



JOANNA MODŁAWSKA

Wielokrotna teleportacja kwantowa

Praca z zakresu fizyki przygotowana pod kierunkiem
Prof. UAM dr. hab. Andrzeja Grudki

Poznań, grudzień 2011 roku

Oświadczenie autora pracy

Ja, niżej podpisana **Joanna Modławska**, studentka Wydziału Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, oświadczam, że przedkładaną rozprawę doktorską pt: *Wielokrotna teleportacja kwantowa* napisałam samodzielnie. Oznacza to, że przy pisaniu pracy, poza niezbędnymi konsultacjami, nie korzystałam z pomocy innych osób, a w szczególności nie zlecałam opracowania rozprawy lub jej istotnych części innym osobom, ani nie odpisywałam tej rozprawy lub jej istotnych części od innych osób.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Równocześnie **wyrażam zgodę** na to, że gdyby powyższe oświadczenie okazało się nieprawdziwe, decyzja o wydaniu mi dyplomu zostanie cofnięta.

Data

Podpis autora pracy

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania za przyznane mi stypendia:

- **Miasta Poznania** – *stypendium naukowe za „Dotychczasowy wkład do rozwoju badań w dziedzinie informatyki kwantowej”,*
- **Fundacji na rzecz Nauki Polskiej** – *stypendium dla młodych uczonych START,*
- **Fundacji Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza** – *stypendium naukowe dla doktorantów UAM,*

które przyczyniły się do powstania niniejszej pracy doktorskiej.

Serdecznie dziękuję Panu Prof. UAM dr. hab. Andrzejowi Grudce za wprowadzenie mnie w problematykę dotyczącą informatyki kwantowej oraz za okazaną mi pomoc, wsparcie i życzliwość podczas przygotowywania rozprawy. Pan Profesor był dla mnie niewyczerpanym źródłem naukowej inspiracji, budzącym podziw wulkanem kreatywności oraz godnym zaufania pasterzem.

Pragnę podziękować również wszystkim koleżankom i kolegom z Zakładu Elektroniki Kwantowej za cztery lata wspólnej pracy. Dziękuję Wam za miłą atmosferę, i za to wszystko co sprawia, że do pracy przychodzi się z uśmiechem.

Rodzicom

Summary

The dissertation is devoted to an increase of probability and fidelity of a multiple quantum teleportation. The first part presents a multiple linear-optical quantum teleportation performed with use of the Knill, Laflamme, and Milburn (KLM) protocol. It is shown that errors introduced in previous teleportations can be corrected by errors introduced in subsequent teleportations. Moreover, it is demonstrated that due to this effect nonmaximally entangled states give higher probability of a faithful multiple teleportation when the number of teleportations is high enough. A modified version of the modified KLM protocol, called adaptive quantum teleportation protocol, is introduced and it is shown that this protocol allows a further increase of the probability of a faithful teleportation. It is proved that even in the case of a double teleportation performed with use of the modified KLM protocol, nonmaximally entangled states are more likely to give a faithful teleportation, than maximally entangled states.

In the second part of the dissertation it is shown how, by means of an entanglement swapping protocol, fidelity of a double teleportation performed by exploiting of some mixed states can be increased. Furthermore, it is proved that, using an entanglement swapping protocol with two states neither of which violates Clauser–Horne–Shimony–Holt inequality, a state which violates this inequality can be obtained.

Streszczenie

Tematyka pracy obejmuje zagadnienia związane ze zwiększaniem prawdopodobieństwa i wierności wielokrotnej teleportacji kwantowej. W pierwszej części pracy przedstawiono wielokrotną liniowo-optyczną teleportację kwantową wykonaną za pomocą protokołu Knilla, Laflamme'a i Milburna (KLM). Pokazano, że błędy wprowadzone w poprzednich teleportacjach mogą zostać poprawione przez błędy wprowadzone w następnych teleportacjach. Co więcej, udowodniono, że ze względu na ten efekt stany niemaksymalnie splątane dają większe prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji dla dostatecznie dużej liczby teleportacji. Wprowadzono ponadto zmodyfikowaną wersję protokołu KLM, którą nazwano teleportacją dostosowaną i pokazano, że pozwala ona dodatkowo zwiększyć prawdopodobieństwo wiernej teleportacji. Udowodniono, że już w przypadku podwójnej teleportacji wykonywanej za pomocą zmodyfikowanego protokołu KLM stany niemaksymalnie splątane dają większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż stany maksymalnie splątane.

W drugiej części pracy pokazano jak wykorzystując protokół wymiany splątania można zwiększyć wierność podwójnej teleportacji wykonywanej za pomocą pewnych stanów mieszanych. Dodatkowo udowodniono, że za pomocą protokołu wymiany splątania z dwóch stanów, z których żaden nie łamie nierówności Clausera–Horne'a–Shimony'ego–Holta, można otrzymać stan, który już tę nierówność łamie.

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Liniowo-optyczna teleportacja	4
2.1	Oryginalny protokół teleportacji	4
2.2	Wierność teleportacji kwantowej	7
2.3	Protokół liniowo-optycznej teleportacji KLM	9
2.4	Korekcja błędu	15
3	Wielokrotna liniowo-optyczna teleportacja kwantowa	19
3.1	Wprowadzenie	19
3.2	Strategia teleportacji minimalizująca prawdopodobieństwo wystąpienia błędu	22
3.3	Porównanie dwóch strategii	27
3.4	Niemultiplikatywność prawdopodobieństwa wiernej wielokrotnej teleportacji	35
4	Dostosowana teleportacja kwantowa	40

4.1	Wprowadzenie	40
4.2	Protokół dostosowanej teleportacji	41
4.2.1	Parzyste N	43
4.2.2	Nieparzyste N	46
4.3	Porównanie dostosowanej teleportacji z wielokrotną teleportacją . . .	50
5	Zwiększanie wierności teleportacji za pomocą protokołu wymiany splątania	58
5.1	Wprowadzenie	58
5.2	Wymiana splątania dla stanów mieszanych	61
6	Łamanie nierówności Clausera–Horne’a–Shimony’ego–Holta	71
6.1	Wprowadzenie	71
6.2	Wymiana splątania, a łamanie nierówności CHSH	75
7	Podsumowanie	81
	Bibliografia	83

Rozdział 1

Wstęp

Jeden z kluczowych problemów informatyki kwantowej dotyczy efektywnego przesyłania informacji kwantowej. W 1993 roku Bennett i inni zaproponowali protokół teleportacji kwantowej, który pozwala na przeniesienie nieznanego stanu kwantowego z jednej cząstki na drugą z wykorzystaniem splątania kwantowego i klasycznej komunikacji [Bennett *et al.*, 1993]. Protokół ten nie nakłada ograniczenia na dystans jaki dzieli cząstki, między którymi stan jest teleportowany.

Teleportacja kwantowa została po raz pierwszy przeprowadzona eksperymentalnie w 1997 roku przez grupę Zeilingera [Bouwmeester *et al.*, 1997], a rok później przez grupę de Martiniego [Boschi *et al.*, 1998]. Obie grupy dokonały teleportacji stanów fotonów metodami optyki liniowej. W kolejnych latach pojawiło się wiele prac, w których donoszono o teleportacji stanów fotonów na coraz to większe odległości dochodzące nawet do kilku kilometrów [Marcikic *et al.*, 1998; Ursin *et al.*, 2004; Ursin *et al.*, 2007]. Poza teleportacją stanów fotonów dokonano również teleportacji stanów atomów [Barrett *et al.*, 2004; Riebe *et al.*, 2004].

Rozważania zawarte w niniejszej pracy dotyczą wielokrotnej teleportacji kwanto-

wej, rozumianej jako łańcuch kilku następujących po sobie teleportacji. W pierwszej części pracy, obejmującej rozdziały 2-4, rozważymy teleportację kwantową wykonywaną za pomocą optyki liniowej. Metody optyki liniowej są dobrze opanowane eksperymentalnie, o czym świadczy chociażby fakt, że dwie pierwsze teleportacje kwantowe zostały wykonane z wykorzystaniem właśnie tych metod. Za ich wadę można jednak uznać fakt, iż nie pozwalają one na wykonanie deterministycznej teleportacji kwantowej.

Zawartość rozdziałów składających się na część pierwszą pracy przedstawia się następująco. W rozdziale 2 omówimy podstawowy protokół teleportacji kwantowej Bennetta i innych oraz najbardziej efektywny z dotychczas opisanych w literaturze protokołów liniowo-optycznej teleportacji, tj. protokół Knilla, Laflamme'a i Milburna (KLM) [Franson *et al.*, 2002; Grudka i Modławska, 2008; Knill *et al.*, 2001]. W kolejnym rozdziale rozważymy wielokrotną liniowo-optyczną teleportację kwantową wykonaną za pomocą protokołu KLM i pokażemy, że dla dostatecznie dużej liczby teleportacji stany niemaksymalnie splątane dają większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż stany maksymalnie splątane [Grudka i Modławska, 2010; Modławska i Grudka, 2008b]. Z kolei rozdział 4 zawiera opis protokołu dostosowanej teleportacji kwantowej, który jest modyfikacją protokołu KLM. Pokażemy tutaj, że już w podwójnej teleportacji stany niemaksymalnie splątane dają większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż stany maksymalnie splątane [Modławska i Grudka, 2009].

W drugiej części pracy, obejmującej rozdziały 5 i 6, rozważymy podwójną teleportację qubitów wykonywaną za pomocą ogólnych lokalnych operacji kwantowych (tzn. nie będziemy ograniczać się do lokalnych operacji kwantowych wykonywanych

za pomocą optyki liniowej). Pokażemy w niej jak dzięki prostej modyfikacji protokołu wymiany splątania możemy zwiększyć wierność podwójnej teleportacji wykonywanej za pomocą pewnych stanów mieszanych [Modławska i Grudka, 2008a]. Zaproponowaną metodę porównamy ze znaną metodą niezależnego zwiększania wierności każdej z pojedynczych teleportacji i przedstawimy przykłady stanów, dla których pierwsza z metod daje większą wierność podwójnej teleportacji. Dodatkowo pokażemy, że w podobny sposób ze stanów niełamających nierówności Clausera, Horne'a, Shimony'ego i Holta możemy otrzymać stan, który już tę nierówność łamie [Wójcik *et al.*, 2010].

Wyniki zawarte w pracy mogą mieć znaczenie m.in. przy przesyłaniu informacji w sieciach kwantowych między rozproszoną grupą użytkowników.

Liniowo-optyczna teleportacja

2.1 Oryginalny protokół teleportacji

Przesyłanie stanu kwantowego z użyciem klasycznego kanału komunikacyjnego oraz pary splątanych qubitów nazywane jest teleportacją kwantową [Bennett *et al.*, 1993]. W protokole teleportacji kwantowej uczestniczą nadawca oraz odbiorca, przy czym zgodnie z powszechnie stosowaną konwencją, nadawcy przypisuje się imię Alicja, a odbiorcy Bob. Protokół teleportacji składa się z dwóch etapów, a mianowicie z etapu pomiaru, który przeprowadza Alicja i etapu odtwarzania, który przeprowadza Bob. Aby wykonać teleportację Alicja i Bob muszą posiadać po jednym qubicie z pary qubitów w dowolnym z poniższych stanów Bella:

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B), \quad (2.1)$$

$$|\Phi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B - |1\rangle_A|1\rangle_B), \quad (2.2)$$

$$|\Psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B), \quad (2.3)$$

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B), \quad (2.4)$$

z których każdy jest stanem maksymalnie splątany. Cząstka oznaczona literą A należy do Alicji, a cząstka oznaczona literą B do Boba. Protokół teleportacji przedstawiony zostanie na przykładzie stanu $|\Phi^+\rangle_{AB}$; dla trzech pozostałych stanów Bella obliczenia przebiegają analogicznie.

Oprócz cząstki z pary splątanej, Alicja posiada dodatkowo cząstkę C w stanie

$$|\psi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C, \quad (2.5)$$

gdzie α i β to liczby zespolone spełniające warunek $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Celem zarówno Alicji jak i Boba jest teleportacja stanu z cząstki C na cząstkę B , tzn. dążą oni do tego, aby po teleportacji cząstka B znalazła się w stanie

$$|\psi\rangle_B = \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B. \quad (2.6)$$

Początkowy stan cząstek A , B i C można zapisać w postaci

$$|\psi\rangle_C |\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C)(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B). \quad (2.7)$$

Aby teleportować cząstkę, Alicja musi wykonać pomiar w bazie Bella stanu swoich qubitów, tzn. qubitów A z pary splątanej oraz qubitów C . W związku z tym korzystnie jest wyrazić stany qubitów A i C w tej właśnie bazie. Korzystając z (2.1)–(2.4) możemy zapisać stan cząstek Alicji i Boba w następującej postaci

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_C |\Phi^+\rangle_{AB} = & \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \\ & + \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) + \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Z (2.8) wynika, że w wyniku pomiaru Alicji układ przejdzie z równym prawdopodobieństwem wynoszącym $\frac{1}{4}$ do jednego ze stanów:

$$|\Phi^+\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B), \quad (2.9)$$

$$|\Phi^-\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B), \quad (2.10)$$

$$|\Psi^+\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B), \quad (2.11)$$

$$|\Psi^-\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B). \quad (2.12)$$

Obie cząstki Alicji ulegają splątaniu w jeden ze stanów Bella, który, dzięki pomiarowi, Alicja może jednoznacznie określić. Jednak ze względu na fakt, że wynik pomiaru jest całkowicie losowy, Bob nie jest w stanie przewidzieć, w którym z czterech możliwych stanów znajduje się jego qubit. Aby Bob otrzymał qubit w takim samym stanie jak oryginalny stan cząstki C , Alicja musi przesłać mu informację o wyniku pomiaru. Potrzebuje ona do tego dwóch bitów klasycznej informacji. Po otrzymaniu informacji od Alicji, Bob rozpoczyna etap odtwarzania i, w zależności od wyniku pomiaru Alicji, stosuje jedną z czterech operacji unitarnych tj. I , σ_z , σ_x lub σ_y :

- jeżeli Alicja otrzyma jako wynik pomiaru $|\Phi^+\rangle_{CA}$, wówczas Bob nie musi dokonywać żadnych operacji. Sytuacja ta odpowiada zastosowaniu operacji unitarnej

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

- jeżeli Alicja otrzyma wynik $|\Phi^-\rangle_{CA}$, wówczas Bob musi zastosować do swojej cząstki bramkę Pauliego

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

- jeżeli Alicja otrzyma wynik $|\Psi^+\rangle_{CA}$, wówczas Bob musi zastosować do swojej cząstki bramkę Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

- jeżeli Alicja otrzyma wynik $|\Psi^-\rangle_{CA}$, wówczas Bob musi zastosować do swojej cząstki bramkę Pauliego $\sigma_y = i\sigma_z\sigma_x$, tj.

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Po zastosowaniu przez Boba odpowiedniej operacji unitarnej otrzyma on taki sam stan qubitów B w jakim początkowo znajdował się qubit C Alicji. W ten sposób teleportacja stanu kwantowego (2.6) od Alicji do Boba zostanie zakończona, a pierwotny stan qubitów Alicji ulegnie zniszczeniu. Zniszczenie qubitów dowodzi, że podczas procesu teleportacji nie dochodzi do klonowania qubitów, a zatem zakaz klonowania udowodniony przez Woottersa i Żurka [Wootters i Żurek, 1982] oraz niezależnie przez Dieksa [Dieks, 1982] nie zostaje naruszony.

2.2 Wierność teleportacji kwantowej

Jak wynika z powyższych rozważań teoria przewiduje, iż stan qubitów może być teleportowany wiernie. Jednak rzeczywiste warunki laboratoryjne odbiegają od tych, które opisuje prosta teoria. W konsekwencji oznacza to, że zamiast stanu maksymalnie splątanego Alicja i Bob będą współdzielili co najwyżej stan bliski takiemu stanowi, a zamiast pomiaru Bella, Alicja wykona pomiar co najwyżej bliski takiemu pomiarowi. W związku z tym, nawet jeżeli Alicja będzie teleportowała qubit w

stanie czystym

$$|\Psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (2.17)$$

to Bob w ogólności otrzyma qubit w stanie mieszanym ρ . Zdefiniujmy wielkość

$$F = \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle, \quad (2.18)$$

którą nazwiemy wiernością teleportowanego qubit. Jeżeli $F = 1$, to qubit teleportowany jest wiernie. Należy zaznaczyć, że z fizycznego punktu widzenia „minimalną” wiernością F nie jest 0 tylko $\frac{1}{2}$, ponieważ w takim wypadku teleportowany qubit znajduje się w stanie maksymalnie mieszanym i nie zawiera żadnej informacji.

Uśrednijmy teraz F po wszystkich początkowych stanach czystych teleportowanych qubitów, tj. obliczmy wielkość

$$f = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.19)$$

gdzie czynnik $\frac{\sin \theta}{4\pi}$ jest gęstością stanów na sferze Blocha. Wielkość f nazwiemy wiernością teleportacji. Wierność f ma podobne własności jak wierność teleportowanego qubit (tzn. jeżeli $f = 1$, to teleportacja jest wierna i „minimalną” wiernością jest $f = \frac{1}{2}$), ale w przeciwieństwie do F , wierność f jest niezależna od wyboru stanu teleportowanego qubit. Dodajmy, że jeśli $f \leq \frac{2}{3}$, to teleportacja nie może być uważana za kwantową, ponieważ wierność teleportacji $f = \frac{2}{3}$ może być osiągnięta bez użycia splątania jedynie za pomocą lokalnych operacji kwantowych i klasycznej komunikacji. Aby osiągnąć wierność teleportacji $f = \frac{2}{3}$ nadawca musi zmierzyć qubit

w dowolnej bazie, np. $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, i przesłać informację o wyniku pomiaru do odbiorcy. Następnie odbiorca przygotowuje qubit w takim stanie, w jakim znalazł go nadawca, tzn. w stanie $|0\rangle$ lub $|1\rangle$.

2.3 Protokół liniowo-optycznej teleportacji KLM

Przez liniowo-optyczną teleportację będziemy rozumieli teleportację kwantową, którą można wykonać za pomocą elementów liniowo-optycznych, takich jak płytka światłodziela, polaryzacyjna płytka światłodziela czy płytka fazowa oraz detektory rozróżniające liczbę fotonów. Zaznaczmy, że w układzie złożonym wyłącznie z takich elementów nie można wykonać deterministycznej teleportacji [Lütkenhaus *et al.*, 1999], można natomiast wykonać teleportację probabilistyczną. Najprostsza liniowo-optyczna teleportacja kończy się sukcesem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a jej prosta modyfikacja pozwala na zwiększenie tego prawdopodobieństwa do $\frac{1}{2}$ [Bouwmeester *et al.*, 1997]. Knill, Laflamme i Milburn zaproponowali protokół liniowo-optycznej teleportacji, który pozwala na osiągnięcie prawdopodobieństwa teleportacji dowolnie bliskiego jedności [Knill *et al.*, 2001]. Prawdopodobieństwo sukcesu teleportacji uzależnione jest od wyboru stanu splątanego. W oryginalnym protokole KLM qubit zakodowany jest w superpozycję stanu próżni i stanu jednofotonowego. Poniżej omówimy uogólniony protokół KLM, w którym qubit zakodowany jest w superpozycję stanu jednofotonowego o polaryzacji horyzontalnej $|H\rangle$ i stanu jednofotonowego o polaryzacji wertykalnej $|V\rangle$ [Franson *et al.*, 2002; Spedalieri *et al.*, 2006].

Założmy, że chcemy teleportować stan fotonu

$$|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle. \quad (2.20)$$

Do teleportacji użyjemy stanu splątanego postaci

$$|t_N\rangle = \sum_{j=0}^N c_j |V\rangle^j |H\rangle^{N-j} |H\rangle^j |V\rangle^{N-j}, \quad (2.21)$$

gdzie $|V\rangle^j$ ($|H\rangle^j$) oznaczają j wertykalnie (horyzontalnie) spolaryzowanych fotonów, po jednym w każdym z j kolejnych modów. Foton, którego stan chcemy teleportować znajduje się w modzie 0 posiadanym przez Alicję, a fotony ze stanu splątanego użytego do teleportacji znajdują się w modach od 1 do $2N$, przy czym pierwsze N modów posiada Alicja, a pozostałe N modów posiada Bob, jak przedstawiono na rysunku 2.1.

Przez a_k^\dagger i b_k^\dagger oznaczmy, odpowiednio, operator kreacji fotonu o polaryzacji wertykalnej w modzie k oraz operator kreacji fotonu o polaryzacji horyzontalnej w modzie k . Stany jednofotonowe $|V\rangle_k$ i $|H\rangle_k$ zapiszmy w następujących postaciach:

$$a_k^\dagger |vac\rangle = |V\rangle_k, \quad (2.22)$$

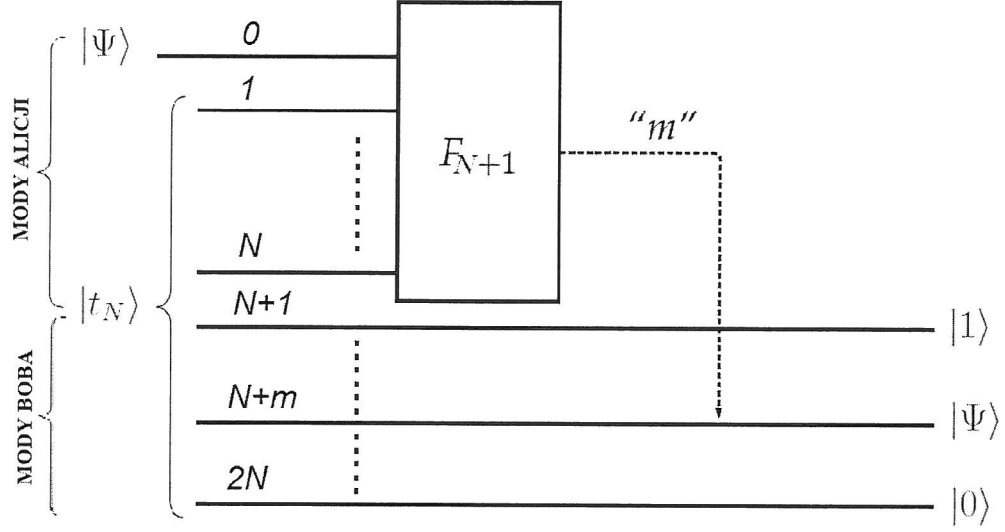
$$b_k^\dagger |vac\rangle = |H\rangle_k, \quad (2.23)$$

gdzie $|vac\rangle$ oznacza stan próżni. Korzystając z relacji (2.22) i (2.23) możemy przedstawić stany (2.20) oraz (2.21) w postaciach

$$|\Psi\rangle = \alpha b_0^\dagger |vac\rangle + \beta a_0^\dagger |vac\rangle \quad (2.24)$$

oraz

$$|t_N\rangle = \sum_{j=0}^N c_j a_1^\dagger \dots a_j^\dagger b_{j+1}^\dagger \dots b_N^\dagger |vac\rangle |H\rangle^j |V\rangle^{N-j}. \quad (2.25)$$



Rysunek 2.1. Schemat liniowo-optycznej teleportacji Knilla, Laflamme'a i Milburna (KLM).

W konsekwencji, stan całego układu można wyrazić jako

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle|t_N\rangle = & \sum_{j=0}^N \left[\alpha c_j b_0^\dagger (\prod_{k=1}^j a_k^\dagger) (\prod_{k=1}^{N-j} b_{j+k}^\dagger) \right. \\
 & \left. + \beta c_j a_0^\dagger (\prod_{k=1}^j a_k^\dagger) (\prod_{k=1}^{N-j} b_{j+k}^\dagger) \right] |vac\rangle |H\rangle^j |V\rangle^{N-j}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aby teleportować qubit do Boba, Alicja musi wykonać $(N + 1)$ -punktową transformację Fouriera na modzie 0 oraz na pierwszych N modach stanu splątanego (2.21), która opisana jest wyrażeniami:

$$F_N(a_k^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{l_k=0}^N \omega^{kl_k} a_{l_k}^\dagger, \tag{2.27}$$

$$F_N(b_k^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{l_k=0}^N \omega^{kl_k} b_{l_k}^\dagger, \tag{2.28}$$

gdzie $\omega = e^{i2\pi/(N+1)}$. Transformata ta może zostać wykonana za pomocą elementów liniowo-optycznych [Weihs *et al.*, 1996]. Po jej zastosowaniu stan (2.26) sprowadzi się do postaci

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)^{N+1} \sum_{j=0}^N \left[\sum_{0 \leq l_0, \dots, l_N \leq N} \omega^{\sum_{k=0}^N kl_k} (\alpha c_j b_{l_0}^\dagger a_{l_1}^\dagger \dots a_{l_j}^\dagger b_{l_{j+1}}^\dagger \dots b_{l_N}^\dagger + \beta c_j a_{l_0}^\dagger a_{l_1}^\dagger \dots a_{l_j}^\dagger b_{l_{j+1}}^\dagger \dots b_{l_N}^\dagger) |vac\rangle \right] |H\rangle^j |V\rangle^{N-j}. \quad (2.29)$$

Alicja dokonuje pomiaru liczby fotonów spolaryzowanych wertykalnie i horyzontalnie w każdym z pierwszych $N+1$ modów. (Warto tutaj zauważyć, że suma wszystkich fotonów zarejestrowanych przez Alicję wynosi $N+1$. Wynika to z faktu, że początkowo w każdym z pierwszych $N+1$ modów znajdował się jeden foton, a transformata Fouriera (2.27)-(2.28) zachowuje liczbę fotonów.) Przyjmijmy, że w modzie j Alicja zarejestrowała r_j fotonów o polaryzacji wertykalnej oraz h_j fotonów o polaryzacji horyzontalnej. W zależności od r_j i h_j możliwe są następujące trzy scenariusze.

I. Suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję we wszystkich modach wynosi $N+1$, tj.

$$\sum_{j=0}^N r_j = N+1. \quad (2.30)$$

W takim przypadku stan teleportowanego qubitu zostanie efektywnie zmierzony w bazie $\{|V\rangle, |H\rangle\}$ z wynikiem pomiaru $|V\rangle$ i, co za tym idzie, teleportacja nie uda się. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $|\beta|^2 |c_N|^2$.

II. Suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję we wszystkich modach wynosi 0, tj.

$$\sum_{j=0}^N r_j = 0. \quad (2.31)$$

W takim przypadku stan teleportowanego qubitu zostanie efektywnie zmierzony w bazie $\{|V\rangle, |H\rangle\}$ z wynikiem pomiaru $|H\rangle$, w konsekwencji czego teleportacja nie uda się. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi $|\alpha|^2|c_0|^2$.

III. Suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję we wszystkich modach jest różna od 0 i od $N + 1$ i wynosi m , tj.

$$\sum_{j=0}^N r_j = m. \quad (2.32)$$

Zauważmy, że ponieważ liczba wszystkich fotonów zarejestrowanych przez Alicję wynosi $N + 1$, to suma horyzontalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję we wszystkich modach jest różna od 0 i od $N + 1$ i wynosi $N - m + 1$,

$$\sum_{j=0}^N h_j = N - m + 1. \quad (2.33)$$

W konsekwencji, nieunormowany stan (2.29) po pomiarze możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{N+1}} \right)^{N+1} \left[\sum_S \omega^{\sum_{p=0}^N p l_p} (\alpha c_m b_{l_0}^\dagger a_{l_1}^\dagger \dots a_{l_m}^\dagger b_{l_{m+1}}^\dagger \dots b_{l_N}^\dagger |vac\rangle |H\rangle^m |V\rangle^{N-m} \right. \\ & \left. + \sum_{S'} \omega^{\sum_{p=0}^N p l'_p} \beta c_{m-1} a_{l_0}^\dagger a_{l_1}^\dagger \dots a_{l_{m-1}}^\dagger b_{l_m}^\dagger \dots b_{l_N}^\dagger |vac\rangle |H\rangle^{m-1} |V\rangle^{N-m+1} \right], \quad (2.34) \end{aligned}$$

gdzie S i S' są następującymi zbiorami:

$$S = \{(l_0, \dots, l_N) / \{l_1, \dots, l_k\} \text{ zawiera } r_j \text{ razy wartość } j$$

(tzn. w modzie j Alicja zarejestrowała r_j wertykalnie spolaryzowanych fotonów)

$$\text{i } \{l_0, l_{k+1}, \dots, l_N\} \text{ zawiera } h_j \text{ razy wartość } j$$

(tzn. w modzie j Alicja zarejestrowała h_j horyzontalnie spolaryzowanych fotonów),

gdzie $j \in \{0, \dots, N\}$,

$S' = \{(l_0, \dots, l_N)/\{l_0, \dots, l_{k-1}\}$ zawiera r_j razy wartość j
i $\{l_k, \dots, l_N\}$ zawiera h_j razy wartość j , gdzie $j \in \{0, \dots, N\}$).

Jak można zauważyć, każda z sum po elementach zbioru S lub S' w (2.34) posiada te same stany dla pierwszych $N + 1$ modów. Różnica występuje tylko w czynnikach:

$$\sum_S \omega^{\sum_{p=0}^N p l_p}, \quad (2.35)$$

$$\sum_{S'} \omega^{\sum_{p=0}^N p l'_p}. \quad (2.36)$$

Sumy (2.35) i (2.36) spełniają relację

$$\sum_{S'} \omega^{\sum_{p=0}^N p l'_p} = \sum_S \omega^{\sum_{p=0}^N p l_p} - \sum_{p=0}^N l_p. \quad (2.37)$$

Wobec

$$\sum_{p=0}^N l_p = \sum_{j=0}^N j(r_j + h_j), \quad (2.38)$$

unormowany stan (2.34) po pomiarze możemy zapisać w postaci

$$|\Phi\rangle_{0\dots N} |H\rangle^{m-1} \left(\frac{\alpha c_m |H\rangle + \beta c_{m-1} \omega^{-\sum_{j=0}^N j(r_j + h_j)} |V\rangle}{\sqrt{p(m)}} \right) |V\rangle^{N-m+1}, \quad (2.39)$$

gdzie $|\Phi\rangle_{0\dots N}$ jest unormowanym stanem dla pierwszych $N + 1$ modów po pomiarze,

a

$$p(m) = |\alpha c_m|^2 + |\beta c_{m-1}|^2 \quad (2.40)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że suma wszystkich wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję wynosi m^1 . Zauważmy z (2.39), że qubit został przeteleportowany do modu $N + m$ z dodatkową fazą. Wartość fazy

$$\omega - \sum_{j=0}^N j(r_j + h_j) \quad (2.41)$$

zależy od liczby wertykalnie i horyzontalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję w każdym z modów. Alicja zna tę wartość i może ją przesłać do Boba, który po otrzymaniu informacji może skorygować fazę za pomocą płytki fazowej, otrzymując stan

$$|\Phi\rangle_{0\dots N} |H\rangle^{m-1} \frac{(\alpha c_m |H\rangle + \beta c_{m-1} |V\rangle)}{\sqrt{p(m)}} |V\rangle^{N-m+1}. \quad (2.42)$$

2.4 Korekcja błędu

Stan qubitu po teleportacji

$$|\Psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\alpha c_m|^2 + |\beta c_{m-1}|^2}} (\alpha c_m |H\rangle + \beta c_{m-1} |V\rangle) \quad (2.43)$$

różni się od stanu qubitu przed teleportacją, co oznacza że nie został on przeteleportowany wiernie. W celu przywrócenia stanu qubitu danego wyrażeniem (2.43) do jego stanu początkowego, Bob musi dokonać na qubicie uogólnionego pomiaru kwantowego opisanego przez następujące operatory Krausa:

$$E_S = \frac{c_{m-1}}{c_m} |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|, \quad (2.44)$$

¹Można to wywnioskować z faktu, że transformata Fouriera nie zmienia zarówno liczby wertykalnie jak i horyzontalnie spolaryzowanych fotonów. Wobec tego, prawdopodobieństwo $p(m)$ musi być równe prawdopodobieństwu znalezienia m wertykalnie spolaryzowanych fotonów w pierwszych $N + 1$ modach stanu początkowego.

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_{m-1}}{c_m} \right|^2} |V\rangle\langle V|, \quad (2.45)$$

gdy $|c_{m-1}|^2 \leq |c_m|^2$, oraz

$$E_S = |0\rangle\langle 0| + \frac{c_m}{c_{m-1}} |1\rangle\langle 1|, \quad (2.46)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_m}{c_{m-1}} \right|^2} |1\rangle\langle 1|, \quad (2.47)$$

gdy $|c_{m-1}|^2 > |c_m|^2$. Wybór operatorów Krausa zależy od współczynników c_{m-1} i c_m , a więc od stanu splątanego użytego do teleportacji oraz od liczby wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych przez Alicję. Działając na stan qubitów operatorem Krausa E_S , otrzymamy oryginalny stan qubitów $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$. Prawdopodobieństwo udanej korekcji błędu pod warunkiem, że Alicja zarejestrowała m fotonów dane jest wzorem

$$p(S|m) = \langle \psi_m | E_S^\dagger E_S | \psi_m \rangle = \frac{\min\{|c_{m-1}|, |c_m|\}}{|\alpha c_m|^2 + |\beta c_{m-1}|^2}. \quad (2.48)$$

Łączne prawdopodobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów i udanej korekcji błędu wynosi

$$p(S, m) = p(S|m)p(m) = \min\{|c_{m-1}|, |c_m|\}. \quad (2.49)$$

Całkowite prawdopodobieństwo wiernej teleportacji $p(S)$ obliczymy sumując po m prawdopodobieństwa $p(S, m)$, czyli

$$p(S) = \sum_{m=0}^N p(S, m) = \sum_{m=0}^N \min\{|c_{m-1}|, |c_m|\}. \quad (2.50)$$

Prawdopodobieństwo $p(S)$ można zapisać w postaci

$$p(S) = 1 - \sum_{\max} |c_m|^2 + \sum_{\min, m \neq 0, m \neq N} |c_m|^2, \quad (2.51)$$

gdzie pierwsza suma jest po wszystkich maksimach ciągu współczynników $|c_m|^2$, a druga suma jest po wszystkich minimach ciągu współczynników $|c_m|^2$ z wyłączeniem ewentualnych minimów dla $m = 0$ i/lub $m = N$. Całkowite prawdopodobieństwo wiernej teleportacji przyjmuje wartość maksymalną

$$p(S) = 1 - \frac{1}{N+1}, \quad (2.52)$$

gdy wszystkie współczynniki spełniają relację

$$|c_m|^2 = \frac{1}{N+1}, \quad (2.53)$$

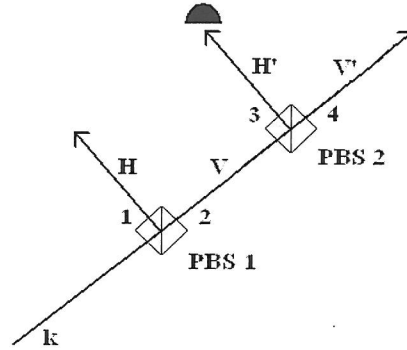
a więc dla stanu maksymalnie splątanego. Szczegółowe obliczenia zawarto w pracy [Grudka i Modławska, 2008] oraz w pracy magisterskiej [Modławska, 2009].

Na rysunku 2.2 przedstawiono schemat eksperymentalnej korekcji błędu. Układ doświadczalny składa się z dwóch polaryzacyjnych płytek światłodziących oznaczonych PBS1 oraz PBS2. W modzie wejściowym k znajduje się foton w stanie (2.43). Pierwsza z polaryzacyjnych płytek światłodziących (PBS1) przepuszcza fotony o polaryzacji $|V\rangle$ i odbija fotony o polaryzacji $|H\rangle$. Jeśli $|c_m|^2 < |c_{m-1}|^2$, to druga z polaryzacyjnych płytek światłodziących (PBS2) obrócona jest o kąt θ , taki, że

$$\cos \theta = \left| \frac{c_m}{c_{m-1}} \right|, \quad (2.54)$$

a więc odbija fotony o polaryzacji

$$|H'\rangle = -\sin \theta |V\rangle + \cos \theta |H\rangle \quad (2.55)$$



Rysunek 2.2. Schemat eksperymentalnej korekcji błędu z kodowaniem polaryzacyjnym, źródło [Grudka i Modławska, 2008].

i przepuszcza fotony o polaryzacji

$$|V'\rangle = \cos\theta|V\rangle + \sin\theta|H\rangle. \quad (2.56)$$

Po przejściu lub odbiciu fotonu przez obie płytki znajdzie się on w stanie

$$|\psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m)}}(\alpha c_m |H\rangle_1 + \beta c_{m-1} \cos\theta |V'\rangle_4 - \beta c_{m-1} \sin\theta |H'\rangle_3). \quad (2.57)$$

Jeżeli detektor znajdujący się na końcu modu 3 zarejestruje foton, to qubit zostaje zniszczony. W wypadku, gdy detektor nie zarejestruje fotonu, qubit przejdzie do stanu

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle_1 + \beta |V'\rangle_4, \quad (2.58)$$

który może zostać przekształcony do postaci

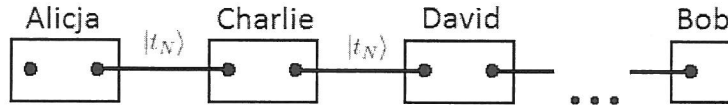
$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle_1 + \beta |V\rangle_1. \quad (2.59)$$

Wielokrotna liniowo-optyczna teleportacja kwantowa

3.1 Wprowadzenie

W tym rozdziale omówimy wielokrotną liniowo-optyczną teleportację kwantową w schemacie Knilla, Laflamme'a i Milburna. W procesie teleportacji istotne jest, aby prawdopodobieństwo wystąpienia błędu było jak najmniejsze. Dlatego skupimy się na zbadaniu wpływu korekcji błędu na prawdopodobieństwo sukcesu wiernej wielokrotnej teleportacji w schemacie KLM. W tym celu rozważymy wielokrotną teleportację kwantową z użyciem stanów niemaksymalnie splątanych i obliczymy prawdopodobieństwo wiernej teleportacji w dwóch sytuacjach, a mianowicie gdy korekcja błędu wykonywana jest bezpośrednio po **każdej** teleportacji oraz gdy korekcja błędu wykonywana jest tylko po **ostatniej** teleportacji. Otrzymane prawdopodobieństwa porównamy z prawdopodobieństwem wiernej wielokrotnej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych.

Przykładową wielokrotną teleportację, czyli łańcuch kilku następujących po so-



Rysunek 3.1. Schemat wielokrotnej teleportacji, źródło [Modławska i Grudka, 2008b].

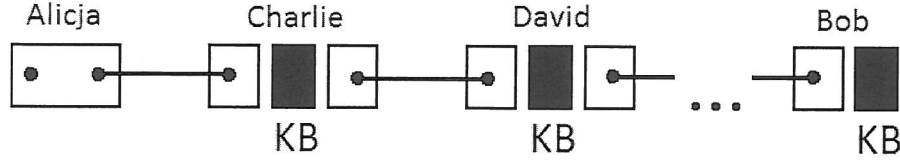
bie teleportacji przedstawiono na rysunku 3.1. Na pokazanym schemacie każda para sąsiadujących uczestników (Alicja i Charlie, Charlie i David, itd.) używa do teleportacji stanu splątanego

$$|t_N\rangle = \sum_{i=0}^N c_i |V\rangle^i |H\rangle^{N-i} |H\rangle^i |V\rangle^{N-i}, \quad (3.1)$$

który został szczegółowo omówiony w podrozdziale 2.3.

W standardowym procesie teleportacji najpierw Alicja teleportuje qubit do Charliego, a następnie Charlie dokonuje korekcji błędu i stan po korekcji błędu teleportuje do Davida, który również przed kolejną teleportacją dokonuje korekcji błędu, itd. Ostatecznie qubit trafia do Boba, który także dokonuje korekcji błędu. A zatem korekcja błędu wykonywana jest po każdej teleportacji, co pokazano na rysunku 3.2.

Dla prostoty rozpatrzmy najpierw łańcuch składający się z dwóch teleportacji, w którym najpierw Alicja teleportuje qubit do Charliego, a następnie Charlie teleportuje qubit do Boba. Aby poprawić błąd Charlie musi dokonać na otrzymanym qubicie uogólnionego pomiaru kwantowego opisanego przez operatory Krausa (2.44)–(2.47). Wyboru operatorów Krausa dokonuje się w zależności od liczby fotonów zarejestrowanych przez Alicję. Podobnie, Bob musi dokonać na swoim qubicie uogólnionego pomiaru kwantowego opisanego przez operatory Krausa (2.44)–(2.47), których wybór zależy od liczby fotonów zarejestrowanych przez Charliego. Prawdo-



Rysunek 3.2. Schemat teleportacji wielokrotnej z korekcją błędów (ozn. KB) wykonaną po każdej teleportacji.

podobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów przez Alicję i udanej korekcji błędów wynosi

$$p(S, m) = \min\{|c_m|^2, |c_{m-1}|^2\}. \quad (3.2)$$

Z kolei prawdopodobieństwo zarejestrowania n wertykalnie spolaryzowanych fotonów przez Charliego i udanej korekcji błędów wynosi

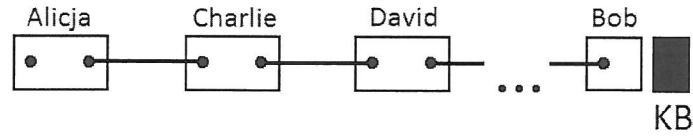
$$p(S, n) = \min\{|c_n|^2, |c_{n-1}|^2\}. \quad (3.3)$$

Ponieważ prawdopodobieństwa (3.2) i (3.3) są niezależne, to prawdopodobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji i n wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas drugiej teleportacji przy udanej korekcji błędów po **każdej** teleportacji dane jest wyrażeniem

$$p'(S, m, n) = \min\{|c_m|^2, |c_{m-1}|^2\} \min\{|c_n|^2, |c_{n-1}|^2\}. \quad (3.4)$$

Całkowite prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji otrzymamy sumując prawdopodobieństwa (3.4) po m i n

$$p'(S) = \sum_m \sum_n p(S, m, n) = \left[\sum_m \min\{|c_m|^2, |c_{m-1}|^2\} \right] \left[\sum_n \min\{|c_n|^2, |c_{n-1}|^2\} \right]. \quad (3.5)$$



Rysunek 3.3. Schemat teleportacji wielokrotnej z korekcją błędów wykonaną po ostatniej teleportacji.

Porównując wyrażenia (2.50) i (3.5) można zauważyć, że

$$p'(S) = p(S)^2, \quad (3.6)$$

gdzie $p'(S)$ jest całkowitym prawdopodobieństwem wiernej podwójnej teleportacji, a $p(S)$ jest prawdopodobieństwem wiernej pojedynczej teleportacji. Analogicznie, dla łańcucha składającego się z N teleportacji otrzymamy

$$p'(S) = p(S)^N, \quad (3.7)$$

czyli prawdopodobieństwo wiernej N -krotnej teleportacji równe jest iloczynowi prawdopodobieństw tego, że każda z pojedynczych teleportacji jest bezbłędna.

3.2 Strategia teleportacji minimalizująca prawdopodobieństwo wystąpienia błędu

W pracy [Modławska i Grudka, 2008b] zaproponowano strategię, której celem jest minimalizacja prawdopodobieństwa wystąpienia błędu podczas procesu wielokrotnej teleportacji. Strategię tę oparto o założenie, że lepiej jest wykonywać korekcję błędów tylko po ostatniej teleportacji niż wykonywać ją niezależnie po każdej teleportacji. Podobnie jak powyżej, omówienie strategii rozpoczniemy od rozpatrzenia

łańcucha składającego się z dwóch teleportacji. Zobaczymy przy tym co stanie się ze stanem teleportowanego qubitu, jeśli nie poprawimy błędu powstałego w pierwszej teleportacji, lecz teleportujemy qubit ponownie z użyciem identycznego stanu splątanego.

Jeżeli Alicja zarejestruje m wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to stan fotonu po pierwszej teleportacji będzie dany wyrażeniem

$$|\psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m)}}(\alpha c_m |H\rangle + \beta c_{m-1} |V\rangle), \quad (3.8)$$

gdzie

$$p(m) = |\alpha c_m|^2 + |\beta c_{m-1}|^2 \quad (3.9)$$

jest prawdopodobieństwem zajścia tego zdarzenia. Jeżeli następnie Charlie zarejestruje n wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to stan fotonu po drugiej teleportacji będzie postaci

$$|\psi_{m,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(n|m)}} \left[\frac{\alpha c_m}{\sqrt{p(m)}} c_n |H\rangle + \frac{\beta c_{m-1}}{\sqrt{p(m)}} c_{n-1} |V\rangle \right], \quad (3.10)$$

gdzie

$$p(n|m) = \frac{|\alpha c_m c_n|^2 + |\beta c_{m-1} c_{n-1}|^2}{p(m)} \quad (3.11)$$

jest prawdopodobieństwem warunkowym zajścia tego zdarzenia. Wobec tego, łączne prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na zarejestrowaniu m wertykalnie spolaryzowanych fotonów przez Alicję i zarejestrowaniu n wertykalnie spolaryzowanych fotonów przez Charliego dane jest wyrażeniem

$$p(m, n) = p(n|m)p(m) = |\alpha c_m c_n|^2 + |\beta c_{m-1} c_{n-1}|^2. \quad (3.12)$$

Zauważmy, że stan qubitów po drugiej teleportacji możemy wyrazić jako

$$|\psi_{m,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m,n)}}(\alpha c_m c_n |H\rangle + \beta c_{m-1} c_{n-1} |V\rangle). \quad (3.13)$$

W przypadku, gdy $c_{m-1} c_{n-1} = c_m c_n$ stan qubitów po drugiej teleportacji jest postaci

$$|\psi_{m,n}\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle. \quad (3.14)$$

A zatem, mimo że nie wykonaliśmy korekcji błędów po żadnej teleportacji, stan końcowy jest taki sam jak stan początkowy. Wynika to z faktu, że druga teleportacja poprawiła błąd wprowadzony przez pierwszą teleportację. Warto podkreślić, że podobny efekt zachodzi podczas procesu wymiany splątania, co wykazano w pracach [Acin *et al.*, 2007; Bose *et al.*, 1998; Bose *et al.*, 1999; Hardy i Song, 2000; Perseguers *et al.*, 2008].

W przypadku, gdy $c_{m-1} c_{n-1} \neq c_m c_n$, Bob może przywrócić qubit do stanu początkowego za pomocą uogólnionego pomiaru kwantowego opisanego przez następujące operatory Krausa:

$$E_S = \frac{c_{m-1} c_{n-1}}{c_m c_n} |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|, \quad (3.15)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_{m-1} c_{n-1}}{c_m c_n} \right|^2} |H\rangle\langle H|, \quad (3.16)$$

gdy $c_{m-1} c_{n-1} < c_m c_n$ oraz

$$E_S = |H\rangle\langle H| + \frac{c_m c_n}{c_{m-1} c_{n-1}} |V\rangle\langle V|, \quad (3.17)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_m c_n}{c_{m-1} c_{n-1}} \right|^2} |V\rangle\langle V|, \quad (3.18)$$

gdy $c_{m-1} c_{n-1} > c_m c_n$. Prawdopodobieństwo, że korekcja błędu zakończy się sukcesem pod warunkiem, że Alicja zarejestrowała m a Charlie zarejestrował n wertykalnie spolaryzowanych fotonów dane jest wyrażeniem

$$p(S|m, n) = \frac{\min\{|c_m c_n|^2, |c_{m-1} c_{n-1}|^2\}}{|\alpha c_m c_n|^2 + |\beta c_{m-1} c_{n-1}|^2}. \quad (3.19)$$

Wobec tego, łączne prawdopodobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji i n wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas drugiej teleportacji wraz z udaną korekcją błędu po drugiej teleportacji wynosi

$$p(S, m, n) = \min\{|c_m c_n|^2, |c_{m-1} c_{n-1}|^2\}. \quad (3.20)$$

Zauważmy, że jeśli jednocześnie $c_{m-1} > c_m$ i $c_{n-1} < c_n$ lub jednocześnie $c_{m-1} < c_m$ i $c_{n-1} > c_n$, to prawdopodobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji i n wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas drugiej teleportacji i udanej korekcji błędu **po każdej** teleportacji $p'(S, m, n)$ postaci (3.4) jest ostro mniejsze niż prawdopodobieństwo zarejestrowania m wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji i n wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas drugiej teleportacji i udanej korekcji błędu **tylko po drugiej** teleportacji $p(S, m, n)$ postaci (3.20). Prowadzi to do wniosku, że w wypadku podwójnej teleportacji, lepiej jest wykonać korekcję błędu wyłącznie po ostatniej teleportacji niż przeprowadzać ją po każdej teleportacji. Całkowite

prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji obliczymy sumując prawdopodobieństwa $p(S, m, n)$ po m i n , tj.

$$p(S) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \min\{|c_m c_n|^2, |c_{m-1} c_{n-1}|^2\}. \quad (3.21)$$

Rozważmy teraz łańcuch składający się z M teleportacji (gdzie $M \geq 2$) z użyciem identycznie splątanych stanów postaci (3.1), podczas których rejestrujemy m_1, m_2, \dots, m_M wertykalnie spolaryzowanych fotonów. Wówczas stan qubitów po M -tej teleportacji jest postaci

$$\begin{aligned} |\psi_{m_1, m_2, \dots, m_M}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{p(m_1, m_2, \dots, m_M)}} (\alpha c_{m_1} c_{m_2} \dots c_{m_M} |H\rangle \\ & + \beta c_{m_1-1} c_{m_2-1} \dots c_{m_M-1} |V\rangle), \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie

$$p(m_1, m_2, \dots, m_M) = |\alpha c_{m_1} c_{m_2} \dots c_{m_M}|^2 + |\beta c_{m_1-1} c_{m_2-1} \dots c_{m_M-1}|^2 \quad (3.23)$$

jest prawdopodobieństwem zarejestrowania m_1, m_2, \dots, m_M wertykalnie spolaryzowanych fotonów kolejno podczas pierwszej, drugiej, \dots , M -tej teleportacji. Qubit możemy przywrócić do stanu początkowego wykonując uogólniony pomiar kwantowy opisany przez operatory Krausa:

$$E_S = \frac{c_{m_1} c_{m_2} \dots c_{m_M}}{c_{m_1-1} c_{m_2-1} \dots c_{m_M-1}} |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|, \quad (3.24)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_{m_1} c_{m_2} \dots c_{m_M}}{c_{m_1-1} c_{m_2-1} \dots c_{m_M-1}} \right|^2} |H\rangle\langle H|, \quad (3.25)$$

gdzie $c_{m_1-1} c_{m_2-1} \dots c_{m_M-1} > c_{m_1} c_{m_2} \dots c_{m_M}$ oraz

$$E_S = |H\rangle\langle H| + \frac{c_{m_1-1}c_{m_2-1}\cdots c_{m_M-1}}{c_{m_1}c_{m_2}\cdots c_{m_M}}|V\rangle\langle V|, \quad (3.26)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{c_{m_1-1}c_{m_2-1}\cdots c_{m_M-1}}{c_{m_1}c_{m_2}\cdots c_{m_M}} \right|^2} |V\rangle\langle V|, \quad (3.27)$$

gdy $c_{m_1-1}c_{m_2-1}\cdots c_{m_M-1} < c_{m_1}c_{m_2}\cdots c_{m_M}$.

Prawdopodobieństwo zarejestrowania m_1, m_2, \dots, m_M wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej, drugiej, \dots , M -tej teleportacji wraz z udaną korekcją błędu tylko po **ostatniej** teleportacji jest równe

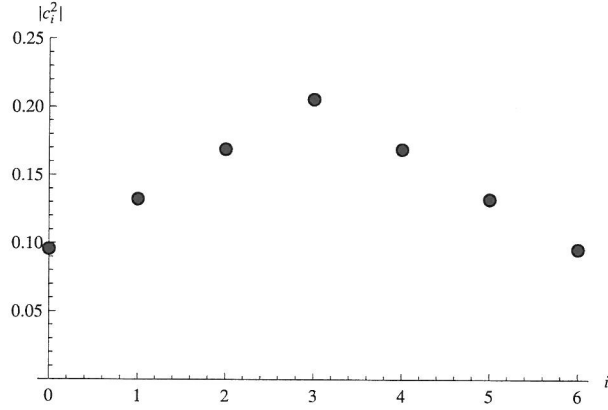
$$\begin{aligned} p(S, m_1, m_2, \dots, m_M) &= p(S|m_1m_2\dots m_M)p(m_1m_2\dots m_M) \\ &= \min\{|c_{m_1}c_{m_2}\cdots c_{m_M}|^2, |c_{m_1-1}c_{m_2-1}\cdots c_{m_M-1}|^2\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Wobec tego, całkowite prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji wyrażone jest wzorem

$$\begin{aligned} p(S) &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_M=1}^N p(S, m_1, m_2, \dots, m_M) \\ &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_M=1}^N \min\{|c_{m_M-1}\cdots c_{m_2-1}c_{m_1-1}|^2, |c_{m_M}\cdots c_{m_2}c_{m_1}|^2\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3 Porównanie dwóch strategii

Rozważmy teraz stan (3.1), którego współczynniki $|c_i|^2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny dla $0 \leq i \leq N/2$ i malejący ciąg arytmetyczny dla $N/2 \leq i \leq N$. Rozpatrzmy przy tym dwie sytuacje, a mianowicie, gdy N jest liczbą parzystą oraz gdy N jest liczbą nieparzystą (Rysunek 3.4). W sytuacji gdy N jest liczbą parzystą mamy



Rysunek 3.4. Przykładowy ciąg współczynników $|c_i|^2$ stanu splątanego dla $N = 6$ i $x = 0,0366$, źródło [Modławska i Grudka, 2008b].

$$|c_i|^2 = |c_0|^2 + ix, \quad (3.30)$$

gdy $0 \leq i \leq N/2$ oraz

$$|c_i|^2 = |c_{N/2}|^2 - \left(i - \frac{N}{2}\right) x, \quad (3.31)$$

gdy $N/2 \leq i \leq N$, gdzie $x \geq 0$. Współczynniki $|c_i|^2$ spełniają warunek normalizacji

$$\sum_{i=0}^N |c_i|^2 = 1. \quad (3.32)$$

Ponieważ ciąg współczynników $|c_i|^2$ jest symetryczny względem $i = \frac{N}{2}$ dostajemy

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} |c_i|^2 = \sum_{i=N/2+1}^N |c_i|^2. \quad (3.33)$$

W konsekwencji, warunek normalizacji (3.32) możemy wyrazić w postaci

$$2 \sum_{i=0}^{N/2-1} |c_i|^2 + |c_{N/2}|^2 = 1. \quad (3.34)$$

Stosując wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego dostajemy

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} |c_i|^2 = \left[2|c_0|^2 + x \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \right] \frac{N}{4}. \quad (3.35)$$

Podstawienie wyrażenia (3.35) oraz $|c_{N/2}|^2 = |c_0|^2 + x \frac{N}{2}$ do wzoru (3.34) i wykonanie prostych przekształceń prowadzi do relacji

$$|c_0|^2 = \frac{1 - x \frac{N^2}{4}}{N + 1}. \quad (3.36)$$

Podstawiając (3.36) do równań (3.30) i (3.31) dostajemy odpowiednio

$$|c_i|^2 = \frac{1 - x \frac{N^2}{4}}{N + 1} + ix, \quad (3.37)$$

gdy $0 \leq i \leq N/2$ oraz

$$|c_i|^2 = \frac{1 - x \frac{N^2}{4}}{N + 1} + \left[\frac{N}{2} - \left(i - \frac{N}{2} \right) \right] x, \quad (3.38)$$

gdy $N/2 \leq i \leq N$. Relacje (3.37) i (3.38) możemy łącznie zapisać w postaci

$$|c_i|^2 = \frac{1 - x \frac{N^2}{4}}{N + 1} + \left(\frac{N}{2} - \left| i - \frac{N}{2} \right| \right) x. \quad (3.39)$$

W sytuacji, gdy N jest liczbą nieparzystą, związki (3.30) i (3.31) przyjmują postacie

$$|c_i|^2 = |c_0|^2 + ix, \quad (3.40)$$

gdy $0 \leq i \leq (N - 1)/2$ oraz

$$|c_i|^2 = |c_{(N+1)/2}|^2 - \left[i - \frac{N + 1}{2} \right] x, \quad (3.41)$$

gdy $(N+1)/2 \leq i \leq N$, gdzie $x \geq 0$ i $|c_{(N+1)/2}|^2 = |c_{(N-1)/2}|^2$. Postępując podobnie jak w wypadku parzystego N , warunek normalizacji (3.32) możemy zapisać w postaci

$$2 \sum_{i=0}^{(N-1)/2} |c_i|^2 = 1. \quad (3.42)$$

Korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego dostajemy

$$\sum_{i=0}^{(N-1)/2} |c_i|^2 = \left(2|c_0|^2 + x \frac{N-1}{2}\right) \frac{N+1}{4}. \quad (3.43)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (3.42) i rozwiązując uzyskane równanie ze względu na $|c_0|^2$ otrzymujemy

$$|c_0|^2 = \frac{1}{N+1} - x \frac{N-1}{4}. \quad (3.44)$$

Podstawienie (3.44) do (3.40) i (3.41) prowadzi do

$$|c_i|^2 = \frac{1}{N+1} - x \frac{N-1}{4} + ix, \quad (3.45)$$

gdy $0 \leq i \leq (N-1)/2$ oraz

$$|c_i|^2 = \frac{1}{N+1} - x \frac{N-1}{4} + x \frac{N-1}{2} - x \left(i - \frac{N+1}{2}\right), \quad (3.46)$$

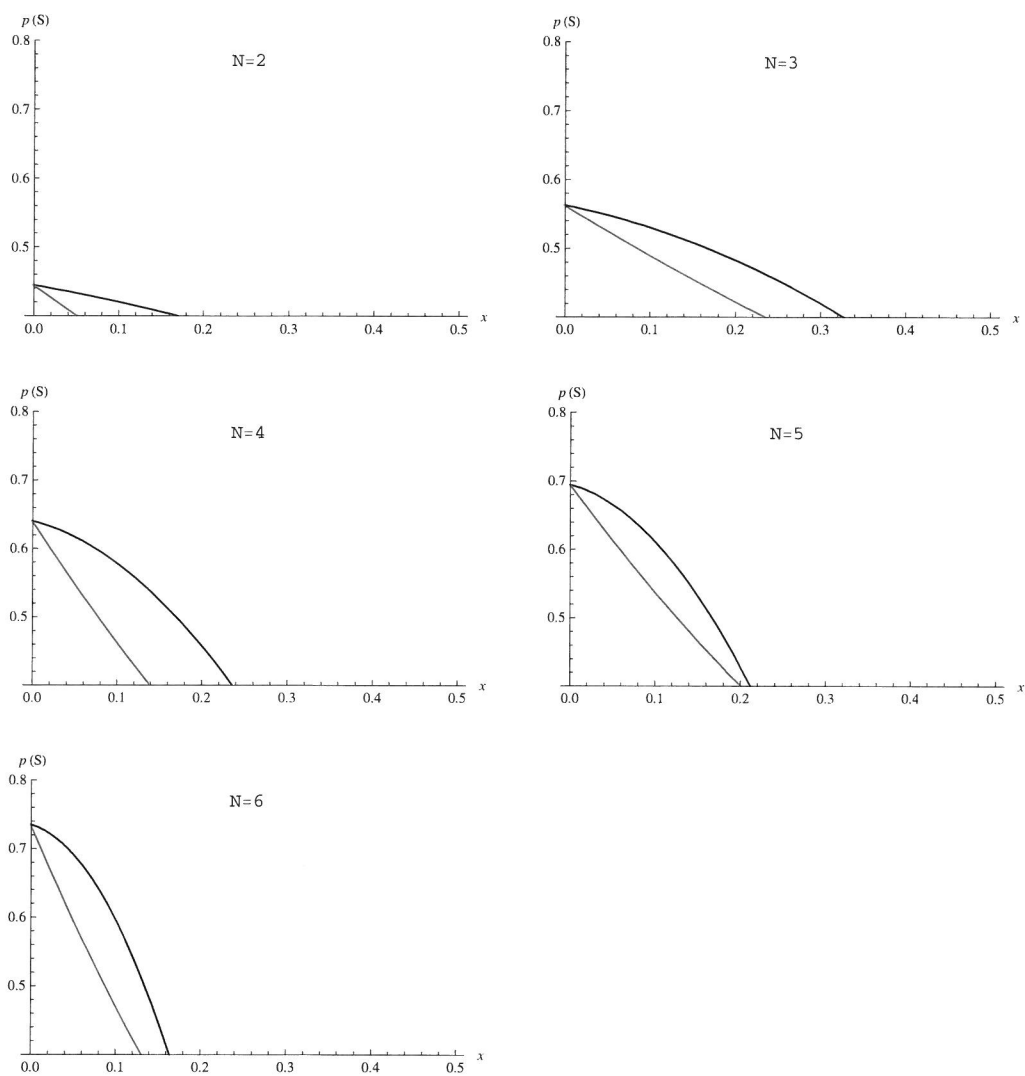
gdy $(N+1)/2 \leq i \leq N$. Relacje (3.45) i (3.46) możemy łącznie zapisać jako

$$|c_i|^2 = \frac{1}{N+1} - x \frac{N-1}{4} + x \left(\frac{N}{2} - \left|i - \frac{N}{2}\right|\right). \quad (3.47)$$

Ogólnie wynik dla N parzystego (3.39) oraz wynik dla N nieparzystego (3.47) możemy zapisać w postaci

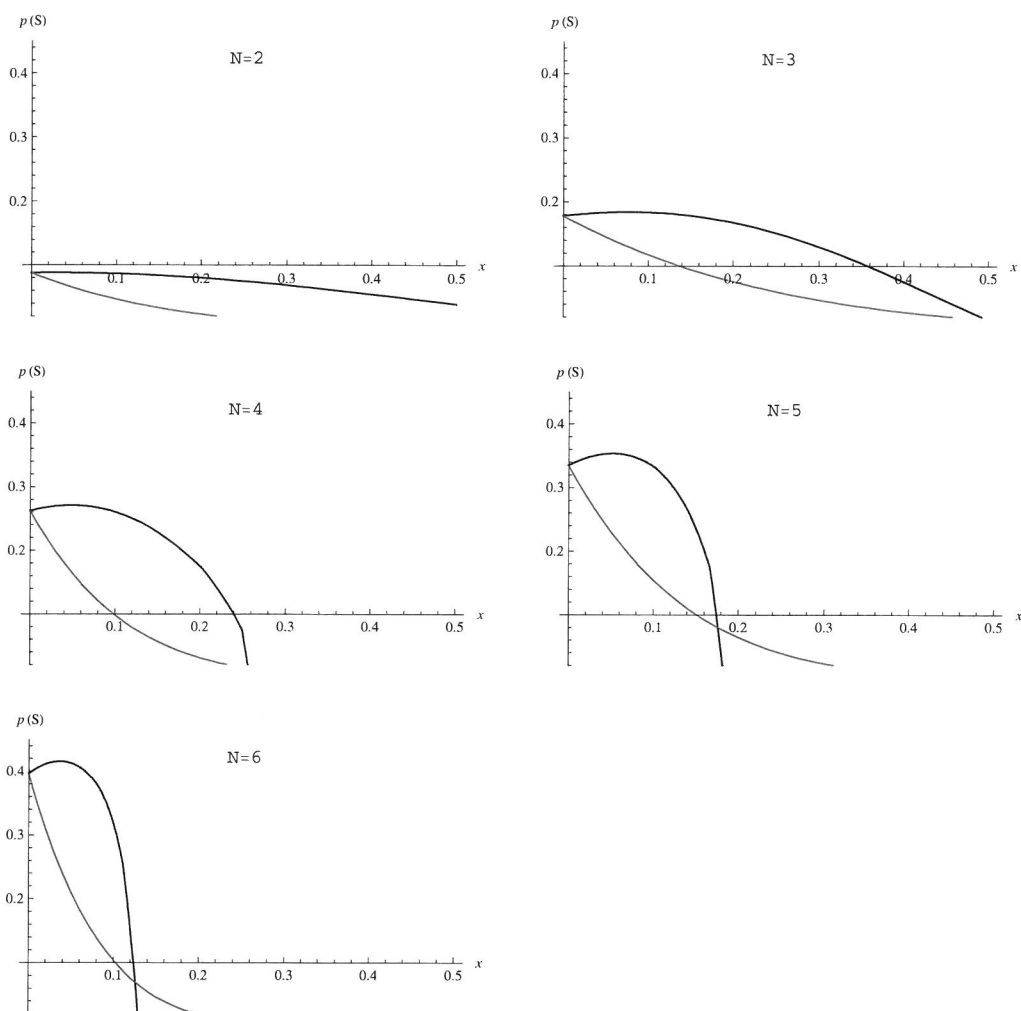
$$|c_i|^2 = |c_0|^2 + x \left(\frac{N}{2} - \left|i - \frac{N}{2}\right|\right), \quad (3.48)$$

3.3. PORÓWNANIE DWÓCH STRATEGII



Rysunek 3.5. Zależność prawdopodobieństwa wiernej podwójnej teleportacji od parametru x dla $N=2, 3, 4, 5, 6$, gdy korekcja błędów wykonywana jest po każdej teleportacji (czerwona linia) i gdy korekcja błędów wykonywana jest tylko po ostatniej teleportacji (czarna linia).

3.3. PORÓWNANIE DWÓCH STRATEGII



Rysunek 3.6. Zależność prawdopodobieństwa wiernej sześciokrotnej teleportacji od parametru x dla $N=2, 3, 4, 5, 6$, gdy korekcja błędów wykonywana jest po każdej teleportacji (czerwona linia) i gdy korekcja błędów wykonywana jest tylko po ostatniej teleportacji (czarna linia).

gdzie $|c_0|^2$ dane jest relacją (3.36) dla N parzystego i relacją (3.44) dla N nieparzystego.

Aby zademonstrować korzyści wynikające z zastosowania omawianej strategii, sprawdzimy jakie jest prawdopodobieństwo wiernej podwójnej (Rysunek 3.5) i wiernej sześciokrotnej (Rysunek 3.6) teleportacji przy użyciu stanów $2N$ -fotonowych, w wypadku, gdy korekcja błędu wykonywana jest **po każdej** teleportacji i w wypadku gdy korekcja błędu wykonywana jest **tylko po ostatniej teleportacji**.

Jak można zauważyć na rysunku 3.5, dla wiernej podwójnej teleportacji zarówno w wypadku, gdy korekcja błędu wykonywana jest **po każdej** teleportacji (czerwona linia) jak i w wypadku, gdy korekcja błędu wykonywana jest **tylko po ostatniej teleportacji** (czarna linia) prawdopodobieństwo przyjmuje taką samą wartość maksymalną $(\frac{N}{N+1})^2$ dla $x = 0$, a więc gdy używamy stanów maksymalnie splątanych. Przypomnijmy, że jeżeli do teleportacji używamy stanów maksymalnie splątanych, to korekcja błędu jest niepotrzebna. Odnotujmy również, że wraz ze wzrostem parametru x oba prawdopodobieństwa maleją, przy czym dla danego x prawdopodobieństwo w pierwszym przypadku jest mniejsze od prawdopodobieństwa w drugim przypadku. Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem, gdy używamy stanów niemaksymalnie splątanych, lepiej jest wykonać korekcję błędu **tylko po ostatniej teleportacji** niż **po każdej** teleportacji.

Z kolei w wypadku wiernej sześciokrotnej teleportacji (Rysunek 3.6), gdy korekcja błędu jest wykonywana **po każdej** teleportacji (czerwona linia), prawdopodobieństwo przyjmuje maksymalną wartość $(\frac{N}{N+1})^6$ dla $x = 0$ i maleje wraz ze wzrostem parametru x . W wypadku, gdy korekcja błędu wykonywana jest **tylko po ostatniej teleportacji** (czarna linia) prawdopodobieństwo przyjmuje wartość

$(\frac{N}{N+1})^6$ dla $x = 0$ i rośnie wraz ze wzrostem x do wartości maksymalnej, po czym maleje. Wartości maksymalnych prawdopodobieństw wiernej sześciokrotnej teleportacji przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Liczba modów stanu splątanego posiadanych przez każdego z uczestników (pierwsza kolumna), prawdopodobieństwo wiernej sześciokrotnej teleportacji z użyciem $2N$ -fotonowych stanów maksymalnie splątanych (druga kolumna), optymalny parametr x (trzecia kolumna), maksymalne prawdopodobieństwo wiernej sześciokrotnej teleportacji (czwarta kolumna), wzrost prawdopodobieństwa (piąta kolumna), stosunek wzrostu prawdopodobieństwa do prawdopodobieństwa wiernej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych (szósta kolumna).

N	$p = (\frac{N}{N+1})^6$	x_{opt}	p_{opt}	$p_{opt} - p$	$\frac{p_{opt} - p}{p}$
2	0,08779	0,02851	0,08803	0,00024	0,00267
3	0,17798	0,07747	0,18395	0,00597	0,03356
4	0,26214	0,04864	0,27078	0,00863	0,03293
5	0,33490	0,05212	0,35331	0,01841	0,05498
6	0,39657	0,03660	0,41527	0,01870	0,04714

Możemy wnioskować, że prawdopodobieństwo wiernej sześciokrotnej teleportacji jest większe, gdy użyjemy stanów niemaksymalnie splątanych i wykonamy korekcję błędu tylko po ostatniej teleportacji niż gdy użyjemy stanów maksymalnie splątanych. Wynik ten jest zaskakujący ponieważ zazwyczaj to stany maksymalnie splątane są optymalne do teleportacji kwantowej [Horodecki *et al.*, 2009]. Powodem takiego zachowania prawdopodobieństwa jest fakt, że schemat KLM nie pozwala na wykonanie deterministycznej teleportacji. Mówiąc bardziej precyzyjnie, w wypadku, gdy jeden z uczestników zarejestruje 0 lub $N + 1$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów, teleportacja nie zakończy się sukcesem. Uśrednione po stanach teleportowanych qubitów prawdopodobieństwa zarejestrowania 0 lub $N + 1$ wertykalnie spolaryzowanych fo-

tonów wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2}|c_0|^2$ lub $\frac{1}{2}|c_N|^2$ ¹. Zmniejszając współczynniki $|c_0|$ i $|c_N|$ możemy zmniejszyć te prawdopodobieństwa. Jednak w takim wypadku współczynniki $|c_i|$ będą wzajemnie różne i stan qubitów nie zostanie teleportowany wiernie. Aby przywrócić qubit do oryginalnego stanu, musimy wykonać korekcję błędów, która kończy się sukcesem z pewnym prawdopodobieństwem. Okazuje się, że prawdopodobieństwo udanej korekcji błędów jest zbyt małe, aby zwiększyć całkowite prawdopodobieństwo wiernej pojedynczej teleportacji. Z drugiej jednak strony, jeśli wykonamy kilka teleportacji, to błąd wprowadzony w jednej teleportacji może być poprawiony lub częściowo poprawiony przez błąd wprowadzony w innej teleportacji. W takim przypadku nie musimy wykonywać korekcji błędów lub korekcja błędów kończy się sukcesem z większym prawdopodobieństwem. Wzrost tego prawdopodobieństwa jest na tyle duży, że całkowite prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji jest większe, jeśli do teleportacji użyjemy stanów niemaksymalnie splątanych ze zmniejszonymi współczynnikami $|c_0|$ i $|c_N|$ niż stanów maksymalnie splątanych.

3.4 Niemultiplikatywność prawdopodobieństwa wiernej wielokrotnej teleportacji

Rozpatrzmy M -krotną teleportację, w której każda para sąsiadujących uczestników dzieli czterofotonowy stan splątany ($N = 2$). W tym przypadku całkowite prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji wyrażone jest wzorem

$$p(S) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_M=1}^2 \min\{|c_{m_M-1} \dots c_{m_2-1} c_{m_1-1}|^2, |c_{m_M} \dots c_{m_2} c_{m_1}|^2\}. \quad (3.49)$$

¹Prawdopodobieństwo uśredniamy po stanach teleportowanych fotonów.

Jeśli k spośród liczb m_i przyjmuje wartość 1, a $M - k$ z nich przyjmuje wartość 2 (tzn. k uczestników zarejestruje po jednym fotonie i $M - k$ uczestników zarejestruje po dwa fotony), to

$$\begin{aligned} \min\{|c_{m_M-1} \cdots c_{m_2-1} c_{m_1-1}|^2, |c_{m_M} \cdots c_{m_2} c_{m_1}|^2\} \\ = \min\{|c_0|^{2k} |c_1|^{2(M-k)}, |c_1|^{2k} |c_2|^{2(M-k)}\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Założmy teraz, że $q|c_0|^2 = q|c_2|^2 = |c_1|^2$, gdzie $q \geq 1$ ². Z warunku normalizacji

$$\sum_{i=0}^2 |c_i|^2 = 1 \quad (3.51)$$

dostajemy $|c_0|^2 = \frac{1}{2+q}$. Wobec tego, relacje (3.50) możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \min\{|c_{m_M-1} \cdots c_{m_2-1} c_{m_1-1}|^2, |c_{m_M} \cdots c_{m_2} c_{m_1}|^2\} \\ = \left(\frac{1}{2+q}\right)^M \min\{q^{M-k}, q^k\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ponieważ k spośród liczb m_i przyjmuje wartość 1, a $M - k$ z nich przyjmuje wartość 2 na $\binom{M}{k}$ różnych sposobów, to wzór (3.49) możemy zapisać w postaci

$$p(S) = \left(\frac{1}{2+q}\right)^M \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \min\{q^{M-k}, q^k\}. \quad (3.53)$$

Skorzystamy teraz z faktu, że $\min\{q^{M-k}, q^k\} = q^{M-k}$ dla $k \geq \frac{M}{2}$ i $\min\{q^{M-k}, q^k\} = q^k$ dla $k < \frac{M}{2}$. Wobec tego, prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji wynosi

$$p(S) = 2 \left(\frac{1}{2+q}\right)^M \sum_{i=0}^{M/2} \frac{M!}{i!(M-i)!} q^i - \frac{M!}{(M/2)!(M/2)!} q^{M/2} \left(\frac{1}{2+q}\right)^M \quad (3.54)$$

²Z rozważań w poprzednim rozdziale wiemy, że prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji jest mniejsze dla $q < 1$ niż dla $q = 1$.

dla parzystej liczby teleportacji i

$$p(S) = 2 \left(\frac{1}{2+q} \right)^M \sum_{i=0}^{(M-1)/2} \frac{M!}{i!(M-i)!} q^i \quad (3.55)$$

dla nieparzystej liczby teleportacji.

Obliczmy prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji w dwóch sytuacjach, a mianowicie, gdy do każdej z M teleportacji użyjemy stanów optymalnych do M -krotnej teleportacji, tj. zoptymalizujemy prawdopodobieństwa dane wyrażeniami (3.54) i (3.55) po q (prawdopodobieństwo to oznaczmy przez $p_{opt}(S)$) oraz, gdy do każdej z M teleportacji użyjemy stanów optymalnych do pojedynczej teleportacji, czyli stanów maksymalnie splątanych. Prawdopodobieństwo to wynosi $p(S) = (\frac{2}{3})^M$. Ponieważ wykonujemy M teleportacji, obliczmy pierwiastek stopnia M -tego z ilorazu tych prawdopodobieństw, tj.

$$N(M) = \frac{3}{2} \sqrt[M]{p_{opt}(S)}. \quad (3.56)$$

Tak obliczoną wielkość nazwiemy miarą niemultiplikatywności prawdopodobieństwa wiernej wielokrotnej teleportacji. Jeśli $N(M) = 1$, to stany maksymalnie splątane są optymalne, a prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji jest multiplikatywne. Jeśli $N(M) > 1$, to stany niemaksymalnie splątane są optymalne i prawdopodobieństwo jest niemultiplikatywne w tym sensie, że maksymalne prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji nie jest iloczynem maksymalnych prawdopodobieństw pojedynczych teleportacji [Grudka i Modławska, 2010].

W tabelach 3.2 i 3.3 podano: prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji przy użyciu stanów maksymalnie splątanych, optymalny parametr q , optymalne prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji i miarę niemultiplikatywności

3.4. NIEMULTYPLIKATYWNOŚĆ PRAWDOPODOBIENSTWA ...

Tabela 3.2. Nieparzysta liczba teleportacji (pierwsza kolumna), prawdopodobieństwo wiernej M -krotnej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych (druga kolumna), optymalny parametr q (trzecia kolumna), maksymalne prawdopodobieństwo wiernej M -krotnej teleportacji z użyciem stanów optymalnych do M -krotnej teleportacji (czwarta kolumna) i niemultiplikatywność (piąta kolumna).

M	$p(S) = (\frac{2}{3})^M$	q_{opt}	$p_{opt}(S)$	$N(M)$
3	0,29630	1,00000	0,29630	1,00000
5	0,13169	1,00000	0,13169	1,00000
7	0,05853	1,07301	0,05868	1,00037
9	0,02601	1,21472	0,02672	1,00300
11	0,01156	1,31669	0,01238	1,00626
13	0,00514	1,39399	0,00580	1,00942
15	0,00228	1,45480	0,00274	1,01230
17	0,00101	1,50402	0,00130	1,01489
19	0,00045	1,54475	0,00062	1,01720

Tabela 3.3. Parzysta liczba teleportacji (pierwsza kolumna), prawdopodobieństwo wiernej M -krotnej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych (druga kolumna), optymalny parametr q (trzecia kolumna), maksymalne prawdopodobieństwo wiernej M -krotnej teleportacji z użyciem stanów optymalnych do M -krotnej teleportacji (czwarta kolumna) i niemultiplikatywność (piąta kolumna).

M	$p(S) = (\frac{2}{3})^M$	q_{opt}	$p_{opt}(S)$	$N(M)$
2	0,44444	1,00000	0,44444	1,00000
4	0,19753	1,00000	0,19753	1,00000
6	0,08779	1,08803	0,08803	1,00045
8	0,03902	1,24789	0,04010	1,00343
10	0,01734	1,35602	0,01859	1,00696
12	0,00771	1,43496	0,00871	1,01028
14	0,00343	1,49553	0,00412	1,01325
16	0,00152	1,54368	0,00196	1,01589
18	0,00068	1,58299	0,00094	1,01823
20	0,00030	1,61575	0,00045	1,02030

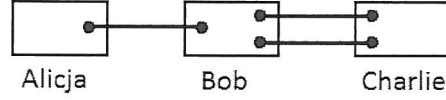
dla nieparzystej (Tabela 3.2) i parzystej (Tabela 3.3) liczby teleportacji. Wyniki te pokazują, że:

- dla pięciu i mniej teleportacji, stany maksymalnie splątane są optymalne i co za tym idzie niemultiplikatywność jest równa 1,
- stan optymalny zależy od liczby teleportacji (różne stany odpowiadają różnym wartościom parametru q) oraz
- niemultiplikatywność wzrasta wraz z liczbą teleportacji niezależnie dla parzystej i nieparzystej liczby teleportacji.

Dostosowana teleportacja kwantowa

4.1 Wprowadzenie

W wielokrotnej teleportacji, w której każdy z uczestników wykonuje teleportację za pomocą protokołu KLM i wszyscy używają identycznych stanów splątanych, dla dostatecznie dużej liczby teleportacji, użycie stanów niemaksymalnie splątanych gwarantuje większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż użycie stanów maksymalnie splątanych; własność tę wykazano w rozdziale 3. W niniejszym rozdziale omówimy inny sposób, w jaki można zwiększyć prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej liniowo-optycznej teleportacji. W tym celu wprowadzimy protokół dostosowanej teleportacji kwantowej. W protokole tym wybór stanu splątanego, który będzie użyty do następnej teleportacji zależy od wyników pomiarów uzyskanych podczas wcześniejszych teleportacji (Rysunek 4.1). Pokażemy, że prosta wersja tego protokołu umożliwia wzrost prawdopodobieństwa wiernej wielokrotnej teleportacji oraz porównamy dostosowaną teleportację z teleportacją wielokrotną z użyciem identycznych stanów splątanych [Modławska i Grudka, 2009].



Rysunek 4.1. Dostosowana teleportacja kwantowa. Bob i Charlie współdzielą dwa różne stany splątane. W zależności od wyniku pomiaru Alicji, Bob teleportuje qubit do Charliego używając jednego z tych stanów, źródło [Modławska i Grudka, 2009].

4.2 Protokół dostosowanej teleportacji

Protokół dostosowanej teleportacji omówimy na przykładzie trzech uczestników jak przedstawiono na rysunku 4.1. W pierwszym kroku Alicja teleportuje qubit do Boba za pomocą protokołu KLM z wykorzystaniem stanu splątanego

$$|t_1\rangle = \sum_{i=0}^N c_1(i) |V\rangle^i |H\rangle^{N-i} |H\rangle^i |V\rangle^{N-i}. \quad (4.1)$$

Jeśli Alicja zarejestruje m ($0 < m < N+1$) wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to Bob otrzyma zmodyfikowany stan qubit. Po korekcji fazy stan ten opisuje wyrażenie

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m)}} [\alpha c_1(m) |H\rangle + \beta c_1(m-1) |V\rangle], \quad (4.2)$$

gdzie prawdopodobieństwo $p(m)$ tego, że suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest równa m wynosi

$$p(m) = |\alpha c_1(m)|^2 + |\beta c_1(m-1)|^2. \quad (4.3)$$

W kolejnym kroku Bob teleportuje do Charliego qubit, który otrzymał od Alicji, używając przy tym stanu

$$|t_{2,m}\rangle = \sum_{i=0}^N c_{2,m}(i) |V\rangle^i |H\rangle^{N-i} |H\rangle^i |V\rangle^{N-i}. \quad (4.4)$$

W omawianym protokole Bob i Charlie współdzielą kilka różnych stanów splątanych, tzn. stanów o różnych ciągach współczynników $c_{2;m}(i)$. Wybór konkretnego stanu splątanego użytego do teleportacji przez Boba i Charliego uzależniony jest od wyniku pomiaru Alicji (stąd zależność od m). Załóżmy, że Bob i Charlie wybrali do teleportacji stan o współczynnikach $c_{2;m}(i)$. Jeśli Bob zarejestruje n ($0 < n < N + 1$) wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to Charlie po dodatkowej korekcji fazy otrzyma qubit w stanie

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m, n)}} [\alpha c_1(m) c_{2;m}(n) |H\rangle + \beta c_1(m-1) c_{2;m}(n-1) |V\rangle], \quad (4.5)$$

gdzie

$$p(m, n) = p(n|m)p(m) = |\alpha c_1(m) c_{2;m}(n)|^2 + |\beta c_1(m-1) c_{2;m}(n-1)|^2 \quad (4.6)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji wynosi m i suma wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych podczas drugiej teleportacji wynosi n .

Naszym celem jest wierne przeteleportowanie qubitu, a zatem chcemy, aby jego stan po drugiej teleportacji był postaci

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle. \quad (4.7)$$

Stan taki otrzymany wówczas, gdy amplitudy $c_1(m)$ i $c_{2;m}(n)$ będą spełniać warunek

$$c_1(m) c_{2;m}(n) = c_1(m-1) c_{2;m}(n-1). \quad (4.8)$$

Jeśli $c_1(m) < c_1(m-1)$ [$c_1(m) > c_1(m-1)$], to amplitudy $c_{2;m}(n)$ powinny mieć postać geometrycznego ciągu rosnącego [malejącego], jeśli natomiast $c_1(m) = c_1(m-$

1), to amplitudy $c_{2;m}(n)$ powinny tworzyć ciąg o wyrazach stałych. Ponadto z (4.6) i (4.8) dostajemy

$$p(m, n) = |c_1(m)|^2 |c_{2;m}(n)|^2. \quad (4.9)$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do sytuacji, w której do pierwszej teleportacji używamy stanów o ciągu współczynników $c_1(i)$, które są symetryczne względem $i = N/2$. Niezależnie rozpatrzemy przy tym dwa wypadki, a mianowicie, gdy N jest liczbą parzystą oraz gdy N jest liczbą nieparzystą.

4.2.1 Parzyste N

Schemat dostosowanej teleportacji dla N parzystego został przedstawiony na rysunku 4.1. Załóżmy, że Alicja chcąc przeteleportować qubit do Boba użyje stanu spletanego, którego amplitudy dane są wyrażeniem

$$c_1(m) = \sqrt{a_1} (\sqrt{q_1})^{N/2 - |m - N/2|}, \quad (4.10)$$

gdzie $q_1 > 1$, tj. dla $m \leq N/2$ amplitudy $c_1(m)$ mają postać rosnącego ciągu geometrycznego, a dla $m \geq N/2$ przyjmują one postać malejącego ciągu geometrycznego (Rysunek 4.2). Z warunku normalizacji

$$\sum_{m=0}^N |c_1(m)|^2 = 1 \quad (4.11)$$

otrzymamy

$$a_1 = \frac{1 - q_1}{2 - q_1^{N/2}(1 + q_1)}. \quad (4.12)$$

Z kolei, z warunku (4.8) wynika, że stan splątany użyty do drugiej teleportacji ma amplitudy

$$c_{2;m}(n) = \sqrt{a_2}(\sqrt{q_2})^n, \quad (4.13)$$

gdzie $q_2 = 1/q_1$, gdy liczba wertykalnie spolaryzowanych fotonów m zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest mniejsza lub równa $N/2$ (Rysunek 4.3) oraz $q_2 = q_1$, gdy liczba wertykalnie spolaryzowanych fotonów m zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest większa niż $N/2$ (Rysunek 4.4). Oznacza to, że Bob wybiera stan, którego amplitudy tworzą malejący lub rosnący ciąg geometryczny. Z warunku normalizacji

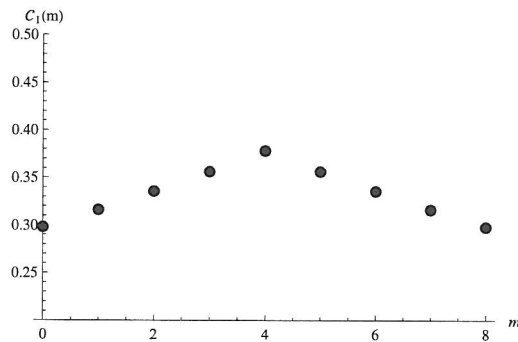
$$\sum_{n=0}^N |c_{2;m}(n)|^2 = 1 \quad (4.14)$$

otrzymamy

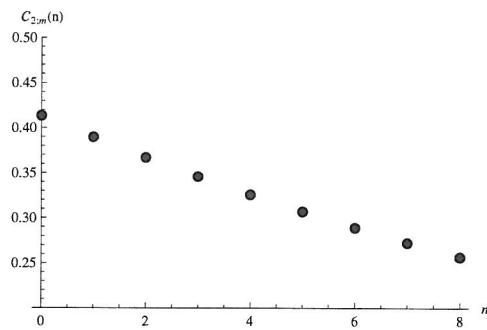
$$a_2 = \frac{1 - q_2}{1 - q_2^{N+1}}. \quad (4.15)$$

Aby wyznaczyć całkowite prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji $p(S)$ musimy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zarówno Alicja jak i Bob zarejestrują od 1 do N wertykalnie spolaryzowanych fotonów. Jeśli jedno z nich zarejestruje 0 lub $N+1$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to teleportacja nie uda się, a oryginalny stan teleportowanego qubitu zostanie zniszczony. Z (4.9)–(4.13) oraz ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego otrzymamy

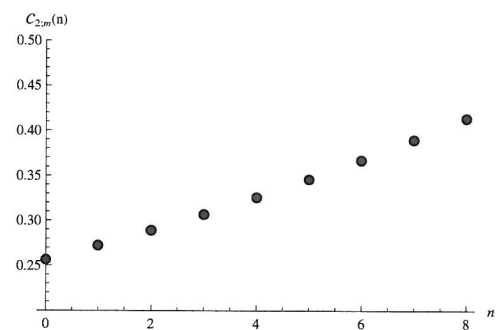
$$\begin{aligned} p(S) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N p(m, n) = 2 \sum_{m=1}^{N/2} \sum_{n=1}^N |c_1(m)|^2 |c_{2;m}(n)|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{N/2} a_1 q_1^m \sum_{n=1}^N a_2 q_2^n = 2 \frac{q - q^{N/2+1}}{2 - q^{N/2}(1 + q)} \frac{q^N - 1}{q^{N+1} - 1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$



Rysunek 4.2. Amplitudy $c_1(m)$ stanu splątanego użytego do pierwszej teleportacji.



Rysunek 4.3. Amplitudy $c_{2,m}(n)$ stanu splątanego użytego do drugiej teleportacji w przypadku, gdy Alicja zarejestruje $m \leq N/2$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji.



Rysunek 4.4. Amplitudy $c_{2,m}(n)$ stanu splątanego użytego do drugiej teleportacji w przypadku, gdy Alicja zarejestruje $m > N/2$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji.

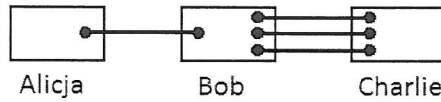
Prawdopodobieństwo $p(S)$ należy zoptymalizować po q , czyli należy znaleźć jego największą wartość ze względu na q .

4.2.2 Nieparzyste N

Schemat dostosowanej teleportacji dla N nieparzystego został przedstawiony na rysunku 4.5. Aby teleportować qubit do Boba, Alicja użyje stanu splątanego, którego amplitudy dane są wyrażeniem

$$c_1(m) = \sqrt{a_1}(\sqrt{q_1})^{N/2-|m-N/2|}, \quad (4.17)$$

gdzie $q_1 > 1$, tj. dla $m \leq (N - 1)/2$ amplitudy $c_1(m)$ mają postać rosnącego ciągu geometrycznego, a dla $m \geq (N + 1)/2$ przyjmują postać malejącego ciągu geometrycznego.



Rysunek 4.5. Dostosowana teleportacja kwantowa. Bob i Charlie współdzielą trzy różne stany splątane. W zależności od wyniku pomiaru Alicji, Bob teleportuje qubit do Charliego używając jednego z tych stanów.

Ponadto współczynniki $c_1(N - 1)/2$ i $c_1(N + 1)/2$ są sobie równe (Rysunek 4.6). Z warunku normalizacji (4.11) otrzymamy

$$a_1 = \frac{1 - q_1}{2(1 - q_1^{(N+1)/2})}. \quad (4.18)$$

Analogicznie jak w przypadku N parzystego, z (4.8) wynika, że stan splątany

użyty w drugiej teleportacji ma amplitudy

$$c_{2;m}(n) = \sqrt{a_2}(\sqrt{q_2})^n, \quad (4.19)$$

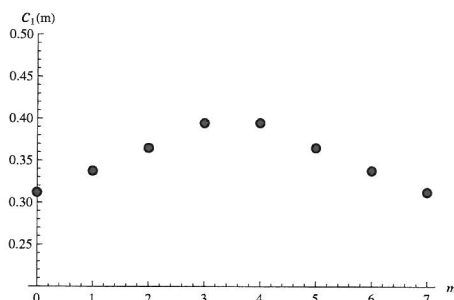
gdzie $q_2 = 1/q_1$, gdy liczba wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest mniejsza lub równa $(N - 1)/2$ (Rysunek 4.7) oraz $q_2 = q_1$, gdy liczba wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest większa niż $(N + 1)/2$ (Rysunek 4.9). Innymi słowy, Bob wybiera stan, którego amplitudy tworzą malejący ciąg geometryczny lub stan, którego amplitudy tworzą rosnący ciąg geometryczny. Z warunku normalizacji (4.14) otrzymamy

$$a_2 = \frac{1 - q_2}{1 - q_2^{N+1}}. \quad (4.20)$$

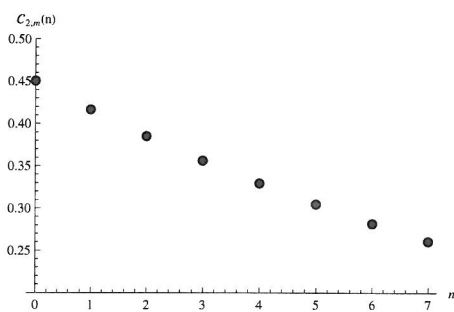
Jeśli liczba wertykalnie spolaryzowanych fotonów m zarejestrowanych podczas pierwszej teleportacji jest równa $(N + 1)/2$, to w drugiej teleportacji Bob wybiera stan, którego amplitudy tworzą ciąg o stałych wyrazach, tzn. stan maksymalnie splątany (Rysunek 4.8). Prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji obliczymy analogicznie jak dla N parzystego. Z (4.9) i wyrażeń (4.17)–(4.20) oraz ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego uzyskujemy

$$\begin{aligned} p(S) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N p(m, n) \\ &= 2 \sum_{m=1}^{(N-1)/2} \sum_{n=1}^N |c_1(m)|^2 |c_{2;m}(n)|^2 + |c_1(\frac{N-1}{2})|^2 \sum_{n=1}^N |c_{2;m}(n)|^2 \\ &= 2 \sum_{m=1}^{(N-1)/2} a_1 q_1^m \sum_{n=1}^N a_2 q_2^n + a_1 q_1^{(N-1)/2} \frac{N}{N+1} \\ &= \frac{q - q^{(N+1)/2}}{1 - q^{(N+1)/2}} \frac{q^N - 1}{q^{N+1} - 1} + \frac{1 - q}{2(1 - q^{(N+1)/2})} q^{(N-1)/2} \frac{N}{N+1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

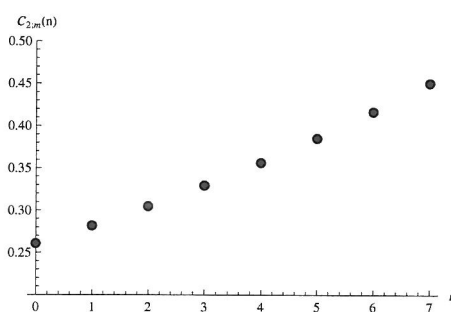
4.2. PROTOKÓŁ DOSTOSOWANEJ TELEPORTACJI



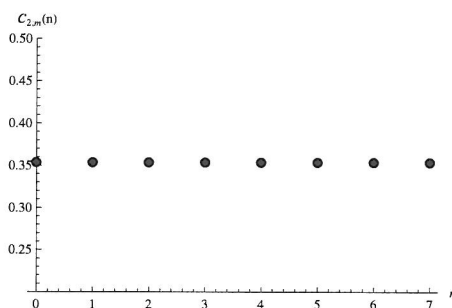
Rysunek 4.6. Amplitudy $c_1(m)$ stanu splątanego użytego do pierwszej teleportacji.



Rysunek 4.7. Amplitudy $c_{2,m}(n)$ stanu splątanego użytego do drugiej teleportacji w przypadku, gdy Alicja zarejestruje $m \leq (N - 1)/2$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji.



Rysunek 4.9. Amplitudy $c_{2,m}(n)$ stanu splątanego użytego do drugiej teleportacji w przypadku, gdy Alicja zarejestruje $m > (N + 1)/2$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji.



Rysunek 4.8. Amplitudy $c_{2,m}(n)$ stanu splątanego użytego do drugiej teleportacji w przypadku, gdy Alicja zarejestruje $m = (N + 1)/2$ wertykalnie spolaryzowanych fotonów podczas pierwszej teleportacji.

Analogicznie jak w przypadku N parzystego, prawdopodobieństwo $p(S)$ należy zoptymalizować po q . Zoptymalizowane prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji, gdy wykonana zostaje dostosowana teleportacja oraz teleportacja z użyciem stanów maksymalnie splątanych przedstawiono w tabeli 4.1 (dla parzystego N) oraz w tabeli 4.2 (dla nieparzystego N). Z danych ujętych w tabelach wyraźnie widać, że za pomocą dostosowanej teleportacji możemy zwiększyć prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji. Ponieważ w dostosowanej teleportacji używamy stanów niemaksymalnie splątanych, prowadzi to do wniosku, że nawet w przypadku podwójnej teleportacji pozwalają one na lepsze wykonanie zadania. Podobnie jak poprzednio, ten nieintuicyjny wynik jest konsekwencją braku możliwości wykonania deterministycznej teleportacji za pomocą schematu KLM. Zauważmy, że wzrost prawdopodobieństwa oraz stosunek wzrostu prawdopodobieństwa do prawdopodobieństwa wiernej teleportacji maleje wraz ze wzrostem N . Nie jest to zaskakujące, gdyż wraz ze wzrostem N różnica między jednością a prawdopodobieństwem wiernej podwójnej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych maleje i co za tym idzie stosunek wzrostu prawdopodobieństwa do prawdopodobieństwa wiernej teleportacji staje się coraz bardziej ograniczony. Zauważmy również, że stosunek wzrostu prawdopodobieństwa wiernej teleportacji do prawdopodobieństwa nieudanej teleportacji rośnie wraz ze wzrostem N .

4.3. PORÓWNANIE DOSTOSOWANEJ TELEPORTACJI Z ...

Tabela 4.1. Liczba modów stanu splątanego posiadanych przez każdego z uczestników (pierwsza kolumna), prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji ze stanami maksymalnie splątanymi (druga kolumna), optymalny parametr q (trzecia kolumna) i maksymalne prawdopodobieństwo dostosowanej podwójnej teleportacji ze stanami splątanymi, których amplitudy dane są wyrażeniami (4.10) i (4.13) (czwarta kolumna), wzrost prawdopodobieństwa (piąta kolumna), względny wzrost prawdopodobieństwa (szósta kolumna) oraz stosunek wzrostu prawdopodobieństwa do prawdopodobieństwa nieudanej teleportacji (siódma kolumna).

N	$p(S) = (\frac{N}{N+1})^2$	q_{opt}	$p_{opt}(S)$	$p_{opt}(S) - p(S)$	$\frac{p_{opt}(S) - p(S)}{p(S)}$	$\frac{p_{opt}(S) - p(S)}{1 - p(S)}$
2	0,44444	1,29663	0,45417	0,00972	0,02188	0,01750
4	0,64000	1,20892	0,65220	0,01220	0,01906	0,03388
6	0,73469	1,15822	0,74625	0,01156	0,01574	0,04356
8	0,79012	1,12682	0,80057	0,01044	0,01322	0,04975
10	0,82645	1,10569	0,83582	0,00937	0,01134	0,05401

Tabela 4.2. Liczba modów stanu splątanego posiadanych przez każdego z uczestników (pierwsza kolumna), prawdopodobieństwo wiernej podwójnej teleportacji ze stanami maksymalnie splątanymi (druga kolumna), optymalny parametr q (trzecia kolumna) i maksymalne prawdopodobieństwo dostosowanej podwójnej teleportacji ze stanami splątanymi, których amplitudy dane są wyrażeniami (4.17) i (4.19) (czwarta kolumna), wzrost prawdopodobieństwa (piąta kolumna), względny wzrost prawdopodobieństwa (szósta kolumna) oraz stosunek wzrostu prawdopodobieństwa do prawdopodobieństwa nieudanej teleportacji (siódma kolumna).

N	$p(S) = (\frac{N}{N+1})^2$	q_{opt}	$p_{opt}(S)$	$p_{opt}(S) - p(S)$	$\frac{p_{opt}(S) - p(S)}{p(S)}$	$\frac{p_{opt}(S) - p(S)}{1 - p(S)}$
3	0,56250	1,36923	0,57683	0,01433	0,02547	0,03275
5	0,69444	1,23193	0,70857	0,01413	0,02035	0,04624
7	0,76563	1,16916	0,77814	0,01252	0,01635	0,05342
9	0,81000	1,13315	0,82099	0,01099	0,01357	0,05785
11	0,84028	1,10980	0,85000	0,00972	0,01157	0,06087

4.3 Porównanie dostosowanej teleportacji z wielokrotną teleportacją

W tym podrozdziale porównamy dostosowaną teleportację z wielokrotną teleportacją z użyciem identycznych stanów splątanych w każdej teleportacji. Rozważymy

przy tym sytuacji, w której użyjemy czterofotonowego stanu splątanego ($N = 2$). W przypadku, gdy do wielokrotnej teleportacji używamy identycznych stanów splątanych to założymy, że ich współczynniki spełniają warunek $c(0) = c(2)$, tzn. są one symetryczne względem $i = 1$.

W rozdziale 3 pokazano, że dla mniej niż sześciu teleportacji największe prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji z użyciem identycznych stanów splątanych w każdej teleportacji osiągniemy, gdy użyjemy stanów maksymalnie splątanych. W związku z tym, jeśli zastąpimy dwie teleportacje w łańcuchu dwóch lub więcej teleportacji przez podwójną dostosowaną teleportację, to otrzymamy większe prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji. Wynika to z faktu, iż prawdopodobieństwo wiernej podwójnej dostosowanej teleportacji jest większe od prawdopodobieństwa podwójnej teleportacji z użyciem stanów maksymalnie splątanych. Z drugiej strony, dla sześciu lub większej liczby teleportacji większe prawdopodobieństwo wiernej wielokrotnej teleportacji z użyciem identycznych stanów splątanych w każdej teleportacji uzyskamy, gdy użyjemy stanów niemaksymalnie splątanych. Pokażemy obecnie, że jeśli zastąpimy oryginalny stan niemaksymalnie splątany użyty w ostatniej teleportacji przez dostosowany stan splątany, to zwiększymy prawdopodobieństwo wiernej teleportacji.

Założmy, że pierwszy uczestnik rejestruje n_1 wertykalnie spolaryzowanych fotonów, drugi uczestnik rejestruje n_2 wertykalnie spolaryzowanych fotonów, ..., a $(M - 1)$ -szy uczestnik rejestruje n_{M-1} wertykalnie spolaryzowanych fotonów. Wówczas stan qubitów po $M - 1$ teleportacjach jest postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{M-1}(n_1, \dots, n_{M-1})}} [\alpha a(1)|H\rangle + \beta a(0)|V\rangle], \quad (4.22)$$

gdzie

$$p_{M-1}(n_1, \dots, n_{M-1}) = |\alpha a(1)|^2 + |\beta a(0)|^2 \quad (4.23)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że każdy z $M - 1$ uczestników zarejestruje wymioną liczbę wertykalnie spolaryzowanych fotonów. Współczynniki $a(1)$ i $a(0)$ określone są przez formuły:

$$a(1) = c(n_1)c(n_2) \dots c(n_{M-1}), \quad (4.24)$$

$$a(0) = c(n_1 - 1)c(n_2 - 1) \dots c(n_{M-1} - 1). \quad (4.25)$$

Bez straty ogólności założmy, że $a(1)$ jest większe lub równe $a(0)$ i zapiszmy

$$|a(1)|^2 = q|a(0)|^2, \quad (4.26)$$

gdzie $q \geq 1$. Ponieważ do teleportacji używamy stanów niemaksymalnie splątanych, to dla części wyników pomiarów uzyskanych podczas $M - 1$ teleportacji $a(1)$ będzie ostro większe od $a(0)$. Fakt ten wykorzystamy w dalszych rozważaniach. Niech

$$|t_{M;n_1, \dots, n_{M-1}}\rangle = \sum_{i=0}^2 b(i)|V\rangle^i |H\rangle^{N-i} |H\rangle^i |V\rangle^{N-i} \quad (4.27)$$

będzie stanem splątany użytym w M -tej teleportacji. Jeśli M -ty uczestnik zarejestruje n_M wertykalnie spolaryzowanych fotonów, to stan qubitów po M -tej teleportacji będzie postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_M(n_1, \dots, n_M)}} [\alpha b(n_M) a(1) |H\rangle + \beta b(n_M - 1) a(0) |V\rangle], \quad (4.28)$$

gdzie

$$p_M(n_1, \dots, n_M) = |b(n_M) \alpha a(1)|^2 + |b(n_M - 1) \beta a(0)|^2 \quad (4.29)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że pierwszy uczestnik zarejestruje n_1 , drugi uczestnik zarejestruje n_2, \dots , a M -ty uczestnik zarejestruje n_M wertykalnie spolaryzowanych fotonów. Jeśli

$$b(n_M)a(1) = b(n_M - 1)a(0), \quad (4.30)$$

to teleportowany qubit znajdzie się w oryginalnym stanie. Jeśli natomiast

$$b(n_M)a(1) \neq b(n_M - 1)a(0), \quad (4.31)$$

to optymalna strategia przywrócenia qubit do stanu oryginalnego polega na wykonaniu uogólnionego pomiaru kwantowego danego przez operatory Krausa:

$$E_S = \frac{b(n_M - 1)a(0)}{b(n_M)a(1)} |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|, \quad (4.32)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{b(n_M - 1)a(0)}{b(n_M)a(1)} \right|^2} |H\rangle\langle H|, \quad (4.33)$$

gdy $|b(n_M)a(1)| > |b(n_M - 1)a(0)|$ oraz

$$E_S = |H\rangle\langle H| + \frac{b(n_M)a(1)}{b(n_M - 1)a(0)} |V\rangle\langle V|, \quad (4.34)$$

$$E_F = \sqrt{1 - \left| \frac{b(n_M)a(1)}{b(n_M - 1)a(0)} \right|^2} |V\rangle\langle V|, \quad (4.35)$$

gdy $|b(n_M)a(1)| < |b(n_M - 1)a(0)|$. Jeśli jako wynik pomiaru uzyskamy E_S , to otrzymamy qubit w stanie oryginalnym. W przeciwnym wypadku, oryginalny stan qubit zostanie zniszczony. Prawdopodobieństwo, że pierwszy uczestnik zarejestruje n_1 wertykalnie spolaryzowanych fotonów, drugi uczestnik zarejestruje n_2 wertykalnie spolaryzowanych fotonów, \dots , a M -ty uczestnik zarejestruje n_M wertykalnie

spolaryzowanych fotonów i udanej korekcji błędu wynosi

$$p_M(n_1, \dots, n_M, S) = \min\{|b(n_M)a(1)|^2, |b(n_M - 1)a(0)|^2\}. \quad (4.36)$$

Zsumujemy powyższe prawdopodobieństwa po liczbie wertykalnie spolaryzowanych fotonów zarejestrowanych w ostatniej teleportacji, tj.

$$p_M(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = \sum_{n_M=1}^2 \min\{|b(n_M)a(1)|^2, |b(n_M - 1)a(0)|^2\} \quad (4.37)$$

($n_M = 0$ i $n_M = 3$ wyłączamy ponieważ wówczas teleportacja nie udaje się) i obliczymy tak zsumowane prawdopodobieństwa w dwóch przypadkach, a mianowicie, gdy:

- wykonujemy dostosowaną teleportację oraz
- wykonujemy teleportację z użyciem identycznych stanów splątanych w każdej teleportacji.

W pierwszym przypadku założymy, że w ostatniej teleportacji użyliśmy stanu, którego współczynniki spełniają zależności

$$|b(0)|^2 = q|b(1)|^2 = q^2|b(2)|^2. \quad (4.38)$$

Z warunku normalizacji

$$\sum_{n_M=0}^2 |b(n_M)|^2 = 1, \quad (4.39)$$

dostajemy

$$|b(2)|^2 = \frac{1}{1 + q + q^2}. \quad (4.40)$$

Wobec tego, wyrażenie (4.37) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned}
 p_M^{\text{dos}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = \min & \left\{ \frac{q|a(1)|^2}{1+q+q^2}, \frac{q^2|a(0)|^2}{1+q+q^2} \right\} \\
 & + \min \left\{ \frac{|a(1)|^2}{1+q+q^2}, \frac{q|a(0)|^2}{1+q+q^2} \right\}. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z faktu, że stan użyty do M -tej teleportacji zależy od wyników pomiarów uzyskanych podczas poprzednich teleportacji, tzn. zależy od współczynników $a(1)$ i $a(2)$ i wybierzemy q tak, aby spełniona była relacja

$$q|a(0)|^2 = |a(1)|^2. \quad (4.42)$$

Wyrażenie (4.41) przyjmie wówczas postać

$$p_M^{\text{dos}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = \frac{q|a(0)|^2}{1+q+q^2} + \frac{q^2|a(0)|^2}{1+q+q^2} = \frac{(1+q)|a(0)|^2}{1+q^{-1}+q}. \quad (4.43)$$

W drugim przypadku założymy, że w ostatniej teleportacji użyliśmy stanu, którego współczynniki są symetryczne względem $n_M = 1$, czyli spełniają zależności

$$p|b(0)|^2 = |b(1)|^2 = p|b(2)|^2. \quad (4.44)$$

Z warunku normalizacji (4.39) dostajemy

$$|b(0)|^2 = \frac{1}{2+p}. \quad (4.45)$$

Wobec tego, wyrażenie (4.37) sprowadza się do

$$p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = (\min\{pq, 1\} + \min\{p, q\})|a(0)|^2|b(0)|^2. \quad (4.46)$$

Minima w wyrażeniu (4.46) zależą od parametrów p i q . Dla:

$p \leq \frac{1}{q}$ wyrażenie (4.46) przyjmuje postać

$$p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = |a(0)|^2 \frac{(1+q)p}{2+p}, \quad (4.47)$$

dla $\frac{1}{q} \leq p \leq q$ postać

$$p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = |a(0)|^2 \frac{1+p}{2+p}, \quad (4.48)$$

a dla $p \geq q$ postać

$$p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) = |a(0)|^2 \frac{1+q}{2+p}. \quad (4.49)$$

Zauważmy, że $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ rośnie dla $p \leq q$ i maleje dla $p > q$ (Rysunek 4.10). Wobec tego, prawdopodobieństwo $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ osiąga maksymalną wartość, gdy $p = q$ i wynosi ona

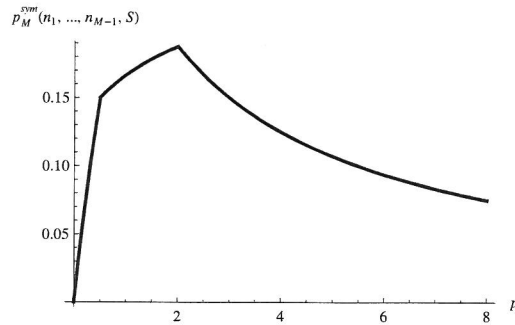
$$p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)_{\max} = |a(0)|^2 \frac{1+q}{2+q}. \quad (4.50)$$

Jest jasne, że jeśli do ostatniej teleportacji użyjemy dowolnego stanu splątanego, którego współczynniki są symetryczne względem $n_M = 1$, to $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ nie może być większe od wartości danej wyrażeniem (4.50).

Porównajmy wartość $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ z wartością $p_M^{\text{dos}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$. Z (4.43) i (4.50) dostajemy

$$\begin{aligned} p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S) &\leq p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)_{\max} = |a(0)|^2 \frac{1+q}{2+q} \\ &\leq \frac{(1+q)|a(0)|^2}{1+q^{-1}+q} = p_M^{\text{dos}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S), \end{aligned} \quad (4.51)$$

gdzie dla $q > 1$ drugą nierówność możemy zastąpić przez nierówność ostrą. Z komentarza po wyrażeniu (4.26) wiemy, że dla części wyników uzyskanych podczas



Rysunek 4.10. Zależność $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ od p dla $q=2$.

pierwszych $M - 1$ teleportacji q jest większe od 1. Zsumowanie $p_M^{\text{dos}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ i $p_M^{\text{sym}}(n_1, \dots, n_{M-1}, S)$ po n_1, \dots, n_{M-1} prowadzi do wniosku, że całkowite prawdopodobieństwo wiernej dostosowanej teleportacji jest większe od prawdopodobieństwa wiernej wielokrotnej teleportacji z użyciem identycznych, symetrycznych stanów splątanych w każdej teleportacji.

Zwiększanie wierności teleportacji za pomocą protokołu wymiany splątania

5.1 Wprowadzenie

W tym rozdziale rozpatrzmy podwójną teleportację za pomocą dwuqubitowych stanów mieszanych. Zanim jednak do tego przejdziemy omówimy pojedynczą teleportację. Załóżmy, że chcemy teleportować qubit za pomocą dowolnego dwuqubitowego stanu mieszanego ρ_{AB} i przy użyciu dowolnego protokołu wykorzystującego tylko lokalne operacje i klasyczną komunikację. Naszym celem jest uzyskanie jak największej średniej wierności teleportowanego qubitu, zwanej dalej wiernością teleportacji (wierność teleportacji zdefiniowana została w podrozdziale 2.2). Horodeccy [Horodecki *et al.*, 1999] pokazali, że wierność teleportacji f związana jest z ułamkiem stanu maksymalnie splątanego F stanu ρ_{AB} wyrażeniem

$$f = \frac{2F + 1}{3}, \tag{5.1}$$

gdzie ułamek stanu maksymalnie splątanego F jest zdefiniowany poprzez

$$F = \max \langle \Psi^{MS} |_{AB} \rho_{AB} | \Psi^{MS} \rangle_{AB}, \quad (5.2)$$

przy czym maksimum wzięte jest po wszystkich stanach maksymalnie splątanych $|\Psi^{MS}\rangle_{AB}$. Wobec tego, aby uzyskać maksymalną wierność teleportacji musimy najpierw za pomocą lokalnych operacji i klasycznej komunikacji deterministycznie zwiększyć ułamek stanu maksymalnie splątanego do wartości maksymalnej, a następnie wykonać standardowy protokół teleportacji. Z pracy [Verstraete i Verschelde, 2003] wiadomo, że maksymalną wartość ułamka stanu maksymalnie splątanego można otrzymać w sposób opisany poniżej. Nadawca (lub odbiorca) stosuje uogólniony pomiar kwantowy dany przez dwa operatory Krausa A_A i $\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A}$ (jednym z operatorów Krausa jest tzw. lokalny filtr A_A), a następnie przesyła wynik pomiaru do odbiorcy (lub nadawcy). W dalszej części założymy, że to nadawca wykonuje uogólniony pomiar kwantowy. Jeżeli uczestnicy otrzymają w wyniku pomiaru stan

$$\frac{A_A \otimes I_B \rho_{AB} A_A \otimes I_B}{\text{Tr}(A_A \otimes I_B \rho_{AB} A_A \otimes I_B)}, \quad (5.3)$$

to ułamek stanu maksymalnie splątanego zostaje zwiększony i uczestnicy pozostawiają stan bez zmian. Jeśli jednak uczestnicy otrzymają w wyniku pomiaru stan

$$\frac{(\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B) \rho_{AB} (\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B)}{\text{Tr}[(\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B) \rho_{AB} (\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B)]}, \quad (5.4)$$

to ułamek stanu maksymalnie splątanego zostaje zmniejszony poniżej $\frac{1}{2}$ i uczestnicy zastępują otrzymany stan stanem produktowym. Stan produktowy zostaje wybrany w taki sposób, że jego przekrycie ze stanem maksymalnie splątanim, który

maksymalizuje F dla stanu (5.3) wynosi $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Oznaczmy ten stan przez $|\alpha\beta\rangle_{AB}$. W konsekwencji czego, stan końcowy możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{\max} &= A_A \otimes I_B \rho_{AB} A_A \otimes I_B \\ &+ \text{Tr}(\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B) \rho_{AB} (\sqrt{I_A - A_A^\dagger A_A} \otimes I_B) |\alpha\beta\rangle \langle \alpha\beta|_{AB}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Optymalny filtr A_A^{\max} i maksymalną wartość ułamka stanu maksymalnie splątanego F^{\max} można znaleźć rozwiązując następujący półokreślony program: *Znajdź maksymalną wartość wyrażenia*

$$F = \frac{1}{2} - \text{Tr}(X_{AB} \rho_{AB}^{\Gamma_B}), \quad (5.6)$$

pod warunkiem, że

$$0 \leq X_{AB} \leq I_{AB}, \quad (5.7)$$

oraz

$$-\frac{I_{AB}}{2} \leq X_{AB}^{\Gamma_B} \leq \frac{I_{AB}}{2}. \quad (5.8)$$

Symbol Γ_B oznacza tutaj operację częściowej transpozycji, która działa na dwucząstkowy operator

$$X_{AB} = \sum_{i,j,k,l} X_{ij,kl} |i\rangle_A |j\rangle_B \langle k|_A \langle l|_B \quad (5.9)$$

w następujący sposób

$$X_{AB}^{\Gamma_B} = X_{ij,kl} |i\rangle_A |l\rangle_B \langle k|_A \langle j|_B. \quad (5.10)$$

$F^{\max} > \frac{1}{2}$ jeśli ρ_{AB} jest stanem splątanym i optymalne X_{AB}^{\max} jest rzędu 1. Z kolei optymalny filtr A_A^{\max} możemy wyznaczyć rozwiązując równanie

$$X_{AB}^{\max} = A_A^{\max} \otimes I_B |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|_{AB} A_A^{\max\dagger} \otimes I_B. \quad (5.11)$$

5.2 Wymiana splątania dla stanów mieszanych

Powróćmy teraz do układu z trzema uczestnikami: Alicją, Bobem i Charliem. Załóżmy, że zarówno Alicja i Bob, jak i Bob i Charlie współdzielą parę qubitów w stanie mieszanym. Celem wszystkich uczestników jest jak najwierniejsza teleportacja dodatkowego qubitów od Alicji do Charliego. Można by przypuszczać, że uczestnicy powinni postąpić w następujący sposób: najpierw każda para niezależnie zwiększa ułamek stanu maksymalnie splątanego dla współdzielonego stanu dwuqubitowego do maksymalnej wartości, następnie Alicja teleportuje qubit do Boba, po czym Bob teleportuje go do Charliego. Okazuje się jednak, że w niektórych przypadkach istnieje lepsza strategia oparta na protokole wymiany splątania [Żukowski *et al.*; 1993, Żukowski *et al.*; 1995, Pan *et al.*, 1998], którą teraz omówimy w oparciu o pracę [Modławska i Grudka, 2008a]. Strategia ta składa się z dwóch kroków. W pierwszym kroku Bob mierzy swoje qubity w bazie Bella i informuje pozostałych uczestników o wyniku pomiaru. Jeżeli stan Alicji i Charliego po pomiarze Boba ma ułamek stanu maksymalnie splątanego F większy od $\frac{1}{2}$, to Alicja i Charlie przekształcają go za pomocą lokalnych operacji unitarnych, tak aby jego wierność względem stanu $|\Psi^+\rangle_{AC}$ była równa F . W przeciwnym przypadku, Alicja i Charlie przygotowują stan $|01\rangle_{AC}$, którego wierność względem stanu $|\Psi^+\rangle_{AC}$ wynosi $\frac{1}{2}$. W konsekwencji, końcowy stan Alicji i Charliego będzie miał zawsze ułamek stanu maksymalnie splątanego F' większy lub równy $\frac{1}{2}$. W drugim kroku Alicja teleportuje qubit do Charliego za pomocą stanu, który z nim dzieli.

Przejdźmy do konkretnego przykładu. Najpierw omówimy pierwszą strategię, następnie drugą i wreszcie porównamy je. Załóżmy, że Alicja i Bob współdzielą parę

qubitów w stanie

$$\varrho(p, \alpha)_{AB} = (1 - p)|\Psi(\alpha)\rangle\langle\Psi(\alpha)|_{AB} + p|00\rangle\langle 00|_{AB}, \quad (5.12)$$

gdzie

$$|\Psi(\alpha)\rangle_{XY} = \sin \alpha|01\rangle_{XY} + \cos \alpha|10\rangle_{XY}, \quad (5.13)$$

a Bob i Charlie współdzielą parę qubitów w stanie

$$\varrho(p, \alpha)_{B'C} = (1 - p)|\Psi(\alpha)\rangle\langle\Psi(\alpha)|_{B'C} + p|11\rangle\langle 11|_{B'C}. \quad (5.14)$$

Oba stany są splątane dla $p \neq 1$ i $0 < \alpha < \pi/2$ oraz mają taki sam ułamek stanu maksymalnie splątanego

$$F = \max \left\{ \frac{(1 - p)(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{2}, \frac{p}{2} \right\}. \quad (5.15)$$

Najpierw każda z par Alicja i Bob oraz Bob i Charlie zwiększa ułamek stanu maksymalnie splątanego do jego maksymalnej wartości. Aby wyznaczyć tę wartość i lokalny filtr musimy rozwiązać omówiony powyżej półokreślony program. W tym celu zauważmy, że stan $\rho_{AB}^{\Gamma_B}$ (oraz stan $\rho_{BC}^{\Gamma_C}$) jest niezmienniczy ze względu na: transpozycję, lokalną operację $\sigma_{zA} \otimes \sigma_{zB}$ oraz lokalną operację $\text{diag}[1, i]_A \otimes \text{diag}[i, 1]_B$ [Verstraete i Verschelde, 2003]. Operator X_{AB} musi mieć taką samą symetrię i wobec tego ma on postać

$$X_{AB} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

gdzie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Ponadto, z faktu, iż X_{AB} jest rzędu 1 wynika, że x_3 i x_4 są równe 0. Dla maksymalnej wartości ułamka stanu maksymalnie splątanego i lokalnych filtrów uzyskamy następujące wyrażenia:

$$F^{\max} = \frac{1}{2} + \frac{(1-p)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2p}, \quad (5.17)$$

$$A_A^{\max} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p) \sin \alpha \cos \alpha}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$A_{B'}^{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{(1-p) \sin \alpha \cos \alpha}{p} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

gdzie $\frac{(1-p) \sin \alpha \cos \alpha}{p} < 1$ oraz

$$F^{\max} = \frac{1-p}{2} + (1-p) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5.20)$$

$$A_A^{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

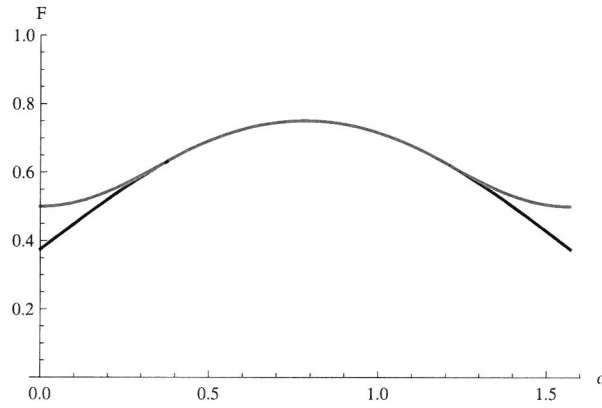
$$A_{B'}^{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

gdzie $\frac{(1-p) \sin \alpha \cos \alpha}{p} \geq 1$. Ostatecznie, stan końcowy, za pomocą którego Alicja teleportuje qubit do Boba dany jest wyrażeniem

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{\max} &= A_A^{\max} \otimes I_B \rho_{AB} A_A^{\max \dagger} \otimes I_B \\ &+ [1 - \text{Tr}(A_A^{\max} \otimes I_B \rho_{AB} A_A^{\max \dagger} \otimes I_B)] |01\rangle\langle 01|_{AB}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

a stan końcowy, za pomocą którego Bob teleportuje qubit do Charliego dany jest wyrażeniem

$$\begin{aligned} \rho_{B'C}^{\max} &= A_{B'}^{\max} \otimes I_C \rho_{B'C} A_{B'}^{\max\dagger} \otimes I_C \\ &+ \left[1 - \text{Tr}(A_{B'}^{\max} \otimes I_C \rho_{B'C} A_{B'}^{\max\dagger} \otimes I_C) \right] |10\rangle\langle 10|_{B'C}. \end{aligned} \quad (5.24)$$



Rysunek 5.1. Zależność ułamka stanu maksymalnie splątanego od parametru α dla $p=0,25$ dla stanów początkowych (czarna linia) i dla stanów końcowych (czerwona linia) otrzymanych w wyniku filtrowania.

Na rysunku 5.1 pokazano jak ułamek stanu maksymalnie splątanego stanów początkowych (5.15) i ułamek stanu maksymalnie splątanego stanów końcowych (5.17) i (5.20) zależą od parametru α dla $p = 0,25$. Zauważmy, że ułamek ten dla stanów końcowych jest nie mniejszy niż $\frac{1}{2}$. Ponadto, dla $\alpha \in [0; 0,36) \cup (1,21; \pi/2]$ stany końcowe mają ułamek stanu maksymalnie splątanego większy niż stany początkowe. Z kolei dla $\alpha \in [0,36; 1,21]$ ułamek ten jest taki sam dla obu stanów.

Przejdźmy do omówienia drugiej strategii. Niech Bob mierząc swoje qubity w bazie Bella otrzyma $|\Phi^\pm\rangle_{BB'}$ jako wynik pomiaru. W takim przypadku qubity Alicji i Charliego po korekcji bitu przez Charliego (i po ewentualnej korekcji fazy, gdy Bob

uzyska $|\Phi^-\rangle_{BB'}$ znajdują się w stanie

$$\varrho_{AC}^{\Phi} = \frac{1}{p(\Phi)} [(1-p)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|_{AC} + p(1-p) \sin^2 \alpha |00\rangle \langle 00|_{AC}], \quad (5.25)$$

gdzie

$$p(\Phi) = p(\Phi^+) = p(\Phi^-) = (1-p)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + p(1-p) \sin^2 \alpha \quad (5.26)$$

jest prawdopodobieństwem uzyskania stanu $|\Phi^{\pm}\rangle_{BB'}$ jako wyniku pomiaru Boba.

Ułamek stanu maksymalnie splątanego dla tego stanu wynosi

$$F^{\Phi} = \max \left\{ \frac{(1-p)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{p(\Phi)}, \frac{p(1-p) \sin^2 \alpha}{2p(\Phi)} \right\}. \quad (5.27)$$

Jeśli $F^{\Phi} > \frac{1}{2}$, to Alicja i Charlie pozostawiają stan ϱ_{AC}^{Φ} . W przeciwnym wypadku przygotowują stan $|01\rangle_{AC}$. Tak skonstruowany stan ma ułamek stanu maksymalnie splątanego dany wyrażeniem

$$F'^{\Phi} = F^{\Phi} \theta \left(F^{\Phi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{2} - F^{\Phi} \right), \quad (5.28)$$

gdzie $\theta(\cdot)$ jest funkcją skokową Heaviside'a.

Założmy, że Bob otrzymał $|\Psi^{\pm}\rangle_{BB'}$ jako wynik pomiaru. W takim przypadku qubity Alicji i Charliego (po ewentualnej korekcji fazy przez Charliego, gdy Bob uzyska $|\Psi^-\rangle_{BB'}$) znajdują się w stanie

$$\begin{aligned} \varrho_{AC}^{\Psi} = & \frac{1}{p(\Psi)} (1-p)^2 (\sin^2 \alpha |01\rangle_{AC} + \cos^2 \alpha |10\rangle_{AC}) (\sin^2 \alpha \langle 01|_{AC} + \cos^2 \alpha \langle 10|_{AC}) \\ & + p^2 |01\rangle \langle 01|_{AC} + p(1-p) \cos^2 \alpha (|00\rangle \langle 00|_{AC} + |11\rangle \langle 11|_{AC}), \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdzie

$$p(\Psi) = \frac{1}{2} - (1-p)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - p(1-p) \sin^2 \alpha \quad (5.30)$$

jest prawdopodobieństwem uzyskania $|\Psi^+\rangle_{BB'}$ lub $|\Psi^-\rangle_{BB'}$ jako wyniku pomiaru Boba. Ułamek stanu maksymalnie splątanego stanu ϱ_{AC}^Ψ wynosi

$$F^\Psi = \max \left\{ \frac{1 - 2(1-p) + 2(1-p)^2}{4p(\Psi)}, \frac{\cos^2 \alpha(1-p)p}{2p(\Psi)} \right\}. \quad (5.31)$$

Jeśli $F^\Psi > \frac{1}{2}$, to Alicja i Charlie pozostawiają stan ϱ_{AC}^Ψ . W przeciwnym przypadku przygotowują stan $|01\rangle_{AC}$. Tak skonstruowany stan ma ułamek stanu maksymalnie splątanego dany wyrażeniem

$$F'^\Psi = F^\Psi \theta \left(F^\Psi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{2} - F^\Psi \right). \quad (5.32)$$

Ostatecznie, uśredniony po wynikach pomiaru Boba stan, za pomocą którego Alicja teleportuje qubit do Charliego, przyjmie postać

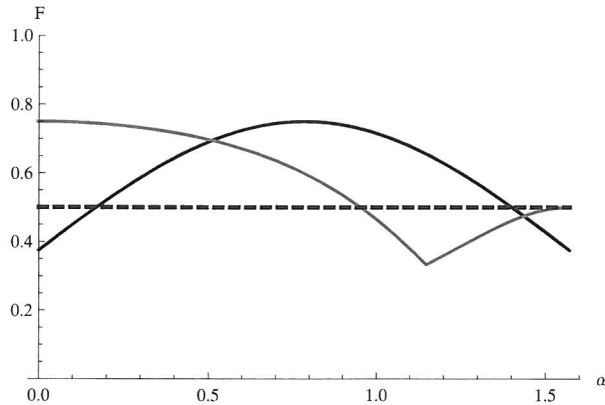
$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_{AC} = & 2p(\Phi) \left[\theta(F^\Phi - \frac{1}{2}) \varrho_{AC}^\Phi + \theta(1/2 - F^\Phi) |01\rangle\langle 01|_{AC} \right] \\ & + 2p(\Psi) \left[\theta(F^\Psi - 1/2) \varrho_{AC}^\Psi + \theta(1/2 - F^\Psi) |01\rangle\langle 01|_{AC} \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

którego ułamek stanu maksymalnie splątanego jest dany wyrażeniem

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 2p(\Psi) \left[F^\Psi \theta \left(F^\Psi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{2} - F^\Psi \right) \right] \\ & + 2p(\Phi) \left[F^\Phi \theta \left(F^\Phi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{2} - F^\Phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ułamek ten jest nie mniejszy niż $\frac{1}{2}$ i, co za tym idzie, stan daje wierność teleportacji przynajmniej równą $\frac{2}{3}$.

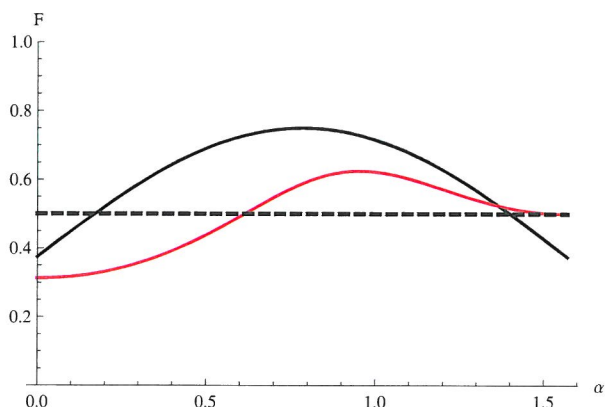
Przyjmijmy $p = 0,25$ i obliczmy wartości ułamka stanu maksymalnie splątanego dla różnych stanów rozważanych w omówionym protokole. Na rysunku 5.2 pokazano, jak ułamek stanu maksymalnie splątanego stanów początkowych (5.15) i ułamek



Rysunek 5.2. Zależność ułamka stanu maksymalnie splątanego od parametru α dla $p=0,25$ dla stanów początkowych (czarna linia) i dla stanu końcowego (czerwona linia) jeśli Bob uzyska $|\Phi^\pm\rangle$ jako wynik pomiaru, źródło [Modławska i Grudka, 2008a].

stanu maksymalnie splątanego stanu końcowego (5.27) zależą od parametru α , gdy Bob uzyska $|\Phi^+\rangle_{BB'}$ lub $|\Phi^-\rangle_{BB'}$ jako wynik pomiaru. Zaznaczono również ułamek stanu maksymalnie splątanego stanu $|01\rangle_{AC}$, tj. $F = \frac{1}{2}$. Dla $\alpha < 0,17$ stany początkowe mają ułamek stanu maksymalnie splątanego mniejszy niż $\frac{1}{2}$, a dla $\alpha < 0,96$ stan końcowy ma ułamek stanu maksymalnie splątanego większy niż $\frac{1}{2}$. Ponadto dla $\alpha \in [0; 0,51) \cup (1,44; \pi/2]$ stan końcowy ma ułamek stanu maksymalnie splątanego większy niż stany początkowe.

Na rysunku 5.3 pokazano, jak ułamek stanu maksymalnie splątanego stanów początkowych (5.15) i ułamek stanu maksymalnie splątanego stanu końcowego (5.31) zależą od parametru α dla $p = 0,25$, gdy Bob uzyska $|\Psi^+\rangle_{BB'}$ lub $|\Psi^-\rangle_{BB'}$ jako wynik pomiaru. Zaznaczono również ułamek stanu maksymalnie splątanego stanu $|01\rangle_{AC}$, tj. $F = \frac{1}{2}$. Dla $\alpha < 0,62$ stan końcowy ma ułamek stanu maksymalnie splątanego mniejszy niż $\frac{1}{2}$. Ponadto dla $\alpha > 1,37$ stan końcowy ma ułamek stanu maksymalnie



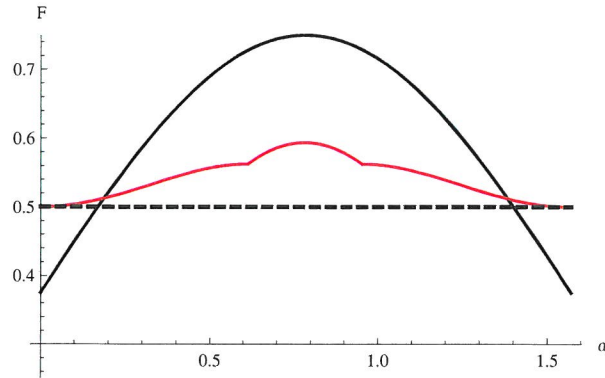
Rysunek 5.3. Zależność ułamka stanu maksymalnie splątanego od parametru α dla $p=0,25$ dla stanów początkowych (czarna linia) i dla stanu końcowego (czerwona linia), jeśli Bob uzyska $|\Psi^\pm\rangle$ jako wynik pomiaru, źródło [Modławska i Grudka, 2008a].

splątanego większy niż stany początkowe.

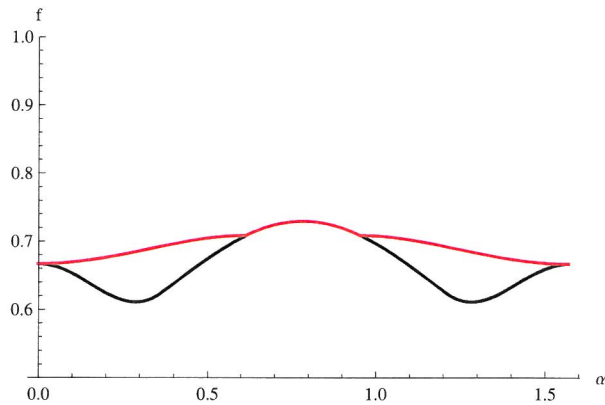
Na rysunku 5.4 pokazano, jak ułamek stanu maksymalnie splątanego stanów początkowych (5.15) i ułamek stanu maksymalnie splątanego uśrednionego po wynikach pomiarów Boba stanu końcowego (5.34) zależą od parametru α dla $p = 0,25$. Zauważmy, że stan końcowy ma większy ułamek stanu maksymalnego niż stany początkowe dla $\alpha \in [0; 0,19) \cup (1,38; \pi/2]$.

Przejdźmy do porównania wierności teleportacji uzyskanej za pomocą strategii opartej na niezależnym lokalnym filtrowaniu dwóch par splątanych i strategii opartej na zwiększaniu wierności teleportacji za pomocą wymiany splątania. Na rysunku 5.5 pokazano, jak wierność teleportacji obu strategii zależy od parametru α dla $p = 0,25$. Jeśli uczestnicy zastosują pierwszą z wymienionych strategii, to dla $\alpha < 0,48$ i $\alpha > 1,09$ wierność teleportacji nie przekracza granicy klasycznej. Jeśli uczestnicy zastosują drugą strategię, to Alicja może teleportować qubit do Charlie-

5.2. WYMIANA SPLĄTANIA DLA STANÓW MIESZANYCH



Rysunek 5.4. Zależność ułamka stanu maksymalnie splątanego od parametru α dla $p=0,25$ dla stanów początkowych (czarna linia) i ułamka stanu maksymalnie splątanego dla uśrednionego po wynikach pomiarów Boba stanu końcowego (czerwona linia).



Rysunek 5.5. Zależność wierności teleportacji od parametru α dla $p=0,25$ dla dwóch następujących po sobie teleportacji za pomocą stanów uzyskanych w wyniku niezależnego filtrowania (czarna linia) i dla teleportacji za pomocą stanu otrzymanego po wymianie splątania (czerwona linia), źródło [Modławska i Grudka, 2008a].

go z wiernością teleportacji większą niż $\frac{2}{3}$ dla $0 < \alpha < \pi/2$. Dla $0,62 < \alpha < 0,96$ obie strategie dają taką samą wierność teleportacji. Wiąże się to z faktem, że dla $0,62 < \alpha < 0,96$ stan końcowy otrzymany po wymianie splątania ma ułamek stanu

maksymalnie splątanego większy niż $\frac{1}{2}$ dla każdego wyniku pomiaru Boba i ponadto w przypadku strategii opartej na lokalnym filtrowaniu optymalny filtr jest operatorem jednostkowym, a więc nie trzeba stosować filtru.

Rozdział 6

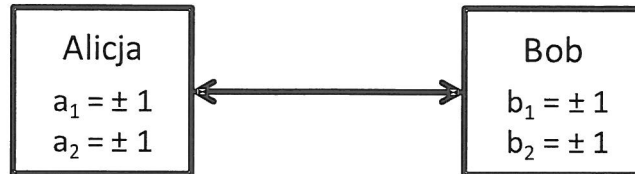
Łamanie nierówności Clausera–Horne’a–Shimony’ego–Holtza

6.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale omówimy nierówność Bella, którą muszą spełniać korelacje przewidziane przez teorie lokalnego realizmu, a której w ogólności nie spełniają korelacje przewidziane przez mechanikę kwantową [Bell, 1964; Nielsen i Chuang, 2000].

Założmy, że mamy dwie cząstki w stanie ρ_{AB} , z których jedną przekazujemy Alicji, a drugą Bobowi. Alicja po otrzymaniu cząstki dokonuje na niej pomiaru jednej z dwóch obserwabli A_1 lub A_2 , uzyskując jeden z dwóch wyników $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$. Również Bob po otrzymaniu cząstki dokonuje na niej pomiaru jednej z dwóch obserwabli B_1 lub B_2 , uzyskując wynik $b_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$. Zarówno Alicja jak i Bob decydują o tym, którą obserwabłą będą mierzyć podejmując w sposób losowy i niezależnie od siebie (Rysunek 6.1). Założmy ponadto, że pomiary Alicji i Boba są przestrzennie rozdzielone i nie mogą zostać połączone żadnym sygnałem. W ta-

kim wypadku wybór obserwabli przez jednego uczestnika nie ma wpływu na wynik pomiaru drugiego uczestnika. Jest to tzw. założenie lokalności.



Rysunek 6.1. Schemat układu eksperymentalnego do testowania nierówności Bella.

Rozpatrzmy następujące wyrażenie

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 = (a_1 + a_2) b_1 + (a_2 - a_1) b_2. \quad (6.1)$$

Ponieważ $a_i, b_i \in \{-1, 1\}$, z (6.1) wynika, że

$$(a_1 + a_2) b_1 = 0 \quad (6.2)$$

lub

$$(a_2 - a_1) b_2 = 0, \quad (6.3)$$

skąd, w konsekwencji,

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 = -2 \quad \text{lub} \quad a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 = 2. \quad (6.4)$$

Oznaczmy przez $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ prawdopodobieństwa tego, że przed pomiarem układ znajduje się w stanie, w którym obserwable przyjmują określone wartości, czyli:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad B_1 = b_1, \quad B_2 = b_2. \quad (6.5)$$

Prawdopodobieństwa $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ mogą zależeć od sposobu przygotowania stanu oraz od warunków w jakich Alicja i Bob dokonują pomiarów. Jest to tzw. założenie realizmu. Aby wyprowadzić nierówność Bella, na dwa sposoby obliczymy moduł wartości oczekiwanej sumy iloczynów obserwabli. Z jednej strony, moduł wartości oczekiwanej możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned} & |E(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2)| \\ &= \left| \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)(a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2) \right| \\ &\leq \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) \times 2 = 2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie przy przejściu z drugiej do trzeciej linii skorzystaliśmy z (6.4). Z drugiej strony, moduł wartości oczekiwanej możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & |E(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2)| \\ &= |E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2)|. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Porównując (6.6) i (6.7) dostajemy nierówność Bella w wersji Clausera, Horne'a, Shimony'ego i Holta (tzw. nierówność CHSH) [Clauser *et al.*, 1969]

$$|E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2)| \leq 2. \quad (6.8)$$

Jeżeli Alicja i Bob wykonają opisany powyżej eksperyment na wielu kopiach stanu ρ_{AB} , to będą mogli obliczyć poszczególne wartości oczekiwane $E(A_iB_j)$ na podstawie danych eksperymentalnych. Dokładność tych obliczeń będzie tym większa im większa będzie liczba kopii stanu ρ_{AB} .

Przyjmijmy teraz, że stan ρ_{AB} jest postaci

$$\rho_{AB} = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|_{AB}, \quad (6.9)$$

gdzie

$$|\Psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B), \quad (6.10)$$

i wybierzmy obserwabli mierzone przez Alicję i Boba w następującej postaci:

$$A_1 = \sigma_{z_A}, \quad A_2 = \sigma_{x_A}, \quad B_1 = \frac{-\sigma_{z_B} - \sigma_{x_B}}{\sqrt{2}}, \quad B_2 = \frac{\sigma_{z_B} - \sigma_{x_B}}{\sqrt{2}}, \quad (6.11)$$

gdzie operatory hermitowskie σ_x, σ_y oraz σ_z zostały zdefiniowane w (2.14)–(2.16).

Wartości oczekiwane $E(A_i B_j)$ obserwabli w stanie (6.9) wynoszą:

$$E(A_1 B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E(A_2 B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E(A_2 B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E(A_1 B_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.12)$$

Z (6.12) dostajemy

$$|E(A_1 B_1) + E(A_2 B_1) + E(A_2 B_2) - E(A_1 B_2)| = 2\sqrt{2}. \quad (6.13)$$

Wynik ten stoi w sprzeczności z nierównością Bella (6.8), co oznacza, że przynajmniej jedno z dwóch założeń nierówności Bella nie jest spełnione, tzn. albo obserwabli A_1, A_2, B_1, B_2 nie mają określonych wartości przed pomiarem (nie jest spełnione założenie realizmu) albo wybór obserwabli u jednego uczestnika ma wpływ na wynik pomiaru u drugiego uczestnika (nie jest spełnione założenie lokalności). W związku z tym albo mechanika kwantowa jest błędna, albo Natura nie spełnia założeń lokalnego realizmu. Dylemat ten można rozstrzygnąć eksperymentalnie testując nierówność CHSH. Nierówność ta została przetestowana m. in. w pracach [Aspect *et al.*, 1981;

Aspect *et al.*, 1982; Aspect, 1999; Freedman i Clauser, 1972; Fry i Thompson, 1976; Ou i Mandel, 1988; Rowe *et al.*, 2001; Tapster *et al.*, 1994; Tittel *et al.*, 1998; Weihs *et al.*, 1998]. Wszystkie dotychczasowe eksperymenty pokazały, że Natura nie spełnia nierówności CHSH.

Warto dodać, że jeżeli dany stan łamie nierówność Bella, to jest on splątany. Jednak nie każdy stan splątany łamie nierówność Bella [Werner, 1989]. Co ciekawe, Popescu [Popescu, 1995] i Gisin [Gisin, 1996] pokazali, że nawet jeśli cząstki znajdują się w stanie splątanym, który nie łamie nierówności Bella, to po poddaniu cząstek lokalnym pomiarom, ich stan po pomiarze może łamać nierówność Bella.

6.2 Wymiana splątania, a łamanie nierówności CHSH

Sen i inni [Sen(De) *et al.*, 2005] postawili następujące pytanie: czy za pomocą procesu wymiany splątania można ze stanów niełamających nierówności Bella otrzymać stan łamiący tę nierówność? Autorzy ci znaleźli częściowe rozwiązanie tego problemu. Pokazali oni mianowicie, że za pomocą uogólnionego protokołu wymiany splątania z N stanów dwucząstkowych, gdzie $N \geq 3$, z których żaden nie łamie nierówności Bella, można otrzymać stan N -cząstkowy, który łamie nierówność Mermin-Klyshki [Ardehali, 1992; Belinskii i Klyshko, 1993; Gisin i Bechmann-Pasquinucci, 1998; Mermin, 1990; Roy i Singh, 1991]. Ponadto wykazali oni, że za pomocą standardowego protokołu wymiany splątania z dwóch stanów, z których każdy łamie nierówność CHSH o taki sam czynnik, można otrzymać stan, który łamie tę nierówność o większy czynnik. Poniżej pokażemy, że za pomocą tego samego protokołu z dwóch stanów, z których żaden nie łamie nierówności CHSH, można otrzymać stan,

który już tę nierówność łamie [Wójcik *et al.*, 2010]. W tym celu użyjemy stanów, na których zademonstrowaliśmy w poprzednim rozdziale, że za pomocą protokołu wymiany splątania można zwiększyć ułamek stanu maksymalnie splątanego. Zbieżność ta nie jest przypadkowa ponieważ stan, który ma dostatecznie duży ułamek stanu maksymalnie splątanego łamie nierówność CHSH.

Założmy, że Alicja i Bob współdzielą stan (por. (5.12))

$$\varrho(p, \alpha)_{AB} = (1 - p)|\Psi(\alpha)\rangle\langle\Psi(\alpha)|_{AB} + p|00\rangle\langle 00|_{AB}, \quad (6.14)$$

gdzie

$$|\Psi(\alpha)\rangle_{XY} = \sin \alpha|01\rangle_{XY} + \cos \alpha|10\rangle_{XY}, \quad (6.15)$$

a Bob i Charlie współdzielą stan (por. (5.14))

$$\varrho(p, \alpha)_{B'C} = (1 - p)|\Psi(\alpha)\rangle\langle\Psi(\alpha)|_{B'C} + p|11\rangle\langle 11|_{B'C}. \quad (6.16)$$

Bob wykonuje na swoich qubitach pomiar Bella, czyli wykonuje standardowy protokół wymiany splątania. Jeśli jako wynik uzyska on

$$|\Phi^\pm\rangle_{BB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{BB'} \pm |11\rangle_{BB'}), \quad (6.17)$$

to Alicja i Charlie będą współdzielić stan (po możliwej korekcji fazy przez jedno z nich)

$$\varrho(p, \alpha)_{AC} = \frac{1}{p(\Phi^\pm)} [(1 - p)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|_{AC} + p(1 - p) \sin^2 \alpha |01\rangle\langle 01|_{AC}], \quad (6.18)$$

gdzie

$$p(\Phi^\pm) = (1-p)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + p(1-p) \sin^2 \alpha \quad (6.19)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że Bob uzyska $|\Phi^\pm\rangle_{BB'}$ jako wynik pomiaru. Problem sprowadza się teraz do znalezienia takiego zakresu parametrów p i α , dla których stany (6.14) i (6.16) nie łamią nierówności CHSH, a stan (6.18) już ją łamie. Aby rozstrzygnąć, czy dany stan łamie nierówność CHSH użyjemy kryterium Horodeckich [Horodecki *et al.*, 1995]. W tym celu wprowadzimy parametr łamania

$$r(\varrho) = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (6.20)$$

gdzie λ_1 i λ_2 są dwiema największymi wartościami własnymi macierzy $R(\varrho)^T R(\varrho)$, a macierz $R(\varrho)$ określona jest przez elementy

$$R(\varrho)_{ij} = \text{Tr}(\varrho \sigma_i \otimes \sigma_j), \quad (6.21)$$

gdzie σ_i są macierzami Pauliego (2.13)–(2.16). Stan dwuqubitowy łamie nierówność CHSH wtedy i tylko wtedy, gdy parametr łamania $r(\varrho)$ jest większy od 1.

Dla stanów początkowych (6.14) oraz (6.16) macierz $R(\varrho)$ jest postaci

$$R(\varrho) = \begin{pmatrix} (1-p) \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & (1-p) \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Wartości własne macierzy $R(\varrho)^T R(\varrho)$ wynoszą zatem:

$$\lambda_1 = (2p-1)^2, \quad (6.23)$$

$$\lambda_2 = [(1-p) \sin(2\alpha)]^2, \quad (6.24)$$

$$\lambda_3 = [(1 - p) \sin(2\alpha)]^2. \quad (6.25)$$

Parametr łamania nierówności CHSH możemy wyrazić jako

$$r(\varrho) = (1 - p) \sin(2\alpha) \sqrt{1 + z(p, \alpha)}, \quad (6.26)$$

gdzie

$$z(p, \alpha) = \max \left\{ 1, \left(\frac{2p - 1}{(p - 1) \sin(2\alpha)} \right)^2 \right\}. \quad (6.27)$$

Dla stanu końcowego (6.18) macierz $R(\varrho)$ jest macierzą diagonalną, o niezerowych elementach:

$$R(\varrho)_{11} = \frac{1}{p(|\Phi^\pm\rangle_{BB'})} (1 - p)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad (6.28)$$

$$R(\varrho)_{22} = \frac{1}{p(|\Phi^\pm\rangle_{BB'})} [-(1 - p)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha], \quad (6.29)$$

$$R(\varrho)_{33} = \frac{1}{p(|\Phi^\pm\rangle_{BB'})} (p - 1)[p + (p - 1) \cos^2 \alpha] \sin^2 \alpha. \quad (6.30)$$

Po krótkich przekształceniach wyrażeń (6.28)–(6.30) okazuje się, że wartości własne macierzy $R(\varrho)^T R(\varrho)$ możemy zapisać w postaci:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1 - \tilde{y}(p, \alpha)}{1 + \tilde{y}(p, \alpha)} \right)^2, \quad (6.31)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{1 + \tilde{y}(p, \alpha)} \right)^2, \quad (6.32)$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{1}{1 + \tilde{y}(p, \alpha)} \right)^2, \quad (6.33)$$

gdzie

$$\tilde{y}(p, \alpha) = \frac{p}{(1 - p) \cos^2 \alpha}. \quad (6.34)$$

W konsekwencji, parametr łamania nierówności CHSH możemy przedstawić jako

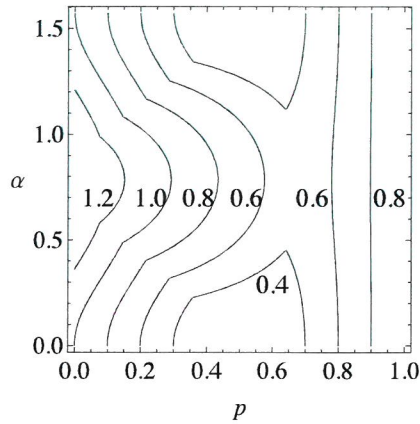
$$r(\varrho) = \frac{1}{1 + \tilde{y}(p, \alpha)} \sqrt{1 + \tilde{z}(p, \alpha)}, \quad (6.35)$$

gdzie

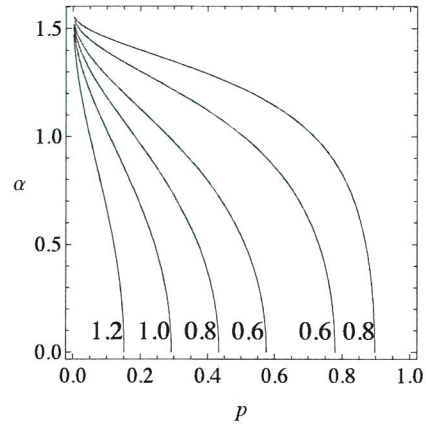
$$\tilde{z}(p, \alpha) = \max\{1, [1 - \tilde{y}(p, \alpha)]^2\}. \quad (6.36)$$

Na rysunkach 6.2 i 6.3 przedstawiono zależność parametrów łamania nierówności CHSH $r(\varrho)$ dla stanów początkowych i dla stanów końcowych od α i p , a na rysunku 6.4 przedstawiono granicę obszarów parametrów α i p , w których omówione stany łamią nierówność CHSH. Zauważmy, że istnieje taki obszar parametrów, dla których stany początkowe nie łamią nierówności CHSH, a stan końcowy łamie tę nierówność. Oznacza to, że odpowiedź na pytanie postawione przez Sena i innych jest twierdząca [Sen(De) *et al.*, 2005]. Warto jednak podkreślić, że otrzymywanie stanu łamiącego nierówność CHSH ze stanów nie łamiących tej nierówności za pomocą procesu wymiany splątania ma charakter probabilistyczny, tzn. kończy się sukcesem w przypadku, gdy uczestnik wykonujący pomiar Bella otrzyma dwa spośród czterech wyników pomiarów.

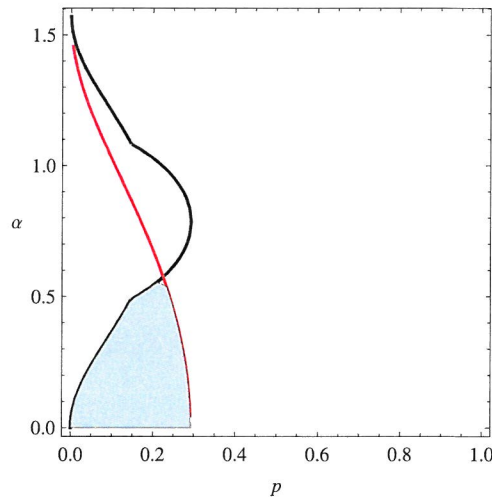
6.2. WYMIANA SPLĄTANIA, A ŁAMANIE NIERÓWNOŚCI CHSH



Rysunek 6.2. Zależność parametru łamania $r(p)$ od α oraz p dla stanów początkowych, źródło [Wójcik et al., 2010].



Rysunek 6.3. Zależność parametru łamania $r(p)$ od α oraz p dla stanów końcowych, źródło [Wójcik et al., 2010].



Rysunek 6.4. Granica obszaru parametrów α i p , w którym omówione stany początkowe łamią nierówność CHSH (czarna linia) oraz granica obszaru parametrów α i p , w którym omówione stany końcowe łamią nierówność CHSH (czerwona linia). W obszarze zaznaczonym kolorem niebieskim stany początkowe nie łamią nierówności CHSH, a stany końcowe łamią tę nierówność.

Podsumowanie

Niniejsza praca została poświęcona zwiększaniu prawdopodobieństwa i wierności wielokrotnej teleportacji kwantowej. Zbadano w niej własności wielokrotnej liniowo-optycznej teleportacji kwantowej wykonywanej za pomocą protokołu KLM. Za jeden z głównych wyników należy uznać wykazanie, że błędy wprowadzone w poprzednich teleportacjach mogą zostać poprawione przez błędy wprowadzone w następnych teleportacjach. W konsekwencji można stwierdzić, że dla dostatecznie dużej liczby teleportacji stany niemaksymalnie splątane dają większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji. Warto podkreślić, że w przypadku pojedynczej teleportacji stany maksymalnie splątane są optymalne. Obserwacja ta prowadzi do wniosku, że prawdopodobieństwo wiernej teleportacji jest niemultiplikatywne i że niemultiplikatywność ta rośnie wraz z liczbą wykonywanych po sobie teleportacji.

W pracy wprowadzono również protokół dostosowanej teleportacji kwantowej. Protokół ten dotyczy wielu teleportacji wykonywanych po sobie, w którym wybór stanu splątanego użytego do kolejnej teleportacji zależy od wyników pomiarów uzyskanych podczas wcześniejszych teleportacji. W przypadku podwójnej teleportacji

wykonywanej za pomocą protokołu KLM można osiągnąć większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż w przypadku wykonania teleportacji za pomocą oryginalnego protokołu KLM z użyciem stanów maksymalnie splątanych. Udowodniono, że istnieją stany, dla których protokół dostosowanej teleportacji KLM daje większe prawdopodobieństwo wiernej teleportacji niż oryginalny protokół teleportacji KLM z użyciem identycznych stanów (zarówno maksymalnie jak i niemaksymalnie) splątanych.

Kolejne zagadnienie rozważane w pracy odnosi się do podwójnej teleportacji qubitów wykonywanej za pomocą lokalnych operacji kwantowych z użyciem pewnych dwuqubitowych stanów mieszanych. Pokazano tutaj jak za pomocą zmodyfikowanego protokołu wymiany splątania można zwiększyć ułamek stanu maksymalnie splątanego i w konsekwencji wierność podwójnej teleportacji. Otrzymane rezultaty porównano z wynikami niezależnego zwiększania wierności każdej z pojedynczych teleportacji i pokazano, że w niektórych przypadkach metoda oparta o protokół wymiany splątania daje większą wierność podwójnej teleportacji. Pokazano wreszcie, że za pomocą protokołu wymiany splątania z dwóch stanów niełamających nierówności Clausera, Horne'a, Shimony'ego i Holta, można otrzymać stan, który łamie tę nierówność.

Bibliografia

- [Acin *et al.*, 2007] Acin A., J.I. Cirac, M. Lewenstein, Entanglement percolation in quantum networks, *Nature Phys.* **3**, 256 (2007).
- [Ardehali, 1992] Ardehali M., Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with the number of particles, *Phys. Rev. A* **46**, 5375 (1992).
- [Aspect, 1999] Aspect A., Bell's inequality test: more ideal than ever, *Nature* **398**, 189 (1999).
- [Aspect *et al.*, 1982] Aspect A., P. Grangier, G. Roger, Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm *Gedankenexperiment*: A new violation of Bell's inequalities, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [Aspect *et al.*, 1981] Aspect A., P. Grangier, G. Roger, Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
- [Barrett *et al.*, 2004] Barrett M.D., J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W.M. Itano, J.D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, D.J. Wineland, Deterministic quantum teleportation of atomic qubits, *Nature* **429**, 737 (2004).

- [Belinskii i Klyshko, 1993] Belinskii A.V., D.N. Klyshko, Interference of light and Bell's theorem, *Phys. Usp.* **36**, 653 (1993).
- [Bell, 1964] Bell J.S., On the Einstein Podolsky Rosen paradox, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [Bennett *et al.*, 1993] Bennett C.H., G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [Boschi *et al.*, 1998] Boschi D., S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu, Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical Einstein–Podolsky–Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998).
- [Bose *et al.*, 1998] Bose S., V. Vedral, P.L. Knight, Multiparticle generalization of entanglement swapping, *Phys. Rev. A* **57**, 822 (1998).
- [Bose *et al.*, 1999] Bose S., V. Vedral, P.L. Knight, Purification via entanglement swapping and conserved entanglement, *Phys. Rev. A* **60**, 194 (1999).
- [Bouwmeester *et al.*, 1997] Bouwmeester D., J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [Clauser *et al.*, 1969] Clauser J.F., M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).

- [Dieks, 1982] Dieks D., Communication by EPR devices, *Phys. Lett. A.* **92**, 271 (1982).
- [Franson *et al.*, 2002] Franson J.D., M.M. Donegan, M.J. Fitch, B.C. Jacobs, T.B. Pittman, High-fidelity quantum logic operations using linear optical elements, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137901 (2002).
- [Freedman i Clauser, 1972] Freedman S.J., J.F. Clauser, Experimental test of local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).
- [Fry i Thompson, 1976] Fry E.S., R.C. Thompson, Experimental test of local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465 (1976).
- [Gisin, 1996] Gisin N., Hidden quantum nonlocality revealed by local filters, *Phys. Lett. A* **210**, 151 (1996).
- [Gisin i Bechmann-Pasquinucci, 1998] Gisin N., H. Bechmann-Pasquinucci, Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for n qubits, *Phys. Lett. A* **246**, 1 (1998).
- [Grudka i Modławska, 2008] Grudka A., J. Modławska, Optimal state in the Knill–Laflamme–Milburn scheme of linear optical teleportation, *Phys. Rev. A* **77**, 014301 (2008).
- [Grudka i Modławska, 2010] Grudka A., J. Modławska, Nonmultiplicativity of probability of faithful teleportation in the Knill–Laflamme–Milburn scheme, *NATO Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security* **26**, 064302 (2010).

- [Hardy i Song, 2000] Hardy L., D.D. Song, Entanglement-swapping chains for general pure states, Phys. Rev. A **62**, 052315 (2000).
- [Horodecki *et al.*, 1999] Horodecki M., P. Horodecki, R. Horodecki, General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation, Phys. Rev. A **60**, 1888 (1999).
- [Horodecki *et al.*, 1995] Horodecki R., P. Horodecki, M. Horodecki, Violating Bell inequality by mixed spin- $\frac{1}{2}$ states: necessary and sufficient condition, Phys. Lett. A **200**, 340 (1995).
- [Horodecki *et al.*, 2009] Horodecki R., P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Quantum entanglement, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [Knill *et al.*, 2001] Knill E., R. Laflamme, G.J. Milburn, A scheme for efficient quantum computation with linear optics, Nature **409**, 46 (2001).
- [Lütkenhaus *et al.*, 1999] Lütkenhaus N., J. Calsamiglia, K.A. Suominen, Bell measurements for teleportation, Phys. Rev. A **59**, 3295 (1999).
- [Marcikic *et al.*, 2003] Marcikic I., H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, N. Gisin, Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths, Nature **421**, 509 (2003).
- [Mermin, 1990] Mermin N.D., Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states, Phys. Rev. Lett. **65**, 1838 (1990).

-
- [Modławska, 2009] Modławska J., Praca magisterska, pt. *Optymalny stan w schemacie Knilla-Laflamme'a-Milburna liniowo-optycznej teleportacji*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza (2009).
- [Modławska i Grudka, 2009] Modławska J., A. Grudka, Adaptive quantum teleportation, *Phys. Rev. A* **79**, 064302 (2009).
- [Modławska i Grudka, 2008a] Modławska J., A. Grudka, Increasing singlet fraction with entanglement swapping, *Phys. Rev. A* **78**, 032321 (2008).
- [Modławska i Grudka, 2008b] Modławska J., A. Grudka, Nonmaximally entangled states can be better for multiple linear optical teleportation, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 110503 (2008).
- [Nielsen i Chuang, 2000] Nielsen M.A., I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [Ou i Mandel, 1988] Ou Z.Y., L. Mandel, Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50 (1988).
- [Pan *et al.*, 1998] Pan J.W., D. Bouwmeester, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891 (1998).
- [Perseguers *et al.*, 2008] Perseguers S., J.I. Cirac, A. Acin, M. Lewenstein, J. Wehr, Entanglement distribution in pure-state quantum networks, *Phys. Rev. A* **77**, 022308 (2008).

- [Popescu, 1995] Popescu S., Bell's inequalities and density matrices: revealing "Hidden" nonlocality, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2619 (1995).
- [Riebe *et al.*, 2004] Riebe M., H. Häffner, C.F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G.P.T. Lancaster, T.W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D.F.V. James, R. Blatt, Deterministic quantum teleportation with atoms, *Nature* **429**, 734 (2004).
- [Rowe *et al.*, 2001] Rowe M.A., D. Kielpinski, V. Meyer, C.A. Sackett, W.M. Itano, C. Monroe, D.J. Wineland, Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection, *Nature* **409**, 791 (2001).
- [Roy i Singh, 1991] Roy S.M., V. Singh, Tests of signal locality and Einstein-Bell locality for multiparticle systems, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2761 (1991).
- [Sen(De) *et al.*, 2005] Sen(De) A., U. Sen, Č. Brukner, V. Bužek, M. Żukowski, Entanglement swapping of noisy states: a kind of superadditivity in nonclassicality, *Phys. Rev. A* **72**, 042310 (2005).
- [Spedalieri *et al.*, 2006] Spedalieri F.M., H. Lee, J.P. Dowling, High-fidelity linear optical quantum computing with polarization encoding, *Phys. Rev. A* **73**, 012334 (2006).
- [Tapster *et al.*, 1994] Tapster P.R., J.G. Rarity, P.C.M. Owens, Violation of Bell's inequality over 4 km of optical fiber, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1923 (1994).
- [Tittel *et al.*, 1998] Tittel W., J. Brendel, H. Zbinden, N. Gisin, Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563 (1998).

-
- [Ursin *et al.*, 2004] Ursin R., T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther, A. Zeilinger, Quantum teleportation across the Danube, *Nature* **430**, 849 (2004).
- [Ursin *et al.*, 2007] Ursin R., F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Ömer, M. Fürst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Entanglement-based quantum communication over 144 km, *Nature Phys.* **3**, 481 (2007).
- [Verstraete i Verschelde, 2003] Verstraete F., H. Verschelde, Optimal teleportation with a mixed state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 097901 (2003).
- [Weihs *et al.*, 1996] Weihs G., M. Reck, H. Weinfurter, A. Zeilinger, All-fiber three-path Mach–Zehnder interferometer, *Opt. Lett.* **21**, 302 (1996).
- [Weihs *et al.*, 1998] Weihs G., T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039 (1998).
- [Werner, 1989] Werner R.F., Quantum states with Einstein–Podolsky–Rosen correlations admitting a hidden-variable model, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [Wootters i Żurek, 1982] Wootters W.K., W.H. Zurek, A single quantum cannot be cloned, *Nature* **299**, 802 (1982).

- [Wójcik *et al.*, 2010] Wójcik A., J. Modławska, A. Grudka, M. Czechlewski, Violation of Clauser–Horne–Shimony–Holt inequality for states resulting from entanglement swapping, *Phys. Lett. A* **374**, 4831 (2010).
- [Żukowski *et al.*, 1993] Żukowski M., A. Zeilinger, M.A. Horne, A.K. Ekert, “Event-Ready-Detectors” Bell experiment via entanglement swapping, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287 (1993).
- [Żukowski *et al.*, 1995] Żukowski M., A. Zeilinger, H. Weinfurter, Entangling photons radiated by independent pulsed sources, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 91 (1995).