



Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Rozprawa doktorska

Dziedzina: nauki matematyczne
Dyscyplina naukowa: matematyka

LICZBY TYPU FIBONACCIEGO, ICH WŁASNOŚCI
I ZASTOSOWANIA DO PROBLEMÓW ZLICZANIA
W GRAFACH

Natalia Bednarz

promotor

dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

Poznań 2020

Streszczenie

W rozprawie zostały przedstawione rezultaty dotyczące ciągów typu Fibonacciego, czyli ciągów zdefiniowanych jednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym, ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowań w grafach. Wyniki zawarte w rozprawie dotyczą wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych i są kontynuacją istniejących w literaturze badań tego indeksu w drzewach. W rozprawie, przy wykorzystaniu własności liczb Fibonacciego, Lucasa oraz liczb telefonicznych, zostały przedstawione oszacowania dolne i górne $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych, wraz z podaniem pełnej charakteryzacji grafów ekstremalnych. Ponadto uzyskane zostały kolejne najmniejsze i największe wartości tego indeksu w grafach jednocyklowych i opisane kolejne grafy ekstremalne. Dla szczególnych klas grafów jednocyklowych $(A, 2B)$ -indeks został wyznaczony dokładnie, co z kolei spowodowało uzyskanie nowych tożsamości dla liczb Fibonacciego i Lucasa.

W rozprawie doktorskiej zdefiniowany został ciąg (k, p) -Fibonacciego, który jednocześnie uogólnia ciąg Fibonacciego, ciąg Pella, ciąg Narayana i inne ciągi typu Fibonacciego. Dla tego ciągu zostały wyznaczone różne własności, także związane z generatorami macierzowymi. Podane zostały interpretacje kombinatoryczne oraz zastosowanie tych interpretacji do dowodów tożsamości. Wyniki zawarte w tym rozdziale uogólniają znane rezultaty między innymi z prac S. Falcóna i in. z 2007 roku, T. Koshy'ego z 2001 roku i 2014 roku, M. Kwaśnik i in. z 2000 roku, J. L. Ramíreza z 2015 roku oraz A. P. Stakhova z 1977 roku.

Znaczną część rozprawy stanowią artykuły:

- [A] N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch, *The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs*, *Utilitas Mathematica* 106 (2018), 39-49,
- [B] N. Bednarz, I. Włoch, *Some interpretations of the (k, p) -Fibonacci numbers*, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, (w druku).

Abstract

The main aim of this thesis is to study numbers of the Fibonacci type, in particular their applications in graphs. The first part of the thesis presents results concerning the number of all $(A, 2B)$ -edge colourings in unicyclic graphs. The presented results are a continuation of the research on the $(A, 2B)$ -index in trees. Using the properties of Fibonacci numbers, Lucas numbers and telephone numbers, the lower bound and the upper bound of the $(A, 2B)$ -index in unicyclic graphs are determined. We provided full characteristic of graphs achieving these extreme values. Moreover, we determined the successive extreme unicyclic graphs with respect to the number of all $(A, 2B)$ -edge colourings. For special classes of unicyclic graphs the exact value of the $(A, 2B)$ -index is determined, which resulted in obtaining new identities for Fibonacci and Lucas numbers.

In the second part of the thesis we introduced and studied a new two-parameter generalization of the numbers of the Fibonacci type, named (k, p) -Fibonacci numbers, which generalizes Fibonacci numbers, Pell numbers and Narayana numbers, simultaneously. We presented the properties of the (k, p) -Fibonacci numbers, including their matrix representation. We gave some combinatorial interpretations of these numbers. Moreover, using these interpretations, we proved identities for the (k, p) -Fibonacci numbers. The results included in this chapter generalize, among others, the results presented in Falcón S. et al. (2007), Koshy T. (2001) and (2014), Kwaśnik M. et al. (2000), Ramírez J. L. et al. (2015) and Stakhov A. P. (1977).

A significant part of the thesis has been published or is in print in the following papers:

- [A] Bednarz N., Włoch A., Włoch I., *The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs*, *Utilitas Mathematica* 106 (2018), 39-49,
- [B] Bednarz N., Włoch I., *Some interpretations of the (k, p) -Fibonacci numbers*, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, (in print).

Spis treści

Wstęp	4
Wykaz oznaczeń	10
1 Podstawowe definicje i oznaczenia	12
2 Przedstawienie problemu i celu rozprawy	16
2.1 Ciągi typu Fibonacciego	16
2.2 Liczby typu Fibonacciego w grafach	24
3 Interpretacje grafowe liczb typu Fibonacciego	29
3.1 Grafy krawędziowo pokolorowane z podziałem	29
3.2 Najmniejszy $(A, 2B)$ -indeks w grafach jednocyklowych	36
3.3 Największy $(A, 2B)$ -indeks w grafach jednocyklowych	47
4 Liczby (k, p)-Fibonacciego	56
4.1 Definicja i podstawowe własności	56
4.2 Interpretacje kombinatoryczne	59
4.3 Tożsamości dla sum liczb (k, p) -Fibonacciego	67
4.4 Macierzowa reprezentacja	74
Podsumowanie i dalsze kierunki badań	81
Bibliografia	82
Dodatek - Tabele dla wybranych ciągów typu Fibonacciego	88

Wstęp

Jednym ze znanych matematyków żyjących na przełomie XII i XIII wieku był Leonardo z Pizy (ok. 1175 r. – 1250 r.), zwany również Fibonaccim. Jego ojciec, Guglielmo Bonacci, zajmował stanowisko dyplomatyczne w północnej Afryce i to tam właśnie Fibonacci się kształcił. Od młodości dużo podróżował po Europie i po krajach Wschodu, poznając osiągnięcia matematyków arabskich i hinduskich. Przez pewien czas mieszkał również na dworze cesarza rzymskiego Fryderyka II, gdzie prowadził debaty naukowe z cesarzem i dworskimi filozofami.

Fibonacci napisał szereg rozpraw matematycznych. Wśród prac, których kopie zachowały się do czasów współczesnych, znajduje się traktat *Liber Abaci* (Księga Rachunków) z 1202 roku, w którym, między innymi, opisał system pozycyjny liczb oparty na cyfrach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pokazał w nim użyteczność nowych metod na wielu przykładach rachunkowych, związanych z przeliczaniem miar i wag, obliczaniem zysków i odsetek a także wymianą pieniędzy. Wspomniany traktat był kompendium ówczesnej wiedzy obejmującym arytmetykę i algebrę tamtych czasów. Odegrał ważną rolę w rozwoju matematyki w Europie, wprowadzając między innymi dziesiętny system liczbowy [52].

Fibonacci, w swoich rozprawach, przedstawił wiele niebanalnych problemów matematycznych, ale największą sławę przyniósł mu niezwykle ciekawy ciąg 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... będący rozwiązaniem przedstawionego w księdze *Liber Abaci* następującego problemu, znanego jako problem królików:

Mężczyzna włożył do klatki dwa nowo narodzone króliki różnych płci. Każda para, co miesiąc, wydaje na świat nową, mieszaną parę. Ponadto każda para jest zdolna do reprodukcji na koniec drugiego miesiąca jej życia. Pytanie brzmi: Ile par królików będzie w klatce na koniec roku, jeżeli założymy, że żaden królik nie umiera?

Fibonacci rozwiązał powyższy problem przy pomocy rekurencji. Niech F_n oznacza liczbę par królików w n -tym miesiącu. Wówczas jest ona równa sumie liczb par królików z poprzedniego, $(n - 1)$ -go miesiąca oraz nowo narodzonych par, to jest liczbie par z $(n - 2)$ -go miesiąca. Rozwiązanie to możemy opisać równaniem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, z warunkami początkowymi $F_0 = F_1 = 1$.

Zapisane przez Fibonacciego równanie rekurencyjne jest uważane za ważny wkład Fibonacciego w rozwój kombinatoryki. Ciąg $\{F_n\}$ jest nazywany *ciągami Fibonacciego* a jego wyrazy *liczbami Fibonacciego*.

Ciąg Fibonacciego pojawił się jednak dużo wcześniej u matematyków hinduskich. Najbardziej jasne przedstawienie tego ciągu podał Virahanka (ok. 600-800) [70].

Do matematyki nazwa ciąg Fibonacciego została wprowadzona w 1879 roku przez znanego, francuskiego matematyka Francjoisa Édourda Anatola Lucasa. Zdefiniował on również nowy ciąg $\{L_n\}$ oparty na takim samym równaniu rekurencyjnym jak ciąg Fibonacciego $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$, ale z innymi warunkami początkowymi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. W uznaniu jego zasług, ciąg ten nazwano później *ciągami Lucasa* a wyrazy tego ciągu *liczbami Lucasa*. Ciąg Lucasa nazywany jest również *poprawionym ciągiem Fibonacciego* [16], a ze względu na jego zastosowania mówi się o nim również jako o *cyklicznej wersji ciągu Fibonacciego*.

W literaturze często spotykamy ciąg $\{F_n\}$ z warunkami początkowymi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (na przykład [18, 19, 31, 36, 58, 76]), rzadziej z $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ (na przykład [17, 33]). Przesunięcie warunków początkowych nie ma wpływu na własności tego ciągu. W niniejszej rozprawie przyjmujemy warunki początkowe $F_0 = F_1 = 1$ zgodne z tymi, które występują w pionierskiej pracy [67] dwóch matematyków Helmuta Prodingera i Roberta Franza Tichego z 1982 roku dotyczącej interpretacji grafowych liczb Fibonacciego. Praca ta dała duży impuls do poszukiwań liczb Fibonacciego w grafach.

Ciągi typu Fibonacciego, czyli ciągi zdefiniowane równaniem rekurencyjnym liniowym, wzbudzają zainteresowanie wśród matematyków nie tylko z teoretycznego punktu widzenia, ale także za sprawą odkrywania obecności ciągu Fibonacciego w naszym otoczeniu, między innymi w sztuce – złoty podział oraz w botanice. Wiedza o złotym podziale znana była już w starożytności. Zaobserwować to możemy na przykładzie meksykańskich piramid, ateńskiego Partenonu oraz piramidy w Gizie. Złoty podział znany był również artystom, architektom oraz naukowcom. Wiele źródeł (na przykład [1]) zauważa zastosowanie złotej liczby w twórczości Leonardo da Vinci, Michała Anioła lub XX-wiecznego malarza Salvadore Dali. Złoty podział pojawia się również we współczesnej nauce. W fizyce naukowcy zauważają jego związek, między innymi, z wiązaniami wodorowymi [81]. W astrofizyce złoty podział pojawia się w związku z badaniami nad czarnymi dziurami [25, 56], a we współczesnej chemii w budowie i własnościach kwasikryształów [38, 64, 65]. Niektóre własności i zastosowania liczb Fibonacciego i liczb Lucasa zostały omówione w [52]. Liczby Fibonacciego występują także w kombinatoryce chemicznej. Ważnym zastosowaniem jest projektowanie cząsteczek o specjalnych właściwościach i ich związki z pewnymi indeksami grafowymi. W tym kontekście istotną rolę odgrywają indeks Merrifielda-Simmonsa i indeks Hosoya.

Indeksy te często wyrażone są liczbami typu Fibonacciego [41, 46, 47, 59].

Niezwykłość ciągu Fibonacciego powoduje niesłabnące zainteresowanie tematyką z nim związaną. Literatura dotycząca ciągów typu Fibonacciego jest obszerna, obejmuje wiele dziedzin nauki. Od 1963 roku wydawane jest również renomowane czasopismo matematyczne *Fibonacci Quarterly*, w którym publikowane są artykuły dotyczące tematyki ciągu Fibonacciego.

Niniejsza rozprawa wpisuje się w poszukiwanie nowych interpretacji i własności ciągu Fibonacciego i jego uogólnień.

Praca składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale pierwszym podane zostały podstawowe definicje i oznaczenia zaczerpnięte głównie z [16, 27]. Pozostałe są zamieszczone wewnątrz rozdziałów, bezpośrednio przed ich wykorzystaniem. Niektóre użyte w tej pracy oznaczenia różnią się od oryginalnych oznaczeń pochodzących z artykułów, z których zostały zaczerpnięte wyniki. Jest to spowodowane tym, że standardowe oznaczenia stosowane w teorii grafów są identyczne z oznaczeniami używanymi w teorii ciągów typu Fibonacciego. Na przykład oznaczenie P_n jest klasycznym oznaczeniem n -tej liczby Pella, jak również ścieżki n -wierzchołkowej. Stąd, w celu uniknięcia nieporozumień, na początku rozprawy został umieszczony wykaz oznaczeń obejmujący wszystkie używane w pracy oznaczenia.

Rozdział drugi jest wprowadzeniem do zasadniczej części pracy. Zostało podane pojęcie ciągu typu Fibonacciego oraz dokonany przegląd znanych i często używanych ciągów. W pierwszej kolejności przypomniane zostały najczęściej rozważane ciągi typu Fibonacciego zdefiniowane równaniem rekurencyjnym drugiego i trzeciego rzędu, w tym między innymi ciąg Fibonacciego, Lucasa, Pella, Jacobsthała oraz Narayana. Zamieszczony został również obszerny wykaz uogólnień, zaczerpnięty częściowo z pracy [11]. Ponadto przypomniane zostały wybrane tożsamości dla liczb typu Fibonacciego, przydatne w dalszej części pracy, wzory Bineta i funkcje tworzące dla tych ciągów. Jako wprowadzenie do dalszej części rozprawy zostały zaprezentowane znane grafowe interpretacje liczb typu Fibonacciego. Problematyka interpretacji grafowych liczb Fibonacciego nawiązuje do zagadnień zliczania zbiorów niezależnych. Zliczanie wszystkich zbiorów niezależnych w grafach zapoczątkowali japoński fizyk Haruo Hosoya [46], amerykańscy chemicy Richard Merrifield i Howarda Simmons [59] oraz matematycy Helmut Prodinger i Robert Franz Tichy [67]. W 1971 roku H. Hosoya wprowadził do kombinatoryki chemicznej parametr $Z(G)$, nazwany później indeksem Hosoya, jako liczbę wszystkich skojarzeń grafu molekularnego G , czyli grafu w którym wierzchołki odpowiadają atomom a krawędzie wiązaniami pomiędzy tymi atomami. Analogiczny parametr $i(G)$, będący liczbą wszystkich zbiorów niezależnych grafu molekularnego G , w 1980 roku, zdefiniowali R. Merrifield i H. Simmons. Niezależnie od tych wyników H. Prodinger

i R. F. Tichy, w 1982 roku, zauważyli że liczba wszystkich zbiorów niezależnych ścieżek i cykli jest równa odpowiednio liczbie Fibonacciego i Lucasa. Liczbę wszystkich zbiorów niezależnych grafu nazwali oni liczbą Fibonacciego grafu. Aktualnie, ze względu na istotne zastosowania w kombinatoryce chemicznej związane z określaniem fizykochemicznych właściwości alkanów, parametr $i(G)$ nazywany jest indeksem Merrifielda-Simmonsa. Przeglądowy artykuł [41] Ivana Gutmana i Stephana Wagnera zbiera najważniejsze wyniki dotyczące indeksu Hosoya oraz indeksu Merrifielda-Simmonsa. Bibliografia tego artykułu jest obszerna, liczy 128 pozycji, z czego większość pochodzi z początku XXI wieku.

Związki pomiędzy liczbami Fibonacciego a indeksem Merrifielda-Simmonsa dały duży impuls do zliczania zbiorów niezależnych w grafach i poszukiwania interpretacji grafowych innych ciągów typu Fibonacciego. Na przykład Zoltán Füredi, w [35], udowodnił że liczba wszystkich maksymalnych zbiorów niezależnych ścieżek i cykli jest odpowiednio równa liczbie Padovana i liczbie Perrina. W pracy [78] pokazano, że w drzewach najmniejsza liczba maksymalnych zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści wyraża się liczbami Padovana. Inne interesujące interpretacje grafowe liczb typu Fibonacciego i wielomianów typu Fibonacciego można znaleźć w pracach [46, 55, 75].

Tematyka niniejszej rozprawy nawiązuje do problemów zliczania w grafach oraz badania własności ciągów typu Fibonacciego a główne rezultaty są zawarte w kolejnych rozdziałach.

W istniejących interpretacjach grafowych dla każdego ciągu typu Fibonacciego poszukiwany był graf w którym liczba zbiorów niezależnych wyrażała się wyrazami odpowiedniego ciągu. W pracy [11] Urszula Bednarz, Iwona Włoch oraz Małgorzata Wołowicz-Musiał zdefiniowały specjalne krawędziowe kolorowanie grafu oraz związany z nim parametr, taki że dla większości znanych ciągów typu Fibonacciego podana została ogólna interpretacja grafowa dla ścieżek i cykli, czyli dla grafów o najprostszej strukturze. Ze względu na złożoność pojęcia wprowadzonego indeksu [11] rozpoczęte zostały badania związane ze szczególnym przypadkiem, mianowicie z $(A, 2B)$ -indeksem w drzewach. Interesujące wyniki zostały następnie uzyskane w pracach [7, 8, 11, 12], w tym z wykorzystaniem liczb telefonicznych, które nie są liczbami typu Fibonacciego. Wyniki zawarte w rozdziale trzecim są kontynuacją tych badań i dotyczą wyznaczenia albo oszacowania $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych, wraz z charakteryzacją grafów ekstremalnych. Główne wyniki z tego rozdziału obejmują:

- wykazanie, że n -ta liczba Lucasa jest najmniejszą wartością $(A, 2B)$ -indeksu w n -krawędziowym grafie jednocyklowym,
- wykazanie, że największa wartość $(A, 2B)$ -indeksu wyraża się przy pomocy liczb telefonicznych,

- podanie charakteryzacji grafów ekstremalnych ze względu na najmniejszy i największy $(A, 2B)$ -indeks,
- podanie kolejnych najmniejszych i największych wartości $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych oraz opisanie grafów ekstremalnych,
- wyznaczenie dokładnych wartości $(A, 2B)$ -indeksu w wybranych grafach jednocyklowych,
- wykazanie nowych tożsamości dla liczb Fibonacciego i Lucasa.

W rozdziale czwartym, w nawiązaniu do istniejących uogólnień ciągu Fibonacciego, przy pomocy jednorodnego równania rekurencyjnego liniowego rzędu k o współczynnikach wymiernych zdefiniowany został ciąg, który jednocześnie uogólnia ciąg Fibonacciego, ciąg Pella, ciąg Narayana, ciąg k -Fibonacciego [31], p -ciąg Fibonacciego [71] oraz uogólniony ciąg Fibonacciego [55]. Ciąg ten został nazwany ciągiem (k, p) -Fibonacciego. Główne wyniki z tego rozdziału obejmują:

- opisanie własności ciągu (k, p) -Fibonacciego, podanie funkcji tworzącej,
- podanie interpretacji kombinatorycznych związanych z krawędziowym kolorowaniem, wprowadzonym w [11], oraz z wykorzystaniem domina, a następnie zastosowanie tych interpretacji do dowodów tożsamości dla liczb (k, p) -Fibonacciego, w tym tożsamości typu Honsbergera,
- podanie tożsamości dla sum liczb (k, p) -Fibonacciego,
- wyznaczenie generatorów macierzowych liczb (k, p) -Fibonacciego.

Wyniki zawarte w tym rozdziale uogólniają jednocześnie wiele znanych rezultatów, które otrzymali między innymi C. Bolat, H. Köse [19], J. Ercolano [28], S. Falcón, Á. Plaza [31], V. E. Hoggat [42], R. Honsberger [43], A. F. Horodam [44], E. Lucas [57], J. L. Ramírez, V. F. Sirvent [68], A. P. Stakhov [72], A. Włoch [77].

Dla lepszego zilustrowania omawianych ciągów, na końcu rozprawy, został zamieszczony dodatek, w którym znajdują się tabele z kilkunastoma początkowymi wyrazami wszystkich ciągów rozważanych w pracy. Dla rozróżnienia, każdy z klasycznych ciągów jest wyróżniony innym kolorem.

Większość zamieszczonych rezultatów została opublikowana, zaś pozostała część jest przygotowana do publikacji. Treść niniejszej rozprawy stanowią artykuły:

- [A] N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch, *The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs*, *Utilitas Mathematica* 106 (2018), 39-49,

- [B] N. Bednarz, I. Włoch, *Some interpretations of the (k, p) -Fibonacci numbers*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, (w druku).

Kolejne dwa artykuły są wysłane do czasopism:

- [C] N. Bednarz, *On (k, p) -Fibonacci numbers*,
- [D] N. Bednarz, *Application of the numbers of the Fibonacci type to the counting problems in graphs*.

Znaczna część rezultatów zawartych w tej pracy była prezentowana w formie referatów na międzynarodowych konferencjach naukowych.

1. *The 25th Workshop '3in1'*, Dosłonce, 2016,
2. *III Konferencja Matematyczno - Informatyczna „Congressio-Mathematica”*, Rzeszów, 2017,
3. *The 6th Gdańsk Workshop on Graph Theory*, Gdańsk, 2018,
4. *27th Workshop Cycles and Colourings*, Nový Smokovec, 2018,
5. *The 27th Workshop '3in1'*, Stryszawa, 2018.

Wyniki przedstawione w niniejszej rozprawie nie wyczerpują rozważanej tematyki i mogą stanowić przyczynek do dalszych badań.

Wykaz oznaczeń

$G = (V, E)$	- graf prosty (graf)
$V(G)$	- zbiór wierzchołków grafu G
$E(G)$	- zbiór krawędzi grafu G
xy	- krawędź incydentna z wierzchołkami x, y
$G \cong H$	- G izomorficzny z H
$d_G(x)$	- stopień wierzchołka x w grafie G
$d_G(x, y)$	- odległość pomiędzy wierzchołkami x i y
$x_0 - x_1 - \dots - x_n$	- droga łącząca wierzchołki x_0 i x_n
N_n	- bezkrawędziowy graf n -wierzchołkowy
P_n	- ścieżka n -wierzchołkowa
K_n	- graf pełny n -wierzchołkowy
K_{n_1, n_2, \dots, n_r}	- graf pełny r -dzielny $\sum_{i=1}^r n_i$ -wierzchołkowy
$K_{n, m}$	- graf pełny dwudzielny, $(n + m)$ -wierzchołkowy
$P(m)$	- ścieżka m -krawędziowa; m -ścieżka
$T(m)$	- drzewo m -krawędziowe
$S(m)$	- gwiazda m -krawędziowa; m -gwiazda
$C(m)$	- cykl m -krawędziowy
$R_{m, t}$	- lizak m -krawędziowy
$S_{m, l}$	- palma m -krawędziowa
$T(m, p, t)$	- trójnóg m -krawędziowy
$S(m, m - k - 1)$	- 2-palma m -krawędziowa
$G \square H$	- iloczyn kartezjański grafów G i H
$G [H]$	- kompozycja grafów G i H
$G \circ H$	- korona grafów G i H
t_n	- n -ta liczba telefoniczna
F_n	- n -ta liczba Fibonacciego
L_n	- n -ta liczba Lucasa
p_n	- n -ta liczba Pella
Q_n	- n -ta liczba Pella-Lucasa

q_n	-	n -ta zmodyfikowana liczba Pella
J_n	-	n -ta liczba Jacobsthala
j_n	-	n -ta liczba Jacobsthala-Lucasa
pv_n	-	n -ta liczba Padovana
pr_n	-	n -ta liczba Perrina
\mathfrak{N}_n	-	n -ta liczba Narayana
T_n	-	n -ta liczba Tribonacciego pierwszego rodzaju
T_n^*	-	n -ta liczba Tribonacciego drugiego rodzaju
$F_{k,n}$	-	n -ta liczba k -Fibonacciego
$L_{k,n}$	-	n -ta liczba k -Lucasa
$p_{k,n}$	-	n -ta liczba k -Pella
$Q_k(n)$	-	n -ta liczba k -Pella-Lucasa
$J_{k,n}$	-	n -ta liczba k -Jacobsthala
f_n	-	n -ta k -uogólniona liczba Fibonacciego
$F_p(n)$	-	n -ta p -liczba Fibonacciego
$F(k, n)$	-	n -ta uogólniona liczba Fibonacciego
$L(k, n)$	-	n -ta uogólniona liczba Lucasa
$P(k, n)$	-	n -ta uogólniona liczba Pella
$Fd(k, n)$	-	n -ta odległościowa liczba Fibonacciego
$Qd(k, n)$	-	n -ta odległościowa liczba Pella
$P_p^{(i)}(n)$	-	n -ta uogólniona (p, i) -liczba Pella
$J_n(s, p)$	-	n -ta liczba (s, p) -Jacobsthala
$F_{k,p}(n)$	-	n -ta liczba (k, p) -Fibonacciego
$Z(G)$	-	indeks Hosoya grafu G
$i(G)$	-	indeks Merrifelda-Simmonsa grafu G (liczba Fibonacciego grafu G)
$i_r(G)$	-	liczba wszystkich r -niezależnych zbiorów grafu G
$f(x)$	-	funkcja tworząca
$f_{k,p}(x)$	-	funkcja tworząca ciągu $\{F_{k,p}(n)\}$

Rozdział 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

W rozdziale tym podamy podstawowe definicje i oznaczenia używane w pracy, które w większości są zaczerpnięte z [16, 27]. Pozostałe zamieszczone będą wewnątrz rozdziałów, bezpośrednio przed ich wykorzystaniem. Ze względu na to, że niektóre używane oznaczenia z teorii grafów są identyczne z oznaczeniami pewnych liczb typu Fibonacciego, w niniejszej pracy, aby uniknąć kolizji oznaczeń, wprowadzone zostały nowe oznaczenia.

Grafem nieskierowanym, skończonym G nazywamy parę (V, E) , gdzie $V = V(G)$ jest zbiorem skończonym oraz $E = E(G)$ jest rodziną mogących się powtarzać dwuelementowych podzbiorów, niekoniecznie różnych elementów ze zbioru V . Zbiór $V(G)$ nazywamy *zbiorem wierzchołków* a jego elementy *wierzchołkami*, zaś zbiór $E(G)$ nazywamy *zbiorem krawędzi* a jego elementy *krawędziami*.

Jeżeli w grafie G istnieją co najmniej dwie krawędzie pomiędzy wierzchołkami x i y , to krawędź tę nazywamy *krawędzią wielokrotną*. Krawędź $xx \in E(G)$ nazywamy *pętlą*.

Graf bez pętli i krawędzi wielokrotnych nazywamy *grafem prostym*. W niniejszej pracy rozważane będą wyłącznie grafy proste, nazywane krótko *grafami*.

Graf $G = (\emptyset, \emptyset)$ nazywamy *grafem pustym* i oznaczamy symbolem \emptyset . Jeżeli $V(G) \neq \emptyset$ i $E(G) = \emptyset$ to G nazywamy *grafem bezkrawędziowym*. Graf bezkrawędziowy n -wierzchołkowy, $n \geq 1$, oznaczamy symbolem N_n . Graf jednowierzchołkowy nazywamy *grafem trywialnym*. Jeżeli $|V(G)| \geq 2$ to mówimy, że graf G jest *nietrywialny*.

Dwa wierzchołki x i y są sąsiednie w grafie G , jeżeli $xy \in E(G)$. Mówimy wtedy, że wierzchołki x, y są *incydentne* z krawędzią xy .

Stopniem wierzchołka x grafu G nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x i oznaczamy symbolem $d_G(x)$. Jeżeli $d_G(x) = 0$ to wierzchołek x nazywamy *wierzchołkiem izolowanym* grafu G . Jeżeli $d_G(x) = 1$ to wierzchołek x nazywamy *wierzchołkiem końcowym* lub *liściem* grafu G .

Podgrafem grafu G nazywamy każdy graf H taki, że $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$.

Mówimy, że grafy G i H są *izomorficzne*, co oznaczamy $G \cong H$, jeżeli istnieje bijekcja $f : V(G) \rightarrow V(H)$, taka że $xy \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)f(y) \in E(H)$.

Dla $n \geq 1$ *drogą* w grafie G łączącą wierzchołki x_0 i x_n nazywamy ciąg wierzchołków i krawędzi $x_0, x_0x_1, x_1, \dots, x_{n-1}x_n, x_n$. Drogę z wierzchołka x_0 do x_n oznaczamy symbolem $x_0 - x_1 - \dots - x_n$. Jeżeli $x_0 = x_n$, dla $n \geq 3$, to otrzymujemy *cykl* w grafie G .

Odległością pomiędzy wierzchołkami x i y nazywamy długość najkrótszej drogi łączącej wierzchołki x i y w grafie G i oznaczamy symbolem $d_G(x, y)$. Przyjmujemy, że $d_G(x, x) = 0$.

Graf nazywamy *spójnym*, jeżeli dla każdego dwóch różnych wierzchołków istnieje łącząca je droga. Graf, który nie posiada takiej własności nazywamy *grafem niespójnym*. Przyjmujemy, że graf jednowierzchołkowy jest spójny.

Ścieżką n -wierzchołkową nazywamy graf P_n , $n \geq 2$, taki że $V(P_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $E(P_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$. Jeżeli $n = 1$ to P_1 jest grafem trywialnym. Liczbę krawędzi ścieżki nazywamy jej *długością*. Ścieżkę długości m , $m \geq 1$, czyli ścieżkę P_{m+1} , oznaczamy symbolem $P(m)$ i nazywamy krótko *m -ścieżką*.

Dla $m \geq 3$ *cyklem m -krawędziowym* nazywamy graf $C(m)$, taki że $V(C(m)) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ i $E(C(m)) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{m-1}x_m, x_mx_1\}$. Liczbę krawędzi cyklu nazywamy jego długością.

Drzewem nazywamy spójny graf bez cykli. Drzewo m -krawędziowe oznaczamy symbolem $T(m)$. Drzewo, które posiada dokładnie trzy liście, nazywamy *trójnogiem*. Niespójny graf bez cykli nazywamy *lasem*.

Jeżeli graf G zawiera dokładnie jeden cykl, to mówimy, że G jest *grafem jednocyklowym*.

Grafem pełnym nazywamy taki graf G , w którym każde dwa wierzchołki są sąsiednie. Graf pełny n -wierzchołkowy oznaczamy symbolem K_n , $n \geq 1$. Przyjmujemy, że graf jednowierzchołkowy jest grafem pełnym.

Graf G , którego zbiór wierzchołków można podzielić na r rozłącznych, niepustych podzbiorów V_1, V_2, \dots, V_r , $r \geq 2$, takich że jeżeli $xy \in E(G)$, to $x \in V_s$ i $y \in V_t$, $1 \leq s, t \leq r$, $s \neq t$, nazywamy *grafem r -dzielny* i oznaczamy symbolem $G(V_1, V_2, \dots, V_r)$. Jeżeli każde dwa wierzchołki $x \in V_s$ i $y \in V_t$, dla $s, t \in \{1, 2, \dots, r\}$, $s \neq t$, są sąsiednie to graf $G(V_1, V_2, \dots, V_r)$ jest *grafem pełnym r -dzielny* i oznaczamy go symbolem $K_{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_r|}$. Jeżeli $r = 2$ to graf $G(V_1, V_2)$ nazywamy *grafem dwudzielny*. W szczególności, jeżeli $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, to graf pełny dwudzielny oznaczamy symbolem $K_{n,m}$.

Graf pełny dwudzielny w którym $|V_1| = 1$ i $|V_2| = n - 1$, $n \geq 2$, nazywamy *gwiazdą* i oznaczamy symbolem $S(n - 1)$. Gwiazdę m -krawędziową będziemy nazywali krótko *m-gwiazdą*. Wierzchołek $x \in V(S(n - 1))$, taki że $\deg_{S(n-1)}(x) = n - 1$ nazywamy *centrum gwiazdy* $S(n - 1)$.

Niech $r \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem r-niezależnym* grafu G , jeżeli dla dowolnych wierzchołków $x, y \in S$, $x \neq y$, zachodzi $d_G(x, y) \geq r$. Ponadto przyjmujemy, że każdy jednoelementowy podzbiór zbioru $V(G)$ oraz zbiór pusty są zbiorami r -niezależnymi grafu G . Symbolem $i_r(G)$ oznaczamy liczbę wszystkich r -niezależnych zbiorów grafu G . Jeżeli $r = 2$ to otrzymujemy definicję zbioru niezależnego w klasycznym sensie. Wówczas parametr $i_2(G)$ nazywamy *indeksem Merrifielda-Simmonsa* lub *liczbą Fibonacciego* grafu G i oznaczamy krótko przez $i(G)$.

Podzbiór $M \subseteq E(G)$ nazywamy *skojarzeniem* lub *zbiorem niezależnym krawędziowo* grafu G , jeżeli dowolne dwie krawędzie należące do tego zbioru nie są sąsiednie. Przyjmujemy, że każdy jednoelementowy podzbiór zbioru $E(G)$ oraz zbiór pusty są skojarzeniami grafu G . Liczbę wszystkich skojarzeń grafu G oznaczamy symbolem $Z(G)$ i nazywamy *indeksem Hosoya* grafu G .

Iloczynem kartezyjskim grafów G i H nazywamy graf $G \square H$, taki że $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \square H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q); (x_i = x_j \text{ i } y_p y_q \in E(H)) \text{ lub } (y_p = y_q \text{ i } x_i x_j \in E(G))\}$.

Kompozycją grafów G i H nazywamy graf $G[H]$, taki że $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G[H]) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q); x_i x_j \in E(G) \text{ lub } (y_p y_q \in E(H) \text{ i } x_i = x_j)\}$.

Koroną grafów G i H nazywamy graf $G \circ H$ otrzymany z grafu G oraz $|V(G)|$ kopii grafu H przez połączenie i -tego wierzchołka grafu G z każdym wierzchołkiem i -tej kopii grafu H , $i \in \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$.

Ciąg postaci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, z warunkami początkowymi $F_0 = F_1 = 1$ nazywamy *ciągami Fibonacciego* a wyrazy tego ciągu *liczbami Fibonacciego*.

Ciąg postaci $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$, z warunkami początkowymi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ nazywamy *ciągami Lucasa* a wyrazy tego ciągu *liczbami Lucasa*.

Niech $n \geq 0$ będzie liczbą całkowitą. *Liczbami telefonicznymi* nazywamy liczby spełniające równanie rekurencyjne

$$t_n = t_{n-1} + (n - 1)t_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2 \text{ i } t_0 = t_1 = 1. \quad (1.1)$$

W tabeli 1.1 podano jedenaście początkowych wyrazów ciągu liczb telefonicznych.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	1	1	2	4	10	26	76	232	764	2620	9496

Tabela 1.1: Ciąg $\{t_n\}$ dla $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Funkcją tworzącą $f(x)$ ciągu $\{a_n\}$ nazywamy szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Rozdział 2

Przedstawienie problemu i celu rozprawy

W rozdziale tym przedstawimy pojęcie ciągów i liczb typu Fibonacciego. Jako wprowadzenie do zasadniczej części rozprawy zostaną przypomniane pierwsze znane interpretacje liczb typu Fibonacciego w grafach, związane ze zliczaniem zbiorów niezależnych.

2.1 Ciągi typu Fibonacciego

Niech $k \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Ciągi zdefiniowane liniowym równaniem rekurencyjnym k -tego rzędu postaci

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_k a_{n-k}, \quad \text{dla } n \geq k, \quad (2.1)$$

gdzie $b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $b_k \neq 0$, z danymi warunkami początkowymi $a_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, z których przynajmniej jeden jest niezerowy, nazywamy *ciągami typu Fibonacciego* a ich wyrazy *liczbami typu Fibonacciego*. Określenie ciąg typu Fibonacciego zostało użyte między innymi w pracach [9, 11, 12, 74, 80].

Dla szczególnych wartości $k, b_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ oraz $a_j, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ otrzymujemy równania rekurencyjne znanych ciągów liczbowych. Poniżej przedstawimy najczęściej rozważane ciągi typu Fibonacciego zdefiniowane równaniem rekurencyjnym drugiego rzędu.

- ciąg Fibonacciego $\{F_n\}$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } F_0 = F_1 = 1, \quad (2.2)$$

- ciąg Lucasa $\{L_n\}$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } L_0 = 2, L_1 = 1, \quad (2.3)$$

- ciąg Pella $\{p_n\}$

$$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } p_0 = 0, p_1 = 1, \quad (2.4)$$

- ciąg Pella-Lucasa $\{Q_n\}$

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } Q_0 = Q_1 = 2, \quad (2.5)$$

- zmodyfikowany ciąg Pella $\{q_n\}$

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } q_0 = q_1 = 1, \quad (2.6)$$

- ciąg Jacobsthala $\{J_n\}$

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } J_0 = 0, J_1 = 1, \quad (2.7)$$

- ciąg Jacobsthala-Lucasa $\{j_n\}$

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } j_0 = 2, j_1 = 1. \quad (2.8)$$

Wyrazy powyższych ciągów nazywamy odpowiednio *liczbami Fibonacciego*, *Lucasa*, *Pella*, *Pella-Lucasa*, *zmodyfikowanymi liczbami Pella*, *liczbami Jacobsthala* i *liczbami Jacobsthala-Lucasa*. W tabeli 2.1 podanych zostało jedenaście początkowych wyrazów tych ciągów.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
p_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

Tabela 2.1: Ciągi $\{F_n\}$, $\{L_n\}$, $\{p_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{q_n\}$, $\{J_n\}$, $\{j_n\}$, dla $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

W XIX wieku francuski matematyk Jacques Philippe Binet wyznaczył wzór jawny dla n -tej liczby Fibonacciego postaci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (2.9)$$

Wzór ten nazywany jest *wzorem Bineta dla liczb Fibonacciego*. Analogicznie, jak w przypadku ciągu Fibonacciego, możemy podać wzory jawne dla ciągów (2.3)-(2.8), które nazywane są odpowiednio *wzorami Bineta dla ciągu Lucasa, Pella, Pella-Lucasa, zmodyfikowanego ciągu Pella, ciągu Jacobsthala oraz ciągu Jacobsthala-Lucasa*. Wtedy

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2.10)$$

$$p_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \quad (2.11)$$

$$Q_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \quad (2.12)$$

$$q_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2} \quad (2.13)$$

$$J_n = \frac{1}{3} [2^n - (-1)^n] \quad (2.14)$$

$$j_n = 2^n + (-1)^n \quad (2.15)$$

Wzór Bineta jest najbardziej znanym wzorem jawnym dla liczb Fibonacciego. Do jego wyznaczenia można zastosować metodę równania charakterystycznego zależności rekurencyjnej. Abraham de Moivre otrzymał ten sam wzór jawny dla liczb Fibonacciego wykorzystując metodę funkcji tworzących.

W tabeli 2.2 przedstawiono funkcje tworzące dla ciągu Fibonacciego, Lucasa, Pella, Pella-Lucasa, zmodyfikowanego ciągu Pella, ciągu Jacobsthala oraz ciągu Jacobsthala-Lucasa.

Ciąg	Funkcja tworząca
Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}$	$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
Ciąg Lucasa $\{L_n\}$	$f(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$
Ciąg Pella $\{p_n\}$	$f(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$
Ciąg Pella-Lucasa $\{Q_n\}$	$f(x) = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$
Zmodyfikowany ciąg Pella $\{q_n\}$	$f(x) = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$
Ciąg Jacobsthala $\{J_n\}$	$f(x) = \frac{x}{1-x-2x^2}$
Ciąg Jacobsthala-Lucasa $\{j_n\}$	$f(x) = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$

Tabela 2.2: Funkcje tworzące dla ciągów $\{F_n\}$, $\{L_n\}$, $\{p_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{q_n\}$, $\{J_n\}$, $\{j_n\}$.

W literaturze pojawia się wiele tożsamości dla liczb typu Fibonacciego i ich sum. Wśród najstarszych i najbardziej znanych możemy wymienić *wzór Cassiniego* dla liczb Fibonacciego

$$F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^n. \quad (2.16)$$

Tożsamość ta została nazwana na cześć siedemnastowiecznego matematyka i astronoma Jeana-Dominique'a Cassiniego, który w [22] opublikował jej dowód. Dla ciągów (2.3)-(2.7) wyznaczono podobne tożsamości, które nazwano odpowiednio *wzorem Cassiniego dla liczb Lucasa*, *Pella*, *Pella-Lucasa*, *zmodyfikowanych liczb Pella* oraz *liczb Jacobsthala*. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5 \cdot (-1)^{n+1}, \quad (2.17)$$

$$p_{n+1}p_{n-1} - p_n^2 = (-1)^n, \quad (2.18)$$

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8 \cdot (-1)^{n+1}, \quad (2.19)$$

$$q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2 = 2^{n-1} \cdot (-1)^n, \quad (2.20)$$

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = 9 \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n-1}. \quad (2.21)$$

Kolejne znane tożsamości dla liczb Fibonacciego, w 1985 roku, w pracy [43], udowodnił Ross Honsberger.

$$F_n = F_{k-1}F_{n-k-1} + F_kF_{n-k}, \quad (2.22)$$

$$F_{m+n} = F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_{m-2}. \quad (2.23)$$

Znanych jest również wiele tożsamości, które pokazują zależności między liczbami typu Fibonacciego. Przytoczymy niektóre z nich

$$L_n = F_n + F_{n-2}, \quad (2.24)$$

$$q_n = p_{n+1} - p_n, \quad (2.25)$$

$$Q_n = \frac{p_{2n}}{p_n}, \quad (2.26)$$

$$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}. \quad (2.27)$$

Poniżej przedstawimy tożsamości dla sum liczb Fibonacciego i Pella, które zostaną wykorzystane w dalszej części pracy.

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1, \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=0}^n p_i = \frac{1}{2} [p_{n+1} + p_n - 1], \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=0}^n F_{2i} = F_{2n+1}, \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=0}^n p_{2i} = \frac{1}{2} [p_{2n+1} - 1], \quad (2.31)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n} - 1, \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=0}^n p_{2i+1} = \frac{1}{2} p_{2n}. \quad (2.33)$$

Inne znane tożsamości dla liczb typu Fibonacciego można znaleźć między innymi w [52, 53, 54].

Przedstawimy z kolei znane ciągi typu Fibonacciego zdefiniowane równaniem rekurencyjnym trzeciego rzędu.

- ciąg Padovana $\{pv_n\}$

$$pv_n = pv_{n-2} + pv_{n-3}, \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } pv_0 = pv_1 = pv_2 = 1. \quad (2.34)$$

- ciąg Perrina $\{pr_n\}$

$$pr_n = pr_{n-2} + pr_{n-3}, \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } pr_0 = 3, pr_1 = 0, pr_2 = 2. \quad (2.35)$$

- ciąg Narayana $\{\mathfrak{N}_n\}$

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{n-1} + \mathfrak{N}_{n-3}, \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } \mathfrak{N}_0 = 0, \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = 1. \quad (2.36)$$

- ciąg Tribonacciego pierwszego rodzaju $\{T_n\}$

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } T_0 = T_1 = T_2 = 1. \quad (2.37)$$

- ciąg Tribonacciego drugiego rodzaju $\{T_n^*\}$

$$T_n^* = T_{n-1}^* + T_{n-2}^* + T_{n-3}^*, \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } T_0^* = 0, T_1^* = T_2^* = 1. \quad (2.38)$$

Wyrazy powyższych ciągów nazywamy odpowiednio *liczbami Padovana*, *Perrina*, *Narayana*, *liczbami Tribonacciego pierwszego rodzaju* oraz *liczbami Tribonacciego drugiego rodzaju*. W tabeli 2.3 podanych zostało jedenaście początkowych wyrazów tych ciągów.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pv_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
pr_n	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17
\mathfrak{N}_n	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19
T_n	1	1	1	3	5	9	17	31	57	105	193
T_n^*	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

Tabela 2.3: Ciągi $\{pv_n\}$, $\{pr_n\}$, $\{\mathfrak{N}_n\}$, $\{T_n\}$, $\{T_n^*\}$ dla $n \in \{0, \dots, 10\}$.

Liczby typu Fibonacciego mają wiele uogólnień jedno lub wieloparametrowych. Poniżej przedstawimy wybrane uogólnienia. Obszerny wykaz uogólnień liczb typu Fibonacciego został przedstawiony między innymi w pracy [11].

Niech k, n, p będą liczbami naturalnymi.

- liczby k -Fibonacciego $F_{k,n}$ (S. Falcón, Á. Plaza [31])

$$F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}, \text{ dla } k \geq 1, n \geq 2 \text{ i } F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1. \quad (2.39)$$

- liczby k -Lucasa $L_{k,n}$ (S. Falcón [29])

$$L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}, \text{ dla } k \geq 1, n \geq 2 \text{ i } L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k. \quad (2.40)$$

- liczby k -Pella $p_{k,n}$ (P. Catarino [23])

$$p_{k,n} = 2p_{k,n-1} + kp_{k,n-2}, \text{ dla } k \geq 1, n \geq 2 \text{ i } p_{k,0} = 0, p_{k,1} = 1. \quad (2.41)$$

- liczby k -Pella-Lucasa $Q_k(n)$ (P. Catarino, P. Vasco [24])

$$Q_k(n) = 2Q_k(n-1) + kQ_k(n-2), \text{ dla } k \geq 1, n \geq 2 \quad (2.42)$$

i $Q_k(0) = Q_k(1) = 2$.

- liczby k -Jacobsthala $J_{k,n}$ (D. Jhala, K. Sisodiya, G. P. S. Rathore [48])

$$J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}, \text{ dla } k \geq 1, n \geq 2 \text{ i } J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1. \quad (2.43)$$

- k -uogólnione liczby Fibonacciego f_n (E. P. Miles [60])

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_{n-k}, \text{ dla } k \geq 2, n \geq k \quad (2.44)$$

i $f_j = 0$, dla $0 \leq j \leq k-2$, $f_{k-1} = 1$.

- p -liczby Fibonacciego $F_p(n)$ (A. P. Stakhov [71])

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), \text{ dla } p \geq 1, n \geq p+2 \quad (2.45)$$

i $F_p(0) = 0$, $F_p(j) = 1$, dla $1 \leq j \leq p+1$.

- uogólnione liczby Fibonacciego $F(k, n)$ (M. Kwaśnik, I. Włoch [55])

$$F(k, n) = F(k, n-1) + F(k, n-k), \text{ dla } k \geq 2, n \geq k \quad (2.46)$$

i $F(k, n) = n+1$, dla $0 \leq n \leq k-1$.

- uogólnione liczby Lucasa $L(k, n)$ (M. Kwaśnik, I. Włoch [55], A. Włoch [77])

$$L(k, n) = L(k, n-1) + L(k, n-k), \text{ dla } k \geq 2, n \geq 2k \quad (2.47)$$

i $L(k, n) = n+1$, dla $0 \leq n \leq 2k-1$.

- uogólnione liczby Pella $P(k, n)$ (I. Włoch [79])

$$P(k, n) = P(k, n-1) + P(k, n-k+1) + P(k, n-k), \text{ dla } k \geq 2, n \geq k+1 \quad (2.48)$$

$$\text{i } P(2, 0) = 0, P(k, 0) = 1, \text{ dla } k \geq 3, P(k, 1) = 1, P(k, n) = 2n - 2, \text{ dla } 2 \leq n \leq k.$$

- odległościowe liczby Fibonacciego $Fd(k, n)$ (U. Bednarz, A. Włoch, M. Wołowiec-Musiał [9])

$$Fd(k, n) = Fd(k, n-k+1) + Fd(k, n-k), \text{ dla } k \geq 2, n \geq k \quad (2.49)$$

$$\text{i } Fd(k, n) = 1, \text{ dla } 0 \leq n \leq k-1.$$

- odległościowe liczby Pella $Qd(k, n)$ (A. Szynal-Liana, A. Włoch, I. Włoch [75])

$$Qd(k, n) = Qd(k, n-1) + Qd(k, n-2) + Qd(k, n-k), \text{ dla } k \geq 1, n \geq k \quad (2.50)$$

$$\text{i } Qd(k, 0) = k, Qd(1, 1) = 1, Qd(k, n) = L_n, \text{ dla } 1 \leq n \leq k-1.$$

- uogólnione (p, i) -liczby Pella $P_p^{(i)}(n)$ (E. Kiliç [51])

$$P_p^{(i)}(n) = 2P_p^{(i)}(n-1) + P_p^{(i)}(n-p-1), \text{ dla } p \geq 1, 0 \leq i \leq p, n \geq p+2$$

$$\text{i } P_p^{(i)}(j) = 0, \text{ dla } 1 \leq j \leq i, P_p^{(i)}(k) = 1, \text{ dla } i+1 \leq k \leq p+1. \quad (2.51)$$

- liczby (s, p) -Jacobsthala $J_n(s, p)$ (D. Bród [21])

$$J_n(s, p) = 2^{s+p} J_{n-1}(s, p) + (2^{2s+p} + 2^{s+2p}) J_{n-2}(s, p), \text{ dla } n \geq 2 \quad (2.52)$$

$$\text{i } J_0(s, p) = 1, J_1(s, p) = 2^s + 2^p + 2^{s+p}.$$

Początkowe wyrazy wszystkich przedstawionych w tym podrozdziale ciągów zostały zamieszczone w tabelach w dodatku zamieszczonym na końcu pracy. Inne uogólnienia liczb typu Fibonacciego można znaleźć, między innymi, w [10, 26, 30, 44, 73]. Nie wyczerpują one jednak wszystkich rozważanych w literaturze uogólnień ciągów typu Fibonacciego.

2.2 Liczby typu Fibonacciego w grafach

Liczby Fibonacciego oraz liczby typu Fibonacciego mają wiele różnych interpretacji, także w grafach. Pierwsze znane interpretacje liczb Fibonacciego w grafach są związane ze zliczaniem zbiorów niezależnych.

Problem zliczania zbiorów niezależnych w grafach został po raz pierwszy postawiony w latach sześćdziesiątych XX wieku przez Paula Erdösa i Leo Mosera. Dotyczył on wyznaczenia największej liczby maksymalnych zbiorów niezależnych dowolnego n -wierzchołkowego grafu i został rozwiązany, między innymi, przez Johna Moona i L. Mosera w [61].

W 1971 roku japoński fizyk Haruo Hosoya, w [46], wprowadził parametr $Z(G)$ grafu molekularnego G (w którym wierzchołki odpowiadają atomom a krawędzie wiązanom pomiędzy atomami), jako liczbę skojarzeń tego grafu. Pokazał on, że pewne fizyczno-chemiczne własności alkanów (w szczególności ich punkty wrzenia) są związane z parametrem $Z(G)$, który później nazwany został *indeksem Hosoya*. W 1989 roku, amerykańscy chemicy Richard Merrifield i Howard Simmons, w [59], zdefiniowali podobny parametr $i(G)$, będący liczbą wszystkich zbiorów niezależnych grafu molekularnego G . Obecnie, dla podkreślenia ich wkładu, parametr $i(G)$ nazywany jest *indeksem Merrifielda-Simmonsa*.

Niezależnie od badań chemików, w 1982 roku, w pracy [67], Helmut Prodinger i Robert Franz Tichy podali związki pomiędzy liczbą wszystkich zbiorów niezależnych odpowiednio ścieżek i cykli a liczbami Fibonacciego i Lucasa.

Twierdzenie 2.1. (H. Prodinger, R. F. Tichy [67]) *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\begin{aligned}i(P(m)) &= F_{m+2}, \\i(C(m)) &= L_m.\end{aligned}$$

Liczbę $i(G)$ wszystkich zbiorów niezależnych grafu, w [67], nazwano *liczbą Fibonacciego grafu*.

Analogiczny wynik dla indeksu Hosoya, w 1977 roku, przedstawił Ivan Gutman.

Twierdzenie 2.2. (I. Gutman [39]) *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\begin{aligned}Z(P(m)) &= F_{m+1}, \\Z(C(m)) &= L_m.\end{aligned}$$

Interpretacje liczb Fibonacciego i Lucasa związane ze zliczaniem zbiorów niezależnych w grafach dały duży impuls do dalszych badań. W kolejnych dziesięcioleciach indeksy

$i(G)$ oraz $Z(G)$ były badane nie tylko z teoretycznego punktu widzenia, ale również ze względu na ich zastosowania w kombinatoryce chemicznej. Literatura dotycząca tej tematyki jest obszerna. Przeglądowy artykuł [41] Stephana Wagnera oraz Ivana Gutmana z 2010 roku liczy 128 pozycji literatury, z których większość stanowią publikacje z początku XXI wieku.

Rozważając szerokie klasy grafów liczba zbiorów niezależnych nie może być wyznaczona dokładnie a jedynie oszacowana. W wielu klasach grafów ekstremalne wartości wyrażane są liczbami typu Fibonacciego. Przedstawimy wybrane przykłady takich oszacowań oraz przypomnimy interpretacje grafowe liczb typu Fibonacciego.

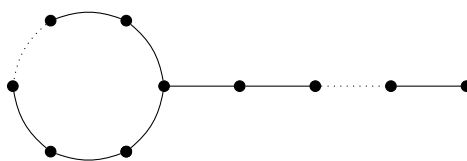
Twierdzenie 2.3. (I. Gutman [39], I. Gutman, O. E. Polansky [40], H. Prodinger, R. F. Tichy [67]) *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\begin{aligned} F_{m+2} &\leq i(T(m)) \leq 2^m + 1, \\ m + 1 &\leq Z(T(m)) \leq F_{m+1}. \end{aligned}$$

Ponadto $i(T(m)) = F_{m+2}$, $Z(T(m)) = F_{m+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(m) \cong P(m)$ oraz $i(T(m)) = 2^m + 1$, $Z(T(m)) = m + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(m) \cong S(m)$.

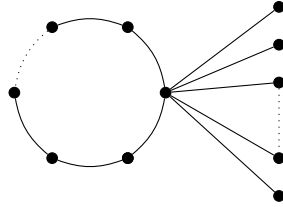
Kolejną klasą grafów w której wyznaczane były wartości omawianych indeksów są grafy jednocyklowe, czyli grafy otrzymane z drzewa przez dodanie dokładnie jednej krawędzi. Grafy te są również nazywane (n, n) -grafami, czyli grafami mającymi n wierzchołków oraz n krawędzi. Liczba zbiorów niezależnych w grafach jednocyklowych została oszacowana przez Andersa Pedersena i Prebena Vestergaarda w [66]. Podali oni także pełną charakteryzację grafów ekstremalnych ze względu na wartość indeksu Merrifielda-Simmonsa w klasie grafów jednocyklowych. Analogiczne wyniki dla indeksu Hosoya przestawił w [62, 63] Jianping Ou. W celu charakteryzacji grafów ekstremalnych wykorzystano szczególne podklasy grafów jednocyklowych.

Niech $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Symbolem $R_{m,t}$ oznaczamy m -krawędziowy graf jednocyklowy otrzymany z cyklu $C(t)$ i ścieżki $P(m - t)$ poprzez identyfikację dowolnego wierzchołka z cyklu z liściem ścieżki. Graf $R_{m,t}$ nazywamy *lizakiem*. Rysunek 2.1 przedstawia konstrukcję lizaka $R_{m,t}$.



Rys. 2.1: Lizak $R_{m,t}$, $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m - 1$.

Niech $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Symbolem $C_{m,l}$ oznaczamy m -krawędziowy graf jednocyklowy otrzymany z cyklu $C(l)$ i gwiazdy $S(m-l)$ poprzez identyfikację dowolnego wierzchołka z cyklu z centrum gwiazdy. Gdy $l = m - 1$ to $C_{m,m-1} \cong R_{m,m-1}$. Rysunek 2.2 przedstawia konstrukcję grafu $C_{m,l}$.



Rys. 2.2: Graf $C_{m,l}$, $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m - 1$.

Twierdzenie 2.4. (J. Ou [63], A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard [66]) *Niech $m \geq 3$ będzie liczbą naturalną i niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym. Wtedy*

$$i(G) \geq L_m,$$

$$Z(G) \leq F_{m+1} + F_{m-1}.$$

Ponadto $i(G) = L_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C(m)$ lub $G \cong R_{m,3}$ oraz $Z(G) = F_{m+1} + F_{m-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C(m)$.

Twierdzenie 2.5. (J. Ou [62], A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard [66]) *Niech $m \geq 3$ będzie liczbą naturalną oraz niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym. Wtedy*

$$i(G) \leq 3 \cdot 2^{m-3} + 1,$$

$$Z(G) \geq 2m - 2.$$

Ponadto $i(G) = 3 \cdot 2^{m-3} + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C(4)$ lub $G \cong C_{m,3}$ oraz $Z(G) = 2m - 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C_{m,3}$.

Interpretacje grafowe dla liczb Fibonacciego i Lucasa, związane z liczbą zbiorów niezależnych, były motywacją do poszukiwania analogicznych interpretacji dla innych liczb typu Fibonacciego. Podamy przegląd wybranych wyników.

Niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy

1. $p_{n+1} = Z(P_n \circ K_1)$, dla $n \geq 1$. (H. Hosoya [46])
2. $Q_n = Z(C(n) \circ K_1)$, dla $n \geq 3$. (H. Hosoya [47])
3. $q_n = i(P_n \square P_2)$, dla $n \geq 1$. (H. Prodinger, R. F. Tichy [67])

4. $J_{n+2} = i(P_n [K_2])$, dla $n \geq 1$. (H. Prodinger, R. F. Tichy [67])
5. $j_n = i(C(n) \circ K_1)$, dla $n \geq 3$. (A. Szynal-Liana, A. Włoch, I. Włoch [75])

Twierdzenie 2.6. (N. Bednarz [3]) *Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

- (i) $F_{k,n+1} = Z(P_n \circ N_{k-1})$, dla $n \geq 1, k \geq 2$
- (ii) $L_{k,n} = Z(C(n) \circ N_{k-1})$, dla $n \geq 3, k \geq 2$.

Dowód (indukcyjny ze względu na n). Niech n będzie liczbą naturalną.

- (i) Niech S będzie dowolnym skojarzeniem w grafie $P_n \circ N_{k-1}$ oraz niech $e \in E(P_n)$ oznacza krawędź incydentną z liściem grafu P_n .

Jeżeli $n = 1$ to $(P_1 \circ N_{k-1}) \cong K_{1,k-1}$, stąd $Z(P_1 \circ N_{k-1}) = k$.

Niech $n \geq 2$. Załóżmy, że dla wszystkich $t \in \mathbb{N}, t < n$, zachodzi równość $F_{k,t+1} = Z(P_t \circ N_{k-1})$. Pokażemy, że $F_{k,n+1} = Z(P_n \circ N_{k-1})$. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli $e \notin S$ to liczba skojarzeń jest równa $Z(P_1 \circ N_{k-1}) \cdot Z(P_{n-1} \circ N_{k-1})$. Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy $kF_{k,n}$ wszystkich możliwości. Jeżeli $e \in S$ to $Z(P_{n-2} \circ N_{k-1}) = F_{k,n-1}$.

Zatem z obu przypadków oraz ze wzoru rekurencyjnego (2.39) dla liczb k -Fibonacciego, otrzymujemy że $Z(P_n \circ N_{k-1}) = kF_{k,n} + F_{k,n-1} = F_{k,n+1}$, co należało udowodnić.

- (ii) Korzystając z zależności (i) oraz ze znanej tożsamości dla liczb k -Lucasa (udowodnionej w [29]) $L_{k,n} = F_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ otrzymujemy wymaganą równość, co kończy dowód.

□

Podobne interpretacje możemy również znaleźć dla zbiorów r -niezależnych.

Twierdzenie 2.7. (M. Kwaśnik, I. Włoch [55], I. Włoch [79]) *Niech $m \geq 1, r \geq 2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\begin{aligned} i_r(P(m-1)) &= F(r, m), \\ i_r(C(m)) &= L(r, m), \\ i_r(P(m-1) \circ K_1) &= P(r, m). \end{aligned}$$

Przedstawione przykłady interpretacji grafowych liczb typu Fibonacciego związane z parametrami $Z(G)$ oraz $i(G)$ pokazują, że dla każdego ciągu typu Fibonacciego można

poszukiwać grafów, w których parametry $Z(G)$ oraz $i(G)$ są wyrażone przez wyrazy tych ciągów. Obserwacja ta była motywacją do odwrócenia problemu i postawienia pytania:

Jakie obiekty należy zliczać w grafach o najprostszych strukturach (ścieżkach, cyklach), tak aby liczba tych obiektów była wyrażona przez liczby typu Fibonacciego?

Poszukiwanie odpowiedzi na to pytanie doprowadziło do znalezienia szerokiej interpretacji grafowej dla ciągów typu Fibonacciego, która zostanie przedstawiona i rozwinięta w następnym rozdziale.

Celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie wyników badań, które są kontynuacją rozważań dotyczących ciągów typu Fibonacciego, ich własności i interpretacji grafowych.

Rozdział 3

Interpretacje grafowe liczb typu Fibonacciego

3.1 Grafy krawędziowo pokolorowane z podziałem

W [11] podano interpretację liczb typu Fibonacciego związaną ze specjalnym krawędziowym kolorowaniem grafów. Przedstawimy tę interpretację.

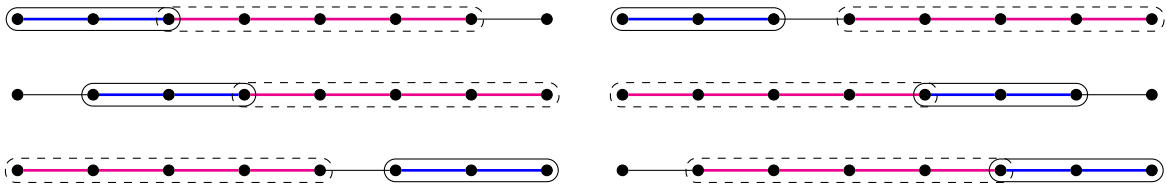
Niech $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ będzie skończonym, niepustym zbiorem. Dla każdego $i \in \mathcal{I}$ niech $\mathcal{I}_i = \{1, 2, \dots, b_i\}$, $b_i \geq 1$. Zbiór $\mathcal{C}_i = \{iA_j; j \in \mathcal{I}_i\}$, dla $i \in \mathcal{I}$, będziemy nazywać zbiorem odcieni koloru i a element iA_j j -tym odcieniem koloru i . W rezultacie, dla wszystkich $i, p \in \mathcal{I}$, takich że $i \neq p$ zachodzi warunek $iA_j \neq pA_j$. Niech $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i; i \in \mathcal{I}\}$. W konsekwencji rodzina \mathcal{C} ma dokładnie $\sum_{i \in \mathcal{I}} |\mathcal{C}_i| = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$ kolorów.

Niech G będzie grafem w którym na zbiorze $E(G)$ została określona funkcja kolorująca z użyciem kolorów z rodziny \mathcal{C} . Mówimy, że graf G jest $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowo pokolorowany z podziałem, jeżeli każdy maksymalny podgraf H grafu G , indukowany przez krawędzie koloru iA_j , gdzie $iA_j \in \mathcal{C}_i$, $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{I}_i$, można podzielić na krawędziowo rozłączne drogi długości i . Zauważymy, że $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem nie zawsze istnieje.

Rozważając odcienie ze zbioru $\mathcal{C}_i = \{iA_j; j \in \mathcal{I}_i\}$ możemy użyć określenia, że czynnik i oznacza „długość pędzla”, jaką należy wykorzystać kolorując graf G przy użyciu odcienia koloru iA_j . Dlatego będziemy mówić o kolorze i i jego odcieniu w ścisłym powiązaniu z długością i drogi w podziale. Na przykład będziemy używać określenia kolor $2A_1$ (a nie kolor A_1), oznaczający jednocześnie podział na drogi długości 2.

Powyższą definicję zilustrujemy następującymi przykładami.

Przykład 3.1. Rozważmy $(2A_1, 4A_1)$ -krawędziowo kolorowane z podziałem ścieżki $P(7)$. Rysunek 3.1 ilustruje, że takie kolorowanie ścieżki $P(7)$ nie istnieje, ponieważ zawsze zostaje jedna krawędź, której nie możemy pokolorować żadnym z kolorów.



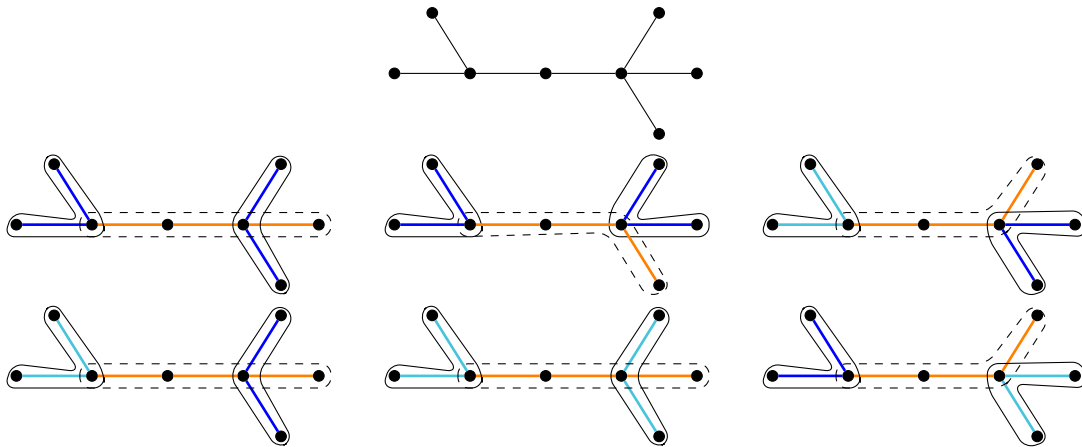
Rys. 3.1

Ścieżkę $P(7)$ możemy natomiast $(2A_1, 3A_1)$ -krawędziowo pokolorować z podziałem. Rysunek 3.2 przedstawia dwa różne $(2A_1, 3A_1)$ -krawędziowe kolorowania z podziałem ścieżki $P(7)$.



Rys. 3.2: Przykłady $(2A_1, 3A_1)$ -krawędziowego kolorowania z podziałem ścieżki $P(7)$.

Przykład 3.2. Rysunek 3.3 przedstawia pewne 7-krawędziowe drzewo oraz sześć różnych $(2A_1, 2A_2, 3A_1)$ -krawędziowych pokolorowań z podziałem tego drzewa.



Rys. 3.3: Przykłady $(2A_1, 2A_2, 3A_1)$ -krawędziowego kolorowania z podziałem 7-krawędziowego drzewa.

Założmy, że graf G możemy $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowo pokolorować z podziałem. Niech $\mathcal{C}(G) = \{G^{(l)} : l \geq 1\}$ będzie rodziną wszystkich, różnych grafów otrzymanych z grafu G przez jego $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowe pokolorowanie z podziałem. Przez $\theta(G^{(p)})$, $1 \leq p \leq l$, oznaczajmy liczbę wszystkich możliwych podziałów maksymalnych iA_j -monochromatycznych, $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i$, podgrafów grafu $G^{(p)}$ na krawędziowo rozłączne drogi długości i .

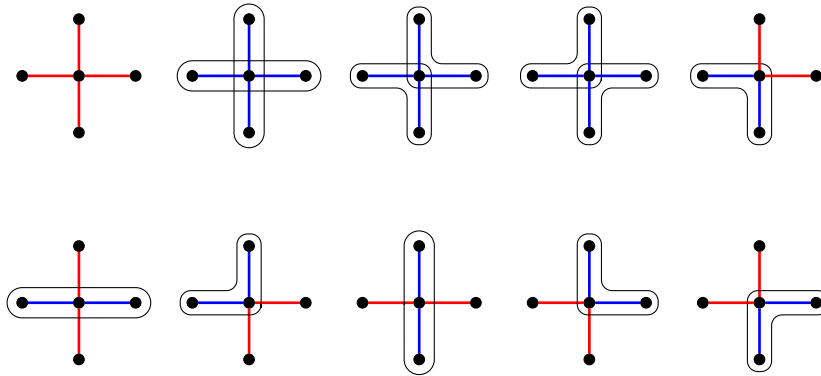
Jeżeli graf $G^{(p)}$ jest $1A_s$ -monochromatyczny, $s \in \mathcal{I}_1$, to wówczas istnieje dokładnie jeden podział na drogi długości 1, czyli $\theta(G^{(p)}) = 1$.

Symbolem

$$\sigma_{(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)}(G) = \sum_{p=1}^{|\mathcal{C}(G)|} \theta(G^{(p)}) \quad (3.1)$$

oznaczamy liczbę wszystkich $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowych pokolorowań z podziałem grafu G i nazywamy $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -indeksem grafu G .

Przykład 3.3. Rozważmy $(A_1, 2A_1)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem gwiazdy $S(4)$. Rysunek 3.4 przedstawia wszystkie możliwe $(A_1, 2A_1)$ -krawędziowe kolorowania z podziałem gwiazdy $S(4)$, biorąc pod uwagę wszystkie możliwe podziały $2A_1$ -monochromatycznych podgrafów, na krawędziowo rozłączne drogi długości 2. Zatem $\sigma_{(A_1, 2A_1)}(S(4)) = 10$.



Rys. 3.4: $(A_1, 2A_1)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem gwiazdy $S(4)$.

W [11] zostało pokazane, że w pewnych przypadkach $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I})$ -indeks grafu $P(m)$ lub $C(m)$ wyraża się znanymi ciągami typu Fibonacciego.

Twierdzenie 3.4. (U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowicz-Musiał [11]) *Niech k, m będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A_1, 2A_1)}(P(m)) = F_m, \quad \text{dla } m \geq 1, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{(A_1, A_2, 2A_1)}(P(m)) = p_{m+1}, \quad \text{dla } m \geq 1, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{(A_1, 2A_1, 2A_2)}(P(m)) = J_{m+1}, \quad \text{dla } m \geq 1, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{(2A_1, 3A_1)}(P(m)) = pv_{m-2}, \quad \text{dla } m \geq 2, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{(A_1, 2A_1, 3A_1)}(P(m)) = T_{m+1}^*, \quad \text{dla } m \geq 2, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{(A_1, \dots, A_k)}(P(m)) = F_{k, m+1}, \quad \text{dla } k \geq 1, m \geq 1, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{(A_1, A_2, 2A_1, \dots, 2A_k)}(P(m)) = p_{k, m+1}, \quad \text{dla } k \geq 1, m \geq 1, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{(A_1, 2A_1, \dots, kA_1)}(P(m)) = f_{m+k-1}, \quad \text{dla } k \geq 2, m \geq k+1, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{(A_1, kA_1)}(P(m)) = F(k, m-k+1), \quad \text{dla } k \geq 2, m \geq k-1, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{(A_1, (k-1)A_1, kA_1)}(P(m)) = P(k, m-k+3), \quad \text{dla } k \geq 1, m \geq k-3. \quad (3.11)$$

Twierdzenie 3.5. (U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał [11]) *Niech k, m będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A_1, 2A_1)}(C(m)) = L_m, \text{ dla } m \geq 3, \quad (3.12)$$

$$\sigma_{(A_1, 2A_1, 2A_2)}(C(m)) = j_m, \text{ dla } m \geq 3, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{(2A_1, 3A_1)}(C(m)) = pr_m, \text{ dla } m \geq 5, \quad (3.14)$$

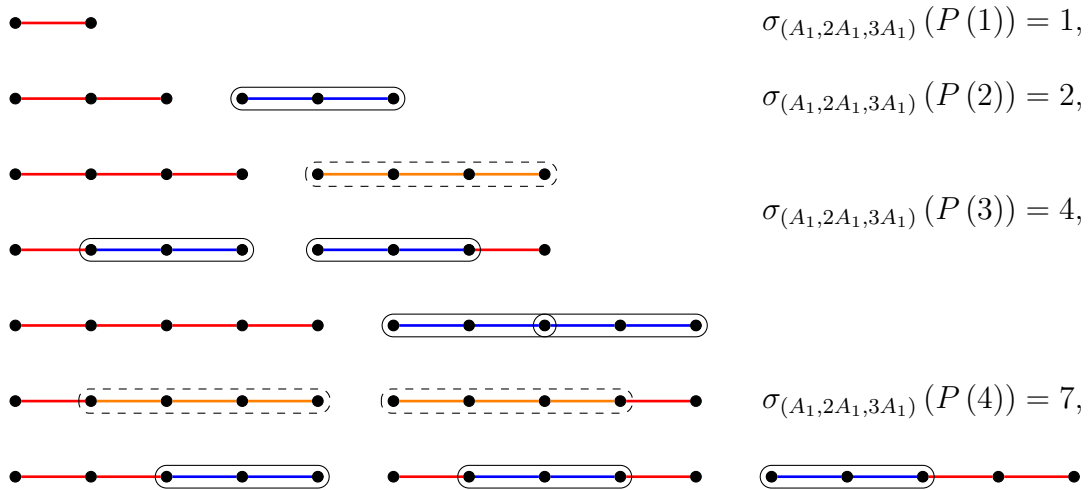
$$\sigma_{(A_1, \dots, A_k, 2A_1)}(C(m)) = L_{k,m}, \text{ dla } k \geq 1, m \geq 3, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{(A_1, A_2, 2A_1, \dots, 2A_k)}(C(m)) = Q_k(m), \text{ dla } k \geq 1, m \geq 3, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{(A_1, kA_1)}(C(m)) = L(k, m), \text{ dla } k \geq 2, m \geq 2k - 1, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{(A_1, 2A_1, kA_1)}(C(m)) = Qd(k, m), \text{ dla } k \geq 3, m \geq k. \quad (3.18)$$

Mimo, że podana interpretacja obejmuje wiele znanych ciągów typu Fibonacciego, to nie wszystkie ciągi zdefiniowane równaniem (2.1) spełniają interpretację związaną z $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowym kolorowaniem z podziałem. Wśród takich ciągów możemy wymienić ciąg Tribonacciego pierwszego rodzaju (2.37). Rysunek 3.5 pokazuje wszystkie możliwe $(A_1, 2A_1, 3A_1)$ -krawędziowe kolorowania z podziałem ścieżki $P(m)$ dla $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Początkowe wyrazy ciągu $\{T_n\}$ są postaci $1, 1, 1, 3, 5, 9, \dots$ natomiast wartości $\sigma_{(A_1, 2A_1, 3A_1)}(P(m))$ tworzą ciąg $1, 2, 4, 7, 13, 24, \dots$. Zatem $\sigma_{(A_1, 2A_1, 3A_1)}(P(m)) = T_{m+1}^*$.



Rys. 3.5: $(A_1, 2A_1, 3A_1)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem ścieżki $P(m)$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

W dalszej części rozprawy zajmiemy się $(A_1, 2A_1)$ -krawędziowym kolorowaniem z podziałem grafu, które dla uproszczenia zapisu będziemy nazywać $(A, 2B)$ -krawędziowym kolorowaniem z podziałem a parametr $\sigma_{(A, 2B)}(G)$ odpowiednio $(A, 2B)$ -indeksem.

Wprowadźmy niezbędne oznaczenia. Niech G będzie grafem $(A, 2B)$ -krawędziowo-

wo pokolorowanym z podziałem oraz niech $e \in E(G)$ będzie dowolną krawędzią. Zapis $c(e) = A$ (odpowiednio $c(e) = 2B$) oznacza, że krawędź e ma kolor A (odpowiednio kolor $2B$). Wtedy $\sigma_{A(e)}(G)$ (odpowiednio $\sigma_{2B(e)}(G)$) jest liczbą wszystkich $(A, 2B)$ -krawędziowych kolorowań z podziałem grafu G , w których krawędź e jest koloru A (odpowiednio koloru $2B$). Równanie

$$\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G) \quad (3.19)$$

jest *podstawową zasadą wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu grafu G* .

Ponadto, jeżeli $c(e) = 2B$ to istnieje krawędź $e' \in E(G)$, sąsiednia z krawędzią e , taka że $c(e') = 2B$. Wówczas $\sigma_{2B(e-e')}(G)$ oznacza liczbę wszystkich $(A, 2B)$ -krawędziowych kolorowań z podziałem grafu G , w których $e - e'$ jest $2B$ -monochromatyczną drogą długości 2 należącą do podziału pewnego maksymalnego $2B$ -monochromatycznego podgrafu grafu G .

W pierwszej kolejności przedstawimy ważniejsze wyniki dotyczące $(A, 2B)$ -krawędziowego kolorowania z podziałem w drzewach. Oszacowanie parametru $\sigma_{(A,2B)}(T(m))$, wraz z charakteryzacją grafów ekstremalnych, zostało podane w [11].

Twierdzenie 3.6. (U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowicz-Musiał [11]) *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$F_m \leq \sigma_{(A,2B)}(T(m)) \leq 1 + \sum_{j \geq 1} \binom{m}{2j} \prod_{p=0}^{j-1} [2j - (2p + 1)]. \quad (3.20)$$

Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(T(m)) = F_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(m) \cong P(m)$ oraz $\sigma_{(A,2B)}(T(m)) = 1 + \sum_{j \geq 1} \binom{m}{2j} \prod_{p=0}^{j-1} [2j - (2p + 1)]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(m) \cong S(m)$.

Konsekwencją tej interpretacji było podanie nowego wzoru jawnego dla liczb telefonicznych.

Twierdzenie 3.7. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Dla dowolnej liczby naturalnej $m \geq 1$ zachodzi*

$$t_m = 1 + \sum_{j \geq 1} \binom{m}{2j} \prod_{p=0}^{j-1} [2j - (2p + 1)] = \sigma_{(A,2B)}(S(m)). \quad (3.21)$$

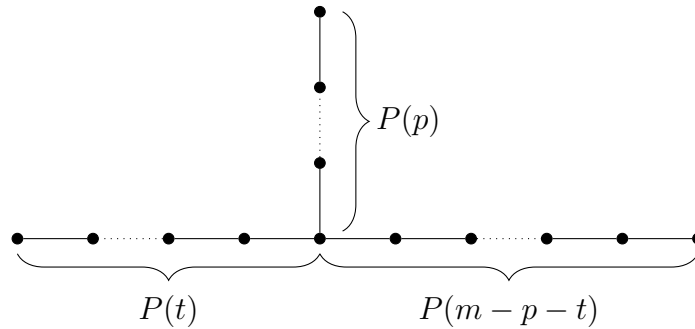
Następny rezultat podaje oszacowanie parametru $\sigma_{(A,2B)}(G)$ z wykorzystaniem drzew ekstremalnych. Twierdzenie to będzie pomocne w szacowaniu $(A, 2B)$ -indeksu w innych klasach grafów.

Twierdzenie 3.8. (U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał [11]) *Niech $l \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Niech $G = H \cup T(l) \cup \{e\}$ będzie dowolnym, spójnym grafem, gdzie H jest spójnym grafem, $T(l)$ jest l -krawędziowym drzewem oraz grafy H i $T(l)$ są wierzchołkowo rozłączne. Niech $e = uv$, gdzie $u \in V(H)$, $v \in V(T(l))$ będzie mostem w G . Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(H \cup P(l) \cup \{e\}) \leq \sigma_{(A,2B)}(G) \leq \sigma_{(A,2B)}(H \cup S(l) \cup \{e\}).$$

W pracach [8, 12] rozważany był ciąg grafów ekstremalnych dla których wartości parametru $\sigma_{(A,2B)}(G)$ tworzą odpowiednio ciąg rosnący, malejący. W celu charakteryzacji kolejnych grafów ekstremalnych wykorzystano szczególne podklasy drzew.

Niech $m \geq 3$, $p \geq 1$, $t \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Symbolem $T(m, p, t)$ oznaczamy m -krawędziowe drzewo powstałe poprzez identyfikację dowolnego wewnętrznego wierzchołka drogi $P(m-p)$ z liściem drogi $P(p)$. Graf $T(m, p, t)$ nazywamy *trójnogiem*. Rysunek 3.6 przedstawia konstrukcję trójnogu $T(m, p, t)$.



Rys. 3.6: Trójnóg $T(m, p, t)$, $m \geq 3$, $p \geq 1$, $t \geq 1$.

W pracy [12] podano drugie z kolei oszacowanie dolne parametru $\sigma_{(A,2B)}(T(m))$.

Twierdzenie 3.9. (U. Bednarz, D. Bród, A. Szynal-Liana, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał [12]) *Niech $m \geq 3$ będzie liczbą naturalną oraz niech $T(m) \not\cong P(m)$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(T(m)) \geq F_{m-1} + 2F_{m-3}.$$

Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(T(m)) = F_{m-1} + 2F_{m-3}$ jeżeli $T(m) \cong T(m, 2, 2)$.

Kolejne wartości parametru $\sigma_{(A,2B)}(T(m))$ tworzące ciąg kolejnych dolnych oszacowań $(A, 2B)$ -indeksu w klasie drzew podano w pracy [8]. Poniżej przedstawimy wybrane rezultaty.

Twierdzenie 3.10. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Niech $m \geq 7$ będzie liczbą naturalną oraz $T(m) \not\cong P(m)$ i $T(m) \not\cong T(m, 2, 2)$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(T(m)) \geq 2F_{m-3} + 7F_{m-5}.$$

Ponadto równość zachodzi, gdy $T(m) \cong T(m, 4, 2)$.

Twierdzenie 3.11. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Niech $T(m) \not\cong P(m)$, $T(m) \not\cong T(m, 2, 2)$ i $T(m) \not\cong T(m, 4, 2)$ dla $m \in \{12, 13\}$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(T(m)) \geq 12F_{m-6} + 3F_{m-3}.$$

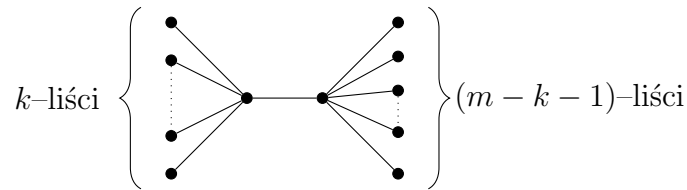
Ponadto równość zachodzi, gdy $T(m) \cong T(m, 5, 2)$.

Twierdzenie 3.12. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Niech $T(m) \not\cong P(m)$, $T(m) \not\cong T(m, 2, 2)$, $T(m) \not\cong T(m, 4, 2)$ i $T(m) \not\cong T(m, 5, 2)$ dla $m \in \{12, 13\}$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(T(m)) \geq 5F_{m-4} + F_{m-2}.$$

Ponadto równość zachodzi, gdy $T(m) \cong T(m, 3, 2)$.

Niech $m \geq 5$, $1 \leq k \leq m - 2$ będą liczbami naturalnymi. Symbolem $S(k, m - k - 1)$ oznaczamy m -krawędziowe drzewo powstałe poprzez identyfikację dowolnego liścia gwiazdy $S(m - k)$ z centrum gwiazdy $S(k)$. Graf $S(k, m - k - 1)$ nazywamy *2-palmą*. Rysunek 3.7 przedstawia konstrukcję 2-palmy $S(k, m - k - 1)$.



Rys. 3.7: 2-palma $S(k, m - k - 1)$, $m \geq 5$, $1 \leq k \leq m - 2$.

Twierdzenie 3.13. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Niech $m \geq 5$, $k \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $k \geq m - k - 1$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(S(k, m - k - 1)) = t_{k+1}t_{m-k-1} + (m - k - 1)t_k t_{m-k-2}. \quad (3.22)$$

Wykonując proste przekształcenia możemy otrzymać drugą postać dla parametru $\sigma_{(A,2B)}(S(k, m - k - 1))$.

Lemat 3.14. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 5$, $k \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $k \geq m - k - 1$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(S(k, m - k - 1)) = t_k t_{m-k} + k t_{k-1} t_{m-k-1}.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru (3.22) oraz z definicji liczb telefonicznych mamy

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(S(k, m - k - 1)) &= t_{k+1} t_{m-k-1} + (m - k - 1) t_k t_{m-k-2} \\ &= (t_k + k t_{k-1}) t_{m-k-1} + (m - k - 1) t_k t_{m-k-2} \\ &= t_k (t_{m-k-1} + (m - k - 1) t_{m-k-2}) + k t_{k-1} t_{m-k-1} \\ &= t_k t_{m-k} + k t_{k-1} t_{m-k-1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Następne twierdzenie podaje drugie z kolei górne oszacowanie parametru $\sigma_{(A,2B)}(T(m))$.

Twierdzenie 3.15. (U. Bednarz, I. Włoch [8]) *Niech $m \geq 5$ będzie liczbą naturalną oraz niech $T(m) \not\cong S(m)$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(T(m)) \leq t_{m-1} + t_{m-2},$$

z warunkami początkowymi $t_3 = 4$, $t_4 = 10$. Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(T(m)) = t_{m-1} + t_{m-2}$ jeżeli $T(m) \cong S(m - 2, 1)$.

Kolejne oszacowania wartości parametru $\sigma_{(A,2B)}(T(m))$ oraz związane z nimi ekstremalne drzewa zostały podane w pracach [7, 8, 12].

3.2 Najmniejszy $(A, 2B)$ -indeks w grafach jednocyklowych

W podrozdziale tym, nawiązując do oszacowań dla drzew, przedstawimy rezultaty dotyczące dolnego oszacowania $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych. W tym celu wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 3.16. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 2$, $1 \leq t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$L_m = F_t L_{m-t} + F_{t-1} L_{m-t-1}. \quad (3.23)$$

Dowód (indukcyjny ze względu na t).

Jeżeli $t = 1$ to $F_1L_{m-1} + F_0L_{m-2} = L_{m-1} + L_{m-2} = L_m$, zatem równość (3.23) jest prawdziwa.

Niech $1 \leq t \leq m-1$. Załóżmy, że $L_m = F_{t-1}L_{m-t+1} + F_{t-2}L_{m-t}$. Pokażemy, że równość (3.23) jest prawdziwa. Korzystając z zależności rekurencyjnej dla liczb Fibonacciego i liczb Lucasa oraz z założenia indukcyjnego mamy, że

$$\begin{aligned} F_tL_{m-t} + F_{t-1}L_{m-t-1} &= F_tL_{m-t} + F_{t-1}(L_{m-t+1} - L_{m-t}) \\ &= F_tL_{m-t} + F_{t-1}L_{m-t+1} - F_{t-1}L_{m-t} \\ &= F_{t-1}L_{m-t+1} + L_{m-t}(F_t - F_{t-1}) \\ &= F_{t-1}L_{m-t+1} + F_{t-2}L_{m-t} = L_m. \end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej równość (3.23) jest prawdziwa. \square

Twierdzenie 3.17. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym, $m \geq 3$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \geq L_m. \quad (3.24)$$

Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(G) = L_m$ dla $G \cong C(m)$.

Dowód (indukcyjny ze względu na m).

Jeżeli $m = 3$ to graf G jest izomorficzny z cyklem $C(3)$, czyli na mocy twierdzenia 3.5 mamy $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(C(3)) = L_3$.

Jeżeli $m = 4$ to albo graf $G \cong C(4)$ albo $G \cong R_{4,3}$. Jeżeli graf $G \cong C(4)$ to z twierdzenia 3.5 mamy $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(C(4)) = L_4$, czyli nierówność (3.24) jest prawdziwa. Jeżeli $G \cong R_{4,3}$ to stosując podstawową zasadę wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu (3.19) w grafie G , względem krawędzi incydentnej z liściem, otrzymujemy że

$$\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(R_{4,3}) = \sigma_{(A,2B)}(C(3)) + 2\sigma_{(A,2B)}(P(2)) = L_3 + 2F_2 = 10 > L_4.$$

Niech $m \geq 5$. Załóżmy, że dla dowolnego jednocyklowego p -krawędziowego grafu G , gdzie $p < m$, zachodzi $\sigma_{(A,2B)}(G) \geq L_p$. Pokażemy, że nierówność (3.24) jest prawdziwa. Jeżeli $G \cong C(m)$ to z twierdzenia 3.5 mamy, że $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(C(m)) = L_m$, więc nierówność (3.24) jest prawdziwa. Załóżmy, że $G \not\cong C(m)$. Niech γ oznacza jedyny cykl grafu G . Wówczas istnieje co najmniej jedna krawędź $e \notin \gamma$, która jest incydentna z wierzchołkiem z cyklu γ . Wtedy $G = H(m-l-1) \cup \{e\} \cup T(l)$, $0 \leq l \leq m-4$, gdzie $H(m-l-1)$ jest $(m-l-1)$ -krawędziowym grafem jednocyklowym,

$T(l)$ jest l -krawędziowym drzewem oraz e jest mostem. Z twierdzenia 3.8 mamy, że $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1) \cup \{e\} \cup T(l)) \geq \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1) \cup P(l+1))$. Rozważmy następujące przypadki:

1. $c(e) = A$.

Wtedy, korzystając z założenia indukcyjnego oraz twierdzenia 3.4, mamy

$$\begin{aligned} \sigma_{A(e)}(G) &= \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1))\sigma_{(A,2B)}(T(l)) \geq \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1))\sigma_{(A,2B)}(P(l)) \\ &\geq L_{m-l-1}F_l. \end{aligned}$$

2. $c(e) = 2B$.

Wtedy istnieje krawędź $e' \in E(G)$, sąsiednia z krawędzią e , taka że $c(e') = 2B$. Oczywiście jest, że $e - e'$ jest $2B$ -monochromatyczną drogą długości 2 w maksymalnym $2B$ -monochromatycznym podgrafie grafu G , oraz że $e - e'$ należy do pewnego podziału tego $2B$ -monochromatycznego podgrafu na drogi długości 2. Wtedy albo $e' \in \gamma$ albo $e' \notin \gamma$.

2.1. $l = 0$.

Jeżeli $e' \in \gamma$ to e' może być wybrana z cyklu γ na dwa sposoby, zatem

$$\sigma_{2B(e-e')}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T_1(m-2)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m-2)),$$

gdzie $T_i(m-2)$, $i = 1, 2$, jest drzewem otrzymanym z grafu $H(m-1)$ poprzez usunięcie krawędzi e' , tzn. $T_i(m-2) = H(m-1) \setminus \{e'\}$, $i = 1, 2$.

Jeżeli $e' \notin \gamma$ to $\sigma_{2B(e-e')}(G) \geq 0$.

W rezultacie, korzystając z twierdzenia 3.6, otrzymujemy

$$\sigma_{2B(e)}(G) \geq \sigma_{(A,2B)}(T_1(m-2)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m-2)) + \sigma_{2B(e-e')}(G) \geq 2F_{m-2}.$$

2.2. $l \geq 1$.

Jeżeli $e' \in \gamma$ to e' może być wybrana z cyklu γ na dwa sposoby. Stosując twierdzenie 3.8 mamy, że

$$\sigma_{2B(e-e')}(G) \geq \sigma_{(A,2B)}(T_1(m-l-2))\sigma_{(A,2B)}(P(l)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m-l-2))\sigma_{(A,2B)}(P(l)),$$

gdzie $T_i(m-l-2)$, $i = 1, 2$, oznacza drzewo otrzymane z grafu $H(m-l-1)$ przez usunięcie krawędzi e' , tzn. $T_i(m-l-2) = H(m-l-1) \setminus \{e'\}$, $i = 1, 2$.

Jeżeli $e' \notin \gamma$ to rozważając tylko przypadek, gdy $e' \in P(l+1)$ mamy, że $\sigma_{2B(e-e')}(G) \geq \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1))\sigma_{(A,2B)}(P(l-1))$.

W rezultacie, korzystając z założenia indukcyjnego oraz z twierdzenia 3.6, otrzy-

mujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{2B(e)}(G) &\geq \sigma_{(A,2B)}(T_1(m-l-2))\sigma_{(A,2B)}(P(l)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m-l-2))\sigma_{(A,2B)}(P(l)) \\ &\quad + \sigma_{(A,2B)}(H(m-l-1))\sigma_{(A,2B)}(P(l-1)) \\ &\geq F_{m-l-2}F_l + F_{m-l-2}F_l + L_{m-l-1}F_{l-1} = L_{m-l-1}F_{l-1} + 2F_{m-l-2}F_l. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia $(A, 2B)$ -indeksu zastosujemy podstawową zasadę daną wzorem (3.19). Jeżeli $l = 0$ to $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G) \geq L_{m-1}F_0 + 2F_{m-2} = L_{m-1} + 2F_{m-2}$. Zatem, aby udowodnić, że twierdzenie jest prawdziwe, wystarczy pokazać, że $L_{m-1} + 2F_{m-2} - L_m \geq 0$. Korzystając z tożsamości (2.24) dla liczb Fibonacciego i Lucasa mamy

$$\begin{aligned} L_{m-1} + 2F_{m-2} - L_m &= 2F_{m-2} - L_{m-2} = 2F_{m-2} - F_{m-2} - F_{m-4} = F_{m-2} - F_{m-4} \\ &= F_{m-3}. \end{aligned}$$

Ponieważ $F_{m-3} > 0$ dla $m \geq 5$, więc nierówność (3.24) jest prawdziwa.

Jeżeli $l \geq 1$ to $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G) \geq L_{m-l-1}F_l + L_{m-l-1}F_{l-1} + 2F_{m-l-2}F_l$. Aby udowodnić, że twierdzenie jest prawdziwe, wystarczy pokazać, że $L_{m-l-1}F_l + L_{m-l-1}F_{l-1} + 2F_{m-l-2}F_l - L_m \geq 0$. Korzystając z lematu 3.16 mamy

$$\begin{aligned} &L_{m-l-1}F_l + L_{m-l-1}F_{l-1} + 2F_{m-l-2}F_l - L_m \\ &= L_{m-l-1}F_l + L_{m-l-1}F_{l-1} + 2F_{m-l-2}F_l - F_lL_{m-l} - F_{l-1}L_{m-l-1} \\ &= F_l(L_{m-l-1} + 2F_{m-l-2} - L_{m-l}) \\ &= F_l(F_{m-l-1} + F_{m-l-3} + 2F_{m-l-2} - F_{m-l} - F_{m-l-2}) \\ &= F_l(F_{m-l-1} + F_{m-l-3} + F_{m-l-2} - F_{m-l-1} - F_{m-l-2}) = F_lF_{m-l-3}. \end{aligned}$$

Ponieważ $F_lF_{m-l-3} > 0$ dla $0 \leq l \leq m-4$, zatem dla $m \geq 5$ nierówność (3.24) jest prawdziwa, co kończy dowód. \square

W dalszej części podrozdziału podamy kolejne dolne oszacowania $(A, 2B)$ -indeksu oraz pokażemy, że cykl $C(m)$ jest jedynym grafem ekstremalnym ze względu na najmniejszą wartość $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych. W tym celu udowodnimy niezbędne lematy.

Lemat 3.18. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $k \geq 1$, $m \geq 3$ będą liczbami naturalnymi. Niech $G = T(k) \cup H(m) \cup \{e\}$ będzie dowolnym, spójnym grafem jednocyklowym, gdzie $H(m)$ jest dowolnym spójnym m -krawędziowym grafem jednocyklowym oraz grafy $T(k)$ i $H(m)$ są wierzchołkowo rozłączne. Niech $e = uv$, gdzie $u \in V(T(k))$, $v \in V(H(m))$ będzie mostem w grafie G . Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \geq \sigma_{(A,2B)}(T(k) \cup \{e\} \cup C(m)).$$

Ponadto równość zachodzi, gdy $H(m) \cong C(m)$.

Dowód. Niech $G = T(k) \cup \{e\} \cup H(m)$ spełnia założenia twierdzenia oraz rozważmy dowolne $(A, 2B)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem grafu G . Niech $e = uv$, gdzie $u \in V(T(k))$, $v \in V(H(m))$, będzie mostem w grafie G . Rozważmy następujące przypadki

1. $c(e) = A$.

$$\text{Wtedy } \sigma_{A(e)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{(A,2B)}(H(m)).$$

2. $c(e) = 2B$.

Wtedy istnieje krawędź $e' \in E(G)$, sąsiednia z krawędzią e , taka że $c(e') = 2B$. Ponadto istnieje taki podział $2B$ -monochromatycznego podgrafu grafu G na drogi długości 2 do którego należy droga $e - e'$. Oczywiście albo $e' \in E(T(k))$ albo $e' \in H(m)$. Zatem

$$\sigma_{2B(e)}(G) = \sigma_{2B(e)}(T(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(H(m)) + \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{2B(e)}(H(m) \cup \{e\}).$$

Z powyższych przypadków otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(G) &= \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{(A,2B)}(H(m)) \\ &+ \sigma_{2B(e)}(T(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(H(m)) + \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{2B(e)}(H(m) \cup \{e\}). \end{aligned}$$

Z twierdzenia 3.17 wiemy, że $\sigma_{(A,2B)}(H(m)) \geq \sigma_{(A,2B)}(C(m))$, zatem

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(G) &\geq \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{(A,2B)}(C(m)) + \sigma_{2B(e)}(T(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(C(m)) \\ &+ \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{2B(e)}(C(m) \cup \{e\}) = \sigma_{(A,2B)}(T(k) \cup C(m) \cup \{e\}), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Z lematów 3.8 oraz 3.18 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.19. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $k \geq 1$, $n \geq 3$ będą liczbami naturalnymi. Niech $G = T(k) \cup H(n) \cup \{e\}$ będzie dowolnym spójnym grafem jednocyklowym, gdzie $H(n)$ to dowolny, spójny, n -krawędziowy graf jednocyklowy oraz grafy $T(k)$ i $H(n)$ są wierzchołkowo rozłączne. Niech $e = uv$, gdzie $u \in V(T(k))$, $v \in V(H(n))$ będzie mostem w grafie G . Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \geq \sigma_{(A,2B)}(P(k) \cup C(n) \cup \{e\}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{n+k+1,n}).$$

Dowód. Rozważmy $(A, 2B)$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem grafu G . Niech $e = uv$, gdzie $u \in V(T(k))$, $v \in V(H(n))$. Rozważmy przypadki

1. $c(e) = A$.

$$\text{Wtedy } \sigma_{A(e)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{(A,2B)}(H(n)).$$

2. $c(e) = 2B$.

Wtedy istnieje krawędź $e' \in E(G)$, taka że $c(e') = 2B$ oraz droga $e - e'$ należy do pewnego podziału $2B$ -monochromatycznego podgrafu na krawędziowo rozłączne drogi długości 2. Oczywiście $e' \in E(T(k))$ albo $e' \in E(H(n))$. Wobec tego

$$\sigma_{2B(e)}(G) = \sigma_{2B(e)}(T(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(H(n)) + \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{2B(e)}(H(n) \cup \{e\}).$$

Wobec powyższego, stosując podstawową zasadę wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu (3.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(G) &= \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{(A,2B)}(H(n)) \\ &\quad + \sigma_{2B(e)}(T(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(H(n)) + \sigma_{(A,2B)}(T(k))\sigma_{2B(e)}(H(n) \cup \{e\}). \end{aligned}$$

Z twierdzenia 3.6 wiemy, że $\sigma_{(A,2B)}(T(k)) \geq \sigma_{(A,2B)}(P(k))$. Ponadto z twierdzenia 3.17 mamy $\sigma_{(A,2B)}(H(n)) \geq \sigma_{(A,2B)}(C(n))$. Zatem

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(G) &\geq \sigma_{(A,2B)}(P(k))\sigma_{(A,2B)}(C(n)) + \sigma_{2B(e)}(P(k) \cup \{e\})\sigma_{(A,2B)}(C(n)) \\ &\quad + \sigma_{(A,2B)}(P(k))\sigma_{2B(e)}(C(n) \cup \{e\}) = \sigma_{(A,2B)}(P(k) \cup C(n) \cup \{e\}) \\ &= \sigma_{(A,2B)}(P(k+1) \cup C(n)) = \sigma_{(A,2B)}(R_{n+k+1,n}). \end{aligned}$$

□

Niech $\mathcal{R} = \{R_{m,t} : m \geq 4, t \geq 3\}$ będzie rodziną lizaków. W dalszych rozważaniach użyjemy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.20. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym oraz niech $G \not\cong C(m)$. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \geq \min_{3 \leq t \leq m-1} \{\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}); R_{m,t} \in \mathcal{R}\}.$$

Dowód. Niech γ będzie jedynym cyklem grafu G . Ponieważ $G \not\cong C(m)$, więc istnieje krawędź $e \in E(G)$, taka że $e \notin \gamma$. Oznacza to, że graf G można przedstawić jako $T(k) \cup H(t) \cup \{e\}$, gdzie $k \geq 0$, $3 \leq t \leq m - 1$, $m = k + t + 1$. Korzystając z wniosku 3.19 wiemy, że $\sigma_{(A,2B)}(T(k) \cup H(t) \cup \{e\}) \geq R_{m+k+1,m}$. Zatem $\sigma_{(A,2B)}(G) \geq \min_{3 \leq t \leq m-1} \{\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}); R_{m,t} \in \mathcal{R}\}$, co kończy dowód. \square

Z twierdzenia 3.20 wnioskujemy, że kolejne najmniejsze wartości $(A, 2B)$ -indeksu w klasie grafów jednocyklowych są realizowane w grafach należących do rodziny \mathcal{R} . Aby otrzymać drugą najmniejszą wartość $(A, 2B)$ -indeksu dla grafów jednocyklowych należy znaleźć najmniejszą wartość parametru $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t})$ w rodzinie \mathcal{R} . Na początku wyznaczymy dokładną wartość $(A, 2B)$ -indeksu dla dowolnego lizaka $R_{m,t} \in \mathcal{R}$.

Twierdzenie 3.21. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = L_t F_{m-t} + 2F_{t-1} F_{m-t-1}. \quad (3.25)$$

Dowód. Niech $E(R_{m,t}) = E(C(m)) \cup E(P(m-t)) = \{e_1, \dots, e_t\} \cup \{e_{t+1}, \dots, e_m\}$ z numeracją krawędzi w naturalnej kolejności. Niech $e_{t+1} \in E(R_{m,t})$ będzie krawędzią należącą do $(m-t)$ -ścieżki, incydentną z jedynym wierzchołkiem stopnia 3 w grafie $R_{m,t}$. Niech $e_1, e_t \in E(R_{m,t})$ będą krawędziami sąsiednimi do krawędzi e_{t+1} , należącymi do cyklu długości t . Rozważmy następujące przypadki

1. $c(e_{t+1}) = A$.

Korzystając z twierdzeń 3.5 oraz 3.17, otrzymujemy że

$$\sigma_{A(e_{t+1})}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(C(t))\sigma_{(A,2B)}(P(m-t-1)) = L_t F_{m-t-1}.$$

2. $c(e_{t+1}) = 2B$.

Wówczas istnieje krawędź e' , sąsiednia do krawędzi e_{t+1} , taka że $c(e') = 2B$ oraz $e - e'$ należy do pewnego podziału $2B$ -monochromatycznego podgrafu grafu G na krawędziowo rozłączne drogi długości 2. Oczywiście albo $e' = e_1$ albo $e' = e_t$ albo $e' = e_{t+2}$, gdzie e_{t+2} jest krawędzią $(m-t)$ -ścieżki sąsiednią z krawędzią

e_{t+1} . Jeżeli $e' = e_1$ lub $e' = e_t$ to otrzymujemy symetryczne przypadki. Korzystając z twierdzeń 3.4 oraz 3.17 mamy

$$\begin{aligned} \sigma_{2B(e_{t+1})}(R_{m,t}) &= 2\sigma_{(A,2B)}(P(t-1))\sigma_{(A,2B)}(P(m-t-1)) \\ &\quad + \sigma_{(A,2B)}(C(t))\sigma_{(A,2B)}(P(m-t-2)) = 2F_{t-1}F_{m-t-1} + L_tF_{m-t-2}. \end{aligned}$$

Z powyższych przypadków, otrzymujemy że

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) &= L_tF_{m-t-1} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} + L_tF_{m-t-2} \\ &= L_t(F_{m-t-1} + F_{m-t-2}) + 2F_{t-1}F_{m-t-1} = L_tF_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 3.22. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m-2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-t+1}).$$

Dowód. Z definicji liczb Fibonacciego i liczb Lucasa oraz z twierdzenia 3.21 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) - \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-t+1}) &= L_tF_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - L_{m-t+1}F_{t-1} - 2F_{m-t}F_{t-2} \\ &= F_{m-t}(L_t - 2F_{t-2}) + F_{t-1}(2F_{m-t-1} - L_{m-t+1}) \\ &= F_{m-t}(F_t + F_{t-2} - 2F_{t-2}) + F_{t-1}(F_{m-t-1} - F_{m-t+1} - F_{m-t-1}) \\ &= F_{m-t}(F_t - F_{t-2}) + F_{t-1}(F_{m-t-1} - F_{m-t+1}) \\ &= F_{m-t}F_{t-1} - F_{t-1}F_{m-t} = 0, \end{aligned}$$

co należało udowodnić. □

W szczególnych przypadkach $(A, 2B)$ -indeks grafu $R_{m,t}$ wyraża się liczbami Fibonacciego.

Wniosek 3.23. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech m będzie liczbą naturalną. Wtedy*

1. $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}) = F_{m+1}$, dla $m \geq 4$,
2. $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}) - \sigma_{(A,2B)}(R_{m,3}) = F_{m-5}$, dla $m \geq 5$,
3. $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,3}) - \sigma_{(A,2B)}(C(m)) = F_{m-4}$, dla $m \geq 4$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 3.21, definicji liczb Fibonacciego oraz liczb Lucasa otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}) &= L_{m-1}F_1 + 2F_{m-2}F_0 = L_{m-1} + 2F_{m-2} = F_{m-1} + F_{m-3} + 2F_{m-2} \\ &= 2F_{m-1} + F_{m-2} = F_m + F_{m-1} = F_{m+1}.\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}) - \sigma_{(A,2B)}(R_{m,3}) &= F_{m+1} - L_3F_{m-3} - 2F_2F_{m-4} \\ &= F_{m+1} - 4F_{m-3} - 4F_{m-4} = F_m + F_{m-1} - 4F_{m-3} - 4F_{m-4} \\ &= 2F_{m-1} + F_{m-2} - 4F_{m-3} - 4F_{m-4} = 3F_{m-2} + 2F_{m-3} - 4F_{m-3} - 4F_{m-4} \\ &= 3F_{m-3} + 3F_{m-4} - 2F_{m-3} - 4F_{m-4} = F_{m-3} - F_{m-4} = F_{m-5}.\end{aligned}$$

Z kolei

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(R_{m,3}) - \sigma_{(A,2B)}(C(m)) &= L_3F_{m-3} + 2F_2F_{m-4} - L_m \\ &= 4F_{m-3} + 4F_{m-4} - F_m - F_{m-2} = 4F_{m-3} + 4F_{m-4} - F_{m-1} - 2F_{m-2} \\ &= 4F_{m-3} + 4F_{m-4} - 3F_{m-2} - F_{m-3} = 3F_{m-3} + 4F_{m-4} - 3F_{m-3} - 3F_{m-4} = F_{m-4}.\end{aligned}$$

□

Kolejne twierdzenie pokazuje zależność pomiędzy $(A, 2B)$ -indeksem cyklu i dowolnego lizaka z rodziny \mathcal{R} .

Twierdzenie 3.24. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m-1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(C(m)) < \sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}).$$

Dowód. Wystarczy udowodnić, że $L_tF_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - L_m > 0$. Korzystając z lematu 3.16, definicji liczb Fibonacciego oraz liczb Lucasa otrzymujemy

$$\begin{aligned}L_tF_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - L_m &= (F_t + F_{t-2})F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - F_tL_{m-t} - F_{t-1}L_{m-t-1} \\ &= F_tF_{m-t} + F_{t-2}F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - F_tL_{m-t} - F_{t-1}(L_{m-t+1} - L_{m-t}) \\ &= F_tF_{m-t} + F_{t-2}F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - F_tL_{m-t} - F_{t-1}L_{m-t+1} + F_{t-1}L_{m-t} \\ &= F_tF_{m-t} + F_{t-2}F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} + L_{m-t}(F_{t-1} - F_t) - F_{t-1}L_{m-t+1} \\ &= F_tF_{m-t} + F_{t-2}F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - F_{t-2}L_{m-t} - F_{t-1}L_{m-t+1} \\ &= F_tF_{m-t} + F_{t-2}F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - F_{t-2}L_{m-t} - F_{t-1}(F_{m-t+1} + F_{m-t-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_t F_{m-t} + F_{t-2} F_{m-t} + 2F_{t-1} F_{m-t-1} - F_{t-2} L_{m-t} - F_{t-1} F_{m-t+1} - F_{t-1} F_{m-t-1} \\
&= F_t F_{m-t} + F_{t-2} F_{m-t} + F_{t-1} F_{m-t-1} - F_{t-2} L_{m-t} - F_{t-1} F_{m-t+1} \\
&= F_t F_{m-t} + F_{t-2} F_{m-t} + F_{t-1} (F_{m-t-1} - F_{m-t+1}) - F_{t-2} L_{m-t} \\
&= F_t F_{m-t} + F_{t-2} F_{m-t} - F_{t-1} F_{m-t} - F_{t-2} L_{m-t} \\
&= F_{m-t} (F_t - F_{t-1}) + F_{t-2} F_{m-t} - F_{t-2} L_{m-t} = 2F_{m-t} F_{t-2} - F_{t-2} L_{m-t} \\
&= F_{t-2} (2F_{m-t} - F_{m-t} - F_{m-t-2}) = F_{t-2} (F_{m-t} - F_{m-t-2}) = F_{t-2} F_{m-t-1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $F_{t-2} F_{m-t-1} > 0$, dla $m \geq 4$, $3 \leq t \leq m-1$, więc $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) > \sigma_{(A,2B)}(C(m))$, co należało udowodnić. \square

Z twierdzeń 3.20 i 3.24 wynika, że cykl jest jedynym grafem ekstremalnym ze względu na najmniejszą wartość $(A, 2B)$ -indeksu w klasie grafów jednocyklowych.

Wniosek 3.25. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym, $m \geq 3$. Wtedy $\sigma_{(A,2B)}(G) = L_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C(m)$.*

Wyznamy drugą z kolei najmniejszą wartość $(A, 2B)$ -indeksu w klasie grafów jednocyklowych. W tym celu wyznaczmy najmniejszą wartość $(A, 2B)$ -indeksu w klasie lizaków.

Twierdzenie 3.26. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 5$, $3 \leq t \leq m-1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(R_{m,3}) \leq \sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) \leq \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}). \quad (3.26)$$

Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,3})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 3$ lub $t = m-2$ oraz $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = m-1$.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) \leq \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1})$. Wystarczy pokazać, że

$$F_{m+1} - L_t F_{m-t} - 2F_{t-1} F_{m-t-1} \geq 0.$$

W tym celu skorzystamy z tożsamości Honsbergera (2.22) postaci

$$F_{m+1} = F_{t-2} F_{m-t+3} + F_{t-3} F_{m-t+2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
F_{m+1} &= F_{t-2} F_{m-t+3} + F_{t-3} F_{m-t+2} - L_t F_{m-t} - 2F_{t-1} F_{m-t-1} \\
&= F_{t-2} F_{m-t+3} + F_{t-3} F_{m-t+2} - (F_t + F_{t-2}) F_{m-t} - 2F_{t-1} F_{m-t-1} \\
&= F_{t-2} (F_{m-t+2} + F_{m-t+1}) + F_{t-3} F_{m-t+2} - F_t F_{m-t} - F_{t-2} F_{m-t} - 2F_{t-1} F_{m-t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{t-2}(F_{m-t+2} + F_{m-t+1} - F_{m-t}) + F_{t-3}F_{m-t+2} - F_tF_{m-t} - 2F_{m-t-1}(F_{t-2} + F_{t-3}) \\
&= 2F_{t-2}F_{m-t+1} + F_{t-3}F_{m-t+2} - F_tF_{m-t} - 2F_{m-t-1}F_{t-2} - 2F_{m-t-1}F_{t-3} \\
&= 2F_{t-2}(F_{m-t+1} - F_{m-t-1}) + F_{t-3}(F_{m-t+2} - 2F_{m-t-1}) - F_tF_{m-t} \\
&= 2F_{t-2}F_{m-t} + F_{t-3}(2F_{m-t} + F_{m-t-1} - 2F_{m-t-1}) - F_tF_{m-t} \\
&= F_{m-t}(2F_{t-2} - F_t) + F_{t-3}(2F_{m-t} - F_{m-t-1}) \\
&= F_{m-t}(2F_{t-2} - F_{t-1} - F_{t-2}) + F_{t-3}(F_{m-t} + F_{m-t-1} + F_{m-t-2} - F_{m-t-1}) \\
&= F_{m-t}(F_{t-2} - F_{t-1}) + F_{t-3}(F_{m-t} + F_{m-t-2}) = -F_{t-3}F_{m-t} + F_{t-3}F_{m-t} + F_{t-3}F_{m-t-2} \\
&= F_{t-3}F_{m-t-2} = F_{t-3}(F_{m-t} - F_{m-t-1}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ponadto $F_{t-3}(F_{m-t} - F_{m-t-1}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_{m-t} = F_{m-t-1}$, czyli $t = m - 1$. Oznacza to, że $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = m - 1$.

Teraz pokażemy, że $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) \geq \sigma_{(A,2B)}(R_{m,3})$. Wystarczy udowodnić następującą nierówność

$$L_t F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - 4F_{m-2} \geq 0. \quad (3.27)$$

Ponownie stosując tożsamość Honsbergera (2.22) postaci $F_{m-2} = F_{t-2}F_{m-t} + F_{t-3}F_{m-t-1}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&L_t F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - 4F_{m-2} \\
&= (F_t + F_{t-2})F_{m-t} + 2F_{t-1}F_{m-t-1} - 4F_{t-2}F_{m-t} - 4F_{t-3}F_{m-t-1} \\
&= F_{m-t}(F_t + F_{t-2} - 4F_{t-2}) + F_{m-t-1}(2F_{t-1} - 4F_{t-3}) \\
&= F_{m-t}(F_t - 3F_{t-2}) + F_{m-t-1}(2F_{t-2} - 2F_{t-3}) \\
&= F_{m-t}(F_{t-1} - 2F_{t-2}) + F_{m-t-1}(2F_{t-2} - 2F_{t-3}) \\
&= F_{m-t}(F_{t-1} - 2F_{t-2}) + F_{m-t-1}(2F_{t-2} - 2F_{t-1} + 2F_{t-2}) \\
&= F_{m-t}(F_{t-1} - 2F_{t-2}) + F_{m-t-1}(4F_{t-2} - 2F_{t-1}) \\
&= F_{m-t}(F_{t-1} - 2F_{t-2}) - 2F_{m-t-1}(F_{t-1} - 2F_{t-2}) \\
&= (F_{t-1} - 2F_{t-2})(F_{m-t} - 2F_{m-t-1}) = (F_{t-3} - F_{t-2})(F_{m-t-2} - F_{m-t-1}) \\
&= (F_{t-2} - F_{t-3})(F_{m-t-1} - F_{m-t-2}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ponadto $(F_{t-2} - F_{t-3})(F_{m-t-1} - F_{m-t-2}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_{t-2} = F_{t-3}$ lub $F_{m-t-1} = F_{m-t-2}$. Stąd otrzymujemy, że nierówność (3.27) zachodzi dla $t = 3$ lub $t = m - 2$, czyli $\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,3})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 3$ lub $t = m - 2$. \square

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy drugą z najmniejszych wartości $(A, 2B)$ -indeksu w klasie grafów jednocyklowych oraz lizaki realizujące tę ekstremalną wartość.

Wniosek 3.27. (N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch [6]) *Niech $m \geq 5$, $3 \leq t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Niech $G \not\cong C(m)$ będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym. Wtedy*

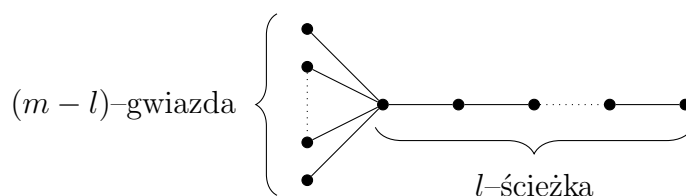
$$\sigma_{(A,2B)}(G) \geq 4F_{m-2}. \tag{3.28}$$

Ponadto $\sigma_{(A,2B)}(G) = 4F_{m-2}$, gdy $G \cong R_{m,3}$ lub $G \cong R_{m,m-2}$.

3.3 Największy $(A, 2B)$ -indeks w grafach jednocyklowych

Największy $(A, 2B)$ -indeks w drzewach był rozważany w [7, 8, 11]. W tym podrozdziale podamy górne oszacowanie $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych. W tym celu zdefiniujemy następujący graf.

Niech $m \geq 3$, $2 \leq l \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Symbolem $S_{m,l}$ oznaczamy m -krawędziowe drzewo, otrzymane ze ścieżki $P(l)$ i gwiazdy $S(m-l)$, poprzez identyfikację liścia ścieżki z centrum gwiazdy. Graf $S_{m,l}$ będziemy nazywać *palma*. Gdy $l = m - 1$ to $S_{m,m-1} = P(m)$. Rysunek 3.8 przedstawia konstrukcję palmy $S_{m,l}$.



Rys. 3.8: Palma $S_{m,l}$, $m \geq 3$, $2 \leq l \leq m - 1$.

Twierdzenie 3.28. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 3$, $2 \leq l \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(S_{m,l}) = F_{l-1}t_{m-l+1} + F_{l-2}t_{m-l}. \tag{3.29}$$

Dowód. Niech $e_l \in E(S_{m,l})$ będzie krawędzią l -ścieżki, incydentną z jedynym wierzchołkiem stopnia $(m-l+1)$ w grafie $S_{m,l}$. Niech $e_{l-1} \in E(S_{m,l})$ będzie krawędzią sąsiadną do krawędzi e_l , należąca do l -ścieżki. Niech $e_i \in E(S_{m,l})$, $i \in \{l+1, l+2, \dots, m\}$ będą krawędziami $(m-l)$ -gwiazdy. Rozważmy następujące przypadki.

1. $c(e_l) = A$.

Wtedy, korzystając z twierdzeń 3.6 i 3.7, otrzymujemy

$$\sigma_{A(e_l)}(S_{m,l}) = \sigma_{(A,2B)}(S(m-l))\sigma_{(A,2B)}(P(l-1)) = F_{l-1}t_{m-l}.$$

2. $c(e_l) = 2B$.

Wtedy istnieje krawędź $e' \in E(S_{m,l})$, sąsiednia do krawędzi e_l , taka że $c(e') = 2B$. Oczywiście jest, że $e_l - e'$ jest $2B$ -monochromatyczną drogą długości 2 w pewnym maksymalnym $2B$ -monochromatycznym podgrafie grafu G oraz że $e_l - e'$ należy do podziału tego $2B$ -monochromatycznego podgrafu na drogi długości 2. Wtedy albo $e' = e_{l-1}$ albo $e' = e_i$, $i \in \{l+1, l+2, \dots, m\}$. Jeżeli $e' = e_{l-1}$ to analogicznie jak w przypadku 1. mamy $\sigma_{2B(e_l - e_{l-1})}(S_{m,l}) = \sigma_{(A,2B)}(S(m-l))\sigma_{(A,2B)}(P(l-2))$. Jeżeli $e' = e_i$, $i \in \{l+1, \dots, m\}$, to z istnienia $(m-l)$ -możliwości wyboru krawędzi e_i mamy, że $\sigma_{2B(e_l - e_i)}(S_{m,l}) = (m-l)\sigma_{(A,2B)}(S(m-l-1))\sigma_{(A,2B)}(P(l-1))$. Ponownie korzystając z twierdzeń 3.6 i 3.7, otrzymujemy

$$\sigma_{2B(e_l)}(S_{m,l}) = \sigma_{2B(e_l - e_{l-1})}(S_{m,l}) + \sigma_{2B(e_l - e_i)}(S_{m,l}) = F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-1}t_{m-l-1}.$$

Korzystając z podstawowej zasady wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu (3.19) oraz z definicji rekurencyjnej liczb telefonicznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(S_{m,l}) &= \sigma_{A(e_l)}(S_{m,l}) + \sigma_{2B(e_l)}(S_{m,l}) = F_{l-1}t_{m-l} + F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-1}t_{m-l-1} \\ &= F_{l-1}(t_{m-l} + (m-l)t_{m-l-1}) + F_{l-2}t_{m-l} = F_{l-1}t_{m-l+1} + F_{l-2}t_{m-l}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać także inną postać $(A, 2B)$ -indeksu grafu $S_{m,l}$.

Lemat 3.29. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 3$, $2 \leq t \leq m-1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(S_{m,l}) = Ft_{m-l} + (m-l)F_{l-1}t_{m-l-1}. \quad (3.30)$$

Dowód. Korzystając ze wzoru (3.29), z definicji rekurencyjnej liczb telefonicznych oraz z definicji liczb Fibonacciego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,2B)}(S_{m,l}) &= F_{l-1}t_{m-l+1} + F_{l-2}t_{m-l} = F_{l-1}(t_{m-l} + (m-l)t_{m-l-1}) + F_{l-2}t_{m-l} \\ &= (F_{l-1} + F_{l-2})t_{m-l} + (m-l)F_{l-1}t_{m-l-1} = Ft_{m-l} + (m-l)F_{l-1}t_{m-l-1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.30. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) = F_{l-1}t_{m-l+1} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1}. \quad (3.31)$$

Dowód. Niech $e_1, e_l \in E(C_{m,l})$ będą krawędziami l -cyklu, incydentnymi z jedynym wierzchołkiem stopnia $(m-l+2)$ w grafie $C_{m,l}$. Niech $e_2 \in E(C_{m,l})$ będzie krawędzią l -cyklu, sąsiednią do krawędzi e_1 oraz niech $e_i \in E(C_{m,l})$, $i \in \{l+1, l+2, \dots, m\}$ będą krawędziami $(m-l)$ -gwiazdy. Rozważmy przypadki

1. $c(e_1) = A$.

Korzystając z twierdzenia 3.28, otrzymujemy

$$\sigma_{A(e_1)}(C_{m,l}) = \sigma_{(A,2B)}(S_{m-1,l-1}) = F_{l-2}t_{m-l+1} + F_{l-3}t_{m-l}.$$

2. $c(e_1) = 2B$.

Wtedy istnieje krawędź $e' \in E(C_{m,l})$, sąsiednia do krawędzi e_1 , taka że $c(e') = 2B$. Oczywiście $e_1 - e'$ jest $2B$ -monochromatyczną drogą długości 2 w $2B$ -monochromatycznym podgrafie grafu G oraz $e_1 - e'$ należy do pewnego podziału tego $2B$ -monochromatycznego podgrafu na $2B$ -monochromatyczne ścieżki długości 2. Wtedy albo $e' = e_2$ albo $e' = e_l$ albo $e' = e_i$, $i \in \{l+1, l+2, \dots, m\}$.

Jeżeli $e' = e_2$ to korzystając ze wzoru (3.30) otrzymujemy

$$\sigma_{2B(e_1-e_2)}(C_{m,l}) = \sigma_{(A,2B)}(S_{m-2,l-2}) = F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1}.$$

Jeżeli $e' = e_l$ to z twierdzeń 3.6 oraz 3.7, otrzymujemy

$$\sigma_{2B(e_1-e_l)}(C_{m,l}) = \sigma_{(A,2B)}(P(l-2))\sigma_{(A,2B)}(S(m-l)) = F_{l-2}t_{m-l}.$$

Niech $e' = e_i$, $i \in \{l+1, \dots, m\}$. Wtedy istnieje dokładnie $(m-l)$ możliwości wyboru krawędzi e_i . Ponownie korzystając z twierdzenia 3.28 mamy

$$\sigma_{2B(e_1-e_i)}(C_{m,l}) = (m-l)\sigma_{(A,2B)}(S_{m-2,l-1}) = (m-l)(F_{l-2}t_{m-l} + F_{l-3}t_{m-l-1}).$$

Z powyższych przypadków otrzymujemy, że

$$\sigma_{2B(e_1)}(C_{m,l}) = \sigma_{2B(e_1-e_2)}(C_{m,l}) + \sigma_{2B(e_1-e_l)}(C_{m,l}) + \sigma_{2B(e_1-e_i)}(C_{m,l}),$$

więc

$$\begin{aligned}\sigma_{2B(\epsilon_1)}(C_{m,l}) &= F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} + F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-2}t_{m-l} \\ &\quad + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} = (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + 2(m-l)F_{l-3}t_{m-l-1}.\end{aligned}$$

Korzystając z podstawowej zasady wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu (3.19), z definicji liczb Fibonacciego oraz z równania rekurencyjnego (1.1) dla liczb telefonicznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) &= F_{l-2}t_{m-l+1} + F_{l-3}t_{m-l} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + 2(m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= F_{l-2}t_{m-l+1} + F_{l-3}(t_{m-l} + (m-l)t_{m-l-1}) + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} \\ &\quad + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= F_{l-2}t_{m-l+1} + F_{l-3}t_{m-l+1} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= (F_{l-2} + F_{l-3})t_{m-l+1} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= F_l t_{m-l+1} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1},\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

W szczególnych przypadkach $(A, 2B)$ -indeks grafu $C_{m,l}$ wyraża się liczbami Fibonacciego oraz liczbami telefonicznymi.

Wniosek 3.31. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 4$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

1. $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-1}) = F_{m+1}$,
2. $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-2}) = 6F_{m-2}$,
3. $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,3}) = t_{m-1} + 2t_{m-2}$.

Dowód. Niech $m \geq 4$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli $l = m - 1$ to $C_{m,m-1} \cong R_{m,m-1}$. Zatem z wniosku 3.23 otrzymujemy, że $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-1}) = \sigma_{(A,2B)}(R_{m,m-1}) = F_{m+1}$. Korzystając ze wzoru (3.31) dla odpowiednio $l = m - 2$, $l = 3$ oraz z definicji liczb telefonicznych i liczb Fibonacciego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-2}) &= F_{m-3}t_3 + 4F_{m-4}t_2 + 2F_{m-5}t_1 = 4F_{m-3} + 8F_{m-4} + 2F_{m-5} \\ &= 6F_{m-3} + 6F_{m-4} = 6F_{m-2},\end{aligned}$$

z kolei

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(C_{m,3}) &= F_2 t_{m-2} + (m-1)F_1 t_{m-3} + (m-3)F_0 t_{m-4} \\ &= 2t_{m-2} + (m-2)t_{m-3} + t_{m-3} + (m-3)t_{m-4} = 3t_{m-2} + (m-2)t_{m-3} \\ &= t_{m-1} + 2t_{m-2},\end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

Kolejne twierdzenie podaje zależność pomiędzy $(A, 2B)$ -indeksem grafów $C_{m,l}$ i $C_{m,l+1}$.

Twierdzenie 3.32. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m-2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) > \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l+1}).$$

Dowód. Niech $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m-2$ będą liczbami naturalnymi. Pokażemy, że $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) - \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l+1}) > 0$. Korzystając z twierdzenia 3.30 oraz z definicji liczb Fibonacciego i liczb telefonicznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) - \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l+1}) &= F_{l-1}t_{m-l+1} + (m-l+2)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &\quad - F_l t_{m-l} - (m-l+1)F_{l-1}t_{m-l-1} - (m-l-1)F_{l-2}t_{m-l-2} \\ &= F_{l-1} \left(t_{m-l+1} - (m-l)t_{m-l-1} \right) + F_{l-2} \left(t_{m-l} - (m-l-1)t_{m-l-2} \right) \\ &\quad + (m-l+1)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} - F_l t_{m-l} - F_{l-1}t_{m-l-1} \\ &= F_{l-1}t_{m-l} + F_{l-2}t_{m-l-1} + (m-l+1)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} - F_l t_{m-l} - F_{l-1}t_{m-l-1} \\ &= (F_{l-1} - F_l)t_{m-l} + (F_{l-2} - F_{l-1})t_{m-l-1} + (m-l+1)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= -F_{l-2}t_{m-l} - F_{l-3}t_{m-l-1} + (m-l+1)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l)F_{l-3}t_{m-l-1} \\ &= (m-l)F_{l-2}t_{m-l} + (m-l-1)F_{l-3}t_{m-l-1}.\end{aligned}$$

Ponieważ $l \leq m-2$, więc $m-l > 0$ oraz $m-l-1 > 0$. Zatem $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) - \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l+1}) > 0$, co kończy dowód. \square

Jako wniosek z twierdzeń 3.26 oraz 3.32 możemy podać zależność pomiędzy $(A, 2B)$ -indeksem lizaka $R_{m,t}$ i grafu $C_{m,l}$.

Wniosek 3.33. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq l, t \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(R_{m,t}) \leq \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}).$$

Ponadto równość zachodzi, gdy $t = l = m - 1$.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 3.34. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 4$, $3 \leq l \leq m - 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$F_{m+1} \leq \sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) \leq t_{m-1} + 2t_{m-2}. \quad (3.32)$$

Dowód. Z twierdzenia 3.32 otrzymujemy, że dla dowolnego $3 \leq l \leq m - 1$ zachodzi $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) \geq \sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-1})$. Z wniosku 3.31 wiemy, że $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,m-1}) = F_{m+1}$. Zatem $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) \geq F_{m+1}$. Ponownie korzystając z twierdzenia 3.32 otrzymujemy, że dla dowolnego $3 \leq l \leq m - 1$ zachodzi $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) \leq \sigma_{(A,2B)}(C_{m,3})$. Z wniosku 3.31 wiemy, że $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,3}) = t_{m-1} + 2t_{m-2}$. Stąd $\sigma_{(A,2B)}(C_{m,l}) \leq t_{m-1} + 2t_{m-2}$, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.35. (N. Bednarz [3]) *Niech $m \geq 3$ będzie liczbą naturalną oraz niech G będzie m -krawędziowym grafem jednocyklowym. Wtedy*

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \leq t_{m-1} + 2t_{m-2}. \quad (3.33)$$

Ponadto równość zachodzi, jeżeli $G \cong C_{m,3}$.

Dowód (indukcyjny ze względu na m).

Niech $m \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli $m = 3$ to $G \cong C(3)$. Zatem z lematu 3.34, z twierdzenia 3.24 i z wniosku 3.33 nierówność (3.33) jest prawdziwa.

Jeżeli $m = 4$ to $G \cong C(4)$ lub $G \cong R_{4,3}$. Jeżeli $G \cong C(4)$ to ponownie korzystając z lematu 3.34, z twierdzenia 3.17 oraz z wniosku 3.25 otrzymujemy, że nierówność (3.33) jest prawdziwa. Jeżeli $G \cong R_{4,3}$ to z twierdzenia 3.21 mamy $\sigma_{(A,2B)}(G) = 8$, więc w tym przypadku nierówność (3.33) również jest prawdziwa.

Niech $m \geq 5$. Załóżmy, że dla n -krawędziowego grafu jednocyklowego G , gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n < m$, prawdziwa jest nierówność

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \leq t_{n-1} + 2t_{n-2}.$$

Jeżeli $G \cong C(m)$ to z lematu 3.34, z twierdzenia 3.17 oraz wniosku 3.25 nierówność (3.33) jest prawdziwa. Jeżeli $G \cong C_{m,l}$ to z lematu 3.34 nierówność (3.33) jest prawdziwa.

Niech $G \not\cong C(m)$ oraz $G \not\cong C_{m,l}$. Przez γ oznaczmy jedyny cykl w grafie G . Ponieważ $G \not\cong C(m)$ i $G \not\cong C_{m,l}$, więc zachodzi co najmniej jedna z poniższych możliwości

- (1) w grafie G istnieje taki wierzchołek, którego odległość od γ -cyklu wynosi co najmniej dwa,
- (2) γ -cykl zawiera co najmniej dwa wierzchołki stopnia większego niż dwa.

Niech e oznacza krawędź grafu G , taką że $e \notin \gamma$ oraz e jest incydentna z wierzchołkiem z cyklu γ . Wtedy $G = H(m - k - 1) \cup \{e\} \cup T(k)$, gdzie $H(m - k - 1)$ jest $(m - k - 1)$ -krawędziowym grafem jednocyklowym, $T(k)$ jest k -krawędziowym drzewem oraz $e = xy$, $x \in V(H(m - k - 1))$, $y \in V(T(k))$ jest mostem w grafie G .

Rozważmy następujące przypadki.

1. $c(e) = A$.

Korzystając z założenia indukcyjnego oraz z twierdzeń 3.6 i 3.7, otrzymujemy

$$\sigma_{A(e)}(G) = \sigma_{(A,2B)}(H(m - k - 1))\sigma_{(A,2B)}(T(k)) \leq (t_{m-k-2} + 2t_{m-k-3})t_k.$$

2. $c(e) = 2B$.

Wówczas istnieje krawędź $e' \in E(G)$, taka że $c(e') = 2B$. Oczywiście $e - e'$ jest $2B$ -monochromatyczną drogą długości 2 w pewnym maksymalnym $2B$ -monochromatycznym podgrafie grafu G , oraz $e - e'$ należy do podziału tego podgrafu na drogi długości 2. Ponadto albo $e' \in \gamma$ albo $e' \notin \gamma$. Rozważmy możliwości

- 2.1. $k = 0$.

Wtedy $G = H(m - 1) \cup \{e\}$ oraz z (2) wiemy, że $H(m - 1) \not\cong C(m - 1)$. Jeżeli $e' \in \gamma$ to $\sigma_{2B(e-e')}(G) = \sigma_{(A,2B)}(T_1(m - 2)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m - 2))$, gdzie $T_i(m - 2)$, $i \in \{1, 2\}$, jest drzewem otrzymanym z grafu $H(m - 1)$ przez usunięcie krawędzi e' . Ponadto $T_i(m - 2) \not\cong S(m - 2)$, $i \in \{1, 2\}$. Korzystając z twierdzenia 3.15 otrzymujemy $\sigma_{2B(e-e')}(G) \leq 2t_{m-3} + 2t_{m-4}$.

Jeżeli $e' \notin \gamma$ to mamy $d_{H(m-1)}(x) - 2$ możliwości wyboru krawędzi e' . Ponieważ $d_{H(m-1)}(x) \leq m - 3$, więc korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy $\sigma_{2B(e-e')}(G) = (d_{H(m-1)}(x) - 2)\sigma_{(A,2B)}(G(m - 2)) \leq (m - 5)(t_{m-3} + 2t_{m-4})$, gdzie $G(m - 2)$ oznacza $(m - 2)$ -krawędziowy graf jednocyklowy otrzymany z grafu G poprzez usunięcie krawędzi e i e' .

Z powyższych przypadków otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{2B(e)}(G) &\leq 2t_{m-3} + 2t_{m-4} + (m - 5)t_{m-3} + (2m - 10)t_{m-4} \\ &= (m - 3)t_{m-3} + (2m - 8)t_{m-4}. \end{aligned}$$

2.2. $k \geq 1$.

Wtedy albo $e' \in E(H(m-k-1))$ albo $e' \in E(T(k))$.

Niech $e' \in E(H(m-k-1))$. Wtedy albo $e' \in \gamma$ albo $e' \notin \gamma$. Jeżeli $e' \in \gamma$ to $\sigma_{2B(e-e')}(G) = [\sigma_{(A,2B)}(T_1(m-k-2)) + \sigma_{(A,2B)}(T_2(m-k-2))] \sigma_{(A,2B)}(T(k))$, gdzie $T_i(m-k-2)$, $i \in \{1, 2\}$, jest drzewem otrzymanym z grafu $H(m-k-1)$ przez usunięcie krawędzi e' , $T_i(m-k-2) \not\cong S(m-k-2)$, $i \in \{1, 2\}$. Korzystając z twierdzenia 3.15 mamy, że $\sigma_{2B(e-e')}(G) \leq 2(t_{m-k-3} + t_{m-k-4})t_k$. Jeżeli $e' \notin \gamma$ to mamy $d_{H(m-k-1)}(x) - 2$ możliwości wyboru krawędzi e' , zatem $\sigma_{2B(e-e')}(G) = (d_{H(m-k-1)}(x) - 2)\sigma_{(A,2B)}(H(m-k-2))\sigma_{(A,2B)}(T(k))$. Ponieważ $d_{H(m-k-1)}(x) \leq m-k-2$, więc korzystając z założenia indukcyjnego oraz z twierdzenia 3.7 otrzymujemy $\sigma_{2B(e-e')}(G) \leq (m-k-4)(t_{m-k-3} + 2t_{m-k-4})t_k$.

Niech $e' \in E(T(k))$. Wtedy mamy $d_{T(k)}(y)$ możliwości wyboru krawędzi e' . Ponieważ $d_{T(k)}(y) \leq k$, więc korzystając z założenia indukcyjnego i twierdzenia 3.7 otrzymujemy $\sigma_{2B(e-e')}(G(m)) = \deg_{T(k)}(y)\sigma_{(A,2B)}(H(m-k-1))\sigma_{(A,2B)}(T(k-1)) \leq k(t_{m-k-2} + 2t_{m-k-3})t_{k-1}$.

Z wszystkich powyższych możliwości mamy, że

$$\begin{aligned} \sigma_{2B(e)}(G) &\leq 2t_k t_{m-k-3} + 2t_k t_{m-k-4} + (m-k-4)t_k t_{m-k-3} \\ &+ 2(m-k-4)t_k t_{m-k-4} + k t_{k-1} t_{m-k-2} + 2k t_{k-1} t_{m-k-3} \\ &= (m-k-2)t_k t_{m-k-3} + 2(m-k-3)t_k t_{m-k-4} + k t_{k-1} t_{m-k-2} + 2k t_{k-1} t_{m-k-3}. \end{aligned}$$

Z podstawowej zasady wyznaczania $(A, 2B)$ -indeksu (3.19) mamy, że $\sigma_{(A,2B)}(G) = \sigma_{A(e)}(G) + \sigma_{2B(e)}(G)$. Rozważmy przypadki:

1. $k = 0$.

Wtedy $\sigma_{(A,2B)}(G) \leq t_{m-2} + 2t_{m-3} + (m-3)t_{m-3} + (2m-8)t_{m-4} = t_{m-2} + (m-1)t_{m-3} + (2m-8)t_{m-4}$. Wystarczy zatem pokazać, że

$$t_{m-1} + 2t_{m-2} - t_{m-2} - (m-1)t_{m-3} - (2m-8)t_{m-4} \geq 0.$$

Korzystając z równania rekurencyjnego (1.1) dla liczb telefonicznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &t_{m-1} + 2t_{m-2} - t_{m-2} - (m-1)t_{m-3} - (2m-8)t_{m-4} \\ &= 2t_{m-2} + (m-2)t_{m-3} - (m-1)t_{m-3} - (2m-8)t_{m-4} \\ &= 2t_{m-2} - t_{m-3} - (2m-8)t_{m-4} \\ &= 2t_{m-3} + (2m-6)t_{m-4} - t_{m-3} - (2m-8)t_{m-4} = t_{m-3} + 2t_{m-4} \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem nierówność (3.33) jest prawdziwa.

2. $k \geq 1$.

Wtedy, korzystając z równania rekurencyjnego (1.1) dla liczb telefonicznych, mamy

$$\begin{aligned}
\sigma_{(A,2B)}(G) &\leq t_k t_{m-k-2} + 2t_k t_{m-k-3} + (m-k-2)t_k t_{m-k-3} + 2(m-k-3)t_k t_{m-k-4} \\
&\quad + kt_{k-1} t_{m-k-2} + 2kt_{k-1} t_{m-k-3} \\
&= t_k (t_{m-k-2} + (m-k-2)t_{m-k-3}) + 2t_k (t_{m-k-3} + (m-k-3)t_{m-k-4}) \\
&\quad + kt_{k-1} t_{m-k-2} + 2kt_{k-1} t_{m-k-3} \\
&= t_k t_{m-k-1} + 2t_k t_{m-k-2} + kt_{k-1} t_{m-k-2} + 2kt_{k-1} t_{m-k-3} \\
&= t_k t_{m-k-1} + kt_{k-1} t_{m-k-2} + 2(t_k t_{m-k-2} + kt_{k-1} t_{m-k-3}).
\end{aligned}$$

Z lematu 3.14 mamy, że $t_k t_{m-k-1} + kt_{k-1} t_{m-k-2} = \sigma_{(A,2B)}(S(k, m-k-2))$ oraz $t_k t_{m-k-2} + kt_{k-1} t_{m-k-3} = \sigma_{(A,2B)}(S(k, m-k-3))$. Zatem, korzystając z twierdzenia 3.15, otrzymujemy

$$\sigma_{(A,2B)}(G) \leq t_{m-2} + t_{m-3} + 2(t_{m-3} + t_{m-4}) = t_{m-2} + 3t_{m-3} + 2t_{m-4}.$$

Wystarczy pokazać, że $t_{m-1} + 2t_{m-2} - t_{m-2} - 3t_{m-3} - 2t_{m-4} \geq 0$. Korzystając z równania rekurencyjnego (1.1) dla liczb telefonicznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
t_{m-1} + t_{m-2} - 3t_{m-3} - 2t_{m-4} &= 2t_{m-2} + (m-5)t_{m-3} - 2t_{m-4} \\
&= (m-3)t_{m-3} + (2m-8)t_{m-4} \geq 0,
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

□

Rozdział 4

Liczby (k, p) -Fibonacciego

W rozdziale tym wprowadzimy nowe, dwuparametrowe uogólnienie ciągu Fibonacciego, zdefiniowane przy pomocy równania rekurencyjnego k -tego rzędu o wymiernych współczynnikach. Równanie to uogólnia znane rodzaje ciągów typu Fibonacciego.

Rezultaty zawarte w tym rozdziale uogólniają znane własności ciągów typu Fibonacciego, między innymi z [31, 32, 34, 45, 50, 53, 57, 68, 72, 77].

4.1 Definicja i podstawowe własności

Niech $k \geq 2$, $n \geq 0$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Ciągami (k, p) -Fibonacciego nazywamy ciąg $\{F_{k,p}(n)\}$ zdefiniowany liniowym równaniem rekurencyjnym k -tego rzędu postaci

$$F_{k,p}(n) = pF_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n-k+1) + F_{k,p}(n-k), \text{ dla } n \geq k, \quad (4.1)$$

z warunkami początkowymi $F_{k,p}(0) = 0$, $F_{k,p}(n) = p^{n-1}$, dla $1 \leq n \leq k-1$.

Wyrazy ciągu (k, p) -Fibonacciego nazywamy *liczbami (k, p) -Fibonacciego*.

W tabeli 4.1 podanych zostało jedenaście początkowych wyrazów ciągu (k, p) -Fibonacciego dla szczególnych wartości parametrów k i p .

		n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p		\backslash											
$k=2$	1	$\left \begin{array}{c} n \\ \backslash \\ p \end{array} \right $	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
	$\frac{3}{2}$	$\left \begin{array}{c} n \\ \backslash \\ p \end{array} \right $	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
	2	$\left \begin{array}{c} n \\ \backslash \\ p \end{array} \right $	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837

	$\begin{array}{c c} & n \\ \hline p & \end{array}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k=3$	1	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19
	2	0	1	2	5	13	33	84	214	545	1388	3535
	3	0	1	3	11	40	145	526	1908	6921	25105	91065
$k=4$	1	0	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10
	2	0	1	2	4	9	21	48	109	248	565	1287
	3	0	1	3	9	29	94	303	976	3145	10135	32660

Tabela 4.1: Ciąg (k, p) -Fibonacci dla $k \in \{2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$ i $p \in \{1, 2, \frac{3}{2}, 3\}$.

Dla pewnych wartości parametrów k i p zależność (4.1) definiuje dobrze znane ciągi typu Fibonacci. Niech k , n , t będą liczbami całkowitymi oraz niech p będzie liczbą wymierną. Wtedy

$$F_{2,1}(n) = F_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1. \quad (4.2)$$

$$F_{2,\frac{3}{2}}(n) = p_n, \text{ dla } n \geq 0. \quad (4.3)$$

$$F_{3,1}(n) = \mathfrak{N}_n, \text{ dla } n \geq 0. \quad (4.4)$$

$$F_{2,\frac{t}{2}}(n) = F_{t-1,n}, \text{ dla } n \geq 0, p = \frac{t}{2}, t \geq 2. \quad (4.5)$$

$$F_{k,1}(n) = F_{k-1}(n), \text{ dla } k \geq 2, n \geq 0. \quad (4.6)$$

$$F_{k,1}(n) = F(k, n-k), \text{ dla } k \geq 2, n \geq k. \quad (4.7)$$

Twierdzenie 4.1. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Funkcja tworząca $f_{k,p}(x)$ ciągu $\{F_{k,p}(n)\}$ ma postać*

$$f_{k,p}(x) = \frac{x}{1 - px - (p-1)x^{k-1} - x^k}. \quad (4.8)$$

Dowód. Niech $f_{k,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,p}(n) x^n$. Wtedy

$$\begin{aligned} f_{k,p}(x) &= F_{k,p}(0) x^0 + F_{k,p}(1) x + \dots + F_{k,p}(k-1) x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} F_{k,p}(n) x^n \\ &= x + px^2 + \dots + p^{k-2} x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} p F_{k,p}(n-1) x^n \\ &\quad + \sum_{n=k}^{\infty} (p-1) F_{k,p}(n-k+1) x^n + \sum_{n=k}^{\infty} F_{k,p}(n-k) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + px^2 + \dots + p^{k-2}x^{k-1} + px \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,p}(n) x^n - \sum_{n=0}^{k-2} F_{k,p}(n) x^n \right) \\
&\quad + (p-1)x^{k-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,p}(n) x^n - F_{k,p}(0) x^0 \right) + x^k \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,p}(n) x^n \\
&= x + px^2 + \dots + p^{k-2}x^{k-1} + px f_{k,p}(x) - px (F_{k,p}(0) x^0 + \dots + F_{k,p}(k-2) x^{k-2}) \\
&\quad + (p-1)x^{k-1} f_{k,p}(x) - (p-1)x^{k-1} F_{k,p}(0) x^0 + x^k f_{k,p}(x) \\
&= x + px^2 + \dots + p^{k-2}x^{k-1} + px f_{k,p}(x) - px (x + px^2 + \dots + p^{k-3}x^{k-2}) \\
&\quad + (p-1)x^{k-1} f_{k,p}(x) + x^k f_{k,p}(x) \\
&= x + px^2 + \dots + p^{k-2}x^{k-1} - px^2 - \dots - p^{k-2}x^{k-1} + f_{k,p}(x) (px + (p-1)x^{k-1} + x^k) \\
&= x + f_{k,p}(x) (px + (p-1)x^{k-1} + x^k).
\end{aligned}$$

Ponieważ $f_{k,p}(x) = x + f_{k,p}(x) (px + (p-1)x^{k-1} + x^k)$, więc

$$f_{k,p}(x) (1 - px - (p-1)x^{k-1} - x^k) = x.$$

Zatem $f_{k,p}(x) = \frac{x}{1 - px - (p-1)x^{k-1} - x^k}$, co kończy dowód. \square

Dla szczególnych przypadków k i p otrzymujemy funkcje tworzące znanych ciągów typu Fibonacciego

Wniosek 4.2. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq 0$, $t \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Wtedy*

$$f_{2,1}(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{F_n\} \text{ (V. E. Hoggat [42]).}$$

$$f_{2,\frac{3}{2}}(x) = \frac{x}{1-2x-x^2} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{p_n\} \text{ (A. F. Horodam [45]).}$$

$$f_{3,1}(x) = \frac{x}{1-x-x^3} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{\mathfrak{N}_n\} \text{ (A. G. Shannon et al. [69]).}$$

$$f_{2,\frac{t}{2}}(x) = \frac{x}{1-(t-1)x-x^2} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{F_{t-1,n}\} \text{ (C. Bolat, H. Köse [19]).}$$

$$f_{k,1}(x) = \frac{x}{1-x-x^k} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{F_{k-1}(n)\} \text{ (E. Kiliç [50]).}$$

$$f_{k,1}(x) = \frac{1-x^k}{(1-x)(1-x-x^k)} \text{ jest funkcją tworzącą ciągu } \{F(k,n)\} \text{ (N. Bednarz [4]).}$$

4.2 Interpretacje kombinatoryczne

W podrozdziale tym przedstawimy interpretacje liczb (k, p) -Fibonacciego, przy założeniu, że p jest liczbą naturalną. W pierwszej kolejności pokażemy, że liczby (k, p) -Fibonacciego posiadają interpretację związaną z $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -indeksem ścieżki $P(m)$.

Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Rozważmy $(A_1, \dots, A_p, kB, (k-1)C_1, \dots, (k-1)C_{p-1})$ -krawędziowe kolorowanie z podziałem ścieżki $P(m)$, które dla uproszczenia zapisu będziemy nazywać α -krawędziowym kolorowaniem z podziałem ścieżki $P(m)$. W konsekwencji, zamiast $\sigma_{(A_1, \dots, A_p, kB, (k-1)C_1, \dots, (k-1)C_{p-1})}(P(m))$ będziemy pisać $\sigma_\alpha(P(m))$.

Niech $e \in E(P(m))$ będzie dowolną krawędzią ścieżki $P(m)$. Symbol $c(e) = A_i$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ (odpowiednio $c(e) = kB$, $c(e) = (k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$) oznacza, że krawędź e ma kolor A_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ (odpowiednio kolor kB , kolor $(k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$). Wtedy $\sigma_{A_i(e)}(P(m))$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ (odpowiednio $\sigma_{kB(e)}(P(m))$, $\sigma_{(k-1)C_j(e)}(P(m))$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$) jest liczbą wszystkich α -kolorowań z podziałem ścieżki $P(m)$, w których krawędź e jest koloru A_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ (odpowiednio koloru kB , koloru $(k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$). Wtedy

$$\sigma_\alpha(P(m)) = \sum_{i=1}^p \sigma_{A_i(e)}(P(m)) + \sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{(k-1)C_j(e)}(P(m)) + \sigma_{kB(e)}(P(m)) \quad (4.9)$$

jest podstawową zasadą wyznaczania $\sigma_\alpha(P(m))$.

Twierdzenie 4.3. (N. Bednarz, I. Włoch [5]) *Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\sigma_\alpha(P(m)) = F_{k,p}(m+1). \quad (4.10)$$

Dowód (indukcyjny ze względu na m).

Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Niech $P(m)$ będzie m -krawędziową ścieżką oraz $E(P(m)) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ z numeracją krawędzi w naturalnej kolejności. Zgodnie z definicją, do α -krawędziowego kolorowania z podziałem ścieżki $P(m)$ możemy użyć kolorów $A_1, \dots, A_p, kB, (k-1)C_1, \dots, (k-1)C_{p-1}$.

Jeżeli $m = 1$ to $E(P(1)) = \{e_1\}$. Rozważmy przypadki

1. $k = 2$.

Wtedy jedyną krawędź e_1 możemy α -krawędziowo pokolorować z podziałem przy

użyciu jednego z kolorów $A_1, \dots, A_p, C_1, \dots, C_{p-1}$. Zatem

$$\sigma_\alpha(P(1)) = 2p - 1 = F_{2,p}(2).$$

2. $k \geq 3$.

Wtedy do α -krawędziowego kolorowania z podziałem ścieżki $P(1)$ możemy użyć jednego z kolorów A_1, \dots, A_p . Zatem

$$\sigma_\alpha(P(m)) = p = F_{k,p}(2).$$

Niech $m \geq 2$. Załóżmy, że dla $t < m$, $t \in \mathbb{N}$, prawdziwa jest równość $\sigma_\alpha(P(t)) = F_{k,p}(t+1)$. Pokażemy, że prawdziwa jest równość (4.10). Rozważmy dowolne α -krawędziowe kolorowanie z podziałem ścieżki $P(m)$. Wówczas możliwe są następujące przypadki

1. $c(e_m) = A_i$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Ponieważ mamy dokładnie p możliwości pokolorowania krawędzi e_m , więc korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że

$$\sum_{i=1}^p \sigma_{A_i(e_m)}(P(m)) = p\sigma_\alpha(P(m-1)) = pF_{k,p}(m).$$

2. $c(e_m) = kB$.

Wtedy istnieją krawędzie $e_{m-k+1}, \dots, e_{m-1} \in E(P(m))$, takie że $c(e_{m-k+1}) = \dots = c(e_{m-1}) = kB$ oraz $e_{m-k+1} - \dots - e_{m-1} - e_m$ jest kB -monochromatyczną drogą długości k w ścieżce $P(m)$. Zatem z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\sigma_{kB(e_m)}(P(m)) = \sigma_\alpha(P(m-k)) = F_{k,p}(m-k+1).$$

3. $c(e_m) = (k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Wtedy dla dowolnego koloru $(k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ istnieją krawędzie $e_{m-k+2}, \dots, e_{m-1} \in E(P(m))$, takie że $c(e_{m-k+2}) = \dots = c(e_{m-1}) = (k-1)C_j$ oraz $e_{m-k+2} - \dots - e_{m-1} - e_m$ jest $(k-1)C_j$ -monochromatyczną drogą długości $(k-1)$ w ścieżce $P(m)$. Ponieważ mamy dokładnie $(p-1)$ możliwości pokolorowania drogi $e_{m-k+2} - \dots - e_m$, więc korzystając z założenia indukcyjnego mamy

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{(k-1)C_j(e_m)}(P(m)) = (p-1)\sigma_\alpha(P(m-k+1)) = (p-1)F_{k,p}(m-k+2).$$

Zatem z podstawowej zasady wyznaczania $\sigma_\alpha(P(m))$ (4.9) oraz z definicji liczb (k, p) -Fibonacci otrzymujemy, że

$$\sigma_\alpha(P(m)) = pF_{k,p}(m) + (p-1)F_{k,p}(m-k+2) + F_{k,p}(m-k+1) = F_{k,p}(m),$$

co kończy dowód. □

Interpretacje grafowe liczb typu Fibonacci są dobrym narzędziem służącym do dowodu tożsamości. Korzystając z powyższej interpretacji udowodnimy tożsamość typu Honsbergera dla liczb (k, p) -Fibonacci.

Twierdzenie 4.4. (N. Bednarz, I. Włoch [5]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq k-2$, $m \geq k$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\begin{aligned} F_{k,p}(m+n) &= pF_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n+1) + (p-1) \sum_{i=1}^{k-1} F_{k,p}(m-k+i)F_{k,p}(n-i+2) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} F_{k,p}(m-k+j)F_{k,p}(n-j+1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dowód. Niech $P(m-1+n)$ będzie $(m-n+1)$ -krawędziową ścieżką ze zbiorem krawędzi $E(P(m-1+n)) = \{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m, \dots, e_{m-1+n}\}$ i numeracją krawędzi w naturalnej kolejności. Z twierdzenia 4.3 mamy, że $\sigma_\alpha(P(m-1+n)) = F_{k,p}(m+n)$. Pokażemy, że

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(P(m-1+n)) &= pF_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n+1) + (p-1) \sum_{i=1}^{k-1} F_{k,p}(m-k+i)F_{k,p}(n-i+2) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} F_{k,p}(m-k+j)F_{k,p}(n-j+1). \end{aligned}$$

Bez straty ogólności możemy rozważyć α -kolorowanie z podziałem ścieżki $P(m-1+n)$ względem krawędzi e_{m-1} . W dalszych rozważaniach przez $P(m-1)$ oznaczać będziemy $(m-1)$ -krawędziową ścieżkę, taką że $E(P(m-1)) = \{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$ a przez $P(n)$ oznaczać będziemy n -krawędziową ścieżkę, taką że $E(P(n)) = \{e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m-1+n}\}$. Możliwe są następujące przypadki

1. $c(e_{m-1}) = A_i$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Wtedy ze wzoru 4.10 otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^p \sigma_{(A_i(e_{m-1}))}(P(m-1+n)) = p\sigma_\alpha(P(m-2))\sigma_\alpha(P(n)) = pF_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n+1).$$

2. $c(e_{m-1}) = (k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Wtedy dla dowolnego koloru $(k-1)C_j$, $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, istnieją krawę-

dzie $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+k-2} \in E(P(m-1+n))$, takie że $c(e_i) = c(e_{i+1}) = \dots = c(e_{i+k-2}) = (k-1)C_j$. Niech $P = e_i - e_{i+1} \dots - e_{i+k-2}$ będzie $(k-1)C_j$ -monochromatyczną drogą długości $k-1$. Drogę P możemy pokolorować na $(p-1)$ sposobów.

Jeżeli $e_{m-1} = e_{i+k-2}$ to $P \subseteq P(m-1)$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{((k-1)C_j(e_{m-1}))}(P(m-1+n)) = (p-1)\sigma_\alpha(P(m-k))\sigma_\alpha(P(n)).$$

Jeżeli $e_{m-1} = e_{i+k-3}$ to $P \setminus \{e_{i+k-2}\} \subseteq P(m-1)$ oraz $e_{i+k+2}, e_m \in E(P(n))$.

Wówczas

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{((k-1)C_j(e_{m-1}))}(P(m-1+n)) = (p-1)\sigma_\alpha(P(m-k+1))\sigma_\alpha(P(n-1)).$$

⋮

Jeżeli $e_{m-1} = e_i$ to $P \setminus \{e_{m-1}\} \subseteq P(n)$ oraz $e_{m-1} \in E(P(m-1))$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{((k-1)C_j(e_{m-1}))}(P(m-1+n)) = (p-1)\sigma_\alpha(P(m-2))\sigma_\alpha(P(n-k+3)).$$

Ze wszystkich powyższych przypadków otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{(k-1)C_j(e_{m-1})}(P(m-1+n)) &= (p-1) \left[\sigma_\alpha(P(m-k))\sigma_\alpha(P(n)) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_\alpha(P(m-k+1))\sigma_\alpha(P(n-1)) + \dots + \sigma_\alpha(P(m-2))\sigma_\alpha(P(n-k+3)) \right]. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 4.3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p-1} \sigma_{((k-1)C_j(e))}(P(m-1+n)) &= (p-1) \left[F_{k,p}(m-k+1)F_{k,p}(n+1) \right. \\ &\quad \left. + F_{k,p}(m-k+2)F_{k,p}(n) + \dots + F_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n-k+3) \right] \\ &= (p-1) \sum_{i=1}^{k-1} F_{k,p}(m-k+i)F_{k,p}(n-i+2). \end{aligned}$$

3. $c(e_{m-1}) = kB$.

Wtedy istnieją krawędzie $e_j, e_{j+1}, \dots, e_{j+k-1} \in E(P(m-1+n))$, takie że $c(e_j) = c(e_{j+1}) = \dots = c(e_{j+k-1}) = kB$ oraz $e_j - e_{j+1} \dots - e_{j+k-1}$ jest kB -monochromatyczną drogą długości k . Korzystając z tej samej metody, jak w przypadku 2. oraz

z twierdzenia 4.3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{(kB(\epsilon_{m-1}))}(P(m-1+n)) &= F_{k,p}(m-k)F_{k,p}(n+1) + F_{k,p}(m-k+1)F_{k,p}(n) \\ &+ \dots + F_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n-k+2) = \sum_{j=0}^{k-1} F_{k,p}(m-k+j)F_{k,p}(n-j+1). \end{aligned}$$

Ze wszystkich powyższych przypadków oraz z podstawowej zasady wyznaczania $\sigma_\alpha(P(m))$ (4.9) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(P(m-1+n)) &= pF_{k,p}(m-1)F_{k,p}(n+1) + (p-1) \sum_{i=1}^{k-1} F_{k,p}(m-k+i)F_{k,p}(n-i+2) \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} F_{k,p}(m-k+j)F_{k,p}(n-j+1), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 4.5. (N. Bednarz, I. Włoch [5]) *Niech $k \geq 2$, $m \geq k$, $n \geq k-2$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Jeżeli*

1. $k = 2$, $p = 1$ to $F_{m+n} = F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_{m-2}$. (R. Honsberger [43])
2. $k = 3$, $p = 1$ to $\mathfrak{N}_{n+m} = \mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{N}_m + \mathfrak{N}_{n-1}\mathfrak{N}_{m-1} + \mathfrak{N}_n\mathfrak{N}_{m-2}$. (J. Ramírez et al. [68])
3. $k = 2$, $p \geq 1$ to $F_{t-1,m+n} = F_{t-1,n+1}F_{t-1,m} + F_{t-1,n}F_{t-1,m-1}$. (S. Falcón et al. [32])

Interpretacje kombinatoryczne dla liczb typu Fibonacciego często związane są z pokryciami przez domina. Takie interpretacje rozważane były między innymi w [18, 20, 37, 49, 53, 54]. Dla liczb (k, p) -Fibonacciego również możemy podać interpretację związaną z pokryciami przez domina.

Niech $k \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Rozważmy pokrycie dominami planszy rozmiaru $1 \times (n-1)$, składającej się z $(n-1)$ komórek ponumerowanych $1, 2, \dots, n-1$. Planszę tę będziemy nazywać krótko $(n-1)$ -planszą. Do pokrycia $(n-1)$ -planszy będziemy używać następujących kostek

- czerwonych kwadratów rozmiaru 1×1 , które nazywać będziemy *kwadratami*,
- niebieskich prostokątów rozmiaru $1 \times (k-1)$, które nazywać będziemy $(k-1)$ -prostokątami oraz
- białych prostokątów rozmiaru $1 \times k$, które nazywać będziemy k -prostokątami.

Długością kostki będziemy nazywać liczbę jej komórek.

Założmy, że w kwadratach oraz w $(k-1)$ -prostokątach rozróżniamy ich odcienie. Niech $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ będzie zbiorem p odcieni czerwonych kwadratów oraz niech

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_{p-1}\}$ będzie zbiorem $(p-1)$ odcieni niebieskich $(k-1)$ -prostokątów. Niech $f_{k,p}(n)$ oznacza liczbę pokryć dominami $(n-1)$ -planszy przy użyciu wymienionych wyżej kostek.

Twierdzenie 4.6. (N. Bednarz, I. Włoch [5]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy $f_{k,p}(n) = F_{k,p}(n)$.*

Dowód (indukcyjny ze względu na n).

Niech k, n, p będą jak w założeniach twierdzenia. Rozważmy następujące przypadki

1. $2 \leq n < k$.

Wtedy $(n-1)$ -planszę możemy pokryć jedynie przy pomocy kwadratów. Ponieważ mamy dokładnie p odcieni czerwonych kwadratów, więc w tym przypadku, istnieje $p^{n-1} = F_{k,p}(n)$ możliwości pokrycia dominami $(n-1)$ -planszy.

2. $n = k$.

Wtedy do pokrycia dominami $(k-1)$ -planszy możemy użyć albo kwadratów albo $(k-1)$ -prostokąta. Ponieważ mamy dokładnie p odcieni czerwonych kwadratów oraz $(p-1)$ odcieni niebieskiego $(p-1)$ -prostokąta, więc $f_{k,p}(k) = p^{k-1} + p - 1 = F_{k,p}(k)$.

3. $n = k + 1$.

Wtedy k -planszę możemy pokryć przy pomocy jednego k -prostokąta albo na $p^k + 2p(p-1)$ sposobów z użyciem kwadratów i $(k-1)$ -prostokąta. Zatem, w tym przypadku, liczba wszystkich możliwych pokryć dominami k -planszy wynosi $p^k + 2p(p-1) + 1 = F_{k,p}(k+1)$.

4. $n \geq k + 2$.

Założmy, że dla $2 \leq m < n$, $m \in \mathbb{N}$, mamy $f_{k,p}(m) = F_{k,p}(m)$. Pokażemy, że $f_{k,p}(n) = F_{k,p}(n)$. Rozważmy następujące przypadki

- (i) Ostatnią, $(n-1)$ komórkę planszy pokrywamy kwadratem, w jednym z p odcieni czerwonego koloru. Wtedy, z założenia indukcyjnego, wiemy że pozostałą część planszy możemy pokryć dominami na $f_{k,p}(n-1)$ -sposobów.
- (ii) Ostatnią komórkę $(n-1)$ -planszy pokrywamy $(k-1)$ -prostokątem w jednym z $(p-1)$ odcieni koloru niebieskiego. Wtedy komórki o numerach od $n-k+1$ do $n-1$ są komórkami tego prostokąta. Zatem, z założenia indukcyjnego, pozostałą $(n-k)$ -planszę możemy pokryć na $f_{k,p}(n-k+1)$ -sposobów.
- (iii) Ostatnią komórkę $(n-1)$ -planszy pokrywamy k -prostokątem. Wtedy komórki o numerach od $n-k$ do $n-1$ są komórkami tego prostokąta. Zatem, z założenia

indukcyjnego, pozostałą część planszy, rozmiaru $1 \times (n - k - 1)$, możemy pokryć na $f_{k,p}(n - k)$ -sposobów.

Z przypadków (i)-(iii) otrzymujemy, że

$$f_{k,p}(n) = pf_{k,p}(n - 1) + (p - 1)f_{k,p}(n - k + 1) + f_{k,p}(n - k).$$

Zatem korzystając z definicji (4.1) liczb (k, p) -Fibonacciego mamy

$$f_{k,p}(n) = pF_{k,p}(n - 1) + (p - 1)F_{k,p}(n - k + 1) + F_{k,p}(n - k + 1) = F_{k,p}(n),$$

co kończy dowód. □

Interpretacje liczb typu Fibonacciego związane z pokryciami dominami również są wykorzystywane jako narzędzie dowodowe dla wykazywania znanych tożsamości lub uzyskiwania nowych (na przykład [2, 13, 14, 15]).

Twierdzenie 4.7. (N. Bednarz, I. Włoch [5]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ będą liczbami naturalnymi.*

Jeżeli k jest liczbą parzystą to

$$F_{k,p}(2n) = p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{k} \rfloor} F_{k,p}(2n - 1 - ki) + (p - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-k+1}{k} \rfloor} F_{k,p}(2n - k + 1 - ki).$$

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą to

$$F_{k,p}(2n) = p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{k-1} \rfloor} (p - 1)^i F_{k,p}(2n - 1 - (k - 1)i) + (p - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-k}{k-1} \rfloor} F_{k,p}(2n - k - (k - 1)i).$$

Dowód. Załóżmy, że k jest liczbą parzystą. Pokażemy, że

$$\begin{aligned} f_{k,p}(2n) &= p \left[f_{k,p}(2n - 1) + f_{k,p}(2n - k - 1) + \dots + f_{k,p} \left(2n - 1 - \left\lfloor \frac{2n - 1}{k} \right\rfloor k \right) \right] \\ &\quad + (p - 1) \left[f_{k,p}(2n - k + 1) + f_{k,p}(2n - 2k + 1) + f_{k,p}(2n - 3k + 1) + \dots \right. \\ &\quad \left. + f_{k,p} \left(2n - k + 1 - \left\lfloor \frac{2n - k + 1}{k} \right\rfloor k \right) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ $(2n - 1)$ -plansza jest nieparzystej długości, więc każde jej pokrycie dominami musi zawierać co najmniej jedną kostkę nieparzystej długości. Rozważmy położenie ostatniej kostki nieparzystej długości. Mamy następujące możliwości

1. Ostatnią kostką nieparzystej długości jest czerwony kwadrat. Oczywiście mamy dokładnie p możliwości wybrania odcienia czerwonego kwadratu. Ponadto ostatni kwadrat może występować w komórce o numerze albo $(2n - 1)$ albo $(2n - k - 1)$... albo $(2n - 1 - \lfloor \frac{2n-1}{k} \rfloor k)$. Wtedy pozostałą część planszy możemy pokryć na odpowiednio $f_{k,p}(2n - 1)$ albo $f_{k,p}(2n - k - 1)$... albo $f_{k,p}(2n - 1 - \lfloor \frac{2n-1}{k} \rfloor k)$ sposobów. Zatem liczba wszystkich możliwych pokryć dominami jest równa

$$pf_{k,p}(2n - 1) + pf_{k,p}(2n - k - 1) + \dots + pf_{k,p}\left(2n - 1 - \left\lfloor \frac{2n - 1}{k} \right\rfloor k\right).$$

2. Ostatnią kostką nieparzystej długości jest niebieski $(k - 1)$ -prostokąt. Wówczas mamy dokładnie $(p - 1)$ możliwości wyboru odcienia tego niebieskiego $(k - 1)$ -prostokąta. Jeżeli $(k - 1)$ -prostokąt jest ostatnią kostką $(2n - 1)$ -planszy to pozostałą jej część możemy pokryć na $f_{k,p}(2n - k + 1)$ sposobów. Jeżeli $(k - 1)$ -prostokąt zajmuje komórki o numerach od $(2n - 2k + 1)$ do $(2n - k - 1)$ to pozostałą część $(2n - 2k)$ -planszy możemy pokryć na $f_{k,p}(2n - 2k + 1)$ sposobów.

⋮

Jeżeli $(k - 1)$ -prostokąt zajmuje komórki o numerach od $(2n - k + 1 - \lfloor \frac{2n-k+1}{k} \rfloor k)$ do $(2n - 1 - \lfloor \frac{2n-k+1}{k} \rfloor k)$ to pozostałą część planszy możemy pokryć na $f_{k,p}(2n - k + 1 - \lfloor \frac{2n-k+1}{k} \rfloor k)$ sposobów.

Z powyższych możliwości otrzymujemy, że liczba wszystkich możliwych pokryć dominami, w których ostatnią kostką nieparzystej długości $(2n - 1)$ -planszy jest $(k - 1)$ -prostokąt jest równa

$$(p - 1)f_{k,p}(2n - k + 1) + (p - 1)f_{k,p}(2n - 2k + 1) + (p - 1)f_{k,p}(2n - 3k + 1) + \dots + (p - 1)f_{k,p}\left(2n - k + 1 - \left\lfloor \frac{2n - k + 1}{k} \right\rfloor k\right).$$

Ostatecznie otrzymujemy, że dla parzystego k zachodzi

$$F_{k,p}(2n) = p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{k} \rfloor} F_{k,p}(2n - 1 - ki) + (p - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-k+1}{k} \rfloor} F_{k,p}(2n - k + 1 - ki).$$

Przypadek dla nieparzystego k dowodzi się analogicznie. □

4.3 Tożsamości dla sum liczb (k, p) -Fibonaccię

W podrozdziale tym podamy kilka tożsamości dla sum liczb (k, p) -Fibonaccię, które jednocześnie uogólniają znane tożsamości dla liczb typu Fibonaccię.

Twierdzenie 4.8. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq k - 2$ będą liczbami naturalnymi, niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $S = \sum_{i=0}^n F_{k,p}(i)$. Wtedy*

$$S = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(n+1) + F_{k,p}(n-k+2) - 1 + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(n-i) \right]. \quad (4.12)$$

Dowód. Niech $k \geq 2$, $n \geq k - 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Niech $S = \sum_{i=0}^n F_{k,p}(i)$. Wtedy

$$pS = pF_{k,p}(0) + pF_{k,p}(1) + \dots + pF_{k,p}(k-1) + pF_{k,p}(k) + pF_{k,p}(k+1) + \dots \\ + pF_{k,p}(n-1) + pF_{k,p}(n)$$

oraz

$$(p-1)S = (p-1)F_{k,p}(0) + (p-1)F_{k,p}(1) + \dots + (p-1)F_{k,p}(k-1) + (p-1)F_{k,p}(k) \\ + (p-1)F_{k,p}(k+1) + \dots + (p-1)F_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n).$$

Dla dowodu równości (4.12) rozważmy następujące przypadki

1. $n = k - 2$. Pokażemy, że

$$\sum_{i=0}^{k-2} F_{k,p}(i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(k-1) - 1 + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(k-2-i) \right].$$

Z warunków początkowych dla liczb (k, p) -Fibonaccię otrzymujemy

$$pS + (p-1)S = pF_{k,p}(0) + pF_{k,p}(1) + pF_{k,p}(2) + \dots + pF_{k,p}(k-3) + pF_{k,p}(k-2) \\ + (p-1)F_{k,p}(0) + (p-1)F_{k,p}(1) + (p-1)F_{k,p}(2) + \dots \\ + (p-1)F_{k,p}(k-3) + (p-1)F_{k,p}(k-2) \\ (2p-1)S = p + p^2 + \dots + p^{k-2} + p - 1 + p^2 - p + \dots + p^{k-3} - p^{k-4} + p^{k-2} - p^{k-3} \\ = p^{k-2} - 1 + p + p^2 + \dots + p^{k-3} + p^{k-2} \\ = p^{k-2} - 1 + p \left(1 + p + \dots + p^{k-4} + p^{k-3} \right).$$

Stąd $(2p-1)S = F_{k,p}(k-1) - 1 + p(F_{k,p}(1) + F_{k,p}(2) + \dots + F_{k,p}(k-3) + F_{k,p}(k-2))$.

Zatem, dla $n = k - 2$, otrzymujemy równość

$$\sum_{i=0}^{k-2} F_{k,p}(i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(k-1) - 1 + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(k-2-i) \right].$$

2. $n = k - 1$. Pokażemy, że

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{k,p}(i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(k) + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(k-1-i) \right].$$

Z warunków początkowych dla liczb (k, p) -Fibonacci otrzymujemy

$$\begin{aligned} pS + (p-1)S &= pF_{k,p}(0) + pF_{k,p}(1) + pF_{k,p}(2) + \dots + pF_{k,p}(k-2) + pF_{k,p}(k-1) \\ &\quad + (p-1)F_{k,p}(0) + (p-1)F_{k,p}(1) + (p-1)F_{k,p}(2) + \dots \\ &\quad + (p-1)F_{k,p}(k-2) + (p-1)F_{k,p}(k-1). \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} (2p-1)S &= p + p^2 + \dots + p^{k-1} + p - 1 + p^2 - p + \dots + p^{k-2} - p^{k-3} + p^{k-1} - p^{k-2} \\ &= p^{k-1} + p - 1 + p^2 + \dots + p^{k-2} + p^{k-1} \\ &= p^{k-1} + p - 1 + p(p + \dots + p^{k-3} + p^{k-2}). \end{aligned}$$

Korzystając z definicji liczb (k, p) -Fibonacci mamy, że

$$F_{k,p}(k) = pF_{k,p}(k-1) + (p-1)F_{k,p}(1) + F_{k,p}(0) = p^{k-1} + p - 1,$$

więc

$$\begin{aligned} (2p-1)S &= F_{k,p}(k) + p \left(F_{k,p}(2) + \dots + F_{k,p}(k-2) + F_{k,p}(k-1) \right) \\ &= F_{k,p}(k) + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(k-1-i). \end{aligned}$$

W konsekwencji $S = \sum_{i=0}^{k-1} F_{k,p}(i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(k) + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(k-1-i) \right].$

3. $n \geq k$.

Wówczas mamy

$$\begin{aligned} pS + (p-1)S + S &= pF_{k,p}(0) + pF_{k,p}(1) + \dots + pF_{k,p}(k-2) + pF_{k,p}(k-1) + pF_{k,p}(k) \\ &\quad + \dots + pF_{k,p}(n-1) + pF_{k,p}(n) + (p-1)F_{k,p}(0) + (p-1)F_{k,p}(1) + (p-1)F_{k,p}(2) \\ &\quad + \dots + (p-1)F_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n) + F_{k,p}(0) + F_{k,p}(1) + F_{k,p}(2) + \dots \\ &\quad + F_{k,p}(n-1) + F_{k,p}(n). \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} S + (2p - 1)S &= pF_{k,p}(k - 1) + (p - 1)F_{k,p}(1) + F_{k,p}(0) + pF_{k,p}(k) + (p - 1)F_{k,p}(2) \\ &+ F_{k,p}(1) + \dots + pF_{k,p}(n - 1) + (p - 1)F_{k,p}(n - k + 1) + F_{k,p}(n - k) + pF_{k,p}(n) \\ &+ (p - 1)F_{k,p}(n - k + 2) + F_{k,p}(n - k + 1) + pF_{k,p}(0) + pF_{k,p}(1) + \dots + pF_{k,p}(k - 2) \\ &+ (p - 1)F_{k,p}(0) + (p - 1)F_{k,p}(n - k + 3) + \dots + (p - 1)F_{k,p}(n - 1) + (p - 1)F_{k,p}(n) \\ &+ F_{k,p}(n - k + 2) + \dots + F_{k,p}(n - 1) + F_{k,p}(n). \end{aligned}$$

Korzystając z rekurencji (4.1) oraz z warunków początkowych dla liczb (k, p) -Fibonaccię otrzymujemy

$$\begin{aligned} S + (2p - 1)S &= F_{k,p}(k) + F_{k,p}(k + 1) + \dots + F_{k,p}(n) + F_{k,p}(n + 1) + p + p^2 + \dots \\ &+ p^{k-2} + (p - 1)F_{k,p}(n - k + 3) + \dots + (p - 1)F_{k,p}(n - 1) \\ &+ (p - 1)F_{k,p}(n) + F_{k,p}(n - k + 2) + \dots + F_{k,p}(n - 1) + F_{k,p}(n), \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} S + (2p - 1)S &= \sum_{i=k}^n F_{k,p}(i) + F_{k,p}(2) + F_{k,p}(3) + \dots + F_{k,p}(k - 1) + F_{k,p}(1) \\ &+ F_{k,p}(0) - 1 + F_{k,p}(n + 1) + F_{k,p}(n - k + 2) + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(n - i). \end{aligned}$$

Wtedy $S + (2p - 1)S = S + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(n - i) + F_{k,p}(n + 1) + F_{k,p}(n - k + 2) - 1$. Stąd $(2p - 1)S = F_{k,p}(n + 1) + F_{k,p}(n - k + 2) - 1 + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(n - i)$. Zatem

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} F_{k,p}(i) = \frac{1}{2p - 1} \left[F_{k,p}(n + 1) + F_{k,p}(n - k + 2) - 1 + p \sum_{i=0}^{k-3} F_{k,p}(n - i) \right],$$

co kończy dowód. □

Dla szczególnych wartości parametrów k i p otrzymujemy dobrze znane tożsamości dla liczb typu Fibonaccię. Przyjmując oznaczenia podane w (4.2) - (4.7) otrzymujemy następujące zależności.

Wniosek 4.9. (N. Bednarz [4]) Niech $k \geq 2$, $n \geq k - 2$, $t \geq 1$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Jeżeli

1. $k = 2$, $p = 1$ to $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$. (E. Lucas [57])
2. $k = 2$, $p = \frac{3}{2}$ to $\sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{2} [p_{n+1} + p_n - 1]$. (T. Koshy [53])
3. $k = 3$, $p = 1$ to $\sum_{i=1}^n \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_{n+3} - 1$. (J. L. Ramírez, V. F. Sirvent [68])
4. $k = 2$, $p = \frac{t}{2}$ to $\sum_{i=1}^n F_{t-1,i} = \frac{1}{t-1} [F_{t-1,n+1} + F_{t-1,n} - 1]$. (S. Falcón, Á. Plaza [32])
5. $k \geq 2$, $n \geq 1$, $p = 1$ to $\sum_{i=0}^n F_{k-1}(i) = F_{k-1}(n+k-1) - 1$. (A. P. Stakhov [72]).
6. $k \geq 2$, $n \geq k$, $p = 1$ to $\sum_{i=0}^n F(k, i) = F(k, n+k) - k$. (A. Włoch [77])

Twierdzenie 4.10. (N. Bednarz [4]) Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ będą liczbami naturalnymi, niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $S_{2n} = \sum_{i=0}^n F_{k,p}(2i)$.

Jeżeli $k = 2m$ to dla $n \geq m - 1$ zachodzi

$$S_{2n} = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(2n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{k,p}(2n-2i+2) + F_{k,p}(2n-2i+1) \right) \right].$$

Jeżeli $k = 2m + 1$ to dla $n \geq m - 1$ zachodzi

$$S_{2n} = \frac{1}{3(2p-1)} \left[pF_{k,p}(2n+k) + pF_{k,p}(2n+k-1) - p - 1 + \sum_{i=0}^{k-1} F_{k,p}(2n+i) \right. \\ \left. + (p^2 - p) \sum_{i=1}^{m-1} F_{k,p}(2n+2i+1) + (1 - 2p - p^2) \sum_{i=1}^m F_{k,p}(2n+2i) \right].$$

Dowód (indukcyjny ze względu na n).

Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ będą liczbami naturalnymi, niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $S_{2n} = \sum_{i=0}^n F_{k,p}(2i)$. Pokażemy, że dla $k = 2m$ i $n \geq m - 1$ zachodzi równość

$$S_{2n} = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(2n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{k,p}(2n-2i+2) + F_{k,p}(2n-2i+1) \right) \right].$$

Jeżeli $n = m - 1$, to korzystając z warunków początkowych dla liczb (k, p) -Fibonacci

ciego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2m-1) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2m-2i) + F_{2m,p}(2m-2i-1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2m-1) - 1 + (p-1)F_{2m,p}(2m-2) + F_{2m,p}(2m-3) \right. \\
&\quad \left. + (p-1)F_{2m,p}(2m-4) + F_{2m,p}(2m-5) + \dots + (p-1)F_{2m,p}(2) + F_{2m,p}(1) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[p^{2m-2} - 1 + (p-1)F_{2m,p}(2m-2) + p^{2m-4} + \dots + (p-1)F_{2m,p}(2) + 1 \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[p \cdot p^{2m-3} + (p-1)F_{2m,p}(2m-2) + p \cdot p^{2m-5} + \dots + p \cdot p + (p-1)F_{2m,p}(2) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[pF_{2m,p}(2m-2) + (p-1)F_{2m,p}(2m-2) + \dots + pF_{2m,p}(2) + (p-1)F_{2m,p}(2) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \cdot (2p-1)S_{2n} = S_{2n}.
\end{aligned}$$

Zatem twierdzenie 4.10 jest prawdziwe dla $k = 2m$ i $n = m - 1$.

Założmy, że twierdzenie 4.10 jest prawdziwe dla $k = 2m$ i $n \geq m - 1$. Pokażemy, że

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_{k,p}(2i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(2n+3) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{k,p}(2n-2i+4) + F_{k,p}(2n-2i+3) \right) \right].$$

Ponieważ $\sum_{i=0}^{n+1} F_{2m,p}(2i) = S_{2n} + F_{2m,p}(2n+2)$, więc korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} F_{2m,p}(2i) &= \frac{1}{2p-1} \left[(2p-1)F_{2m,p}(2n+2) + F_{2m,p}(2n+1) - 1 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2n-2i+2) + F_{2m,p}(2n-2i+1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[(2p-1)F_{2m,p}(2n+2) + F_{2m,p}(2n+1) - 1 + (p-1)F_{2m,p}(2n) \right. \\
&\quad \left. + F_{2m,p}(2n-1) + \dots + (p-1)F_{2m,p}(2n-2m+4) + F_{2m,p}(2n-2m+3) \right] \\
&= \frac{1}{2p-1} \left[pF_{2m,p}(2n+2) + (p-1)F_{2m,p}(2n+2) + F_{2m,p}(2n+1) - 1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + (p-1)F_{2m,p}(2n-2m+4) + F_{2m,p}(2n-2m+3) \right].
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$F_{2m,p}(2n+3) = pF_{2m,p}(2n+2) + (p-1)F_{2m,p}(2n-2m+4) + F_{2m,p}(2n-2m+3),$$

więc

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_{2m,p}(2i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n+3) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2n-2i+4) + F_{2m,p}(2n-2i+3) \right) \right].$$

Zatem twierdzenie 4.10 jest prawdziwa dla $k = 2m$ oraz $n \geq m-1$. Analogicznie możemy pokazać, że twierdzenie 4.10 jest prawdziwe dla k będącego liczbą nieparzystą. \square

Wniosek 4.11. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq k-2$, $t \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Jeżeli*

1. $k = 2$, $p = 1$ to $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n} - 1$. (E. Lucas [57])
2. $k = 2$, $p = \frac{3}{2}$ to $\sum_{i=0}^n p_{2i} = \frac{1}{2} [p_{2n+1} - 1]$. (T. Koshy [53])
3. $k = 2$, $p = \frac{t}{2}$ to $\sum_{i=0}^n F_{t-1,2i} = \frac{1}{t-1} [F_{t-1,2n+1} - 1]$. (S. Falcón, Á. Plaza [31])

Korzystając z twierdzeń 4.8 oraz 4.10 otrzymujemy kolejną tożsamość dla sum liczb (k, p) -Fibonacci

Twierdzenie 4.12. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ będą liczbami naturalnymi, niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną oraz niech $S_{2n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} F_{k,p}(2i+1)$. Jeżeli $k = 2m$ to dla $n \geq m-1$ zachodzi*

$$S_{2n-1} = \frac{1}{2p-1} \left[F_{k,p}(2n) + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{k,p}(2n-2i+1) + F_{k,p}(2n-2i) \right) \right].$$

Jeżeli $k = 2m+1$ to dla $n \geq m$ zachodzi

$$\begin{aligned} S_{2n-1} = \frac{1}{3(2p-1)} & \left[F_{k,p}(2n+k) + F_{k,p}(2n+k-1) + (1-p)F_{k,p}(2n+1) \right. \\ & + (1-p)F_{k,p}(2n) + p-2 + (p^2-p+1) \sum_{i=1}^{m-1} F_{k,p}(2n+2i) \\ & \left. - (p^2+2p-2) \sum_{i=0}^{m-1} F_{k,p}(2n+2i+1) \right]. \end{aligned}$$

Dowód. Z twierdzenia 4.8, dla $k = 2m$, mamy

$$\sum_{i=0}^{2n} F_{2m,p}(i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n+1) + F_{2m,p}(2n-2m+2) - 1 + p \sum_{i=0}^{2m-3} F_{2m,p}(2n-i) \right].$$

Ponieważ $\sum_{i=0}^{2n} F_{2m,p}(i) = \sum_{i=0}^n F_{2m,p}(2i) + \sum_{i=0}^{n-1} F_{2m,p}(2i+1)$, więc

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2m,p}(2i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n+1) + F_{2m,p}(2n-2m+2) - 1 + p \sum_{i=0}^{2m-3} F_{2m,p}(2n-i) \right] - \sum_{i=0}^n F_{2m,p}(2i).$$

Ze twierdzenia 4.10 wiemy, że dla $k = 2m$ zachodzi

$$\sum_{i=0}^n F_{2m,p}(2i) = \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2n-2i+2) + F_{2m,p}(2n-2i+1) \right) \right].$$

Zatem

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n+1) + F_{2m,p}(2n-2m+2) - 1 + p \sum_{i=0}^{2m-3} F_{2m,p}(2n-i) \right. \\ &\quad \left. - F_{2m,p}(2n+1) + 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2n-2i+2) + F_{2m,p}(2n-2i+1) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n-2m+2) + pF_{2m,p}(2n) + pF_{2m,p}(2n-1) + pF_{2m,p}(2n-2) \right. \\ &\quad \left. + \dots + pF_{2m,p}(2n-2m+4) + pF_{2m,p}(2n-2m+3) - (p-1)F_{2m,p}(2n) \right. \\ &\quad \left. - F_{2m,p}(2n-1) - \dots - (p-1)F_{2m,p}(2n-2m+4) - F_{2m,p}(2n-2m+3) \right] \\ &= \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n) + (p-1)F_{2m,p}(2n-1) + F_{2m,p}(2n-2) + \dots \right. \\ &\quad \left. + F_{2m,p}(2n-2m+4) + (p-1)F_{2m,p}(2n-2m+3) + F_{2m,p}(2n-2m+2) \right] \\ &= \frac{1}{2p-1} \left[F_{2m,p}(2n) + \sum_{i=1}^{m-1} \left((p-1)F_{2m,p}(2n-2i+1) + F_{2m,p}(2n-2i) \right) \right], \end{aligned}$$

co należało pokazać. Analogicznie możemy pokazać, że twierdzenie 4.12 jest prawdziwe dla $k = 2m + 1$. \square

Wniosek 4.13. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq k - 2$, $t \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Jeżeli*

1. $k = 2$, $p = 1$ to $\sum_{i=0}^n F_{2i} = F_{2n+1}$. (E. Lucas [57])
2. $k = 2$, $p = \frac{3}{2}$ to $\sum_{i=0}^{n-1} p_{2i+1} = \frac{1}{2}p_{2n}$. (T. Koshy [53])
3. $k = 2$, $p = \frac{t}{2}$ to $\sum_{i=0}^{n-1} F_{t-1,2i+1} = \frac{1}{t-1}F_{t-1,2n}$. (S. Falcón, Á. Plaza [31])

4.4 Macierzowa reprezentacja

W podrozdziale tym podamy macierzowe generatory dla liczb (k, p) -Fibonacciego wykorzystując ideę macierzowych generatorów dla odległościowych liczb Fibonacciego wprowadzonych w [9]. Podane generatory dla liczb (k, p) -Fibonacciego uogólniają znane generatory dla liczb Fibonacciego i liczb Pella.

Generatorem macierzowym ciągu Fibonacciego jest złota macierz postaci $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, mająca taką własność, że dla $n \geq 2$

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Generator ten został podany przez Vernera Emila Hogatta w 1969 roku, w [42]. Wykorzystując zależność (4.13) oraz korzystając z własności wyznaczników macierzy, natychmiast otrzymujemy wzór Cassiniego (2.16) dla liczb Fibonacciego postaci $(-1)^n = F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2$.

Generator macierzowy dla ciągu Pella, postaci $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, został podany przez Josepha Ercolano w [28]. Ponadto $M^n = \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix}$. Obliczając wyznacznik tej macierzy otrzymujemy wzór Cassiniego dla liczb Pella (2.18) postaci $(-1)^n = p_{n+1} p_{n-1} - p_n^2$. Wzór ten został udowodniony między innymi w [45].

W literaturze możemy również spotkać się z generatorami dla liczb zdefiniowanych równaniem rekurencyjnym rzędu wyższego niż dwa. Generatorem macierzowym

dla liczb Narayana jest macierz $\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ posiadająca taką własność, że

$$\mathcal{N}^n = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{n+1} & \mathfrak{N}_{n-1} & \mathfrak{N}_n \\ \mathfrak{N}_n & \mathfrak{N}_{n-2} & \mathfrak{N}_{n-1} \\ \mathfrak{N}_{n-1} & \mathfrak{N}_{n-3} & \mathfrak{N}_{n-2} \end{bmatrix} \quad (\text{na przykład [68]}).$$

W pracy [72] A. P. Stakhov przedstawił generator macierzowy dla p -liczb Fibonacciego jako macierz postaci

$$\mathcal{Q}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} .$$

oraz pokazał, że n -ta potęga macierzy \mathcal{Q}_p wynosi

$$\mathcal{Q}_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \dots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \dots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \dots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \dots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix} .$$

Dla $k \geq 2$ niech $M_k = [m_{ij}]_{k \times k}$. Dla $1 \leq i \leq k$ element m_{i1} macierzy M_k jest równy współczynnikowi $F_{k,p}(n-i)$ w równości (4.1). Ponadto, dla $j \geq 2$, mamy

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } j = i + 1 \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} .$$

Macierz M_k nazywamy *generatorem dla liczb (k,p) -Fibonacci* lub *macierzą (k,p) -Fibonacci*.

Dla $t \in \{2, 3, 4, \dots, k\}$ otrzymujemy macierze postaci

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2p-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ p-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$M_k = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} .$$

Jeżeli $k = 2, p = 1$ to macierz M_2 jest generatorem macierzowym dla liczb Fibonacciego.

Jeżeli $k = 2, p = \frac{3}{2}$ to macierz M_2 jest generatorem macierzowym dla liczb Pella.

Jeżeli $k = 3, p = 1$ to dla $n \geq 3$ macierz M_3 jest nowym generatorem macierzowym dla

liczb Narayana. Wówczas, dla $n \geq 3, M_3^n = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{n+1} & \mathfrak{N}_n & \mathfrak{N}_{n-1} \\ \mathfrak{N}_{n-1} & \mathfrak{N}_{n-2} & \mathfrak{N}_{n-3} \\ \mathfrak{N}_n & \mathfrak{N}_{n-1} & \mathfrak{N}_{n-2} \end{bmatrix}.$

Jeżeli $k \geq 2, p = 1$ to przyjmując oznaczenie (4.6) otrzymujemy, że macierz M_k jest nowym generatorem macierzowym dla $(k - 1)$ -liczb Fibonacciego. Wówczas

$$M_k^n = \begin{bmatrix} F_{k-1}(n+1) & F_{k-1}(n) & \dots & F_{k-1}(n-k+2) \\ F_{k-1}(n-k+2) & F_{k-1}(n-k+1) & \dots & F_{k-1}(n-2k+3) \\ F_{k-1}(n-k+3) & F_{k-1}(n-k+2) & \dots & F_{k-1}(n-2k+4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k-1}(n) & F_{k-1}(n-1) & \dots & F_{k-1}(n-k+1) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $k \geq 3$ oraz $p \neq 1$ to macierze M_k są niewystarczające do wygenerowania wyrazów ciągu (k, p) -Fibonacciego. Aby wygenerować te ciągi potrzebujemy użyć macierzy warunków początkowych A_k postaci

$$A_k = \begin{bmatrix} F_{k,p}(2k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ F_{k,p}(2k-3) & F_{k,p}(2k-4) & \dots & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,p}(k-1) & F_{k,p}(k-2) & \dots & F_{k,p}(0) \end{bmatrix}_{k \times k}.$$

Twierdzenie 4.14. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2, n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Wtedy*

$$A_k M_k^n = \begin{bmatrix} F_{k,p}(n+2k-2) & F_{k,p}(n+2k-3) & \dots & F_{k,p}(n+k-1) \\ F_{k,p}(n+2k-3) & F_{k,p}(n+2k-4) & \dots & F_{k,p}(n+k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,p}(n+k-1) & F_{k,p}(n+k-2) & \dots & F_{k,p}(n) \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Dowód (indukcyjny ze względu na n).

Niech $k \geq 2, n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną.

Jeżeli $n = 1$ to $A_k M_k$ wynosi

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} F_{k,p}(2k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k) & F_{k,p}(k-1) \\ F_{k,p}(2k-3) & F_{k,p}(2k-4) & \dots & F_{k,p}(k-1) & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{k,p}(k) & F_{k,p}(k-1) & \dots & F_{k,p}(2) & F_{k,p}(1) \\ F_{k,p}(k-1) & F_{k,p}(k-2) & \dots & F_{k,p}(1) & F_{k,p}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} pF_{k,p}(2k-2) + (p-1)F_{k,p}(k) + F_{k,p}(k-1) & F_{k,p}(2k-2) & \dots & F_{k,p}(k) \\ pF_{k,p}(2k-3) + (p-1)F_{k,p}(k-1) + F_{k,p}(k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pF_{k,p}(k) + (p-1)F_{k,p}(2) + F_{k,p}(1) & F_{k,p}(k) & \dots & F_{k,p}(2) \\ pF_{k,p}(k-1) + (p-1)F_{k,p}(1) + F_{k,p}(0) & F_{k,p}(k-1) & \dots & F_{k,p}(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{k,p}(2k-1) & F_{k,p}(2k-2) & \dots & F_{k,p}(k+1) & F_{k,p}(k) \\ F_{k,p}(2k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k) & F_{k,p}(k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{k,p}(k+1) & F_{k,p}(k) & \dots & F_{k,p}(3) & F_{k,p}(2) \\ F_{k,p}(k) & F_{k,p}(k-1) & \dots & F_{k,p}(2) & F_{k,p}(1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Założmy, że wzór (4.14) jest prawdziwy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że

$$A_k M_k^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{k,p}(n+2k-1) & F_{k,p}(n+2k-2) & \dots & F_{k,p}(n+k+1) & F_{k,p}(n+k) \\ F_{k,p}(n+2k-2) & F_{k,p}(n+2k-3) & \dots & F_{k,p}(n+k) & F_{k,p}(n+k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{k,p}(n+k+1) & F_{k,p}(n+k) & \dots & F_{k,p}(n+3) & F_{k,p}(n+2) \\ F_{k,p}(n+k) & F_{k,p}(n+k-1) & \dots & F_{k,p}(n+2) & F_{k,p}(n+1) \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A_k \cdot M_k^{n+1} = (A_k \cdot M_k^n) \cdot M_k$, więc korzystając z założenia indukcyjnego oraz z definicji (4.1) dla liczb (k, p) -Fibonacciego, otrzymujemy

$$A_k M_k^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{k,p}(n+2k-2) & F_{k,p}(n+2k-3) & \dots & F_{k,p}(n+k-1) \\ F_{k,p}(n+2k-3) & F_{k,p}(n+2k-4) & \dots & F_{k,p}(n+k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,p}(n+k) & F_{k,p}(n+k-1) & \dots & F_{k,p}(n+1) \\ F_{k,p}(n+k-1) & F_{k,p}(n+k-2) & \dots & F_{k,p}(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} pF_{k,p}(n+2k-2) + (p-1)F_{k,p}(n+k) + F_{k,p}(n+k-1) & \dots & F_{k,p}(n+k) \\ pF_{k,p}(n+2k-3) + (p-1)F_{k,p}(n+k-1) + F_{k,p}(n+k-2) & \dots & F_{k,p}(n+k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pF_{k,p}(n+k) + (p-1)F_{k,p}(n+2) + F_{k,p}(n+1) & \dots & F_{k,p}(n+2) \\ pF_{k,p}(n+k-1) + (p-1)F_{k,p}(n+1) + F_{k,p}(n) & \dots & F_{k,p}(n+1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{k,p}(n+2k-1) & F_{k,p}(n+2k-2) & \dots & F_{k,p}(n+k+1) & F_{k,p}(n+k) \\ F_{k,p}(n+2k-2) & F_{k,p}(n+2k-3) & \dots & F_{k,p}(n+k) & F_{k,p}(n+k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{k,p}(n+k+1) & F_{k,p}(n+k) & \dots & F_{k,p}(n+3) & F_{k,p}(n+2) \\ F_{k,p}(n+k) & F_{k,p}(n+k-1) & \dots & F_{k,p}(n+2) & F_{k,p}(n+1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej równość (4.14) jest prawdziwa. \square

Twierdzenie 4.15. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Wtedy*

$$\det M_k = (-1)^{k+1}, \quad (4.15)$$

$$\det A_k = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-2}{2}}. \quad (4.16)$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\det M_k = (-1)^{k+1}$. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza macierzy M_k otrzymujemy

$$\det M_k = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{k+1}.$$

Pokażemy teraz, że $\det A_k = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-2}{2}}$. Wykorzystując wzór rekurencyjny (4.1) oraz warunki początkowe dla liczb (k, p) -Fibonacciego otrzymujemy

$$\det A_k = \begin{vmatrix} F_{k,p}(2k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ F_{k,p}(2k-3) & F_{k,p}(2k-4) & \dots & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,p}(k-1) & F_{k,p}(k-2) & \dots & F_{k,p}(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} pF_{k,p}(2k-3) + (p-1)F_{k,p}(k-1) + F_{k,p}(k-2) & F_{k,p}(2k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ pF_{k,p}(2k-4) + (p-1)F_{k,p}(k-2) + F_{k,p}(k-3) & F_{k,p}(2k-4) & \dots & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{k-2} & p^{k-3} & \dots & F_{k,p}(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{k,p}(k-2) & pF_{k,p}(2k-4) + (p-1)F_{k,p}(k-2) + F_{k,p}(k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ F_{k,p}(k-3) & pF_{k,p}(2k-5) + (p-1)F_{k,p}(k-3) + F_{k,p}(k-4) & \dots & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,p}(0) & p^{k-2} & \dots & F_{k,p}(1) \\ 0 & p^{k-3} & \dots & F_{k,p}(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p^{k-3} & F_{k,p}(k-3) & \dots & F_{k,p}(k-1) \\ p^{k-4} & F_{k,p}(k-4) & \dots & F_{k,p}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_{k,p}(0) & \dots & F_{k,p}(2) \\ 0 & 0 & \dots & F_{k,p}(1) \\ 0 & 0 & \dots & F_{k,p}(0) \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} p^{k-3} & p^{k-4} & \dots & 1 & 0 & p^{k-2} \\ p^{k-4} & p^{k-5} & \dots & 0 & 0 & p^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a kolejno względem ostatniego i przedostatniego wiersza otrzymujemy

$$\det A_k = 1 \cdot (-1)^{k+k-1} \cdot \begin{vmatrix} p^{k-3} & p^{k-4} & \dots & 1 & p^{k-2} \\ p^{k-4} & p^{k-5} & \dots & 0 & p^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p & 1 & \dots & 0 & p^2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2k-1} \cdot (-1)^{k-1+k-1} \cdot \begin{vmatrix} p^{k-3} & p^{k-4} & \dots & 1 \\ p^{k-4} & p^{k-5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4k-3} \cdot \begin{vmatrix} p^{k-3} & p^{k-4} & \dots & 1 \\ p^{k-4} & p^{k-5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem ostatniej kolumny otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det A_k &= (-1)^{4k-3} \cdot (-1)^{k-2+1} \cdot (-1)^{k-3+1} \cdot \dots \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{4k-3} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (-1)^{k-2} \cdot \dots \cdot (-1)^4 \cdot (-1) \\ &= (-1)^{4k-2} (-1)^{\frac{(k+3)(k-4)}{2}} = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-10}{2}} = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-2}{2}-4} = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-2}{2}}, \end{aligned}$$

co należało pokazać. \square

Twierdzenie 4.16. (N. Bednarz [4]) *Niech $k \geq 2$, $n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi oraz niech $p \geq 1$ będzie liczbą wymierną. Wtedy*

$$\det (A_k M_k^n) = (-1)^{\frac{(k+1)(k+2n-2)-2}{2}}. \quad (4.17)$$

Dowód. Ponieważ $\det (A_k M_k^n) = \det A_k (\det M_k)^n$, więc korzystając z twierdzenia 4.15 otrzymujemy

$$\det (A_k M_k^n) = (-1)^{\frac{(k+1)(k-2)-2}{2}} \cdot (-1)^{n(k+1)} = (-1)^{\frac{(k+1)(k+2n-2)-2}{2}},$$

co kończy dowód. \square

Podsumowanie i dalsze kierunki badań

W niniejszej rozprawie zostały podane rezultaty dotyczące liczb typu Fibonacciego. W pierwszej części przedstawione zostały oszacowania $(A, 2B)$ -indeksu w grafach jednocyklowych będące kontynuacją badań zapoczątkowanych w pracy [6] a następnie rozwiniętych w [3]. Przedstawione wyniki nie wyczerpują tej tematyki i powinny być nadal kontynuowane. W kontekście tym nasuwają się pytania dotyczące $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -indeksów w tych klasach, związanych na przykład z liczbami Pella i Jacobsthała. Ponadto pojawiają się problemy istnienia $(iA_j; i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{I}_i)$ -krawędziowego kolorowania z podziałem na przykład dla $(2A_1, 3A_1)$ -krawędziowego kolorowania z podziałem. Zagadnienia te dają szerokie możliwości do dalszych badań.

W nawiązaniu do wielu istniejących uogólnień liczb Fibonacciego, w rozprawie wprowadzone jest dwuparametrowe uogólnienie ciągu Fibonacciego przy pomocy jednorodnego równania rekurencyjnego rzędu k o wymiernych współczynnikach. Interesujące jest, że wspomniane równanie uogólnia jednocześnie kilka znanych ciągów typu Fibonacciego. Należy nadal poszukiwać nowych własności wprowadzonego ciągu (k, p) -Fibonacciego, przede wszystkim jego wzoru jawnego, a także nowych generatorów macierzowych. Istotne jest znalezienie interpretacji tego ciągu dla wymiernych współczynników. Ponadto naturalnym jest zdefiniowanie ciągu (k, p) -Lucasa oraz zbadanie własności tego ciągu i określenie jego związków z ciągiem (k, p) -Fibonacciego.

Wspomniane problemy są jedynie przykładowymi, które nasuwają się, ale z pewnością, w trakcie dalszych badań nad ciągami typu Fibonacciego, będą pojawiać się inne pytania. Nowe problemy badawcze będą przede wszystkim wynikać z bieżących osiągnięć naukowych i mogą wyznaczać kierunek przyszłych badań.

Bibliografia

- [1] M. Akhtaruzzaman, A. A. Shafie, *Geometrical substantiation of Phi, the golden ratio and the baroque of nature, architecture, design and engineering*, International Journal of Arts, 1(1) (2011) 1–22.
- [2] J. Artz, M. Rowell, *A tiling approach to Fibonacci product identities*, Involve, a Journal of Mathematics, 2(5) (2010) 581–587.
- [3] N. Bednarz, *Application of the numbers of the Fibonacci type to the counting problems in graphs*, manuskrypt.
- [4] N. Bednarz, *On (k, p) -Fibonacci numbers*, 2020+.
- [5] N. Bednarz, I. Włoch, *Some interpretations of the (k, p) -Fibonacci numbers*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, (w druku).
- [6] N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch, *The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs*, Utilitas Mathematica, 106 (2018) 39–49.
- [7] U. Bednarz, I. Włoch, *Note about sequences of extrema $(A, 2B)$ -edge coloured trees*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, section A–Mathematica, 71(2) (2017) 17–23.
- [8] U. Bednarz, I. Włoch, *Fibonacci and telephone numbers in extremal trees*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 38(1) (2018) 121–133.
- [9] U. Bednarz, A. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *Distance Fibonacci numbers, their interpretations and matrix generators*, Commentationes Mathematicae, 53(1) (2013) 35–46.
- [10] U. Bednarz, D. Bród, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *On three types of $(2, k)$ -distance Fibonacci numbers and number decompositions*, Ars Combinatoria, 118 (2015) 391–405.

- [11] U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *Total graph interpretation of the numbers of the Fibonacci type*, Journal of Applied Mathematics, 2015 (2015) Article ID 837917, 7 pages.
- [12] U. Bednarz, D. Bród, A. Szynal-Liana, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *On Fibonacci numbers in edge coloured trees*, Opuscula Mathematica, 37(4) (2017) 479–490.
- [13] H. Belbachir, A. Belkhir, *Tiling approach to obtain identities for generalized Fibonacci and Lucas numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae, 41 (2013) 13–17.
- [14] A. T. Benjamin, J. J. Quinne, *Recounting Fibonacci and Lucas Identities*, The College Mathematics Journal, 30(5) (1999) 359–366.
- [15] A. T. Benjamin, J. J. Quinne, *Proofs that really count: The art of combinatorial proof*, Mathematical Association of America, Washington, (2003).
- [16] C. Berge, *Principles of combinatorics*, Academic Press, New York, (1971).
- [17] F. Bergeron, C. Reutenauer, *Golden ratio and phyllotaxis, a clear mathematical link*, Journal of Mathematical Biology, 78(1-2) (2019) 1–19.
- [18] J. Bodeen, S. Butler, T. Kim, X. Sun, S. Wang, *Tiling a strip with triangles*, The Electronic Journal of Combinatorics, 21(1) (2014) 1–7.
- [19] C. Bolat, H. Köse, *On the properties of k -Fibonacci numbers*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 5(22) (2010) 1097–1105.
- [20] R. C. Brigham, R. M. Caron, P. Z. Chinn, R. P. Grimaldi, *A tiling scheme for the Fibonacci numbers*, Journal of Recreational Mathematics, 28 (1997) 10–16.
- [21] D. Bród, *On a two-parameter generalization of Jacobsthal numbers and its graph interpretation*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, section A–Mathematica, 72(2) (2018) 21–28.
- [22] J.-D. Cassini, *Une nouvelle progression de nombres*, volume 1, Histoire de l’Academie Royale des Sciences, Paryż, (1733).
- [23] P. Catarino, *On some identities and generating functions for k -Pell numbers*, International Journal of Mathematical Analysis, 7(38) (2013) 1877–1884.
- [24] P. Catarino, P. Vasco, *On some identities and generating functions for k -Pell-Lucas sequence*, Applied Mathematical Sciences, 7(98) (2013) 4867–4873.

- [25] N. Cruz, M. Olivares, J. R. Villanueva, *The golden ratio in Schwarzschild–Kottler black holes*, The European Physical Journal C, 77(2) (2017) 1–6.
- [26] R. da Silva, K. S. de Oliveira, A. C. da Graça Neto, *On a four-parameter generalization of some special sequences*, Discrete Applied Mathematics, 243 (2018) 154–171.
- [27] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, (2005).
- [28] J. Ercolano, *Matrix generators of Pell sequences*, The Fibonacci Quarterly, 17(1) (1979) 71–77.
- [29] S. Falcón, *On the k -Lucas numbers*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(21) (2011) 1039 – 1050.
- [30] S. Falcón, *Generalized (k, r) -Fibonacci numbers*, General Mathematics Notes, 25 (2) (2014) 148–158.
- [31] S. Falcón, Á. Plaza, *The k -Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle*, Chaos, Solitons & Fractals, 33(1) (2007) 38–49.
- [32] S. Falcón, Á. Plaza, *On the Fibonacci k -numbers*, Chaos, Solitons & Fractals, 32 (5) (2007) 1615–1624.
- [33] A.-H. Fan, *Some aspects of multifractal analysis*, In *Geometry and Analysis of Fractals*. Springer, Berlin, Heidelberg, (2014).
- [34] M. C. Firengiz, D. Tasci, N. Tuglu, *Some identities for Fibonacci and Incomplete Fibonacci p -numbers via the symmetric matrix method*, Journal of Integer Sequences, 17(2) (2014) 7 pages.
- [35] Z. Füredi, *The number of maximal independent sets in connected graphs*, Journal of Graph Theory, 11(4) (1987) 463–470.
- [36] T. Goy, M. Shattuck, *Fibonacci and Lucas Identities from Toeplitz–Hessenberg Matrices*, Applications & Applied Mathematics, 14(2) (2019) 699–715.
- [37] R. P. Grimaldi, *Tilings, compositions, and generalizations*, Journal of Integer Sequences, 13(6) (2010) 21 pages.
- [38] N. V. Grushina, P. V. Korolenko, S. N. Markova, *Special features of the diffraction of light on optical Fibonacci gratings*, Moscow University Physics Bulletin, 63(2) (2008) 123–126.

- [39] I. Gutman, *Acyclic systems with extremal Hückel π -electron energy*, *Theoretica Chimica Acta*, 45(2) (1977) 79–87.
- [40] I. Gutman, O. E. Polansky, *Mathematical concepts in organic chemistry*, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, (2012).
- [41] I. Gutman, S. Wagner, *Maxima and minima of the Hosoya index and the Merrifield-Simmons index. A survey of results and techniques*, *Acta Applicandae Mathematicae*, 112(3) (2010) 323–346.
- [42] V. E. Hoggat, *Fibonacci and Lucas numbers*, Houghton Mifflin, Boston, (1969).
- [43] R. Honsberger, *A second look at the Fibonacci and Lucas numbers*, In *Mathematical Gems III*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., (1985).
- [44] A. F. Horodam, *Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers*, *Duke Mathematical Journal*, 32(3) (1965) 437–446.
- [45] A. F. Horodam, *Pell identities*, *The Fibonacci Quarterly*, 9(3) (1971) 245–252.
- [46] H. Hosoya, *Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons*, *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, 44(9) (1971) 2332–2339.
- [47] H. Hosoya, *Mathematical meaning and importance of the topological index Z* , *Croatica Chemica Acta*, 80(2) (2007) 239–249.
- [48] D. Jhala, K. Sisodiya, G. P. S. Rathore, *On some identities for k -Jacobsthal numbers*, *International Journal of Mathematical Analysis*, 7(9-12) (2013) 551–556.
- [49] M. Katz, C. Stenson, *Tiling a $(2 \times n)$ -board with squares and dominoes*, *Journal of Integer Sequences*, 12(2) (2009) 12 pages.
- [50] E. Kiliç, *The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p -numbers*, *European Journal of Combinatorics*, 29(3) (2008) 701–711.
- [51] E. Kiliç, *The generalized Pell (p, i) -numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4) (2009) 2047–2063.
- [52] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley & Sons, (2001).
- [53] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas numbers with applications*, Springer, New York, (2014).

- [54] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, volume 2, John Wiley & Sons, (2018).
- [55] M. Kwaśnik, I. Włoch, *The total number of generalized stable sets and kernels of graphs*, *Ars Combinatoria*, 55 (2000) 139–146.
- [56] M. Livio, *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*, Broadway Books, (2008).
- [57] E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, *American Journal of Mathematics*, 1(2) (1878) 184–196.
- [58] C. N. Menhinick, *The Fibonacci Resonance and other new Golden Ratio discoveries*, OnPerson International Limited, Poynton, Cheshire, (2015).
- [59] R. E. Merrifield, H. E. Simmons, *The structures of molecular topological spaces*, *Theoretica Chimica Acta*, 55(1) (1980) 55–75.
- [60] E. P. Miles, *Generalized Fibonacci numbers and associated matrices*, *The American Mathematical Monthly*, 67(8) (1960) 745–752.
- [61] J. W. Moon, L. Moser, *On cliques in graphs*, *Israel Journal of Mathematics*, 3(1) (1965) 23–28.
- [62] J. Ou, *On extremal unicyclic molecular graphs with prescribed girth and minimal Hosoya index*, *Journal of Mathematical Chemistry*, 42(3) (2007) 423–432.
- [63] J. Ou, *On extremal unicyclic molecular graphs with maximal Hosoya index*, *Discrete Applied Mathematics*, 157(2) (2009) 391–397.
- [64] M. Patra, S. K. Maiti, *Anomalous magnetic response of a quasi-periodic mesoscopic ring in presence of Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions*, *The European Physical Journal B*, 89(4) (2016) 88–97.
- [65] M. Patra, S. K. Maiti, *Characteristics of persistent spin current components in a quasi-periodic Fibonacci ring with spin-orbit interactions: Prediction of spin-orbit coupling and on-site energy*, *Annals of Physics*, 375 (2016) 337–350.
- [66] A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard, *The number of independent sets in unicyclic graphs*, *Discrete Applied Mathematics*, 152(1-3) (2005) 246–256.
- [67] H. Prodinger, R. F. Tichy, *Fibonacci numbers of graphs*, *The Fibonacci Quarterly*, 20(1) (1982) 16–21.

- [68] J. L. Ramírez, V. F. Sirvent, *A note on the k -Narayana sequence*, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 45 (2015) 91–105.
- [69] A. G. Shannon, A. F. Horadam, *Generating functions for powers of third order recurrence sequences*, *Duke Mathematical Journal*, 38(4) (1971) 791–794.
- [70] P. Singh, *The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India*, *Historia Mathematica*, 12(3) (1985) 229–244.
- [71] A. P. Stakhov, *Introduction into algorithmic measurement theory*, Soviet Radio, Moskwa, (1977).
- [72] A. P. Stakhov, *Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(1) (2006) 56–66.
- [73] A. Szynal-Liana, I. Włoch, *On distance Pell numbers and their connections with Fibonacci numbers*, *Ars Combinatoria*, 113 (2014) 65–75.
- [74] A. Szynal-Liana, I. Włoch, *Hypercomplex numbers of the Fibonacci type*, Oficyna wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, (2019).
- [75] A. Szynal-Liana, A. Włoch, I. Włoch, *On generalized Pell numbers generated by Fibonacci and Lucas numbers*, *Ars Combinatoria*, 115 (2014) 411–423.
- [76] S. Vajda, *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*, Courier Corporation, (2008).
- [77] A. Włoch, *Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers*, *Applied Mathematics and Computation*, 219(10) (2013) 5564–5568.
- [78] I. Włoch, *Trees with extremal numbers of maximal independent sets including the set of leaves*, *Discrete Mathematics*, 308(20) (2008) 4768–4772.
- [79] I. Włoch, *On generalized Pell numbers and their graph representations*, *Commentationes Mathematicae*, 48(2) (2008) 169–175.
- [80] I. Włoch, U. Bednarz, D. Bród, A. Włoch, M. Wołowicz-Musiał, *On a new type of distance Fibonacci numbers*, *Discrete Applied Mathematics*, 161(16-17) (2013) 2695–2701.
- [81] D. Yu, D. Xue, H. Ratajczak, *Golden ratio and bond-valence parameters of hydrogen bonds of hydrated borates*, *Journal of Molecular Structure*, 783(1-3) (2006) 210–214.

Dodatek - Tabele dla wybranych ciągów typu Fibonacciego

Ciąg \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$	1	1	2	4	10	26	76	232	764	2620	9496	35696	140152	568504	2390480	10349536
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364
$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025
$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	94642	228486	551614
$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	19601	47321	114243	275807
$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	2731	5461	10923
$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047	4097	8191	16385	32767
$pv_n = pv_{n-2} + pv_{n-3}$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
$pr_n = pr_{n-2} + pr_{n-3}$	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68
$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{n-1} + \mathfrak{N}_{n-3}$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129
$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$	1	1	1	3	5	9	17	31	57	105	193	355	653	1201	2209	4063
$T_n^* = T_{n-1}^* + T_{n-2}^* + T_{n-3}^*$	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705	3136

(2.39) **liczby k -Fibonacciego** $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$, dla $k \geq 1$, $n \geq 2$ i $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
2	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025
3	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481	467280	1543321	5097243	16835050
4	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289	7465176	31622993	133957148	567451585
5	0	1	5	26	135	701	3640	18901	98145	509626	2646275	13741001	71351280	370497401	1923838285	9989688826

(2.40) **liczby k -Lucasa** $L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}$, dla $k \geq 1$, $n \geq 2$ i $L_{k,0} = 0$, $L_{k,1} = k$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843
2	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	94642	228486
3	2	3	11	36	119	393	1298	4287	14159	46764	154451	510117	1684802	5564523	18378371
4	2	4	18	76	322	1364	5778	24476	103682	439204	1860498	7881196	33385282	141422324	599074578
5	2	5	27	140	727	3775	19602	101785	528527	2744420	14250627	73997555	384238402	1995189565	10360186227

(2.41) **liczby k -Pella** $p_{k,n} = 2p_{k,n-1} + kp_{k,n-2}$, dla $k \geq 1$, $n \geq 2$ i $p_{k,0} = 0$, $p_{k,1} = 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025
2	0	1	2	6	16	44	120	328	896	2448	6688	18272	49920	136384	372608	1017984
3	0	1	2	7	20	61	182	547	1640	4921	14762	44287	132860	398581	1195742	3587227
4	0	1	2	8	24	80	256	832	2688	8704	28160	91136	294912	954368	3088384	9994240
5	0	1	2	9	28	101	342	1189	4088	14121	48682	167969	579348	1998541	6893822	23780349

(2.42) **liczby k -Pella-Lucasa** $Q_k(n) = 2Q_k(n-1) + kQ_k(n-2)$, dla $k \geq 1$, $n \geq 2$ i $Q_k(0) = Q_k(1) = 2$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	94642	228486	551614
2	2	2	8	20	56	152	416	1136	3104	8480	23168	63296	172928	472448	1290752	3526400
3	2	2	10	26	82	242	730	2186	6562	19682	59050	177146	531442	1594322	4782970	14348906
4	2	2	12	32	112	352	1152	3712	12032	38912	125952	407552	1318912	4268032	13811712	44695552

(2.43) **liczby k -Jacobsthala** $J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}$, dla $k \geq 1$, $n \geq 2$ i $J_{k,0} = 0$, $J_{k,1} = 1$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	2731	5461	10923
2	0	1	2	6	16	44	120	328	896	244	6688	18272	49920	136384	372608	1017984
3	0	1	3	11	39	139	495	1763	6279	22363	79647	283667	1010295	3598219	12815247	45642179
4	0	1	4	18	80	356	1584	7048	31360	139536	620864	2762528	12291840	54692416	243353344	1082798208

(2.44) **k -uogólnione liczby Fibonacciego** $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_{n-k}$, dla $k \geq 2$, $n \geq k$ i $f_j = 0$ dla $0 \leq j \leq k-2$, $f_{k-1} = 1$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
3	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705
4	0	0	0	1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773	1490
5	0	0	0	0	1	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464	912

(2.45) **p -liczby Fibonacciego** $F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$, dla $p \geq 1$, $n \geq p+2$ i $F_p(0) = 0$, $F_p(j) = 1$ dla $1 \leq j \leq p+1$.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
2	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129
3	0	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50
4	0	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26

(2.46) uogólnione liczby Fibonacciego $F(k, n) = F(k, n - 1) + F(k, n - k)$, dla $k \geq 2, n \geq k$ i $F(k, n) = n + 1$ dla $0 \leq n \leq k - 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597
3	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406
4	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69	95	131	181
5	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	34	45	60	80	106

(2.47) uogólnione liczby Lucasa $L(k, n) = L(k, n - 1) + L(k, n - k)$, dla $k \geq 2, n \geq 2k$ i $L(k, n) = n + 1$ dla $0 \leq n \leq 2k - 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364
3	1	2	3	4	5	6	10	15	21	31	46	67	98	144	211	309
4	1	2	3	4	5	6	7	8	13	19	26	34	47	66	92	126
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	23	31	40	50	66

(2.48) uogólnione liczby Pella $P(k, n) = P(k, n - 1) + P(k, n - k + 1) + P(k, n - k)$, dla $k \geq 2, n \geq k + 1$ i $P(2, 0) = 0, P(k, 0) = 1$, dla $k \geq 3, P(k, 1) = 1, P(k, n) = 2n - 2$, dla $2 \leq n \leq k$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025
3	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705	3136	5768
4	1	1	2	4	6	9	15	25	40	64	104	169	273	441	714	1156
5	1	1	2	4	6	8	11	17	27	41	60	88	132	200	301	449

(2.49) **odległościowe liczby Fibonacciego** $Fd(k, n) = Fd(k, n - k + 1) + Fd(k, n - k)$, dla $k \geq 2, n \geq k$ i $Fd(k, n) = 1$ dla $0 \leq n \leq k - 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946
3	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200
4	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12	15	17	21	27	32	38
5	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	7	8	8	9	12	15	16

(2.50) **odległościowe liczby Pella** $Qd(k, n) = Qd(k, n - 1) + Qd(k, n - 2) + Qd(k, n - k)$, dla $k \geq 1, n \geq k$ i $Qd(k, 0) = k, Qd(1, 1) = 1, Qd(k, n) = L_n$, dla $1 \leq n \leq k - 1$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	19601	47321	114243	275807
2	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047	4097	8191	16385	32767
3	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	815	1499	2757	5071	9327

(2.51) **uogólnione (p, i) -liczby Pella** $P_p^{(i)}(n) = 2P_p^{(i)}(n-1) + P_p^{(i)}(n-p-1)$, dla $p \geq 1, 0 \leq i \leq p, n \geq p+2$ i $P_p^{(i)}(j) = 0$, dla $1 \leq j \leq i$, $P_p^{(i)}(k) = 1$, dl $i+1 \leq k \leq p+1$.

		n															
		i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p=1$	0	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	19601	47321	114243	
	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	
$p=2$	0	1	1	1	3	7	15	33	73	161	355	783	1727	3809	8401	18529	
	1	0	1	1	2	5	11	24	53	117	258	569	1255	2768	6105	13465	
	2	0	0	1	2	4	9	20	44	97	214	472	1041	2296	5064	11169	

(2.52) **liczby (s, p) -Jacobsthala** $J_n(s, p) = 2^{s+p}J_{n-1}(s, p) + (2^{2s+p} + 2^{s+2p})J_{n-2}(s, p)$, dla $n \geq 2$ i $J_0(s, p) = 1, J_1(s, p) = 2^s + 2^p + 2^{s+p}$.

		n													
		p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s=0$	0	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	
	1	1	5	16	62	220	812	2944	10760	39184	142928	520960	1899488	6924736	
$s=1$	0	0	5	10	50	160	620	2200	8120	29440	107600	391840	1429280	5209600	
	1	0	8	32	256	1536	10240	65536	425984	2752512	17825792	115343360	746586112	4831838208	

(4.1) **liczby (k, p) -Fibonacciego** $F_{k,p}(n) = pF_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n-k+1) + F_{k,p}(n-k)$, dla $k \geq 2, n \geq k, p \geq 1$ i $F_{k,p}(0) = 0, F_{k,p}(n) = p^{n-1}$ dla $1 \leq n \leq k-1$.

		<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none; text-align: center;">n</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">p</td> <td style="border: none; text-align: center;">\</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table>																	n																	p	\																
	n																																																				
p	\																																																				
$k=2$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610																																				
	$\frac{3}{2}$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025																																				
	2	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481	467280	1543321	5097243	16835050																																				
	$\frac{5}{2}$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289	7465176	31622993	133957148	567451585																																				
$k=3$	1	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129																																				
	2	0	1	2	5	13	33	84	214	545	1388	3535	9003	22929	58396	148724	378773																																				
	3	0	1	3	11	40	145	526	1908	6921	25105	91065	330326	1198213	4346356	15765820	57188385																																				
	4	0	1	4	19	89	417	1954	9156	42903	201034	942001	4414009	20683073	96916320	454128508	2127946065																																				
$k=4$	1	0	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50																																				
	2	0	1	2	4	9	21	48	109	248	565	1287	2931	6675	15202	34622	78850																																				
	3	0	1	3	9	29	94	303	976	3145	10135	32660	105246	339153	1092914	3521894	11349234																																				
	4	0	1	4	16	67	281	1176	4921	20594	86185	360679	1509419	6316825	26435522	110631024	462983990																																				
$k=5$	1	0	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26																																				
	2	0	1	2	4	8	17	37	80	172	369	792	1701	3654	7849	16859	36211																																				
	3	0	1	3	9	27	83	256	789	2430	7483	23044	70966	218547	673037	2072682	6383022																																				
	4	0	1	4	16	64	259	1049	4248	17200	69641	281970	1141673	4622540	18716283	75780683	306829721																																				