Gottlob Frege. Przyjmuje on za Kantem, iż dowodów geometrycznych nie można w pełni przeprowadzić bez udziału czystej naoczności przestrzeni. W związku z tendencjami racjonalistycznymi w jego filozofii, stanowisko Fregego jest jednak trudne w interpretacji. Podobne do siebie stanowiska reprezentują z kolei Felix Klein i Henri Poincaré. Obaj myśliciele podkreślają rolę zmysłowości – intuicji naiwnej, bądź przestrzeni wyobrazeniowej (*sensible space*) – jako źródło poznania geometrycznego. To zmysłowe źródło poznania matematycznego nie ma jednak charakteru matematycznego i nie determinuje postaci pojęć matematyczny ani prawdziwości jej twierdzeń (jak chciał tego Kanta). Podkreślają również twórczą rolę intuicji przestrzennej w poznaniu matematycznym. Rozumowania wymagają

jednak, według nich, ścisłych pojęć, i nie odwołują się do czystych danych zmysłowych jako „materiału dowodowego”. Ostatnią godną uwagi charakterystyką myśli H. Poincarégo i F. Kleina jest to, iż analizują oni rolę wizualizacji w całej matematyce, nie tylko geometrii. Na koniec dodam tu, iż w mojej pracy będę często nawiązywał do rozróżnienia na intuicję naiwną i wzmocnioną Kleina.

Rozdział 6. Diagram w filozofii matematyki Charlesa Sandersa Peirce'a

W niniejszym rozdziale szeroko omawiam filozofię matematyki amerykańskiego myśliciela Charlesa Sandersa Peirce'a (1839-1914), który sformułował bardzo oryginalne ujęcie epistemologii matematyki, w którego centrum leży analiza diagramów oparta na teorii znaku. Ch.S. Peirce analizuje poznanie związane z diagramami szerzej niż jakikolwiek inny omawiany dotąd filozof matematyki, włączając w to Kanta. Niestandardowa natura koncepcji Ch.S.Peirce'a polega również na tym, że łączy wiele elementów różnych stanowisk, uważanych często za sprzeczne, bądź niekompatybilne, łącząc w szczególności poznanie dedukcyjne z obserwacją i eksperymentem. Dodajmy, iż obok oryginalnych analiz roli diagramu w poznaniu matematycznym oraz elementów empiryzmu w jego koncepcji, amerykański logik rozważał relację tych zagadnień do podziału na zdania analityczne i syntetyczne.

Na początku należy wspomnieć, iż interpretacja filozofii Peirce'a nastęrcza pewne trudności. Po pierwsze, pisał on bardzo dużo i na wiele tematów, niewiele jednak z tego publikował. Jak pisze William Ewald, redaktor często tu cytowanej antologii *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, spuścizna Peirce'a mogłaby wypełnić 100 sporych tomów⁵⁰². Lektura wszystkich jego prac ujawnia sporo nieścisłości oraz trudności interpretacyjnych, dodatkowo jego twórczość ulegała ewolucji. Ewald pisze, iż Peirce potrafił na jednej stronie pisać wyjątkowo jasno i ściśle, aby na kolejnej „przedstawić kosmologiczną metafizykę ‘ewolucyjnej miłości’, wyrazić swoje uwielbienie do Hegla i godzić

⁵⁰² Por. Ewald, W., *From Kant to Hilbert...*, str. 575.

naukę z religią”⁵⁰³. Stąd też filozofia Peirce’a jest w pewnych punktach niespójna oraz otwarta na różne interpretacje. Nie oznacza to jednak, iż nie jest ona wartościowa – przeciwnie, myśl amerykańskiego logika jest w swojej treści i założeniach głęboka i inspirująca; Peirce znał się również bardzo dobrze na matematyce, a jeszcze lepiej na logice, stąd jego poglądy na temat tych dziedzin wydają się być przemyślane (choć w niektórych punktach kontrowersyjne). Mimo wspomnianych trudności, tzn. w wielu punktach niejasnego charakteru filozofii Peirce’a, będę się starał nadać jej możliwie najbardziej jednolity charakter.

W moich analizach opierałem się tu na dwóch tekstach źródłowych – pracy *The Logic of Mathematics in Relation to Education*, oraz *Minute Logic*. W pracach tych C.S. Peirce przedstawił w zwięzły sposób ogólne zarysy swojej filozofii matematyki. Analizuję również liczne komentarze do prac Peirce’a, z których pochodzi wiele z cytatów z innych prac amerykańskiego logika⁵⁰⁴.

W pierwszej kolejności nakreślę ogólny zarys filozofii matematyki Peirce’a, jego ogólne poglądy na status matematyki w zestawieniu z innymi naukami. Są to niezbędne informacje, które posłużą mi w rozważaniach nad rolą diagramów w poznaniu matematycznym u Peirce’a, która obejmie większą część niniejszego rozdziału. W ramach analizy skoncentrowanej na diagramach epistemologii Peirce’a omówię dalej problem ogólności rozumowań diagramowych, oraz ich podział na teorematyczne i kororaliarne. Przyjrzę się również pewnym aspektom teorii znaku amerykańskiego logika – takim, które pozwalają lepiej zrozumieć jego epistemologię matematyki. Następnie omówię stanowisko Peirce’a odnośni analityczności matematyki, wraz z pewnymi problemami interpretacyjnymi z nim związanymi. Dodam, iż w ramach analizy roli diagramów w matematyce, będę zestawiał ujęcie Peirce’a z ujęciem kantowskim. Subtelne podobieństwa jak i różnice pomiędzy nimi są interesujące i warte odnotowania.

⁵⁰³ Tamże, str. 575.

⁵⁰⁴ W największym stopniu korzystam tu z pracy znawcy problematyki diagramów Sun-Joo Shina, pt.: *The Iconic Logic of Peirce’s Graphs*, pracy Michaela Ottego pt. *Analysis and Synthesis in Mathematics from the Perspective of Charles S. Peirce’s Philosophy* oraz artykułu polskiego filozofa, Rafała Gruszczyńskiego, *Filozofia matematyki Ch.P. Peirce’a*.

6.1. Matematyka jako nauka dotycząca hipotetycznych stanów rzeczy

Matematyka jest, według Peirce'a, nauką abstrakcyjną, która stawia hipotezy i wyprowadza z nich konieczne wnioski. Hipotetyczność matematyki związana jest z jej oddaleniem od świata fizycznego, bowiem matematyka, według Peirce'a, „zupełnie odcina się od badania faktów świat aktualnego i zwraca się w stronę studiowania hipotez”⁵⁰⁵. Przez hipotezę Peirce rozumie przy tym „zdanie, o którym wyobrażamy sobie, że jest ściśle prawdziwie o idealnej konfiguracji rzeczy (*state of things*)”⁵⁰⁶. Hipotezy nie stwierdzają więc, według niego, nic o tym, lub tamtym stanie rzeczy, ale dotyczą idealnych stanów rzeczy. W konsekwencji matematyka nie mówi nam nic o świecie realnym, fizycznym – jest ona, w rozumieniu Peirce'a, „jedyną nauką, która nigdy nie wnika w to jakie są w rzeczywistości fakty (*actual facts*)”⁵⁰⁷. Jej przedmiotem nie są więc konkretne przedmioty, ale relacje pomiędzy nimi, tożsamości i różnice idealnych stanów rzeczy⁵⁰⁸. W słowach Peirce'a „każda gałąź matematyki jest nauką o relacjach pojawiających się w (*involved in*) jakimś idealnym systemie”⁵⁰⁹. Konsekwencją takiego ujęcia jest również to, iż „matematyka nie tworzy nic poza zdaniami warunkowymi”⁵¹⁰. Same hipotezy, są natomiast swobodnym tworem matematyka, choć muszą spełniać wymóg niesprzeczności. Tworzone są one pod kątem wyciągania z nich koniecznych wniosków za pomocą metod dedukcyjnych oraz przy pomocy diagramów, czym zajmę się bliżej dalej.

To dzięki tak rozumianej hipotetycznej naturze matematykę można postrzegać jako naukę konieczną. Peirce wychodzi z założenia, że wiedza o świecie fizycznym

⁵⁰⁵ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki Ch.S. Peirce'a*, w: *Wokół filozofii logicznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2004, str. 247.

⁵⁰⁶ Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 634.

⁵⁰⁷ Tamże, str. 636.

⁵⁰⁸ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 248.

⁵⁰⁹ Peirce, Ch.S., *New Elements of Mathematics*, za: Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 248.

⁵¹⁰ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 252.

nigdy nie może charakteryzować się koniecznością, jej wnioski przyjmujemy zawsze z pewnym prawdopodobieństwem. Matematyka według Peirce'a „dotyczy wyłącznie hipotetycznych stanów rzeczy i nie stwierdza nic o rzeczach (*matter of fact*); dalej, wyłącznie w ten sposób należy tłumaczyć konieczność jej wniosków”⁵¹¹.

Konieczność matematyki nie ma u Peirce'a swojego źródła w platońskim świecie idei, nie jest związana z jakąś „absolutną” charakterystyką poszczególnych zdań matematyki. Matematyka jest konieczna o tyle, o ile nie dotyczy świata fizycznego – fakty bowiem nie wpływają na prawdziwość poszczególnych twierdzeń matematycznych.

Z powyższymi uwagami związana jest kolejny istotny element filozofii matematyki Peirce'a – odrzucenie aprioryzmu. Wpływa ono przede wszystkim z pragmatystycznego stanowiska Peirce'a, a w szczególności jednego jego aspektu – fallibilizmu. Według amerykańskiego filozofa cała nauka – włącznie z matematyką – podlega ciągłemu rozwojowi, tak, że również jej twierdzenia mogą być poddane z różnych powodów poznawczych rewizji. Przyczyną tych rewizji mogą być zarówno czynniki naukowe (logiczne), jak i subiektywne, społeczne. Specyfikę fallibilizmu Peirce'a dobrze przy tym charakteryzuje metafora liny. Jak pisze Ewa Piotrowska, amerykański logik „wiedzę ludzką przyrównywał (...) do splecionej liny z wielu włókien. Wspinając się po niej, mógł jako fallibilista założyć, że liczne z nich, które wydają się nieuszkodzone mogą być zerwane. Nie musimy jednak popadać w sceptycyzm, aby wątpić w wytrzymałość całej liny, bowiem włókna są ze sobą splecione, a znaczna ich część jest nieuszkodzona (choć nie bardzo wiemy które z nich)”⁵¹². Nauka jako całość – a wraz z nią matematyka – stanowi dla Peirce'a sieć powiązań, a poszczególne jej zdania nie są w jakiś absolutny sposób niepodważalne.

⁵¹¹ Peirce, Ch.S. *Minute Logic*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, V. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 639.

⁵¹² Piotrowska, E., *Społeczny konstruktywizm a matematyka*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2008, str. 125.

6.2. Rola diagramów w poznaniu matematycznym

Dla Peirce'a całość poznania matematycznego (nie tylko geometria) wyrasta z analizy diagramów. Pisze on, iż matematyka, będąc nauką dedukcyjną oraz konieczną, posługuje się „metodą, która polega na (*consists in*) badaniu konstrukcji, lub inaczej diagramów”⁵¹³. Jak rozumie on owe konstrukcje-diagramy, czy „schematy” (*scheme*) jak je również nazywa, nawiązując, jak się wydaje, do Kanta? Najprościej rzecz ujmując, diagram to „wizualna struktura złożona ze znaków bądź linii”⁵¹⁴, choć funkcję diagramu mogą również pełnić wizualizacje wewnętrzne. Peirce'owskie pojęcie diagramu jest jednak o wiele szersze niż współczesne, można nawet powiedzieć – zaskakująco szerokie.

Diagramem matematycznym jest, według niego, nie tylko narysowany trójkąt, wykres funkcji, czy innego rodzaju rysunek. Na diagram składają się wszystkie wzrokowo postrzegalne znaki – symbole, litery, kreski itd⁵¹⁵. Jak pisze Shin, „algebra, którą zazwyczaj uważa się za typowy system symboliczny, jest, według Peirce'a, również diagramem wizualnym, jako że symbole algebraiczne mogą reprezentować pewne fakty oraz są przekształcane zgodnie z właściwymi sobie regułami”⁵¹⁶. Jak podkreśla Peirce, „algebra to nic innego jak pewien typ diagramu”⁵¹⁷.

Pojęcia matematyczne są, według Peirce'a, tworem umysłu, jednak aby mogło zostać przeprowadzone rozumowanie, pojęcia te, oraz relacje pomiędzy nimi, muszą zostać przedstawione w formie diagramu. Diagramy są główną metodą matematyki; w ogólności zdaniem Peirce'a „diagramy i diagramopodobne (*diagrammatoidal*) figury mają w zamierzeniu ich twórców być stosowane w celu

⁵¹³ Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 633.

⁵¹⁴ Tamże, str. 635.

⁵¹⁵ O Peirce'owskim ujęciu roli znaku w poznaniu matematycznym więcej piszę w dalszej części rozdziału.

⁵¹⁶ Shin, S-J., B., *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*, MIT Press, 2002, str. 22.

⁵¹⁷ Peirce, Ch.S. za: Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 21.

lepszego zrozumienia stanów rzeczy, zarówno tych doświadczanych, jak i tych o których czytamy, bądź, te które sobie wyobrażamy”⁵¹⁸.

Diagramy pozwalają więc lepiej zrozumieć reprezentowane przez nie przedmioty i stany rzeczy, umożliwiając one również dojrzenie relacji pomiędzy wizualnie reprezentowanymi obiektami. Jak pisze Peirce, „nawet w algebrze, głównym celem, któremu służy symbolizm, jest przedstawienie przed okiem umysłu schemat (*skeleton*) reprezentacji badanych relacji w usystematyzowanej (*schematic*) postaci”⁵¹⁹. Diagramy matematyczne nie pełnią jednak tylko funkcji pomocniczej – są one konieczne dla jej rozwoju, każde rozumowanie matematyczne musi się w jakiś sposób na nie powoływać. Co więcej, według amerykańskiego logika „wszystkie konieczne rozumowania są diagramowe, a pewność, którą daje każdy inny rodzaj rozumowania musi opierać się na koniecznym rozumowaniu. W tym sensie, każde rozumowanie opiera się w sposób pośredni lub bezpośredni na diagramach”⁵²⁰. To ostatnie stwierdzenie jest szczególnie zaskakujące biorąc pod uwagę to, że diagramy są zazwyczaj uważane za typ reprezentacji, który daje wiedzę mniej wiarygodną, często nieprecyzyzną oraz o charakterze jednostkowym. Wytlumaczenie, skąd pochodzi pewność i konieczność rozumowań diagramowych jest jednym z najtrudniejszych punktów w interpretacji myśli Peirce’a.

W jaki sposób przebiega ogólnie rozumowanie, opierające się na diagramie? Zacytujmy najpierw dłuższy wywód Peirce’a, który pisze co następuje: „przez rozumowanie diagramowe (*diagrammatic*), mam na myśli rozumowanie, które konstruuje diagram zgodnie z zasadą (*precept*) wyrażoną w terminach ogólnych, które przeprowadza eksperymenty na diagramie, odnotowuje ich wyniki, upewnia się, że podobne eksperymenty przeprowadzone na jakimkolwiek diagramie skonstruowanym zgodnie z tą samą zasadą dałyby ten sam wynik, oraz wyraża to w terminach ogólnych”⁵²¹.

⁵¹⁸ Peirce, Ch.S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, za: Otte, M., *Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View*, “Educational Studies in Mathematics” Vol. 61, 2006, str. 15.

⁵¹⁹ Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 633.

⁵²⁰ Peirce, Ch.S., *Collected Papers*, za: Shin, S-J. B. str. 19.

⁵²¹ Peirce Ch.S., za: Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 19.

Powyższy fragment zawiera kilka istotnych elementów, które będą analizował w dalszej części rozdziału. Po pierwsze, odnotujmy, że rozumowanie diagramowe konstruuje diagram zgodnie z pewną zasadą (*precept*). Peirce nie objaśnia bliżej, czym jest owa zasada, oraz w jaki sposób w oparciu o nią powstaje diagram. Amerykański filozof podkreśla jedynie, iż jest ona wyrażona w terminach ogólnych; w innym miejscu zauważa, że: „konstrukcja taka [diagram] tworzona jest w zgodności z zasadą ukształtowaną (*furnished*) przez hipotezę”⁵²². Będąca tworem kreatywnego umysłu hipoteza, wyrażona w terminach ogólnych jest więc, źródłem z którego wypływa diagram – pewną daną, na podstawie której jest on wytworzony. Nie jest do końca jasne, jaką rolę odgrywa ów „przeddiagramowy” etap poznania. Badacz filozofii matematyki Pierce’a, Rafał Gruszczyński pisze np., iż „moment stawiania hipotezy pokrywa się z momentem konstruowania diagramu”, skąd wynika, iż nie potrafimy przedstawić sobie hipotezy przed konstrukcją diagramu⁵²³. Wydaje się, że jest problem niełatwy do rozwiązania. W tym miejscu chciałbym przede wszystkim podkreślić, że według Peirce’a zastosowanie diagramu jest konieczne w celu przeprowadzenia rozumowań; zanim poprzez konstrukcję (którą Peirce nazywa też terminami „diagramatization” oraz „skeletonization”) nie przedstawimy umysłowo i fizycznie przedmiotu naszych badań, nie jest możliwa dalsze poznanie.

Powtórzmy, iż według Peirce’a jedną z metod badania diagramu jest eksperyment. Eksperymentując na diagramie przekształcamy go, dokonując na nim „fizycznych” zmian, bądź wyobrażając sobie jego różne modyfikacje, dokonując na nich eksperymentów myślowych (*mental experimentation*). Drugim elementem diagramowego poznania matematycznego, wymienianym zazwyczaj przez Peirce’a obok eksperymentu, jest obserwacja diagramu. Również ona stanowi źródło poznania prawd matematycznych; obserwując diagram, dostrzegamy – dzięki podobieństwu diagramu oraz przedmiotu, który on przedstawia – relacje, które wcześniej, tzn. przed konstrukcją diagramu, pozostawały dla nas ukryte. Jest tak m.in. dlatego, że poprzez zastosowanie diagramu, jak stwierdza Peirce, „ogólne

⁵²² Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 635.

⁵²³ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 252.

prawidłowości mogą być uczynione bezpośrednio obserwowalnymi”⁵²⁴. Podkreślanie roli obserwacji i eksperymentu w poznaniu matematycznym jest szczególnie godnym uwagi elementem jego teorii poznania.

Kolejnym istotnym elementem myśli C.S. Peirce’a jest to, iż rozumowania posiłkujące się obserwacją bądź eksperymentem mogą mieć wciąż dedukcyjny charakter oraz ustanawiać swoje konkluzje w konieczny sposób. Dedukcja i obserwacja nie są, według Peirce’a, w takim stopniu różne, jak to się powszechnie przyjmuje: „dedukcja jest w rzeczywistości kwestią percepcji i eksperymentu, zupełnie jak jest to w przypadku indukcji i wnioskowania hipotetycznego; percepcja i eksperyment dotyczą się tu jednak obiektów myślowych (*imaginary*), a nie rzeczywistych”⁵²⁵. Motywacje do takiego poglądu szeroko objaśnia poniższy dłuższy fragment z Peirce’a:

od dawna zagadką było, jak jest możliwe, że z jednej strony matematyka jest ze swojej natury czysto dedukcyjna i wyciąga swoje konkluzje w sposób apodyktyczny, podczas gdy z drugiej strony przedstawia w takim samym stopniu jak którakolwiek z nauk obserwacyjnych szereg w bogatych, oraz być może (*apparently*) nie posiadających końca zaskakujących odkryć. Różne były próby rozwiązania tego paradoksu, za pomocą obalenia jednego bądź drugiego z tych stwierdzeń, żadna z nich nie zakończyła się jednak sukcesem. Wydaje się jednak, iż prawdą jest, że każde rozumowanie dedukcyjne, nawet prosty sylogizm, zawiera (*involves*) element obserwacji; dedukcja, mianowicie, polega na konstruowaniu ikony bądź diagramu, pomiędzy którego częściami zachodzą relacje, które pozostają w pełnej analogii do relacji pomiędzy częściami przedmiotu rozumowania; dalej, zasada się ona [dedukcja] na eksperymentach na tym obrazie w wyobraźni, oraz na obserwacji ich wyników, co ma na celu odkrycie niezauważonych i ukrytych relacji pomiędzy częściami diagramu⁵²⁶

⁵²⁴ Stjernfelt, F., *Diagrammatology, An Investigation On The Borderlines Of Phenomenology, Ontology, And Semiotics*, Synthese Library 1, Vol. 336, 2007, str. 189.

⁵²⁵ Peirce, Ch.S., *Collected Papers*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis in Mathematics from the Perspective of Charles S. Peirce's Philosophy*, (w:) *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy* red. Otte, M., Panza, M., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1997, str. 356.

⁵²⁶ Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 36.

Rozumowania matematyki są więc z jednej strony dla Peirce'a dedukcyjne, a sama matematyka jest nauką konieczną; konieczność ta wynika przy tym z jej hipotetycznego charakteru, ścisłości jej metod oraz tego, iż „przedmiotem tych obserwacji i eksperymentów jest diagram będący naszym własnym wytworem, o którego warunkach istnienia wiemy wszystko”⁵²⁷. Z drugiej strony, jest ona nauką doświadczalną – jednak w bardzo specyficznym sensie. Matematyka jest dla Peirce'a tworem kreatywnego umysłu, który stawiając hipotezy (pod kątem wyciągania z nich dedukcyjnych wniosków), wyraża ich treść za pomocą diagramu. W ten sposób przedmiot badań matematyka staje się w pewnym sensie zobiektywizowany, zewnętrzny wobec matematyka i w ten sposób podlega obserwacji oraz eksperymentom. Diagramy są jednak postrzegane oraz obserwowane jako, można powiedzieć, obiekty myślowe, a nie fizyczne w tym sensie, jak np. obserwujemy materię aby formułować prawa dotyczące jej własności. Stąd też, o ile mowa jest o doświadczalnym (*experiential*) charakterze matematyki, należy – jak podkreśla Peirce – pamiętać, że twierdzenia matematyczne należy rozumieć jako „odwołujące się do doświadczenia (*relating to experience*), niekoniecznie wywiedzione wyłącznie z doświadczenia”⁵²⁸. Odwołując się do doświadczenia przeprowadzamy więc wciąż rozumowania dedukcyjne oraz prowadzące w konieczny sposób od przesłanek do konkluzji.

Zwróćmy od razu uwagę na powiązania takiego ujęcia poznania matematycznego z innymi ogólnymi problemami filozofii matematyki. Peirce wydaje się tu twierdzić, iż ani wizja matematyki jako nauki apodyktycznej odkrywającej absolutne prawdy, ani też filozofia empiryzmu w matematyce nie jest zadowalająca, a przekonuje o tym praktyka matematyków. Rozwiązaniem jest droga pośrednia, uznająca zarówno dedukcyjny charakter matematyki, jak i quasi-empiryczne aspekty poznania matematycznego. Można też powiedzieć, że kwestionując zasadniczą odmienną dedukcji i obserwacji, podważa Peirce również dychotomiczne zasady podziału poznania na intuicyjne i dyskursywne. Píše o tym m.in. Michael Otte, podkreślając, że amerykański logik oddala się tu od

⁵²⁷ Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 635.

⁵²⁸ Peirce, Ch.S. *Logic of Quantity*, za: Stjernfelt., F., *Diagrammatology*,...str. 189.

myśli kantowskiej, oraz, że – według Peirce’a – Kant zbyt wąsko rozumiał dedukcję, a miało to po części źródło w „ostrym oddzieleniu przez Kanta dedukcyjnego wnioskowania i obserwacji, bądź intuicyjnej i dyskursywnej wiedzy”⁵²⁹.

Kolejnym podkreślanym przez Peirce’a aspektem poznania opartego na diagramach jest to, iż dedukcja dokonywana za pomocą obserwacji oraz eksperymentu umożliwia *poszerzenie* naszej wiedzy. Zdaniem M. Otte, dla Peirce’a „charakterystyką diagramu jest fakt, iż można dowiedzieć się więcej niż to, co było konieczne w celu jego skonstruowania”⁵³⁰. Obserwacja, oraz związane z nią mentalne eksperymenty owocują według Peirce’a tym, że „odkrywane są nowe relacje pomiędzy jego częściami, nie sformułowane w zasadzie, na podstawie której były ukształtowane”⁵³¹.

Poniższy, fragment jednej z prac Peirce’a, rozjaśnia dalej, w jaki sposób obserwacja umożliwia formułowanie nowych twierdzeń: „geometra rysuje diagram, (...) i za pomocą obserwacji tego diagramu, jest on w stanie dokonać syntezy i pokazać relacje pomiędzy elementami, które wcześniej nie wydawały się być połączone w jakikolwiek konieczny sposób. Dane zmysłowe (*the realities*) narzucają nam łączenie pewnych rzeczy silnymi relacjami, innych natomiast słabszymi, na sposób wysoce skomplikowany i jednocześnie niezrozumiały (*unintelligible*); geniusz umysłu zbiera wszystkie te podpowiedzi zmysłów, dodaje do nich bardzo dużo, czyni je dokładnymi i ścisłymi, oraz ukazuje je w poznawalnej rozumem (*intelligible*) formie w intuicjach czasu i przestrzeni”⁵³². Konstrukcja ukazuje więc, według Peirce’a, w zmysłowo postrzegalny sposób pewne niezauważone wcześniej relacje. To umysł jednak jest w stanie wybrać z różnorodności danych zmysłowych te, które ukazują nowe fakty matematyczne, oraz nadać swoim wnioskom ścisłość, której same dane zmysłowe dać nie mogą, ale niezbędny jest tutaj również element twórczy. Dzięki analitycznej i zarazem twórczej, aktywności umysłu, matematyk może *odkrywać* prawdy matematyczne w

⁵²⁹ Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 356.

⁵³⁰ Tamże, str. 345.

⁵³¹ Peirce, Ch.S., *The Logic of Mathematics...*, str. 635.

⁵³² Peirce, Ch.P., *Collected Papers*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 354.

kontakcie z diagramem: „obserwacja i kreatywność (*ingenuity*) są częścią (*are involved in*) procesu rozumowania. Prowadzą one do dostrzeżenia, że czysto dedukcyjne rozumowanie angażuje (*involve*) odkrycie w takim samym stopniu, w jakim czyni to eksperyment chemika; różnica polega tu jedynie na tym, że odkrycie dotyczy tu sekretów umysłu (*of the mind within*), a nie umysłu Natury”⁵³³. Diagram pozwala odrywać prawdy matematyczne i rozszerzać wiedzę we wszystkich działach matematyki, nie tylko w geometrii – na przykład „jeśli chodzi o algebrę, główną ideą związaną z jej uprawianiem jest to, że przedstawia ona formuły, które mogą być przekształcane (*manipulated*), oraz, że poprzez obserwację efektów takiego przekształcania odnajdujemy własności, których w innym przypadku nie zostałyby dostrzeżone”⁵³⁴.

Rozumowaniami, które rozszerzają naszą wiedzę o obiektach matematycznych są w szczególności rozumowania teorematyczne, którym poświęcony jest kolejny podrozdział.

6.3. Rozumowania kororaliarne i teorematyczne

Z diagramami powiązane jest też bezpośrednio rozróżnienie pomiędzy dwoma typami – dedukcyjnych oraz diagramowych – rozumowań występujących w matematyce: pomiędzy rozumowaniami kororaliarnymi i teorematycznymi⁵³⁵. Sformułowanie tego rozróżnienia uważał Peirce za swoje pierwsze istotne odkrycie w dziedzinie logiki i matematyki⁵³⁶. Pozwala ono pogłębić interpretację Peircowskiej teorii poznania opartej na diagramach. Można dodatkowo, opierając się na tym podziale, sformułować pewną interpretację Peirce’owskiego ujęcia podziału na zdania analityczne i syntetyczne. Do tego zagadnienia wrócę jednak

⁵³³ Peirce, C.H.S., *The New Elements...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 346.

⁵³⁴ Peirce, C.H.S., *Collected Papers...*, za: Otte, M., *Mathematical Epistemology...*, str. 36.

⁵³⁵ Angielskie terminy to *corollary* oraz *theorematic* (wydaje się, iż ich źródłem są terminy *corollary* – wniosek, oraz *theorem* – twierdzenie). Za Gruszczyńskim tłumaczą je jako, odpowiednio, rozumowania kororaliarne oraz teorematyczne.

⁵³⁶ Por. Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 255.

później, w pierwszej kolejności przedstawię, co amerykański logik pisze o wspomnianym rozróżnieniu i jak można to interpretować w kontekście roli diagramów w poznaniu matematycznym.

Jak wspominałem, obydwa typy rozumowań są rozumowaniami diagramowymi, w obu przypadkach wniosek wynika z przesłanek w sposób konieczny. Różnią się one natomiast sposobem dotarcia do owych wniosków. Rozumowania kororaliarne to „rozumowania składające się jedynie z uważnego analizowania definicji terminów występujących w tezie, która ma być dowiedziona”⁵³⁷. Rozumowania te nie wymagają pomysłowości matematyka, ich przeprowadzenie to, jak pisze Rafał Gruszczyński, jedynie kwestia „uważnego i poprawnego uprawiania matematycznego rzemiosła, odwoływania się do definicji pojęć, stosowania technik dowodowych”⁵³⁸. Są to, jak pisze Peirce, rozumowania, które „stosują jedynie pojęcia ogólne, a w ich konkluzjach nie ma nic, co nie byłoby elementem definicji, o ile wszystkie występujące w niej terminy byłyby, każde z osobna, zdefiniowane”⁵³⁹. Przykładami takich zdań są, według Peirce’a, geometryczne stwierdzenia, których Euklides nie uważał za szczególnie wartościowe, a które jego komentatorzy oznaczali jako zaledwie wnioski z twierdzeń ważniejszych⁵⁴⁰. Są to więc, ogólnie rzecz biorąc, stwierdzenia mniej istotne, proste wnioski z twierdzeń ważniejszych – takie, których dowód wymaga jedynie uważnego stosowania definicji i technik dowodowych.

W przypadku rozumowań teorematycznych natomiast, w opinii Gruszczyńskiego „pojawia się w toku rozumowania coś nowego, nowa idea, nowy obiekt, który nie jest uwzględniony w przesłankach, a który zostaje wykorzystany w dowodzie i na końcu jest eliminowany z konkluzji”⁵⁴¹. W kontekście diagramów można powiedzieć, iż rozumowania te „wprowadzają pewien zupełnie nowy czynnik na diagramie, tak, by usprawnić nowe i nieprzewidziane wcześniej konkluzje”⁵⁴². Część zdań matematycznych można udowodnić przy pomocy prostej

⁵³⁷ Tamże, str. 255.

⁵³⁸ Tamże, str. 255.

⁵³⁹ Peirce, Ch.S. *Minute Logic* str. 640-641.

⁵⁴⁰ Tamże, str. 641.

⁵⁴¹ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 255.

⁵⁴² Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 190.

analizy definicji (tzn. rozumowań kororaliarnych), natomiast, jak podkreśla Peirce, „w przypadku twierdzeń, a w każdym razie wszystkich ważnych twierdzeń, potrzebny jest inny typ rozumowania”⁵⁴³. Ważniejsze, głębsze, twierdzenia wymagają więc w pewnym sensie, wyjścia w rozumowaniu poza definicje, wprowadzenie do niego nowego elementu. W przypadku tego typu twierdzeń, „myślenie za pomocą pojęć ogólnych nie wystarcza. Koniecznym jest, aby wykonana została jakaś czynność⁵⁴⁴ (*something should be DONE*)”. Taką czynnością może być narysowanie pomocniczych linii, w algebrze dokonanie transformacji. Ważny jest tu nowy element na diagramie, bądź manipulacja samym diagramem. Peirce nie opisuje przy tym w szerszy ani systematyczny sposób jakiego typu mogą to być dodatki lub przekształcenia diagramu, bądź jakiś typ aktywności z nim związany. Dodajmy jeszcze, że bez dodania tego elementu, twierdzenie nie jest oczywiste, wniosek nie wynika w oczywisty sposób z przesłanek, stąd rozumowanie nie może zostać w pełni przeprowadzone.

Główną cechą rozumowań teorematycznych jest więc konieczność pojawienia się w ich trakcie nowego elementu, nie zawartego w przesłankach. Poza tym jednak, Peirce przedstawia charakterystykę rozumowań teorematycznych tak, że granica pomiędzy nimi a rozumowaniami diagramowymi w ogóle zaciera się. Twierdzi on więc, iż „dedukcja teorematyczna to dedukcja w przypadku której konieczne jest przeprowadzenie w wyobraźni eksperymentu na obrazie przesłanki (*upon the image of the premiss*)..”⁵⁴⁵ I dalej, jak podkreśla Peirce, „rozumowanie teorematyczne niezmiennie oparte jest na eksperymentowaniu z jednostkowym schematem”⁵⁴⁶. W innym miejscu pisze Peirce wreszcie, że w przypadku rozumowań teorematycznych „koniecznym jest sporządzenie, bądź wyobrażenie sobie, jakiegoś jednostkowego i określonego schematu (*schema*) czy też diagramu – w geometrii, figury złożonej z linii oraz dołączonych do nich liter; w przypadku algebry struktury (*array*) liter, spośród których niektóre są powtórzone. Ten schemat jest skonstruowany tak, aby był zgodny z hipotezą sformułowaną w

⁵⁴³ Peirce, Ch.S. *Minute Logic*, str. 641.

⁵⁴⁴ Tamże, str. 641.

⁵⁴⁵ Hilpinen, R., *Peirce's Logic*, (w:) *Handbook of the History of Logic. Vol. 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, str. 650.

⁵⁴⁶ Peirce, Ch.S. *Minute Logic*, str. 641.

terminach ogólnych w tezie twierdzenia⁵⁴⁷. Nie jest więc do końca jasne, jak – w obrębie rozumowań diagramowych – oddzielić kororaliarne od teorematycznych. Wydaje się, że, według Peirce’a, te ostatnie są „właściwymi” rozumowaniami diagramowymi. Wniosek rozumowania kororaliarnego byłby wtedy wynikiem dedukcji nie korzystającej w istotny sposób z konstrukcji, z przestrzenie przedstawionego diagramu. Nie zachodziłaby wtedy potrzeba korzystania z diagramów, wystarczyłaby analiza definicji. Taki wniosek można w każdym razie wyciągnąć z poniższej wypowiedzi Peirce’a: „Rozumowanie kororaliarne, lub ‘filozoficzne’ jest rozumowaniem za pomocą słów; tymczasem rozumowanie teorematyczne, czyli właściwe rozumowanie matematyczne, jest rozumowaniem przy pomocy specjalnie skonstruowanych schematów⁵⁴⁸”.

Można jednak przyjąć również nieco inną interpretację, a mianowicie można przyjąć, że w przypadku rozumowań kororaliarnych wystarcza obserwacja diagramu, rozumowania teorematyczne natomiast wymagają manipulacji diagramem, bądź naniesienia na niego nowego elementu.

Na podstawie prac Peirce’a można również sformułować nieco inną interpretację natury rozumowań teorematycznych. Obok ich powiązań z diagramami, można mianowicie również postrzegać je jako rozumowania wymagające kreatywności, pomysłu – w przeciwieństwie do wymagających użycia jedynie automatycznych procedur rozumowań kororaliarnych. Jako przykład takiego rozumowania podaje Peirce dowód twierdzenia Cantora⁵⁴⁹. Przypomnijmy, że głosi ono, iż moc dowolnego zbioru jest mniejsza od mocy jego zbioru potęgowego. Istotą tego dowodu jest zdefiniowanie odpowiedniego zbioru, którego analiza prowadzi do wniosku, że założenie o istnieniu bijekcji pomiędzy dowolnym zbiorem oraz jego zbiorem potęgowym prowadzi do sprzeczności⁵⁵⁰. Aby dowód ten przeprowadzić, „nie mogliśmy ograniczyć się do samego analizowania

⁵⁴⁷ Peirce, Ch.S. *Minute Logic*, str. 641.

⁵⁴⁸ Tamże, str. 641.

⁵⁴⁹ Por. Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 256.

⁵⁵⁰ Dokładniej, dowodu podanego przez Peirce’a – twierdzenie Cantora można bowiem udowodnić na wiele sposobów.

przesłanek”⁵⁵¹. Należało wprowadzić nową ideę, a mianowicie dokonać konstrukcji odpowiedniego zbioru, albo – mówiąc najprościej – „wpaść” na pewien pomysł.

Nie chcę w tym miejscu ostatecznie rozstrzygać kontrowersji związanej z dokładnym umiejscowieniem omawianego podziału na tle rozumowań diagramowych w ogóle. Wydaje się, że nie ma jasności, czym rozumowania teorematyczne różnią się od rozumowań diagramowych w ogóle, oraz w jakim sensie rozumowania kororaliarne są diagramowe. Z pewnością te ostatnie nie posługują się w tym samym stopniu, co teorematyczne metodami badania diagramu, jak obserwacja i eksperyment. Interpretacja rozumowań teorematycznych jako związanych przede wszystkim z pierwiastkiem twórczym w poznaniu też rodzi pewne pytania. Nowa idea, która pozwala sformułować jeden z dowodów twierdzenia Cantora nie wydaje się przecież wypływać z dołączenia elementu na diagramie. Nie będę tu podejmował próby rozwiązania tych sporów – pozostaną jedynie na ich zaznaczeniu, do podziału na rozumowania teorematyczne i kororaliarne wrócę natomiast dalej przy okazji omawiania podziału na zdania analityczne i syntetyczne.

6.4. Elementy teorii znaku Peirce’a a matematyczne poznanie diagramowe

Aby przybliżyć nieco Peircowskie podejście do diagramów warto choć ogólnie omówić pewien aspekt jego teorii znaku. Znak jest podstawową kategorią epistemologii amerykańskiego logika. Pojęcie znaku jest dla Peirce’a pojęciem bardzo pojemnym – znakiem może być napisany na kartce układ kresek i kropek, ale również pewne stany rzeczy czy np. zachowania ludzkie. Nas będzie tu przede wszystkim interesował znak używany w matematyce. W tym kontekście należy więc stwierdzić, że diagramy matematyczne składają się ze znaków; mogą nimi być symbole, ale także elementy rysunku, czy wszelkie inne „dopisane” elementy

⁵⁵¹ Tamże, str. 256.

diagramu. Znakiem może być też w szerszym sensie cały diagram jako skonstruowany z pomniejszych znaków.

Teoria znaku Peirce'a opiera się przede wszystkim na wyróżnieniu trzech płaszczyzn badania znaku. Są nimi: po pierwsze – sam znak, jego kształt, oraz relacje pomiędzy znakami; po drugie – relacje pomiędzy znakiem i przedmiotem, który znak reprezentuje; po trzecie – relacja pomiędzy znakiem a jego użytkownikami. Podział ten jest podstawą ku współcześnie wciąż przyjmowanemu podziałowi logiki na syntaktykę, semantykę i pragmatykę.

Dla mnie bardziej interesujący będzie tu jednak pewien trójpodział znaków. Peirce dzieli je mianowicie na ikony, wskaźniki (*indices*) oraz symbole. Kryterium podziału jest tu sposób w jaki znak reprezentuje swój obiekt, czy denotację⁵⁵². Ostatni z wymienionych – symbol, reprezentuje na mocy konwencji. W ten sposób reprezentuje większość słów języka naturalnego, jak „książka” czy „dom”, jak również np. „biała flaga”, czy „gołąb” o ile symbolizują kapitulację, czy pokój. Inaczej mówiąc, w samym kształcie tych symboli, ich aspekcie syntaktycznym, nie ma nic, co mogłoby wskazywać, iż denotują ten właśnie przedmiot a nie inny. Indeks reprezentuje przez proste wskazanie na swój obiekt. Indeks jest np. każda nazwa własna. Ikony natomiast reprezentują na mocy podobieństwa. Podobieństwo to może być czysto „wizualnym” podobieństwem, tzn. znak może po prostu wyglądać podobnie do obiektu reprezentowanego. Podobieństwo może mieć jednak również charakter strukturalny, tzn. mieć swoje źródło w podobieństwie struktury relacyjnej reprezentacji i jej denotacji.

Zanim przejdę do analizy roli tego podziału dla matematyki, należy – za Peirce'm – poczynić dwie istotne uwagi. Po pierwsze, nie zawsze jest jasne do której z trzech kategorii zalicza się dany znak. Co więcej, niektóre znaki mogą należeć do więcej niż jednej z kategorii, a to znaczy, że znak może w pewnym sensie funkcjonować jako symbol, a w pewnym jako ikona. Omawiany podział jest więc nieostry oraz nie jest rozłączny. Po drugie, każdy typ znaku jest niezbędny w rozumowaniach, również matematycznych – diagramy zawierają więc na ogół

⁵⁵² Por. Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 23-24, również Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 20.

zarówno ikony jak i indeksy⁵⁵³. Peirce podkreśla tu nawet, iż „w doskonałym systemie notacji logicznej, muszą być użyte (*employed*) wszystkie rodzaje znaków”⁵⁵⁴.

Tu pojawia się kluczowa myśl: diagramy w matematyce reprezentują przede wszystkim jak ikony. Na diagramach pojawiają się co prawda, i muszą się pojawiać, indeksy oraz symbole – rozumowania diagramowe zawdzięczają jednak swoją specyfikę głównie właśnie ikonicznej naturze diagramów matematycznych. Diagram charakteryzuje się podobieństwem do badanego obiektu – rysunki geometryczne do obiektów geometrycznych (co wydaje się dość oczywiste), ale również wizualna postać równań algebraicznych do własności samych tych równań.

Zanim powyższa myśl zostanie pogłębiona, warto przyjrzeć się przykładowi diagramów Eulera⁵⁵⁵. Tu – podobnie jak w przypadku ogólnym – pojawiają się wątpliwości co do charakteru poszczególnych znaków (jako ikon, indeksów bądź symboli), czy elementów diagramów. Można więc zapytać, w jaki sposób reprezentują występujące na nich okręgi, w jaki zacieniowane obszary, a w jaki symbole teoriomnogościowe? Shin podkreśla, że zacieniowane obszary, które sam Euler wprowadził jako reprezentujące puste zbiory, należy traktować jako symbole, ponieważ reprezentują puste zbiory na mocy konwencji, a nie jakiegokolwiek podobieństwa. Bardziej dyskusyjne jest pytanie, o to, w jaki sposób reprezentują okręgi. Czy można powiedzieć, że ich kształt nawiązuje w jakiś sposób do pojęcia zbioru? Jest to kwestia sporna, ale wydaje się, że należy uznać, iż okręgi funkcjonują również jak symbole (tzn. reprezentują zbiory konwencjonalnie). Jak sytuacja wygląda z relacją należenia do zbioru? Jeśli narysujemy w środku zbioru (okręgu) jakiś obiekt reprezentujący jego element (symbol, lub nawet rysunek), diagram przedstawia nam relację należenia obiektu do zbioru na sposób ikoniczny. „Zawieranie się” tego elementu, który sam może reprezentować jako symbol jak i ikona, w okręgu odznacza się strukturalnym podobieństwem do zawierania się elementu w zbiorze reprezentowanych na diagramie. Jeśli na diagramie naniesiemy

⁵⁵³ Por. Otte, M., *Mathematical Epistemology...*, str. 22-24.

⁵⁵⁴ Peirce, za: Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 33.

⁵⁵⁵ Por. Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 26.

więcej okręgów, obszary pomiędzy przecięciami się tych okręgów będą również adekwatnie reprezentowały odpowiednie części wspólne, sumy zbiorów, itd.

Przykład relacji teoriomnogościowej „należenia do” dobrze ukazuje, iż w matematyce podobieństwo pomiędzy znakiem a jego przedmiotem wypływa przede wszystkim z reprezentacji *relacji* pomiędzy obiektami, a nie samych obiektów. Według Sun-Joo Shina, ikona w matematyce nie charakteryzuje się więc podobieństwem do konkretnych obiektów, jej zewnętrzna forma jest raczej odzwierciedleniem relacji, które zachodzą pomiędzy tymi obiektami, bowiem w taki też sposób mają na ogół reprezentować diagramy matematyczne⁵⁵⁶. Mimo, iż część symboli występujących na diagramach to symbole bądź indeksy, diagramy matematyczne traktowane jako całość, reprezentują na ogół jak ikony – w powyższej zakreślonym, „relacyjnym” sensie. Jest tak w przypadku figur geometrycznych, które, jak podkreśla Shin, „są w większym stopniu ikonami, niż symbolami ani indeksami”⁵⁵⁷. Jest tak również w przypadku równań algebraicznych, ponieważ, zdaniem Peirce’a „w istocie, każde równanie algebraiczne jest ikoną, o tyle, o ile ukazuje (*exhibits*), za pomocą znaku algebraicznego (który sam w sobie nie jest ikoną) relacje pomiędzy badanymi wielkościami”⁵⁵⁸. Równanie algebraiczne jako całość jest więc ikoną, tzn. wzajemne „ustawienie” symboli adekwatnie reprezentuje relację między nimi, a manipulacja na tych symbolach pozwala „zobaczyć” nowe fakty poprzez ujrzenie w innym świetle relacji pomiędzy poszczególnymi obiektami (pomyślmy choćby o prostych operacjach obustronnego dodawania, czy mnożenia, wykonywanych na obu stronach równania, czy o operacjach na macierzach – wydaje się, że obserwacja samego kształtu takich „diagramów”, oraz operacje na nich, pozwalają dojrzeć pewne fakty ich dotyczące). Dodajmy, że takie ujęcie zgodne jest z koncepcją matematyki jako nauki dotyczącej relacji w ramach hipotetycznych stanów rzeczy. Dzięki ikoniczności diagramów matematycznych możemy po prostu „obserwować” relacje na diagramie.

⁵⁵⁶ Por. tamże, str. 27.

⁵⁵⁷ Tamże, str. 27-28.

⁵⁵⁸ Peirce, CH.S., *Collected Papers...*, za: tamże, str. 25.

W tym miejscu warto poczynić kilka uwag odnośnie przedmiotu diagramów, a w szczególności ikon. Ów ontologiczny problem jest z pewnością istotny, jak się jednak wydaje, trudno na podstawie pism Peirce'a jednoznacznie sformułować jego stanowisko w tej kwestii. Jak wspominałem, matematyka dotyczy hipotetycznych stanów rzeczy. Czy można je jednak je traktować jako w jakimś sensie odrębne od podmiotu poznającego? Wiele z powyżej przytaczanych uwag Peirce'a wskazuje na to, że – o ile chodzi o ontologię – jest on bliski jakiejś postaci konceptualizmu⁵⁵⁹. Można chyba zaryzykować tezę, iż Peirce tej kwestii nie rozstrzygał, a być może nie miał zamiaru rozstrzygać, co potwierdza poniższy cytat: „Ikona nie jest w sposób jednoznaczny powiązana z tą, czy inną istniejącą rzeczą, tak jak jest to w przypadku indeksu. Jej przedmiot może być, jeśli chodzi o jego istnienie, czystą fikcją. W jeszcze mniejszym stopniu jest jej przedmiot typem rzeczy, z którą mamy na co dzień styczność”⁵⁶⁰. Czymkolwiek jednak nie byłby dokładnie przedmiot matematyki, ikona go reprezentująca odzwierciedla jego strukturę relacyjną. Jak pisze Michael Otte, że według Peirce'a podobieństwo tak daleko idące, że „ikony zastępują w tak zupełnym stopniu swoje przedmioty, że trudno jest je od siebie odróżnić”⁵⁶¹.

Przejdźmy dalej do ważnej charakterystyki rozumowań diagramowych, a mianowicie ich ogólności.

6.5. Ogólność rozumowań diagramowych i ich konkluzji

Podział znaków na ikony, indeksy oraz symbole prowadzi nas do kolejnego istotnego problemu – ogólności rozumowań diagramowych. Przyjrę się więc, w jaki sposób Peirce odpowiada na pytanie, jak rozumowanie oparte o jednostkowy,

⁵⁵⁹ Konceptualistyczna interpretacja jest na pewno kompatybilna z pragmatyzmem Peirce'a. Z drugiej strony, jak wspominałem powyżej, nauka jako całość można, według amerykańskiego logika, traktować jako dążącą w jakimś sensie do obiektywnej prawdy. Przedmiot nauki jest w jakimś stopniu oderwany od podmiotów poznających. Nie jest jednak jasne, jak można ten aspekt interpretować w odniesieniu do matematyki.

⁵⁶⁰ Peirce, Ch.S. *Collected Papers...*, (za: Otte, M., *Mathematical Epistemology...*, str. 33).

⁵⁶¹ Otte, M., *Mathematical Epistemology...*, str. 33.

konkretny diagram, może dowodzić ogólnych tez, tzn. dotyczącej większej ilości (być może nieskończonej) obiektów.

Peirce podkreślał niejednokrotnie, iż diagramy są jednostkowe i miał świadomość, że jest to problem, z którym należy się zmierzyć, podkreślając np., iż zagadnienie, czy „rozumowanie oparte jest na badaniu jednostkowego schematu, jest mimo to konieczne, (...) jest jednym z pytań, które należy rozważyć”⁵⁶². Wydaje się jednak, że amerykański logik nie sformułował jednoznacznej odpowiedzi na pytanie: „jak i dlaczego diagramy dają wiedzę ogólną?”. Przypomnijmy, iż podkreślał on, że rozumowanie diagramowe „upewnia się, że podobne eksperymenty przeprowadzone na jakimkolwiek diagramie skonstruowanym zgodnie z tą samą zasadą dałyby ten sam wynik, oraz wyraża to w terminach ogólnych”. Sformułowany jest tu więc ogólny wymóg - rozumowanie powinno zapewniać swoją ważność dla wszystkich podobnych przypadków. Przez te ostatnie można natomiast rozumieć niewielkie modyfikacje diagramu, np. niewielka zmiana pewnych wielkości, jak długość boków, czy odległości pomiędzy punktami. Jak jednak sprostać temu wymogowi – i tym samym uniknąć ryzyka popełnienia błędów w rozumowaniu – bliżej Peirce nie wyjaśnia.

Również Sun-Joo Shin rozważa problem ogólności rozumowań diagramowych, czyniąc to w nawiązaniu do podziału diagramów na ikony, indeksy i symbole. Otóż niektóre elementy diagramu, funkcjonującego jako ikona, reprezentują relacje pomiędzy poszczególnymi obiektami. Pewne elementy ikony nie reprezentują jednak nic – są w pewnym sensie „przypadkowe” i nie odgrywają żadnej roli w rozumowaniu, a przynajmniej nie powinny (na przykład większość rozumowań odwołujących się do narysowanych figur geometrycznych nie korzysta np. w żaden sposób z długości poszczególnych boków tych figur – są one w tym sensie „przypadkowe”). Jak rozróżnić te elementy diagramu ikonicznego⁵⁶³? Odpowiedź Shin jest następująca: „kiedy przyjmujemy, iż ikona reprezentuje jakiś przedmiot ogólny (jak czyni to symbol), ważne jest, aby dokonać klasyfikacji

⁵⁶² Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 641.

⁵⁶³ Dodajmy, że symbol, reprezentując przez konwencję, nie rodzi takich problemów.

obserwowalnych własności konkretnej ikony na dwie kategorie: własności, które reprezentują fakty oraz tych, które nie reprezentują faktów⁵⁶⁴”.

Sun-Joo Shin (podobnie jak Peirce) nie podaje jednak żadnej konkretnej recepty na tę słabość diagramów – podkreśla jedynie, że należy tu po prostu bardzo uważać, aby nie wnioskować na bazie „przypadkowych cech diagramów”. Peirce wydawał się być świadom istotności również tego wymogu. Jednak również tu nie proponuje on konkretnych metod, które mogłyby temu problemowi zaradzić (nie czyni tego również Shin). Wydaje się on zakładać, iż należy tu po prostu zastosować ogólną wiedzę matematyczną, wyrażającą się w dobrym rozumieniu danego problemu⁵⁶⁵.

Należy tu dodać, że kwestię ogólności należy też rozważać w kontekście roli obserwacji i eksperymentu w poznaniu matematycznym. Otóż, według Peirce’a, przy odpowiedniej konstrukcji diagramu, ogólne prawidłowości mogą być *obserwowalne* – nawet na jednostkowym diagramie. Ogólność staje się tym samym dostępna naszym zmysłom; jak zauważa Stjernfeld, „Peirce uważa, że doświadczenie, percepcja, jest źródłem takiej ogólności, która jest obecna już w naszych sądach percepcyjnych oraz mającą swoją podstawę w postrzeżeniach (*percepts*) które nie muszą być bezpośrednio dostępne⁵⁶⁶”.

Stwierdzenie, iż ogólność twierdzeń matematycznych ma swoje źródło częściowo w percepcji jest z pewnością zaskakujące. Obserwacja, przynajmniej za pomocą zmysłu wzroku, jest przecież zazwyczaj rozumiana jako obserwacja obiektów jednostkowych. Jednak dla Peirce’a obserwując, czy postrzegając zmysłami diagram, obserwujemy w pewnym sensie obiekty „myślowe”, będące obiektywizacją tego, co mentalne – co, być może, można interpretować jako wy tłumaczenie możliwości „percepcji tego, co ogólne”. Pamiętajmy przy tym oczywiście, że poznanie diagramu nie jest u Peirce’a z pewnością jedynie kwestią postrzegania – jest to percepcja „uzbrojona” w pojęcia matematyczne. Wydaje się,

⁵⁶⁴ Shin, S-J., B., *The Iconic...*, str. 29.

⁵⁶⁵ Zasygnalizowany tutaj problem – „przypadkowych”, nieistotnych dla rozumowania – cech diagramów, będzie szeroko omówiony w drugiej części pracy.

⁵⁶⁶ Stjernfeld, F., *Diagrammatology...*, str. 189.

że ujawnia się tu znów przekonanie amerykańskiego logika zgodności dedukcji i obserwacji.

Dodajmy, że twierdzenia matematyki zawdzięczają generalnie swoją ogólność jej hipotetycznemu charakterowi; nie dotyczą one przedmiotów jednostkowych, ale hipotetycznych stanów rzeczy. Pytanie o ogólność rozumowań diagramowych jest inną kwestią – jest to problem ogólności specyficznej metody matematycznej. Tym samym ogólność jest ściśle powiązana z pojęciem możliwości, ponieważ, jak pisze Peirce, „w takim stopniu, w jakim coś jest możliwe, jest ono też ogólne, a jako ogólne, przestaje być jednostkowe”⁵⁶⁷. Możliwość, potencjalność twierdzenia matematycznego oznacza jego potencjalną stosowalność do nieograniczonej liczby konkretnych stanów rzeczy. Dalej, zmienne wolne w zdaniach matematycznych nie reprezentują elementów określonego zbioru, nie pociągają one tym samym żadnego konkretnego zobowiązania ontologicznego. Zmienna wolna odnosi się do samej możliwości (*mere possibility*)⁵⁶⁸. Stąd „termin ‘ogólny’ jest stosowany przez Peirce’a w celu desygnowania regularności, bądź prawa, otwartego na nieokreśloną liczbę realizacji (*indefinite number of instantiations*), czyli na coś, co pozostaje poza wszelką określoną kardynalnością, oraz co stąd reprezentuje kontinuum”⁵⁶⁹.

6.6. Peirce o podziale na zdania analityczne i syntetyczne

Warto się również przyjrzeć Peirce’owskiemu ujęciu podziału na zdania analityczne i syntetyczne oraz jego związkowi z rozumowaniami diagramowymi.

⁵⁶⁷ Peirce, Ch.S., za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 347.

⁵⁶⁸ Peirce, Ch.S., za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 347.

⁵⁶⁹ Powyższe uwagi należałoby zapewne rozszerzyć, wymagałoby to jednak znaczne wglębnienie się w filozofię Peirce’a. Pojęcia ogólności i możliwości łączą się bowiem u Peirce’a z pojęciem ciągłości, które ma dla niego głębokie znaczenie filozoficzne, nie odnoszące się jedynie do matematyki. Pisze on np., że Ciągłość to ogólnie “nic innego jak wyższy typ/rodzaj tego, co znamy jako ogólność. Jest ona ogólnością relacyjną” (Peirce, CH.S., *Collected Papers...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 327). Nie ma tu jednak miejsca na bliższą analizę Peircowskiego pojęcia ciągłości.

Interpretacja ujęcia Peirce'a rodzi pewne problemy. W skrócie, pojawiają się tu dwie interpretacje: z jednej strony z wielu uwag Peirce'a wynika, że matematyka jako całość jest analityczna; z drugiej strony natomiast, można doszukiwać się takiej interpretacji podziału na zdania analityczne i syntetyczne, zgodnie z którym syntetyczne zdania stają się tymi, które dowodzimy za pomocą rozumowań teorematycznych, a analityczne – kororaliarnych.

Po pierwsze, należy zaznaczyć, że Peirce odrzuca kantowską interpretację omawianego podziału. Kantowska koncepcja analityczności jest w pierwszym rzędzie niedoskonała, ponieważ jest oparta na podmiotowo-orzecznikowej koncepcji struktury zdania. Jak pisze Otte, według Peirce'a, podział na zdania analityczne i syntetyczne sformułowany w jej terminach, jest „sztuczny, oparty zaledwie na przypadkowych własnościach języka (*mere accidents of language*)”⁵⁷⁰. Podmiotowo-orzecznikowe ujęcie struktury zdania nie oddaje właściwej struktury zdania, jego relacji do przedmiotu poznania oraz struktury rozumowań – w szczególności matematycznych. Rewizja tradycyjnego ujęcia struktury zdania jest konieczna ze względu na rozwój logiki, bo w rozumieniu Peirce'a, „nasze idee dotyczące podziału na sądy analityczne i syntetyczne jest w dużym stopniu zmodyfikowana przez logikę relacji”⁵⁷¹. Dokładniej, podział na zdania analityczne i syntetyczne w ujęciu Kanta jest „niejasny (*ambiguous*), co ma źródło w jego nieznanym logiki relacji i w konsekwencji prawdziwej natury dowodu matematycznego”⁵⁷². Dopiero logika relacji odsłania więc przed nami właściwą strukturę dowodu matematycznego oraz uświadamia nam, że większość twierdzeń matematycznych jest analityczna. Jest tak w szczególności w przypadku zdań arytmetycznych – większość z nich, co Peirce często podkreśla, można wykazać za pomocą prostych rozumowań⁵⁷³.

⁵⁷⁰ Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 346.

⁵⁷¹ Peirce, Ch.S., *Collected Papers...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 356.

⁵⁷² Tamże, str. 343.

⁵⁷³ Poniższy cytat dobrze ujmuje krytyczny stosunek Peirce'a do przyjmowanej przez Kanta podmiotowo-orzecznikowej struktury zdania. Wyrażona jest tu ciekawa myśl, iż poznanie nie polega na porównywaniu, zestawianiu ze sobą pojęć, czy ich znaczeń: „Kant utrzymuje błędny pogląd, iż idee przedstawiamy sobie jako odosobnione a następnie myślane są razem przez umysł. Jest to doktryna, iż umysłowa (*mental*) synteza poprzedza każdą analizę. W rzeczywistości przedstawiane jest coś, co samo w sobie nie posiada części, a jest mimo to analizowane przez umysł,

Drugą istotną różnicą pomiędzy filozofią Kanta, a Peirce'owskim ujęciem syntetyczności jest kwestia roli przestrzeni w poznaniu matematycznym. Tu amerykański logik wyraźnie oddala się od Kanta. Nie należy, według niego, postrzegać matematyki jako nauki dotyczącej przestrzeni i czasu. Jest ona nauką o hipotezach i nie dotyczy przestrzeni i czasu jako swojego przedmiotu w większym stopniu niż inne nauki, np. nauki eksperymentalne⁵⁷⁴.

W tym miejscu warto dodać, iż, według Peirce'a przy kantowskiej definicji analityczności, odnoszącej się do podmiotowo-orzecznikowej struktury zdania (i przy założeniu jej trafności), filozofia kantowska byłaby, w ogólnych zarysach, prawdziwa. W istocie, jak przyznaje Peirce, „Kant uważał, że twierdzenia matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*; miał o tyle rację, że większość z nich nie jest tym, co on nazywał sądami analitycznymi, tzn. ich orzeczenie nie jest zawarte, w jego rozumieniu, w definicji podmiotu”⁵⁷⁵.

Peirce'owskie ujęcie analityczności jest w ogólnych zarysach na pozór dość jasne, oraz można je umieścić w kontekście jego ogólnej typologii rozumowań. Jak podkreśla Hilpinen w swojej obszernej pracy przeglądowej dotyczącej logiki Peirce'a, amerykański filozof dzieli rozumowania matematyczne na dedukcyjne, utożsamiane z analitycznymi, oraz syntetyczne; te ostatnie dzielą się dalej na rozumowania indukcyjne i abdukcyjne⁵⁷⁶. Jedynie w przypadku wnioskowań dedukcyjnych, konkluzje wynikają z przesłanek w sposób konieczny – w przypadku indukcji i abdukcji jedynie w stopniu przybliżonym, z pewnym prawdopodobieństwem.

Zgodnie z tą typologią, zdania matematyki stają się oczywiście analityczne. Takie jest też „oficjalne” stanowisko Peirce'a, któremu niejednokrotnie dawał wyraz w swoich pismach. Istnieją jednak podstawy do innej interpretacji podziału na zdania analityczne i syntetyczne w jego ujęciu. W wielu uwagach Peirce'a można mianowicie doszukiwać się powiązań pomiędzy tym podziałem a rozróżnieniem pomiędzy rozumowaniami korraliarnymi i

to znaczy, jego posiadanie części zasada się w tym, że umysł w dalszej kolejności rozpoznaje w nim te części.” (tamże, str. 338).

⁵⁷⁴ Por. Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 634.

⁵⁷⁵ Peirce, Ch.S., *Collected Papers...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 348.

⁵⁷⁶ Por. Hilpinen, R., *Peirce's Logic*, str. 649.

teorematycznymi. Na powiązanie takie wskazuje S.H. Levi w artykule *Peirce's Theoretic/Corollarial Distinction and the Interconnections Between Mathematics and Logic*. Jego interpretacja spotkała się ze sporą przychylnością, zgadzają się z nią w ogólnych zarysach m.in. cytowani tu Rafał Gruszczyński, czy Sun-Joo Shin. Levy argumentuje, iż Peirce często łączy komentarze dotyczące omawianego podziału z komentarzami o dwóch rozumowaniach. Amerykański logik analizując kantowski przykład syntetycznego zdania arytmetycznego $7+5=12$, pokazuje, że można je udowodnić korzystając z kilku aksjomatów i prostych definicji⁵⁷⁷. Jak podkreśla Peirce, dowodzi to, iż „ $7+5=12$ ” nie jest zdaniem syntetycznym. Konkluduje on dalej swój wywód następującym stwierdzeniem: „nie ma, w skrócie, potrzeby stosowania żadnego rozumowania teorematycznego w celu udowodnienia w oparciu o definicje, że $7+5=12$ ”⁵⁷⁸. Ze zdania tego można wyciągnąć następujący wniosek: zdania, których dowody wymagają rozumowań teorematycznych, są syntetyczne. Oczywiście dla Peirce'a większość zdań matematyki (być może wszystkie) jest analityczna. Przypomnijmy, że nie widział tego Kant: „to, że [Kant] nie był w stanie wytłumaczyć bogactwa matematyki, oraz tajemniczego czy wręcz mistycznego (*mysterious or occult*) charakteru jej zasadniczych (*principal*) twierdzeń, posługując się rozumowaniami kororaliarnymi, poprowadziło go do przekonania, że zdania matematyczne są syntetyczne”⁵⁷⁹. Mimo to, nie jest wykluczone, iż część zdań matematycznych wymaga dowodu korzystającego z rozumowań teorematycznych. Levy wyciąga stąd wniosek, iż „matematyka jest podzielona na część analityczną i syntetyczną, zgodnie z podziałem na rozumowania kororaliarne i teorematyczne”⁵⁸⁰.

Powyższe uwagi wciąż jeszcze jednak nie pokazują, gdzie należy szukać syntetycznego aspektu matematyki. Dodatkowo pojawia się pewien istotny problem, na który Levi zdaje się nie zwracać uwagi: godnie z przytoczonym powyżej ogólnym podziałem rozumowań, właśnie rozumowania teorematyczne są przecież rozumowaniami koniecznymi, a klasa rozumowań koniecznych pokrywa

⁵⁷⁷ Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 344.

⁵⁷⁸ Peirce, Ch.S., *The New Elements...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 344.

⁵⁷⁹ Peirce, Ch.S., *The New Elements...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 344.

⁵⁸⁰ Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 191.

się z klasą rozumowań analitycznych. Jak więc rozumieć (ewentualny) syntetyczny aspekt matematyki? Gdzie on się ujawnia? Pytania te okazują się być dość złożone i nieostre, można też na nie różnie odpowiadać.

Wydaje się, że syntetyczny element w matematyce można u Peirce'a rozumieć na trzy sposoby. Po pierwsze, można nawiązać do roli obserwacji i eksperymentu; po drugie, syntetyczność można wiązać z kreatywnym, twórczym pierwiastkiem w poznaniu matematycznym; po trzecie wreszcie, można w rozumowania matematycznych doszukiwać się elementu abdukcyjnego.

Aby przybliżyć pierwszy z nich, zacytujmy najpierw dłuższy fragment z Peirce'a:

dedukcja, albo rozumowanie analityczne jest (...) rozumowaniem, w przypadku którego wniosek wypływa (koniecznie, albo prawdopodobnie) ze stanu rzeczy wyrażonego w przesłankach, w przeciwstawieniu do naukowego, bądź syntetycznego rozumowania, które jest rozumowaniem, w przypadku którego, wniosek wypływa w sposób prawdopodobny z przesłanek, ze względu na warunki, przy których został on zaobserwowany. (...) owe dwie klasy rozumowań, mają, oprócz pewnych innych znaczących różnic (*contrasts*) (...) również istotne podobieństwa. Dedukcja jest w rzeczywistości kwestią percepcji oraz eksperymentu, w takim samym stopniu, jak wnioskowanie hipotetyczne; percepcja i eksperyment dotyczą jednak obiektów wyobraźni a nie rzeczywistych⁵⁸¹

Wydaje się, że można stwierdzić co następuje: jeśli eksperyment i obserwacja są charakterystyczne dla rozumowań syntetycznych (co wynika z wypowiedzi Peirce'a), to matematyka zawiera element syntetyczny – obok analitycznego. O ile granica pomiędzy dedukcją i obserwacją, obserwacją i analizą pojeciową, bywa nieostra – także rozróżnienie na rozumiana (i zdana) analityczne oraz syntetyczne jest nieostre.

Szczególnym typem rozumowania, które jest zarazem dedukcyjne oraz opiera się na obserwacji jest takie rozumowanie, które wyciąga ogólne wnioski z jednostkowego diagramu. Są to – jak wspominałem powyżej – rozumowania, w

⁵⁸¹ Peirce, Ch.S., *Collected Papers...*, za: Otte, M., *Analysis and Synthesis...*, str. 356.

przypadku których możemy przy pomocy percepcji dostrzegać to, co ogólne. O takich rozumowaniach w kontekście syntetyczności pisze sam Peirce; podkreśla, że o ile przez „aprioryczne” rozumiemy ściśle ogólne, a przez „syntetyczne” – doświadczalne, kantowskie pytanie o sądy syntetyczne *a priori* staje się pytaniem o ogólne sądy doświadczalne⁵⁸². Peirce przypomina, iż kluczowym pytaniem Kanta było: „jak możliwe są sądy syntetyczne *a priori*?”; zaznacza jednak, że „właściwym pytaniem powinno być dla niego: ‘jak uzasadnić możliwość ściśle ogólnych zdań, odnoszących się do doświadczenia’”?⁵⁸³. Peirce uznaje tu wagę pytań, które stawia przed sobą epistemologia kantowska, ale formułuje te pytania na inny sposób. Wydaje się, że pytanie o syntetyczność (oraz aprioryczność, o ile rozumieć ją jako ogólność) są istotnymi kwestiami filozoficznymi. Według Stjernfelt: „jest jasnym (*it goes without saying*), że ogólne sądy empiryczne – możliwości przedstawione w konkretnej formie (*the real possibilities*) – muszą należeć do dziedziny syntetyczności”⁵⁸⁴.

Po drugie, syntetyczność można wiązać z pierwiastkiem kreatywnym w matematyce, tym, który ma, według Rafała Gruszczyńskiego, stanowić o istocie rozumowań teorematycznych. Rozumowanie teorematyczne (i jednocześnie syntetyczne) byłoby więc takim, w przypadku którego musimy wpaść na pewien pomysł, wprowadzić do rozumowania element, który nie był zawarty w założeniach. Syntetyczne zdania to natomiast te, „których akceptacja wymaga przeprowadzenia dowodów teorematycznych”⁵⁸⁵. Również przy takiej interpretacji zmuszeni jesteśmy uznać istnienie relatywizacji podziału na zdania analityczne i syntetyczne, tu jednak jest ona innego rodzaju. Wraz z rozwojem metod logicznych, może się okazać, że twierdzenia, wcześniej uznawane za teorematyczne, mogą się okazać prostymi wnioskami z definicji (tzn. sformułowana będzie metoda przedstawienia ich jako takich). Sytuacje takie są przecież w matematyce częste – twierdzenie, którego dowód wymaga sporego wysiłku od matematyka może się okazać prostym wnioskiem z aksjomatów. W

⁵⁸² Por. Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 189.

⁵⁸³ Peirce, *Logic of Quantity*, za: Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 189.

⁵⁸⁴ Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 190.

⁵⁸⁵ Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki...*, str. 256.

słowach Gruszczyńskiego, „zдания syntetyczne z czasem ‘staną się’ zdaniaami analitycznymi, czy też lepiej byłoby powiedzieć zostaną rozpoznane jako zdania analityczne, jeśli uzyskają charakter utrwalonych w systemie definicji lub wszystkie kroki ich dowodów uzyskają charakter zdań analitycznych”⁵⁸⁶. Analityczność zdania uzależniona wtedy byłaby od aktualnego poziomu zaawansowania logiki. Stałaby się konsekwencją ewentualnej tezy logicyzmu w filozofii matematyki. Zwróćmy uwagę, na pewną różnicę pomiędzy tym ujęciem podziału na zdania analityczne i syntetyczne a tym związanym z rolą obserwacji w diagramowym poznaniu matematycznym. Poszczególne rozumowania nie mają tu bowiem charakteru częściowo analitycznego i częściowo syntetycznego. W tym ujęciu zdanie jest syntetyczne, dopóki nie stanowią one prostych wniosków z definicji; jeśli jednak będzie możliwe sformułowanie ich dowodu w ten właśnie sposób, stają się one analityczne. Podział pomiędzy zdaniaami analitycznymi i syntetycznymi jest tutaj niestabilny, nie jest jednak nieostry.

Trzecia trop „syntetyczności” w matematyce prowadzi do elementu abdukcyjnego w rozumowaniach matematyków. Jest to być może najbardziej dyskusyjny i najtrudniej „uchwytny” ze wszystkich trzech. Przypomnijmy najpierw, że Peircowska abdukcja to w istocie nic innego jak schemat wnioskowania, który ze zdań C oraz $A \rightarrow C$, każe wyprowadzić zdanie A. Schemat ten nie jest dedukcyjny – nie gwarantuje prawdziwości konkluzji przy prawdziwości przesłanek. Peirce nazywa więc rozumowania abdukcyjne hipotetycznymi, a ich konkluzje hipotezami⁵⁸⁷. Abdukcja odgrywa sporą rolę w logice Peirce’a. Prawidłowo przeprowadzona abdukcja dostarcza hipotezy mające na celu jak najlepsze wyjaśnienie dla badanych zjawisk. Peirce pisze nawet, że „abdukcja jest jedyną operacją logiczną, która [w przeciwieństwie do indukcji i dedukcji] wprowadza jakiegokolwiek nowe idee/pojęcia”⁵⁸⁸ do dyskursu.

⁵⁸⁶ Tamże, str. 257.

⁵⁸⁷ Zwróćmy uwagę, że termin „hipoteza” jest tu – jak się wydaje – używany w inny znaczeniu, niż wtedy, gdy Peirce stwierdza, że matematyka jest nauką hipotetyczną, że dotyczy hipotetycznych stanów rzeczy. W tymże ostatnim użyciu hipoteza nie jest zdaniem, co do którego prawdziwości nie jesteśmy pewni,

⁵⁸⁸ Peirce, Ch.S. *The Logic of Mathematics...*, str. 651.

Jak wspominałem powyżej, matematyka jest dla Peirce'a nauką hipotetyczną, a dokładniej zajmuje się ona „badaniem treści (*substance*) hipotez, czy też wytworów umysłu, mającym na celu wyciągnięcie koniecznych wniosków”⁵⁸⁹. Dedukcja jest więc główną metodą matematyki, ale nie stanowi ona o całości jej istoty: „błędem jest uznać, iż matematyka polega wyłącznie na wyciąganiu koniecznych wniosków(*consists exclusively in tracing out of necessary consequences*)”⁵⁹⁰. Można więc zapytać: jaki typ rozumowania (czy myślenia) prowadzi nas do sformułowania hipotezy⁵⁹¹? Stjernfelt, powołując się tu na wspomnianego Leviego, uważa, iż można wiązać hipotetyczny aspekt matematyki z abdukcją. Można tu jednak również wymienić kilka zastrzeżeń. Po pierwsze, wydaje się, że mówiąc o „hipotetycznej” naturze matematyki, oraz o „hipotetyczności” rozumowań abdukcyjnych, ma Peirce na myśli coś innego. W tym pierwszym przypadku nie ma przecież mowy o jakimś twierdzeniu, co do którego prawdziwości żyjemy jakąś wątpliwość. Po drugie, jaki dokładnie aspekt matematyki miałby być syntetyczny przy takim rozumieniu syntetyczności? Sama hipoteza, wnioski z niej czy jeszcze coś innego? Wydaje się, że szukanie abdukcyjnego pierwiastka jest ryzykowne. Mimo to Stjernfelt przekonuje, że przynajmniej niektóre hipotezy w matematyce są stawiane w ramach procesu abdukcji, oraz, że “abdukcyjny aspekt matematyki musi należeć do dziedziny syntetyczności”⁵⁹². Według Stjernfelta, „diagramy i abdukcyjny eksperyment z diagramami stają się królewską drogą ku badaniom nad syntetycznym *a priori*”⁵⁹³.

⁵⁸⁹ Peirce, *On Quaintity*, za: Stjernfelt, F., *Diagrammatology...*, str. 191.

⁵⁹⁰ Tamże, str. 191.

⁵⁹¹ Można powiedzieć, że jest to wersja klasycznego pytania o źródło aksjomatów

⁵⁹² Tamże, str. 192.

⁵⁹³ Tamże, str. 192.

Podsumowując niniejszy rozdział, przypomnę główne aspekty skoncentrowanej na digramach epistemologii matematyki Peirce'a, zwracając uwagę na podobieństwa i różnice pomiędzy stanowiskiem jego oraz Kanta.

1. Czym jest „diagram” u Peirce'a?

a) Na same diagramy składają się u Peirce'a zarówno „tradycyjne” symbole matematyczne, jak i różnego rodzaju rysunki – nie jest więc diagram obiektem wyłącznie „pozajęzykowym”.

b) Zastosowanie diagramu jest poza tym konieczne w każdej postaci poznania matematycznego (nie tylko w geometrii)– matematyka jest poznawana poprzez wizualną manifestację pojęć i problemów matematycznych.

2. Jaka jest natura procesu konstrukcji diagramu?

a) Stawiając hipotezę, konstruujemy diagram zgodnie z zasadą wyrażoną w terminach ogólnych.

b) Diagram nie jest przedstawiany w naoczności *a priori* rozumianej jako kantowska przestrzeń. Przestrzeń nie jest dla Peirce'a w jakimkolwiek sensie przedmiotem matematyki. Aprioryczny charakter aktu przedstawiania sobie obiektów matematyki nie może być tu więc rozumiany po kantowsku.

c) Naoczności nie są powiązane z pojęciami w jakiś nierozzerwalny sposób. W procesie konstrukcji diagramu ważna jest również inwencja – dla danego pojęcia (czy problemu) można więc konstruować diagram na wiele sposobów. Pojęć matematycznych nie przedstawiamy więc sobie w *danej im* naoczności *a priori*, jak to było u Kanta.

3. Jak przebiega proces poznania diagramowego?

a) Rozumowania diagramowe są rozumowaniami dedukcyjnymi, tzn. wnioski wynikają w sposób konieczny z przesłanek.

b) W rozumowaniach opierającego się na diagramie istotną rolę gra sama obserwacja diagramu, jak również eksperyment z diagramem, którym może być manipulacja diagramem, bądź eksperyment „myślowy”, wykonywany na obrazie

c) W przypadku rozumowań teorematycznych należy dodatkowo wykonać jakąś czynność, wprowadzić do rozumowania (i na diagramie) nową ideę, która nie jest zawarta w przesłankach.

d) Poznanie matematyczne (w tym obserwacja i eksperyment) dokonuje się z istotnym wkładem percepcji. Jest to jednak percepcja szczególnego typu – nie odnosi się do przedmiotów fizycznych w takim samym sensie, jak nauki przyrodnicze, ale – w pewnym sensie – do zobiektywizowanych obiektów mentalnych. Ta percepcja może też być źródłem ogólności twierdzeń matematycznych.

e) W toku rozumowania nie mniejszą niż percepcja rolę odgrywają rozum i kreatywność, za pomocą których zbieramy dane zmysłowe, odpowiednio je oceniamy i wyciągamy z nich wnioski.

4. Pojęcia a intuicja w poznaniu matematycznym.

a) Zgodnie z powyższą uwagą, nie wydaje się, by w ramach Peircowskiego ujęcia można było oddzielić składnik pojęciowy i intuicyjny. Peirce uznaje wagę tego kantowskiego podziału, ale uważa też, iż nie można ich oddzielić, w taki choćby sposób jak zrobił to Kant.

b) Trudno w pracach Peirce'a szukać kategorii intuicji, jako władzy umysłowej za pomocą której prawdy matematyczne poznajemy w sposób bezpośredni, pozapojęciowy i bez potrzeby formułowania przesłanek. Poznanie matematyczne oparte na diagramie nie jest bezpośrednim wglądem w prawdę obiektywną.

c) Dystynkcji pojęcia-intuicja można się u Peirce'a doszukiwać w podziale znaków na ikony i symbole. Te pierwsze, reprezentując przez podobieństwo, pozwalają odkrywać prawdy matematyczne przez analizę „wyglądu” znaku (diagramu). W takim sensie dają one poznaniu intuicyjne. W przypadku tych drugich (symboli) intuicja fizyczna nie gra dużej roli. Z uwagi jednak na to, że na diagramach występują na ogół zarówno ikony jak i symbole, poznanie diagramowe oparte nawet na takim rozumieniu intuicji, nie jest czysto intuicyjne.

5. Podział na zdania analityczne i syntetyczne a diagramy.

a) zdanie jest analityczne, jeśli jest dowodzone przy pomocy rozumowania dedukcyjnego.

Zdania dowodzone wyłącznie (dedukcyjnymi) metodami logiki są więc analityczne.

Peirce jednak *nie postrzega przy tym analityczności w kontekście podmiotowo-orzecznikowej struktury zdania*. Zdania syntetyczne to zdania prawdziwe jedynie z pewnym prawdopodobieństwem, doświadczalne.

b) sam fakt konieczności stosowania diagramów w matematyce nie świadczy o jej syntetyczności. Jednak o ile w matematyce istotną rolę gra percepcja, obserwacja oraz eksperymenty, można powiedzieć, iż zawiera ona pierwiastek syntetyczny (doświadczalny)

c) należy dodać, iż Peirce na ogół pisze o syntetycznych i analitycznych *rozumowaniach*, rzadziej o zdaniach.

d) W jednej z interpretacji pojęcia syntetyczności u Peirce'a, poznanie syntetyczne to takie, w przypadku którego uzyskujemy ogólne poznanie na podstawie percepcji jednostkowego diagramu.

6. Czy poznanie diagramowe pozwala nam rozszerzyć wiedzę?

a) czy można powiedzieć, że Peircowski diagram rozszerza wiedzę w takim samym sensie, jak kantowski? Wydaje się, że nie. Dla Kanta geometria jest syntetyczna, ponieważ nie możemy udowodnić jej twierdzeń rozważając jedynie znaczenia pojęć, musimy odwołać się do czystej naoczności. Peirce nie definiuje w ogóle syntetyczności w odniesieniu do podmiotowo orzecznikowe struktury zdania, nie uznaje również kantowskiej doktryny czystej naoczności przestrzeni.

b) Poznanie przy użyciu diagramu rozszerza jednak wiedzę w tym sensie, że obcowanie z diagramem (czy ze znakiem) pozwala dostrzec relacje pomiędzy jego elementami, które nie były wcześniej znane, które nie były zawarte w założeniach używanych przy konstrukcji diagramu. Poszerzenie wiedzy w tym znaczeniu nie jest połączone z syntetycznością – również zdania analityczne (korolariarne) rozszerzają w tym sensie wiedzę. Istnieje jednak pewna analogia pomiędzy syntetycznością twierdzeń matematyki a twierdzeniami dowodzonymi za pomocą rozumowań teorematycznych (które, przypomnijmy, można rozumieć jako źródło zdań syntetycznych). W tych ostatnich musimy wprowadzić *nowy element* na diagramie, bądź też wykonać pewną czynność związaną z eksperymentem, czy jakimiś jego przekształceniami. W tym sensie rozumowania teorematyczne na pewno dodają coś do tego, co było zawarte w założeniach z których korzystaliśmy przy konstrukcji diagramu, w ten sposób rozszerzając wiedzę. Również u Kanta w celu udowodnienia sądu syntetycznego konieczny jest – oprócz podmiotu i orzeczenia – „trzeci element”, którym dla Kanta jest jednak czysta naoczność.

7. Poznanie diagramowe a aprioryzm w matematyce

a) Peirce deklaruje, iż odrzuca aprioryzm w filozofii matematyki. Jest pragmatystą i fallibilistą, odrzuca kumulatywizm w filozofii matematyki, jak również możliwość bezpośredniego dostępu do niezmiennych prawd matematycznych.

b) Peirce oddala się również od aprioryzmu, o ile podkreśla rolę obserwacji i eksperymentu w poznaniu matematycznym. Z wszystkimi chyba odmianami aprioryzmu w filozofii matematyki kontrastują uwagi Peirce'a o roli percepcji w analizie diagramów matematycznych.

c) Wydaje się, że Peirce odrzuciłby również aprioryzm wyrażany stwierdzeniem, iż „zdanie jest priori wtw w *procesie jego uzasadniania nie musimy odwołać się do doświadczenia*”. Nieusuwalny składnik obserwacji i eksperymentu w poznaniu matematycznym (przynajmniej w odniesieniu do niektórych twierdzeń) wydaje świadczyć o tym, iż percepcja odgrywa istotną rolę w rozumowaniach matematycznych.

Dodajmy, że eksperyment i obserwacja są zwyczajowo łączone raczej z metodą nauk empirycznych.

d) Fakt, iż doświadczenie fizyczne odgrywa w matematycznym poznaniu istotną rolę nie oznacza, iż prawdziwość zdań matematyki uzależniona jest od zdarzeń występujących w świecie zewnętrznym, w szczególności nie może być przez nie obalona. Matematyka, będąc nauką hipotetyczną, nie dotyczy świata fizycznego jak swojego przedmiotu – w każdym razie żadnego konkretnego wydarzenia – ale hipotetycznych stanów rzeczy. Hipotetyzm jest w swoich ogólnych zarysach podobny do aprioryzmu kantowskiego: prawdziwość twierdzeń matematyki nie jest zależna od żadnego konkretnego

W tym sensie Peirce nie jest też empirystą w filozofii.

e) Peirce oddziela kategorie aprioryczności i konieczności. Rozumowania matematyczne są konieczne, nie oznacza to jednak, iż są *a priori*. Jest to kolejne odejście od filozofii kantowskiej.

Rozdział 7. Wprowadzenie do współczesnej dyskusji nad wizualizacjami w matematyce

Rozdział ten ma celu nakreślenie szerokiego tła dla rozważań nad współczesnymi pracami dotyczącymi wizualizacji w matematyce. W konsekwencji rozwoju geometrii nieeuklidesowych, jak również rozwoju logiki matematycznej, wizualizacje były w XX-wiecznej filozofii matematyki często uznawane za niewiarygodne jako źródło poznania matematycznego i zasadniczo zbędne w rozumowaniach matematycznych. Ta tendencja staje się też punktem odniesienia dla współczesnego nawrotu zainteresowania rolą wizualizacji w matematyce. W pierwszej kolejności należy więc przedstawić elementy utartej w XX wieku, negatywnej oceny wizualizacji w poznaniu matematycznym. W dalszej kolejności przedstawiam współczesne rozważania nad wizualizacjami na tle niektórych trendów we współczesnej epistemologii matematyki. Najpierw przestawię ogólne charakterystyki dominującej w XX wieku epistemologii matematyki skoncentrowanej na zagadnieniach logicznych. Na jej tle opiszę następnie silne we współczesnej literaturze tendencje kładące nacisk na potrzebę analizy praktyki matematyków. Następnie zarysuję ogólnie problematykę, którą podejmują filozofowie zajmujący się wizualizacjami, na jakie cechy poznania matematycznego zwracają uwagę, oraz jakie problemy i pytania przed sobą stawiają.

7.1. Diagramy w filozofii matematyki pierwszej połowy XX wieku

W konsekwencji szeroko przez mnie opisywanego rozwoju geometrii nieeuklidesowych, jak również rozwoju logiki matematycznej, na początku XX

wieku utrwalilo się wśród wielu matematyków przekonanie, iż diagramy oraz intuicja przestrzenna nie grają żadnej istotnej roli w dowodach geometrycznych, oraz matematycznych w ogóle. Mogą stanowić co najwyżej środki heurystyczne, bądź jako narzędzie w nauczaniu matematyki. Wyniki te spowodowały, że reprezentacje wizualne (jak figury geometryczne, czy wykresy) przestały być postrzegane jako wiarygodne źródło przekonań co do niektórych prawd matematycznych. Dla wielu matematyków reprezentacje przestrzenne stały się podejrzаныmi, albo nawet niechcianymi obiektami matematycznymi. Także w pedagogice istniały tendencje ku unikaniu wszelkiego rodzaju diagramów jako nieścisłych, angażujących zawodną intuicję wzrokową i budującą prze to złe przyzwyczajenia. Znany jest również podręcznik do analizy matematycznej autorstwa Edmunda Landaua, w którym nie zamieszczono ani jednego diagramu. Na kilku „frontach matematycznych” trwał jednak spór o wiarygodność i status diagramów w matematyce. Paolo Mancosu pisze o opozycji, w jakiej stali w tym sensie do siebie Felix Klein i szkoła Karla Weierstrassa (1815-1897)⁵⁹⁴. Znany jest bardzo krytyczny stosunek do diagramów matematyków ze szkoły Bourbaki. Ku eliminacji diagramów z matematyki skłaniał się też Bertrand Russell, gdy pisał, iż „dawniej zarówno matematycy jak i filozofowie uważali, że dowody w geometrii opierają się na figurach; dziś wiadomo, że jest to stwierdzenie fałszywe. W najlepszych książkach nie ma w ogóle żadnych figur”⁵⁹⁵.

Dodamy przy tym, iż intuicja przestrzenna nie została oczywiście w zupełności wyeliminowana z matematyki. Wizualizacje wciąż odgrywały istotną rolę w matematyce jako heurystyki, czy jako istotne środki w nauczaniu. Nauką, która w oczywisty sposób odwołuje się do intuicji wizualnych i jest bardzo mocno zakorzeniona w intuicji przestrzennej jest topologia.

Brak zaufania do intuicji przestrzennych był – obok omawianej już geometrii – również związany z rozwojem analizy matematycznej. Tutaj należy w

⁵⁹⁴ Por. Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str. 15.

⁵⁹⁵ Russell, B., *Matematyka i metafizyka*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 218. Pojawiały się oczywiście również stanowiska odmienne od głównego nurtu. Można tu przede wszystkim wymienić filozofię intuicjonizmu, w ramach której intuicja przestrzenna i filozofia Kanta były na różne sposoby rehabilitowane. Można również wspomnieć o filozofii matematyki Wittgensteina, oraz filozofach kontynuujących intuicyjne podejście do geometrii Kleina i Poincarégo.

szczegółności zwrócić uwagę na odkrycie (czy skonstruowanie) funkcji, które są w całej swojej dziedzinie ciągłe i jednocześnie nie są różniczkowalne. Pierwszy znany przykład takiej funkcji podał w 1872 Karl Weierstrass⁵⁹⁶. Funkcja ta przeczyła podstawowej intuicji związanej z funkcjami ciągłymi, zgodnie z którą „funkcja ciągła musi mieć pochodne wszędzie, poza punktami izolowanymi”⁵⁹⁷. Z wykresem funkcji ciągłej najczęściej łączone jest wyobrażenie nieprzerwaną krzywą. W punktach, w których funkcja jest różniczkowalna istnieje jednoznacznie określona styczna, której nachylenie do osi OX jest równe wartości pochodnej w tym punkcie. Intuicja podpowiada, że jeśli funkcja ciągła nie jest różniczkowalna w danym punkcie to jej wykres posiada w tym punkcie „ostre zakończenie” skierowane w górę lub w dół. Jeśli funkcja jest w danym punkcie różniczkowalna mamy, jak pisze Giaquinto, „silną wizualną inklinację aby myśleć, że muszą istnieć części krzywej po którejś stronie ostrego zakończenia, które są wystarczająco gładkie, aby istniała w tych punktach styczna”⁵⁹⁸. Stąd panowało przekonanie o tym, że funkcje ciągłe są różniczkowalne wszędzie poza punktami izolowanymi. Fakt ten był nawet „dowodzony” w wielu współczesnych Weierstrassowi podręcznikach. W owych dowodach korzystano z „intuicyjnie oczywistego” faktu, że funkcja zmieniająca się w sposób ciągły musi być kawałkami monotoniczna”⁵⁹⁹. Intuicje te okazały się, w świetle wyniku Weierstrassa, zawodne. Dodajmy przy tym, iż fakt istnienia funkcji ciągłych oraz nigdzie-różniczkowalnych nie dyskwalifikował oczywiście intuicji przestrzennej jako użytecznego źródła w analizie matematycznej, spowodował jednak, iż matematycy kwestionowali jej wiarygodność⁶⁰⁰.

⁵⁹⁶ Marcus Giaquinto pisze, że przykłady funkcji ciągłych nigdzie różniczkowalnych odnaleziono również w nieopublikowanym dziele Bolzana z 1834 r., oraz w dziele Celleriera z 1860 r., również nieopublikowanym. (por. Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 3, przypis 5). Stąd unikam przypisaniu Weierstrassowi w tym względzie pierwszeństwa, jak czasem się to czyni.

⁵⁹⁷ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 3.

⁵⁹⁸ Tamże, str. 3.

⁵⁹⁹ Bråting, K., Pejlare J., *Visualizations...*, str. 346.

⁶⁰⁰ Nie wszyscy matematycy uważali, iż funkcje ciągłe, nigdzie-różniczkowalne, przesądzą o niewiarygodności i nieprzydatności intuicji przestrzennej w analizie. Jak dużą rolę poznawczą grała intuicja przestrzenna widać na przykładzie myśli szwedzkiego matematyka Helge von Kocha (1870-1934). Uważał on, iż przykład Weierstrass jest „niewystarczający aby usatysfakcjonować nasz umysł z geometrycznego punktu widzenia; jest tak, ponieważ rozważana funkcja jest zdefiniowana przez wyrażenie analityczne, które ukrywa geometryczną naturę odpowiedniej krzywej, tak że z tego punktu widzenia nie widać dlaczego krzywa nie posiada stycznej; powinno się raczej powiedzieć, że pozory (*appearance*) jest w sprzeczności z faktem, który Weierstrass ustalił drogą

Wymieńmy więc krótko główne charakterystyki podejścia do diagramów, które stało się dominujące w filozofii matematyki XX wieku:

- 1) Reprezentacje wizualne są jedynie dodatkami do dowodów, ilustracjami, ułatwiającymi zrozumienie niektórych jego aspektów, lub wspomagającymi (z subiektywnego punktu widzenia) rozumowanie.
- 2) Diagramy nie grają nigdy istotnej roli w dowodach, można z nich zawsze zrezygnować, zastąpić przez argumentację czysto symboliczną. Jak pisze filozof matematyki Neil Tennant, diagram jest „zbędny (*dispensable*) jako narzędzie dowodowe (...) nie ma żadnego właściwego (*proper*) miejsca w dowodzie jako takim. Dowód jest bowiem obiektem syntaktycznym”⁶⁰¹
- 3) Dowód matematyczny wspartego w istotny sposób o diagram nie jest dowodem właściwym, czy kompletnym: „twierdzenie jest w istocie dopiero wtedy naprawdę udowodnione, gdy dowód jest w zupełności niezależny od rysunków”⁶⁰²

Chęć wyeliminowania ryzyka błędów, oraz dążenie do czysto formalno-symbolicznej ekspozycji dowód, spowodowała więc, iż dążono do wyeliminowania diagramów z kontekstu uzasadnienia. W „łagodniejszej” postaci tego stanowiska, akceptowano diagramy jako jedynie ilustracje, bądź pomoce heurystyczne i edukacyjne. W skrajnej postaci pojawiał się postulat zupełnej eliminacji diagramu z matematyki, głoszony przez wspomnianą szkołę Bourbaki, czy przez Laudana.

W dalszej części rozdziału przedstawię jak i dlaczego w ostatnich latach powraca wśród filozofów matematyki zainteresowanie wizualizacjami w

czysto analityczną” (H. von Koch, *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des Courbes planes*, za: Mancosu, P. *Visualization in Logic...*, str. 16). Dopiero wizualizacja pozwala więc, według szwedzkiego matematyka, zrozumieć omawiany rezultat. Aby uczynić ów rezultat w tym sensie bardziej przekonującym, czy łatwym do zrozumienia, von Koch skonstruował swój przykład funkcji ciągłej, z której wykresu „widać”, że nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie. Był przekonany, że w przypadku jego przykładu „każdy mógł zobaczyć za pomocą ‘naiwnej intuicji’ niemożliwość istnienia jednoznacznie określonej stycznej” (von Koch, za: Mancosu, P. *Visualization in Logic...*, str. 17). Przykład van Kocha ilustruje ogromne przywiązanie matematyków do intuicji przestrzennej, jak również jej elastyczność. (por. również Bråting, K., Pejlare J., *Visualizations...*, str. 349).

⁶⁰¹ Pasch, M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, za: Mancosu, P. *Visualization in Logic...*, str. 14.

⁶⁰² Za: Mancosu, P. *Visualization in Logic...*, str. 13.

matematyce. Rozpocznę od zarysowanie szerokiego kontekstu filozoficznego, w ramach którego te rozważania były przeprowadzane.

7.2. Epistemologia matematyki jako badanie jej logicznych podstaw

Nowy nurt – a właściwie nurty – w epistemologii należy też rozpatrywać jako reakcję na dominującą w niej tendencję do sprowadzania epistemologii matematyki do badań nad jej podstawami. Dynamiczny rozwój logiki w pierwszej połowie XX wieku wzbudził w wielu matematykach nadzieję, że matematykę można, w jakimś sensie, sprowadzić do logiki, bądź też – do teorii mnogości. Matematycy tacy, jak David Hilbert, dążyli do pełnej aksjomatyzacji matematyki, a więc sformułowania takiego układu aksjomatów i reguł dowodzenia (najlepiej finitystycznych), z których można by wyprowadzić całą matematykę. Z chwilą, gdy nadzieje te rozwiały słynne twierdzenia Gödla, badania podstaw matematyki skupiły się w dużym stopniu na badaniu fenomenu niezależności. Epistemologia matematyki skupiała się jednak wciąż na zagadnieniach związanych z podstawami matematyki. Była ona więc niezmiennie zdominowana przez pytania dotyczące logicznej struktury sformalizowanych teorii matematycznych, czyli m.in. zagadnień związanych z ich niesprzecznością, czy zupełnością. Rozważano (i wciąż się rozważa) status zdań nierozstrzygalnych, status niektórych aksjomatów teoriomnogościowych, jak aksjomat wyboru, czy np. status logiki drugiego rzędu. Nie umniejszając wagi tych z pewnością istotnych filozoficznie problemów, należy się jednak zgodzić z Bartem van Kerkhove, iż „ujęcia matematyki skupiające się na jej logicznych podstawach (*foundationalist approaches*) skupiały się głównie, jeśli nie wyłącznie na wytworach praktyki matematycznej”⁶⁰³. Przedmiotem badań nie

⁶⁰³ Van Kerkhove, B., *Aspects of Informal Mathematics*, w: *Incompleteness and Paradox. Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, Polimetrica International Publisher, Monza 2005, van Kerkhove, B., str. 269.

było więc pytanie, jak matematyk doszedł do danego twierdzenia, ale jedynie to, czy jest ono prawdziwe, bądź fałszywe, lub też w jakiej relacji logicznej pozostaje innych zdań w ramach danego systemu sformalizowanego. Nie rozważano więc na ogół charakterystyk procesu poznania matematycznego, nie różnicowano też pomiędzy różnymi typami dowodów. Dowód w takim ujęciu jest w pewnym sensie tworem idealnym: dowodem zdania A w danej teorii aksjomatycznej jest ciąg formuł A_1, \dots, A_n taki, że $A_n = A$, oraz każde A_i jest jednym z aksjomatów, bądź wynika na mocy przyjętych reguł wnioskowania z wcześniej wyprowadzonych formuł. Zgodnie z takim ujęciem, każdy poprawny dowód twierdzenia matematycznego można rekonstruować w danej teorii sformalizowanej (jak np. teorii mnogości Zermelo-Fraenkla). Inaczej mówiąc, każdy dowód można „sformalizować w postaci ciągu wyrażeń stosowanego języka formalnego. Z tego punktu widzenia dowód znany z praktyki stanowi jedynie swoisty skrót dowodu idealnego”⁶⁰⁴. Idealność takiego dowodu związana jest zarówno z oddaleniem od kontekstu jego odkrycia, ale również od szerszego kontekstu kulturowo-społecznego. Jak pisze B. van Kerkhove, filozofów zainteresowanych podstawami matematyki charakteryzowały „filozoficzne dyspozycje, jak a-temporalizm, a-kulturalizm, i a-psychologizm”⁶⁰⁵. Metoda matematyki sprowadzona do formułowania formalnych wyprowadzeń z aksjomatów stała się więc wyróżnikiem matematyki jako nauki kumulatywnej, oderwanej od kontekstu historycznego oraz nastawionej na dedukowanie twierdzeń z aksjomatów. Nieformalna matematyka nie ma miejsca w, nazwijmy to, formalno-logicznej wizji matematyki⁶⁰⁶. Jak pisze Imre Lakatos, nawiązując do filozofii pozytywizmu logicznego „zgodnie z zasadami pozytywizmu logicznego zdanie ma znaczenie jedynie wtedy, gdy jest albo ‘tautologiczne’, albo empiryczne. A że nieformalna matematyka nie jest ani

⁶⁰⁴ Wójtowicz, K., *Empiryczne aspekty dowodów matematycznych*, w: *Światy matematyki: tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010, str. 343.

⁶⁰⁵ Van Kerkhove, B., *Aspects...*, str. 272.

⁶⁰⁶ Nie oznacza to, iż zagadnienia, które pojawiają się w związku z praktyką matematyków nie były istotne dla filozofów matematyki pierwszej połowy XX wieku. Jak podkreśla Paolo Mancosu, celem prac Fregego było „formalne ujęcie wszystkich poprawnych postaci rozumowań występujących w matematyce”; Hilbert z kolei zwracał uwagę na realne (finitystyczne) i idealne (infinitystyczne) elementy w poznaniu matematycznym (Mancosu, P., *Introduction*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 7).

‘tautologiczna’, ani empiryczna, musi być pozbawiona znaczenia, zwyczajnie bezsensowna”⁶⁰⁷. W szczególności oczywiście rola wizualizacji w poznaniu matematycznym jest w takim ujęciu zredukowana niemal do zera, gdyż każdy diagram, czy wykres można rozpatrywać po prostu jako obiekt mnogościowy i tylko jako taki odgrywa jakąkolwiek rolę w poznaniu matematycznym.

7.3. Filozofia *quasi*-empiryzmu w matematyce

Zarysowane powyżej rozumienie natury dowodu matematycznego – a w konsekwencji i całej epistemologii matematyki, w której centrum jest przecież dowód – stało się przedmiotem krytyki wielu filozofów matematyki. W pierwszej kolejności należy tu wymienić *quasi*-empiryzm w filozofii matematyki. Jej głównymi przedstawicielami są Imre Lakatosowi, W.V.O. Quine’owi, Hilaremu Putnamowi oraz Philipowi Kitcherowi. Poniżej zarysuję ich koncepcję epistemologii matematyki.

Praca I.Lakatos’a *Dowody i refutacje* uważana jest za pionierską analizę procesu poznania w matematyce. Lakatos przygląda się w niej procesowi poznania matematycznego na przykładzie pochodzącego od Eulera twierdzenia, zgodnie z którym dla wszystkich wielościanów foremnych zachodzi wzór $V - E + F = 2$ ⁶⁰⁸. Lakatos prowadzi tu niezwykle interesujące rozważania wokół prób dowodu tego twierdzenia – i jednocześnie wokół prób ścisłego i satysfakcjonującego zdefiniowania pojęcia wielościanu. Przedstawia on ów proces jako mozaikę nawzajem ze sobą powiązanych hipotez, definicji, dowodów, częściowych dowodów i kontrprzykładów dla stawianych hipotez. Lakatos wnikliwie analizuje proces kształtowania się dowodów; w szczególności, jak pisze Ewa Piotrowska – węgierski matematyk pokazuje, jak „nowe dowody mają w tym zakresie określoną poznawczą funkcję i rolę, ponieważ wyjaśniają stare kontrprzykłady, a najczęściej

⁶⁰⁷ Lakatos, I., *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, TIKKUN, Warszawa 2005, str. 19.

⁶⁰⁸ V oznacza ilość wierzchołków w danym wielościanie, E ilość krawędzi, a F – ilość ścian.

nowe kontrprzykłady podważają stare dowody”⁶⁰⁹. Obok analizy procesu uzasadniania, Lakatos zwraca uwagę na proces formowanie się pojęć i definicji w matematyce. Ujmuje on go jako proces dynamiczny oraz powiązany z praktyką stawiania hipotez: „definicje zwykle się formułuje i zaczyna o nie spory wtedy, gdy wyłaniają się kontrprzykłady”⁶¹⁰. Oprócz analizy praktyki matematyków, Lakatos podkreślał również w uprawianiu filozofii matematyki konieczność brania pod uwagę historii tej nauki, odrzucając przy tym również kumulatywizm w filozofii matematyki⁶¹¹.

W.V.O. Quine poświęcał mniej, niż Imre Lakatos, uwagi procesowi poznania matematycznego, kładł za to nacisk na powiązania matematyki z naukami przyrodniczymi. Znany jest on z filozofii holizmu, zgodnie z którą matematyka powinna być na epistemologicznym oraz ontologicznym poziomie traktowana na równi z naukami empirycznymi jako ich integralna część. Na matematykę czy teorię mnogości można, według niego, patrzeć jak na „działy teoretyczne nauk przyrodniczych – jako zawierające prawdy czy hipotezy, które uzasadnia się nie tyle za pomocą czystego światła rozumu, co raczej przez pośredni systematyczny wpływ, jaki wywierają na organizację danych empirycznych w naukach przyrodniczych”⁶¹². Quine, który znany jest ze swojej krytyki pojęcia konieczności, odrzuca w związku z tym tezę, iż zdania matematyki są dowodzone jako prawdziwe w sposób nieodwołalny i wieczny. Co więcej, przynajmniej część twierdzeń matematyki – jako będącej częścią nauk przyrodniczych – jest, według niego, otwarta na empiryczną dyskfirmację. Takie ujęcie matematyki – z pewnością bliskie stanowisku empiryzmu w filozofii matematyki – jest też bezpośrednio związane z praktyką matematyków. Tak o tym pisze Paolo Mancosu: „ponieważ rozważanie matematyki i nauk przyrodniczych na jednej płaszczyźnie (*setting on a par*) umożliwiło po pierwsze teoretyczną analizę matematyki na takim

⁶⁰⁹ Piotrowska, E., *Spoleczny konstrukttywizm...* str. 259.

⁶¹⁰ Lakatos, I., *Dowody i refutacje...*, str. 41-42.

⁶¹¹ Por. Piotrowska, E., *Teoria i eksperyment w matematyce w poglądach Imre Lakatosa*, (w:) Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Tom XXIV, red., D. Sobczyńska, E. Zielonacka-Lis, J. Szymański, Poznań 1995, str. 125-6.

⁶¹² Quine, W.V.Q., *The philosophical bearing of modern logic*, za: Lakatos, I., *Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki?*, (w:) *Współczesna filozofia matematyki: Wybór tekstów*, PWN, Warszawa 2002, str. 219.

samym poziomie jak nauk przyrodniczych, a to umożliwiło dalej poprowadziło matematyków do stosowania do matematyki narzędzi analizy, które wcześniej stały się modne na polu historii i filozofii nauk przyrodniczych”⁶¹³.

Phillip Kitcher formułuje w swojej ważnej książce *The Nature of Mathematical Knowledge* szerszą i bardziej szczegółową *quasi*-empirystyczną interpretację matematyki niż powyżej wspomniani filozofowie. Ma przede wszystkim na celu poszerzenie i uzupełnienie ich ujęć⁶¹⁴. W pracy tej analizuje proces wzrostu matematyki, szczególny nacisk kładzie na trzy cechy niezgodne ze „standardowym” ujęciem matematyki. Po pierwsze, Kitcher stara się wykazać, iż matematyka nie jest nauką aprioryczną, po drugie eksponuje jej społeczny charakter, a po trzecie kładzie nacisk na historyczny wymiar matematyki, czyli na jej szerszej pojęty wzrost⁶¹⁵.

Warto zwrócić uwagę, iż rozważania wspomnianych filozofów w dużym stopniu odnoszą się do podziałów na zdania analityczne syntetyczne, *a priori* i *a posteriori*, oraz konieczne i przypadkowe. Każdy z nich podważał przekonanie, iż matematyka jest nauką aprioryczną, analityczną i konieczną, która to teza była głoszona przez pozytywizm logiczny. Wydaje się, że będące konsekwencją filozofii Quine’a, czy Putnama odrzucenie zasadności ostrych podziałów (czy odmawianie im znaczenia filozoficznego) ma również swoje konsekwencje dla filozofii praktyki matematycznej. Po pierwsze, podważona została teza, iż matematyk posługuje się w swoich badaniach jedynie pozbawionymi znaczenia symbolami, wraz z regułami ich przekształceń. Konsekwencją takiego stanowiska było, jak pisze Hilary Putnam, „obnażenie naiwności poglądu, w myśl którego matematyka polega na stosowaniu, w pewnym sensie, ‘reguł językowych’”⁶¹⁶. Również Lakatos odrzucał też ideę, iż matematyka jest nauką dotyczącą przekształcania symboli; jak pisze Ewa Piotrowska, dostrzegł on, iż „nie można stosować sztywnych granic treściowych oraz metodologicznych między matematyką jako nauką wyłącznie

⁶¹³ Mancosu, P., *Introduction...*, str. 5

⁶¹⁴ Por. Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, 1985, źródło: www.oxfordscholarship.com, str. 4.

⁶¹⁵ Por. tamże, str. 4-5.

⁶¹⁶ Putnam, H., *Analityczne i syntetyczne*, w: *Wiele twarzy realizmu i inne eseje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998 (pierwsze wydanie 1962), str. 16.

aprioryczną i sformalizowaną a naukami empirycznymi”⁶¹⁷. Znaczenia pojęć matematycznych zmieniają się, wypełnione są treścią empiryczną, a również – co jest kluczowe dla mojej pracy – treścią wizualną.

Takie ujęcie matematyki, znaczenia pojęć matematycznych i w konsekwencji natury dowodu matematycznego toruje drogę koncepcjom, które odrzucają wizję matematyki jako posiadającą diametralnie odmienny status epistemologiczny i ontologiczny niż nauki empiryczne. Jak pisze Paolo Mancosu, „Quine’owska krytykę podziału na zdania analityczne i syntetyczne można postrzegać jako decydujący (*deceisive*) krok w kierunku rozważania matematyki metodologicznie na takim samym poziomie, co nauki przyrodnicze”⁶¹⁸.

Warto tu, za Putnamem i Lakatosem, wymienić kilka charakterystyk poznania matematycznego, na uwagę zwracali wspomniani powyżej filozofowie, jako na zbliżające je do poznania empirycznego. Nazywali je oni quasi-empirycznymi rozumowaniami w matematyce, a więc takimi, które pod wieloma względami przypominają rozumowania występujące w naukach empirycznych⁶¹⁹.

a) Putnam wskazuje na dowody (czy rozumowania), które nie są w pełni sformalizowane, będąc opartymi na przykład na analogiach z innymi dowodami (cytuje tu takie quasi-empiryczne rozumowanie zastosowane do tezy, iż suma szeregu $1/n^2$ jest równa $\pi/6$)⁶²⁰. Takie rozumowania poprzedzają często formalne dowody, sformułowane w dalszej kolejności.

b) Wprowadzenie aksjomatu wyboru do teorii mnogości Zermelo-Fraenkla ocenia również Putnam jako zastosowanie „argumentu *quasi-empirycznego* do

⁶¹⁷ Piotrowska, E., *Teoria i eksperyment...*, str. 133.

⁶¹⁸ Mancosu, P., *Introduction...*, str. 6. W liście do Woodgera, pisał Quine, iż odrzucenie podziału na zdania analityczne i syntetyczne jako pustego pociąga to, iż „pojęcia matematyki i logiki domagają się empirystycznej i pozytywistycznej krytyki w takim samym stopniu, jak pojęcia fizyki” (za: tamże, str. 6).

⁶¹⁹ Nie mam tu przy tym na celu podanie wyczerpującej ich listy.

⁶²⁰ Por. Putnam, H., *Czym jest prawda matematyczna?*, (w:) *Współczesna filozofia matematyki: Wybór tekstów*, PWN, Warszawa 2002, str. 254-255.

usprawiedliwienia rozszerzania aksjomatycznych podstaw matematyki”⁶²¹. Ową *quasi-empiryczną* motywacją jest owocność aksjomatu wyboru w matematyce.

c) Putnam wskazuje na metody przedteoretyczne jako *quasi-empiryczne*. Wspomina tu na przykład o korzystaniu z wielkości nieskończenie małych.

d) Lakatos twierdzi, iż można mówić – jeśli o nie falsyfikatorach – to o „potencjalnych falsyfikatorach w matematyce”⁶²².

Powyższe zestawienie nie jest oczywiście wyczerpujące – można wymienić bardzo wiele typów *quasi-empirycznych* rozumowań w matematyce. Dodam, iż niektóre z nich związane są z wizualizacjami, o czym mowa będzie w dalszej części pracy.

7.4. Epistemologia matematyki ostatnich kilkudziesięciu lat – zwrot ku praktyce matematyków

Quasi-empiryzm w matematyce znalazł kontynuację we współczesnej epistemologii matematyki. Różne trendy i aspekty praktyki matematyków, w tym nieformalne metody przez nich stosowane stały się głównym tematem badań wielu filozofów matematyki, nie ograniczając się jednak do wyróżniania podobieństw matematyki i nauk empirycznych. Zasadniczym przedmiotem analiz jest tu rzeczywista praktyka badawcza matematyków. Trudno tu wymienić głównych reprezentantów tak rozumianego nurtu, ponieważ prowadzone są tu niezależne od siebie badania nad różnymi aspektami praktyki matematycznej. Jako jeden z pierwszych ważnych zbiorów prac można tu wymienić antologię tekstów pod redakcją Thomasa Tymoczko, pt. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*

⁶²¹ Tamże, str. 252.

⁶²² Lakatos, I., *Renesans empiryzmu...*, str. 233.

z wydaną w 1991 roku, czy książkę Świat matematyki Philipa J. Davisa i Reubena Hershha. Dziś dziedzina ta jest obecnie na tyle szeroka, iż trudno wymieniać głównych przedstawicieli.

Wróćmy jednak do genezy „nowej epistemologii matematyki” w jej relacji z „tradycyjnie” pojmowaną epistemologią. Zwolennicy logiczno-formalnego ujęcia dowodu zauważają oczywiście, iż dowody, jakie publikowane są w czasopismach matematycznych, czy takie, które formułują w swojej praktyce badawczej matematycy, nie mają postaci kompletnych zapisów wnioskowań z aksjomatów teorii mnogości Zermelo-Fraenkla. Dowody takie byłyby przede wszystkim bardzo długie, oraz nieczytelne. W praktyce pojawiają się głównie dowody, jeśli można tak powiedzieć, pół-formalne. Zgodnie z tradycyjnym stanowiskiem, każdy opublikowany i uznany za poprawny dowód można zawsze przedstawić w postaci wnioskowania z aksjomatów. Ze względów czysto pragmatycznych, dowody przedstawiane są jednak w postaci skrótowej.

Zwolennicy takiego podejścia do matematyki nawiązują – podobnie, jak *quasi*-empiryści – krytycznie do „klasycznej” koncepcji dowodu w matematyce. Zwraca się tu na przykład uwagę na to, iż logika formalna nie pełni w rzeczywistości większej roli w rozumowaniach matematycznych. Jak podkreśla Hao Wang, większość matematyków nie nauczyła się nawet porządnie logiki predykatów. Nawet Wang, doskonały matematyki i logik, podkreśla iż „tradycyjna logika jest w większym stopniu przeszkodą niż pomocą we właściwym rozumowaniu, którym w dość adekwatny sposób zajmuje się nasza naturalna zdolność poznawcza (*natural power*)⁶²³. Niektórzy filozofowie podkreślają nawet brak jakiegokolwiek potrzeby logicznych podstaw dla matematyki. **Rav** twierdzi, iż „ważnym jest aby pamiętać, iż matematyka nie jest budowlą (*edifice*), która zagrożona jest zawaleniem (*collapse*), jeżeli nie jest oparta na trwałych i wiecznych podstawach, wspieranych przez logiczne, filozoficzne bądź poza-matematyczne konstrukcje”⁶²⁴

⁶²³ Wang, H., *Theory and Practice in Mathematics*, (w:) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, red. T. Tymoczko, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998, str. 134.

⁶²⁴ Rav, K., *Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology*, za: Van Kerkhove, B., *Aspects...*, str. 271.

Filozofowie, którzy podkreślają potrzebę badania praktyki matematyków, podkreślają często, iż formalne wyprowadzenia nie grają prawie nigdy roli w rzeczywistym procesie dowodzenia, jak również nie są konieczne w celu przekonania innych matematyków co do prawdziwości dowodzonego twierdzenia. Spróbujmy więc w tym miejscu odpowiedzieć na pytania: co rozumiemy przez sformułowanie „praktyka matematyków”? Ogólnie można ją ująć jako związaną z tym, jak matematycy w rzeczywistości „uprawiają matematykę” – jak kształtują i w jaki sposób rozumieją poszczególne pojęcia matematyczne; istotne jest dalej to, jak rozumują, jak dochodzą do przekonań odnośnie wartości logicznej zdań matematycznych, wreszcie – jak dowodzą twierdzeń matematycznych. Wymieńmy więc kilka podstawowych elementów praktyki matematycznej jako przedmiotu badań „nowej epistemologii matematyki”:

1) Dowody nieformalne rozumiane jako pojawiające się w druku, albo na kartce papieru, tablicy, czy nawet w rozmowie, które nie są w pełni sformalizowane w którejś z teorii aksjomatycznej, ale które społeczność matematyków (bądź jakaś jej część) uznaje za poprawne i w sposób ostateczny dowodzące danej tezy. Jest to, inaczej mówiąc, takie rozumowanie, które zazwyczaj określa się jako „dowód”. Może ono w szczególności korzystać z diagramów.

2) Innym wymiarem matematyki jest to, jak matematycy kształtują pojęcia matematyczne oraz ich formalne definicje. To bardzo ciekawie zagadnienie rozważał już na przykładzie pojęcia wielościanu Imre Lakatos we wspomnianej tu pracy *Dowody i refutacje*.

3) Istotne są również metody, które stosują matematycy w badaniu obiektów matematycznych oraz poszukiwaniu dowodów twierdzeń. Są to bardzo często nieformalne metody, jak zastosowania analogii, konfirmacji. Wiele z nich nie ma przy tym na celu jedynie odnalezienie dowodu, ale np. odkrycie czy wyjaśnienie. Metodą badania obiektów matematycznych, o której chciałbym tu wspomnieć są eksperymenty w matematyce. Eksperymentem może być badanie własności danego

obiekty matematyczne metodą prób i błędów czy manipulacje na diagramie (jak chciał Ch.S. Peirce). Dla filozofii matematyki ostatnich lat szczególności interesujące stały się eksperymenty komputerowe. Komputery pozwalają, jak wiadomo, na wykonywanie ogromnej ilości obliczeń w krótkim czasie, wyręczając w ten sposób matematyków. Za pomocą komputerów matematycy mogą więc badać zależności teorioliczne dla bardzo wielu podstawień. Istotnym typem eksperymentu jest ten, który wiąże się z komputerowymi wizualizacjami skomplikowanych obiektów matematycznych.

4) Dla badaczy praktyki matematycznej istotne są też powody, dla których matematycy budują w sobie przekonania co do prawdziwości twierdzeń. Jeśli dowód można uznać za obiektywne potwierdzenie prawdziwości danego twierdzenia, to takie przekonania należy nazwać subiektywnymi. Pytaniem które można tu rozważać jest więc na przykład: co na subiektywnym, indywidualnym, nazwijmy to, przedteoretycznym poziomie stanowi dla nich uzasadnienie prawdziwości twierdzenia?

5) Dalej można wymienić rozumowania, co do których istnieją wątpliwości, czy można je uznać za dowód. Można wymienić dużo typów takich rozumowań. Można tu wymienić „dowody probabilistyczne”, czy jeszcze bardziej kontrowersyjne, analizowane w dalszej części pracy „dowody wizualne”, czy „dowody obrazkowe”.

Chciałbym zwrócić tu uwagę na kontrowersje związane z zastosowaniami komputerów, w tym przypadku nie w celu eksperymentowania z obiektami matematycznymi, ale właśnie w celu dowodzenia twierdzeń. Izabela Bondecka-Krzykowska, proponuje wyróżnić trzy typy zastosowań komputerów w tym celu. W pierwszym przypadku komputery jedynie sprawdzają wykonane już przez matematyków „tradycyjną” metodą dowody, poprzez odpowiednie ich zakodowanie⁶²⁵. Jak pisze wspomniana filozof matematyki „takie zastosowania

⁶²⁵ Bondecka-Krzykowska, I., *The four-color theorem and its consequences for the philosophy of mathematics*, „Annales UMCS Informatica AI” Vol. 2, 2004, str. 7.

komputerów nie ustanawia nowych prawd, ale jedynie umożliwia nam sprawdzenie tych istniejących”⁶²⁶. W drugiej kolejności można wymienić automatyczne dowody twierdzeń matematycznych. Jak pisze Bondecka-Krzykowska, dowody te możemy podzielić na dwie grupy: 1) dowody twierdzeń, które posiadają tradycyjne dowody, 2) twierdzenia, które są nowymi prawdami matematycznymi, które nie były wcześniej udowodnione⁶²⁷. W drugim natomiast przypadku komputery „same” tworzą dowod. Wreszcie pojawiają się dowody wspomagane przez komputery (*computer –assisted proofs*); w takich rozumowaniach komputery używane są do „skrócenia długich/trudnych obliczeń, ale rozumowanie przeprowadzone jest przez człowieka matematyka”⁶²⁸. Przykładem takiego zastosowania komputerów jest słynne Twierdzenie o czterech barwach, które udowodnili za pomocą komputerów Kenneth Appel i Wolfgang Haken. Z dowodami komputerowymi wiąże się wiele problemów. Jednym z nich jest to, iż wiele z „dowodów komputerowych” jest na tyle długich, że niemożliwe jest przejrzanie i „ogarnięcie myślą” przez jednego matematyka. Ten sposób wykorzystania komputerów nie będzie przedmiotem moich rozważań, gdyż nie wiąże się on bezpośrednio z wizualizacjami w matematyce. Został on jedynie zarysowany, aby na jego tle umieścić rozważania nad eksperymentami wizualnymi w matematyce, które będą przedmiotem rozważań kolejnego rozdziału.

6) Należy też wspomnieć społeczny aspekt dowodu matematycznego. Ten wymiar poznania matematycznego był również w dużym stopniu ignorowany w dotychczasowej filozofii matematyki (m.in. tej poprzedzającej formalizm i logicyzm). Wskazuje się tutaj na kulturowe, jak i społeczne determinanty rozwoju matematyki⁶²⁹. Te ostatnie rozważane są w ramach szerokiego nurtu społecznego konstruktywizmu. Jego współtwórcą był Paul Ernest, który obok filozofii

⁶²⁶ Tamże, str. 7.

⁶²⁷ Tamże, str. 7.

⁶²⁸ Tamże, str. 8.

⁶²⁹ Systematyczną refleksję nad kulturowym wymiarem matematyki podjął jako pierwszy Ray Wilder, a kontynuował m.in. Leslie White. (por. Piotrowska, E., *Spółeczny konstruktywizm...*, str. 20).

matematyki zajmował się również różnymi aspektami edukacji matematycznej, jak również wspomnianego kulturowego aspektu matematyki⁶³⁰.

Można ogólnie powiedzieć, iż społeczny konstruktywizm akcentuje – podobnie, jak było to w przypadku *quasi*-empiryzmu – dynamiczny i historyczny aspekt matematyki, jak również jej wymiar społeczny. Tu społeczny konstruktywizm odwołuje się do roli matematyki we współczesnym technologicznym społeczeństwie, oraz, jak pisze badaczka społecznego konstruktywizmu, Ewa Piotrowska, do „szerszych kwestii społecznych łączonych z filozofią matematyki, a mianowicie związków jej z kulturą, a nawet polityką i światopoglądem, zwłaszcza z kontekstem społecznym (np. kwestiami płci, rasy, klas), a także językiem matematycznym”⁶³¹. Filozofia społecznego konstruktywizmu charakteryzuje się bardzo dużym zróżnicowaniem, i „nie obowiązuje w nim żadna ujednoczona epistemologia”⁶³². Jeśli chodzi o poznanie matematyczne, można wyróżnić następujące charakterystyki tego nurtu:

1) w procesie poznania matematycznego najważniejsza jest „pomysłowość matematyka”, oraz „dokonywanie rozważnych wyborów (deliberate choices)”, „podejmowanie odpowiednich twórczych starań oraz „badawczych prób (endeavours)”⁶³³

2) wiedza matematyczna jest „czynnie budowana przez poznający podmiot”, a „zasadniczym jej celem jest konstruowanie obiektów matematycznych”⁶³⁴.
Matematyka jest konstruowana, a nie odkrywana.

3) poznanie matematyczne – obok poziomu formalnego – kształtuje się na poziomie społecznym, jego rozwój wyznaczony jest również przez potrzeby zastosowań matematyki⁶³⁵.

⁶³⁰ Por. Piotrowska, E., *Społeczny konstruktywizm...*, str. 34.

⁶³¹ Tamże, str. 41.

⁶³² Tamże, str. 42.

⁶³³ Tamże, str. 201.

⁶³⁴ Tamże, str. 202.

⁶³⁵ Por. tamże, str. 203.

Spółeczni konstruktywisci nie neguj, iż czysto formalno-logiczne aspekty dowodów peni w matematyce bardzo duża rol. Jednak dowody „stają się rzeczywistością, jeśli o ich wiarygodności oraz prawomocności decyduje przekonanie i akceptacja okreszonej nie tylko jednostki, ile wspólnoty matematyków”⁶³⁶. Akceptacja dowodu jest przy tym uzależniona od szeregu czynników – uzdolnień i możliwości zawodowych, od tego, czy matematyk akceptuje „kryteria perswazji odpowiadające okreslnemu dowodowi matematycznemu”, które to kryteria mają w dużym stopniu wymiar spoeczny⁶³⁷. Warto tu dodać, iż problemy epistemologiczne podejmowane przez społecznych konstruktywistów nie są bez znaczenia dla kwestii roli wizualizacji w poznaniu matematycznym.

W ramach podsumowania warto rozway pytanie: na ile charakterystyka rzeczywistej praktyki matematyków ma znaczenie filozoficzne? Co bliższa analiza praktyk matematyków może powiedzieć coś o samej matematyce? Według Thomasa Tymoczko ma ona znaczenie kluczowe: „to praktyka matematyki jest Źródłem roznych filozoficznych watpliwoci (*perplexities*), które możemy wiza z matematyk, oraz to praktyka dzierży klucz do rozwia, które możemy otrzyma”⁶³⁸. Zaznaczmy jednak, iż konsekwencje badań nad praktyk dla ontologii matematyki, czy też jej relacji z naukami empirycznymi nie są jednoznaczne.

7.5. Problem wizualizacji w literaturze wsplczesnej

Jak wspominałem powyżej, problematyk wizualizacji w matematyce można rozwaa w kontekście szerszego wsplczesnego nurtu w epistemologii matematyki, kładącego nacisk na rzeczywistą praktyk matematyków. Najogólniej rzecz biorąc, przedmiotem rozwaa staje się tu więc rola narysowanych

⁶³⁶ Tamże, str. 268.

⁶³⁷ Tamże, str. 268.

⁶³⁸ Tymoczko, T., *New Directions...*, str. 125.

diagramów, wizualizacji wewnętrznych czy też wizualizacji komputerowych w poznaniu matematycznym – w dowodach jak również inne funkcje epistemiczne, jak odkrycie, czy wyjaśnianie.

Prowadzone w ostatnich latach badania nad wizualizacjami wpisują się jednak również w inne nurty obecne we współczesnej epistemologii. Po pierwsze, są to prowadzone przez psychologów i kognitywistów badania nad percepcją wzrokową, czy ogólniej procesami poznawczymi związanymi ze zmysłem wzroku. Po drugie, istotne znaczenie dla wzrostu zainteresowania wizualnymi reprezentacjami obiektów matematycznych mają ogromne możliwości obliczeniowe komputerów, zezwalających m.in. na wizualną reprezentację bardzo skomplikowanych obiektów matematycznych. Wymienione kierunki badań nie wyczerpują przy tym listy; jak pisze Paolo Mancosu, „renesans zainteresowania wizualizacjami w logice i matematyce pojawił się w konsekwencji rozwoju badań w kilku różnych obszarach, w tym w informatyce, matematyce, edukacji matematycznej, psychologii kognitywnej, oraz filozofii”⁶³⁹.

Przyjrzyjmy się więc bliżej, jaka problematyka jest przedmiotem prac dotyczących wizualizacji w matematyce. Punktem wyjścia dla nawrotu zainteresowań wizualizacjami jest to, iż stosowanie diagramów, wykresów, jak również myślenie wizualne, jest bardzo istotnym elementem praktyki matematyków. Wizualizacja nie musi być postrzegana jedynie jako narzędzie zbędne i szkodliwe – przeciwnie – wbrew wspomnianym wcześniej argumentom przeciwników diagramów, są one w rzeczywistości stosowane nagminnie. Wizualizacje pozwalają zapoznać się z obiektami matematycznymi, jak to się zwykle ujmuje, „wrobić sobie intuicje” związane z niektórymi z nich. Mogą służyć jako ilustracje przy przedstawianiu nowych pojęć matematycznych, czy w celu lepszego zrozumienia niektórych dowodów, są również ogromnie ważne w nauczaniu matematyki. To, jak bardzo wizualizacje cenią sobie sami matematycy dobrze obrazuje następująca wypowiedź znanego matematyka Michaela Atiyaha, wygłoszona na jednej z konferencji:

⁶³⁹ Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str. 13.

Najważniejszym aspektem wzrostu zainteresowania wizualizacjami jest ich rola w uzasadnianiu twierdzeń matematyki – w matematycznych rozumowaniach oraz przede wszystkim w dowodach. Temu zagadnieniu poświęca się też najwięcej miejsca w pracach dotyczących filozoficznych aspektów wizualizacji. Rzadko podważana jest przy tym teza, iż każdy dowód można w ostateczności (i w teorii) poddać rekonstrukcji w teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, czy innym systemie sformalizowanym, nie neguje się też, iż intuicja przestrzenna jest w wielu przypadkach zawodna. Mimo to zauważa się, iż rola diagramów w uzasadnianiu zdań matematyki jest o wiele większa, niż dotychczas utrzymywano. Zwraca się tu uwagę na to, iż:

- 1) Wizualizacje mogą być istotną częścią rozumowań
- 2) Mogą one zasugerować, jak może przebiegać dowód twierdzenia
- 3) Wizualizacje mogą być inspiracją do sformułowania nowego twierdzenia
- 4) Pewne fakty matematyczne byłyby bardzo trudne do odkrycia bez wizualizacji takich, jak animacje, czy grafika komputerowa

Analizowana jest przy tym rola wizualizacji nie tylko w geometrii i analizie matematycznej, ale i w wielu innych gałęziach matematyki, jak teoria fraktali, topologia, teoria krat, teoria grafów, a nawet arytmetyka czy logika. Należy tu też podkreślić, iż oddziaływanie wizualizacji jest w ostatnich latach spotęgowane ogromnymi możliwościami komputerów, dzięki którym możliwa jest wizualna prezentacja bardzo skomplikowanych obiektów matematycznych albo takich, których wykonanie odręczne byłoby zbyt czasochłonne. Dodajmy też, że z wizualizacjami komputerowymi wiążą się szczególne problemy filozoficzne, o którym bliżej przyjrze się w dalszej części pracy.

Często stawianą tezę jest, iż można mówić o specyficznych rozumowaniach - rozumowaniach diagramowych (czy wizualnych) – które mogą stanowić pełnoprawne uzasadnienie dla zdań matematycznych. Znaczący problematyki diagramów, Kenneth Manders pisze, iż „sam fakt istnienia obiektów geometrycznych (*geometricals*), których nie można przedstawić za pomocą

diagramu, jak na przykład krzywe wypełniające przestrzeń, bądź ogólne geometrie Riemanna, nie stanowi argumentu przeciw zasadności (*justificational adequacy*) tradycyjnych rozumowań opartych na diagramach”⁶⁴⁰. Podkreśla się tutaj więc, iż pewne wady, czy słabości diagramów nie powinny być powodem do zupełnego ich odrzucenia jako wartościowego źródła poznania matematycznego.

W związku z powyższym, jednym z głównych zagadnień poruszanych we współczesnej literaturze jest to, w jakim stopniu diagram może być elementem dowodu matematycznego w sposób wiarygodny i nie prowadzący do błędów? Czy rozumowanie matematyczne oparte w jakiś sposób na diagramie dostarcza wartościowego i wiarygodnego poznania matematycznego? W omawianych przez mnie tekstach pojawiają się bardzo różne odpowiedzi na te pytania. Mieszczą się one, ogólnie rzecz biorąc, pomiędzy dwoma skrajnymi poglądami. Pierwszy to pogląd tradycyjny, odmawiający wizualizacjom jakiegokolwiek istotnej poznawczo roli w dowodach matematycznych. Drugą skrajnością jest czasem utrzymywana teza o istnieniu „dowodów wizualnych” dla niektórych twierdzeń matematycznych. Zgodnie z tą tezą, niektóre reprezentacje graficzne mogą same w sobie stanowić dowody twierdzeń, bądź wystarczające uzasadnienie dla niektórych twierdzeń, powodując, iż „tradycyjny” ich dowód staje się niepotrzebny. Dodatkowo można oczywiście wymienić dużo stanowisk „pośrednich”⁶⁴¹. Stanowiska te przyjmują na ogół którąś z następujących tez:

- 1) Można mówić o rozumowaniach diagramowych – są one rozumowaniami równoprawnymi w stosunku do rozumowań „tradycyjnych” – opartych na zdaniach.
- 2) Rozumowaniom diagramowym można nadać postać równie ścisłą, co rozumowaniom będącym ciągami formuł.
- 3) Można mówić o dowodach diagramowych - diagramy same w sobie mogą stanowić wystarczające uzasadnienie dla niektórych twierdzeń.

⁶⁴⁰ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 66.

⁶⁴¹ Por., Hanna, G., Sidoli, N., *Visualisation and proof...*, str. 74-77.

Dodajmy tu jeszcze, iż polski badacz problematyki diagramów Zenon Kulpa proponuje nawet przyjąć, iż badanie roli diagramów w poznaniu można uznać za oddzielną naukę, którą proponuje nazwać diagramatyką (*diagrammatics*). Można ją określić jako dziedzinę, która zajmuje się „badaniem diagramów jako środków służących do reprezentacji i przetwarzania wiedzy”⁶⁴². Jej główne cele oraz pytania można sformułować następująco:

- 1) Jaką rolę wizualizacje pełnią w rozumowaniach – z punktu widzenia formalnego jak i psychologicznego?
- 2) Na ile można mówić o specyficznym diagramowym rozumowaniu?
- 3) Jak uczynić rozumowania diagramowe bezpiecznymi logicznie, ścisłymi, oraz jak systematycznie analizować ich strukturę (m.in. określenie kryteriów, które powinny spełniać takie rozumowania)
- 4) Jak ocenić, w jakim stopniu reprezentacje wizualne są istotne dla formowania się przekonań matematyków?
- 5) Czy możliwe jest w ogóle mówienie o dowodach wizualnych/diagramowych?
- 6) Jak można sformułować nową, ogólną definicję rozumowania, wniosku, dowodu, a może nawet twierdzenia – takie, które pozwoli na mówienie o powyższych wspomnianych dowodach

Dodajmy, iż analiza rozumowań diagramowych może pogłębić rozumienie tego, czym jest w ogólności rozumowanie i dowód w matematyce. Jak pisze John Mumma, „odrzućmy tradycyjny pogląd na diagramy i dowód otwiera przed filozofią matematyki bogaty wachlarz zjawisk (*rich range of phenomena*). Prowadzenie badań zapowiada nie tylko głębsze zrozumienie sposobu na jaki rysunki mogą dowodzić ale, o czym jest przekonany, głębsze zrozumienie ogólnej natury dowodu matematycznego”⁶⁴³.

⁶⁴² Kulpa, Z., *Main Problems...*, str. 75.

⁶⁴³ Mumma, J., *Pictures, Proofs...*, str. 27.

Rozdział 8. Wizualizacje w różnych działach matematyki - przykłady, dyskusja i próba klasyfikacji

W niniejszym rozdziale dokonuję przeglądu ważniejszych typów wizualizacji w matematyce. Jak pisałem w poprzednim rozdziale, do początku XX wieku zagadnienie wizualizacji oraz intuicji przestrzennej rozważane było głównie w odniesieniu do geometrii, a częściowo również do analizy matematycznej. W rozważaniach ostatnich lat analizowana jest rola diagramów w różnych gałęziach matematyki. Wskazane jest zatem zaprezentowanie jakie diagramy, i szerzej – jakie typy wizualizacji związane są z różnymi gałęziami matematyki, oraz jakie problemy filozoficzne są z nimi związane. Wymienione tu przykłady będą dodatkowo służyły jako pewna „baza empiryczna” dla dalszych rozważań mojej pracy, w ramach których, analizuję rolę tych diagramów (czy szerzej – wizualizacji) w poznaniu matematycznym.

W poszczególnych podrozdziałach omawiam ważniejsze typy wizualizacji. W pierwszym rzędzie rozróżniam tu pomiędzy diagramami metrycznymi (ciągłymi) a diagramami dyskretnymi⁶⁴⁴. Do tej pierwszej grupy należą przede wszystkim analizowane już przeze mnie diagramy w geometrii i analizie matematycznej. Tymi nie zajmuję się szerzej w tym rozdziale – niektóre współczesne ujęcia roli diagramu w geometrii poświęcony jest rozdział kolejny. Na diagram dyskretny, składają się z kolei wyraźnie odróżnialne elementy reprezentujące mających na celu reprezentowanie poszczególnych obiektów matematycznych (takiej samej, dyskretniej natury). Tutaj rozważam więc diagramy,

⁶⁴⁴ Rozróżnienie te wprowadzone jest w tym miejscu pracy w sposób ogólny i nazwijmy to, “roboczy” – bliżej typologię diagramów rozważam w rozdziale dziesiątym.

z których korzystają matematycy w teorii liczb, teorii grafów, logice oraz algebrze. Do grupy diagramów metrycznych, czy ciągłych, można z kolei zaliczyć rysunki geometryczne, oraz diagramy w analizie matematycznej.

W dalszej kolejności zajmę się szerzej wspomnianymi w poprzednim rozdziale eksperymentami komputerowymi. Podaję więc kilka przykładów wizualizacji komputerowych i rozważam, jakie specyficzne problemy filozoficzne można z nimi wiązać.

W kolejnym podrozdziale omawiam nieco inną perspektywę na wizualizacje w poznaniu matematycznym, którą przedstawia Marcus Giaquinto. Część jego pracy *Visual Thinking in Mathematics* poświęcona jest mianowicie elementom wizualnego myślenia na polu zazwyczaj nie związanym z wizualizacjami, tzn. w odniesieniu do praktyki obliczeń, czy wyobrażeń wizualnych związanych z osią liczbową.

W ostatniej części rozdziału przyjrę się krótko rachunkom diagramowym oraz ich związkom z tematyką mojej pracy. „Rachunki diagramowe” to inaczej formalne systemy, w których rola diagramów jest ściśle określona i rozważana na takim samym poziomie, co reprezentacje symboliczne. Nie jest tutaj moim celem bliższa analiza tych rachunków, należy o nich jednak wspomnieć, gdyż ich istnienia rzuca nowe światło na to, czym jest, i może być diagram w poznaniu matematycznym.

Nie omawiam tutaj diagramów w geometrii, im bowiem poświęcony będzie w całości rozdział kolejny.

8.1. Wykresy funkcji rzeczywistych jako diagramy metryczne

Jak wspominałem powyżej, diagramami metrycznymi są przede wszystkim diagramy geometryczne i wykresy badane analizy matematycznej. Tym typem diagramów zajmowałem się głównie w dotychczasowej części pracy, nie będę więc tu ich dokładniej opisywał. Chciałbym jedynie podkreślić, że diagramy metryczne wyróżnia to, że ich fizyczne elementy reprezentują zbiory o mocy continuum, czy

też, jak pisze Kulpa, „ciągłe dziedziny”⁶⁴⁵. Jest tak zarówno w przypadku geometrii, jak i analizy matematycznej. W przypadku tej drugiej mowa tu jest przede wszystkim o funkcjach, których dziedziną i zbiorem wartości są podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Należy tu zaznaczyć, że to diagramy metryczne rodzą najwięcej problemów. Jest tak, ponieważ, zmysł wzroku nie jest w oczywisty sposób w stanie wychwycić wielu własności funkcji ciągłych. Było tak w przypadku wspomnianych w poprzednim rozdziale funkcji ciągłych-nigdzie różniczkowalnych, ale także w prostszych przypadkach poszukiwań stycznej do krzywej.

Mimo to, wykresy funkcji są w analizie matematycznej bardzo wygodnym narzędziem. Jest tak między innymi, ponieważ wiele własności matematycznych funkcji posiada naturalne odpowiedniki w wizualnych własnościach ich wykresów. Podajmy kilka przykładów: miejsce zerowe funkcji to punkt na osi, w którym funkcja przecina oś OX; funkcja jest rosnąca, gdy „podnosi się”, gdy śledzimy ją wzrokiem od lewej do prawej strony (używam tu celowo prostego, czysto wizualnego języka); argument, dla którego pochodna jest równa 0, to argument, dla którego krzywa, „przechodzi” z rosnącej w malejącą, bądź też mówiąc najprościej, szczyt „pagórka”, którym jest wykres funkcji. Funkcje ciągłe łączymy zazwyczaj z wykresami nieprzerwanymi, tzn. mówiąc najprościej – takimi, które możemy narysować bez odrywania ręki od kartki papieru. Pewne własności funkcji wydają się więc mieć jasne interpretacje „wizualne” – z nimi też bywają związane przekonania związane z prawdziwością poszczególnych twierdzeń opartych o diagram. Jak pokazywałem w poprzednim rozdziale, intuicje i oczekiwania mogą być zwodnicze.

8.2. Diagramy dyskretne

Diagramy dyskretne są, zgodnie z ich „roboczą” klasyfikacją wprowadzoną we wstępie, drugim podstawowym typem diagramów. Za diagramy dyskretne można

⁶⁴⁵ Kulpa, Z., *Main Problems...*, str. 79.

uznać bardzo wiele typów reprezentacji przestrzennych należących do wielu działów matematyki. Można ogólnie uznać, iż w przeciwieństwie do np. diagramów w geometrii, z diagramami dyskretnymi nie były na ogół wiązane takie problemy filozoficzne, jak z metrycznymi. Do niedawna rzadko też była na poważnie rozważana epistemiczna rola diagramów w gałęziach matematyki dyskretnej. Spróbuj tu pokazać, iż również fakty z m.in. teorii liczb można z sukcesem reprezentować graficznie. Od połowy XX wieku spore znaczenie w matematyce zyskały również teoria grafów czy teoria krat, które w sposób istotny wykorzystują diagramy – mimo, że mają również swoje czysto symboliczne, algebraiczne ujęcie. Im też się tu bliżej przyjrę.

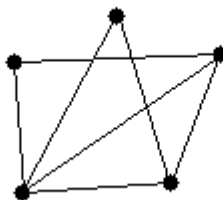
Zacznijmy od teorii liczb. Pojęcie liczby, jak się wydaje, bardzo szybko wyemancypowało się od reprezentacji wizualnych, znajdując już we wczesnej starożytności interpretację czysto symboliczną. Istnieje jednak bardzo naturalny sposób wizualizacji pojęcia liczby, za pomocą pewnego typu nieodróżnialnych od siebie wzajemnie obiektów – np. kwadracików, kropek, czy innych prostych obiektów. Wydaje się, że stosowanie takiej reprezentacji liczb mogło być powszechne we wczesnej fazie rozwoju arytmetyki. Wizualizacja takich kropek, jak również manipulacja na nich, może być częścią elementarnej praktyki matematycznej a nawet spełnia istotne funkcje epistemiczne. Michael Resnick twierdzi, iż częściowo w ten sposób uprawiali arytmetykę Grecy, osiągając w ten sposób wiele interesujących wyników⁶⁴⁶. Przykłady tego typu diagramów rozpatrzę w rozdziale ostatnim, w którym omawiam rolę wizualizacji w dowodach i rozumowaniach w matematyce.

Inną, bardzo ważną współcześnie gałęzią matematyki dyskretnej, o której warto wspomnieć w kontekście diagramów jest teoria grafów. W teorii grafów diagramy są o wiele istotniejsze, niż w teorii liczb, poprzez bardzo silny związek pojęcia grafu z jego interpretacją wizualną. Graf definiuje się oczywiście w sposób czysto symboliczny jako parę (V, E) , gdzie V jest (niepustym) zbiorem wierzchołków, a E zbiorem krawędzi, czyli nieuporządkowanych par wierzchołków

⁶⁴⁶ Por. Bondecka-Krzykowska, I, *Matematyka w ujęciu strukturalnym*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2007, str. 76.

(w przypadku grafów skierowanych – par uporządkowanych). Można więc powiedzieć, iż graf to nic innego jak zbiór z zadaną na jego elementach relacją dwuargumentową.

Bardzo istotną cechą grafów (skończonych) jest to, iż są łatwo wizualizowalne. Oto dwa proste przykłady grafów:



Rys.1.

Wiele własności grafów jest bardzo silnie związana z własnościami wizualnymi ich reprezentacji. Graf spójny to taki, który składa się z „jednego kawałka”; ścieżka to „ciąg krawędzi v_0, \dots, v_n taki, że możemy „przejsć” od v_0 do v_n „po krawędziach” grafu w ten sposób, że żaden wierzchołek ani żadna krawędź się nie powtarza, itd. Niekiedy pojęcia grafowe można definiować przez odwołanie do takich intuicji, tak, że w definiensie obecne są własności wizualne, definicje takie są też zupełnie jasne dla matematyków (można tu wspomnieć choćby o wspomnianym pojęciu „ścieżki”). Z pewnością wspomniane własności można łatwo wyrazić w języku czysto symbolicznym, w terminach teorii relacji; jednak fakt, iż nawet podręcznikowe definicje tego nie czynią wskazuje jak ważną rolę w teorii grafów spełniają diagramy⁶⁴⁷.

Warto tu też dodać, iż w teorii grafów istnieją problemy, w których aspekt przestrzenny gra rolę ważniejszą, niż jedynie formy reprezentacji. Należy tu przede wszystkim wskazać na pojęciu grafu planarnego, a więc grafu, który można narysować w taki sposób, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały, tzn. aby

⁶⁴⁷ Wizualne i mnogościowe rozumienie grafów rozważa np. James Robert Brown, podkreślając, iż wiele własności grafów (jak np. spójność czy planarność) można w naturalny sposób określić za pomocą wizualizacji, podczas gdy definicje mnogościowe są nienaturalne i o wiele mniej przejrzyste (por. Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York, 1999. str. 104-107).

stykają się co najwyżej w wierzchołkach⁶⁴⁸. Ta definicja ma charakter czysto wizualny, wręcz odwołuje się do własności mających typowo wizualną charakterystykę. W odróżnieniu od pozostałych definicji ma ona również *źródło* wizualne – nie jest to problem z dziedziny teorii relacji, ale został podsunęty w wyniku obserwacji zewnętrznych, fizycznych własności grafów (czy też ich reprezentacji przestrzennych, co jest w tym przypadku akurat często utożsamiane).

Teoria krat jest kolejną dziedziną matematyki dyskretnej, w której diagramy mają bardzo duże znaczenie. Kratę można zdefiniować algebraicznie jako niepusty zbiór elementów (zwany uniwersum algebry) z dwoma zadanymi operacjami 2-argumentowymi, spełniającymi odpowiednie warunki; alternatywnie, kratę definiować można jako zbiór częściowo uporządkowany, w którym istnieje kres dolny i kres górny⁶⁴⁹. Relacje częściowo uporządkowane mają bardzo naturalną interpretację graficzną, która jest bardzo często używana do reprezentacji przestrzennej krat. Bardzo duże znaczenie reprezentacji przestrzennych w teorii krat potwierdza, jak miało to również miejsce w przypadku teorii grafów, bardzo duża ilość diagramów występująca w każdym podręczniku i pracy dotyczącej tej dziedziny. Warto tu wspomnieć chociażby o wydanej w ostatnich latach książce dotyczącej kongruencji w kratkach, autorstwa wielkiego eksperta w tej dziedzinie, Georga Grätzera. Nosi ona tytuł *The Congruences of a Finite Lattice. A Proof-by-Picture Approach*. W książce tej, wypełnionej diagramami, autor stawia sobie za cel przybliżania idei przedstawianych dowodów przy pomocy diagramów⁶⁵⁰.

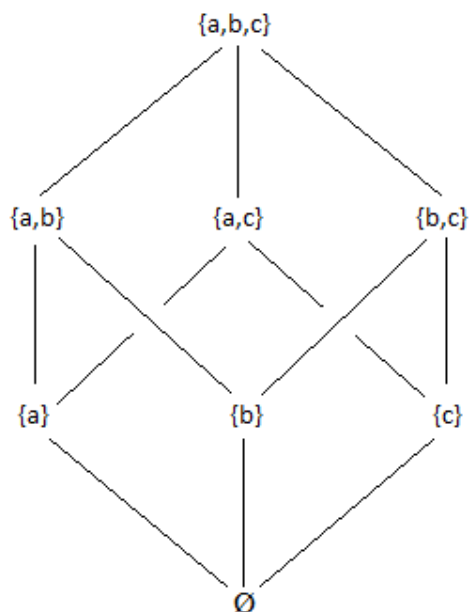
Diagramy krat podlegają w bardzo „poręczny” sposób analizie wizualnej. Operacje algebraiczne określone na elementach kraty można nadać prosto interpretację wizualną. Diagramy teorii krat wyglądają podobnie, jak diagramy teorii grafów (każdy z typów diagramów reprezentuje bowiem relacje 2-argumentowe). Wizualnym odpowiednikiem „ x jest w relacji z y ”, nie jest tu własność graficzna „istnieje krawędź łącząca x i y ” (jak było to w przypadku

⁶⁴⁸ Dodajmy, iż polski matematyk Kazimierz Kuratowski udowodnił, że graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera on grafu K_5 (pełnego na 5 wierzchołkach), grafu $K_{3,3}$, ani grafu homeomorficznego do któregoś z nich.

⁶⁴⁹ Zbiór częściowo uporządkowany to zbiór z zadaną relacją która jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna (zwaną również relacją częściowego porządku).

⁶⁵⁰ Por. Grätzer, G., *The Congruences of a Finite Lattice. A Proof-by-Picture Approach*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 2006.

grafów), ale „istnieje ścieżka, prowadząca od x do y , które biegnie z dołu do góry”. Rozważmy tu pewien znany przykład kraty. Uniwersum elementów jest zbiór potęgowy zbioru trzelementowego $\{a,b,c\}$, a relacją częściowego porządku jest relacja „należenia do zbioru”.



Aby przekonać się, czy x jest w relacji z y (w tym przypadku: $x \subset y$), należy jedynie sprawdzić, czy x jest „pod” y w diagramie, oraz połączony z nim odpowiednią ścieżką. Co więcej, bardzo prostą (i używaną w rozumowaniach) reprezentacją wizualną funkcji maksimum na elementach kraty, którą tu jest suma zbiorów. Dla elementów x oraz y , ich sumą jest najniższy element, który jest zarówno nad x , jak i nad y .

W teorii krat, podobnie jak w teorii grafów, diagramy są więc doskonałym środkiem w nauczaniu oraz narzędziem heurystycznym. Można uznać, że są one tu jednak czymś więcej. Pojęcie matematyczne są tu bardzo silnie związane z reprezentacjami przestrzennymi. Wiele operacji i rozumowań może być tu przeprowadzonych „na rysunku”, tzn. przez analizę jego czysto wizualnych cech. Jest tak, ponieważ diagramy bardzo wyraźnie i jednoznacznie reprezentują

odpowiednie obiekty matematyczne. Zwróćmy uwagę, iż takiej własności nie miały diagramy metryczne.

Pisząc o wizualnym aspekcie struktur algebraicznych nie można nie wspomnieć o teorii grup. Teoria grup, która jest bardzo ważnym poddziałem algebry abstrakcyjnej, w dużym stopniu wyrosła z badań nad symetrią w matematyce. Symetrie w grupach, czy innych obiektach matematycznych mają formalnie określone znaczenie. Źródłem rozważań nad symetrycznością wydaje się być jednak przede wszystkim percepcja wzrokowa, za pomocą której dostrzegamy symetryczność obiektów fizycznych (przede wszystkim chodzi tu o zwykłą symetrię osiową). Grupą jest więc zbiór symetrii kwadratu, czy też zbiory przekształceń różnego typu ciał. Pojęcie grupy wiązali też z intuicją przestrzenną Felix Klein oraz Henri Poincare. Dla tych matematyków pojęcie grupy było bardzo mocno związane intuicją wizualną, o czym wspominałem w poprzednich rozdziałach. Należy tu oczywiście zaznaczyć, iż grupy nie posiadają na ogół tak wygodnych reprezentacji przestrzennych, jak grafy, stąd też w praktyce specjalistów z tej dziedziny diagramy stosowane są o wiele rzadziej niż np. w teorii krat, czy teorii grafów.

Na koniec można tu również wspomnieć o diagramach w teorii mnogości i logice. Również w tych gałęziach matematyki diagramy są spotykane rzadko. Mimo to, próby przestrzennej reprezentacji zależności logicznych pomiędzy zdaniem (czy pojęciami) przeprowadzane były od początków logiki. W pracy *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective* Roman Murawski i Witold Marciszewski wspominają tu na przykład, iż diagramy stosowne były w logice już przez Arystotelesa, jak również Porfiusza i średniowiecznego filozofa Raymonda Lulla⁶⁵¹.

Najbardziej znanymi i praktycznymi diagramami logicznymi są jednak diagramy Venn'a, które stworzone zostały w celu reprezentacji rozumowań sylogistycznych. Na digramie Venn'a każdy z trzech terminów sylogizmu

⁶⁵¹ Marciszewski, W., Murawski R., *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Rodopi, Amsterdam-Atlanta 1995, str. 153.. Jak podkreślają autorzy, „diagram logiczny można zdefiniować jako taką dwuwymiarową figurę geometryczną, że relacje przestrzenne są izomorficzne ze strukturą zdania logiki” (tamże, str. 153).

reprezentowany jest przez jeden z okręgów. Punkty znajdujące się w danym okręgu są rozważane jako elementy klasy reprezentowanej przez dany okrąg (czy też obiekty posiadające własność)⁶⁵². Za pomocą takich diagramów można sprawdzać zależności logiczne.

Warto tu dodać, iż zastosowania diagramów w logice nie ograniczają się do diagramów Venn'a. Można tu wymienić chociażby historyczną już notację Fregego, czy wykorzystywane dziś z powodzeniem w logice zdań i logice predykatów drzewa semantyczne.

8.3. Wizualne eksperymenty

Jak wspominałem w poprzednim rozdziale, jednym z istotnym czynników, które doprowadziły do wzrostu zainteresowania wizualizacjami w filozofii matematyki są zastosowania komputerów w praktyce matematycznej. Zastosowani te prowadzą one do szeregu problemów, o których wspominałem już w poprzednim rozdziale⁶⁵³. Badania nad „eksperymentami matematycznymi” (które terminy się często – nie bez kontrowersji – używa) rozwijają się w ostatnich latach w bardzo szybkim tempie. Istnieje czasopismo poświęcone jedynie eksperymentom w matematyce, instytuty, książki oraz spora ilość stron internetowych⁶⁵⁴. W szczególności interesować będzie mnie typ eksperymentów związany z możliwością graficznej

⁶⁵² Por. tamże, str. 154. Diagramy Venne'a posiadają oczywiście swoje ograniczenia. Podstawowe z nich to ilość okręgów (odpowiadających zbiorom, czy terminom sylogizmu), które można zamieścić na jednym diagramie. Z drugiej strony, są one reprezentacjami dość elastycznymi – mogą być użyte do rozwiązywania prostych problemów klasycznego rachunku zdań, a podobne do nich diagramy Eulera bardzo dobrze nadają się do reprezentacji zbiorów.

⁶⁵³ Tematem moich rozważań nie będzie wiele z problemów rozważanych w poprzednim rozdziale. W szczególności chodzi tu o kwestię dowodów komputerowych, ich wiarygodności, czy możliwości przejrzenia i ogarnięcia przez jednego matematyka. Przeciwnie, wizualizacje komputerowe na ogół ułatwiają poznanie skomplikowanych obiektów matematycznych, przedstawiając dużo informacji „na raz”, zamiast je ukrywać w niedostępnych przez swój ogrom obliczeniach.

⁶⁵⁴ Czasopismem tym jest *The Journal of Experimental Mathematics*, założone w 1992 roku. J. Borwein i D. Bailey podają kilkadziesiąt stron internetowych poświęconym w całości, bądź w części eksperymentom w matematyce (Borwein, J., Bailey, D., *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21st Century*, A K Peters, Ltd., Natick, Massachusetts 2004, str. 27-31).

prezentacji (tzn. w postaci jakiegoś typu diagramu) na ekranie monitora bardzo skomplikowanych obiektów matematycznych. Grafika komputerowa pozwoliła matematykom przedstawiać efekty ogromnej ilości obliczeń w postaci jednej reprezentacji przestrzennej (a nie np. listy składającej się z miliona linijek). Diagramy sporządzone przez komputer zawierają więc ogromną liczbę informacji są przy tym również bardzo dokładne.

Czym są zatem ogólnie eksperymenty w matematyce oraz dlaczego pojawia się tu termin „eksperyment”, łączony przecież zazwyczaj wyłącznie z naukami empirycznymi? Współczesne rozważania nad eksperymentami skupiają się na analizie zastosowań komputerów w matematyce. Pojęcie eksperymentu w matematyce jest szersze. Jak pisze wydawca pisma *Journal of Experimental Mathematics*, „wiele eksperymentów matematycznych jest w dzisiejszych czasach wykonywanych na komputerach, ale inne są wciąż wynikiem pracy z ołówkiem i kartką papieru, istnieje również wiele innych technik eksperymentalnych, jak budowanie fizycznych modeli”⁶⁵⁵. Zgodnie z tą uwagą chciałbym podkreślić, iż pojęcie eksperymentu, czy też sama praktyka matematyków zawierająca elementy, które nazywamy „eksperymentowaniem” nie są czymś zupełnie nowym w matematyce. Z „geometrycznych” eksperymentów, a więc wykonywania rysunków, których kształt nie był uprzednio znany w celu sprawdzania hipotez, albo po prostu badania własności obiektów matematycznych znani byli już Isaac Newton, czy C.F. Gauss. Należy tu też przypomnieć filozofię matematyki Ch.S. Peirce’a. Peirce podkreślał, że eksperyment z diagramem jest jednym z podstawowych źródeł wiedzy o obiektach matematycznych. Eksperyment grał też rolę epistemologię matematyki quasi-empirystów, w szczególności Lakatosa. Wreszcie można wspomnieć o roli „eksperymentów myślowych” w matematyce, o których dopuszczalność w matematyce spory prowadzili nawet Zermelo z Gentzenem⁶⁵⁶.

Czym więc jest eksperyment w matematyce? Filozof matematyki Bart van Kerkhove pisze, iż można go rozumieć jako „szereg kontrolowanych przekształceń

⁶⁵⁵ [Http://www.expmath.org/expmath/philosophy.html](http://www.expmath.org/expmath/philosophy.html), za: Baker, A., *Experimental Mathematics*, „Erkenntnis”, Vol. 68, 2008, str. 335.

⁶⁵⁶ Por. Piotrowska, E., *Teoria i eksperyment...*, str. 126.

badanych obiektów, mający na celu wytworzenie (*invoking*) szczególnego rodzaju wartościowego/pożądanego doświadczenia”⁶⁵⁷. Przytoczmy również, jak eksperyment matematyczny charakteryzuje polska filozof matematyki Anna Lemańska, przyrównując je do eksperymentów w nauka przyrodniczych: „mamy tu do czynienia z „przygotowaniem danego obiektu, z wywołaniem w nim – w określonych przez eksperymentatora warunkach – zmian, z obserwacją zachodzących procesów, pomiarem interesujących wielkości. Na podstawie uzyskanych danych zarówno przyrodniczy, jak i matematycy, formułują hipotezy dotyczące badanego stanu rzeczy. Następnie często wysuniętą hipotezę testują, przeprowadzając nowe eksperymenty”⁶⁵⁸. Wspomnianymi w tych definicjach przekształceniami obiektów matematycznych może być obracanie w przestrzeni diagramów geometrycznych, przekształcanie równań (jak powiedziałby Peirce) – a także reprezentacja przestrzenna faktów i pojęć wcześniej nie poddanych takiej interpretacji. Powyższe definicje nawiązują jednak przede wszystkim do zastosowań komputerów w przypadku których również dokonujemy manipulacji na obiektach matematycznych. Różnica wydaje się być przede wszystkim ilościowa – komputer, wykonując ogromną liczbę obliczeń, może wytworzyć obraz, którego konstrukcja metodą tradycyjną zajęła by ludziom wiele dni, albo miesięcy.

Zaznaczmy na początku, iż duża część „eksperymentów” w matematyce nie jest, albo nie musi być związana z wizualizacjami. Są to różnego rodzaju obliczenia, wykonywane przy okazji badań np. z teorii liczb. Można wymienić sprawdzanie dla ogromnej ilości przypadków pewnych hipotez, jak znanej hipotezy Goldbacha (głosi ona, iż każdą liczbę naturalną większą niż 3 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych). Prowadzi się również często badania nad szeregami nieskończonymi, czy rozwinięciami dziesiętnymi liczb. Badania takie można w pewnym sensie nazwać „indukcyjnymi”, o ile polegają one na sprawdzaniu bardzo dużej liczby przypadków w celu badania zachowania pewnych liczb, bądź stawiania hipotez co do ich własności.

⁶⁵⁷ Van Kerkhove, B., *Aspects...*, str. 288.

⁶⁵⁸ Lemańska, A., *Eksperyment komputerowy a istnienie obiektów matematycznych*, (w:) *Między matematyką a przyrodznawstwem*, red. E., Piotrowska, D. Sobczyńska, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Poznań 1999, str. 194.

Rozważmy tu jeden taki przykład. Otóż o liczbie rzeczywista powiemy, iż jest *normalna o bazie n*, jeśli każdy ciąg cyfr (jakiegokolwiek długości) występuje w jej rozwinięciu o bazie n, taką samą ilość razy. Liczba jest absolutnie normalna, jeśli jest normalna w każdej bazie. Rozważmy teraz następującą hipotezę⁶⁵⁹:

Hipoteza: Każda liczba algebraiczna jest absolutnie normalna.

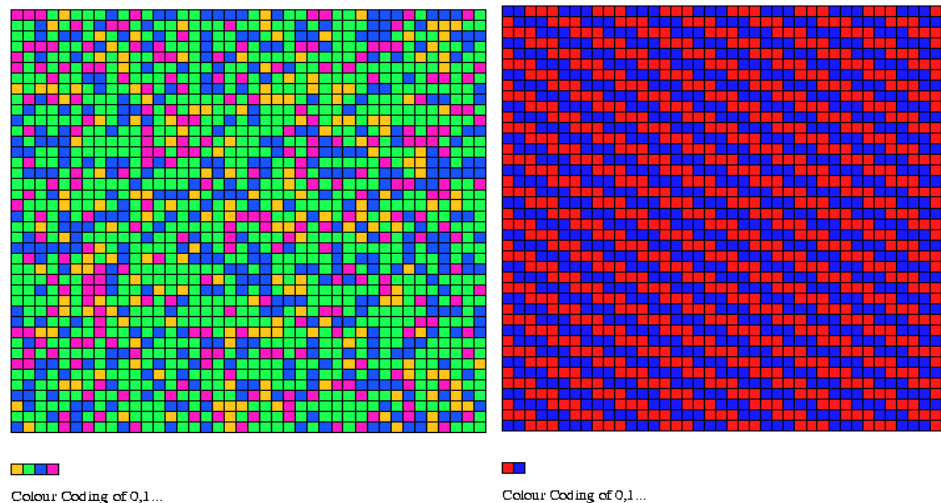
J. Borwein i D. Bailey używają tu komputerów w celu obliczenia 10000 tysięcy miejsc po przecinku pierwszego 1000 liczb, następnie zebrane dane poddają pewnym testom statystycznym.

Powyższy problem nie ma, jak się wydaje, charakteru wizualnego. Jednak bardzo dużo „eksperymentalnych” zagadnień, również poddawanych jest wizualizacji, tzn. tworzy się dla nich reprezentacje przestrzenne.

W istocie, „eksperymenty” w dziedzinie teorii liczb, związane są z ogromną liczbą obliczeń, które mogą stanowić trudną do ogarnięcia masę cyfr, trudną do ogarnięcia i nadania jej jakiegoś konkretnego znaczenia matematycznego. Nadanie tej masie liczb jakiegoś znaczenia, szukanie regularności i struktury udaje się często właśnie dzięki wizualizacjom. Ciekawe i względnie proste przykłady zastosowań wizualizacji w teorii liczb podają P. Borwein. I L. Jörgenson. Rozważają oni binarne rozszerzenia (a więc rozszerzenia w dwójkowym systemie pozycyjnym) niektórych liczb, w celu poszukiwania w nich regularności. Poniższe dwa diagramy ukazują 1600 cyfr rozszerzenia dziesiętnego liczb π oraz $22/7$ (jak zauważają wspomniani autorzy, często używanego przybliżenia liczby π), zredukowanych mod 2^{660} . Inaczej mówiąc, nieparzystym cyfrom w rozszerzeniu odpowiada „zamalowany kwadracik”, a parzystym „niezamalowany”.

⁶⁵⁹ Por. Borwein, J., Bailey, D., *Mathematics...* Rozdział 4, Baker, A., *Experimental Mathematics*, str. 333.

⁶⁶⁰ Por. Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures...*, str. 901.

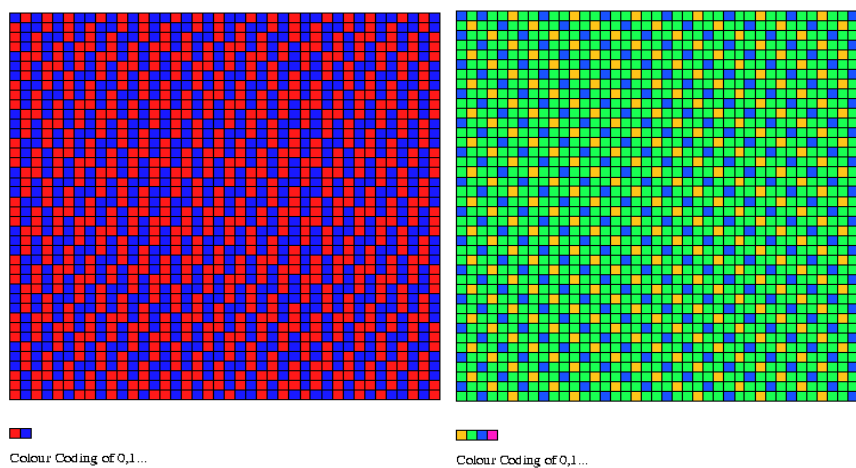


Rys. 2.

Pierwsze dwa diagramy nie są, można powiedzieć, specjalnie zaskakujące. Liczba $22/7$ jest wymierna, więc należało spodziewać się pojawienia regularności. Co do liczby π , hipoteza, iż pojawia się w jej binarnym rozwinięciu jakaś regularność nie jest potwierdzona przez diagram, który wydaje się być zupełnie chaotyczny. W każdym razie rysunki naocznie ukazują te właśnie, oczekiwane, własności⁶⁶¹.

Ciekawsze wydają się kolejne przypadki. Otóż liczba e , druga, obok π , fundamentalna stała matematyczna będąca liczbą niewymierną posiada względnie regularną reprezentację graficzną mod2.

Rys. 3.



⁶⁶¹ Por. tamże, str. 906.

Taką postać diagramu można względnie prosto wytłumaczyć odwołując się do pewnych własności liczby e . Jeszcze ciekawszy wydaje się graficzna reprezentacja ciągu rzeczywistych części liczb zespolonych $i\pi$, wziętych modulo 3. Tu ujawnia się pewna regularność związana z liczbą π , która może wydawać się zaskakująca. Można powiedzieć, że wizualizacje pomagają w obu przypadkach dojrzeć ukryte regularności. Zależności te mogą być przy tym nieznanymi przed stworzeniem diagramu, stając się w ten sposób istotnym źródłem odkrycia⁶⁶².

Jest to typowy problem, który można rozważać metodami matematyki eksperymentalnej. Sam pomysł badania rozszerzeń binarnych mógł się początkowo pojawić bez związku z innymi problemami matematycznymi, jako po prostu ciekawe pytanie, jako pretekst do „zabawy” czy manipulacji liczbami. Badanie takie mogą jednak ukazać istnienie nieoczekiwanych regularności, które mogą dalej stać się przyczynkiem ku konkretnym hipotezom, czy twierdzeniom. Dodajmy przy tym, iż możliwości do dalszych badań jest tu sporo – można np. rozważać rozszerzenia mod4, mod5, itd., czy wybrać inny sposób reprezentacji graficznej.

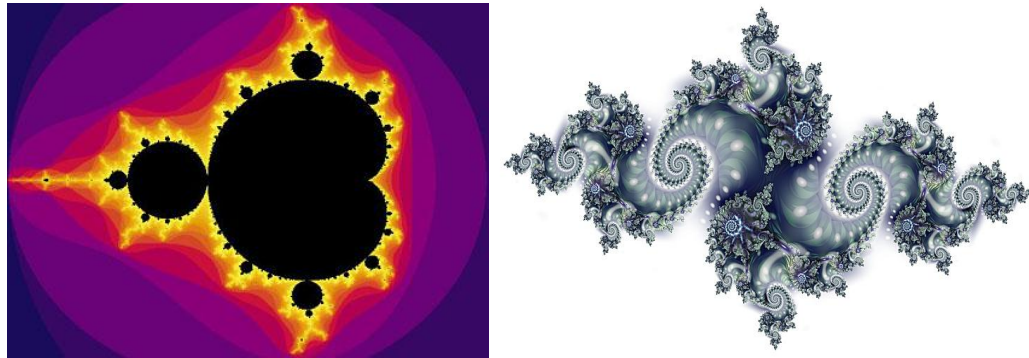
Wizualne eksperymenty grają też istotną rolę w wielu innych dziedzinach matematyki. Warto tu w szczególności wymienić teorię fraktali. Jak pisze Anna Lemańska, „badanie własności zbiorów fraktalnych jest utrudnione ze względu na ich skomplikowaną budowę. Powstają one bowiem przez stosowanie rozmaitych procedur iteracyjnych czy probabilistycznych algorytmów, pojawiają się przy badaniu układów dynamicznych jako ich zbiory niezmiennicze (dziwne atraktory lub repilery)”⁶⁶³. Stąd wizualizacje komputerowe są bardzo cennym narzędziem w ich badaniu. Sztandarowym przykładem jest tu zbiór Mandelbrota, o którym można powiedzieć, iż stanowił jedną z głównych inspiracji do rozwoju graficznych metod reprezentacji skomplikowanych obiektów matematycznych. Zbiór ten definiuje się bardzo prosto, a mianowicie jako zbiór liczb zespolonych c , dla których ciąg $z_{n+1} = z_n + c$, gdzie $z_0 = 0$, jest ograniczony⁶⁶⁴. Wizualizacje tego zbioru wciąż fascynuje i inspiruje matematyków i niematematyków, w mojej pracy nie mogło więc

⁶⁶² Por. tamże, str. 907.

⁶⁶³ Lemańska, A., *Zagadnienie obrazowości niektórych rozumowań w matematyce*, (w:) *Logiczne podstawy rozumowań III*, red. J. Mrozek, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2003, str. 113.

⁶⁶⁴ Por. tamże, str. 113.

zabraknąć choćby krótkiego o niej wspomnienia. Poniżej zamieszczona jest wizualizacja całości zbioru Mandelbrota oraz jednego z jego podzbiorów, tzw. zbioru Julii.



Rys.4. Zbiór Mandelbrota i zbiór Julii

Zbiór Mandelbrota prowadzi nas do dwóch dziedzin, w których wizualizacje grają szczególnie istotną rolę – teorii fraktali. Fraktale są obiektami, które łączy się bardzo często z wizualizacjami. Tu również stosuje się eksperymenty komputerowe, a wizualizacje stanowią często istotne źródło informacji. Jak pisze Davis, w przypadku teorii fraktali „aspekty figur mogą być odczytane (twierdzenia wizualne), o których nie moglibyśmy nic stwierdzić za pomocą nie-obliczeniowych technik matematycznych”⁶⁶⁵

Dziedziną, w której wizualizacje komputerowe stanowiły istotne narzędzie poznawcze były i są równania różniczkowe. Obrazy generowane komputerowo bywają tu częścią „procesu uprawiania matematyki”. W przypadku niektórych z nich, zdaniem matematyka Palaisa, „wizualizacje pomogły wskazać drogę do ścisłego dowodu matematycznego”⁶⁶⁶. Zacytuję tu refleksje jednego z matematyków odnośnie roli, jaką grały wizualizacje w procesie dowodzenia pewnego twierdzenia dotyczącego pewnej powierzchni. Badana powierzchnia była „w dużym stopniu symetryczna. To okazało się kluczem do dowodu zanurzalności

⁶⁶⁵Davis, P, *Visual Theorems*, str. 339.

⁶⁶⁶Palais, R.S., *The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium*, “Notices of the AMS”, June/July 1999, str. 654.

(*embeddedness*). W przeciągu tygodnia dowód via symetrię był opracowany. W tym okresie czasu używaliśmy grafiki komputerowej jako drogi ku „weryfikacji” pewnych hipotez dotyczących geometrii przestrzeni. Potrafiliśmy wymiennie poruszać się pomiędzy równaniami i obrazami. Obrazy te były bardzo użyteczne jako wskazówki ku analizie (*guide to analysis*).⁶⁶⁷

Podsumowując, istnieje więc wiele twierdzeń, których treść została zasugerowana przez wizualizacje. Wiele z nich być może bardzo trudno byłoby sformułować bez korzystania z grafiki komputerowej. B. van Kerkhove wspomina o odkryciu drzewiastej struktury pewnych zbiorów Julii. Jak piszą Epstein i Levy, „było to zaobserwowane przez patrzenie na rysunki wykonane przez komputery, a następnie udowodnione za pomocą formalnego rozumowania”⁶⁶⁸. Rezultaty takie można również odnaleźć w topologii, gdzie zdaniem J. Weeks’a „istnieje bardzo dużo takich [eksperymentalnie odkrytych topologicznych] wyników, ale większość z nich wymagałaby niemałej ilości (?) wyjaśnień, aby uczynić laik mógł nadać mu jakieś znaczenie”⁶⁶⁹.

Podsumujmy powyższe rozważania. Można wymienić następujące funkcje epistemiczne wizualizacji komputerowych:

- 1) Testowanie hipotez.
- 2) Badanie skomplikowanych struktur (m.in. w celu osiągnięcia ich ogólnego obrazu, czy wizualnego uchwycenia ich jako całości)
- 3) Wyjaśnienie: odpowiednia wizualizacja ukazuje regularności, które mogą stanowić dla nas wyjaśnienie pewnych faktów, czy też przyczynek do głębszego zrozumienia jakiegoś twierdzenia.

⁶⁶⁷Hoffman, D., *The computer-aided Discovery of New embedded minima surfaces*, za: Mancosu, P., *Visualization in Logic...*, str. 25

⁶⁶⁸Epple, L., *Experimentation and Proof in Mathematics*, za: Van Kerkhove, B., *Aspects...*, str. 301.

⁶⁶⁹Weeks, J., za: Borwein, J., Bailey, D., *Mathematics...*, str. 92.

4) Wizualizacja komputerowa pozwala nam z pewnością uzyskać jakiegoś typu doświadczenie badanych obiektów. Takie doświadczenie daje z pewnością wizualizacja zbioru Mandelbrota.

5) Odkrycie, które może nastąpić na przykład, gdy dzięki wizualizacjom zauważamy regularności, których nie byliśmy wcześniej świadomi.

6) Inspiracja dla dowodu, bądź w niektórych przypadkach być może nawet sam dowód

Doświadczenie wizualne skomplikowanych obiektów matematycznych może więc mieć bardzo dużo funkcji epistemicznych. Dają one wgląd w pewne aspekty badanych obiektów umożliwiając ich głębsze poznanie. Czy wnoszą jednak coś nowego do epistemologii matematyki w stosunku do wspomnianych już wcześniej już przeprowadzanych eksperymentów matematycznych? Wizualizacje, które otrzymywane są dzięki pracy komputerów spełniają z pewnością podobną rolę do tej, którą grają analizowane wcześniej narysowane rysunki, czy diagramy. Czy różnica jest tu więc tylko ilościowa? Wydaje się jednak, iż w tym przypadku, kolokwialnie i nieco żartobliwie rzecz ujmując, iż w tym przypadku ilość przechodzi również w jakość. Aby wyjaśnić, co mam na myśli zacytuję najpierw następujący fragment pracy Palaisa. Zwraca on tu uwagę na ważną rolę komputerów: „matematycy zawsze używali ‘oka umysłu’ w celu wizualizacji obiektów abstrakcyjnych oraz procesów, które występują we wszystkich gałęziach badań matematycznych. Jednak dopiero w ostatnich latach niesamowity rozwój technologii informatycznej uczynił prostą eksternalizację tych mętnych i subiektywnych obrazów, które ‘widzimy’ w naszych głowach, zastępując je dokładnymi i obiektywnymi wizualizacjami, które mogą być przedstawione innym (*shared with others*)”⁶⁷⁰.

Komputery więc, będąc przedłużeniem naszych umiejętności obliczeniowych, są również przedłużeniem naszych umiejętności wizualizacyjnych.

⁶⁷⁰Palais, R.S., *The Visualization...*, str. 647.

Dzięki komputerom skłonność do wizualizacji, oraz czerpania z ich mocnych stron poznawczych, może być rozwijana w niespotykanym dotąd stopniu. Wizualizacje pozwalają też osiągnąć „wizualne ujęcie” obiektów, których z pewnością nie potrafilibyśmy sobie wyobrazić bez udziału komputerów. Jak pisze Anna Lemańska eksperyment komputerowy „może prowadzić do pogłębienia czy wręcz wytwarzania intuicji, które wiążą się z badanymi obiektami”; w ten sposób może on więc „pomóc przy rozwijaniu intuicji geometrycznych”⁶⁷¹. Przykład takiego rozwijania, czy nawet wytwarzania intuicji podają Davis Hersh i Marchisotto, opisując, jak obserwacja 3-wymiarowych „przekrojów” obiektów 4-wymiarowych pozwalała zrobić sobie częściowe intuicje przestrzenne związane z – jak mogłoby się wydawać niemożliwym do przedstawienia sobie wizualnie – obiektami 4-wymiarowymi⁶⁷². Zacytujmy wreszcie Bara Van Kerkhove, który podkreśla psychologiczne znaczenie wizualizacji – „psychologiczny efekt ‘concreteness i natychmiastowości’, odczynie bliższego związku z teorią, w porównaniu do browsing through ciągi symboli i liczb” jest znacznie zwiększone dzięki komputerom⁶⁷³,

8.4. Marcus Giaquinto o myśleniu wizualnym

W tym podrozdziale chciałbym przyjrzeć się nieco innemu wymiarowi roli wizualizacji w poznaniu matematycznym. Omawiam tu mianowicie niektóre fragmenty pracy *Visual Thinking in Mathematics*, Marcusa Giaquinto, w których filozofów ów omawia wizualne treści, które wiążemy z niektórymi, nie związanymi zazwyczaj z wizualizacjami, pojęciami matematycznymi. Przedmiotem analiz Giaquinto nie jest tutaj więc dowód, uzasadnianie, ani nawet odkrycie w

⁶⁷¹ Lemańska, A., *Eksperyment komputerowy...*, str. 201.

⁶⁷² Por. Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A., *Świat matematyki*, str. 382-386.

⁶⁷³ Van Kerkhove, str. 301.

matematyce – ale ogólnie *myślenie* wizualne⁶⁷⁴. Jest to kategoria szeroka, odwołując się do wszelkiego rodzaju przestrzennego przedstawiania sobie obiektów matematyki oraz relacji pomiędzy nimi. Jednym ze szczególnych aspektów idei Giaquinto jest to, iż myślenie wizualne obecne jest w prawie wszystkich działach matematyki – włącznie z tymi, które ‘tradycyjnie’ uważane są za czysto symboliczne.

Przedstawię tu krótko trzy aspekty poznania matematycznego, w których zastosowanie ma myślenie wizualne. Są to intuicje wizualne związane z osią liczbową, z obliczeniami oraz ze strukturami algebraicznymi. Każde z tych zastosowań wizualizacji jest w bardzo niewielkim stopniu związane z kontekstem uzasadnienia, jak podkreśla sam Giaquinto, nie jest tu również istotny kontekst odkrycia w matematyce. Wskazuje się tu raczej na wizualną treść pewnych pojęć matematycznych, oraz podstawowych operacji z nimi związanych.

Wizualne aspekty obliczeń, na które wskazuje Giaquinto, są w pewnym sensie dość oczywiste, choć być może zwraca się na nie mniej uwagi, niż na to zasługują. Najbardziej podstawowe i niewątpliwie umiejętności potrzebne dla uprawiania arytmetyki związane są więc po prostu z rozpoznawaniem kształtów – odróżnianiem np. liczby 6 od liczby 9. Bardziej istotną wizualną umiejętnością jest umiejętność rozumienia i korzystania z systemu pozycyjnego w arytmetyce. Dzięki niej potrafimy odróżnić liczbę 18 od 81, czyli rozpoznać porządek, w jakim są ustawione (czy napisane na kartce). Potrzebna jest tu wiedza, iż cyfra „po lewej stronie” oznacza liczbę „dziesiątek”, a po prawej – „jednostek”. Ogólna zasada to, jak pisze Giaquinto „jeśli na danym miejscu figurują X -y, to na kolejnym miejscu na lewo figurują dziesiątki X -ów”⁶⁷⁵. Krótko mówiąc, aby odczytać informację, która zawarta jest w liczbie wielocyfrowej potrzebny jest zmysł wzroku

Również w celu wykonania pewnych działań, jak tzw. działania „w słupku” w istotny sposób odwołuje się do przestrzennych charakterystyk (choć jak sam zwraca uwagę, być może możliwe byłoby nauczenie tej metody również dzieci

⁶⁷⁴ Nawiązując do przytoczonego przeze mnie we wstępie rozróżnienia, omawiana jest tutaj rola wizualnej „intuicji o” raczej, niż „intuicji, że”. Dodatkowo, myślenie przestrzenne w większym stopniu odnosi się do wizualizacji wewnętrznych, niż do diagramów.

⁶⁷⁵ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 127.

niewidomych)⁶⁷⁶. Poszczególne kroki algorytmów (jak napisz pierwszy czynnik mnożenia nad drugim, tak by cyfry jedności były bezpośrednio nad sobą”, czy „przepisz cyfrę dwie linijki niżej”) wymagają pewnych wizualno-przestrzennych umiejętności⁶⁷⁷. Giaquinto uważa, iż owe umiejętności są konieczne dla przeprowadzenia tych obliczeń – przynajmniej w takiej postaci jak to zwykle wykonywane: „nie jest możliwe, aby umiejętności obliczeniowe opierające się na zwykłych operacjach na liczbach wielocyfrowych, pozostały sprawne (*intact*) w przypadku utraty odpowiednich umiejętności wizualnych. Ten, kto utraciłby którąś z tych umiejętności, musiałby nauczyć się innych procedu postępowania, aby zrekompenzować braki”⁶⁷⁸. Dla potwierdzenia powyższej tezy, oraz ogólnej wagi wizualnego (czy przestrzennego), aspektu reprezentacji przestrzennych, Giaquinto przywołuje niektóre badania empiryczne. Podkreśla on, iż związek pomiędzy systemem wizualnym i umiejętnościami obliczeniowymi jest potwierdzony empirycznie: bo „wyniki neurologicznych badań nad wyobraźnią przestrzenną (*neuroimaging results*) sugerują, iż obszary mózgu odpowiedzialne za widzenie są zaangażowane w mnożenie liczb wielocyfrowych”⁶⁷⁹. Nie będę tu wchodził w szczegóły tego typu badań (co Giaquinto czyni również jedynie w niewielkim stopniu). Można tu wskazać na jeden przykład takiej zależności: dyskalkulia (zaburzenie, którego objawem są trudności w liczeniu) występują często razem z syndromem Gertsmana. Niektórymi objawami tego syndromu są dysgrafia, nieumiejętność pisania w liniach prostych oraz często nieumiejętność odróżniania prawa od lewa⁶⁸⁰. Te braki, jak podkreśla Giaquinto, mogą znacznie utrudniać operacje na liczbach zapisanych w systemie pozycyjnym.

Kolejnym obszarem, na którym Giaquinto szuka wizualnych aspektów myślenia matematycznego są wyobrażenia związane z osią liczbową. Mówi się tu o mentalnej osi liczbowej jako wizualnej reprezentacji zbiorów liczb rzeczywistych, jak również naturalnych.

⁶⁷⁶ Tamże, str. 129.

⁶⁷⁷ Por. tamże, str. 129.

⁶⁷⁸ Tamże, str. 129.

⁶⁷⁹ Tamże, str. 131.

⁶⁸⁰ Tamże, str. 128.

Przedmiotem badań jest tu mentalne powiązanie liczb z wizualizowaną osią liczbową. Według Giaquinto posiadamy więc wrodzone „wycucie” liczb (*sense of number*). Jest ono dane w sposób wrodzony, ale nie zdeterminowane (*is not innately fixed*). Potwierdzeniem tej wrodzoności są niektóre badania nad zwierzętami oraz małymi dziećmi. Giaquinto twierdzi więc, iż „eksperymenty na ptakach, małpach oraz ludziach pokazują, że również one potrafią rozpoznawać (detect) małe liczby kardynalne oraz je od siebie nawzajem odróżniać”⁶⁸¹. Owo wrodzone wycucie liczby jest większe dla mniejszych liczb, stopniowo maleje dla liczb coraz większych. Mamy na przykład lepsze wycucie wyniku mnożenia liczb jedno i dwucyfrowych, niż pięciocyfrowych. Wycucie to może być jednak udoskonalone przez ćwiczenia. Należy przy tym też podkreślić, iż „wycucie liczby” – będąc wrodzone – jest jednak również w pewnym stopniu ukształtowane kulturowo⁶⁸².

Tutaj chciałbym zwrócić uwagę na to, że – jak podkreśla Giaquinto – istnieją jednak „dowody (*evidence*) na powiązanie liczby z przestrzenią”⁶⁸³. Badania wykazują, że automatycznie kojarzymy niewielkie liczby z lewym kierunkiem, a duże liczby z prawym innym wnioskiem z badań empirycznych jest to, że stojąc przed zadaniem odnalezienia liczby znajdującej się pomiędzy dwoma danymi liczbami, często aktywujemy mentalną oś liczbową. W takim przypadku „obraz odcinka będącego częścią osi liczbowej pomiędzy liczbą 2 oraz liczbą 9 jest aktywowany w sposób automatyczny i nieświadomy”⁶⁸⁴. Przedstawiając sobie liczby i relacje pomiędzy nimi aktywujemy automatycznie wrodzoną i wizualną reprezentację osi liczbowej. Według Giaquinto: „fakt, że tak łatwo przyjmujemy i internalizujemy (*acquire and internalize*) mentalną oś liczbową, jak również fakt, że niektórzy z nas tworzą formułę (*form*) mentalną oś liczbową niezależnie od nauki szkolnej, sugeruje, że posiadamy wrodzoną skłonność do tworzenia reprezentacji mentalnych osi liczbowych, kiedy tylko przyswoiliśmy spisany

⁶⁸¹ Tamże, str. 91.

⁶⁸² Jak pisze Giaquinto, „jasnym jest, że standardowa pozioma oś liczbowa jest wytworem kultury, ponieważ pozostaje ona w zależności z konwencjami i spisany systemami liczbowymi specyficznymi dla danej kultury” (tamże, str. 115).

⁶⁸³ Tamże, str. 97.

⁶⁸⁴ Tamże, str. 102.

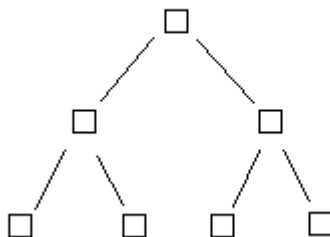
system liczbowy⁶⁸⁵. Taka skłonność, jak wspomina również Giaquinto, może być uznana za szczególny przypadek tendencji do liniowego porządkowania pewnego zbioru elementów – innym przykładem mogą tu być na przykład litery alfabetu.

Giaquinto stawia również tezę, iż wizualizacje mogą znacząco wspomagać poznanie niektórych struktur algebraicznych. W słowach samego Giaquinto, „możemy uzyskać poznawcze ujęcie (*cognitive grasp*) niektórych struktur przy pomocy reprezentacji wizualnych⁶⁸⁶. Umysłowe, czy wizualne ujęcie struktur gra istotną rolę w poznaniu. Przyjrzyjmy się więc, w jaki sposób możemy łączyć struktury z wizualnymi wyobrażeniami.

Przez strukturę rozumie tu Giaquinto standardowo zbiór obiektów (uniwersum struktury) z zadanymi na niej relacjami. Struktury badane są zazwyczaj przy pomocy metod symbolicznych – czysto algebraicznych, bądź logicznych – na przykład przy pomocy teorii modeli. Giaquinto twierdzi jednak, iż „w pewnych przypadkach możemy poznać struktury w bardziej wyrafinowany (*intimate*) sposób, za pomocą naszych zdolności (*capacities*) wizualnych⁶⁸⁷.

W jaki sposób można więc przy pomocy wizualizacji osiągnąć poznanie struktur matematycznych, oraz jakiego rodzaju? Rozważmy więc pewną konfigurację dwóch typów obiektów na rysunku, mogą to być np. kropki i strzałki. Możemy interpretować ten rysunek jako zbiór z nadaną strukturą, której elementami są narysowane kropki, a zadana relacja to „istnieje strzałka od x do y ”. Struktura taka jest konkretnym, postrzegalnym wizualnie obiektem.

Rys.5.



⁶⁸⁵ Tamże, str. 116.

⁶⁸⁶ Tamże, str. 236.

⁶⁸⁷ Tamże, str. 216.

Powyższy wizualny wzorzec, czy szablon (*perceptible/visual template*), może – według Giaquinto – reprezentować szerszą klasę struktur. Możemy więc „widzieć wizualny wzorzec *jako* (*see it as*) zbiór zadaną strukturą”⁶⁸⁸. „Widzenie” to nie jest przy tym bierną receptywnością zmysłową, wymaga pozawizualnej wiedzy. Jeśli rozważymy teraz konkretną strukturę, wówczas przez „przez nadanie nazw jej elementom, oraz oznaczaniem wierzchołków wizualnego wzorca za pomocą tych nazw, możemy ustalić, iż dany zbiór z nadaną strukturą jest izomorficzny z wizualnym wzorcem”⁶⁸⁹. Poprzez ustalenie, iż istnieje izomorfizm (poprzez zbadanie relacji pomiędzy elementami struktury i odpowiadającymi jej wierzchołkami). W taki, oto, wizualny, sposób „mamy epistemiczny dostęp do struktury”⁶⁹⁰, a właściwie do klasy struktur izomorficznych.

Narysowany powyżej rysunek jest konkretnym rysunkiem, można go jednak, według Giaquinto, uznać jako reprezentującego pewien typ. Mając dane rysunki wyraźnie odmienne pod względem konkretnych fizycznych charakterystyk, ale reprezentujące te sam typ, potrafimy je bez trudności rozpoznać jako należące do tego typu⁶⁹¹.

Rozważania tu podjęte dotyczą głównie prostych struktur, które można rzeczywiście objąć „jednym rzutem oka”. Oczywistym jest, że wiele struktur ma o wiele bardziej skomplikowaną strukturę oraz przedstawianych jest za pomocą mało czytelnych diagramów. Warto wrócić tu choćby to przykłady kraty podzbiorów zbioru trzelementowego. Dla zbioru czteroelementowego krata staje się już mniej czytelna, a dla większych zbiorów staje się chaotycznym (dla zmysłu wzroku) zbiorowiskiem kresek, o tej jedynie wizualnej charakterystyce, iż zwięża się w swojej górnej i dolnej części. Giaquinto pisze, iż o ile niektóre typy struktur mają różniące się diagramy poszczególnych przypadków szczególnych, istnieją

⁶⁸⁸ Tamże, str. 218

⁶⁸⁹ Tamże, str. 218.

⁶⁹⁰ Tamże, str. 218.

⁶⁹¹ Skąd płynie taka zdolność? Czy wypływa ona z dokonywane w wyobraźni transformacji jednego diagramu w drugi? Giaquinto proponuje uznać, iż posiadamy pewną specyfikację rodzajową (*category specification*), rozumianą jako „zbiór (*collection*) powiązanych specyfikacji rodzajowych (*feature specifications*), które nie mogą być po prostu „odczytane” z diagramu, tzn. z jego konkretnych fizycznych charakterystyk (tamże, str. 220). Taka specyfikacja rodzajowa nie jest sama obrazem wizualnym, ale wzorcem uaktywnianym przez percepcję wzrokową.

struktury, które niezależnie od rozmiaru, mają względnie jednolitą strukturę zewnętrzną. Giaquinto podaje tu przykład struktury uporządkowaną przez relację liniową, bądź przez drzewa, a więc grafy nie posiadające cykli⁶⁹². Struktury te łączą się z względnie jednolitą reprezentacją wizualną. Dodajmy, iż jest to po części możliwe dzięki temu, iż operacja budowania bardziej złożonych drzew z drzew mniej złożonych jest sama w sobie względnie prosto wizualizowalna.

Można oczywiście zapytać, jaki typ struktur może być wizualizowany w podany sposób. Każdą strukturę, w której występują jedynie relacje dwuczłonowe można reprezentować za pomocą grafu, a więc na sposób wizualny. Struktury z kilkoma relacjami są już bardzo trudno wizualizowalne. Trudnym zadaniem jest też wizualizacja struktur z relacjami n-członowymi, gdzie $n > 2$ ⁶⁹³. Należy też dodać, iż duża ilość struktur jest po prostu zbyt duża, aby ująć i poznawać je za pomocą wizualnych reprezentacji. Jak podkreśla Giaquinto, „większość struktur, nawet większość struktur skończonych, jest zbyt duża(?) oraz zbyt skomplikowana dla poznania wizualnego”⁶⁹⁴. Grafy na kilku lub kilkunastu wierzchołkach są prosto wizualizowane – inna sytuacja ma miejsce w przypadku grafu na milionie wierzchołków. Jest to związane z ograniczeniami intuicji przestrzennej, o której mowa była również w poprzednim rozdziale.

W analizowanych tu podrozdziałach przypadkach tych Giaquinto nie kładzie nacisku na kontekst uzasadnienia, ani nawet na kontekst odkrycia. Kluczową ideą nie jest tu więc, jaką rolę w dowodzie, rozumowaniu, czy nawet odkryciu pełnią wizualizacje. Zwraca raczej uwagę na to, że w przypadku wielu pojęć matematycznych, znaczenie, które z nimi łączymy ma wizualny komponent. Myśląc o osi liczbowej, wyobrażamy sobie ją zazwyczaj w przestrzeni. Dokonując obliczeń, czy wyobrażając sobie niektóre struktury również korzystamy często z naszych umiejętności wizualnych. Dysponujemy więc wizualnym ujęciem, czy uchwyceniem bardzo wielu pojęć matematycznych.

⁶⁹² Por. tamże, str. 224-225.

⁶⁹³ Relację 3-członową można wizualizować jako „trójkąt” na trzech wierzchołkach. Wydaje się jednak, że taki typ reprezentacji byłoby przy większych strukturach mało komunikatywny.

⁶⁹⁴ Tamże, str. 236.

Wydaje się przy tym, że wiele z wizualnych skojarzeń, sposobów zdobywania wiedzy i rozumienia pojęć i procedur, o których pisze Giaquinto, nie jest w sposób konieczny związany z poszczególnymi pojęciami (np. konkretny kształt liczby w systemie pozycyjnym, czy konkretny kształt struktury). Wydaje się jednak, iż Giaquinto słusznie zwraca uwagę na pomocniczą funkcję przestrzennego myślenia w arytmetyce. Można powiedzieć, iż ów wizualny wymiar znaczenia pojęć każe powrócić do filozofii kantowskiej. Czy pojęciom dana jest „odpowiadająca im naoczność”? Stwierdzenie, iż i wizualny charakter pewnych pojęć matematycznych ma wrodzony charakter ma wyraźnie kantowski charakter.

8.5. Systemy diagramowe

Rozważając rolę diagramów w dowodach matematycznych nie sposób nie wspomnieć również o licznych w ostatnich latach próbach formalizacji rozumowań diagramowych. Najogólniej rzecz biorąc mowa tu o systemach, w których obok zwyczajnej symboliki matematycznej w sposób systematyczny określa się język diagramów, oraz ściśle określa reguły posługiwania się tym językiem. Formalizacje takie dotyczą najczęściej wybranych, wąskich obszarów – najczęściej są to proste rozumowania geometryczne, bądź rozumowania odwołujące się do diagramów Venn’a czy Eulera. Można tu wymienić formalizacje rozumowań euklidesowych Nathaniela Millera, oraz Johna Mummy, którą szerzej omawiam w kolejnym rozdziale. Klasyczne już systemy ujmujące rozumowania związane z diagramami Venn’a tworzyli na początku lat 90-tych Sun-Joo Shin oraz Eric Hammer. Nie mam w mojej pracy na celu przedstawianie tego dziś już szerokiego nurtu. Sam fakt istnienia takich systemów jest jednak wart uwagi, ponieważ rzuca światło na to, jaką rolę diagram może grać w rozumowaniach. W tym miejscu przyjrzą się więc krótko głównym zagadnieniom związanym z rachunkami diagramowymi (jak będę je również nazywał), oraz ogólnym konsekwencjom ich istnienia dla kwestii roli diagramów w poznaniu matematycznym.

Punktem wyjścia rachunków diagramowych jest dążenie do uściślenia i rekonstrukcji rozumowań opierających się w jakiś sposób na diagramach. Jak pisze Hammer, „wydaje się nie być przyczyny, dla której nie powinniśmy rozważać rodzaju reprezentacji używanego w rzeczywistych dowodach jako uprawnionej motywacji do konstrukcji logik”⁶⁹⁵. W ramach takiej formalizacji wprowadza się, jak wspominałem, nowy typ obiektów syntaktycznych – są to różnego rodzaju diagramy. Dodatkowo formułowane są reguły tworzenia nowych (poprawnie zbudowanych) diagramów, oraz reguły wnioskowania. Jeśli w danym systemie pojawiają się zarówno „tradycyjne” symbole, jak i symbole diagramowe, można rozważać różnego typu „interakcje” pomiędzy symboliczną oraz diagramową warstwą tych systemów. W różnych typach systemów połączenia elementów diagramowych i lingwistycznych określane są na różne sposoby. W swojej formalizacji zastosowań diagramów Venn’a, Hammer rozważa na przykład cztery typy wnioskowań: tradycyjne wnioskowania, których przesłankami i wnioskami są zdania (czy formuły zdaniowe), dalej wnioskowania prowadzące od zdań do diagramów, od diagramów do zdań i wreszcie od diagramów do diagramów⁶⁹⁶. Dla każdego typu wnioskowań formułuje Hammer odpowiednie reguły wnioskowania. Dowody systemu Hammera – jak i innych systemów diagramowych – mogą więc być zarówno zwykłymi ciągami zdań, jak również ciągami diagramów, bądź innego typu kombinacją tych dwóch typów reprezentacji.

W konsekwencji konstrukcja systemów diagramowych stanowi niemałe wyzwanie, rodzi również sporo problemów natury formalnej. Dodajmy, iż pojawia się tu również zagadnienie semantyki diagramów – funkcjonując jako symbole, diagramy mogą być bowiem różnie interpretowane. Można tu więc rozważać modele dla języka diagramowego, jak również stawiać tradycyjne pytania logiczne, jak np. pytanie o pełność poszczególnych rachunków względem konkretnych interpretacji.

Należy jednak podkreślić, iż siła wyrazu systemów diagramowych jest ograniczona. Formalizacja przeprowadzona została dotychczas dla niewielu

⁶⁹⁵ Hammer, E., *Reasoning with Sentences and Diagrams*, “Notre Dame Journal of Formal Logic”, Vol. 35, No 1, Winter 1994, str. 74.

⁶⁹⁶ Por. tamże, str. 74.

obszarów zastosowań diagramów, jak wspomniana geometria, czy diagramy Venn'a. Jak pisze Kulpa, „wnioskowanie diagramowe ciągle z trudem poddaje się formalizacji, a istniejące formalizacje często niweczą główną zaletę diagramów, jaką jest bezpośredni wgląd w sens przedstawionej informacji”⁶⁹⁷. Rezultaty formalizacji nie są więc, według Kulpy „w pełni satysfakcjonujące, szczególnie z pragmatycznego punktu widzenia”⁶⁹⁸. Badania nad „rachunkami diagramowymi” pozostają na uboczu praktyki matematyków, również praktyki w ramach której stosowane są diagramy. Ma ona również ograniczone znaczenie dla tematyki mojej pracy, w której rozważam rolę „zwykłych” diagramów w poznaniu matematycznym. Warto tu podkreślić za Kulpą, iż „formalizacja rozumowania diagramowego nie jest ostatecznym celem badań nad diagramami, jako, że rzadko używamy ściśle formalnych metod w praktyce, niezależnie czy robimy to używając diagramów, czy formuł”⁶⁹⁹. Formalizacje (niektórych) rozumowań diagramowych nie rozjaśniają wielu problemów związanych z zastosowaniami diagramów w matematyce. W wielu przypadkach nie wydaje się istnieć potrzeba takiej formalizacji (jak w przypadku wyników „eksperymentów komputerowych”, czy również np. teorii grafów). Jednak sam fakt ich istnienia (oraz możliwość ich skonstruowania) z pewnością ma pewne znaczenie dla tematyki mojej, które rozważać będę w dalszej części pracy. Dodam, że w kolejnym rozdziale przedstawiam w ogólnych zarysach jeden z powstałych w ostatnich latach systemów diagramowych, stworzony przez Johna Mummę.

Rozważania zawarte w tym rozdziale ukazują, jak różnorodne mogą być diagramy w matematyce, typy myślenia wizualnego, oraz role, jakie wizualizacje mogą odgrywać w poznaniu matematycznym. Mogą one również rodzić różne problemy filozoficzne. Analizowane w poprzednich rozdziałach tradycyjne

⁶⁹⁷ Kulpa, Z., *Diagramy kontra predykaty*, 2006, źródło: <http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob11.pdf>

⁶⁹⁸ Kulpa, Z., *Main problems...* str. 77.

⁶⁹⁹ Tamże, str. 77.

problemy związane z niewiarygodnością diagramów stosują się w niewielkim stopniu do diagramów dyskretnych. Nowe problemy pojawiają się w kontekście zastosowań komputerów – można tu np. wymienić „eksperymentalną” naturę badań nad wizualizacjami komputerowymi. Nowe spojrzenie na to, jaką rolę diagram może pełnić w rozumowaniach wiąże się wreszcie z rachunkami diagramowymi.

Rozdział 9. Dwa ujęcia roli wizualizacji w geometrii euklidesowej

Niniejszy rozdział jest poświęcony wizualizacji w geometrii euklidesowej. Wracam tu więc do wielu z zagadnień już poruszanych w pierwszej części pracy, rozważając je w świetle niektórych prac współczesnych. Rozdział podzielony jest na dwie części, w którym przedstawiam szczegółowo dwa szersze ujęcia roli diagramów w poznaniu geometrycznym – każda z nich stanowi więc obszerny „*case study*”.

W pierwszej z nich powracam do kwestii roli diagramów w *Elementach* Euklidesa. Ostatnie lata obfitują w rekonstrukcje rozumowań euklidesowych. Główną ideą im przyświecającą jest rewizja, bądź dyskusja z poglądem, iż rozumowania euklidesowe zawierają istotne luki logiczne, że używają często w nieuprawniony logicznie sposób diagramów. O tradycji tej, podkreślającej m.in. jednostkowość i niewiarygodność diagramów, pisałem dużo w poprzedniej części pracy. Punktem wyjścia analiz współczesnych jest więc obserwacja, iż Euklides – mimo braku znajomości logiki matematycznej – nie popełnia błędów w tym sensie, że nie dowodzi fałszywych twierdzeń. Jak pisze Keneth Manders, „starożytne rozumowania diagramatyczne działały! Problemy pojawiają się jedynie dlatego, że nie rozumiemy dlaczego działały”⁷⁰⁰. Píše on, iż, „Euklides, Apoloniusz i Archimedes w zasadzie się nie mylili: każdy z ich rezultatów posiada odpowiednik we współczesnej matematyce”⁷⁰¹. Stąd wielu matematyków i filozofów uznawało za słuszne wyjaśnienie takiego stanu rzeczy. Jak pisze Majer „musimy szukać czegoś, co uczyni prawdziwość geometrii euklidesowej zrozumiałą

⁷⁰⁰ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 71.

⁷⁰¹ Tamże, str. 67.

(*intelligible*)”⁷⁰². Inaczej mówiąc, jak wytłumaczyć ich sukces epistemiczny? Jednym z głównych celów jest więc wyjaśnienie, czy też wytłumaczenie sukcesu w zakresie funkcji uzasadniania (*justificatory success*). Aksjomatyczne ujęcia geometrii – te Tarskiego czy Hilberta – w niczym tu nie pomagają. Nie tłumaczą bowiem, jak możliwe było uzyskanie, można powiedzieć, tych samych wyników (o ile idzie o „euklidesowy” fragment teorii Hilberta czy Tarskiego) co Grecy, podczas gdy ci ostatni mieli do dyspozycji znacznie mniejszy arsenał środków⁷⁰³. Ken Saito podkreśla, że specyficzny styl w jakim napisane są *Elementy* powoduje, iż wielu z jego badaczy próbowało zrekonstruować to, czego Euklides *nie napisał*; „przez długi czas, językiem w którym mówiono o tym, czego Euklides nie powiedział, była filozofia”⁷⁰⁴. Współczesne nam rozważania kładą większy nacisk na metodologiczne aspekty dzieła Euklidesa. Można tu wymienić choćby *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study of cognitive history* R. pióra Netza (1999 r.), czy *After Euclid: Visual reasoning and the epistemology of diagrams* autorstwa J. Normana (2005 r.). Przedstawienie tych rozważań wymagałoby osobnej pracy, stąd wybrałem jedną z najnowszych takich koncepcji autorstwa Johna Mumma. Mumma, opierając się na wprowadzonym przez Kennetha Mandersa podziale na dokładne i quasi-dokładne własności diagramów, tworzy oryginalną interpretację rozumowań euklidesowych. Formułuje rekonstrukcję rozumowań euklidesowych, mając na celu przede wszystkim rozjaśnienie problemu ogólności rozumowań euklidesowych. Manders twierdzi, że „to, czy pewien jednostkowy (*particular*) narysowany diagram wystarczy aby uzasadnić ogólne geometryczne stwierdzenie (...) zależy od tego jak rozumowania korzystają z diagramów. Jednostkowość (*particularity*) nie jest nieuleczalnym i zaraźliwym agentem”⁷⁰⁵. Za pomocą analizy euklidesowych rozumowań Mumma próbuje więc pokazać, że rozumowaniom diagramowym można nadać postać ścisłą i poprawną, nie odbiegając od ducha geometrii *Elementów*, tzn. sprowadzając geometrię w pełni do logiki matematycznej. Mumma tworzy w tym celu system

⁷⁰² Majer, U., *The Relation of Logic...*, str. 49.

⁷⁰³ Por. Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 67.

⁷⁰⁴ Saito, K., *Reading...*, str. 804.

⁷⁰⁵ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 72.

dowodowy, w ramach którego obok „zwykłych” symboli, pojawiają się symbole diagramowe. System Mummy można więc traktować jeden ze wspomnianych w poprzednim rozdziale „rachunków diagramowych”.

W drugiej części rozdziału przedstawiam sformułowaną przez Marcusa Giaquinto w książce *Visual Thinking in Mathematics* rekonstrukcję bardzo elementarnych wnioskowań związanych z prostymi figurami geometrycznymi, jak kwadraty. Rekonstrukcja ta odwołuje się do współczesnych badań kognitywistycznych, a opiera się m.in. na empirycznych badaniach dotyczących percepcji figur symetrycznych. Ujęcie to jest najdokładniejsze ze znanych mi ujęć poznania geometrycznego, czy ogólniej opartego na wizualizacjach. Jest jednak tym samym ujęciem najbardziej zawężonym, odnoszącym się do specyficznego typu poznania zawężonego zbioru obiektów (kwadratów) w konkretnej gałęzi matematyki (geometrii). Jest to więc analiza bardzo „lokalna”, sformułowana zgodnie z zasadą przedkładania „jakości” nad „ilość”. Mimo to bardzo wiele aspektów tego szczegółowego ujęcia rozciąga się również na inne działy matematyki i inne typy wizualizacji. W szczególności godna uwagi jest tu argumentacja przeciwko empirycznemu charakterowi wizualizacji, która będzie miała znaczenia dla moich dalszych rozważań. Dodam, iż ujęcie Giaquinto ma tu pod wieloma względami silnie kantowski wydźwięk.

9.1. Ujęcie rozumowań euklidesowych Kennetha Mandersa i Johna Mummy

Kenneth Manders i John Mumma podejmują się obrony rozumowań euklidesowych, tzn. takich, jakie zawarte są w dowodach twierdzeń z *Elementów*. Dla tego podejścia fundamentalny jest podział na dokładne i quasi-dokładne własności diagramów euklidesowych. Podział ten wprowadził Manders, Mumma natomiast przejął go i wykorzystał do sformułowania swojej rekonstrukcji

rozumowań euklidesowych. Podział ten jest wart uwagi nie tylko jako narzędzie metodologiczne pozwalające na analizę rozumowań zawartych w *Elementach* Euklidesa. Pozwala on również sformułować szersze ujęcie roli diagramów w geometrii, w ramach którego można formułować odpowiedzi na wiele z centralnych dla wizualizacji problemów. W szczególności, opierając się na nim można sformułować ujęcie zagadnienia ogólności twierdzeń opartych na diagramach, jak również m.in. kwestii relacji intuicji i pojęć w poznaniu diagramowym. Zaczniemy więc od szerszego omówienia.

Podział na dokładne (*exact*) i quasi-dokładne (*co-exact*) własności diagramów stanowi bardzo użyteczne narzędzie do określania, jaką rolę w dowodach pełnią poszczególne własności diagramu. Definicje powyższych pojęć nie są w pełni ścisłe, mają częściowo charakter nieformalny. Własności quasi-dokładne definiuje więc Manders jako te, które “pozostają niewrażliwe na pewien zakres każdej ciągłej modyfikacji (*some range of every continuous variation*) konkretnego diagramu”⁷⁰⁶. Typowymi przykładami takich własności są zawieranie się w sobie obszarów bądź odcinków, fakt istnienia punktów przecięcia dla danych odcinków bądź krzywych; dalej można wymienić własności takie, jak „punkt leży w obszarze”, „bok leży naprzeciw wierzchołka”, „trójkąt jest położony w innym trójkącie”, „punkt jest położony pomiędzy dwoma innymi punktami”, itd. Można je, w słowach Mandersa, określić ogólnie jako „inkluzje oraz styczności (*contiguities*) obszarów, odcinków i punktów na diagramie”⁷⁰⁷. O własnościach quasi-dokładnych „można powiedzieć, że wyrażają one topologię diagramu”⁷⁰⁸. Zbiór wszystkich takich własności proponuje Manders ogólnie nazwać terminem *appearance*, który można tłumaczyć, jak zewnętrzna postać diagramu, bądź po prostu to, jakim nam się jawi.

Drugą grupą własności diagramów są własności dokładne. Oto ogólne, nieco nieprzejrzyste ich określenie: „dokładne własności to te, które w przypadku przynajmniej niektórych ciągłych modyfikacji diagramu, pozostają niezmienione

⁷⁰⁶ Manders, K., *The Euclidean Diagram...*, str. 92.

⁷⁰⁷ Tamże, str. 89.

⁷⁰⁸ Tamże, str. 92. Potter pisze, że o tych własnościach można też myśleć jako o takich, które są niezmiennicze względem przekształceń homeomorficznych (por. Potter, D., *Diagrammatic Representation in Geometry*, “Dialectica”, 2006, Vol. 60, No 4, str. 374).

jedynie w odosobnionych przypadkach”⁷⁰⁹. W słowach Manders, są one, inaczej mówiąc, „niestabilne względem modyfikacji diagramu”⁷¹⁰. Najważniejszą cechą dokładnych własności jest to, że mogą one być wyrażane za pomocą równań algebraicznych, bądź też proporcji⁷¹¹. Przykładami takich własności są: równość długości linii (odcinków), miar kątów, przystawianie trójkątów; inne takie własności to: geometryczna charakterystyka danych krzywych (np. że stanowią okrąg, bądź elipsę), równoległość prostych, styczność prostej do krzywej (w przeciwieństwie do przecinania jej w dwóch blisko położonych wzajemnie punktach)⁷¹². W szczególności więc niektóre dokładne własności diagramu związane są z orzekaniem równości, bądź mniejszości i większości odpowiednich wielkości. Własności dokładne charakteryzują się ogólnie tym, iż niewielka modyfikacja diagramu powoduje, iż diagram ów je traci. Własności te mają oczywiście fundamentalne znaczenie dla geometrii. Jak podkreśla Manders, „bez takich wnioskowań [tzn. wnioskowań o założeniach i konkluzjach będących własnościami dokładnymi](...) rozumowania przestrzenne są bez porównania słabsze (*handicapped beyond recognition*)”⁷¹³. Własności dokładne nie są dalej „nigdy orzekane w oparciu o to, jak diagram wygląda (*claimed based on what the diagram looks like*)”⁷¹⁴.

Kluczową kwestią jest to, że jedynie własności quasi-dokładne mogą być odczytane z diagramu, tzn. orzekane o obiekcie geometrycznym reprezentowanym przez diagram jedynie przez zewnętrzny „ogład” diagramu. Z drugiej strony, „przypisywanie własności dokładnych (*exact attribution*) jest uprawomocnione jedynie przez wcześniejsze fragmenty tekstu dyskursywnego, własności te nie mogą być nigdy ‘odczytane’ z diagramu”⁷¹⁵. Tak więc, jak pisze Mumma, „diagramy Euklidesa biorą udział w dowodach *tylko* poprzez ich własności quasi-dokładne. Euklides nie wnioskuje nigdy o dokładnej własności na podstawie

⁷⁰⁹ Manders, K., *The Euclidean Diagram...*, str. 92.

⁷¹⁰ Tamże, str. 93.

⁷¹¹ Nie wszystkie takie równości mogły przy tym być już formułowane w języku Euklidesa; przedstawienie niektórych z nich w postaci równań było możliwe dopiero od Kartezjusza.

⁷¹² Por. Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 92.

⁷¹³ Tamże, str. 93.

⁷¹⁴ Manders, K., *The Euclidean Diagram...*, str. 69.

⁷¹⁵ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 93.

diagramu, chyba że wynika ona bezpośrednio z jakiejś własności quasi-dokładnej”⁷¹⁶. Tu cytowani autorzy widzą rozwiązanie – przynajmniej częściowe – problemu wiarygodności wnioskowań diagramowych. Tym, co czyni wnioskowanie o własnościach quasi-dokładnych – a tylko takie odnajdziemy u Euklidesa – wiarygodnym (a przynajmniej nie z gruntu zawodnym), jest ich kluczowa cecha, tzn., że są one stabilne względem niewielkich modyfikacji diagramu. Dodatkowo, odnajdujemy tu pewne wytłumaczenie natury „niedoskonałości” rozumowań euklidesowych: „typowe ‘luki u Euklidesa’ związane są z odczytywaniem z diagramu pewnych jawnie quasi-dokładnych charakterystyk”⁷¹⁷. Podział na własności dokładne i quasi-dokładne ma więc w tym sensie stanowić wyjaśnienie poprawności rozumowań euklidesowych.

Dodajmy, iż Keneth Manders zwraca tu uwagę na pewną nieostrość pojęcia własności quasi-dokładnej. Pisze on, iż „dozwolona skala modyfikacji, która nie została określona w naszej definicji własności quasi-dokładnych, jest różna w zależności od diagramu”⁷¹⁸. Zakres „dozwolonych” tzn. nie prowadzących do błędów modyfikacji diagramu jest więc nieostry i zróżnicowany. Pojawia się więc tu znów pewne ryzyko błędu. Jak twierdzi Mumma, nieostrość ta jest wyeliminowana w ramach formalizacji własności dokładnych i quasi-dokładnych, którą omawiam poniżej.

John Mumma tworzy na kanwie podziału Kenetha Mandersa oryginalną rekonstrukcję dowodów euklidesowych. Pisze o niej jako o systemie dowodowym (*proof system*), który nazywa skrótem **Eu**. W ramach tego systemu formalizowane są pewne czysto diagramowe aspekty rozumowań euklidesowych, w ten sposób uściślając przebieg całości dowodów. Należy od razu podkreślić, iż autor *Proofs, Pictures and Euclid* zaprojektował ów system przede wszystkim z myślą o wyjaśnieniu i ugruntowaniu ogólności twierdzeń euklidesowych. Według Mummy, Euklides „posiadał matematyczną inteligencję, która pozwalała mu oddzielić na diagramie to, co jest ogólnie prawdziwe od tego, co nie jest”⁷¹⁹. Omawiana tu

⁷¹⁶ Mumma, J., *Proofs...*, str. 264.

⁷¹⁷ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 91.

⁷¹⁸ Tamże, str. 94.

⁷¹⁹ Mumma, J., *Proofs...*, str. 270.

rekonstrukcja ujmuje, według jej twórcy, tę euklidesową inteligencję, tak, że dostarcza nam metodę „osądzenia, co jest ogólne w skonstruowanym diagramie, a co nie”⁷²⁰. Poniżej przyjrzę się głównym aspektom systemu Mummy, kładąc nacisk na ogólno-filozoficzne aspekty związane z diagramami, raczej niż na kwestie formalne.

System Mummy można uznać za przykład rachunku diagramowego. Dokładniej jest on systemem „hybrydowym”, zawiera więc zarówno komponent językowy, jak i komponent diagramowy – wprowadza się tu mianowicie, jak pisze Mumma, symbole diagramowe (*diagrammatic symbol type*) oraz określa ich dokładny kształt oraz reguły ich przekształcania⁷²¹. Nie można systemu Mummy nazwać w pełni sformalizowanym. Jego ogólna postać jest jednak w ogólnych zarysach analogiczna do struktury zwykłych teorii aksjomatycznych budowanych na gruncie logiki. Zaczniemy więc od omówienia wspomnianych składowych: diagramowej i zdaniowej, którą Mumma nazywa metryczną.

Na język tej drugiej składa się sześć symboli relacyjnych. Są to relacja równości oraz mniejszości, które zachodzą między trzema typami wielkości: długości odcinków, miar kątów oraz wielkości pól. Pod zmienne występujące w predykatkach podstawiamy przy tym punkty – np. arność predykatu orzekającego równość kątów jest równa sześć, ponieważ dla określania każdego z dwóch kątów potrzebne są trzy punkty. Stwierdzenia metryczne można dalej za pomocą jednego spójnika – koniunkcji. Mumma wprowadza też w ramach swojego systemu dwa stwierdzenia metryczne traktowane jako stałe: „ \perp ” reprezentujące sprzeczność, oraz „ \emptyset ” reprezentujące „puste stwierdzenie metryczne” (*empty metric assertion*)⁷²².

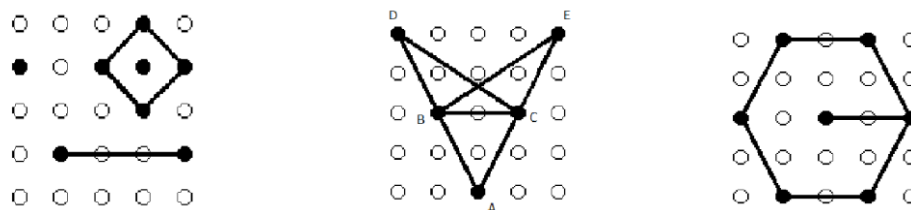
Język „diagramowej” części zdań **Eu** składa się w pierwszym rzędzie „siatka” punktów; dokładniej jest to siatka „pustych miejsc” (*dots*), które mogą być wypełnione poszczególnymi, należącymi do diagramu, punktami. Siatka ta może być „gęstsza” lub „rzadsza”, w zależności od postaci danego rozumowania czy

⁷²⁰ Tamże, str. 274.

⁷²¹ Por. tamże, str. 256.

⁷²² Por. tamże, str. 282. Jak podkreśla Mumma, „syntaktyka diagramów jest zdefiniowana tak, aby możliwe było wyrażenie całego zakresu quasi-dokładnych relacji wyrażanych (*conveyed*) przez diagram, oraz tak, by reguły rządzące tymi symbolami rozpoznawały (*recognize*) jedynie te relacje”.

obiekty, który ma być reprezentowany przez diagram (siatkę możemy więc np. zagęścić, jeżeli przecięciu dwóch odcinków odpowiada puste miejsce na siatce). Na diagram składają się dalej punkty, elementy liniowe (proste, półproste, odcinki) oraz okręgi, które są również określone przez punkty. Te ostatnie proponuje Mumma reprezentować przez wieloboki, wraz z punktem reprezentującym środek okręgu. Dodatkowo każdy diagram (a dokładniej jego punkty) musi być oczywiście oznaczony symbolami – tak, by metryczna i diagramowa składowa mogły być powiązane. Przykłady diagramów zbudowanych w taki właśnie sposób zaprezentowane są poniżej.



Rys. 1.

Diagramy takie proponuje Mumma traktować jako symbole dowodowe, tzn. obiekty odgrywające pełnoprawną rolę w rozumowaniach. Służą one do wyrażania własności quasi-dokładnych, przy czym „dla każdego oznaczonego literami diagramu istnieje nieskończona ilość innych diagramów, które wyrażają (*convey*) te same relacje quasi-dokładne i tym samym są podstawą dla tych samych wnioskowań w dowodzie euklidesowym”⁷²³. Punkty mogą być na przykład rozmieszczone na siatce w różnej odległości, różna może być też gęstość siatki – przy zachowaniu odpowiednich topologicznych relacji pomiędzy elementami diagramu. Aby sprecyzować, które diagramy są w tym sensie „tego samego typu”, Mumma określa relację równoważności. Relacja ta łączy w klasy abstrakcji wszystkie diagramy wyrażające te same własności quasi-dokładne. Jest to ważny aspekt systemu **Eu** – pozwala bowiem wyjaśnić ogólność rozumowań Elementów

⁷²³ Tamże, str. 284.

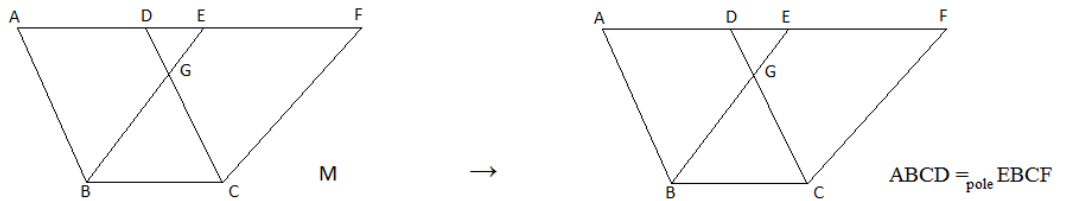
(każdy diagram nie jest tu traktowany jako jednostkowy ale jako reprezentujący zbiór diagramów o tych samych własnościach quasi-dokładnych).

Poprawnie zbudowane stwierdzenia tego systemu są dalej formalizowane jako implikacje kształtu:

$$\Delta_1, A_1 \rightarrow \Delta_2, A_2$$

gdzie Δ reprezentuje składnik diagramowy, A natomiast składnik zdaniowy (metryczny). Poprzednik implikacji – Δ_1 oraz A_1 – wyraża warunki początkowe, czyli własności diagramu oraz zależności przedstawiane jako założenia danego dowodu. W związku z powyższym, również dowody euklidesowe mają dwa składniki - zdaniowy, stwierdzający równości odpowiedniej wielkości, jak i diagramowy, w ramach którego orzeka się o relacjach quasi-dokładnych, tzn. relacjach pomiędzy obszarami, wzajemnym położeniem punktów, itd.

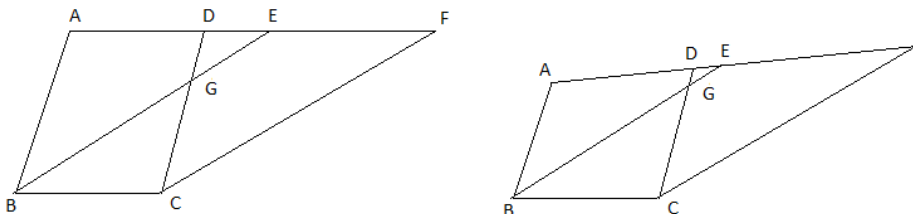
Dla ilustracji wróćmy do jednego z przykładów analizowanych w pierwszym rozdziale. Chodzi tu o twierdzenie, głoszące, że każde dwa równoległoboki, które są ograniczone tymi samymi prostymi równoległymi, oraz posiadają jedną podstawę wspólną, mają takie samo pole. Warunkami wyjściowymi dla tego dowodu są diagram, oraz stwierdzenie M, zgodnie z którym, równe są cztery pary kątów: $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle EBC$ i $\sphericalangle EFC$, oraz $\sphericalangle BEF$ i $\sphericalangle BCF$. W tym przypadku $\Delta_1 = \Delta_2$ ⁷²⁴. Stwierdzenie systemu Eu ma więc, ogólnie rzecz biorąc, następującą postać.



Rys. 2

⁷²⁴ Por. tamże, str. 266.

Ilustracją dla dowodu może być przy tym cała klasa diagramów, m.in. trzy poniższe:



Rys. 3

Jak widać na trzecim z rysunków, odcinki AF oraz BC nie muszą być na diagramie równoległe. Równoległość oraz równość kątów nie są bowiem własnościami quasi-dokładnymi i nie są odczytywane z diagramu (również przez Euklidesa). Równość kątów jest ujęta w metrycznej składowej twierdzenia, tak, iż diagram, na którym wspomniane odcinki nie są równoległe może również służyć dowodowi twierdzenia bez ryzyka popełnienia błędu (choć stosowanie takiego diagramu byłoby oczywiście nierozsądne a być może również mylące). Zauważmy tu jeszcze, iż odwołując się do położenia punktu G, Euklides powołuje się na własność quasi-dokładną diagramu. Mogło to być postrzegane jako wada rozumowania Euklidesa, w ramach systemu **Eu** nie stanowi to oczywiście dla poprawności dowodu żadnego zagrożenia.

Mumma podkreśla, iż aby poddać dowody euklidesowe rekonstrukcji w adekwatny sposób, należy uwzględnić jeszcze jeden ich element – proces konstrukcji diagramu. Duża część dowodów euklidesowych zawiera etap konstrukcyjny, w ramach którego określa się sposób, w jaki nanoszone powinny być kolejne elementy diagramu. Informacja ta pojawia się często stopniowo, podczas gdy na diagramie służącym jako ilustracja dowodu naniesione są na niego „od razu” wszystkie jego kolejne kroki. Używając powyżej wprowadzonej terminologii, w takich przypadkach $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Sama metoda konstrukcji, czy algorytm, zgodnie z którym jest ona wykonywana, nie determinuje własności

quasi-dokładnych. Wykonywana na różne sposoby, może prowadzić do diagramów o różnych własnościach quasi-dokładnych. Przykładem dobrze ilustrującym ten problem jest twierdzenie 2 z Księgi I Elementów. Proces konstrukcji może tu, w zależności od warunków początkowych, przebiegać na dwa różne sposoby⁷²⁵.

Nie ma tu miejsca na szerszą analizę metody, za pomocą której Mumma formalizuje proces konstrukcji – jest to jeden z bardziej złożonych aspektów systemu **Eu**. Poniżej przedstawię tylko jego niektóre aspekty.

W dalszej kolejności przyjrzymy się krótko temu, jak wyglądają dowody w systemie **Eu**. Składają się one na etap konstrukcyjny i etap dowodowy (*demonstration stage*). Reguły konstrukcyjne pozwalają wzbogacać wyjściowy diagram Δ_1 poprzez dodawanie punktów, łączenie odcinków, rozszerzenie odcinków, czy konstruowanie okręgów. Proces konstrukcji można kodyfikować, jako sekwencję diagramów. Diagramy te można uporządkować za pomocą relacji częściowego porządku, którą Mumma określa następująco: „element x w diagramie *bezpośrednio poprzedza* y , jeśli konstrukcja y korzystała z x ”⁷²⁶. (jeśli np. punkty A oraz B są w trakcie konstrukcji łączone, punkty A i B bezpośrednio poprzedzają odcinek AB). Dopiero tak określony proces konstrukcji diagramu jest podstawą do przeprowadzania wnioskowań. Dokładniej, podstawą taką jest trójka $\langle \Sigma, M, \blacktriangleright \rangle$, gdzie \blacktriangleright jest częściowo uporządkowanym zbiorem diagramów odpowiadających etapom konstrukcji, Σ natomiast jej końcowym efektem; symbol M to stwierdzenie metryczne, które obejmuje dokładne relacje, zakładane, albo wprowadzane w trakcie dowodu⁷²⁷. Taką trójkę nazywa Mumma *kontekstem* dowodu.

Reguły, którymi można się posługiwać na etapie dowodzenia (*demonstration stage*) dzielą się na dwa rodzaje: pozycyjne (*positional*) i metryczne. W cytowanej tu pracy Mumma nie podaje listy tych reguł, poprzestając na ich ogólnym opisie⁷²⁸.

⁷²⁵ Nie ma tu miejsca na szerszą analizę tego przykładu. Zauważmy, że dowód wspomnianego twierdzenia jest poprawny. Jest tak, ponieważ korzysta on tylko z tych własności quasi-dokładnych, które są wspólne dwóm diagramom odpowiadającym dwóm możliwym efektom końcowym konstrukcji. Nie jest jednak z góry (czy jak pisze Mumma – „prima facie”) oczywiste, że dowód jest poprawny dla obu diagramów; nie wskazuje na to również tekst *Elementów*.

⁷²⁶ Tamże, str. 271-272.

⁷²⁷ Tamże, str. 272.

⁷²⁸ Pełna konstrukcja systemu **Eu** przedstawiona jest w pracy doktorskiej Mummy. O ile mi wiadomo, nie została ona wydana drukiem, a dalsze szczegóły systemu Eu nie zostały opisane w czasopiśmie specjalistycznych.

Reguły metryczne mają ogólnie odpowiadać aksjomatom Euklidesa (m.in. tym dotyczącym relacji równości pomiędzy różnymi wielościami). O regułach pozycyjnych pisze Mumma co następuje: „efektem zastosowania reguły pozycyjnej jest poddiagram Σ . Wyprowadzenie (*deriving*) poddiagramu sprowadza się do potwierdzenia ogólności quasi-dokładnych związków na nim przedstawionych”⁷²⁹. Można więc ogólnie powiedzieć, że reguły te prowadzą od poddiagramów do poddiagramów diagramu ilustrującego dany dowód⁷³⁰.

Warto tu wspomnieć o jeszcze jednym aspekcie rozumowań opartych na diagramach, na które, według Mummy, rzuca światło system **Eu**. Należy mianowicie w ostrożny sposób powoływać się na relacje quasi-dokładne, które nie są z sobą powiązane przez następujące bezpośrednio po sobie kroki konstrukcji. Na diagramach przedstawiane są na ogół „*jakiś* związki pomiędzy niepowiązanymi elementami”⁷³¹, należy jednak na ogół być ostrożnym w orzekaniu ogólnie zachodzącego związku pomiędzy takimi, niepowiązanymi, elementami. Bardzo dobrym przykładem jest tu diagram analizowany we wstępie do niniejszej pracy – diagram Klein’a, za pomocą którego „dowodzi” się, że wszystkie trójkąty są równoramienne. Źródło błędu w rozumowaniu związanym z tym diagramem można ująć w następujący sposób: fakty, iż F leży na odcinku AB oraz G leży na odcinku AC nie są powiązane (na sposób, o którym wspominam powyżej). Sposób konstrukcji diagramu nie wskazuje na powiązanie F oraz AB, nie można więc na podstawie rysunku przyjmować jako ogólny fakt, iż F leży na AB⁷³².

Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze raz sposobowi, na jaki system **Eu** radzi sobie z „tradycyjnym” problemem ogólności wniosków z rozumowań opartych na diagramach. Powtórzmy, iż według Mummy, Euklides, o ile odczytuje własności figur z charakterystyk diagramu, powołuje się jedynie na jego charakterystyki quasi-dokładne. Według autora *Proofs, Pictures and Euclid*, dowody Euklidesa zachowałyby więc swoją poprawność, jeśli użyte byłyby „diagramy, które są

⁷²⁹ Tamże, str. 273.

⁷³⁰ Za przesłankę wnioskowania można przyjąć dowolny poddiagram diagramu wyjściowego, tzn. Δ_1 . Kolejne diagramy mogą być z niego „wyprowadzone” przy pomocy reguł pozycyjnych, oraz, jak pisze Mumma, „wzdłuż gałęzi” uporządkowanego zbioru diagramów ► (por. tamże, str. 19).

⁷³¹ Tamże, str. 274.

⁷³² Por. tamże, str. 275.

równoważne w zakresie własności quasi-dokładnych (...), ale różnią się w zakresie swoich własności dokładnych”⁷³³. Inaczej mówiąc, dowód euklidesowy jest prawdziwy w odniesieniu do wszystkich figur, które mają wspólną zewnętrzną charakterystykę (*appearance*), a więc takie same własności quasi-dokładne. Stąd płynnie wyjaśnienie ogólności dowodów euklidesowych – w rozumowaniach nie odnosimy się do konkretnego diagramu, tylko do pewnej klasy diagramów równoważnych pod względem własności quasi-dokładnych⁷³⁴. Należy tu wreszcie stwierdzić, iż klasa diagram, dla których dowód będzie określona jest również przez sposób konstrukcji. Stąd Mumma formułuje następującą zasadę: „to, co w diagramie jest ogólne zależy od tego, jak został on skonstruowany”⁷³⁵. Podsumowując, „w momencie, w którym rozumiemy, w jaki sposób diagram funkcjonuje jako symbol dowodowy, każdy jednostkowy diagram może stanowić (*comprise*) ogólne matematyczne stwierdzenie”⁷³⁶.

9.2. Marcusa Giaquinto ujęcie elementarnych rozumowań euklidesowych.

Druga część tego rozdziału poświęcona jest oryginalnemu ujęciu poznania geometrycznego, którego twórcą jest Marcus Giaquinto. Na początek chciałbym przypomnieć o wspomnianych ogólnych różnicach pomiędzy koncepcją, oraz celami badawczymi, Giaquinto, ujęciem rozumowań geometrycznych Mummy. W centrum jego badań nie leży rola wizualizacji w dowodach matematycznych. Jak wspominałem poprzednich rozdziałach, Giaquinto kładzie nacisk na różne funkcje

⁷³³ Tamże, str. 265.

⁷³⁴ Można by powiedzieć, że odnoszą się do klasy abstrakcji względem tak określonej relacji równoważności. Powołanie się na to pojęcie nie wydaje się być do końca uzasadnione, ponieważ granica pomiędzy figurami o własnościach - ich wrażliwość na modyfikacje diagramu jest – co podkreśla również Manders – zróżnicowana, stąd trudność w dokładnym określeniu czym jest dokładnie odpowiednia relacja równoważności i stąd klasa abstrakcji.

⁷³⁵ Tamże, str. 270.

⁷³⁶ Tamże, str. 267.

epistemiczne. W szczególności istotne dla Giaquinto jest odkrycie w matematyce: jest ono czym innym niż dowód – jest to indywidualna droga dojścia do przekonania o prawdziwości pewnego zdania matematycznego. W centrum poniżej opisywanego ujęcie leży więc przede wszystkim funkcja odkrywanie w matematyce.

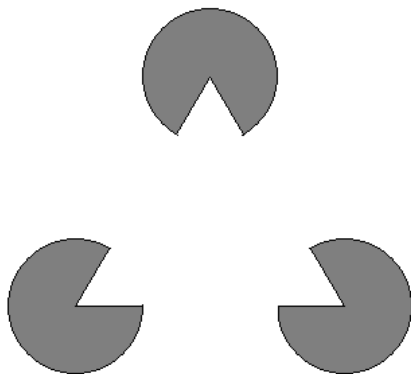
Celem Giaquinto jest bardzo szczegółowe ujęcie pewnych procesów poznawczych związanych z elementarnymi obiektami geometrii – procesów, w przypadku których, dzięki zastosowaniu diagramów dochodzimy do pewnych przekonań odnośnie figur geometrycznych. Pytaniem, które stawia sobie oxfordzki filozof jest więc: „jak zdobywamy podstawową (*basic*) wiedzę geometryczną?”⁷³⁷. Ujęcie Giaquinto charakteryzuje się bardzo dużą dokładnością, z jaką przedstawiane są kolejne etapy poznania, oraz bardzo zawężonym zakresem badań. Autor *Visual Thinking in Mathematics* ogranicza się tu mianowicie do badania poznania podstawowych własności kwadratów: jego analiza wychodzi od postrzegania pewnych własności czworoboków przy pomocy wzrokowo postrzeganych osi symetrii i kończy się na ukazaniu, jak za pomocą tych danych percepcyjnych formujemy pojęcia matematyczne oraz nabywamy pewne przekonania odnośnie obiektów matematycznych. Dodajmy, że znajdujące się na pograniczu epistemologii i kognitywistyki analizy Giaquinto są bardzo odważne i z pewnością nie są pozbawione niedoskonałości. Należy przy tym zaznaczyć (co podkreśla sam Giaquinto) iż jest ona tylko pewną propozycją rekonstrukcji, obrazuje pewną możliwość, jeśli chodzi o kształt procesu poznania matematycznego, możliwy model tego poznania. Poprzez ograniczenie swojego zasięgu jedynie do elementarnych prawd dotyczących kwadratu, można powiedzieć, wydaje się również nie być reprezentatywna dla całej geometrii. Mimo to pewne aspekty analiz Giaquinto rzucają światło na poznanie diagramowe w ogóle. Można tu wymienić choćby wrodzone aspekty postrzegania symetrii w wizualizacjach, czy argumentacja za tym, iż poznanie związane z elementarnymi

⁷³⁷ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 12.

figurami geometrycznymi można postrzegać jako konstytuujące „poznanie syntetyczne *a priori*”⁷³⁸.

Prezentacja badań Giaquinto zostanie podzielona na kilka głównych etapów, zgodnych z porządkiem wyводу przedstawionego w *Visual Thinking in Mathematics*. Rozpocznemy przy tym (za Giaquinto) od ogólnych uwag z pogranicza epistemologii i kognitywistyki.

Do pewnego czasu dominował pogląd, iż w efekcie przetwarzania przez nasz układ wzrokowy danych zmysłowych, pojawiające się w naszych umysłach reprezentacje wizualne są wiernymi kopiami obrazu na siatkówce oka. Inaczej mówiąc, percepcja miała być wiernym odwzorowywaniem obiektywnie istniejących cech postrzeganych przedmiotów (stanowisko te, jak wspominałem, określa się często mianem realizmu bezpośredniego w filozofii percepcji). Jak wykazały jednak liczne badania, obiekty, które subiektywnie postrzegamy w efekcie sposobu działania naszego układu wzrokowego, posiadają często „dodatkowe” cechy, których nie są obecne na rysunkach (ani na siatkówce oka). Jednym ze znanych przykładów jest poniższy rysunek, na którym postrzegamy trójkąt, mimo, że żaden z jego boków nie jest elementem rysunku.

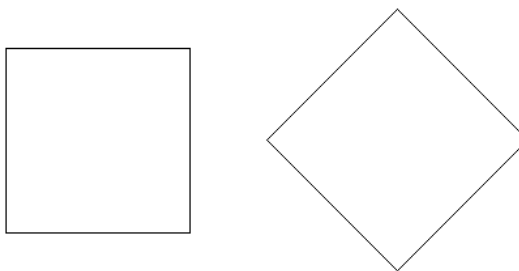


Rys. 4.

Jedną z sytuacji, w przypadku których postrzegamy coś więcej niż jest zawarte w samych fizycznych cechach przedmiotów, jest percepcja symetrycznych

⁷³⁸ Tamże, str. 12.

przedmiotów, której analiza stanowi centrum ujęcia Giaquinto. Za omawianym tu filozofem, zacznijmy od spostrzeżenia, że na percepcję – a dokładniej na to, co postrzegamy – znaczący wpływ ma orientacja, czy położenie (*orientation*) obiektów. Orientacja jest zdeterminowana przez obrany przez nasz system wzrokowy układ odniesienia. Układ odniesienia można rozumieć jako parę prostopadłych osi, z których jedna jest osią „górną-dół”. Oto prosty przykład - litera Σ przy „przesunięciu układu odniesienia o 90° może być postrzegana jako litera M bądź W. Innym przykładem jest „zwyczajny” kwadrat, oraz kwadrat obrócony o 45° , który naśladując angielską terminologię (i z braku polskiego terminu) możemy nazwać „diamentem”. Ten drugi jesteśmy mianowicie skłonni postrzegać jako kwadrat, ten drugi natomiast jako romb.



Rys. 5.

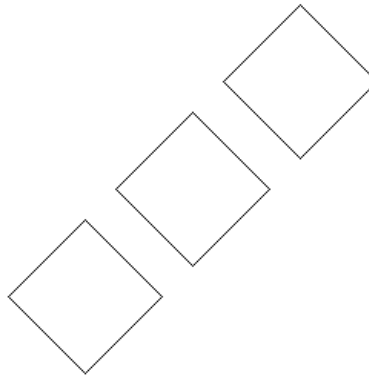
Orientacja przedmiotu wpływa więc na treść naszych percepcji, na to *jaki* obiekt postrzegamy. Giaquinto proponuje dalej myśleć o treści wizualnej reprezentacji jako o zbiorze zewnętrznych cech charakterystycznych (*set of feature descriptions*), które postrzegamy w trakcie procesu percepcji⁷³⁹. Zbiór ten jest odmienny w przypadku różnych orientacji przedmiotu. To, „w jakiej orientacji” postrzega nasz układ wzrokowy dany przedmiot uzależnione jest od tego, jaką główną oś (*strong intrinsic axis*) „obierze”.

Nas umysł przeważnie „wybiera” jedną taką oś, wybór ten następnie determinuje zbiór cech charakterystycznych, który w niejako automatyczny będzie

⁷³⁹ Tamże, str. 16.

przypisywany figurze, w zależności od obranej osi. Patrząc na kwadratowy diament „narzuca się” oś pionowa, która determinuje własności, jakie w nim, dostrzegamy: „jeśli kwadrat jest postrzegany jako diament, zbiór cech charakterystycznych będzie zawierał informację, że jest symetryczny względem pionowej (górną-dół) osi, z jednym wierzchołkiem na górze, jednym na dole oraz jednym z każdej strony”⁷⁴⁰. Własności te to właśnie zbiór zewnętrznych cech charakterystycznych.

To, jaką oś układ wzrokowy obiera jaką główną zależy od kilku, niezależnych od woli, czynników. Przede wszystkim jako taką oś wybieramy oczywiście tę, która dzieli figurę na dwie części będące swoim odbiciem lustrzanym (*reflection symmetry*) – zgodnie z definicją symetrii osiowej. Jeśli możliwych jest jednak więcej takich osi (jak w przypadku kwadratu), w pierwszej kolejności jest to „oś grawitacyjna”. Jest ona najbardziej naturalną osią symetrii, stanowi ona, jak pisze Giaquinto pewien „środowiskowy układ odniesienia”. I tak postrzegając kwadrat z powyższego diagramu, większość z nas jest skłonna w pierwszym rzędzie widzieć go jako symetrycznego względem pionowej osi przechodzącej przez środki boków – a w przypadku „diamentu”, względem pionowej osi przechodzącej przez wierzchołki. W dalszej kolejności układ wzrokowy wybiera oś biorąc pod uwagę cechy otoczenia przedmiotu. W szczególności, jeśli dany przedmiot ma kilka możliwych osi symetrii, obierana jest ta, którą dzieli on z innymi przedmiotami (można się o tym przekonać rozważając poniższy diagram).



Rys.6.

⁷⁴⁰ Tamże, str. 16.

Postrzegając pewne symetrie, mózg postrzega powiązane z nimi cechy rysunków, bądź cechy, które są konsekwencją faktu symetryczności względem jakiejś konkretnej osi. Jak pisze Giaquinto, „postrzeganie figury geometrycznej jako kwadratu, pociąga fakt, iż wszystkie jego kąty są równe”, podczas gdy „postrzeganie symetrii [w ‘diamencie’] pociąga postrzeganie kątów leżących naprzeciw siebie jako równych”⁷⁴¹.

Jak wspominałem, przez treść reprezentacji wizualnej można ogólnie rozumieć zbiór zewnętrznych cech postrzeganego przedmiotu⁷⁴². I tak, aby układ wzrokowy postrzegał daną figurę jako kwadrat muszą być spełnione odpowiednie cechy, tzn. symetryczność względem odpowiednich osi. W ten sposób można podać „wizualną specyfikację rodzajową (*visual category specification*)” dla kwadratów⁷⁴³. Są to cechy, które wystarczają do tego, aby postrzegać figurę, czy kształt jako kwadrat.

Czym innym jednak jest postrzeganie danego obiektu jako kwadrat i czym innym rozumowanie o kwadracie. Podobnie pojęcie kwadratu jest czym niż specyfikacja wizualna (mimo, iż są one powiązane). Jak podkreśla Giaquinto, rozumiemy bowiem za pomocą pojęć, a nie specyfikacji rodzajowych⁷⁴⁴.

Giaquinto wyróżnia pojęcie percepcyjne (*perceptual concept*) oraz pojęcie geometryczne (*geometrical concept*), przy czym to drugie jest szczególnym przypadkiem pierwszego. Zanim jednak podam przykłady takich pojęć i sposób w jaki się nimi posługujemy (o czym Giaquinto pisze dość szeroko), przytoczę, co pisze on o pojęciach jako takich. Tu Giaquinto jest niestety dość oszczędny: proponuje rozumieć pojęcia jako „składowe (*constituents*) myśli”⁷⁴⁵, przy czym myśl to „treść możliwego stanu mentalnego, która może być prawdziwa bądź fałszywa (*correct or incorrect*) oraz która pozostaje w zależności inferencyjnej z

⁷⁴¹ Tamże, str. 22.

⁷⁴² Tamże, str. 16.

⁷⁴³ W przypadku kwadratów taka specyfikacja rodzajowa składa się z następujących percepcji (V to pionowa, a H pozioma oś symetrii) : 1) płaski obszar powierzchni, ograniczony prostymi krawędziami: dwoma równoległymi do H, jedna wyżej, druga niżej, oraz dwoma równoległymi do V, jedna po każdej stronie. 2) symetryczna względem V, 3) symetryczna względem H, 4) symetryczna względem każdej osi dzielącej kąty pomiędzy V i H na równe części (por. tamże, str. 23).

⁷⁴⁴ Tamże, str. 24.

⁷⁴⁵ Tamże, str. 24.

innymi takimi treściami”⁷⁴⁶. Powyższe sformułowania rodzą pewne problemy; narzuca się pytanie o naturę obiektów, które Giaquinto nazywa myślami, oraz pytanie w jakim sensie mogą być one prawdziwe bądź fałszywe. Pytanie te nie są podejmowane przez Giaquinto. Problemy te możemy jednak ominąć, o ile powyższe określenia pojawiają się tylko w jednym miejscu tekstu i nie grają prawie żadnej roli w dalszej rekonstrukcji poznania geometrycznego. Wydaje się mianowicie, że Giaquinto definiuje „pojęcia” i „myśli” jedynie w celu nadania bardziej całościowego charakteru swojej koncepcji epistemologicznej. Można zaryzykować stwierdzenie, iż istotniejsza jest tu negatywna charakterystyka pojęć. Ani pojęcia, ani zdania, nie muszą być rozumiane jako byty językowe (te drugie nie powinny być na przykład rozumiane jako znaczenia zdań). W słowach Giaquinto „myśli nie są rozumiane jako znaczenia zdań, a pojęcia nie są rozumiane jako znaczenia leksykalne”.

Najistotniejsze dla koncepcji Giaquinto okazują się inferencyjne związki między pojęciami. Kluczowe dla dalszej dyskusji jest dalej „inferencyjne ujęcie pojęć”. Zgodnie z nim, pojęcia to „składowe myśli, od których zależą niektóre z cechujących je zależności inferencyjnych”⁷⁴⁷. Pojęcia, w ujęciu Giaquinto, można „określić (*specify*) w terminach tych właśnie podstawowych wnioskowań”⁷⁴⁸. Posiadanie pewnego pojęcia jest w tym ujęciu uwarunkowane gotowością do przeprowadzania pewnych prostych wnioskowań związanych z tym pojęciem (w tych wnioskowaniach mogą przy tym grać istotną rolę treści pozajęzykowe). Aby posiadać taką dyspozycję, musimy być w posiadaniu odpowiedniej specyfikacji rodzajowej – tu ujawnia się więc związek między pojęciem a specyfikacją.

Przyjrzyjmy się jak to wygląda w przypadku kwadratu. Zgodnie z powyższymi uwagami, „istotą percepcyjnego pojęcia kwadratu jest dyspozycja do orzekania o czymś, że jest kwadratem”⁷⁴⁹. Zacytujmy więc za Giaquinto specyfikację rodzajową kwadratu, której posiadanie umożliwia zaistnienie tej

⁷⁴⁶ Tamże, str. 24.

⁷⁴⁷ Tamże, str. 25.

⁷⁴⁸ Np. Pojęcie „wujek” może być określone przez pewien zbiór wnioskowań, które skłonni jesteśmy przeprowadzać, o ile posiadamy to pojęcie. Jednym z takich wnioskowań może być np.: „jeśli x jest wujkiem, to istnieje pewna osoba y , taka, że x jest bratem, bądź szwagrem kogoś z rodziców osoby y ” (por. tamże, str. 25).

⁷⁴⁹ Tamże, str. 26.

dyspozycji. Specyfikacja nawiązuje do percepcji, które są ze swojej natury niedokładne – stąd przy niektórych z poniższych sformułowań Giaquinto dodaje zwrot „n/c” – w przybliżeniu, bądź dokładnie (*nearly or completely*). Symbole V i H oznaczają odpowiednio pionową i poziomą oś.

„Pojęcie {kwadrat} jest pojęciem C, które posiada się wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące dwa warunki:

a) jeśli obiekt x jest reprezentowany w doświadczeniu percepcyjnym jako n/c płaska figura n/c ograniczona n/c liniami prostymi, o jednej krawędzi powyżej H oraz n/c równoległej do niej, jednej poniżej H i n/c równoległej do niej, jednej z każdej strony V oraz n/c równoległej do V, jak również n/c symetryczna względem H oraz V, jak również n/c symetryczna względem każdej osi dzielącej kąt pomiędzy V i H na równe części – jeśli x jest reprezentowana w taki sposób w doświadczeniu percepcyjnym i jeśli ufamy naszemu doświadczeniu, jesteśmy przekonani bez jakiegokolwiek argumentacji (*one believes without reasons*) że obiekt ten posiada C. Odwrotnie, jeśli ufamy naszemu doświadczeniu percepcyjnemu obiektu x , jesteśmy przekonani, że x posiada x wtedy i tylko wtedy, gdy (only if), x jest reprezentowany w doświadczeniu jako n/c płaska figura n/c ograniczona przez n/c proste krawędzi...itd.

b) niech „ Σ ” określa kształt, który obiekty wydają się posiadać w doświadczeniach opisanych w a). Jeśli obiekt x nie jest postrzegany, posiadamy dyspozycję to uważania następujących wnioskowań za przekonujące, bez potrzeby odwoływania się do dodatkowych argumentów:

x posiada Σ . Zatem x posiada C
 x posiada C. Zatem x posiada Σ ”⁷⁵⁰

⁷⁵⁰ Tamże, str. 27.

Pojęcie percepcyjne jest pojęciem nieostrym, w tym sensie, że co do pewnych obiektów będziemy mieli wątpliwości, czy określić je jako kwadrat, czy nie. Dlatego też określa je jako *percepcyjne* pojęcie kwadratu. Czym w takim razie są pojęcia *geometryczne*? Otóż częścią naszego doświadczenia może być to, że pewne kwadraty uważamy za doskonalsze, dokładniej narysowane, od innych. Jeśli wszystkie cechy wymienione powyżej zachodzą w stopniu doskonałym – tzn. jeśli postrzegamy je jako doskonałe – to dany obiekt postrzegamy jako kwadrat doskonały. Jeśli jesteśmy skłonni uznawać pewne kwadraty za kwadratowe w sposób doskonały, to stosujemy do nich geometryczne pojęcie kwadratu: „posiadanie pojęcia doskonałego kwadratu skupione jest na dyspozycji do określania danego obiektu jako kwadrat dokładnie wtedy, kiedy wydaje się być doskonałym kwadratem”⁷⁵¹.

Giaquinto podkreśla, że specyfikacje rodzajowe nie muszą być określone w sposób jednoznaczny, nie muszą być takie same dla każdego człowieka. Mogą więc istnieć inne pojęcia percepcyjne oraz geometryczne „kwadratu”, niż te które zostały powyżej zacytowane. Mimo to jest pojęcie, które określił, „bądź coś do niego zbliżonego jest prawdopodobnie właściwe w odniesieniu do elementarnej wiedzy geometrycznej”⁷⁵².

Posiadanie pojęć, czy dysponowanie pojęciami może pociągać, zdaniem Giaquinto, posiadanie pewnych „ogólnych dyspozycji do posiadania przekonań, które mogą być uaktywnione przez doświadczenie wizualne”⁷⁵³. Owo pojęcie dyspozycji do posiadania przekonań jest jednym z kluczowych elementów koncepcji Giaquinto. Są one (a przynajmniej mogą być) źródłem tego, co Giaquinto nazywa elementarną wiedzą geometryczną (*basic geometrical knowledge*), czyli wiedzą, której nie uzyskujemy ani w wyniku wnioskowania, ani w sposób zapośredniczony przez wcześniejszą wiedzę. Mówiąc w uproszczeniu sama percepcja kwadratu (zapośredniczona przez percepcyjne pojęcie doskonałego kwadratu) powoduje, poprzez uaktywnioną w ten sposób dyspozycję, pojawienie się w naszych umysłach pewnych przekonań odnośnie tego kwadratu. Giaquinto

⁷⁵¹ Tamże, str. 29.

⁷⁵² Tamże, str. 29.

⁷⁵³ Tamże, str. 35.

wyduje się twierdzić, że przekonania te pojawiają się w nas niejako automatycznie, czy – używając zwrotu Giaquinto – bez jakiegokolwiek argumentacji (*without reasons*).

Autor *Visual Thinking in Mathematics* opisuje taki właśnie proces na przykładzie dochodzenia do przekonania, o tym, że dwie części, na które dany kwadrat jest podzielony przez oś symetrii pokrywająca się z jego przekątną, są figurami przystającymi. Główna idea jest następująca: biorąc pod uwagę zacytowaną specyfikację rodzajową dla kwadratów, postrzeganie danego obiektu jako kwadrat pociąga postrzeganie go jako symetrycznego względem swojej przekątnej (wynika to z powyżej przytoczonej treści pojęcia doskonałego kwadratu). Giaquinto uważa, że „jeśli figura **a** wydaje się komuś być symetryczna względem linii *l*, i osoba ta ufa swojemu doświadczeniu percepcyjnemu, osoba ta będzie przekonana że części **a** z każdej strony *l* są doskonale przystające”⁷⁵⁴. Jeśli więc postrzegamy figurę jako doskonały kwadrat, posiadamy również przekonanie o tym, że dwie części tej figury z każdej strony przekątnej są w doskonały sposób przystające⁷⁵⁵. Posiadamy więc, według Giaquinto, następującą dyspozycję, którą będę dalej określał jako dyspozycję C: „jeśli płaska figura **a** postrzegana jest jako doskonale kwadratowa, jesteśmy skłonni być przekonani bez dalszej argumentacji (*one would believe without reasons*), że dla każdego doskonałego kwadratu *x* oraz dla każdej przekątnej *k* kwadratu *x*, części *x* po każdej stronie *k* są doskonale przystające”⁷⁵⁶

Zatrzymajmy się w tym miejscu na pytaniu: jaki charakter ma wiedza uzyskiwana w opisany powyżej sposób? Wymieńmy, za Giaquinto, kilka charakterystyk tego typu poznania:

Po pierwsze, Giaquinto uważa, że opisywane przejście od posiadania przekonania, iż dana figura jest kwadratem, do przekonania, iż posiada on pewne cechy, odbywa się w sposób nieświadomy, niejako automatyczny, nie

⁷⁵⁴ Tamże, str. 36.

⁷⁵⁵ Giaquinto pisze tu znów o przekonaniu, do którego dochodzimy bez jakiegokolwiek argumentacji (*without further reasons*).

⁷⁵⁶ Tamże, str. 38. Moja prezentacja sposobu uzyskiwania tego przekonania jest nieco skrócona – Giaquinto dodaje, iż konieczna jest tu jeszcze posiadanie pojęcia przekątnej oraz dyspozycja do orzekania o pewnym kształcie *S*, iż odpowiada on pojęciu doskonałego kwadratu.

zapośredniczony przez żadne zdania. Przekonania takie osiągamy „bez udziału wnioskania lub zewnętrznego zapisanego lub ustnego świadectwa”⁷⁵⁷.

Po drugie, przekonania uzyskane tą drogą nie są prawdami empirycznymi, a przynajmniej nie trzeba je za takie uznawać. Przekonania te nie pojawiają się w efekcie pozyskania pewnych danych doświadczalnych, czy systematycznej obserwacji⁷⁵⁸.

To nie na podstawie wizualnego doświadczenia empirycznego pojawia się w nas odpowiednie przekonanie. W słowach Giaquinto, „przekonanie nie jest ugruntowane w doświadczeniu, ponieważ nie ma potrzeby(/konieczności) rozważyć doświadczenia w kategoriach prawdy i fałszu (*experience is not the ground for the belief, for one does not need to take the experience to be veridical*). Rolą doświadczenia jest jedynie uruchomienie dyspozycji”⁷⁵⁹.

Doświadczenie to nie odgrywa więc w szczególności roli, które zazwyczaj się mu przypisuje, jako źródła wiedzy empirycznej: nie jest ono świadomą aktywnością nastawioną na analizę danych doświadczenia w celu wyciągnięcia z nich wniosków indukcyjnych. Przekonanie uzyskane w omawiany sposób nie podlega, według Giaquinto, falsyfikacji przez doświadczenie (argumentacja przeciw empirycznej interpretacji poznania opartego na wizualizacjach opisywana jest szerzej w dalszej części książki Giaquinto, wróć więc do niej w kolejnym podrozdziale)⁷⁶⁰.

Po trzecie, omawiane przekonanie ma charakter *ogólny*. W słowach Giaquinto: „jeśli umysł jest wyposażony w odpowiednie pojęcia, wizualne doświadczenie konkretnej figury może powodować powstanie ogólnego geometrycznego przekonania (*general geometrical belief*). W skrócie, posiadanie odpowiednich pojęć umożliwia ‘widzenie tego, co ogólne w tym, co szczegółowe’”⁷⁶¹

⁷⁵⁷ Tamże, str. 39.

⁷⁵⁸ Zauważmy, że jest to związane z powyżej wspomnianą okolicznością, iż omawiane przekonanie uzyskiwane jest w sposób nieświadomy, niejako automatyczny.

⁷⁵⁹ Tamże, str. 37.

⁷⁶⁰ Tamże, str. 44.

⁷⁶¹ Tamże, str. 39.

Giaquinto nie wyjaśnia bliżej, jak należy rozumieć ogólny charakter takich przekonań. Wydaje się, iż wypływa ona stąd, że postrzeganie określonego kształtu wiąże się zawsze z przypisaniem figurze posiadającej ten kształt własność bycia doskonałym kwadratem, co z kolei zawsze wiąże się z przekonaniem związanym z jego przekątnymi (na mocy działania odpowiednich dyspozycji, oraz przy założeniu posiadania odpowiednich pojęć).

Przyjrzyjmy się na koniec następującemu pytaniu, które rozważa Giaquinto: czy przekonanie uzyskane w powyżej opisany sposób można uznać za stanowiące *wiedzę*? „Przekonanie” jest ostatecznie kategorią epistemologiczną łączoną raczej z typem poznania subiektywnego i niepewnego, niż z pełnoprawną wiedzą matematyczną. Według Giaquinto, aby dane przekonanie można było tak zaklasyfikować, musi ono spełniać trzy warunki. Powinno ono:

- 1) być prawdziwe,
- 2) być uzyskane w wiarygodny sposób,
- 3) nie powinno, jeśli chodzi o proces jego uzyskiwania, naruszać epistemicznej racjonalności⁷⁶².

Pierwszy warunek jest, według Giaquinto, spełniony w sposób oczywisty – jako, że przekonanie, iż przekątna dzieli kwadrat na figury przystające jest prawdą geometryczną, ale wykazaną już na inny sposób⁷⁶³.

Drugie pytanie jest oczywiście kluczowe dla problematyki poznania diagramowego. W ramach odpowiedzi, Giaquinto przypomina najpierw, iż „stan przekonania o czymś (*belief state*) jest efektem aktywacji dyspozycji do posiadania przekonania (*belief-forming disposition*)”⁷⁶⁴. Pytanie o wiarygodność odpowiedniego przekonania sprowadza się więc do pytania o wiarygodność wspomnianej dyspozycji.

⁷⁶² Tamże, str. 40.

⁷⁶³ Giaquinto zaznacza przy tym – nawiązując do problemu przestrzeni jako przedmiotu geometrii - iż zdania i przekonania geometryczne prawdziwe są o kwadratach przedstawianych w przestrzeni wyobraźniowej, a nie fizycznej (pot. tamże, str. 40).

⁷⁶⁴ Tamże, str. 40.

Czy dyspozycja do stanów przekonania jest wiarygodna? Skąd pochodzi wiarygodność?

Giaquinto przyznaje, że pytanie wydaje się trudne, i wiele dyspozycji do pewnych przekonań jest zawodne. Proponuje tu przyjąć następujące kryterium: „jeśli wyjściowe przekonanie (*output belief*) jest prawdziwe dla każdego danej wejściowej (*input*), które spełnia dany warunek, dyspozycja jest wiarygodna”⁷⁶⁵. Inaczej mówiąc, dyspozycja jest wiarygodna, jeśli dla ustalonych danych, czyli np. danego rysunku, zawsze daje prawdziwe zdania. Według Giaquinto dyspozycja C spełnia ten warunek, o czym przekonujemy się przez wgląd (*by inspection*).

Spełnienie trzeciego warunku autor *Visual Thinking in Mathematics* omawia jeszcze bardziej ogólnie. Problem ten sprowadza on do pytania o możliwość pojawienia się sprzecznych przekonań. W odniesieniu do omawianego typu przekonań Giaquinto stwierdza jedynie, iż nie ma powodu, aby sądzić, iż mogą prowadzić do sp

Powyższa argumentacja wydaje się być dość powierzchowna i niewystarczająca – przynajmniej w celu wykazania prawdziwości, wiarygodności i niesprzeczności wiedzy uzyskanej w omawiany tu sposób. Kwestia statusu epistemicznego „przekonań” wydaje się więc pozostawać dyskusyjna. Można jednak przyjąć, iż przedstawiony powyżej proces poznawczy jest *możliwą* drogą pozyskania wiedzy geometrycznej. Taka droga do prawd geometrycznych ma również bardzo kantowski charakter. Tak pisze o tym sam Giaquinto: „Ten sposób zdobywania przekonania jest nieempiryczny, ponieważ rola doświadczenia nie polega tu na dostarczaniu uzasadnienia (*evidence*). Jednocześnie doświadczenie wizualne jakiegoś rodzaju jest kluczowe dla aktywacji odpowiedniej dyspozycji do formułowania przekonań; jasnym jest również, że ten sposób osiągnięcia przekonania nie wymaga wydobywania informacji z definicji (*unpacking definitions*), analizy pojęciowej ani dedukcji logicznej. Stąd musi być zaliczana do wiedzy nieanalitycznej. Przy założeniu, że ‘nieanalityczne oraz nieempiryczne’ oznacza to samo, co ‘syntetyczne *a priori*’, sformułowaliśmy stanowisko, które jest

⁷⁶⁵ Tamże, str. 40.

przynajmniej bliskie często lekceważonemu pogładowi Kanta, że możliwa jest wiedza syntetyczna *a priori*”⁷⁶⁶.

W ostatnim podrozdziale omówię krótko, jak według Giaquinto, proste rozumowania geometryczne korzystające z wizualizacji prowadzić mogą do odkrycia w matematyce. Rozważania z tej części książki *Visual Thinking in Mathematics* zawierają również bardzo ciekawe uwagi na temat empirycznego charakteru wizualizacji. W pewnej mierze są one powtórzeniem tego, o czym mowa była powyżej, pojawia się tu jednak również wiele nowych ciekawych idei. Ujawnia się w nich znów kantowski charakter omawianego ujęcia poznania geometrycznego.

Wyjaśnijmy najpierw, co Giaquinto rozumie przez „odkrycie” w matematyce. Odkryć prawdę matematyczną znaczy ogólnie dojść do przekonania o niej (*coming to believe it*) na niezależny, wiarygodny i racjonalny sposób. O tym, czym w swej istocie jest poznanie wiarygodne i racjonalne była już mowa w poprzednim podrozdziale. Należy więc dodać, iż poznać prawdę niezależnie, to po prostu uczynić to „samemu”, bez podpowiedzi innych, ani nie dowiadując się o niej z żadnych zewnętrznych źródeł. Giaquinto oddziela dalej odkrycie od uzasadnienia (*justification*). Odkrycie prawdy nie pociąga tego, iż osoba która ją odkryła potrafi ją uzasadnić, bądź, że dysponuje w danym momencie jej dowodem⁷⁶⁷. Dodajmy tu również, iż omawiany poniżej proces odkrycia ukazuje, według Giaquinto, jak wizualizacje mogą służyć zdobywaniu nowej wiedzy matematycznej w oparciu o jakąś wiedzę wcześniejszą (inaczej było w przypadku omawianym powyżej – tam wystarczały ogólne dyspozycje i dysponowanie odpowiednimi pojęciami).

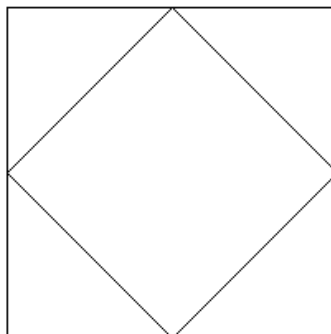
Jako przykład podaje Giaquinto rozumowanie bardzo podobne do tego, jakie przeprowadzał Sokrates wraz z niewolnikiem w *Menonie*. Prowadzi ono do tezy, iż jeśli mając dany kwadrat, zbudujemy na jego przekątnej nowy kwadrat, to ów nowy kwadrat będzie miał pole dwa razy większe od pierwszego. Nazwijmy ją twierdzeniem B⁷⁶⁸. Giaquinto podkreśla, iż można dojść do przekonania o

⁷⁶⁶ Tamże, str. 47.

⁷⁶⁷ Tamże, str. 50.

⁷⁶⁸ Zwróćmy uwagę, że Giaquinto nie pisze już tu tylko o przekonaniach, ale również o zdaniach.

prawdziwości tego twierdzenia drogą odkrycia, prowadzącego przez wizualizację. Rozważamy więc poniższą figurę:



Rys. 10.7.

„Zewnętrzny kwadrat” jest z pewnością większy od „wewnętrznego”. O ile większy? Giaquinto podkreśla, że za pomocą wizualizacji oraz prostego rozumowania można dojść do przekonania o prawdziwości twierdzenia B. Wystarczy zauważyć, iż na pole większego kwadratu składają się cztery trójkąty w narożnikach. Jeśli teraz wyobrazić sobie „zagięcie ich do środka”, większość ludzi skłonna byłaby sądzić, iż zagięte trójkąty w zupełności wypełniają wewnętrzny kwadrat. Stąd pole czterech trójkątów równe jest polu mniejszego kwadratu, i dalej pole większego kwadratu jest dwa razy większe od pola mniejszego.

Taka – jedna z możliwych – droga do dowiedzionego również przez Menona twierdzenia posiada, według Giaquinto, dwojaką naturę. Ma po części charakter wizualny – jest to po prostu zauważenie, iż odpowiednia manipulacja np. kartką papieru, skutkuje w nałożeniu na siebie narożnikowych trójkątów i wewnętrznego kwadratu⁷⁶⁹. Ma jednak również po części charakter językowy (*verbal nature*). Jedną z przesłanek dla rozumowania werbalnej jest jednak akt wizualizacji zaginania trójkątów narożnikowych, oraz płynące z niego przekonanie, iż trójkąty te „wypełnią” mały kwadrat. Stanowi on więc istotny element rozumowania.

⁷⁶⁹ Tamże, str. 52.

Tyle o samym rozumowaniu. O wiele więcej miejsca poświęca Giaquinto tezie, iż omawiana powyżej argumentacja za tezą B nie ma, a przynajmniej nie musi mieć, charakteru empirycznego. Wizualizacji zginania się „narożnikowych trójkątów”, nie trzeba rozumieć jako indukcyjnego uogólniania na podstawie wcześniejszego doświadczenia. Z wizualizacją tą „nie wydaje się wiązać żadne wnioskowanie z doświadczenia fizycznego”⁷⁷⁰. Giaquinto podaje trzy argumenty za taką tezą.

Po pierwsze twierdzi on, iż osoba osiągająca przekonania o powyżej omawianym twierdzeniu „nie ma odczucia, że może pojawić się kontrprzykład”⁷⁷¹. Jeśli pewna aktywność zginania kwadratu nie zakończyłaby się nałożeniem na siebie odpowiednich części, byłibyśmy raczej skłonni, według Giaquinto, sądzić, iż zgięcie nie nastąpiło dokładnie wzdłuż wyznaczonych linii. Po drugie, „jeśli akt wizualizacji miałby polegać na odwoływaniu się do doświadczenia fizycznego, doświadczenie to musiałoby zawierać szeroką (*extensive*) confirmację dla twierdzenia B”⁷⁷². Tymczasem fizyczne zginanie kartki rzadko skutkuje dokładnym nałożeniem się na siebie odpowiednich części. W istocie, częściej zdarzają się tu porażki niż sukcesy. W związku z tym, twierdzi Giaquinto, przekonanie o tezie B nie płynie z powtarzanego doświadczenia, jak ją potwierdzającego. Trzeci argument wypływa z drugiego: nasze ogólne przekonanie o tym, iż teza wypływa indukcyjnie z doświadczenia zginania kartki (czy jego wizualizowania), nie zmniejsza naszego przekonania o B, jako wykazanego po części na mocy doświadczenia wizualizowania.

Dodam wreszcie, iż Giaquinto odrzuca ideę, jakoby podstawą dla orzekania o B był „wewnętrzny eksperyment”, rozumiany jako typ doświadczenia, ale związany z praktyką wizualizowania. Teza B nie jest więc również oparta w sposób indukcyjny na „doświadczenia wewnętrznym”, rozumianym jako „obserwacja doświadczenia wizualizowania”⁷⁷³. Giaquinto uważa, iż byłaby to błędna interpretacja doświadczenia wizualizacji. Po pierwsza nie jest tu obecna

⁷⁷⁰ Tamże, str. 53.

⁷⁷¹ Tamże, str. 54.

⁷⁷² Tamże, str. 54.

⁷⁷³ Tamże, str. 57.

„fenomenologia patrzenia i zauważania”⁷⁷⁴: nie jest tak, iż najpierw doświadczamy aktu wizualizacji a następnie go obserwujemy. Po drugie natomiast z wizualnym doświadczeniem połączone jest odczucie pewności tezy B. Polega ono m.in. na tym, iż jesteśmy skłonni twierdzić, iż „kontrprzykład nie jest autentyczną możliwością epistemologiczną (*genuine epistemological possibility*)”⁷⁷⁵. Odczucie takie nie mogłoby natomiast płynąć z samego „wizualnego eksperymentu”, wewnętrznego doświadczenia. Odczucie pewności – nawet jeśli złudne – nie pochodzi z empirycznego aktu doświadczenia, jego źródeł należy szukać w jakiegoś rodzaju dyspozycjach.

Jeśli przekonanie o prawdziwości B nie ma (a przynajmniej nie musi mieć) charakteru empirycznego, jak określić jego źródła? Zmierzając w kierunku odpowiedzi na to pytanie, Giaquinto podkreśla, że jest ono osiągnięte w sposób „prawie natychmiastowy”, tzn. „bez jakiegokolwiek subiektywnie zauważalnego okresu czasu następującego pomiędzy wizualizowaniem a osiągnięciem przekonania (*getting the belief*)”⁷⁷⁶. Natychmiastowość ta sugeruje potrzebę odwołania się do jakiegoś „wcześniejszego stanu umysłowego” (*prior cognitive state*). Inaczej mówiąc, źródło przekonania o B musi mieć, w świetle powyższych rozważań, inne źródło, niż bezpośrednie doświadczenie fizyczne, co pociąga, iż jest ona – w jakimś sensie – *a priori*.

Jaki „wcześniejszy stan umysłowy” może być odpowiedzialny za formowanie się przekonań geometrycznych? Jedną z interpretacji może odwoływać się do platonizmu matematycznego. Giaquinto jest jednak bliższy interpretacji kantowskiej. Rozważając, czym mógłby być ów „wcześniejszy stan umysłowy”, nawiązuje do wcześniejszej części swojej pracy. Wymienia więc następujące możliwości:

- wizualne specyfikacje rodzajowe, oraz powiązania pomiędzy nimi,
- geometryczne pojęcia kwadratów, trójkątów oraz innych obiektów geometrycznych,

⁷⁷⁴ Tamże, str. 58.

⁷⁷⁵ Tamże, str. 63-64.

⁷⁷⁶ Tamże, str. 60.

- dyspozycje do posiadania przekonań,
- elementarne przekonania, do których dochodzimy za pośrednictwem tych przekonań⁷⁷⁷.

Są to zasoby, które pozwalają odkryć, oraz sformułować tezę B za pomocą wizualizacji. Można je traktować jako w pewnym sensie „wrodzone”, a w każdym razie obecne w umyśle przed orzekaniem prawdziwości tego zdania. Giaquinto nie wyklucza przy tym roli doświadczenia fizycznego w procesie poznawczym. Po pierwsze, „możemy potrzebować doświadczenia zmysłowego w połączeniu z pewnymi wrodzonymi skłonnościami mentalnymi (*mental propensities*) w celu ukształtowania podstawowych pojęć geometrycznych”; po drugie, „wspomnienia doświadczeń wizualnych mogą dostarczyć składników, którymi posługuje się umysł wytwarzając doświadczenia wyobraźni wizualnej”⁷⁷⁸.

Wróćmy jeszcze na krótko do odkrycia. Opisany tu proces poznawczy związany z diagramami nie stanowi dowodu twierdzenia B – może być, według Giaquinto, jedynie jednym ze sposobów jego odkrycia. Odkrywając twierdzenie B, odkrywamy jednak zdanie ogólne i prawdziwe, w sposób wiarygodny i częściowo nieempiryczny.

Zarówno ujęcie Giaquinto, jak i Mumy jest zawężonym ujęciem pewnych szczególnych aspektów poznania geometrycznego. Każde z nich może jednak,

⁷⁷⁷ Por. tamże, str. 61.

⁷⁷⁸ Tamże, str. 56.

według mnie, rzucać światło na zagadnienie roli wizualizacji w poznaniu matematycznym w ogóle.

Nawiązując do omówionych prac Mummy i Mandersa chciałbym zwrócić w pierwszym rzędzie uwagę na podział na własności dokładne i quasi-dokładne. Można go traktować jako pewne uściślenie podziału na intuicję naiwną i wzmocnioną. Wydaje się również dobrze modelować różnicę pomiędzy tym, co Poincaré nazywał przestrzenią wyobrazeniową (*sensible space*), oraz ścisłą, opartą na pojęciach, matematyką. Własności quasi-dokładne odpowiadają czysto fizycznym własnościom diagramu, związanym jedynie z wzajemnym położeniem jego części w przestrzeni a nie wzmocnioną żadną aparaturą matematyczną (nawet np. relacją równości). Dla Klein'a i Poincarégo geometrię badamy przy pomocy jakiegoś rodzaju syntetazy ścisłych pojęć i danych zmysłowych. Ujęcie Mummy można postrzegać jako propozycję systematycznego odróżnienia tego, co nieściśle w diagramie oraz tego, co można ująć za pomocą pojęć matematycznych. Co więcej, również aspekt nieściśły można poddać systematycznej analizie. Czy styl owej systematycznej analizy diagramów uznamy za intuicyjno-zmysłowy, czy pojęciowy jest już dyskusyjny.

Ujęcie Mummy jest dalej przykładem systemu diagramowego, odmiennego od „zwykłych” systemów aksjomatycznych rozważanych w matematyce. Dowodem tego systemu nie jest jedynie ciąg zdań – poprawnymi elementami dowodu są diagramy, czy częściowo uporządkowane zbiory diagramów. Są one „zwykłymi” obiektami syntaktycznym systemu, określony jest ściśle ich kształt, dozwolone modyfikacje, oraz reguły wnioskowania, w których jedne diagramy można wyprowadzić z innych.

Ujęcie Mummy jest wreszcie odpowiedzią na wspomniane we wstępie stanowisko odnośnie roli diagramów w dowodach euklidesowych. Mumma nie twierdzi co prawda, iż jego rekonstrukcja dowodów euklidesowych odpowiada temu, jak były one faktycznie przeprowadzane (należy się tu z nim zresztą zgodzić). Mummie udaje się jednak podważyć tezę, iż diagramy nieuchronnie prowadzą do błędów i nie mogą gwarantować poznania ogólnego.

Również ujęcie Giaquinto, będąc jeszcze bardziej zawężonym, może, według mnie, rzucać światło na zagadnienie roli wizualizacji w poznaniu matematycznym w ogóle. Przede wszystkim chciałbym tu wspomnieć o argumentacji skierowanej przeciwko empirycznemu charakterowi pewnych prostych rozumowań wizualnych (jeśli tak je można nazwać). Giaquinto wymienia charakterystyki takiej wizualnej „drogi” od doświadczenia wizualnego do przekonania matematycznego, przekonując, iż nie ma ona charakteru zwyczajowo przypisywanego poznaniu empirycznemu (zwróćmy przy tym uwagę, że Giaquinto analizuje prawie paradygmatyczny przykład „naiwnego” odczytywania wyników z diagramu, związanego dodatkowo z wizualizacją dynamiczną o „zaginaniu” trójkątnych elementów kartki). Doświadczenie to nie służy w szczególności jako empiryczny materiał, na którym opieramy się uzasadniając twierdzenie – uaktywnia ono jedynie odpowiednie dyspozycje do posiadania przekonań. Tak rozumiane doświadczenie nazywa Giaquinto wizualizowaniem (*visualizing*) w odróżnieniu od zwykłej percepcji wzrokowej (*visual perceiving*). Takie ujęcie można również odnosić wszystkich typów wizualizacji, o których pisałem w poprzednim rozdziale.

Zwróćmy wreszcie uwagę na podobieństwa ujęcia Giaquinto do kantowskiej filozofii geometrii. Podobnie, jak Kant, Giaquinto (jak sam to podkreśla) „bierze pod uwagę (*respect*) rolę doświadczenia zmysłowego, nie sprowadzając geometrii do nauki empirycznej”⁷⁷⁹. Wskazuje on na uwarunkowania naszych umysłów jako źródło aprioryczności matematyki. Uwarunkowaniami tymi są m.in. skłonności do określonego postrzegania symetryczności postrzeganych obiektów, czy dyspozycje do posiadania przekonań, uaktywniane przez doświadczenie wizualne. Giaquinto uważa również, iż specyficzna natura wizualizowania pozwala utrzymywać, iż uzyskane przy jego pomocy tezy mają charakter ogólny. Można przy tym powiedzieć, iż autor *Visual Thinking in Mathematics* szerzej, niż Kant uzasadnia aprioryczność geometrii. Królewiecki filozof zakładał aprioryczną naturę matematyki, aby ją wyjaśnić istnieniem wrodzonej czystej naoczności przestrzeni. Giaquinto postępuje inaczej: uzasadnia, iż wizualne poznanie elementarnych obiektów geometrycznych nie ma, a każdym razie nie musi mieć, charakteru

⁷⁷⁹ Tamże, str. 40.

empirycznego poprzez analizę natury samego doświadczenia wizualizacji, dochodząc dalej do tego, iż muszą istnieć jakieś „wcześniejsze stany umysłu”, z które są podstawą dla tych poznań.

Na koniec trzeba podkreślić, że rozważania Giaquinto dotyczą jedynie *możliwej* drogi uzyskiwania przekonań geometrycznych; nie są tu formułowane definitywne tezy na temat natury poznania geometrycznego. Nie ma tam mowy o dowodzie matematycznym, ale raczej o odkryciu w matematyce. Zwróćmy też uwagę, iż wiele tez Giaquinto jest dyskusyjnych. Wydaje się w szczególności, iż Giaquinto nie jest przekonujący, jeśli chodzi o wiarygodność poznania opartego na wizualizacjach. Argumentacja za tym, iż wizualizacja nie może sugerować nam zdań fałszywych, ani wzajemnie sprzecznych nie jest, jak sędzę, wystarczająca. Przypomnijmy tu w szczególności problemy związane z geometriami nieeuklidesowymi. Wydaje się jednak, iż tezy o wiarygodności „naiwnego” poznania wizualizacyjnego, tzn. opartego prawie wyłącznie na analizie fizycznych cech diagramu, można bronić tylko, jeśli ograniczymy się do prostych rozumowań geometrii euklidesowych.

Rozdział 10. Podstawowe własności diagramów

W niniejszym rozdziale podejmuję próbę wyróżnienia podstawowych własności diagramu jako typu reprezentacji przeciwstawionej reprezentacji czysto symbolicznej. W poprzednich rozdziałach analizowałem główne typy wizualizacji, zarysowana była też rola jaką mogą pełnić w poszczególnych gałęziach matematyki. W tym rozdziale korzystam m.in. z tych właśnie rozważań, w celu określenia i nakreślenia ogólnej charakterystyki diagramów w matematyce. Spróbuję odpowiedzieć więc na pytanie: co odróżnia diagramy od symboli i zbudowanych z nich zdań? Jakie są słabości, a jakie silne strony diagramów? W jaki sposób diagram oddziałuje na korzystające z niego matematyka? Wreszcie: na jaki sposób reprezentują swoje przedmioty? W literaturze dotyczącej wizualizacji w matematyce często podejmowana jest kwestia charakterystyk diagramów. Główne własności diagramów jako typu reprezentacji przedstawiają w cytowanych tu pracach D. Pottera, Shimojimy, J.Barwise'a i J.Etchemendy'ego czy M. Giaquinto (choć na odmienny sposób niż inni, o czym więcej piszę dalej). Odwoływać się również będę do innych rozważań zawartych w pracy, stąd ogólnych kształt zestawienia pochodzi od autora niniejszej pracy.

Należy tu dodać, iż część z tych własności analizowana była już wcześniej. W szczególności są to oczywiście jednostkowość diagramów, czy ich nadmiarowość. Należy też od razu stwierdzić, iż nie wszystkie z omawianych własności tyczą się wszystkich typów diagramów, co postaram się również wydobyć w tekście.

Zamysł autora jest taki, aby w niniejszym rozdziale przedstawić własności diagramów jako takich, aby w rozdziale następnym poddać analizie ich rolę w dowodach, czy szerzej, w różnych postaciach uzasadniania zdań matematycznych.

Tych dwóch aspektów nie można jednak w pełni oddzielić - charakterystyczne cechy diagramów są oczywiście związane również z charakterystycznymi własnościami procesów poznawczych z nimi związanych. Stwierdzając na przykład, iż diagramy charakteryzuje pewna „nadmiarowość” (o czym więcej piszę dalej), sugeruje się z pewnością jakąś własność procesów poznawczych związanych z analizą takiego diagramu. Analizowane tu własności będą więc również po części własnościami *rozumowań* wizualnych, czy sposobu, na jaki budujemy sobie przekonania odnośnie obiektów matematycznych. Ten ich wymiar chciałbym poddać bliższej analizie w kolejnym rozdziale. Odrębna analiza wydaje się tu być jednak uzasadniona, jako że charakterystyka reprezentacji to jeszcze nie to samo, co jej rola w dowodzie. Ułatwi ona i usystematyzuje również dalszą dyskusję, w szczególności dotyczącą intuicji i jej roli w poznaniu. Charakterystyki chcę potraktować m.in. jako bardzo dobre narzędzie analizy roli diagramów w poznaniu matematycznym; narzędzie, dodajmy, którym nie posługiwali się Kant, Frege czy Leibniz.

W pierwszej części rozdziału wychodzę z przyjmowanego dotychczas na ogół założenia o zasadniczej odrębności reprezentacji diagramowych oraz reprezentacji symbolicznych, próbując wyszczególnić ogólne pomiędzy nimi różnice. W ostatniej jego części przedstawiam jednak nieco inne spojrzenie na dychotomię reprezentacja symboliczna/reprezentacja diagramowi, proponowane przez Marcusa Giaquinto. Zamiast wychodzić z podziału na dwa typy reprezentacji i wymienić ich własności, Giaquinto określa dwa typy własności: diagramowe i językowe (symboliczne). Zakłada przy tym, iż poszczególne konkretne reprezentacje (wykresy, grafy, figury geometryczne) mogą posiadać zarówno własności pierwszego, jak i drugiego typu. Zachowany jest tu więc dualny podział na własności reprezentacji matematycznych, ale przyjmuje się płynne przejście pomiędzy reprezentacjami „bardziej diagramowymi” i „bardziej symbolicznymi”.

10.1. Dziewięć zasadniczych cech reprezentacji diagramowych

1) Pierwszą własnością diagramów jest ich jednostkowość. Każdy diagram reprezentuje tylko jeden obiekt, bądź pewną klasę obiektów, o podobnych własnościach (np. wszystkie trójkąty przystające). Nie będę tu szerzej rozważał jednostkowości diagramów, jako, że zwracał już kilkakrotnie na nią w pracy uwagę. Chciałbym tu tylko zwrócić uwagę, iż różne diagramy mogą być, jeśli można tak powiedzieć, jednostkowe na różne sposoby. Diagram przedstawiający trójkąt reprezentuje konkretny obiekt. Diagram, w którym liczby reprezentowane są przez kropki nie reprezentuje konkretnego obiektu, np. liczby. Jest on raczej zobrazowaniem jakiejś relacji pomiędzy liczbami. Jest on jednak jednostkowy w tym sensie, że nie przedstawia przypadku ogólnego, tzn. nie jest ilustracją jakiejś własności (jak $n(n+1)/2 = 1+2+...+n$) dla dowolnego n . Dodajmy, iż jednostkowość jest problemem jedynie wtedy, gdy diagram ma reprezentować szerszą klasę obiektów. Rozważając na przykład wizualizację zbioru Mandelbrota w celu przybliżenia sobie własności tego konkretnego zbioru, nie wikłamy się w żadne trudności.

2) Nadmiarowość diagramów była również omówiona we wstępie do niniejszej pracy. Zasada się ona w tym, iż na każdym diagramie zawartych jest więcej informacji, niż jest zamierzone, bądź niż jest potrzebne w celu np. zastosowania diagramu w rozumowaniu. Jak pisze Giaquinto, „dla wielu własności, czy typów [obektów] F , reprezentacje wizualne nie mogą reprezentować czegoś jako F , nie reprezentując jednocześnie tego czegoś jako F na pewien szczególny sposób (in a particular way)”⁷⁸⁰

W konsekwencji, wnioskowania przeprowadzane są w oparciu o (albo przy odwołaniu do) tylko niektórych cech diagramów – przy czym pozostałe są

⁷⁸⁰ Giaquinto, M., *Visualizing in Mathematics*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 28.

nieistotne. Nadmiarowość jest ona powiązana z jednostkowością, o ile nadmiarowość może wynikać z konkretnych własności obiektu wyrażonego przez diagram. Mogą to być długości boków trójkąta (na co wskazywali filozofowie począwszy od Arystotelesa), to, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny. Tyle jeśli chodzi o powtórzenie kwestii już omówionych, dalej chciałbym przyjrzeć się jeszcze kilku innym aspektom nadmiarowości.

Kenneth Manders mówi o omawianej tu własności diagramów jako o wyższą przypisywaniu obiektom matematycznym cech w oparciu o diagram (*diagram-based attribution*). W słowach Mandersa, przypisania te, to „wnioski oparte częściowo na tym (*licenced by*) co jest *widoczne* na diagramie, a nie na tym, co jest już zawarte (*in force*) w tekście dyskursywnym”⁷⁸¹. To one właśnie stanowią o problemach, o których pisałem powyżej. Denis Potter nazywa tę charakterystykę inferencyjną (*inferential datum*). Można ją według niego ująć następująco: „możemy wnioskować na podstawie pewnych aspektów wyglądu zewnętrznego (*appearance*) diagramów, ale nie na podstawie innych”⁷⁸². Pojawia się więc kluczowe pytanie, na podstawie których cech diagramu jesteśmy uprawnieni wnioskować o geometrycznych własnościach, obiektu, który jest reprezentowany przez diagram?

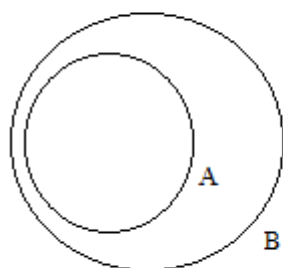
Shimojima charakterystykę tę oddaje angielskim terminem *over-specificity*, czyli „nadmierną konkretyzacją”. W jego sformułowaniu istota problemu polega na tym, że “pewne zbiory informacji nie mogą być wyrażone bez wyrażenia dodatkowej, nieuprawnionej informacji”⁷⁸³. Shimojima podaje następujący przykład obrazujący, kiedy sytuacja taka może mieć miejsce. Chcemy tu przedstawić na diagramie dwa fakty:

$A \subset B$, oraz $C \cap B \neq \emptyset$.

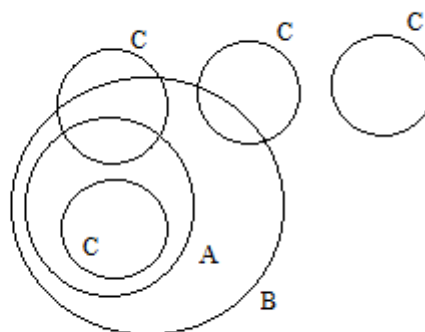
⁷⁸¹ Manders, K., *Diagram-Based...*, str. 87.

⁷⁸² Potter, D, *Diagrammatic Representation...*, str. 371.

⁷⁸³ Shimojima, A, *Tutorial: Inferential and Expressive Capacities of Graphical Representations*, źródło: www.jaist.ac.jp/~ashimoji/Diagrams_2004_tutorial.ppt, slajd 45.



Rys. 1a.



Rys. 1b.

Na rys 1a. przedstawiony jest pierwszy fakt; na rys 1b. widać, iż naniesienie drugiej informacji na diagram może być przeprowadzone na różne sposoby. Mając z góry dane tylko powyższe dwa fakty, nie wiadomo z góry np., czy $C \subset B$, bądź czy $A \cap C \neq \emptyset$. Każde naniesieni nowego faktu na diagram powoduje jednak nieuprawnione zasugerowanie którejs z tych informacji. Aby uniknąć tego rodzaju problemów, Shimojima - proponuje rozważyć kilka przypadków. W powyższym przypadku należałoby rozważyć kilka możliwych położzeń narysowanego zbioru C względem zbiorów A i B .

Na koniec zwróćmy uwagę, że symboliczna reprezentacja w zasadzie nie posiada własności nadmiarowości. Symbole oznaczające liczby, całki, itd. nie oznaczają nic więcej ponad to, co jest zamierzone. Jak pisze Ioerger, „wiedza wyrażana w postaci zdaniowej może określać (*determine*) część stanu świata (*part of the state of the world*), jednocześnie w wygodny sposób pozostawiając inne nieokreślone”⁷⁸⁴. Mumma pisze o tej własności reprezentacji symbolicznej jako o „wymuszone przez reprezentację niereagowanie na pewne szczególne cechy poszczególnych przypadków” (*representation enforced unresponsiveness to distinctive features of instances*). Jest to pod wieloma względami zasadnicza wyższość reprezentacji symbolicznych. Dodajmy, że według Shimojimy “własność nadmiarowości systemu reprezentacji jest wyzwaniem dla niektórych (wszystkich?)

⁷⁸⁴ Potter, D. *Diagrammatic Representation...*, str. 372.

prób zbudowania w oparciu o niego formalnego systemu dedukcyjnego”⁷⁸⁵.

3) Trzecią analizowaną tu własność reprezentacji symbolicznych można postrzegać jako jej zaletę. Zasadza się ona w tym, iż na diagramie możliwe jest jednoczesne przedstawienia dużej ilości informacji. Rozważmy tu chociażby wizualizacje komputerowe, jak wizualne reprezentacje fraktali. Wizualna reprezentacja może w ten sposób powodować wrażenie wglądu w strukturę całości obiektu, jak np. grafu, czy kraty. Pozwala to również na wytworzenie, jak pisał Giaquinto, wizualnego uchwycenia (*visual grasp*) całości struktury. Przypomnę, iż funkcję diagramów jako dającą ogłąd „z odległości” całości problemu Kvasz uznawał za charakterystyczną dla matematyki greckiej. Dodajmy, iż ujawnia się tu również porównanie sposobu poznania diagramu do intuicyjnego poznana rozumowego, dającego wgląd przy pomocy „oka umysłu”.

Zostawmy jednak metafory. Nieco konkretniej omawianą własność diagramów przedstawiają Barwise i Etchemendy. Zestawiając tę cechę diagramów z reprezentacją symboliczną, Barwise i Etchemendy piszą o dwóch typach informacji – koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej. Podkreślają, że „diagram może reprezentować w zwartej formie to, co wymagałoby niezliczonej ilości zdań”⁷⁸⁶. Z drugiej strony zdania mogą reprezentować dużą ilość wzajemnie niekompatybilnych możliwości. Mogą przedstawiać zróżnicowane informacje, których nie da się przedstawić na jednym diagramie.

Na koniec dodajmy, iż to, jaka ilość informacji jest reprezentowana, oraz w jaki sposób zależy o kontrakcji diagramu oraz pomysłowości jego twórcy. Można tu wspomnieć choćby diagram, który pozwolił Menonowi i niewolnikowi „odczytać” twierdzenie dotyczące kwadratów, czy diagramy ukazujące proste fakty teorioliczbowe. Ta elastyczność diagramów jest z pewnością ich kolejną zaletą.

4) Kolejną cechą diagramów jest powiązanie ich zewnętrznego kształtu ze strukturą obiektów, które reprezentują. Jest ona kluczową własności diagramów.

⁷⁸⁵ Shimojima, A, *Tutorial...*, slajd 58.

⁷⁸⁶ Barwise, J., Etchemendy, J., *Visual information and valid reasoning*, (w:) *Logical reasoning with diagrams*, red. G. Allwein, J. Barwise, Oxford 1996, str. 18.

Zauważmy na początek, iż jakaś charakterystyka przestrzenna diagramu odpowiada zazwyczaj matematycznym własnościom reprezentowanego przedmiotu. W istocie, diagram, który w żaden sposób nie nawiązuje do własności obiektów matematycznych, które reprezentuje, jest bezużyteczny. Barwise i Etchemendy piszą tu, iż idealną okolicznością jest, gdy struktura diagramu jest izomorficzna ze strukturą reprezentowanego przedmiotu: „dobry diagram jest izomorficzny, lub przynajmniej homomorficzny ze sytuacją którą reprezentuje, przynajmniej na pewnych kluczowych poziomach (*along certain crucial dimensions*)”⁷⁸⁷. Homomorfizm ten można określić ogólnie (i dość nieprecyzyjnie) jako przyporządkowanie obiektów matematycznym graficznym własnościom diagramu. Za przykład posłużyć tu mogą diagramy Venn’a, których elementy są homomorficzne z obiektami matematycznymi przez nie reprezentowanymi.

Warto w tym miejscu przypomnieć myśl Peirce’a. Przypomnijmy, iż amerykański logik traktował wszystkie reprezentacje postrzegalne zmysłem wzroku (także narysowane symbole) jako diagramy, dzielił je przy tym na trzy rodzaje: ikony, symbole i indeksy. Ikony reprezentowały poprzez podobieństwo z reprezentowanym obiektem.

Peirceowskie wątki pojawiają się w pracy Denis Potter, w której wskazuje on jednocześnie na ograniczenia diagramów płynące z ich „ikonicznego” charakteru. Podobnie, jak Peirce (choć do niego nie nawiązując), Potter podkreśla, że diagramy, reprezentując na mocy przestrzennych relacji pomiędzy swoimi częściami, reprezentują tym samym na mocy czegoś więcej niż jedynie konwencji; ogranicza to zakres obiektów, które mogą reprezentować. Tak pisze o tym sam Potter: „diagramy i [napisane] słowa reprezentują w odmienny sposób. Słowa reprezentują jedynie na mocy konwencji. Inaczej mówiąc, to, co reprezentuje jakikolwiek ciąg symboli jest umowne. Na przykład, nie ma nic w kształcie ciągu ‘drzewo’, co czyni go bardziej prawdopodobnym kandydatem do reprezentowania drzew, niż ciąg ‘pies’ (...)”⁷⁸⁸. Reprezentacja diagramowa jest również w pewnej mierze umowna – pewne jej elementy, jak oznaczenia informujące, że dane proste

⁷⁸⁷ Tamże, str. 21.

⁷⁸⁸ Potter, D., *Diagrammatic...*, str. 375.

są równoległe, czy że dany kąt jest prosty, mają arbitralny kształt. Jednak „diagramy nie reprezentują jedynie na mocy konwencji” – ich kształt nawiązuje w jakiś sposób do struktury reprezentowanych obiektów⁷⁸⁹.

Konsekwencją tej własności diagramów jest jednak, według Pottera, ich ograniczenie, a dokładniej ograniczenie zakresu obiektów, które diagram może reprezentować: „każda fizyczna cecha posiada pewne ograniczenia co do tego, co może nam reprezentować poprzez diagram”⁷⁹⁰. Symbol „a”, poprzez konwencjonalny charakter jego zastosowań, może reprezentować bardzo wiele obiektów. Trudno byłoby z drugiej strony konwencję, na mocy której narysowany kwadrat reprezentuje koło – byłoby to zupełnie niepraktyczne i pociągało z pewnością różnorakie błędy. Diagramy nie są więc tak uniwersalnymi typami reprezentacji, jak chociażby język predykatów, nie mogą też reprezentować tak szerokiej klasy obiektów, jak ów język. Dodajmy przy tym, iż powyższe ograniczenia zostało przez Pottera sformułowane w odniesieniu do geometrii. W innych działach matematyki powiązanie diagramu z konkretnym obiektem matematycznym nie musi być już takie silne (można tu choćby przywołać graf jako reprezentujący potencjalnie bardzo wiele typów obiektów i relacji). Więcej piszę o tym omawiając własność diagramów, którą nazywam ich niedookreślonością.

Podobieństwo strukturalne diagramu i jego przedmiotu posiada oczywiście też wiele zalet. To dzięki temu podobieństwu doświadczenie wizualne związane z diagramem pozwala całościowo ująć przedstawiany obiekt matematyczny, odkrywać jego własności, itd. Jakiegoś typu homomorfizm pomiędzy diagramem a reprezentowanym przez niego obiektem umożliwia wreszcie konstrukcję rachunków diagramowych.

5) Inną bardzo istotną cechą reprezentacji diagramowej jest ich zdolność do odkrywania przed obserwatorem – w konsekwencji samego dokonania aktu konstrukcji – nowych faktów, tzn. takich, które nie były znane przed konstrukcją diagramu. Przypomnijmy od razu, iż na podobną własność diagramów zwracał

⁷⁸⁹ Tamże, str. 376.

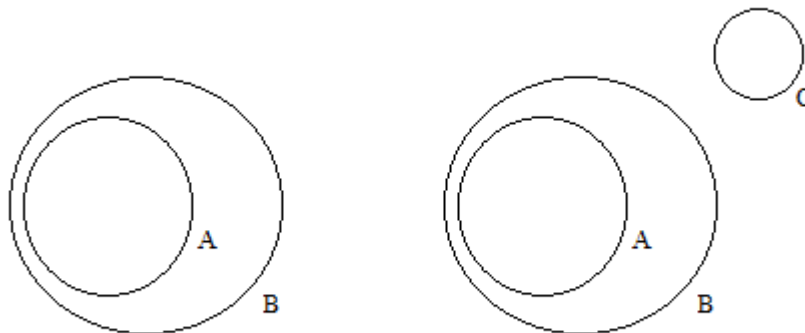
⁷⁹⁰ Tamże, str. 377.

uwagę Peirce. Pisał on, że po sporządzeniu diagramu możemy odkryć nowe prawdy poprzez bezpośrednią obserwację. Nowa informacja może być dalej ujawniona przez manipulację na diagramie.

To, na jaki sposób diagram może odkrywać przed nami nowe fakty jest analizowane m.in. Shimojimą. Możliwość odczytania danego faktu z diagramu nazywa przy Shimojima „free ride”. Termin ten przyjął się w literaturze anglojęzycznej, nawiązuje do niego wielu filozofów. Trudno ów termin zgrabnie przełożyć na język polski – będę tu więc podążał za Zenonem Kulpą, który proponuje oddać free ride jako „darmowy przejazd”, albo też pisać będę o własności FR diagramów⁷⁹¹.

Tak o omawianej własności diagramów pisze więc Shimojima: “wyrażanie pewnych zbiorów informacji skutkuje wyrażeniem dodatkowej informacji, która stanowi konsekwencję informacji poprzednich (*consequential information*)”⁷⁹². Podajmy, za Shimojimą, dwa przykłady. Pierwszy, prosty przykład dotyczy znów prostych zbiorów. Załóżmy, że tym razem reprezentujemy na diagramie następujące dwa fakty: $A \subset B$, oraz $C \cap B = \emptyset$.

Rys.2.



⁷⁹¹ Por. Kulpa, Z., *Emergencja w diagramach*, 2006, źródło: <http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob15pdf>, str. 103.

⁷⁹² Shimojima, A, *Tutorial...*, slajd 17.

Z diagramu można natychmiast wywnioskować, iż również $A \cap C \neq \emptyset$. Shimojima podaje również analizowanymi już tu wcześniej diagramamy Venn'a; otóż oznaczając na diagramie za pomocą cieniowania, itd. dwie przesłanki sylogizmu, możemy „odczytać” wniosek z diagramu. Dodajmy, iż przypadki takie nie są z pewnością rzadkością. Również w teorii grafów, czy w szczególności w przypadku wizualizacji komputerowych, sama wizualna reprezentacja pewnych założeń pozwala (z większymi, lub mniejszymi trudnościami) „odczytać” nowe fakty z diagramu. Mumma zauważa również obecność FR w geometrii: „diagram jest konstruowany w celu wyrażenia pewnego zbioru wzajemnych zależności położenia” (*positional conditions*). Kiedy diagram, ten jest już skonstruowany, widać na nim, że inne zależności położenia również zachodzą⁷⁹³.

Podsumowując, wydaje się, że samo naniesienie informacji (czy jakichś założeń) na diagram, pozwala w niektórych przypadkach odkryć nowe, nieznanne wcześniej fakty.

Jak piszą Barwise i Etchemendy, „diagram może generować dużą ilość informacji, której użytkownik nie musi w ogóle wyprowadzać. W zamian, użytkownik może po prostu odczytać fakty z diagramu, według potrzeby”⁷⁹⁴. Wydaje się więc, że nie ma potrzeby wykonywać wnioskowania, które w notacji symbolicznej należałoby wykonać standardowo (używając w pierwszym przykładzie po drodze kilka elementarnych własności zbiorów i praw logiki) – bądź też, że wnioskowanie te byłyby banalne proste. Larkin i Simon piszą tu na przykład, iż można tu mówić o wnioskowaniach, które są jednak przeprowadzone, zasadniczo zerowym kosztem (*at essentially zero cost*)⁷⁹⁵. Dalszą epistemologiczną interpretacją procesu poznawczego dokonywanego w trakcie „darmowego przejazdu”, oraz natury twierdzenia, które jest w jej konsekwencji „odczytywane”, zajmę się w dalszej części pracy.

6) Shimojima wyróżnia również własność reprezentacji wizualnych, którą nazywa „derived meaning”, co można przetłumaczyć jako „wyprowadzone

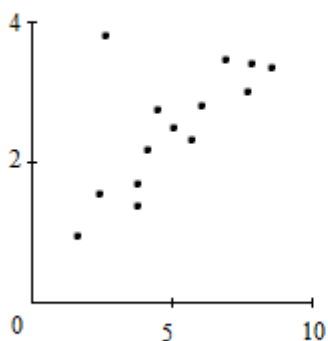
⁷⁹³ Mumma, J., *Proofs, Pictures...*, str. 279.

⁷⁹⁴ Shimojima, A., *Tutorial...*, slajd 22.

⁷⁹⁵ Por. tamże, slajd 23.

znaczenie”. Własność ta, jest bardzo blisko związana z własnością FR. Otóż, twierdzi Shimojima, często po naniesieniu na diagram danych informacji bądź założeń, ich ułożeniu przestrzennemu na diagramie można nadać nowe znaczenie, rozszerzając (podobnie, jak było to w przypadku FR) naszą wiedzę. Inaczej mówiąc, z pewnych przestrzennych własności diagramu możemy odczytać relacje pomiędzy obiektami, które zostały w jakiś sposób na diagram naniesione. Shimojima podkreśla, iż rola diagramu, która pozwala odkryć, czy w jakimś sensie wywnioskować (derivative role) nowe informacje, zasadza się w tym, że odczytane relacje „nie zostały ujęte w podstawowych regułach semantycznych”, które określają znaczenie, jakie posiadają poszczególne elementy naniesione na diagram⁷⁹⁶.

Oto prosty ale sugestywny przykład: nanosimy na układ współrzędnych punkty, będące np. relacją z wyniku pewnego eksperymentu. Wizualne własności powstałego w ten sposób zbioru punktów mogą nam teraz sugerować zachodzenie pewnych relacji pomiędzy badanymi wielkościami.



Rys.3.

Rozmieszczenie niesie z sobą pewną treść, czy znaczenie – ogólna charakterystyka związku pomiędzy badanymi wielkościami (Kosslyn podkreśla tu na przykład, iż

⁷⁹⁶ Tamże, slajd 64.

informacja jest przekazana przez kształt i gęstość chmury⁷⁹⁷). Informacjami tymi mogą być: istnienie korelacji oraz jej siła, czy istnienie szczególnych przypadków⁷⁹⁸.

Shimojima podkreśla, że (diagramowy) system reprezentacji posiadający omawianą tu własność (*meaning derivation property*), pozwala na „jednoczesną (simultaneous) prezentację informacji lokalnej i informacji globalnej, która wynika z informacji lokalnej”⁷⁹⁹. Widać tu, iż własność ta wiąże się z własnościami nr. 3. oraz 5. Rozmieszczenie przestrzenne elementów diagramu daje szerszy ogląd sytuacji, pozwala zobaczyć „na raz” (własność 3), w taki sposób (mianowicie przestrzenny), iż możliwe jest rozszerzenie naszej wiedzy (własność 5). Wydaje się przy tym, iż różnica pomiędzy własnością FR a obecnie omawianą, w niektórych przypadkach mocno się zaciera stąd można je traktować jako dwa oblicza tej samej własności diagramów.

7) Kolejna własność, którą chciałbym tu omówić, to niedookreśloność diagramów: kształt diagramu nie determinuje obiektu który ma być reprezentowany. Inaczej mówiąc – jeden diagram może reprezentować dużo różnych obiektów matematycznych. Potter nazywa tę własność *flexibility datum*, a więc elastycznością diagramów. Podkreśla on, iż ta sama cecha fizyczna może reprezentować różne obiekty geometryczne, stąd to co dany diagram ma reprezentować jest niedookreślone przez jego fizyczną strukturę (tzn. diagramu pozbawionego jakichkolwiek komentarzy słowno-symbolicznych). Można powiedzieć, że konsekwencją tego niedookreślenia jest potrzeba załączenia do diagramu słownego komentarza. Komentarz taki „dookreśla” diagram, wraz ze wszystkimi jego składowymi (może być przy tym ukryty w pewnym ogólnym kontekście, w jakim rozważamy diagram, np. w warunkach konstrukcji). Diagram „sam w sobie” wydaje się nie mieć konkretnego matematycznego znaczenia. Nawet diagram przedstawiający geometryczny trójkąt może być rozumiany jako np. obiekt teorii grafów – graf pełny na trzech wierzchołkach. Jedno pojęcie można

⁷⁹⁷ Por. tamże, slajd 67.

⁷⁹⁸ Tamże, slajd 66.

⁷⁹⁹ Tamże, slajd 74.

wizualizować na wiele sposobów, a jedna wizualizacja może być powiązana z wieloma pojęciami. Związek pomiędzy nimi jest przy tym oczywiście silniejszy w przypadku geometrii, niż innych gałęzi matematyki. Z drugiej strony wiele wizualizacji komputerowych jest niedookreślonych. Obiekty, jak wspomniane rozwinięcia dziesiętne mogą być reprezentowane na bardzo różne sposoby. Poprzez ową „drogę prowadzącą poprzez informację nie jest zazwyczaj z góry określona, pozostawiają dla oglądającego ustalenie, co jest ważne (a co nie) oraz w jakim porządku powinny być stwierdzane zależności”⁸⁰⁰. Na koniec oddajmy, iż niedookreśloność diagramów ukazuje, iż (ujmując to w kategoriach peirceowskich) diagramy reprezentują nie tylko na mocy podobieństwa, ale również konwencji, są więc nie tylko ikonami, albo również symbolami⁸⁰¹.

Przypomnijmy, iż niedookreśloność diagramów odgrywała również istotną rolę w procesie rozwoju geometrii nieeuklidesowych. Przy odpowiedniej interpretacji pojęć, rysunki przedstawiające „zwykłe” obiekty euklidesowe mogą reprezentować obiekty nieeuklidesowe (jak było to w przypadku wspomnianego tu modelu Beltramiego geometrii nieeuklidesowych). Przypominajmy również, iż geometria XIX ukazała niesłuszność idei Kanta, iż pojęcia geometryczne są nierozdzielnie (i *a priori*) związane z naocznościami, a więc, można powiedzieć, pewnymi wizualizacjami.

8) Inną ważną własnością przysługującą niektórym reprezentacjom przestrzennym, symetryczność. Można ją traktować jako jedynie aspekt wymienionych powyżej własności; warto jednak poświęcić jej nieco uwagi, gdyż jest to szczególnie istotny aspekt diagramów, na który chętnie zwracają uwagę szczególnie praktykujący matematycy.

Symetryczność przysługuje oczywiście tylko niektórym diagramom. Jest to jednak ich własność szczególnie sugestywna, narzucająca się w sposób będący w dużym stopniu poza kontrolą obserwatora. Przypomnijmy tu badania Giaquinto,

⁸⁰⁰ Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures...*, str. 899.

⁸⁰¹ Przypomnijmy, iż Peirce nie wykluczał, iż diagram (rozumiany przez niego jako całość złożona z rysunku oraz dodanych symboli) funkcjonuje po części jako ikona, po części jako symboli i po części jako indeks.

który wykazywał niejako wrodzony charakter postrzegania tej własności diagramów.

Symetria ma oczywiście również istotny wymiar matematyczny. Symetryczność (różnych odmian) jest wyrazem istnienia jakiejś regularności, a ich badanie jest przecież jednym z ważnych wymiarów badań matematyków. Jeśli reprezentacje graficzne obiektów matematycznych mają tę własność, można jej nadać w większości przypadków istotne matematyczne znaczenie.

9) Na koniec omówię omawiam, ściśle rzecz biorąc, nie własność, ale pewną kontrowersję związaną z diagramami. Chciałbym tu mianowicie wskazać na dwa oblicza wizualizacji – jako statycznych obiektów, oraz dynamicznych wizualizacji. Dokładniej, mowa tu o przeprowadzonych przy pomocy jakichś przedmiotów fizycznych, bądź obserwowanych na monitorze komputera animacjach. Nie są one, ściśle rzecz biorąc diagramami. Są jednak oczywiście wizualizacjami jako, że możemy przedstawić je sobie w wyobraźni przestrzennej.

Większość diagramów to statyczne obiekty, gotowe rysunki, czy grafiki komputerowe. W takich wypadkach diagram jest nam „dany”, posiada określony kształt i poprzez niego oddziałuje na nasz umysł. Przypomnijmy, iż taką własność diagramów – w przeciwieństwie do symboli algebraicznych – podkreślał historyk matematyki Ladoslav Kvasz. Dodajmy, iż według Kvasz to pojęcia algebry są bliższe kategorii ruchu, czy zmiany. Jak opisywałem w rozdziale drugim operacje algebraiczne są reifikacją aktywności liczenia czy wyciągania pierwiastka, a praktyka algebry oparta jest na „doświadczeniu motorycznym, na przekształceniach, działaniach”⁸⁰². W algebrze „wgląd jest możliwy dopiero po wykonaniu pewnej czynności, dopiero gdy jakaś szczęśliwie odnaleziona sztuczka dała (*brought*) nam rozwiązanie, którego szukaliśmy”⁸⁰³. W geometrii natomiast wgląd jest niejako natychmiastowy, wypływa z jednolitego aktu oglądu całości.

Niejednokrotnie – w historii matematyki, jak również we współczesnych zastosowaniach wizualizacji – ujawnia się jednak również dynamiczny aspekt

⁸⁰² Kvasz, L., *The History of Algebra...*, str. 289.

⁸⁰³ Tamże, str. 289.

wizualizacji. Przypomnijmy tu kontrowersje związane z czwartym twierdzeniem pierwszej księgi Elementów (nakładanie się na siebie trójkątów), rozważane przez współczesnych Kartezjusza krzywe mechaniczne, czy „dynamiczny” dowód piątego postulatu arabskiego matematyka Ibn al-Haythama (oraz jego krytykę jako niezgodnego z duchem matematyki w wykonaniu Omara Khayyam). Współcześnie, komputery zezwalają na różnorodne dynamiczne wizualizacje, które mogą pełnić rolę w poznaniu niektórych obiektów matematycznych.

Dodajmy na koniec, iż dynamiczne wizualizacje wydają się wskazywać na empiryczny charakter poznania związanego z wizualizacjami, podczas gdy statyczne

10.2. Marcus Giaquinto o graficznych i symbolicznych aspektach reprezentacji obiektów matematycznych

Chciałbym przedstawić również nieco inne podejście do charakterystyk reprezentacji obiektów matematycznych niż to, które przedstawione było powyżej. Zostało ono sformułowane przez Giaquinto w często przeze mnie cytowanej pracy *Visual Thinking in Mathematics*. Jak już sygnalizowałem już we wstępie do rozdziału, nie przyjmuje on, iż mamy dwa rodzaje reprezentacji obiektów matematycznych (diagramy i symbole) oraz, że posiadają one odmienne charakterystyki. Zakłada raczej, że to poszczególne charakterystyki reprezentacji obiektów matematycznych mają charakter wizualny bądź symboliczny. Inaczej mówiąc, można wyróżnić wizualne i symboliczne charakterystyki diagramów, a poszczególne diagramy mogą mieć cechy zarówno pierwszego jak i drugiego rodzaju. Giaquinto wprowadza tym samym dychotomiczny podział nie reprezentacji, ale charakterystyk reprezentacji – podział pomiędzy reprezentacjami różnego rodzaju (jak i ogólniej myśleniem wizualnymi i algebraicznym) staje się natomiast nieostry.

Giaquinto wymienia sześć charakterystyk reprezentacji obiektów

matematycznych: trzy, które są typowe dla reprezentacji symbolicznych (oraz nie są typowe dla diagramów), oraz trzy, które są typowe dla diagramów (oraz nie są typowe dla reprezentacji symbolicznych). Nie jest przy tym wykluczone, iż obiekty charakteryzowane zazwyczaj jako diagramy posiadają pewne własności pierwszego rodzaju, ani że pewne symbole, czy układy symboli nie mają pewnych cech rodzaju drugiego. Jeśli przyjmiemy taką właśnie metodą określania pierwiastków „nasza nieumiejętność klasyfikacji pośrednich przypadków ma swoje źródło nie w niewiedzy ale nieokreśloności”.

G1. Dyskretne elementy składowe informacji są reprezentowane (*carried*) przez dyskretne części reprezentacji.

G2. Reprezentacja posiada syntaksę.

G3. Reprezentacja przekazuje (*carries*) tylko ścisłą informację; nie przekazuje *vague* informacji ani sugestii.

G4. Przestrzenne relacje pomiędzy częściami reprezentacji, reprezentują relacje pomiędzy tym, co reprezentują poszczególne części.

G5. Informacja jest przedstawiana jednocześnie (*simltaneously*), a nie w sposób uszeregowany (*serialy*).

G6. Część informacji jest reprezentowana lokalnie, a część globalnie⁸⁰⁴.

Przytoczmy dalej kilka przykładów reprezentacji matematycznych (oraz związanych z nimi typów rozumowań), które dobrze obrazują taką taksonomię⁸⁰⁵.

a) paradygmatyczny przykład reprezentacji symbolicznych występują w algebrze abstrakcyjnej. Obiekty, które rozważamy uprawiając np. teorię grup mają więc własności 1-3, nie posiada za to własności 4-6.

b) przykładem reprezentacji obiektu algebraicznego, która posiada pewne

⁸⁰⁴ Por. Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 249.

⁸⁰⁵ Przykłady na podstawie: Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 242-246.

charakterystyki diagramowe są macierze. Rozważmy poniższe równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$$

O jego prawdziwości możemy się przekonać „wizualizując obrót pionowego wektora do pozycji poziomej, następnie relacje „są przedstawione w sposób symultaniczny (simultaneously), a nie w sposób uszeregowany (sequentially)”⁸⁰⁶. Ukazuje to, iż reprezentacja powyższa ma (oprócz własności 1-3) również własność 5?!?!

- c) Przykładem reprezentacji bardziej „oddalonych od językowego stylu (mould) niż mnożenie macierzy” diagramy strzałkowe (arrow diagrams). Nie będę tu analizował przykładu Giaquinto. Dość powiedzieć, iż diagramy te można tu klasyfikować wspólnie z obiektami teorii grafów, teorii kategorii, czy teorii krat. Giaquinto uważa, że diagramy te mają własności G4 oraz G5. Rzeczywiście, duża część informacji jest zawarta na diagramie „na raz”, struktura diagramu odpowiada też własnościom reprezentowanych obiektów. Z drugiej strony, jak przekonuje Giaquinto, powyższy diagram posiada terminy – strzałki, opisy. Wydaje się, że do tej samej grupy (tzn. posiadające wszystkie 6 wymienionych cech) można również zaliczyć reprezentacje i proste rozumowania z dziedziny teorii grafów.
- d) Przykładem reprezentacji (i rozumowań) typowo diagramowych, są wreszcie diagramy w analizie matematycznej jak również w geometrii. Cechują je charakterystyki 4-6, nie posiadają za to charakterystyk 1-3. Można je więc nazwać

⁸⁰⁶ Tamże, str. 242.

typowo „diagramowymi” typami reprezentacji.

Jak mają się do siebie ujęcie Giaquinto i przedstawione wcześniej przeze mnie 9 charakterystyk diagramów? Własność G4 odpowiada czwartej charakterystyce diagramów (strukturalne podobieństwo diagramu i obiektu przez niego reprezentowanego). Własności G5 oraz G6 są dwiema odsłonami własności trzeciej (na diagramie można zawrzeć dużo informacji „na raz”).

Giaquinto wyciąga ze swoich rozważań następujące wnioski: rozróżnienie pomiędzy diagramami i symbolami jest nieostre. Istnieją przypadki diagramów typowo symbolicznych i typowo geometrycznych. Co więcej, istnieje cała gama przypadków pośrednich. Zauważmy bowiem, że biorąc pod uwagę, iż istnieje 6 różnych charakterystyk diagramów, można mówić o 64 różnych typach reprezentacji. Typów tych nie można również uporządkować sensownie liniowo. Zbiór omawianych charakterystyk ma więc, jak podkreśla Giaquinto strukturę kraty⁸⁰⁷.

Dodajmy też, że w ramach takiego ujęcia Giaquinto łatwo jest przeprowadzić rozróżnienie na diagramy dyskretne i metryczne. Te ostatnie nie posiadają żadnej z własności 1-3. Diagramy dyskretne posiadają natomiast własności 1 oraz 3 (które, jak się wydaje, idą zazwyczaj w parze), otwartym natomiast może pozostawać kwestia własności nr. 2.

⁸⁰⁷ Por. tamże, str. 248.

Rozdział 11. Rola wizualizacji w dowodach i rozumowaniach matematycznych

Niniejszy rozdział poświęcony jest analizie roli diagramów w uzasadnianiu twierdzeń matematycznych, w szczególności oczywiście w dowodzie matematycznym. W poprzednich rozdziałach podawałem omawiałem różne typy diagramów, a następnie ich ogólne własności. W tym miejscu rozważam pytanie: jak diagramy funkcjonują w dowodach? Jaką rolę odgrywają w rozumowaniach matematycznych, czy ogólniej w kontekście uzasadnienia? Czy i w jakim sensie można mówić o rozumowaniach diagramowych? Interesować mnie tutaj więc będzie diagram w dążeniu do wykazywania i rozumienia prawdziwości (jakkolwiek rozumianej) twierdzeń matematyki.

Nie będę tu starał się argumentować, iż istnieją twierdzenia, których nie można udowodnić bez diagramów. Kant utrzymywał taką tezę w odniesieniu do geometrii, jednak w świetle współczesnego rozwoju matematyki jest trudna do obronienia. Analiza różnego rodzaju rozumowań, w których istotną rolę pełnią diagramy, każe jednak sądzić, iż można mówić o rozumowaniach wizualnych jako odmiennych drogach do osiągnięcia przekonań matematycznych (czy prawdy matematycznej) niż ta, która posługuje się jedynie reprezentacjami symbolicznymi.

Istnieje całe spektrum stanowisk odnośnie roli, jaką wizualizacje grają w dowodach matematycznych. G. Hanna i N. Sidoli piszą, iż na jednym końcu są tu filozofowie, dla których diagram nie gra żadnej roli w dowodzie, a na drugim ci, dla których „niektóre reprezentacje wizualne mogą same w sobie stanowić dowody, powodując, iż dalszy tradycyjny dowód staje się niepotrzebny”⁸⁰⁸. Pomiędzy nimi

⁸⁰⁸ Hanna, G., Sidoli, N., *Visualisation and proof...*, str. 74.

znaleźć można różnorodne stanowiska, różniące się między sobą w większy lub mniejszy – czasem subtelny – sposób. Według niektórych stanowisk reprezentacja wizualna nie stanowi całego dowodu, ale jego integralny element. W rozdziale tym przedstawiam kilka stanowisk odnośnie roli diagramów w dowodach matematycznych- również takie, zgodnie z którymi można mówić o „twierdzeniach wizualnych”. Zanim do nich przejdę, sformułuję kilka ogólnych uwag o pojęciach dowodu matematycznego, oraz rozumowania w matematyce, w celu przygotowania rozważań na temat dowodu wizualnego. Podam również liczne przykłady diagramów, które stanowią, według niektórych, twierdzenia, czy dowody wizualne, a w każdym razie wystarczają dla wielu matematyków, aby orzec prawdziwość odpowiedniego twierdzenia. Po sformułowaniu czterech omawianych stanowisk, podejmę próbę klasyfikacji rozumowań diagramowych. W ostatniej części rozdziału powracam do tematu ogólności i wiarygodności rozumowań opartych na diagramach.

11.1. Ogólne uwagi o pojęciu dowodu i rozumowania

Jak już wspominałem we wcześniejszej części pracy, przez dowód (sformułowany w ramach jakiegoś systemu sformalizowanego) rozumie się zazwyczaj ciąg formuł zdaniowych (bądź zdań), takich, że każda z nich jest aksjomatem, bądź wyprowadzona jest z poprzednich na mocy przyjętych reguł wnioskowania. W istocie, wydaje się, iż dla każdego twierdzenia można podać taki właśnie dowód. Czy jednak dowody formalne, sformułowane w języku teorii aksjomatycznych jak teoria mnogości Zermelo-Fraenkla, to jedyne obiekty, które można nazwać dowodami? Lektura czasopism matematycznych ukazuje, iż takie dowody są ogromną rzadkością. Twierdzenia tam dowodzone nie są obiektami spełniającymi powyższą definicję dowodu. Są one jednak nazywane dowodami i jako takie są przez matematyków postrzegane.

Kiedy więc zaakceptować rozumowanie jako dowód, tzn. jako prowadzące do nowej wiedzy matematycznej? Jak pisze Krzysztof Wójtowicz, nie wystarczy stwierdzenie, iż dowód można zaakceptować, ponieważ można go (hipotetycznie) sformalizować w danej teorii – „decyzja o akceptacji danego dowodu przez matematyków odbywa się przecież bez wskazania owej formalizacji”⁸⁰⁹. O tym, czy dowód należy przyjąć jak poprawny decydują eksperci danej dziedziny, a nie logicy. Jak pisze Wójtowicz, można więc zadać pytanie: „jakie realnie stosowane argumenty matematyczne można (i należy) uznać za przekonujące?”⁸¹⁰ Pytanie to odnosi się również do dowodów korzystających w istotny sposób z diagramów.

Rozważmy dalej następującą kwestię: kiedy można uznać, iż dwa pod pewnymi względami różniące się między sobą dowody stanowią w istocie ten sam dowód? Mogą to być dowody sformułowane w różnych teoriach aksjomatycznych, różnych językach (np. arytmetyki i teorii mnogości); w szczególności może być to dowód odwołujący się w jakiś sposób do diagramu, czy myślenia wizualnego oraz dowód do nich się nie odwołujący. Pytanie to można w pewnym sensie traktować jako pytanie o status ontologiczny dowodu; rozważał je np. Wang, gdy pytał czy „dowody istnieją niezależnie od całości wiedzy”⁸¹¹? W pracy *Visualizing in Mathematics* Giaquinto pisze w tym kontekście, iż powinniśmy odróżnić pomiędzy dowodem i prezentacją dowodu – „dowód może być przedstawiony na różne sposoby”⁸¹². Pytanie, kiedy uznać tego rodzaju różne dowody za ten sam dowód jest trudne. Według Giaquinto, matematycy są na ogół skłonni uznać identyczność dowodów, gdy „centralna idea jest w przypadkach taka sama”⁸¹³.

Tego typu rozważania są istotne dla problematyki wizualizacji. Pojawia się tu bowiem pytanie: czy dowód odwołujący się do diagramów (chodzi tu o obiekt uznany przez matematyków powszechnie za dowód) jest tylko innym sformułowaniem tego samego dowodu ujętego w jakiejś standardowej teorii sformalizowanej? Czy przekazuje swoistą treść, swoiste rozumowanie, którego nie

⁸⁰⁹ Wójtowicz, K., *Empiryczne aspekty dowodów matematycznych*, (w:) *Światy matematyki: tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010, str. 346-347.

⁸¹⁰ Tamże, str. 347.

⁸¹¹ Wang, H., *Theory and Practice...*, str. 136.

⁸¹² Giaquinto, M., *Visualizing in Mathematics*, str. 24.

⁸¹³ Tamże, str. 24.

można w pełni ująć za pomocą pojęć? Stwierdzenie, że każde twierdzenie można udowodnić metodami logicznymi nie oznacza jeszcze, że każdy typ rozumowania jest adekwatnie rekonstruowany w języku logiki.

To jest, jak się wydaje, teza większości filozofów zajmujących się epistemologicznymi aspektami wizualizacji: rozumowania, które wykonujemy korzystając z diagramów są innego rodzaju. Przytoczmy tu choćby Mumme, który podkreśla, iż logiczno-formalna koncepcja dowodu „była i jest ogromnie owocna i pouczająca (*illuminating*). Jednak ogromny sukces, z jakim dostarcza on ścisłego ujęcia rozumowania atematycznego nie implikuje, że wszystkie dowody matematyczne są w rzeczywistości (*in essence*) ciągami zdań”⁸¹⁴. W dalszej części tekstu rozważę przykłady tego typu rozumowań.

Rozważmy dalej inną, istotną dla problemu wizualizacji, kategorię epistemologiczną – rozumowania, jak również nieformalne dowody. Można uznać, że pojęcie rozumowania jest szersze niż pojęcie dowodu – każdy dowód to bowiem pewne rozumowanie. Jest to proces myślowy, który może być spisany, lub nie, może również być bardziej lub mniej ścisły. Zenon Kulpa określa pojęcie „rozumowania” bardzo ogólnie, jako przetwarzanie wiedzy (*knowledge processing*)⁸¹⁵. Nie będę tu jednak omawiać możliwych definicji kategorii rozumowania. Zadam tylko następujące pytanie, istotne dla dalszej części tekstu: czy rozumowanie z natury składa się z osobnych kroków? Inaczej mówiąc, czy zawsze ma charakter „liniowy”? Czy rozumowanie zawsze przeprowadzone jest „na pojęciach”, czy też może mieć charakter czysto intuicyjny? Jaką rolę pełnią wreszcie w rozumowaniach diagramy? Kiedy uznajemy rozumowania oparte o diagram za poprawne i dlaczego?

Problem ten pojawia się w ramach samej logiki. Wiele wskazuje na to, iż nie wszystkie rozumowania są wyrażalne np. w języku logiki pierwszego rzędu. Hammer przywołuje tu rozumowania wyrażane w języku logiki drugiego rzędu, czy za pomocą dedukcji naturalnej⁸¹⁶. Różne techniki są według niego „są

⁸¹⁴ Mumma, J., *Proofs, Pictures...*, str. 255-256..

⁸¹⁵ Kulpa, Z., *Main Problems...*, str. 75-76.

⁸¹⁶ Hammer podkreśla, iż niektórzy matematycy (w szczególności Boolos) uważają, iż niektóre typy rozumowania modelowane są lepiej przez logikę drugiego rzędu, niż logikę pierwszego rzędu.

motywowane dążeniem do adekwatnego modelowania sposobu, w jaki dowody są w rzeczywistości skonstruowane, jak na przykład użycie tymczasowych założeń w dowodzie, metoda rozbijania na przypadki, stosowanie dowodów nie wprost⁸¹⁷. Można uznać, że poszczególne techniki dowodowe są rekonstrukcją praktyki dowodzenia.

W przypadku problematyki wizualizacji często mamy do czynienia z rozumowaniami, co do których nie ma pewności czy stanowią dowód. Co więcej, niektóre rozumowania związane z diagramami są bardzo trudno uchwytny, wydają się stanowić raczej pewnego rodzaju „doświadczenie wizualne”, którego efektem jest przekonanie o prawdziwości danego twierdzenia. Powtórzmy, że przez adekwatną rekonstrukcję można tu rozumieć taką rekonstrukcję, która oddaje ideę rozumowania, przy czym ta ostatnia jest trudno uchwytna.

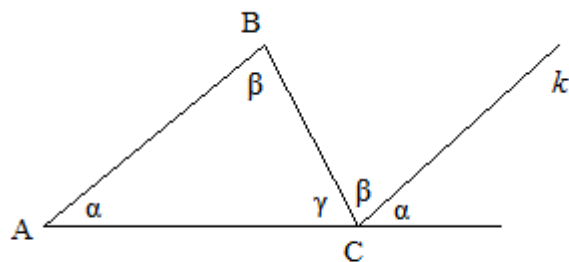
11.2. Przykłady rozumowań diagramowych

Rozważmy więc diagramy, które wydają się w bardzo sugestywny sposób obrazować konkretne twierdzenia matematyczne. Według niektórych filozofów można twierdzić, iż stanowią nawet same w sobie „twierdzenia wizualne”, czy „dowody wizualne” danego twierdzenia, w przypadku których nie ma potrzeby przeprowadzania dodatkowego, „tradycyjnego” dowodu.

Weźmy na początek twierdzenie, do którego bardzo chętnie odwoływali się filozofowie klasyczni nalizowani mojej pracy, a mianowicie twierdzenie orzekające, iż suma kątów w trójkącie równa jest 180° .

Dodajmy, iż jest to tez dyskusyjna, na której analizę nie ma tu oczywiście miejsca (Hammer, E., *Reasoning...*, str. 74).

⁸¹⁷ Tamże, str. 74.

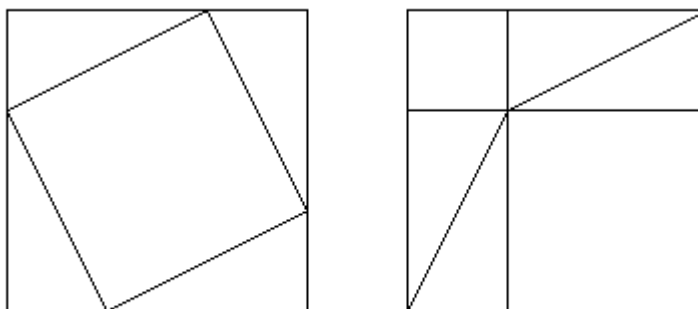


Rys. 1.

Kontakt z diagramem pozwala szybko przekonać się, iż wspomniane twierdzenie jest prawdziwe. Jest to rzeczywiście pouczający przykład, ponieważ twierdzenie to nie jest oczywiste na pierwszy rzut oka. Również sama obserwacja diagramu przedstawiającego trójkąt (bez oznaczeń symbolicznych) nie wystarcza, aby je udowodnić. Trzeba mianowicie znać odpowiednie twierdzenia dotyczące równości odpowiednich kątów naprzemianległych. Zwróćmy uwagę, że otwarty pozostaje oczywiście problem ogólności twierdzenia uzasadnionego za pomocą takiego diagramu.

Podajmy dalej najbardziej chyba znany dowód obrazkowy – dowód twierdzenia Pitagorasa. W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, tu rysunek nie jest oznaczony żadnymi symbolami.

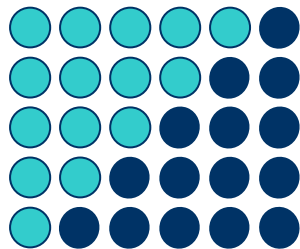
Rys. 2. „Obrazkowy” dowód twierdzenia Pitagorasa.



Porównując dwa powyższe diagramy widzimy, że wewnętrzny kwadrat na pierwszym rysunku (zbudowany na przeciwprostokątnej trójkąta) ma takie samo pole, co dwa kwadraty znajdujące się na sąsiednim rysunku (zbudowane na przyprostokątnych). W odróżnieniu od poprzedniego diagramu, nie jest tu potrzebna znajomość żadnych twierdzeń geometrycznych.

W geometrii istnieje bardzo wiele przykładów tego rodzaju diagramów, bądź rozumowań (niektóre z nich mogą być przez sprawnych matematyków przeprowadzone w umyśle, tzn. bez kontaktu z fizycznym diagramem). Przypomnijmy tu rozważane już twierdzenie dowodzone w platońskim *Menonie* oraz przykłady analizowane w rozdziale dziewiątym. Podkreślmy, że w wszystkich tych przykładach „odnalezienie odpowiedniego diagramu jest o wiele ważniejszym krokiem, niż pozostała część rozumowania (than the rest)”⁸¹⁸. Kluczowym punktem jest tu więc odpowiedni pomysł, a więc element twórczy – choć nie można wykluczyć przykładu, że odpowiedni diagram powstanie „przypadkowo”, czy też w trakcie „próbnych” manipulacji diagramem.

Przyjrzyjmy się dalej dwóm prostym przykładom diagramów obrazujących elementarne zależności teorioliczbowe. Przypomnijmy najpierw, iż liczbą trójkątną jest liczba będąca sumą pierwszych n liczb naturalnych. Jest nią np. liczba $10=1+2+3+4$, czy $45=1+2+\dots+9$. Jak znaleźć n -tą liczbę trójkątną – czyli równoważnie, jak znaleźć sumę pierwszych n liczb naturalnych? Z pomocą może przyjść następujący diagram:



Rys. 3.

Diagram jest skonstruowany w taki sposób, iż „nałożone” są tu na siebie dwie liczby

⁸¹⁸ Wang, H. *Theory...*, str. 132.

trójkątne reprezentowane przez odpowiednio ustawione kropki – w tym przypadku odpowiadające sumie pierwszy 5 liczb naturalnych. Z diagramu widać, iż kropki przedstawione na rysunku można policzyć na dwa sposoby – przez wykonanie mnożenia $5 \cdot 6$, bądź przez osobne zsumowanie kropek ciemniejszych i jaśniejszych. Otrzymujemy więc:

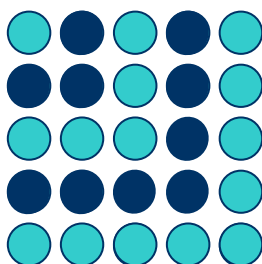
$$(1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5) = 5 \cdot 6$$

A stąd:

$$(1+2+3+4+5) = (5 \cdot 6) / 2 = 15$$

Diagram pozwala więc w tym przypadku wpaść na pomysł, czy uzmysłowić sobie, i w jakiś sposób zrozumieć ogólne własności liczb trójkątnych⁸¹⁹. Pojawia się tu znów pytanie, na ile taki diagram może służyć dowodowi twierdzenia ogólnego, podającego sumę pierwszych n liczb naturalnych dla dowolnego n . Do tej kwestii wrócę w dalszej części rozdziału.

W podobny sposób można przekonać się, iż suma kolejnych liczb nieparzystych (od 1) jest zawsze liczbą kwadratową (czyli kwadratem pewnej liczby naturalnej).



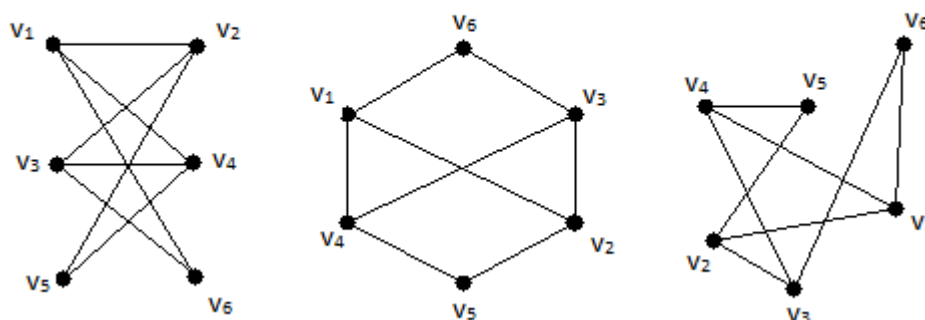
Rys. 4.

W tym przypadku diagram może, przy odrobinie spostrzegawczości, posłużyć w celu uzmysłowienia sobie, iż $1+3+5+7+9=25$. Może one również stanowić przyczynek do ogólnego dowodu twierdzenia łączącego liczby kwadratowe z

⁸¹⁹ Zwróćmy tu uwagę, iż sam termin „liczby trójkątne” sugeruje wizualizację tego typu liczb.

sumami liczb nieparzystych – bądź samemu być takim dowodem. Można też, inaczej rzecz ujmując, stwierdzić, iż mogą one służyć *odkryciu* pewnych zależności

Rozważmy dalej teorię grafów. Jak wspominałem w rozdziale ósmym, wiele własności matematycznych grafów odpowiada w naturalny sposób własnościom wizualnym. Dzięki tej odpowiedniości, dużo faktów dotyczących grafów można „odczytać” z diagramów, czy też – stają się one oczywiste dzięki samej jego obserwacji. Należy przy tym podkreślić, że wiele zależy tu od tego, w jaki sposób sporządzimy diagram dla danego grafu. Rozważmy na przykład trzy możliwe przedstawienia tego samego diagramu:



Rys. 5. Trzy przedstawienia tego samego grafu.

Z pierwszego z nich można „od razu” odczytać, iż graf jest dwudzielny; drugi diagram powoduje, że oczywistym jest, iż jest on grafem hamiltonowskim. Z trzeciego grafu trudno natomiast własności te odczytać w podobny sposób. Tutaj więc również istotna jest przemyślana konstrukcja diagramu. Dodajmy, iż użyteczność diagramów ogranicza się do niewielkich grafów – w przypadku grafów bardzo dużych (nie wspominając o grafach nieskończonych) reprezentacja przestrzenna staje się na ogół bardzo mało czytelna.

Jako wizualne uzasadnienia twierdzeń matematycznych można również uznać diagramy, które dostarczają „darmowych przejazdów” (*free ride*). Wystarczy tu przypomnieć diagramy Eulera, których sama konstrukcja pozwalała odczytać z nich nowe fakty. W podobny sposób uzyskiwaniu nowych informacji mogą także służyć diagramy Venn’a. Po naniesieniu na diagram dwóch założeń wnioskowania

sylogistycznego, wniosek można z tego diagramu po prostu „odczytać”. R. Murawski i W. Marciszewski piszą tu, iż „diagramy służyły Venn’owi nie tylko w celu ilustracji rozwiązań otrzymanych innym sposobem, ale stanowiły w istocie metodę rozwiązywania problemów logicznych”⁸²⁰.

Można dalej przywołać wizualizacje komputerowe. Również tu diagramy obrazują często sugestywnie konkretne twierdzenia matematyczne. O ile jednak powyższe diagramy zostały świadomie skonstruowane, aby obrazować odpowiednie tezy, wizualizacje komputerowe nie posiadają z góry znanego kształtu. W ten sposób wiele własności obiektów matematycznych staje się widoczna po wygenerowaniu odpowiedniej grafiki, czy – po wykonaniu eksperymentu komputerowego. Jak pisze Palais, „zdarza się dość nagminnie, iż dowód jakiegoś faktu matematycznego może być wpierw ‘zobaczony’, i dopiero w dalszej kolejności (podążając za wizualną ideą) możemy przedstawić logicznie niesprzeczny sformułowanie, co czasem jest bardzo trudnym zadaniem, wymagającym dużego (serious) intelektualnego wysiłku”⁸²¹.

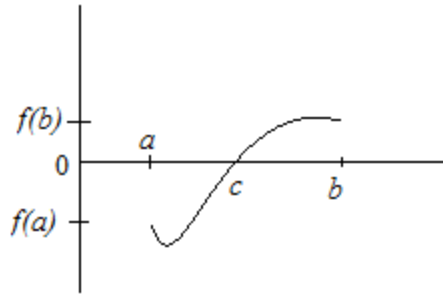
Warto również rozważyć, na ile diagram może stanowić dobre uzasadnienie dla twierdzeń analizy matematycznej. Przytoczę tu sztandarowe przykładowe twierdzenia, które wydają się być oczywiste, gdy nadać im interpretację graficzną. Pochodzi ono od Bolzano (twierdzenie podaję za J.R. Brownem)⁸²²:

Twierdzenie Bolzano: Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz f zmienia znak z ujemnego na dodatni (lub z dodatniego na ujemny), wtedy istnieje liczba c , taka, że $a < c < b$, oraz $f(c) = 0$.

⁸²⁰ Marciszewski, W., Murawski R., *Mechanization ...*, str. 158.

⁸²¹ Palais, R.S., *The Visualization...*, 655.

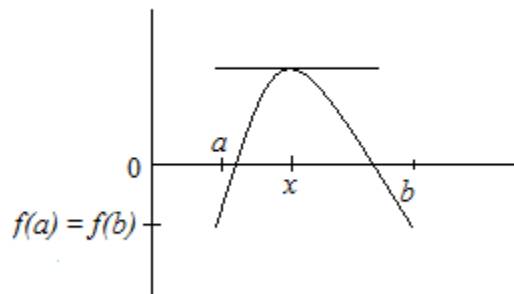
⁸²² Por. Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York, 1999 str. 26.



Rys. 6. Graficzna ilustracja (dowód?) twierdzenia Bolzano.

Innym przykładem, analizowanym przez Giaquinto, jest nie mniej elementarne twierdzenie Rolle'a. Jest on nieco bardziej skomplikowany od poprzedniego, ale przy odrobinie znajomości matematyki wydaje się być podobnie oczywiste co poprzednie.

Twierdzenie Rolle'a: Jeśli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, oraz różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to dla pewnego wartości x , takiej, że $a < x < b$, $f'(x) = 0$.

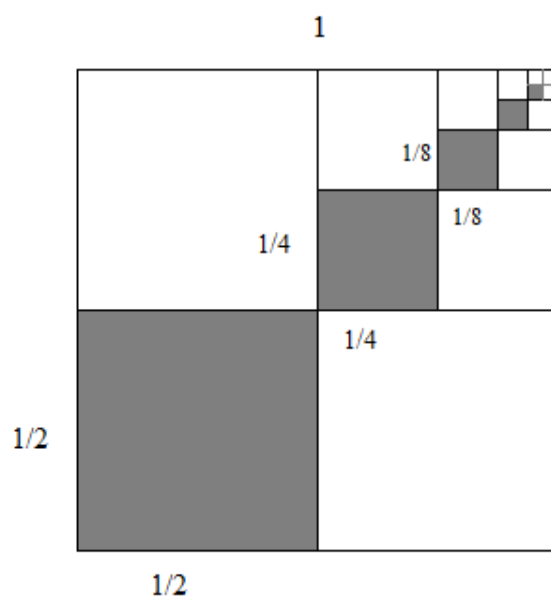


Rys. 7. Graficzna ilustracja (dowód?) twierdzenia Rolle'a.

Obserwując powyższe diagramy, prawdziwość wymienionych twierdzeń wydaje się być oczywista. Mówiąc najprościej, funkcja z pierwszego twierdzenia „musi” w którymś momencie przyjąć wartość c , a wykres drugiej z funkcji „musi” w którymś momencie być „płaski”. Dodam tu, iż J.R. Brown oraz M. Giaquinto, od

których pochodzą te przykłady, zupełnie inaczej interpretują funkcję uzasadniającą powyższych diagramów. Według pierwszego z filozofów, diagramy te można uznać za „okna” do platońskiego nieba. Według drugiego z kolei, są one zupełnie niewiarygodne jako źródło poznania w dziedzinie analizy matematycznej. Do stanowisk tych wrócę w dalszej części rozdziału.

Rozważmy tu jeszcze jedno interesujące rozumowanie z analizy matematycznej, tym razem nie korzystające z wykresu funkcji, ale odwołujące się do intuicji o obiektów geometrycznych. Odwołując się więc do poniższego diagramu, można łatwo przekonać się o podanej niżej zależności analitycznej, które nie jest sama w sobie oczywista.



Rys.8. Geometryczne uzasadnienie zapisanej poniżej zależności.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^{2n}) = 1/3$$

Można dodać, iż według P. Davisa, w analizie matematycznej można wymienić bardzo dużo diagramów, które same w sobie uzasadniają poszczególne twierdzenia matematyczne. Podaje on następujące przykłady:

- 1) jeśli podróżujemy z północnej półkuli na półkulę południową, musimy w którymś miejscu przeciąć równik
- 2) Lokalne ekstremum gładkiej (smooth) funkcji występuje tam, gdzie pochodna jest równa zero.
- 3) Funkcja gamma Eulera jest naprzemiennie wypukła i wklęsła pomiędzy całkowitymi ujemnymi liczbami⁸²³.

Na tym zakończę prezentację przykładów „dowodów rysunkowych”. Przykłady diagramów, które ukazują w prawie natychmiastowy sposób prawdziwość twierdzeń matematycznych można by dalej mnożyć – nie są to przypadki odosobnione. W tym miejsce przejdę jednak do omówienia kilku godnych uwagi ujęć rozumowań diagramowych.

11.3. Przegląd stanowisk odnośnie rozumowań i twierdzeń wizualnych

Przytoczone przez mnie przykłady mogą nasuwać pytania: czy diagram może stanowić wystarczające uzasadnienie dla niektórych twierdzeń matematycznych? I dalej: czy można mówić o specyficznym typie rozumowania, które należało przeprowadzić aby przekonać się o prawdziwości odpowiednich twierdzeń? W pierwszej kolejności omówię kilka stanowisk, dostarczających odpowiedzi na powyższe pytania. Każdy z przytoczonych autorów uważa, iż diagram wystarcza w jakimś sensie za uzasadnienie niektórych twierdzeń. W ramach każdego ze stanowisk nakreślone jest również w mniejszym lub większym stopniu pewne ujęcie poznania diagramowego w ogóle. Omawiam tu ujęcie P.

⁸²³ Davis, P., *Visual Theorems*, str. 338.

Davisa, wspólne stanowiska P. Borweina, i L. Jörgensona, oraz Barwise'a i Etchemendy'ego. W dalszej kolejności omawiam platońską koncepcję J.R. Browne'a, ujęcie poznania diagramowego A. Lemańskiej, oraz Z. Kulpy.

1) W artykule *Visual Theorems*, Philips Davis proponuje nadać terminowi „twierdzenie wizualne” pewne konkretne, choć zupełnie niestandardowe znaczenie. Rozważania Davisa koncentrują się jednak wokół wizualizacji komputerowych. Rozważa on twierdzenia wizualne w szerszym oraz węższym znaczeniu. W szerszym znaczeniu, twierdzeniami wizualnymi mogą być „wszystkie wyniki elementarnej geometrii na płaszczyźnie oraz geometrii brył, które wydają się intuicyjnie oczywiste”, jak np. omawiane powyżej dowody wizualne, dalej twierdzenia analizy matematycznej posiadające „intuicyjnie geometryczną bądź wizualną podstawę” czy wszelkie inne obrazy, z których wyciągnięte mogą być, prawie przez wgląd (*almoust by inspection*) jakieś wnioski matematyki czystej lub stosowanej⁸²⁴.

W węższym znaczeniu „twierdzeniami wizualnymi” są natomiast wyniki wspomnianych wizualnych eksperymentów komputerowych. W takim znaczeniu używa też przede wszystkim P. Davis tego wyrażenia. „Twierdzenie wizualne” w tym właśnie, węższym, znaczeniu to według Davisa „wizualne albo graficzne dane wyjściowe (*output*) programu komputerowego – zazwyczaj element rodziny takich danych wyjściowych – które oko organizuje w spójną rozpoznawalną całość, oraz które są w stanie inspirować tradycyjne pytania matematyczne, bądź też które przyczyniają się w jakiś sposób do naszego rozumienia bądź też do wzbogacenia jakiegoś matematycznego, bądź rzeczywistego stanu rzeczy (*situation*)”⁸²⁵.

Philip Davis zauważa ogromną złożoność i piękno, jakie mogą nieść z sobą wizualizacje komputerowe, w szczególności dzięki ukazywanym przez nie różnego rodzaju regularnościom. Cechują się one dodatkowo pewną stałością – przez to, że można je zawsze wygenerować w ten sam sposób i z tym samym wynikiem. P. Davis proponuje więc rozumieć twierdzenie wizualne jako: „przejście (*passage*) od

⁸²⁴ Tamże, str. 336.

⁸²⁵ Tamże, str. 333.

matematycznej iteracji do postrzeganej figury uchwycone i przedstawione w intuicji (*intuited*) we wszystkich swoich wyrażalnych i niewyrażalnych wizualnych złożonościach⁸²⁶.

Strukturę „twierdzenia wizualnego” można, przez analogię do zwykłych twierdzeń, przedstawić następująco:

Definicja (iteracja wykonana według odpowiedniego wzoru, generującego obraz komputerowy).

Dowód (uruchomienie programu na konkretnym komputerze).

Twierdzenie (para [iteracja wykonana na komputerze, wizualny obraz])⁸²⁷.

Jak zostało wspomniane powyżej, twierdzenie takie może inspirować nowe problemy matematyczne, każdy taki obraz-twierdzenie jest też elementem szerszej klasy obrazów, które mogą powstać przez np. modyfikacje pewnej stałej we wzorze służącym do generowania obrazu. Istotne jest to, iż ”twierdzenie wizualne” ma charakter częściowo intuicyjny – nie jest stwierdzane za pomocą zdania. Davis zadaje nawet pytanie, czy wszystko, co pojawia się na grafice komputerowej (będąc, jeżeli można tak powiedzieć, częścią twierdzenia) jest wyrażalne słowami? Jak widać, takie rozumienie pojęcia „twierdzenia” (a jednocześnie oczywiście dowodu) zupełnie odbiega od tego co się zazwyczaj przez nie rozumie. Zupełnie niestandardowo rozumiany jest tu też dowód – nie jest on świadomą aktywnością podmiotu poznającego, ale obliczeniem wykonanym przez komputer. Davis jest tego oczywiście świadom i wydaje się, że jego propozycja ma charakter nieco prowokacyjny. Davis pisze wreszcie, że jeśli przyjąć takie rozumienie terminu „twierdzenie”, to dodaje ono do tego terminu oryginalnego posmak – jego grecki rodowód.

2) Do wizualizacji komputerowych nawiązują również P. Borwein i L. Jörgenson w przytaczanym już artykule *Visible Structures in Number Theory*.

⁸²⁶ Tamże, str. 339.

⁸²⁷ Tamże, str. 340.

Również oni argumentują za tym, iż obraz komputerowy może stanowić dowód, podchodzą jednak do problemu w zupełnie inny sposób niż Davis. Twierdzeniami dowodzonymi wizualnie są, według nich, „tradycyjne” twierdzenia, a głównym przedmiotem ich rozważań jest pytanie, kiedy diagram można uznać za poprawny dowód takiego twierdzenia. Borwein i Jörgenson proponują rozważyć trzy konieczne, ale nie wystarczające warunki, jakie muszą spełniać wizualizacje, aby rozumowanie (czy jakiś obiekt) uznać za dowód:

- *Wiarygodność (reliability)* – środki, za pomocą dowód został przeprowadzony są wiarygodne a rezultat pozostaje taki sam przy każdym sprawdzeniu
- *Niesprzeczność* – środki, za pomocą dowód został przeprowadzony, oraz jego finalny rezultat nie są sprzeczne z innymi znanymi faktami, przekonaniem bądź dowodami
- *Powtarzalność* – dowód może być przedstawiony innym matematykom i przez nich potwierdzony

Autorzy *Visible Structures...* podkreślają, iż diagramom bardzo trudno spełnić wszystkie te warunki. Zwykle dowody formalne są zbudowane z uporządkowanych liniowo zdań, ściśle, oraz skonstruowane z uważnie dobranych terminów o jednoznacznie określonych znaczeniach. Aby móc równać się z dowodem formalnym, „wizualizacja musi zawierać dodatkowe mechanizmy oraz konwencje wykraczające poza podstawowy obraz (*base image*)”⁸²⁸. Również ona musi przedstawiać prezentowaną informację w ukierunkowany sposób, definiować oraz przedstawiać relacje pomiędzy badanymi obiektami. Nie chodzi tu przy tym jedynie o kopiowanie standardów dowodu formalnego. Stąd efektywna wizualizacja komputerowa powinna posiadać następujące charakterystyki:

- 1) *Dynamiczność*: reprezentacja powinna składać się z większej liczby obrazów, zmieniających się w zależności od jakiegoś parametru w celu wykazania szerszej klasy zachowań.

⁸²⁸ Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures ...*, str. 900.

- 2) *Ukierunkowanie*: powinna ona poprowadzić obserwatora „przez odpowiednie kroki w odpowiednim porządku” oraz przedstawiać „ścieżkę” przez informację, która stanowi materiał dowodowy (*case for the proof*)”.
- 3) *Elastyczność*: powinna wspierać własne badania osoby postrzegającej diagram, włączając w to np. poszukiwanie kontrprzykładów.
- 4) *Otwartość*: odpowiednie algorytmy, biblioteki oraz szczegóły języków programowania i sprzętowe powinny być dostępne do wglądu⁸²⁹.

Taka postać wizualnego rozumowania powinna, według Borweina i Jörgensona, umożliwić „prześledzenie argumentu przeprowadzonego na wizualny sposób, zbadanie wszystkich ograniczeń, kontrprzykładów, szczególnych przypadków i niezupełności (*incompleteness*)”⁸³⁰. W ten sposób można taki rozbudowany i precyzyjnie skonstruowane rozumowanie uznać za równie ścisłe co dowód formalny. Borwein i Jörgenson podkreślają przy tym, iż niewiele reprezentacji wizualnych spełnia takie wymogi i stąd niewiele z nich można uznać za konstytuujące dowód wizualny.

3) Kolejny ujęcie tego, czym może być „dowód wizualny” pochodzi od J. Barwise’a i J. Etchemendy’ego a zostało sformułowane w pracy *Visual information and valid reasoning*⁸³¹. Barwise i Etchemendy nie rozważają wizualizacji komputerowych, koncentrując się raczej na „zwykłych” diagramach matematycznych, postulując przy tym ich formalizację w duchu rachunków diagramowych.

Według autorów *Visual information...*, tradycyjna koncepcja dowodu, zgodnie z którą większość, bądź wszystkie rozumowania mają miejsce w języku jest błędna. Pozajęzykowa informacja używana jest w dowodach i rozumowaniach bardzo często. „są dobre powody, aby stwierdzić, że dużo, jeśli nie większość korzysta z

⁸²⁹ Tamże, str. 900.

⁸³⁰ Tamże, str. 900.

⁸³¹ Barwise, J., Etchemendy, J., *Visual information and valid reasoning*, w: *Logical reasoning with diagrams*, red. G. Allwein, J. Barwise, Oxford 1996.

jakiejs postaci wizualnych reprezentacji”⁸³². Co więcej, „wizualne formy reprezentacji mogą być ważne nie tylko jako heurystyki czy narzędzia używane w nauczaniu, ale jako pełnoprawne elementy dowodów matematycznych”⁸³³. Barwise i Etchemendy nie próbują oczywiście umniejszać wartości rozumowań używających jedynie reprezentacji językowych. Sprzeciwiają się jedynie doktrynie, zgodnie z którą reprezentacje wizualne nie mogą być pełnoprawnymi elementami rozumowań matematycznych. Celem ich rozważań jest więc „sformalizować rozumowania diagramowe tak, aby stały się nie mniej ścisłe niż rozumowanie dedukcyjne”⁸³⁴. Dodajmy, iż autorzy omawianego tekstu stworzyli diagramy system, który nazwali „Hyperproof”. Nie będę go tu omawiał, dalej skupię się jedynie na filozoficznych aspektach pracy jego twórców.

W celu stworzenia ram, w których można mówić o rozumowaniu diagramowym, a dokładniej rozumowaniu, które zawiera w sobie elementy diagramowe jako istotne i pełnoprawne części dowodów postulowali stworzenie teorii informacji. Barwise i Etchemendy planowali więc stworzyć „teorię dedukcji opartą na pojęciu informacji, która jest wystarczająco bogata, aby ocenić poprawność (*validity*) dowodów mieszanych, dowodów, w których korzysta się z wielu form reprezentacji. W tym zadaniu nie zamierzamy ograniczać naszej uwagi do żadnego konkretnego rachunku diagramowego; naszym celem jest rozwinięcie semantyczne analizy poprawnego wnioskowania, które nie jest w sposób nierozzerwalny powiązane z językowymi formami reprezentacji”⁸³⁵.

Zapowiadają, iż potrzebują w tym celu pojęcia „informacji oraz zawierania się jednej informacji w drugiej (*information containment*), które jest niezależne od postaci jej reprezentacji”⁸³⁶.

Przedstawmy mim to zręby takiej teorii, które zostały omówiony w cytowanym tu artykule. Barwise i Etchemendy wymieniają trzy sposoby na które „reprezentacje wizualne mogą być częściami poprawnych dowodów”

⁸³² Tamże, str. 14.

⁸³³ Tamże, str. 14.

⁸³⁴ Tamże, str. 16.

⁸³⁵ Tamże, str. 7.

⁸³⁶ Tamże, str. 19.

- 1) Wizualna informacja jest częścią ogólnej informacji, na podstawie której rozumiemy. Zadanie polega wtedy na wydobyciu tej informacji ze sceny wizualnej i wyrażenie jej w języku.
- 2) Wizualna informacja może być integralną częścią rozumowania. W takim rozumowaniu diagram i jego analiza jest integralną częścią rozumowania. Może to być przy tym również wizualizacja wewnętrzna
- 3) Wizualna reprezentacja może pełnić rolę w konkluzji rozumowania

Podkreślają, że wizualizacja drugiego rodzaju z wymienionych powyżej „odgrywa o wiele większą rolę w dowodach matematycznych niż jest to powszechnie uznawane”. Można więc mówić o rozumowaniach, czy wnioskowaniach wizualnych. Przez wnioskowanie Barwise i Etchemndy rozumieją przy tym zadanie wydobycia pewnej informacji, bądź uczynienie jej bezpośrednio dostępną, wyraźną (*extraction or making explicit*), która to informacja jest dana w sposób ukryty (*implicit*) w informacji już nam dostępnej⁸³⁷.

4) Warto przyjrzeć się dalej pracy polskiego badacza rozumowań diagramowych, Zenona Kulpy. Praca Kulpy skupia się na metodologicznych aspektach stosowania diagramów. Bardzo szeroko analizuje on problem ogólności rozumowań diagramowych. Dokładniej przyjrzę się ujęciu Kulpy w dalszej części rozdziału, tu chciałbym zaznaczyć jedynie ogólne ramy filozoficzne jego podejścia do omawianej tematyki, przedstawiając ją na tle stanowisk przedstawionych powyżej.

Przedmiotem badań Kulpy nie są wizualne twierdzenia, jako twierdzenia, dla których dowodu wystarczy sporządzić odpowiedni rysunek. Centralnym punktem jego rozważań są *rozumowania* diagramowe, czyli rozumowania odwołujące się w istotny sposób do diagramów. Kulpa podkreśla, że diagramy są (i zawsze były) ważnym nieformalnym narzędziem w rozumowaniach, są one jednak jako takie słabo zbadane. Dąży on więc do pokazania, iż „rozumowania diagramowe mogą być uczynione w równym stopniu wiarygodnymi i niezawodnymi (*dependable*) jak

⁸³⁷ Tamże, str. 20.

formuły, przy założeniu, iż poświęcimy nieco starań systematyzacji źródeł błędów diagramowych oraz odnalezieniu na nie środków zaradczych”⁸³⁸.

W centrum badań Kulpy nie leżą przy tym rachunki diagramowe. Formalizacja rozumowania diagramowego jest zagadnieniem godnym uwagi, jednak „nie jest ostatecznym celem badań nad diagramami, jako, że w praktyce rzadko używamy metod formalnych, niezależnie od tego, czy używamy diagramów, czy formuł”⁸³⁹.

Jak zatem można ogólnie ująć proces rozumowania w ujęciu Kulpy? Nie ujmuje on rozumowań diagramowych jako jakiegoś rodzaju natychmiastowych i nieanalizowalnych doświadczeń. Odwrotnie, uznaje, iż można je przedstawić jako w pełni systematyczne i ścisłe, posilające się konkretnymi technikami dowodowymi. Techniki te można ogólnie podzielić na dwa rodzaje. Pierwszym są metody przeniesione z logiki predykatów oraz zaadaptowane do warunków diagramowych; drugi rodzaj stanowią techniki typowe dla diagramów, które nie są spotykane w tradycyjnej logice. W każdym z przypadków, rozumowanie diagramowe posługuje się pewnym językiem wizualnym w celu kodowania i przetwarzania pewnych informacji, której treść jest w ostateczności wyrażalna w języku predykatów (nie ma więc jakiejś pozajęzykowej postaci). Diagramy są więc elementem standardowego rozumowania logicznego, nie mającego w jakiegoś specyficznie wizualnego, obrazkowego charakteru. Wizualny język pozwala jednak na reprezentację danych (założeń, twierdzeń, itd.), która ma wiele zalet: usprawnia rozumowanie, jest bardziej komunikatywna, itd.

W pracy *Wnioskowanie diagramowe* polski autor wyróżnia trzy podstawowe etapy wnioskowania diagramowego:

- **Kodowanie:** informacje początkowe (już znane lub udowodnione fakty, założenia) tworzące sformułowanie problemu wnioskowania, zostają zapisane w postaci diagramowej zgodnie z językiem wizualnym odpowiednim dla danej klasy problemów

⁸³⁸ Kulpa, Z., *Main Problems...*, str. 78.

⁸³⁹ Tamże, str. 77.

- **Przetwarzanie:** tak skonstruowany diagram podlega serii transformacji, wybranych z repertuaru transformacji dopuszczalnych dla danej klasy zagadnień (tak jak przy przekształcaniu formuł przy użyciu reprezentacji opisowych)
- **Dekodowanie:** pożądany rezultat przetwarzania (wniosek, tez twierdzenia) zostaje odczytany z przekształconego diagramu zgodnie z użytym językiem wizualnym i ewentualnie zapisany w jakiejś innej potrzebnej formie (np. w postaci formuły lub teksty w języku naturalnym)⁸⁴⁰

5) W dalszej kolejności chciałbym omówić, jak rolę diagramów w poznaniu matematycznym interpretuje Anna Lemańska. W swojej pracy *Zagadnienie obrazowości niektórych rozumowań w matematyce*, podaje ona wiele przykładów „dowodów obrazkowych”, czyli diagramów, które można rozważać jako wystarczający sposób uzasadniające dane twierdzenia. Autorka podaje kilka typów takich „dowodów obrazkowych”. Niektóre z nich nie są wystarczające jako dowód, choć dają niejasną sugestię dla jego przeprowadzenia. W innych przypadkach, dzięki diagramowi twierdzenie staje się oczywiste – podczas, gdy dowód dedukcyjny jest bardzo skomplikowany. Jest tak w przypadku twierdzenia Jordana, które głosi, że „każda krzywa zwykła zamknięta na płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym ograniczeniem. Teza tego twierdzenia nie wzbudza żadnych wątpliwości w nikim, kto rozumie, co to jest krzywa”⁸⁴¹. Niektóre diagramy są natomiast – gdy traktować je jako „dowód obrazkowy” – formalnie bez zarzutu. Jest tak, według A. Lemańskiej, w przypadku przytoczonego przez mnie wcześniej „obrazkowego” dowodu twierdzenia Pitagorasa⁸⁴². Anna Lemańska zaznacza również, iż niektóre rozumowania obrazkowe, nie podlegają, według A. Lemańskiej, formalizacji. Można tu wspomnieć o podchodzącym od Lakatosa geometrycznym rozumowaniu, służącym wykazaniu, iż $V + F - E = 2$, czy też o twierdzeniu Gomory’ego⁸⁴³.

⁸⁴⁰ Kulpa, Z., *Wnioskowanie diagramowe*, str. 45.

⁸⁴¹ Lemańska, A., *Zagadnienie obrazowości...*, str. 116.

⁸⁴² Tamże, str. 114

⁸⁴³ Twierdzenie to głosi, iż „jeżeli z szachownicy usuniemy dowolne białe pole i dowolne czarne, to szachownicę można pokryć 31 kostkami domina” (tamże, str. 116). Twierdzenie staje się oczywiste dzięki krótkiej analizie odpowiedniego rysunku.

Diagramowa metod dowodzenia twierdzeń wykracza, według Lemańskiej, poza schemat dedukcyjnej metody matematycznej. Tym, co wyróżnia rozumowania (i dowody) diagramowe jest w szczególności odwołanie diagramów do *treści*. W rozumowaniach dedukcyjnych treść nie odgrywa żadnej roli, podczas gdy „obrazowość rozumowań zakłada, że rozumiemy treść kryjącą się za formułami matematycznymi”⁸⁴⁴. Zawartość treściowa pozwala nam z kolei odnieść się do *prawdziwości* zdań matematycznych, którą można „odczytać” z odpowiednich diagramów. W słowach A. Lemańskiej.: „ważne przyjrzenie się rysunkowi czy diagramowi wystarczy, aby przekonać się o prawdziwości danego stwierdzenia. Prawdziwość twierdzenia jest widoczna. Nie trzeba jej uzasadniać przez poprzez rozumowanie czy – z formalnego punktu widzenia – poprzez dokonywanie przekształceń odpowiednich formuł”⁸⁴⁵. Ostatecznie wydzwięk ujęcia poznania diagramowego A. Lemańskiej jest więc platoński.

Dodajmy, że w pracy *Eksperyment komputerowy....* A. Lemańska interpretuje w duchu realizmu w matematyce również status wizualizacji komputerowych. Argumentuje ona, że „eksperymenty” komputerowe można traktować jako badanie obiektywnej wobec nas rzeczywistości matematycznej. Jeśli przyjrzeć się sposobowi, w jaki korzystamy z komputera uprawiając matematykę, można według A. Lemańskiej odnieść wrażenie, że prowadzimy jakiś dialog z czymś wobec nas zewnętrznym. Lemańska podkreśla również, iż przystępując do sporządzenia wizualizacji komputerowej, matematyk często nie przeczuwa, jaki kształt będzie miał sporządzony diagram – wynik eksperymentu może być zaskakujący. Mimo, że mamy wpływ na określenie konstrukcji diagramu, to np. zbiór Mandelbrota „wydaje się być w swoim istnieniu niezależny od matematyka”⁸⁴⁶. Jak pisze polska filozof matematyki, „komputer pozwala matematykowi, podobnie jak teleskop astronomowi czy mikroskop biologowi, na głębszy wgląd w badaną rzeczywistość matematyczną”⁸⁴⁷. Wszystko to może „świadczyc o obiektywnym istnieniu świata przedmiotów matematycznych,

⁸⁴⁴ Tamże,, str. 124.

⁸⁴⁵ Tamże, str. 122.

⁸⁴⁶ Lemańska, A., *Eksperyment komputerowy...*, str. 200.

⁸⁴⁷ Tamże, str. 200.

których własności odkrywamy, a które są niezależne od nas, przekraczają nasze intuicje i doświadczenia”⁸⁴⁸.

Dodajmy przy tym, że diagram nie jest, zdaniem A. Lemańskiej, dokładnym odbiciem przedmiotów matematycznych – jest tak chociażby dlatego, że na ekranie monitora można przedstawić jedynie skończoną ilość obiektów, czy „pikseli”. Rzeczywistość matematyczna jest na ekranie monitora komputera modelowana.

6) Podobnie, jak Anna Lemańska, wizualizację analizuje w duchu realizmu matematycznego James Robert Brown. Wydaje się przy tym, iż interpretacja angielskiego filozofa matematyki jest tu jeszcze bardziej radykalna. Według J.R. Browne'a, „niektóre obrazki dostarczają autentycznych (*genuine*) dowodów i są równie uprawnione (*legitimate*) jak tradycyjne dowody werbalno-symboliczne”⁸⁴⁹. Brown wychodzi tu ze stanowiska platońskiego, właściwie go nie uzasadniając; jak sam podkreśla, jego celem jest więc pokazanie, że "diagramy grają kluczową rolę w dowodach *oraz*, że istnieje platońskie tego wyjaśnienie"⁸⁵⁰.

Stojąc na stanowisku realizmu matematycznego Brown utrzymuje, że twierdzenia matematyczne są prawdziwe, bądź fałszywe niezależnie od aktywności poznawczej ludzi, a przedmiot matematyki jest obiektywny i pozazmysłowy. Twierdzenia matematyczne nie są więc w szczególności prawdziwe z tego powodu, iż podany został dla nich dowód. Dostęp do obiektywnego świata prawd matematycznych możemy osiągać na różne sposoby – jedną z nich jest diagram. Diagram jest typem języka, czy notacji, która posiada swoje wady oraz zalety – „różne notacje – różne formy reprezentacji – wydobywają różne aspekty wspólnego przedmiotu (*subject matter*)”⁸⁵¹. Nie ma przy tym powodu by sądzić, iż diagramy zapewniają dostęp do świata platońskiego w mniejszym stopniu niż symbole. Rozwój każdego typu notacji jest przy tym poprzedzony znajomością obiektów, których ta notacja dotyczy. Znajomość tą nią uzyskujemy nie przez analizy językowe, ale przez intuicję.

⁸⁴⁸ Tamże, str. 201.

⁸⁴⁹ Brown, J.R., *Naturalism, Pictures...*, str. 66.

⁸⁵⁰ Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction...*, str. 39.

⁸⁵¹ Tamże, str. 81.

Jako przykład analizuje J.R. Brown wspomniane już wcześniej twierdzenie Rolle'a. Autor *Naturalism, pictures and platonic intuitions* podkreśla, że niesłusznym, a nawet absurdalnym byłoby twierdzić, iż matematycy nie wiedzieli, iż twierdzenie Rolle'a zanim udowodnił je Bolzano: "rysunek geometryczny daje nam bardzo mocne przesłanki aby być przekonanim o prawdziwości tego wyniku (*for believing the result*) w sposób zupełnie niezależny od analitycznego dowodu. Korzystając jedynie z rysunku, możemy być co tego wyniku pewni – jeśli możemy być pewni czegokolwiek"⁸⁵². Można więc mówić o dwóch niezależnych sposobach przekonania się o (obiektywnej) prawdziwości twierdzenia Rolle'a – dowód analityczny i diagram. Co więcej, Brown uważa, iż diagram jest metodą bardziej wiarygodną – dowód analityczny przyjmujemy między innymi dlatego, iż to, co on wykazuje, jest zgodne z wcześniejszą wiedzą otrzymaną za pomocą diagramu⁸⁵³.

W przypadku niektórych diagramów, sama ich obserwacja wystarcza w celu uzasadnienia odpowiednich twierdzeń matematycznych. Brown pisze tu w dość chwytliwy sposób, iż "niektóre 'obrazki' (pictures) nie są w rzeczywistości obrazkami, ale oknami do platońskiego nieba"⁸⁵⁴. Jak jednak możliwe jest osiągnięcie wiedzy o obiektach platońskich w ten sposób? Jak pogodzić fizyczną charakterystykę diagramu, z platońską interpretacją epistemologii i ontologii matematyk? Przypomnijmy, iż z podobnym problemem borykał się Platon.

W swoim platońskim ujęciu epistemologii diagramu, Brown odwołuje się do analogii pomiędzy percepcją a intuicją platońską. Taka analogia była, jak uważa kanadyjski filozof matematyki, obecna w wielu Rzeczywiście, niektórzy platonicy porównywali poznanie platońskiej rzeczywistości do poznania świata fizycznego. Znany matematyk o poglądach platońskich, Charels Hermite (1822-1901), twierdził, iż obiekty matematyki istnieją w sposób obiektywny, „my zaś odnajdujemy je lub odkrywamy oraz budujemy je, tak jak to robią fizycy, chemicy i zoologowie”⁸⁵⁵. Analogię pomiędzy percepcją a postrzeganiem pozafizycznych obiektów matematyki przeprowadzał też czasem Kurt Godel.

⁸⁵² Tamże, str. 28.

⁸⁵³ Tamże, str. 29.

⁸⁵⁴ Tamże, str. 39.

⁸⁵⁵ Barrow, J., *II razy drzwi*, Warszawa 1996, str. 315.

Brown nie twierdzi jednak, iż diagramy dają nam bezpośredni dostęp do świata platońskiego. Rolę diagramów w postrzeganiu obiektów matematycznych porównuje do roli percepcji wzrokowej w badaniach rzeczywistości fizycznej. Fizyk nie widzi bezpośrednio (tzn. za pomocą zmysłu wzroku) wielu obiektów, które bada – atomów, pól elektromagnetycznych, czy z drugiej strony obiektów takich, jak wnętrze słońca. O niektórych z nich może wnioskować na podstawie stworzonej teorii, a niektóre może oglądać np. pod mikroskopem. Można powiedzieć, iż diagram jest również, według J.R. Browne'a narzędziem, którym posługujemy się w celu poznania, przez które nie widzimy obiektów matematycznych samych w sobie, ale jedynie jakieś ich odbicie. Diagram nie reprezentuje więc obiektów matematycznych na mocy podobieństwa strukturalnego pomiędzy nimi (diagramy teorioliczne reprezentujące analizowane powyżej nie mają w żadnym razie struktury izomorficznej do zbioru liczb naturalnych – choćby z tego powodu, iż są skończonymi obiektami). Istota funkcji epistemicznej diagramów nie polega na tym, że *reprezentują* obiekty matematyczne w taki, czy inny sposób. Tak, jak teleskop pomaga nieuzbrojonemu oku, tak "diagramy są instrumentami (*rather than representations*), które wspomagają nieuzbrojone oko"⁸⁵⁶.

Według Browne'a możemy mówić z jednej strony o percepcji zmysłowej, z drugiej natomiast o intuicji matematycznej. Są one do siebie podobne – „widzimy diagram (percepcja zmysłowa), który przywołuje (*induces*) intuicję (percepcja matematyczna) czegoś zupełnie innego”⁸⁵⁷.

Podsumowując, diagramy są według Browne'a narzędziami służącymi w poznaniu obiektywnie istniejących obiektów matematycznych. Dają one poznanie pośrednie i niedoskonałe, uruchamiają jednak za pośrednictwem percepcji zmysłowej intuicję platońską.

⁸⁵⁶ Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction...*, str. 39

⁸⁵⁷ Tamże, str. 40.

11.4. Wizualny wymiar rozumowań i dowodów matematycznych – dyskusja

W niniejszym podrozdziale wróć do postawionych wcześniej pytań: czy diagram może stanowić wystarczające uzasadnienie dla niektórych twierdzeń matematycznych? I dalej: czy można mówić o specyficznym typie rozumowania, odmiennym od zwykłych rozumowań wspartych wyłącznie przekształcaniem symboli?

Spróbujmy odpowiedzieć najpierw na drugie z postawionych pytań. Czym różni się od zwykłych rozumowań? W jaki sposób przebiegają i czemu zawdzięczają swoją skuteczność? Spróbujmy więc zastanowić się, jak można rozumieć kategorię rozumowania diagramowego:

1) Rozumowanie diagramowe to takie rozumowanie, w którym któryś z kroków odwołuje się do wizualnych, fizycznych własności diagramu. Inaczej mówiąc, korzystamy tu w jakiś sposób z danych wizualnych (*visual evidence*) jako materiału dowodowego. Niektóre kroki takiego rozumowania – albo sama teza – są więc w pewnym sensie „odczytane” z diagramu w jakiś usystematyzowany sposób

Zadajmy więc pytanie: w jaki sposób możemy „odczytać” wynik z diagramu? Odwołując się do powyższych rozważań, można wymienić tu następujące możliwości

- a) Rozważając diagram możemy odwołać się do strukturalnego podobieństwa pomiędzy nim a reprezentowanym przezeń przedmiotem. Na własność strukturalnego podobieństwa nacisk kładli Barwise i Etchemendy. Jest to możliwe w szczególności w przypadku diagramów dyskretnych, w przypadku których własności wizualne odpowiadają bezpośrednio własnościom matematycznym. Jest tak np. w przypadku teorii grafów, czy teorii krat.
- b) Tezy matematyczne można „odczytać” bezpośrednio z diagramu, jeśli diagram pozwala na tzw. „darmowy przejazd”, tzn. kiedy sama jego konstrukcja umożliwia

pojawienie się na diagramie informacji, które (na mocy odpowiedniości pomiędzy własnościami wizualnymi i matematycznymi diagramu), które umożliwiają formułowanie nowych twierdzeń. Wyniki te otrzymujemy, jak piszą Larkin i Simon, przy bardzo niewielkim wysiłku; według nich, w tym przypadku „diagram i oko ludzkie dostarczają, zerowym kosztem”⁸⁵⁸

2) Rozumowania diagramowe można rozważać w kontekście faktu, iż na diagramie można zawrzeć dużo informacji „na raz”. Rozumowania diagramowe mogą być w takim sensie syntetyczne, całościowe i nieliniowe. Z drugiej strony fakt, że na diagramie zawarty jest dużo informacji, powoduje też, iż jego postrzeganie, typ poznania z nim związany może być różnorodny. Dobrze ujmują to Borwein i Jorgenson pisząc, iż w przypadku diagramów „ścieżka, którą podążamy w analizie informacji (*the path through the information*) jest zazwyczaj niedookreślona, pozostawiając oglądającemu ustalenie, co jest ważne (oraz co nie jest) oraz w jakim porządku zależności powinny być oceniane”⁸⁵⁹. Dodajmy, iż takie rozumowanie ma nieliniowy charakter.

3) Rozumowania diagramowe to rozumowania dające natychmiastowe poznanie dzięki kontaktowi z diagramem. Ten aspekt rozumowań diagramowych związany jest z poprzednim. Zwraca na niego uwagę wielu filozofów. Różne są natomiast interpretacje źródła tej natychmiastowości. Według Browne’a wynika ona z osiągnięcia dostępu do „platońskiego nieba”. Van Kerkhove podkreśla również psychologiczne znaczenie natychmiastowości „psychologiczny efekt ‘concreteness i natychmiastowości’, odczynie bliższego związku z teorią, w porównaniu do browsing through ciągi symboli i liczb” jest znacznie zwiększone dzięki komputerom⁸⁶⁰. Ladoslav Kvasz przeciwstawiał z kolei doświadczenie wizualne doświadczeniu ślepego, który wykonuje kolejno wyuczone kroki, całościowemu i bezpośredniemu poznaniu wizualnemu.

⁸⁵⁸ Za: Shimojima, A., *Tutorial...*, slajd 79.

⁸⁵⁹ Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures ...*, str. 899.

⁸⁶⁰ Van Kerkhove, B., *Aspects...*, str. 301.

4) rozumowanie, w których diagram pojawia się jako istotny element, do którego odnoszą się niektóre kroki dowodowe. Takie rozumowanie rozważał na przykład Kulpa. Rozumowania diagramowe w jego ujęciu traktują diagram jako formę reprezentacji zwykłych obiektów matematycznych – nie posiadają one więc jakiegoś pozajęzykowego charakteru, pozwalając jedynie w systematyczny sposób usprawniać zwykle rozumowania diagramowe.

5) rozumowanie związane z któryś z rachunków diagramowych. Rozumowanie takie nie posiada wielu charakterystyk tych wymienionych powyżej. Formalizacja rozumowań, czy wnioskowań, diagramowych ma na celu ich automatyzację. Dowód staje się więc ciągiem diagramów (oraz być może również zdań), w którym każdy kolejny element w jasno określony sposób wynika z wcześniejszego. Ma on więc charakter w pełni liniowy (może ewentualnie mieć strukturę drzewa) Nie ma tu więc miejsca na natychmiastowość, całościowość poznania, czy szerzej – nie jest tu obecny element rozumienia i interpretowania treści wizualnej.

6) Przez rozumowanie diagramowe można wreszcie rozumieć takie, w trakcie którego pojawia się jakikolwiek typ myślenia wizualnego. Jest to bardzo szerokie ujęcie, nie konkretyzujące roli diagramu w rozumowaniu. Można tu również powiedzieć, iż rozumowanie diagramowe w tym sensie korzysta w jakiś sposób z treści, które łączymy z pojęciami. Rozumowania takie mogą korzystać z wielu operacji, które możemy wykonywać w intuicji przestrzennej. Operacją taką może być na przykład zmiana sposobu w jaki widziany jest (statyczny) diagram, czy też zmiana obiektu, na którym koncentrujemy uwagę (aspect shifting)⁸⁶¹. Za pomocą takiej operacji, możemy powiązać pewne fakty i tym samym przekonać się co do danego twierdzenia matematycznego. Dwa z analizowanych w tej pracy przykładów można uznać za przykłady takiej operacji. Można tu wymienić ostatni z diagramów analizowanych przez Menona (rys 1d w rozdziale 1). Każdy z czterech „wewnętrznych” trójkątów na tym diagramie można postrzegać jako połowa mniejszego kwadratu, bądź ćwiartkę większego (co pozwala przekonać się

⁸⁶¹ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, 261.

o prawdziwości analizowanego twierdzenia). Również analizowany w tym rozdziale przykład z teorii liczb można rozważać jako zastosowanie „zmiany aspektu”.

Powyższe zestawienie jest tylko próbą wyróżnienia specyficznych cech rozumowań diagramowych. Nie twierdzę, iż jest wyczerpująca, oraz nie twierdzę, iż każdy typ analizy diagramu podpada pod któryś z powyższych punktów. Rozważmy na przykład analizowane powyżej diagramy teorioliczbowe. Czy w ich przypadku odwołujemy się do wizualnych danych zmysłowych jako materiału dowodowego? Czy można mówić tu o poznaniu natychmiastowym? Odpowiedź na te pytania nie jest jednoznaczna. Wydaje się jednak, że większość rozumowań opartych o diagramy posiada w jakimś stopniu którąś z powyżej wymienionych własności.

Rozważmy dalej, jak należy ocenić możliwość istnienia twierdzeń wizualnych? Jak wspominałem, jest to najbardziej kontrowersyjny aspekt rozważań nad poznaniem diagramowym. W moim przekonaniu kwestia ma charakter raczej konwencjonalny: to, czy uznamy możliwość istnienia dowodów wizualnych zależy od tego, jak określimy warunki akceptowalności dla dowodów, czy inaczej mówiąc – co rozumiemy przez „dowód”. Można na przykład przyjąć koncepcję Davis’a, co wydaje się jednak rozwiązaniem zupełnie arbitralnym i nie wnoszącym wiele nowego. Nieco silniejsze warunki stawiają twierdzeniom i dowodom wizualnym Borwein i Jorgenson.

To, jaki diagram uznamy za wystarczający dla wykazania danej tezy zależy od naszej uprzedniej wiedzy. Interpretacja własności wizualnych diagramu, ocena i wydzielenie tych własności, które mogą istotne dla rozumowania z pewnością są od takiej wiedzy uzależnione.

Zauważmy, iż w większości omawianych przeze mnie przykładów, diagram *rzeczywiście wystarcza* do pojawienia się przekonania o prawdziwości twierdzenia. Podanie dowodu staje się wtedy już tylko formalnością. W tym sensie – tzn. o ile diagram sam w sobie wystarcza do przekonania się o prawdziwości twierdzenia – są diagramy dowodem.

To, czy uznamy diagram za dowód zależy też od dodatkowych założeń filozoficznych. W ujęciu Browne'a diagram jest oknem na świat platoński, nie ma więc powodu by nie uznać, iż diagram może być metodologicznie poprawnym narzędziem poznania (dodajmy, że platonizm jest ogólnie „liberalny” metodologicznie stanowiskiem, co podkreśla sam Brown).

Każde rozumienie „dowodu wizualnego”, czy „twierdzenia wizualnego” wymaga rozszerzenia rozumienia dowodu. Jak podkreślałem powyżej, nie można wykluczyć takiej możliwości. Przecież to, jaki obiekt (tekst, czy tekst wraz z towarzyszącym diagramem) uznamy za dowód jest w dużym stopniu uwarunkowane społeczne. Warto tu na koniec dodać, iż niezależnie, jak rozumiemy „twierdzenie wizualne”, przykładów takich twierdzeń jest relatywnie niewiele. Wiele z nich nie wytrzymuje analizy krytycznej, oraz ograniczone co do swojego zasięgu i stopniu, w jakim podlegają uogólnieniu. Treść twierdzenia nie jest w takich przypadkach na ogół intersubiektywnie komunikowalna, pozostając zależną od jednostki, jej wiedzy i umiejętności.

11.5. Rozumowania diagramowi a dychotomia pojęcia/intuicja

Warto rozważyć dalej następujące pytanie: czy można mówić o rozmowaniach diagramowych jako obywatycznych się bez pośrednictwa pojęć? W kolejnych akapitach spróbuję wykazać, że odpowiedź na to pytanie brzmi „nie”. Każde rozumowanie – nawet oparte na diagram nie opisany żadnymi symbolami, jak drugi z rozważanych w rozdziale,

Po pierwsze, wielu badaczy podkreśla, iż diagram nie może generować wartościowego poznania matematycznego bez odpowiedniego przygotowania pojęciowego. Zwracają na uwagę na przykład Brating i Pejlare w pracy *Visualizations in mathematics*. Uważają oni, iż „aby dostrzec (see) matematykę w wizualizacji, musimy w oczywisty sposób mieć pewną wiedzę matematyczną, aby wiedzieć czego szukać”⁸⁶².

To, co jak piszą autorzy omawianego tekstu, leży „między wierszami” w

⁸⁶² Brating, K., Pejlare, J., *Visualizations...*, str. 350.

rysunku, może być rozumiane jedynie przez kogoś, kto ma odpowiednie przygotowanie i doświadczenie. „znaczenie wizualizacji nie jest ujawnione przez samą tą wizualizację (...) nie żyje one ‘własnym życiem’”⁸⁶³. Nie wystarcza sam rysunek, nie żyje on „własnym życiem” - potrzebny jest odpowiednia wiedza i idące za nią zasób pojęć, aby diagram w odpowiedni sposób zinterpretować. Podsumowując, Bratang i Pejlare piszą, iż „jeśli posiadamy wystarczająco dużo doświadczenia i znajomości teorii matematycznej, możemy nadać znaczenie temu, co niewypowiedziane”⁸⁶⁴.

Również Kulpa podkreśla, że prawie wszystkie wnioskowania diagramowe są zasadniczo hybrydowe. Słów i oznaczeń literowych używa się „choćby po to, by zapisać wniosek w innej postaci, a często po to, by pomóc w zrozumieniu wyводу lub w uniknięciu niektórych błędów”⁸⁶⁵. Kulpa zaznacza, iż w przypadkach takich, jak „obrazkowy” dowód twierdzenia Pitagorasa, „tekstowe etykiety na diagramie nie są niezbędne do przeprowadzenia wnioskowania”⁸⁶⁶. Możemy więc posłużyć się „czystym” diagramem, w samym rozumowaniu używając jednak odpowiedniego aparatu pojęciowego. Koniec końców jednak, „lansowana czasem idea tzw. ‘dowodów bez słów’ w swej czystej postaci nie wydaje się zbyt praktyczna”⁸⁶⁷.

Można przywołać tu również innych autorów. Davis, który broni idei „twierdzeń wizualnych”, podkreśla, że większości rozumowań diagramowych nie byłaby możliwa do wykonania bez odpowiednich pojęć. Dodajmy wreszcie, iż powyższe rozważania zgodne są z filozofią matematyki Kanta. Wystarczy przywołać znany slogan z *Krytyki czystego rozumu*: „myśli bez treści naocznej są puste, dane naoczne bez pojęć – ślepe”. Zarówno naoczność, jak i pojęcia są nieodłącznymi elementami każdego poznania matematycznego. Kant nie uważał, aby w matematyce zachodziły rozumowania pozapojęciowe. Dokładniej, twierdził on, iż poznanie matematyczne jest poznaniem poprzez konstrukcję pojęć; pojęcia muszą więc być więc przedstawione w czystej naoczności – sama naoczność nie

⁸⁶³ Tamże, str. 350.

⁸⁶⁴ Tamże, str. 351.

⁸⁶⁵ Kulpa, Z., *Main Problems...*, str. 79.

⁸⁶⁶ Tamże, str. 80.

⁸⁶⁷ Tamże, str. 82.

może jednak być podstawą do uzyskania jakiegokolwiek poznania, w szczególności do sformułowania jakiegokolwiek sądu.

Tezę o pozapojęciowym charakterze bronią Barwise oraz Etchemendy. Jak wspominałem, wykresy i rysunki są dla nich pozajęzykowymi formami reprezentacji, z którymi związane są rozumowania o charakterze pozajęzykowym oraz pozalogicznym. Myśl ta nie jest jednak bliżej objaśniona. Teoria informacji, którą formułują jest obiecująca, nie została jednak w omawianej przeze mnie pracy rozwinięta poza ogólne postulaty. Również Mancosu podkreśla, że jeśli tezę Barwise'a i Etchemenygo jest, że „istnieją postaci porpawnego (valid) rozumowania (wizualnego bądź diagramowego), które nie mogą być wyrażone w postaci językowej, to twierdzę, iż (positive developments) wspomniane powyżej nie robią zupełnie nic co wykazywałoby tą tezę”⁸⁶⁸

Dodajmy, iż rozważania te zgodne są z niedookreślonością diagramów. Rysunek nie opatrzony żadnymi komentarzami matematycznymi wydaje się nie mieć matematycznego znaczenia, tzn. nie desygnuje żadnego obiektu. Skoro rysunki „same w sobie” nie oznaczają (zazwyczaj) jednoznacznie określony obiekty, to każde rozumowanie musi zawierać przynajmniej pewien minimalny element językowy: interpretację „matematyczną” fizycznych charakterystyk diagramu. Warto to również przywołać (co czynią również Bråting i Pejlare) rozróżnienia Klein'a pomiędzy intuicją naiwną oraz wzmocnioną. Przypomnijmy, że ta pierwsza była niedokładną i nie zawsze wiarygodną władzą poznawczą opierająca się na samych danych zmysłowych, podczas gdy ta druga, bazując na naiwnej intuicji, korzysta z matematycznych definicji i aksjomatów. Dopiero wzmocniona intuicja, zdaniem m.in. Kleina, czy Poincarego może dać nam poznanie matematyczne. Każde rozumowanie opierające się na intuicjach nabiera więc sensu matematycznego dopiero, gdy jest przeprowadzone przy użyciu pojęć.

Zwróćmy dalej uwagę, iż również rozumowania oparte na „darmowych przejazdach”. Jeśli osoba obserwująca diagram ma zinterpretować pewną informację i wyrazić ją w języku, musi mieć jakąś wyjściową wiedzę. Diagramy o własności FR nie dają więc jakiegokolwiek pozapojęciowej wiedzy, czy wglądu (co jest

⁸⁶⁸ Mancosu, P., *Visualisation in Logic...*, str. 24-25.

zgodne z moimi wcześniejszymi ustaleniami).

Bez wątpienia pewien wymiar pracy z diagramem ma charaktery pozajęzykowy. Można tu wymienić choćby estetyczny wymiar doświadczenia wizualnego. Jednak każde rozumowanie diagramowe musi opierać się, według mnie, przede wszystkim ma analizie pojęciowej – choć być może wspartej przez diagram.

Dalej chciałbym przyjrzeć się kolejnemu istotnemu pytaniu: czy symboliczny i diagramowy wymiar rozumowań matematycznych można wyraźnie oddzielić, jako na przykład pochodzący z różnych źródeł poznawczych? W moich dalszych rozważań spróbuję pokazać, że jest to trudne, a w każdym razie na pewno, jeśli podział taki miałby mieć ostry, dychotomiczny, charakter.

Przypomnijmy najpierw po raz kolejny, iż trudno mówić o rozumowaniach „czysto intuicyjnych”, tzn. nie odwołujących się do pojęć. Zwracali na to uwagę również wcześniej omawiani filozofowie. Intuicja wzmocniona Kleine’a nie jest pozapojęciową władzą poznawczą. Jest ona w istocie efektem połączenia „surowych” danych zmysłowych i ścisłych pojęć matematycznych. Intuicja naiwna nie daje sama w sobie poznania matematycznego. W tym kontekście trudno więc mówić o roli samej intuicji w poznaniu matematycznym – rola pierwiastka wizualnego i pojęć jest tu więc niemożliwa do rozdzielenia. Również u Peirce’a trudno wyznaczyć granicę pomiędzy pojęciowym i intuicyjnym wymiarem poznania matematycznego (jak zresztą wspominałem, pojęcie intuicji nie gra w jego filozofii większej roli). Każdy diagram matematyczny powinien zawierać symbole, tzn. reprezentuje, albo powinien reprezentować zarówno jako ikona, indeks jak i symbol.

Wzajemne przenikanie się typów myślenia (i rozumowania) opartych na diagramach i pojęciach dobrze ukazują rozważania Marcusa Giaquinto, którym się dalej bliżej przyjrzę. Giaquinto stawia ogólny problem: w jaki sposób można dokonać podziału typów myślenia w matematyce, który uwzględniłaby wyróżnioną pozycję wizualizacji? Stwierdza on, iż zazwyczaj mówi się o dwóch typów myślenia – algebraicznym i geometrycznym. Pojawia się pytanie, jak charakteryzować tę różnicę między nimi? Według Giaquinta nie powinno się tu

mówić o dychotomii, ale raczej o spektrum różnych form myślenia – pomiędzy tym bardziej przestrzennym, a tym symbolicznym.

Podziałem, który ma w większym stopniu naturę dychotomiczną byłby według niego podział na *myślenie przestrzenne* i *myślenie nie-przestrzenne*. Jednak tu również pojawiają się trudności. Jak pisze Giaquinto, „nie posiadamy żadnego operacyjnego kryterium, które pozwalałoby decydować którego rodzaju jest ten czy tamten przykład matematycznego myślenia; w zastępstwie kierujemy się subiektywnymi odczuciami”⁸⁶⁹.

Zazwyczaj podkreśla się, iż myślenie algebraiczne jest symboliczne, a myślenie geometryczne jest przestrzenne. Jednak liczne, omawiane tu, rozważania zawarte w *Visual Thinking in Mathematics*, wskazują, że pierwiastek przestrzenny jest obecny również w arytmetyce, czy algebrze. Giaquinto stwierdza więc, że „myślenie symboliczne jest rodzajem myślenia przestrzennego”⁸⁷⁰. Być może najbardziej adekwatnym rozróżnieniem byłoby rozróżnienie na myślenie przy pomocy diagramów i myślenie przy pomocy symboli (*thinking with diagrams and thinking with symbols*). Rzeczywiście, „wydaje się istnieć kontrast (*contrast*) pomiędzy myśleniem przy użyciu diagramów oraz myśleniem przy użyciu symboli, tzn. formuł, termów oraz ich składowych”⁸⁷¹. Czy można tu jednak mówić o dychotomii?

Przypomnijmy w tym miejscu analizowane wcześniej charakterystyki reprezentacji w matematyce w ujęciu Giaquinto. Giaquinto argumentuje, że można mówić nie tylko o dwóch typach reprezentacji, ale całym spektrum różnego rodzaju reprezentacji, mających w większym lub mniejszym stopniu charakter diagramowy. Jeśli z typem reprezentacji związany jest określony typ myślenia, to zgodnie z tym ujęciem nie można mówić nawet o liniowym przejściu pomiędzy diagramowym a pojęciowym typie myślenia. Formy myślenia (od najbardziej symbolicznej do najbardziej diagramowej) układają się raczej w typ kraty, z dwoma przypadkami skrajnymi i różnorodnymi „pośrednimi” przypadkami.

Dla zobrazowania tezy, iż każdy (związany z wizualizacjami) dychotomiczny

⁸⁶⁹ Giaquinto, M., *Visual Thinking...*, str. 240.

⁸⁷⁰ Tamże, str. 241.

⁸⁷¹ Tamże, str. 241.

podział poznania matematycznego rodzi trudności, Giaquinto rozważa tu cztery dowody znanej zależności teoriolicznej:

$$1+2+3+\dots+n = (n^2 + n)/2.$$

Oto one:

- a) Pierwszy dowód można przeprowadzić poprzez zastosowanie indukcji matematycznej⁸⁷².
- b) drugi dowód opiera się na słynnym „rozumowaniu Gaussa”, które ów genialny matematyk miał jako 10-latek zastosować w celu obliczenia na lekcji matematyki sumy pierwszych 100 liczb naturalnych. Jego przeprowadzenia wymaga następującego przedstawienia dwóch ciągów liczb:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

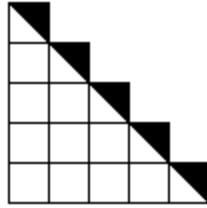
Każdy z dwóch ciągów daje poszukiwaną sumę pierwszych n liczb. Jeśli jednak będziemy po kolei dodawać do siebie pary liczb w kolumnach, przekonamy się łatwo, iż

do siebie n razy wartość $n+1$. Stąd $2(1+2+3+\dots+n) = n(n+1)$, skąd łatwo już wyprowadzić powyższy wzór.

c) trzecim rozumowaniem jest rozumowanie podane we wcześniejszej części rozdziału. Przypomnę, iż zasadzało się ono na zestawieniu odpowiednio ustawionych dwóch zbiorów kropek.

d) czwarte rozumowanie odwołuje się do innego typu diagramu. Na diagramie tym liczby reprezentowane są przez kwadraty.

⁸⁷² Dowodzi się tu, najpierw, iż teza jest spełniona dla $n=1$, a następnie, iż prawdziwość wzoru $n=k$ pociąga jego prawdziwość dla $n=k+1$.



Rys. 9.

Z diagramu można z łatwością „odczytać” następującą zależność:

$$1+2+3+4+5 = 5^2/2 + 5/2$$

Można ją następnie uogólnić do tezy:

$$1+2+3+\dots+n = n^2/2 + n/2$$

W istocie, suma pól wszystkich kwadratów na diagramie, jest równa sumie pola trójkąta równoramiennego o dwóch bokach długości 5 (lub w ogólnym przypadku – n), oraz pięciu trójkątów zamalowanych na czarno ($5/2$, czy też $n/2$).

Według Giaquinto, podział tych czterech rozumowań zgodny z dychotomią myślenie diagramowe/myślenie przy pomocy symboli napotyka niemałe trudności. Wydawałoby się, iż rozumowanie a) oraz b) można uznać za symboliczne, a c) i d) za diagramowe. Jednak również argument Gaussowski i przykład c) mają wiele cech wspólnych. W obu przypadkach rozważamy dwie struktury (arrays) obiektów (liczb, bądź kół), podzielonych na górną i dolną część. W każdym przypadku, ilość elementów w każdej z części maleje (bądź rośnie) z każdym kolejnym krokiem wykonywanym „w prawo”. Podobieństwo konstrukcji pociąga dalej podobieństwo rozumowań – w obu przypadkach musimy zauważyć, że mamy n kolumn sumujących się do $n+1$, i wywnioskować stąd, iż razem daje to $n*(n+1)$ ⁸⁷³.

Podobieństwo tych dwóch rozumowań wskazuje, iż dychotomiczny podział

⁸⁷³ Por. Tamże str. 257.

powinien łączyć je w jednym typie poznania. Jeśli jednak rozważymy je jako tworzące osobny typ rozumowania, dwa pozostałe przykłady – indukcja i ostatnie rozumowanie musiałyby należeć do jednego rodzaju. To wydaje się jednak nieintuicyjne i nieuzasadnione. Pozostaje więc potraktowanie rozumowania indukcyjnego jako należącego do jednego członu dychotomicznego podziału i pozostałych trzech rozumowań do drugiego. Byłoby to uzasadnione kształtem rozumowania, jak i sposobem pokazania ogólności wyniku. Jednak takie ujęcie nie ujmowałoby istotnych różnic pomiędzy rozumowaniami b), c) oraz d). Rozumowanie b) nie odwołuje się do diagramu; również rozumowania c) i d) istotnie się różnią: sposób „liczenia” obiektów reprezentujących liczby jest inny, rozumowanie d) dodatkowo wymaga konkretnej wiedzy geometrycznej (dotyczącej pól kwadratów, itd.), podczas gdy żadna wiedza geometryczna nie jest potrzebna w celu przeprowadzenia rozumowania c).

Według Giaquinto przykład ten ukazuje, iż „każdy podział myślenia matematycznego na dwa rodzaje – algebraiczny-geometryczny, symboliczny-diagramowy, czy jakkolwiek inny – jest narażony na bycie (is liable to be misleading)”⁸⁷⁴. Stąd potrzebna jest o wiele bardziej wyczerpująca i szczegółowa taksonomia. Potrzebny jest nie jeden dychotomiczny podział, ale cała ich różnorodność, tak, iż klasy typów myślenia, odpowiadające tym podziałom będą się w różny sposób przecinać, skutkując w wielu typach rozumowań⁸⁷⁵.

11.6. Ogólność i niewiarygodność rozumowań diagramowych

Problem ogólności rozumowań opartych na diagramach stanowi jedno z klasycznych zagadnień związanych z diagramami. Pojawia się wtedy, gdy wnioskujemy na podstawie diagramu. Problem pojawia się wtedy, gdy w którymś z kroków dowodu powołujemy się na jednostkowe cechy diagramu. Przypomnijmy,

⁸⁷⁴ Tamże, str. 253.

⁸⁷⁵ Por. Tamże str. 260.

że zagadnienia te rozważane były już od starożytności – nawiązywali do nich Arystoteles, Berkeley, Leibniz jak i Frege.

Analizowane tu współczesne ujęcia rozumowań diagramowych przedstawiają wiele rozwiązań "problemu ogólności". W tym miejscu szczególną uwagę poświęcę rozwiązaniu Kulpy, które wydaje się być najszersze i najgłębsze ze wszystkich.

Kulpa, jak wspominałem powyżej, dąży do sformułowania zasad korzystania z diagramów i wnioskowania na podstawie ich własności. Przyczyny wiele problemów związanych z diagramami „mogą być przypisane nieadekwatnemu wizualnemu (diagramatycznemu) językowi używanemu do reprezentacji badanej dziedziny. Rozszerzenie języka powoduje, iż wiele z tych problemów znika”⁸⁷⁶. Dzielą się one, według Kulpy, na dwa rodzaje:

- 1) Problem kwantyfikacji ogólnej, zwany także problemem generalizacji, problemem reprezentacji zmiennych, czy reprezentacji kwantyfikatorów.
- 2) Problem kwantyfikacji szczegółowej, zwany także problemem niedokładności diagramów, problemem percepcji diagramów, niemożliwych przypadków czy problemem ograniczonej siły wyrazu.

Pierwszy z problemów odpowiada problemowi ogólności, drugi natomiast wiarygodności diagramów. Zacznijmy więc od pierwszego z nich.

Problem kwantyfikacji ogólnej rozważa Kulpa po prostu jako problem dowodu twierdzenia typu „dla każdego x , $P(x)$ ”. Kulpa zauważa w pierwszym rzędzie, iż aby orzec jakieś zdanie ogólne musimy wiedzieć przez jaki zbiór przebiega zmienna x , tzn. jakiego rodzaju obiekty podstawiamy pod te zmienne, oraz przez jaki zbiór X one przebiegają. Wokół tego ogólnego modelu prowadzone są jego dalsze rozważania. Kulpa wymienia dalej kilka problemów, jaki mogą się pojawić, oraz proponuje rozwiązania.

⁸⁷⁶ Kulpa, Z, *Main Problems...*, str. 81.

- uogólnianie diagramowe

Częstym problemem w przypadku uzasadniania twierdzeń za pomocą diagramów jest to, że dany rysunek reprezentuje tylko pewien szczególny przypadek, lub pewien podzbiór możliwych przypadków. W takim przypadku rozsądną metodą jest rozbicie zbioru X na podzbiory takie, że każdy może być zilustrowany jednym diagramem. W przypadku trójkątów wystarczyłoby więc rozważyć trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne.

Rozbicie takie może być oczywiście w niektórych przypadkach trudne, czasochłonne, bądź nawet niemożliwe – jeśli nie jest możliwe rozbicie zbioru X na skończoną klasę podzbiorów, z których każdy obrazowałby jeden diagram.

- jednostkowość diagramów

Jest to inne sformułowanie problemu jednostkowości. Tu pojawia się pytanie: jak na podstawie jednostkowego diagramu wnioskować o całej klasie obiektów? Problem ten pojawia się na przykład w przypadku obrazkowego dowodu twierdzenia Pitagorasa: skąd wiadomo, iż dowodząc go o jednym trójkącie, dowodzimy jednocześnie o wszystkich pozostałych? Kulpa proponuje tu przeprowadzić analogię z rozumowaniami algebraicznymi. Rozważając równanie

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zmienne a oraz b traktujemy jako reprezentujące dowolne liczby. Według Kulpy nic nie stoi na przeszkodzie, aby w podobny sposób traktować diagramy. W takim ujęciu traktujemy „odcinek jako *symbol* dla odcinków o *jakiegokolwiek* długości”⁸⁷⁷

Nie będę tu dalej opisywał rozważań Kulpy. Wspomnę jedynie, iż formułuje on następujące techniki dowodowe dla diagramów: „diagramowa” wersję twierdzenia o stałych; metoda reprezentacji zmiennych na diagramie; metoda reprezentacji

⁸⁷⁷ Tamże, str. 84.

kwantyfikatorów na diagramie; metodą reprezentacji zbiorów na diagramie, czy diagram dynamiczny.

Zwróćmy uwagę na niektóre inne rozwiązania problemu ogólności. W pierwszym rzędzie należy tu oczywiście przypomnieć prace Mumy i Giaquinto. Ten ostatni wykazywał ogólny charakter twierdzeń dotyczących prostych figur geometrycznych, Mumma natomiast za pomocą podziału własności figur geometrycznych na dokładne i quasi-dokładne, pokazuje, iż odpowiednio zrekonstruowane rozumowania geometrii euklidesowej mogą dowodzić prawd ogólnych. Browne podkreśla z kolei, iż w wielu przypadkach twierdzenia szczegółowe są równoważne twierdzeniom ogólnym. Dla Madnersa „to, czy pewien szczegółowy (/konkretny)(particular) narysowany diagram wystarczy aby uzasadnić ogólne geometryczne stwierdzenie (...) zależy od tego jak rozumowania korzystają z diagramów. Jednostkowość (particularity) nie jest nieuleczalnym i zaraźliwym agentem”.

W ostatniej części rozdziału nie mam na celu przedstawienia żadnego szerszego rozwiązania problemu niewiarygodności diagramów. W pewnym stopniu problemy te są nierozwiązalne – trudności związane z wizualizacjami w analizie matematycznej, czy geometriach nieeuklidesowych wydają się w sposób nieodwołalny ograniczać wiarygodność diagramów w tych dziedzinach matematyki.

Mimo to wielu filozofów matematyki broniących wartości diagramów w poznaniu matematycznym broni tezy, iż brak wiarygodności jest zbyt wyeksponowaną wadą diagramów. Davis twierdził, iż w wielu przypadkach problem znika, gdy po prostu dokładnie wykonany rysunek. Wielu filozofów (jak Kulpa, Barwis i Etchemendy, czy Kulpa) zwracają też uwagę, iż w tradycyjnych dowodach, sformułowanych w języku rachunku predykatów również zdarzają się błędy (jest wiele podchwytliwych momentów, np. przy podstawianiu pod zmienną). Sama obecność wadliwych dowodów bazujących na reprezentacjach wizualnych nie jest żadnym stopniu potwierdzeniem ich bezużyteczności. Jeśli odnajdowaliśmy błędy w klasycznych dowodach, złożonych ze zdań, robiliśmy to przez uważną analizę tych form rozumowania, analizę struktury zdań, sformułowanie

odpowiednich reguł, itd. Tak samo może też się stać w przypadku rozumowań diagramatycznych.

Warto tu też przytoczyć pogląd Browne'a. Przyznaje on, iż intuicja w wielu przypadkach zawodzi - jest tak w przypadku piątego postulatu Euklidesa, a także w przypadku pewnych intuicji teoriomnogościowych, których zwodniczość pokazał paradoks Russella. Jednak, jak pisze Brown, "możemy mimo to korzystać z tych intuicji, tak jak możemy używać naszego zmysłu wzroku uprawiając fizykę, nawet, jeśli czasem doświadczamy dużych złudzeń (*we suffer massive illusions*)⁸⁷⁸. Zawodność intuicji przestrzennej nie dyskwalifikuje więc jej, według Browne'a, jako źródła poznania.

Przywołajmy wreszcie znów rachunki diagramowe. Można zgodzić się z Mancosue, iż systemy Barwise'a i Etchemendiego, Shina i innych ukazują, iż „systemy wizualne nie są z natury zwodnicze, a w każdym razie nie bardziej, niż mogą być systemy językowe”⁸⁷⁹.

Należy tu też przypomnieć, iż problem braku wiarygodności stosuje się w pierwszym rzędzie do diagramów metrycznych. Diagramy dyskretne, które przekazują informację w sposób jednoznaczny (jak diagramy w teorii grafów) nie są niewiarygodne w tym samym sensie, co diagramy np. geometryczne.

Podsumowując, należy zaznaczyć, iż diagramy w wielu przypadkach pozwalają matematykom przekonać się o prawdziwości twierdzeń matematycznych bez potrzeby dalszych operacji symbolicznych. To, czy uznać takie diagramy za dowód jest jednak dyskusyjne. Można dalej wymienić charakterystyki rozumowań diagramowych wyróżniające je na tle „zwykłych” rozumowań symbolicznych. Z drugiej strony bardzo trudno przeprowadzić granicę pomiędzy wizualnym a językowym wymiarem tych rozumowań.

⁸⁷⁸ Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction...*, str. 32.

⁸⁷⁹ Mancosu, P., *Visualisation in Logic...*, str. 25.

Zakończenie

Wizualizacje towarzyszyły matematyce europejskiej od samych jej początków. W starożytności większość badań matematycznych skoncentrowana była wokół geometrii, a diagram był nieodłącznym narzędziem badań matematycznych. Matematyka XVII i XVIII wieku stanowiła niezwykle płodną syntezę rozważań geometrycznych i analiz intuicji wizualnych z jednej strony, oraz rozwijanych metod algebraicznych i analitycznych z drugiej. Rozwój geometrii nieeuklidesowych oraz metod formalnych w matematyce XIX-wiecznej ukształtował przekonanie, iż intuicje wizualne oraz diagramy są zbędnymi i niewiarygodnymi elementami praktyki matematycznej. Mimo to matematycy cały czas korzystali z diagramów w niemniejszym stopniu niż wcześniej – co więcej, powstawały nowe dziedziny w istotny sposób opierające się na diagramach bądź wizualizacjach (jak topologia, teoria grafów czy teoria kategorii). Badania ostatnich lat pozwoliły przybliżyć, w jaki sposób stosujemy diagramy w matematyce, oraz jakie są ich zalety i wady. W mojej pracy próbowałem przybliżyć niektóre aspekty tych badań, odnosząc je również do różnych innych wątków w epistemologii matematyki. Podsumujmy więc, co badania ostatnich wniosły w nasze rozumienie diagramów i ich roli w poznaniu matematycznym, oraz jak ustalenia te mają się do tradycyjnych zagadnień epistemologicznych związanych z matematyką.

Współczesne badania ukazały więc w pierwszym rzędzie różnorodność typów wizualizacji oraz ról, jakie mogą odgrywać w poznaniu matematycznym. Wizualne treści towarzyszą w naszym poznaniu wielu pojęciom matematycznym, również pojęciom algebraicznym czy arytmetycznym. Za pomocą diagramów możemy reprezentować obiekty bardzo wielu dziedzin matematyki, przy czym niektóre jej działy – jak geometria, teoria grafów, topologia, czy teoria fraktali – są szczególnie silnie związane z ich interpretacją wizualną. Wizualizacje pełnią dalej,

jak wielokrotnie podkreślałem, różnorodne funkcje w poznaniu matematycznym: mogą pełnić rolę heurystyk, są nieodzowne w nauczaniu, czy w sposobie na jaki budujemy w sobie podstawowe „intuicje” związane z wieloma pojęciami matematycznymi. Wizualizacje mogą również odgrywać rolę istotną w procesie uzasadniania zdań matematyki – od stanowienia inspiracji do sformułowania twierdzenia, czy konstrukcji dowodu, do stanowienia, jak podkreślają niektórzy filozofowie matematyki, wystarczającego uzasadnienia dla niektórych twierdzeń matematycznych. Wizualizacje mogą wreszcie przyczynić się do odkrycia prawd matematycznych, czy wyjaśniania tych już dowiedzionych.

Współczesne prace ukazują, iż wbrew wątpliwościom wielu filozofów, ogólność i wiarygodność mogą przysługiwać poznaniom opartym na diagramach. To, jakie z danym jest ryzyko popełnienia błędu związane z rozumowaniem opartym o dany diagram, uzależnione jest od typu diagramu, sposobu jego zastosowania, oraz charakteru, czy treści twierdzenia, które na jego podstawie ma być wykazane. Największe problemy łączą się przy tym z diagramami metrycznymi, podczas gdy diagramy dyskretne – w szczególności takie, w przypadku których zachodzi homomorfizm pomiędzy ich własnościami wizualnymi a własnościami matematycznymi – mogą stanowić podstawę dla wnioskowań. Nawet jednak diagramy metryczne można stosować w sposób nie prowadzący do błędów. Warunkiem jest jedynie ich uważne i systematyczne stosowanie.

Dodajmy tu, iż odrzucenie diagramów przez niektórych filozofów matematyki i matematyków końca XIX- i pierwszej połowy XX wieku można wiązać ze zbyt optymistycznymi oczekiwaniami wobec diagramów. Intuicja przestrzenna nie może przyczynić się do poznania struktury fizycznej. Własności wizualne diagramów nie zawsze wiążą się bezpośrednio z własnościami matematycznymi, skąd wnioskowanie na podstawie diagramu jest uprawnione jedynie w niektórych przypadkach. Wizualna analiza diagramu nie powinna również wiązać się z pomiarem; tu diagramy i intuicje przestrzenne skazane są na niedokładność.

Świadome i uważne stosowanie narzędzia, jakim jest diagram, pozwala również uniknąć niebezpieczeństw związanych z jego jednostkową naturą. przypomnijmy,

iż problem ogólności rozumowań diagramowych był komentowany szeroko w tradycji filozoficznej. Znalazł też w niej różne rozwiązania: według Leibniza oraz Bolzano diagramy służą jedynie ilustracji twierdzeń, a ich ogólność płynie wyłącznie z pojęć. Również filozofowie bliżsi empirystycznej interpretacji matematyki, Berkeley i Arystoteles, podkreślali, iż rozumowania i dowody geometryczne nie odwołują się do tych cech diagramów, które są charakterystyczne jedynie dla konkretnych, jednostkowych własności. Dla Kanta z kolei rysunek jest naocznością empiryczną i posiada wiele cech nieistotnych np. dla danego dowodu; jednak w akcie konstrukcji, a więc przedstawienia go sobie w czystej naoczności *a priori*, zważamy jedynie na to, co odpowiada pojęciu trójkąta w ogóle. Według Kanta więc, matematyka może rozważać to, co ogólne, *in concreto*.

Warto tu dodać, iż sami matematycy stosowali diagramy w sposób w ogromnej większości przypadków poprawny, tzn. nie popełniając błędów związanych z jednostkowością diagramów. Podparte było, jak się wydaje, przede wszystkim odpowiednim przygotowaniem matematycznym – np. wiedzą, który element diagramu odpowiada własnościom konkretnego obiektu matematycznego i nie powinien być rozważany w rozumowaniu. Niektóre współczesne prace konkretyzują idee powyżej wspomnianych filozofów, jak również metod matematyków. Rozważania m.in. omawianych tu Zenona Kulpy, czy Johna Mumy pokazują, że analiza diagramów może, opierając się o jednostkowy diagram, dostarczać w pełni uzasadnionego poznania o charakterze ogólnym, tzn. dowodzić twierdzeń dotyczących nie tylko dla konkretnego diagramu, ale szerszej klasy obiektów. Zgodnie z ich pracami, możliwa jest systematyczna i ścisła analiza diagramu, pod kątem zakresu obiektów, których on dotyczy ma twierdzenie, oraz sposobu w jaki własności wizualne diagramu reprezentują własności matematyczne. Jednostkowość diagramów nie jest więc ich nieusuwalną cechą, nie musi również prowadzić do ich dyskwalifikacji jako środka służącego wykazywaniu twierdzeń ogólnych.

Współczesne prace – obok rewizji tradycyjnych przekonań odnośnie diagramów – wskazują na liczne zalety diagramów jako typu reprezentacji obiektów matematycznych. Po pierwsze, można tu się odwołać do wymienionych

przez mnie własności reprezentacji przestrzennych. Diagramy umożliwiają więc prezentację większej ilości obiektów „na raz”, tak, iż obserwacja diagramu pozwala osiągnąć bardziej "całościowe" ujęcie danego obiektu matematycznego (bądź obiektów). Dodatkowo przedstawienie takie może charakteryzować się strukturalnym podobieństwem do reprezentowanego obiektu, może w szczególności zachodzić homomorfizm pomiędzy fizycznymi elementami diagramu a elementami, czy aspektami, obiektu matematycznego. Diagram może ukazywać symetrie, bądź wskazywać na nowe, nieznanne wcześniej fakty. Nie będę tu dalej wymieniał tych, analizowanych już wielokrotnie w mojej pracy zalet diagramów. Do tej listy można dodać niedookreśloność diagramów, tradycyjnie rozumianą jako ich wada. niedookreśloność stanowi bowiem o elastyczności diagramów. Te same pojęcia matematyczne można reprezentować przestrzennie na różne sposoby, a ten sam diagram może reprezentować różne obiekty matematyczne. Nawet twierdzenia matematyczne przeczące intuicjom przestrzennym można próbować zrozumieć przy pomocy wizualizacji, o czym świadczy diagram van Koch służący wizualizacji przeczącego przecież intuicji przestrzennej wyniku Weierstrassa.

Diagramy można więc – z punktu widzenia samej praktyki matematycznej – traktować jako po prostu jeden z możliwych typów reprezentacji obiektów matematycznych – typ, który ma swoje wady oraz zalety. Wizualizacje mogą się nadawać bardziej do pewnych celów, a mniej do innych. W pewnych sytuacjach zaciemniają one obraz badanego problemu, w innych natomiast ukazują jego szersze ujęcie.

Dodajmy tu, iż jedna cecha diagramów ma szczególnie filozoficzny wydźwięk. Chodzi tu o to, że diagramy mogą w niektórych przypadkach rozszerzać wiedzę. Dzięki diagramowi można dowiedzieć się (*find out*) więcej niż to, co było konieczne w celu jego skonstruowania. Nawiązując tu do myśli Kanta można powiedzieć, że przedstawiając dane pojęcia w formie przestrzennej, możemy. Sama konstrukcja diagramu, a następnie jego obserwacja, pozwala więc poszerzyć naszą wiedzę w stosunku do tej, którą posiadaliśmy przed ową konstrukcją. W tym sensie analiza diagramu pozwala "wyjść poza pojęcie", tzn. tzn. zauważyć własności pojęcia, których nie udało nam się dojrzeć przez analizę czysto

językową. Zaznaczmy, iż jest również zupełnie zgodne z myślą Peirce'a. Dodam również, iż taką, rozszerzającą naszą wiedzę funkcję, spełniają w szczególności wizualizacje komputerowe.

Inną kwestią jest pytanie o to, jaką rolę diagramy mogą grać w dowodach matematycznych, a dokładniej na ile sam diagram może w uprawniony sposób zastępować wyprowadzenia symboliczne. Jest to kwestia kontrowersyjna i nie będę jej tu znów analizował. Niezależnie jednak od tego, jak rozwiążemy ów problem, analizy Kulpy i Mumy, czy sam fakt, iż można konstruować rachunki diagramowe, w których diagramy są pełnoprawnymi elementami dowodów, wskazuje na to, iż można rozważać więc diagramy jako uprawnione elementy dowodów, oraz można taką ich rolę systematycznie analizować. Dowód matematyczny pozostaje i zapewne pozostanie oczywiście rozumiany przede wszystkim jako oparty na symbolach. Mimo to warto na te badania zwrócić uwagę. Jak pisze Giaquinto, „wyniki tych badań są ważne dla odrzucenia wąskiego, językowego ujęcia dowodu”

Jak powyższe uwagi – dotyczące głównie samej praktyki matematycznej – odnieść do filozoficznych zagadnień związanych z wizualizacjami?

Spróbujmy w pierwszej kolejności ocenić wizualizacje z perspektywy zagadnienia roli intuicji i pojęć w poznaniu matematycznym. Zwróćmy najpierw uwagę, że wątek dwubiegowości, czy dychotomicznego podziału poznania matematycznego związany z intuicją i pojęciami przewijał się w prawie w całej pracy. Ujawniał się w różnych odsłonach: w XVII- oraz XVIII-wiecznych rozważaniach na temat relacji pomiędzy typem poznania, który daje algebra, oraz typem poznania, który daje geometria. U Kanta dychotomia ta stała się centralnym punktem epistemologii matematyki, opartej na założeniu istnienia dwóch pni poznania: zmysłowości (dostarczającym naoczności, czy intuicje) oraz rozumie (dostarczającym pojęć). Dychotomia ta ujawniała się również w rozważaniach Bolzana, Fregego, czy Leibniza. Z drugiej strony jej znaczenie było mniejsze w filozofii matematyka Milla, Peirce'a, czy empirystów brytyjskich.

Wydaje się, że współczesne rozważania wskazują przede wszystkim na to, iż - o ile dane rozumowanie ma jakiś wymiar przestrzenny - bardzo trudno wskazać

element intuicyjny, "czysto" wizualny w poznaniu matematycznym, jako że rola pojęć i wizualizacji się w nim przenika. W poprzednim rozdziale pokazywałem, iż role te trudno oddzielić w rozumowaniach matematycznych. Dodatkowo nie ma jasności, jak rozumieć kategorię intuicji przestrzennej. Zauważmy, że nie pojęciu intuicji leży w centrum współczesnych rozważań na temat wizualizacji. Omawiani autorzy rzadko posługują się nią jako istotnym filozoficznym terminem technicznym i rzadko ją definiują. O intuicji nie piszą ani Kulpa ani Mumma – intuicja jako kategoria poznawcza nie gra istotnej roli w ich ujęciach wizualizacji. Również Davis i Borwein i Jorgenson o intuicji co najwyżej okazjonalnie wspominają, nie charakteryzując jej jako władzę poznawczą. Rzeczywiście, określenie miejsca intuicji jako władzy poznawczej w poznaniu diagramowym nie jest proste. Przypomnijmy, że już Klein proponował mówić o roli intuicji wzmocnionej w matematyce - a więc intuicji która jest już niejako "zmieszaniem" pierwiastka wizualnego i pojęciowego w poznaniu matematycznym. W moim przekonaniu wystarczającym jest uznanie po prostu, iż intuicja to władza poznawcza, która uaktywnia się w kontakcie z diagramem.

Dodajmy tu, iż dychotomię intuicje/pojęcia można formułować na różne sposoby. Można mówić o tym co geometryczne i algebraiczne w poznaniu matematycznym, czy o przestrzennym i nie-przestrzennym myśleniu. Niezależnie jednak od tego, którą z nich uznamy za bardziej zasadną, czy praktyczną, należy się zgodzić z Giaquinto, że satysfakcjonujący dychotomiczny podział poznania matematycznego, ujmujący rolę wizualizacji w poznaniu matematycznym jest bardzo trudny do przeprowadzenia.

W moim przekonaniu konsekwencją badań nad wizualizacją potwierdza jednak, w moim przekonaniu, jakąś postać kantyizmu w odniesieniu do matematyki. Przypomnijmy, iż według Kanta myśli bez treści naocznej są puste, dane naoczne bez pojęć – ślepe. Rzeczywiście, same dane naoczne są ślepe – diagramy są, jak pisałem, obiektami z punktu widzenia matematyki niedookreślonymi, i same w sobie bez udziału pojęć nie mogą dać nam wartościowego poznania matematycznego. przypomnijmy, Jak pisał Leibniz, same idee niewyraźne (czy też wyobrażenia) nie wystarczają do poznania matematycznego – diagram może stać

się podstawą poznania matematycznego dopiero, gdy posiadamy idee wyraźne, Nawet Peirce podkreślał, że na każdym diagramie muszą być zawarte - w jego rozumieniu - ikony, indeksy i symbole

Z drugiej strony treści wizualne grają, w moim przekonaniu, ogromną rolę formowaniu się naszych pojęć, inspirowaniu nowych problemów, czy nawet wykazywaniu twierdzeń. Można powiedzieć, że wizualizacje stanowią „surowy materiał”, czy treść, z której wyrasta matematyki, jako wyrastającej z jakimś stopniu z treści zmysłowych, i budująca swoje pojęcia z „surowca”, który owe treści stanowią. W tym sensie wizualizacje napełniają pojęcia matematyczne treścią. Waga tego faktu jest zauważana także przez historyków matematyki, co jest zgodne z myślą wielu analizowanych tu myślicieli, jak Klein czy Poincare Również praktyka matematyczna jest w istocie, jak pisze Brown w dużym stopniu „wzajemnym przenikaniem się treści i formy” (*interplay of form and content*). Epple twierdzi, że podejście Pascha i Hilberta, tzn. podejście puryzmu metodologicznego, faworyzujące metodę aksjomatyczną, „szybko straciło swoją owocność, podczas gdy gałęzie geometrii różniczkowej i algebraicznej prowadzą do bardzo ciekawych wyników i otwartych pytań aż do dnia dzisiejszego”⁸⁸⁰.

Przyjrzymy się dalej kwestii sporu empiryzmu z aprioryzmem w filozofii matematyki. Czy duża rolę diagramów w matematyce można jednak interpretować w duchu empirystycznym? Wydaje się, że interpretacja roli diagramów w kontekście sporu empiryzmu z realizmem jest niejednoznaczna. Z jednej strony diagram jest fizycznym obiektem i można wymienić wiele quasi-empirycznych charakterystyk poznania diagramowego. Z drugiej strony, istnieją analogie pomiędzy naturą kontaktu z diagramem a poznaniem obiektywnej rzeczywistości matematycznej. Dwoistość ta ujawnia to się m.in. w ważnym aspekcie tego rozdziału – ocenie roli percepcji w poznaniu diagramowym. Z jednej strony „odczytując”, czy odkrywając fakty matematyczne przez obserwację diagramów, posługujemy się między innymi zwykłą percepcją, która służy nam choćby do rozpoznawania odpowiednich kształtów i relacji przestrzennych. Z drugiej strony, percepcja ma wiele własności przyznawanych zazwyczaj intuicji. Tą ostatnią

⁸⁸⁰ Epple,

można rozumieć w duchu realistycznym, jako bezpośrednie, natychmiastowe i całościowe *postrzeganie* obiektów matematycznych. Intuicja w ujęciu kantowskim również łączy się z percepcją. U Kanta można przecież wyróżnić naoczność (intuicję) empiryczną, którą można przyrównać do zwykłej percepcji, oraz czystą naoczność przestrzeni.

W moim przekonaniu kluczowa jest tutaj interpretacja roli percepcji wzrokowej, która niewątpliwie ma one istotne znaczenie w poznaniu diagramowym. Czy należy rozumieć ją w duchu empiryzmu, kantyizmu, czy może realizmu? Filozofowie analizowani w pierwszych rozdział tej pracy często formułowali ujęcia procesów poznawcze związane z diagramem jako odmienne od percepcji zmysłowej. Według Kanta rysunek figury geometrycznej był z jednej strony sam w sobie obiektem fizycznym i dostarczał pewnej naoczności empirycznej. Z drugiej jednak strony był przedstawiana w czystej naoczności a priori. W ujęciu Kanta miało to tłumaczyć, jak za pomocą fizycznego diagramu przekonujemy się o tezach ogólnych. Również Frege uważał, iż postrzegając fizyczne elementy diagramu postrzegamy w istocie obiekty ogólne. Wiedząc, iż Frege stał w ogólności na stanowisku racjonalizmu, można przyjąć, iż według niemieckiego filozofa, widząc narysowane punkty mamy w jakiś sposób dostęp do ogólnych pojęć (którymi przecież, zgodnie z jego stanowiskiem, zajmuje się geometria, jako nauka a priori). Według Peirce'a matematyka nie dotyczy, świata fizycznego jako swojego przedmiotu, ale hipotetycznych stanów rzeczy. Percepcję obiektów matematycznych nie należy więc uważać za percepcję zwykłych przedmiotów zewnętrznych, ale niejako, zobiektywizowanych procesów mentalnych, dotyczących hipotetycznych stanów rzeczy.

Przypomnijmy, iż celną argumentację przeciwko empirycznej charakterystyce odwołań do diagramu podaje Giaquinto. Zaznaczmy przy tym, iż jego rozważania dotyczą najbardziej empirycznego typu wykorzystania diagramu - odczytywania z własności fizycznych rysunku własności matematycznych reprezentowanego przezeń obiektu. Argumentacja wymierzona jest przede wszystkim w pogląd o indukcyjnym charakterze drogi poznawczej, w efekcie której osiągamy przekonania o niektórych obiektach matematycznych. Analizując diagram nie traktujemy go

jako zwykły obiekt fizyczny, a danych zmysłowych nie postrzegamy jako materiału dowodowego, na bazie którego formułujemy dalsze tezy. Odróżnia on tu postrzeganie wizualne (*visual perceiving*) od wizualizowania (*visualizing*).

Podsumowując, uważam, że należy się zgodzić z powyżej wymienionymi myślicielami, i uznać, że postrzegając diagram matematyczny nie postrzegamy go jak zwykły obiekt fizyczny. Poznanie oparte o diagram wsparte jest aparatem pojęciowym, dzięki któremu wrażenia zmysłowe są odpowiednio interpretowane i mogą służyć wykazaniu twierdzeń ogólnych. Stąd rozumowania diagramowe nie mają (przynajmniej w tym sensie) z natury charakteru empirycznego. Przypomnijmy wreszcie, iż możliwa jest jeszcze inna interpretacja – zgodnie z którą zmysł wzroku daje nam bezpośredni wgląd w świat platoński, uaktywniając intuicję w rozumieniu platońskim. Na takim stanowisku stał w szczególności James Robert Brown.

Podsumowując, chciałbym podkreślić, że interpretacja filozoficzna roli wizualizacji w poznaniu matematycznym nie jest jednoznaczna. Wizualizacje posiadają częściowo empiryczny charakter, można je jednak również interpretować w duchu realizmu matematycznego. Najbardziej przekonująca wydaje się jednak kantowska interpretacja wizualizacji.

Bibliografia

- Albiński, T., *Pojęcia konieczności, analityczności i aprioryczności u Immanuela Kanta i Saula Kripkego*, (w:) *Prawda a metoda. Część I Aporie myśli współczesnej*, red. J. Jaskóła, A. Olejarczyk, Wrocław 2003, str. 265-285.
- Artmann, B., *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc. 1999.
- Arystoteles, *Analityki pierwsze i wtóre*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.
- Arystoteles, *Metafizyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1984.
- Asper, M., *The two cultures of mathematics in ancient Greece*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 106-132.
- Baker, A., *Experimental Mathematics*, „Erkenntnis”, Vol. 68, 2008. str. 331-344.
- Barrow, J., *II razy drzwi*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.
- Barwise, J., Etchemendy, J., *Visual information and valid reasoning*, (w:) *Logical reasoning with diagrams*, red. G. Allwein, J. Barwise, Oxford 1996.
- Berkeley, G., *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996.
- Berkeley, G., *Letter to Samuel Molyneux (1709)*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 19-20.
- Boi, L., *The ‘revolution’ in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics*, (w:) *Revolutions*

- in mathematics*, red. D. Gillies, Clarendon Press, Oxford 1992, str. 183-208.
- Bolzano, B., *Contributions to a Better-grounded Presentation of Mathematics*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 1. red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 172-224.
- Bondecka-Krzykowska, I., *The four-color theorem and its consequences for the philosophy of mathematics*, „Annales UMCS Informatica AI” Vol. 2, 2004, str. 5-14.
- Bondecka-Krzykowska, I., *Matematyka w ujęciu strukturalnym*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2007.
- Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*, Dover Publications, Inc, 1955.
- Borwein, J., Bailey, D., *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21st Century*, A K Peters, Ltd., Natick, Massachusetts 2004.
- Borwein, J., Bailey, D., Girgensohn, R., *Experimentation in Mathematics. Computational Paths to Discovery*, A K Peters, Ltd., Natick, Massachusetts 2004.
- Borwein, P., Jörgenson, L., *Visible Structures in Number Theory*, “The American Mathematical Monthly”, 2001, Vol. 108, No. 10, str. 897-910.
- Bråting, K., Pejlare, J., *Visualizations in Mathematics*, “Erkenntnis”, Vol. 68, 2008, str. 345-358.
- Brown, J.R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York, 1999.
- Brown, J.R., *Naturalism, Pictures and Platonic Intuitions*, (w:) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Dordrecht 2005.
- Buldt, B., Löwe, B., Müller, T., *Towards a New Epistemology of Mathematics*, “Erkenntnis”, Vol. 68 (3), 2008, str. 309-329.
- Burge, T., *Frege on apriority*, (w:) *New essays on the a priori*, Oxford University Press, Oxford 2001, str. 11-42.
- Coplestone, F., *Historia Filozofii, Tom VIII*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1989.
- Dadaczyński, J., *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Biblos-OBI, Tarnów,

- Kraków, 2000.
- Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A., *Świat matematyki*, PWN, Warszawa 2001.
- Davis, P., *Visual Theorems*, “Educational Studies in Mathematics”, 1993, Vol. 24, No. 4, str. 333-344.
- De Cruz, H., *An Enhanced Argument for Innate Elementary Geometric Knowledge and its Philosophical Implications*, (w:) *New Perspectives on Mathematical Practices*, red. B. van Kerkhove, World Scientific, New Jersey, London, Singapore 2009, str. 185-206.
- Dove, I.J., *Towards a Theory of Mathematical Argument*, “Foundations of Science” 2009, Vol. 14, str. 137-152.
- Dunlop, K., *Why Euclid’s geometry brooked no doubt: J. H. Lambert on certainty and the existence of models*, “Synthese” Vol. 167, 2009, str. 33–65.
- Epple, M. *Styles of argumentation in late 19th century geometry*, (w:) *Analysis and Synthesis in Mathematics*, red. M. Otte, M. Panza, Kluwer Dordrecht, Boston, London 1997, str. 177-198.
- Euklides, *Z Księgi I Elementów*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 44-49 .
- Eves, H., *An Introduction to the history of mathematics*, Howard Eves 1953.
- Ferraro, G., *Analytical Symbols and Geometrical Figures in Eighteenth-Century Calculus*, “Studies in History and Philosophy of Science”, Vol. 32, No. 3, 2001, str. 535-555
- Ferreirós, J., *Riemann’s Habilitationsvortrag At the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy*, (w:) *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2006, str.67-96.
- Fraser, C.G., *The Background to and Early Emergence of Euler’s Analysis*, (w:) *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, red. Otte, M., Panza, M., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1997, str. 47-78.
- Frege, G., *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen*

- Wissenschaften*, (w:) *Frege: Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlass*, F.Meiner, Hamburg 1971, str. 227-237.
- Frege G., *Podstawy arytmetyki*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 176-203.
- Gauss, C.F., *From the review of J.C. Schwab and Matthias Metternich (1816)*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 299-300.
- Gauss, C.F., *From the letter of Gauss to Bessel, 9 April 1830*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., str. 302.
- Giaquinto, M., *Mathematical activity*, (w:) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Dordrecht 2005, str. 75-87.
- Giaquinto, M., *Visual Thinking in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2007.
- Giaquinto, M., *Visualizing in Mathematics*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 22-42.
- Gödel, Kurt, *Co to jest Cantora problem kontinuum?*, (w:) *Współczesna filozofia matematyki: Wybór tekstów*, Warszawa 2002, str. 103-123.
- Grätzer, G., *The Congruences of a Finite Lattice. A Proof-by-Picture Approach*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 2006.
- Gray, J., *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, Oxford University Press 2003.
- Gray, J., *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, Springer, London 2007.
- Gruszczyński, R., *Filozofia matematyki Ch.S. Peirce'a*, (w:) *Wokół filozofii logicznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2004, str. 247-258.
- Gut, A., *Gottlob Frege i problemy filozofii współczesnej*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2005.
- Hammer, E., *Reasoning with Sentences and Diagrams*, "Notre Dame Journal of

- Formal Logic”, Vol. 35, No 1, Winter 1994, str. 73-87.
- Hanna, G., Sidoli, N., *Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives*, “ZDM Mathematical Education” Vol. 39, 2007, str. 73-78.
- Heller, M., *Filozofia Przyrody*, Wydawnictwo Znak, Kraków 2007.
- Helmholtz, H., *The Origin and Meaning of Geometrical Axioms*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 663-689.
- Helmholtz, H., *The Facts in Perception* (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 689-727.
- Hilpinen, R., *Peirce’s Logic*, (w:) *Handbook of the History of Logic. Vol. 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, red. J. Woods, D.M. Gabbay, Elsevier, Amsterdam 2004, str. 611-658.
- Hodgkin, L., *A History of Mathematics. From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University, Oxford 2005.
- Höffe, O., *Immanuel Kant*, PWN, Warszawa 1995.
- Inglis, M., Mejía-Ramos, J.P., *On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics*, “Foundations of Science” 2009, vol. 14, str. 97-110.
- Jagnow, R. *Review of Lisa Shabels’s Mathematics in Kant’s Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*, “Philosophia Mathematica”, Vol. III, 2007, str. 366-386.
- Janeczek, S., *Logika czy epistemologia?*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2003.
- de Jong, *Analytic/Synthetic distinction and the classical model of science*, “Synthese” Vol.174, No.2, 2010, str. 237-261.
- de Jong, W.R., 1997 *Kant’s Theory of Geometrical Reasoning and the Analytic-Synthetic Distinction. On Hintikka’s Interpretation of Kant’s Philosophy of Mathematics*, “Studies in History and Philosophy of Science”, Vol. 28, No.1, str. 141-166.
- Juszkiewicz A. P. (red.), *Historia Matematyki, Tom II, III*, PWN, Warszawa 1977.
- Kartezjusz, *Prawidła kierowania umysłem*, PWN, Warszawa 1958.
- Kant, I., *Krytyka czystego rozumu, Tom I, II*, PWN Warszawa, 1986.

- Kant, I., *Kritik der reinen Vernunft*, P. Reclam, Stuttgart 2002.
- Kant, I. *Prolegomena*, PWN Warszawa, 1993.
- Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, 1985, źródło:
www.oxfordscholarship.com
- Kordos, M., *Wykłady z historii matematyki*, SCRIPT, Warszawa 2006.
- Körner, S., *The Philosophy of Mathematics: an Introduction*, Harper Torchbooks, Nowy Jork, 1962.
- Kulpa, Z., *Main Problems of Diagrammatic Reasoning. Part I: The generalization problem*, "Foundations of Science" 2009, vol. 14, str. 75-96.
- Kulpa, Z., *Wnioskowanie diagramowe*, 2005, źródło:
<http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob9pdf>
- Kulpa, Z., *Jednostkowość diagramów*, 2006, źródło:
<http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob10pdf>
- Kulpa, Z., *Diagramy kontra predykaty*, 2006, źródło:
<http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob11pdf>
- Kulpa, Z., *Emergencja w diagramach*, 2006, źródło:
<http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/diagser/tytrob15pdf>
- Kvasz, L., *The History of Algebra and the Development of the Form of its Language*, "Philosophia Mathematica" Vol. III 2006, str. 287-317.
- Lakatos, I., *Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki?*, (w:) *Współczesna filozofia matematyki: Wybór tekstów*, PWN, Warszawa 2002, str. 215-243.
- Lakatos, I., *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, TIKKUN, Warszawa 2005.
- Laugwitz, D., *Bernhard Riemann, 1826-1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1996.
- Leclerc, I. *The meaning of "Space" in Kant*, w: *Kant's Theory of Knowledge*, Dordrecht 1974, str. 87-94.
- Leibniz, G.W., *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, PWN, Warszawa 1955.
- Lemańska, A., *Zagadnienie obrazowości niektórych rozumowań w matematyce*,

- (w:) *Logiczne podstawy rozumowań III*, red. J. Mrozek, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2003, str. 110-125.
- Lemańska, A., *Eksperyment komputerowy a istnienie obiektów matematycznych*, (w:) *Między matematyką a przyrodoznawstwem*, red. E., Piotrowska, D. Sobczyńska, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Poznań 1999, str. 187-202.
- Lloyd, G.E.R., *What was mathematics in the ancient world? Greek and Chinese perspectives*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 7-26.
- Locke, J., *Rozważania dotyczące umysłu ludzkiego*, PWN, Warszawa 1955.
- Locke, J., *Essay concerning Human Understanding*, w: *From Descartes to Locke*, red., T.V. Smith, M. Grene, The University of Chicago Press, Chicago, London 1967, str. 345-455.
- Lomas, D., *What Perception Is Doing, and What it Is Not Doing, in Mathematical Reasoning*, "British Journal for the Philosophy of Science", Vol. 53, 2002, str. 205-223.
- Lubomirski, A., *Henri Poincaré'go filozofia geometrii*, Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1974.
- Łaciak, P., *Zasady poznania a problem czystych i nie-czystych sądów a priori w filozofii Kanta*, (w:) *Prawda a metoda. Część I Aporie myśli współczesnej*, red. J. Jaskóła, A. Olejarczyk, Wrocław 2003, str. 245-263.
- Łobaczewski, N., *The Theory of Parallels*, (w:) Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*, Dover Publications, Inc, 1955.
- Majer, U., *The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry*, w: *Intuition and the Axiomatic Method*, red: E. Carson and R. Huber, Springer 2006, str. 47–66.
- Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, New York, Oxford 1996.
- Mancosu, P., *Visualization in Logic and Mathematics*, (w:) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Springer, Dordrecht 2005,

- str. 13-30.
- Mancosu, P., *Introduction*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 1-21.
- Manders, K., *Diagram-Based Geometric Practice*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 65-79.
- Manders, K., *The Euclidean Diagram (1995)*, (w:) *The Philosophy of Mathematical Practice*, red. P. Mancosu, Oxford University Press 2008, str. 80-133.
- Marciszewski, W., Murawski, R., *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Rodopi, Amsterdam-Atlanta 1995.
- Martin, R.M., *On Kant, Frege, Analyticity and the Theory of Reference*, (w:) *Kant's Theory of Knowledge*, red. L.W. Beck, Dordrecht-Boston 1974, str. 77-84.
- McLarty, C., 'Mathematical Platonism' Versus Gathering the Dead: What Socrates teaches Glaucon, "Philosophia Mathematica", Vol. 13 (III), 2005, str. 115-134.
- Merrick, T., *What Frege Meant When He Said: Kant is Right about Geometry*, "Philosophia Mathematica", Vol. 14 (III), 2007, str. 44-75.
- Mill, J.S., *System logiki*, Tom I, Warszawa 1962.
- Mumma, J., *Proofs, pictures, and Euclid*, "Synthese", 2010, V. 175, Nr.2, str. 255-287.
- Murawski, R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- Needham, T., *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford 1998.
- Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, Wydawnictwo Magnum, Warszawa 2007.
- Netz, R., *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study of cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- Newton, I., *Selections from the Mathematical Principles of Natural Philosophy*, (w:) *From Descartes to Locke*, red., T.V. Smith, M. Grene, The University of Chicago Press, Chicago, London 1967, str. 330-339.
- Otte, M., *Analysis and Synthesis in Mathematics from the Perspective of Charles S. Peirce's Philosophy*, (w:) *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and*

- Philosophy* red. Otte, M., Panza, M., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1997, str. 327- 362.
- Otte, M., *Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View*, “Educational Studies in Mathematics” Vol. 61, 2006, str. 11–38.
- Palais, R.S., *The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium*, “Notices of the AMS”, June/July 1999, str. 647-658.
- Parsons, C., *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge 2008.
- Peirce, Ch.S., *The Logic of Mathematics in Relation to Education*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 632-637.
- Peirce, Ch.S. *Minute Logic*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, V. 1.* red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 638-648.
- Piotrowska, E., *Teoria i eksperyment w matematyce w poglądach Imre Lakatosa*, (w:) Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Tom XXIV, red., D. Sobczyńska, E. Zielonacka-Lis, J. Szymański, Poznań 1995, str. 115-133.
- Piotrowska, E., *Społeczny konstruktywizm a matematyka*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2008.
- Platon, *Fileb*, w: *Dialogi, Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 1999.
- List VII*, w: *Listy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987.
- Menon*, w: *Dialogi, Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 1999.
- Państwo*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 2001.
- Teajtet*, w: *Dialogi, Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 1999.
- Timaios*, w: *Dialogi. Tom II*, Wydawnictwo ANTYK, Kęty, 1999.
- Poincaré, H., *On the Foundations of Geometry*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B. . Clarendon Press, Oxford 1996, str. 982-1011.
- Poincaré, H., *Science and Hypotheses*, (w:) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1.* red. Ewald, W.B. . Clarendon Press, Oxford 1996, str. 1012-1020.

- Poincaré, H., *Nauka i hipoteza*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 241-245.
- Polyshyn, Z.W., *Seeing and Visualizing*, MIT Presss, 2003.
- Potter, D., *Diagrammatic Representation in Geometry*, "Dialectica", 2006, Vol. 60, No 4, str. 369-382.
- Proklos, *Z komentarza do Elementów Euklidesa*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994.
- Putnam, H., *Analityczne i syntetyczne*, (w:) *Wiele twarzy realizmu i inne eseje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, str. 3-59.
- Putnam, H., *Czym jest prawda matematyczna*, (w:) *Współczesna filozofia matematyki: Wybór tekstów*, PWN, Warszawa 2002, str. 244-265.
- Quine, W.V.Q., *Dwa dogmaty empiryzmu*, (w:) *Z punktu widzenia logiki*, Fundacja Aletheia, Warszawa 2000, str. 49-75.
- Reale, G., *Historia filozofii starożytnej, Tom II*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2001.
- Riemann, B., *On the hypotheses which lie at the foundation of geometry*, w: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. I*, red. Ewald, W.B., Clarendon Press, Oxford 1996, str. 652-661.
- Russell, B., *Matematyka i metafizycy*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, str. 206-221.
- Saito, K., *Reading ancient Greek mathematics*, (w:) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, red. E. Robinson, J. Stedal, Oxford University Press, Oxford 2008, str. 801-826.
- Schnettler, B., *W stronę socjologii wiedzy wizualnej*, „Przeгляд Socjologii Jakościowej”, Tom IV, Numer 3 – Listopad 2008, str. 116-142.
- Sepkoski, D., *Nominalism and constructivism in seventeenth-century mathematical philosophy*, w: "Historia Mathematica" Vol. 32, 2005, str. 33-59.
- Shabel, L., *Apriority and Application: Philosophy of Mathematics in the*

- Modern Period*, (w:) *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford 2000, str. 29-49.
- Shabel, L., *Reflections on Kant's concept (and intuition) of space*, "Studies in History and Philosophy of Science", Vol. 34, No.1, str. 45-57.
- Shapiro, S., *Thinking about mathematics*, Oxford University Press, 2000.
- Sherry, D., *The Role of Diagrams in Mathematical Arguments*, "Foundations of Science" Vol. 14, 2009, str. 59-74.
- Shimojima, A., *Tutorial: Inferential and Expressive Capacities of Graphical Representations*, źródło: www.jaist.ac.jp/~ashimoji/Diagrams_2004_tutorial.ppt.
- Shin, S-J., B., *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*, MIT Press, 2002.
- Skorupski, J., *Later Empiricism and Logical Positivism*, w: *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford 2000, str. 51-73.
- Stjernfelt, F., *Diagrammatology, An Investigation On The Borderlines Of Phenomenology, Ontology, And Semiotics*, Synthese Library 1, Volume 336, 2007.
- Stump, D.J., *The Independence of the Parallel Postulate and Development of Rigorous Consistency Proofs*, "History and Philosophy of Logic", Vol. 28, February 2007, str. 19-30.
- Sullivan, *Frege's Logic*, (w:) *Handbook of the History of Logic. Vol. 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, red. J. Woods, D.M. Gabbay, Elsevier, Amsterdam 2004, str. 659-750
- Sytnik-Czetwertyński, J., *Metafizyczne zasady wszechświata. Kartezjusz, Newton, Leibniz*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006.
- Szabó, Á., *The Beginnings of Greek Mathematics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston 1978.
- Tieszen, R., *Free Variation and the Intuition of Geometric Essences*, (w:) *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, str. 69-89.
- Tiles, M., *Kant: From General to Transcendental Logic*, w: *Handbook of the*

- History of Logic. Vol 3: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, red. D.M. Gabbay J. Woods, Elsevier 2004
- Torretti, R., *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-London 1978.
- Tuchańska, B., *Koncepcje wiedzy apriorycznej i analitycznej a status logiki i matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1995.
- Wang, H., *Theory and Practice in Mathematics*, (w:) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, red. T. Tymoczko, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998, str. 131-152.
- Wilson, C., *Discourses of Vision in Seventeenth-Century Metaphysics*, (w:) *Sites of Vision*, MIT Press 1999, str. 117-138.
- Woleński, J., *Epistemologia*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2005.
- Wolfram, S., *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc., Campaign, IL, 2002.
- Wójtowicz, K., *Platonizm matematyczny, Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Byblos, Tarnów 2002.
- Wójtowicz, K., *Empiryczne aspekty dowodów matematycznych*, (w:) *Światy matematyki: tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010, str. 341-365.
- Van Bendegem, J.P., van Kerkhove, B., *Mathematical Arguments in Context*, "Foundations of Science", Vol. 14, 2009, , str. 45-57.
- Van Kerkhove, B., *Aspects of Informal Mathematics*, w: *Incompleteness and Paradox. Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, Polimetrica International Publisher, Monza 2005, str. 267-351.
- Zheng, Y., *Non-Euclidean geometry and revolutions in mathematics*, (w:) *Revolutions in mathematics*, red. D. Gillies, Clarendon Press, Oxford 1992, str. 167-182..