Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Agata Panfil

Lokalna struktura geometryczna wybranych funkcyjnych przestrzeni Banacha

Rozprawa Doktorska
z Nauk Matematycznych w zakresie Matematyki

Promotor:
dr hab. inż. Paweł Kolwicz, prof. nadzw. PP

Promotor pomocniczy:
dr Maciej Ciesielski

Poznań 2016

Kochanemu Szymonowi,
Synom Jankowi i Kubusiowi,
Córeczce Hance.

Podziękowania

Pragnę podziękować w szczególności mojemu Promotorowi, Profesorowi Pawłowi Kolwiczowi, za wieloletnią współpracę naukową, wszechstronną pomoc i wskazówki, dzięki którym mogła powstać niniejsza praca. Za poświęcony czas, okazaną wyrozumiałość i cierpliwość, a także za życzliwą atmosferę towarzyszącą wspólnej pracy i przygotwaniu rozprawy.

Promotorowi pomocniczemu, Doktorowi Maciejowi Ciesielskiemu, serdecznie dziękuję za pomoc, wspólną pracę naukową i cenne uwagi w przygotowaniu tej pracy.

Wszystkim członkom Zakładu Teorii Przestrzeni Funkcyjnych Wydziału Matematyki i Informatyki UAM, w szczególności Profesorowi Henrykowi Hudzikowi, a także Profesorowi Ryszardowi Płuciennikowi składam podziękowania za cenne uwagi i wsparcie podczas przygotowywania publikacji oraz rozprawy.

Mężowi i moim Dzieciom oraz Rodzicom, Rodzinie i Przyjaciołom dziękuję serdecznie za wyrozumiałość, wsparcie i cierpliwość, jakimi darzyli mnie podczas pracy naukowej oraz powstawania niniejszej rozprawy.

Spis treści

Wstęp

Geometria przestrzeni Banacha, a w szczególności geometria kuli została zapoczątkowana przez J. A. Clarksona w 1936 roku w pracy [17]. Od tego czasu jest szeroko rozwijaną gałęzią analizy funkcjonalnej (zob. [31], [32]).

Własności geometryczne znalazły zastosowanie w takich dziedzinach matematyki, jak: teoria aproksymacji, teoria punktu stałego, probabilistyka, teoria optymalizacji (zob. [2], [9], [47], [57], [63]).

Ważną klasą przestrzeni Banacha są kraty Banacha. Teorię krat Banacha zapoczątkowało trzech matematyków: L. V. Kantorowicz, F. Riesz i H. Freudenthal (zob. [67]) w drugiej połowie lat trzydziestych ubiegłego wieku. W rozprawie zostaną przedstawione wyniki dotyczące pewnych własności geometrycznych w wybranych klasach krat Banacha (symetryczne przestrzenie Banacha i uogólnione przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego).

Bardzo ważną klasą krat Banacha są przestrzenie symetryczne nad przestrzenią z miarą Lebesgue'a na przedziale $[0, 1)$ albo $[0, \infty)$ (zob. [3], [56], [58]). Również ich podklasy (przestrzenie Orlicza, Lorentza, Marcinkiewicza) cieszą się niesłabnącym zainteresowaniem. Taką podklasą są przestrznie Lorentza $\Gamma_{p,w}$, które pojawiły się w naturalny sposób w teorii interpolacji, jako efekt K–metody Lionsa–Peetre. Ściślej mówiąc, są to przestrzenie interpolacyjne między L^1 a L^∞. Powiązane są one również z klasycznymi przestrzeniami Lorentza $\Lambda_{p,w}$. Mamy bowiem $\Gamma_{p,w} \subset \Lambda_{p,w}$, a równość zbiorów zachodzi, gdy operator Hardy'ego zdefiniowany wzorem $H^1(x) = x^{**}$ jest ograniczony jako $H^1 \colon \Lambda_{p,w} \to \Lambda_{p,w}$, co jest równoważne spełnianiu przez funkcję wagową w tzw. warunku B_p. Kolejny związek między nimi ukazuje E. Sawyer w pracy [66] dowodząc, że odpowiednia przestrzeń $\Gamma_{p',\widetilde{w}}$ jest przestrzenią dualną w sensie Köthego dla przestrzeni $\Lambda_{p,w}$. Własności przestrzeni Lorentza $\Gamma_{p,w}$ są ostatnimi laty szeroko badane (zob. [13], [14], [16], [43]). Przestrzenie $\Gamma_{p,w}$ są stosowane w rozwijaniu teorii aproksymacji, na przykład do poszukiwania rozszerzonych elementów najlepszego przybliżenia w przestrzeni L_0 (zob. [12]).

Drugą klasą przestrzeni omawianych w rozprawie są uogólnione przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego. Aby przedstawić ich historię należy sięgnąć do jednych z najwcześniej zdefiniowanych przestrzeni funkcyjnych, tj. przestrzeni Lebesgue'a

L_p. Jedno z uogólnień tych przestrzeni zawdzięczamy W. Orliczowi, który, na początku lat trzydziestych ubiegłego wieku, rozważał do ich zdefiniowania ogólniejszą klasę funkcji wypukłych zamiast funkcji potęgowych. Inny punkt widzenia w uogólnianiu przestrzeni Lebesgue'a zaprezentował G. G. Lorentz, korzystając z funkcji wagowej. Kolejnym krokiem było wprowadzenie w 1964 roku, przez A. P. Calderóna, interpolacyjnej konstrukcji $E^{1-s}F^s$ (zob. [4]). Idąc dalej Calderón zdefiniował przestrzenie $\rho(E, L^\infty)$ jako uogólnienie przestrzeni Orlicza. Również G. J. Łozanowski dostrzegł znaczenie i potencjał tej konstrukcji poświęcając jej wiele prac i uogólniając ją w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku do postaci $\rho(E, F)$. Przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego stanowią przedmiot intensywnych badań już od kilku dekad. Szczególnym ich przypadkiem są przestrzenie $E_\varphi = \rho_\varphi(E, L^\infty)$ (zdefiniowane przy pomocy funkcji Orlicza φ), które następnie można uogólnić w sposób analogiczny do uogólnienia przestrzeni Orlicza do przestrzeni Musielaka–Orlicza. Uogólnienie to zapoczątkowali P. Foralewski i H. Hudzik w pracach [22], [23]. W pracy będziemy badać porządkową ciągłość elementu uogólnionej przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego E_φ.

Podstawową własnością w geometrii przestrzeni Banacha jest ścisła wypukłość (SC). Jej odpowiednikiem w geometrii krat Banacha jest ścisła monotoniczność (SM). Mianowicie, jeśli krata Banacha E jest ściśle wypukła, to jest ściśle monotoniczna. Ponadto implikacja przeciwna zachodzi, gdy w definicji ścisłej wypukłości ograniczymy się do porównywalnych par na stożku dodatnim E^+ ([34]). Analogiczne związki dla lokalnej jednostajnej wypukłości oraz dolnej i górnej jednostajnej monotoniczności ([34]). Zauważmy ponadto, że rola ścisłej wypukłości (refleksywności) w problemach najlepszej aproksymacji w przestrzeniach Banacha jest taka sama jak rola ścisłej monotoniczności (porządkowej ciągłości) w problemach zdominowanej najlepszej aproksymacji w kratach Banacha ([57]). Lokalne oraz globalne własności monotonicznościowe i wypukłościowe były przedmiotem intensywnych badań w ostatnich dekadach ([5]-[8], [10, 13, 15, 16], [18]-[29], [33]-[41], [43, 45, 46, 48, 49], [52]-[55], [57, 61].

Oczywiście badanie globalnych własności nie zawsze jest wystarczające. W sytuacji, gdy przestrzeń Banacha (krata Banacha) nie posiada globalnej własności, naturalne jest pytanie, kiedy ustalony punkt tej przestrzeni posiada odpowiednią własność. W przypadku ścisłej wypukłości (ścisłej monotoniczności) prowadzi to do pojęcia punktu ekstremalnego lub SU punktu (punktu dolnej i górnej monotoniczności). Podobnie, dla lokalnej jednostajnej wypukłości (górnej i dolnej jednostajnej monotoniczności) rozważa się odpowiednie punkty zwane punktami LUR (ULUM oraz LLUM punktami). W naturalny sposób pojawia się tutaj również pojęcie punktu porządkowej ciągłości oraz punktu niekwadratowości.

Ważnym pytaniem jest, czy własność geometryczna P kraty E może być równoważnie rozważana na stożku dodatnim E^+. W ujęciu lokalnym prowadzi to do pytania, czy punkt $x \in E$ ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|$ ma własność A. Bardziej subtelnym i trudniejszym jest pytanie, czy w przestrzeni symetrycznej E element x ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy x^* (nierosnące przestawienie elementu x) ma własność A. Celem pracy jest znalezienie odpowiedzi na to ostatnie pytanie dla punktów OC, LM, UM oraz $LLUM$. Ponadto celem niniejszej rozprawy jest scharakteryzowanie punktów OC, LM, UM, $LLUM$, $ULUM$ oraz punktów niekwadratowości w wybranych funkcyjnych przestrzeniach Banacha. Dodatkowo, w pracy zostaną wykazane role punktów OC, LM oraz UM w problemach lokalnej zdominowanej najlepszej aproksymacji w kratach Banacha.

Niniejsza rozprawa składa się z trzech rozdziałów.

W pierwszym rozdziale wprowadzone są podstawowe oznaczenia używane w pracy, wprowadzone są przestrzenie Köthego, a także podane są definicje punktu porządkowej ciągłości i punktów monotoniczności (dolnej monotoniczności, górnej monotoniczności, dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności oraz górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności) wraz z definicjami odpowiednich własności globalnych.

W Rozdziale 2 wprowadzone są najpierw podstawowe pojęcia i własności konieczne dla zdefiniowania i badania przestrzeni symetrycznych i ich szczególnych przypadków, tj. przestrzeni Lorentza $\Gamma_{p,w}$ oraz $\Lambda_{p,w}$.

W Rozdziale 2.1 zaprezentowane są wyniki ogólne dotyczące lokalnej struktury przestrzeni symetrycznych. Rozważane są zależności między posiadaniem danej własności przez element x, a posiadaniem jej przez jego nierosnące przestawienie x^*.

Następnie, w Rozdziale 2.2, przedstawione są warunki konieczne i dostateczne punktów monotoniczności i punktów porządkowej ciągłości w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$. Zastosowanie tych wyników do przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\phi,w}$, a także wnioski dotyczące własności globalnych przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$ znajdują się w Rozdziale 2.3.

Rozdziały 2.1-2.3 powstały na podstawie publikacji [15].

W dalszej kolejności zaprezentowane są wyniki dotyczące punktów niekwadratowości w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ wraz z wnioskami dla globalnej własności zarówno dla przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ jak i $\left(\Gamma_{p,w}\right)_a$. Wyniki Rozdziału 2.4 pochodzą z publikacji [53].

W Rozdziale 2.5 omówiony jest problem najlepszej lokalnej zdominowanej aproksymacji zarówno dla siatek Banacha jak i przestrzeni symetrycznych. Rozdział ten został opracowany został na bazie publikacji [15].

Rozdział 3 oparty jest o wyniki z pracy [51] i dotyczy uogólnionych przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Na początku przedstawione są definicje i własności funkcji Orlicza i jej uogólnienia do funkcji Musielaka–Orlicza, definicje warunków globalnych Δ_2^E dla przestrzeni E zarówno nad bezatomową jak i czysto atomową przestrzenią miary. Wprowadzony zostaje także warunek lokalny $\Delta_2^E(x)$ dla danego elementu x będący podstawowym narzędziem w badaniu porządkowej ciągłości elementu uogólnionej przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Głównym wynikiem tego rozdziału są warunki konieczne i dostateczne tej własności elementu x. Z tego twierdzenia wywnioskowane są znane wcześniej wyniki dotyczące porządkowej ciągłości elementu przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego (dla funkcji Orlicza bez parametru), a także przestrzeni Orlicza–Lorentza.

W rozważaniach dopuszcza się:

– zdegenerowane funkcje Musielaka–Orlicza (tzn. zerujące się poza zerem i „skaczące” do nieskończoności),

– przestrzeń miary jako sumę prostą części bezatomowej oraz czysto atomowej, co powoduje maksymalną ogólność rozważanych przestrzeni i spore wyzwania techniczne w dowodach.

Wyniki publikacji, na których opiera się niniejsza rozprawa ([15], [51], [52], [53]) znajdują swoje zastosowanie i są cytowane w pracach [16], [11], [42].

1. Pojęcia i definicje wstępne

Wprowadzimy teraz oznaczenia, które będą obowiązywać w niniejszej rozprawie:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}$ – zbiory liczb rzeczywistych, rzeczywistych nieujemnych i naturalnych, odpowiednio,

$(X, \|\cdot\|)$ – przestrzeń Banacha,

$S_X, S(X)$ – sfera jednostkowa przestrzeni X, tj. $S_X = S(X) = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$,

X^+ – dodatni stożek kraty X, tzn. $X^+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}$,

(T, Σ, μ) – σ-skończona, zupełna przestrzeń miary,

$L^0(T)$, – przestrzeń liniowa wszystkich klas równoważności, ze względu na relację równości μ prawie wszędzie (co oznaczymy jako μ- p.w. lub po prostu p.w.), Σ-mierzalnych funkcji rzeczywistych na T,

$L^0(I)$ – przestrzeń liniowa wszystkich klas równoważności względem relacji równości m-prawie wszędzie rzeczywistych funkcji mierzalnych w sense Lebesgue'a zdefiniowanych na $I = [0, \alpha)$, gdzie $\alpha = 1$ lub $\alpha = \infty$ oraz m jest miarą Lebesgue'a,

L^0 – w rozdziale 2 przez L^0 rozumieć będziemy $L^0(I)$, a w Rozdziale 3, $L^0(T)$,

l_0 – przestrzeń liniowa wszystkich ciągów rzeczywistych z miarą liczącą m,

$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad t \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad t \notin A \end{cases}$ – funkcja charakterystyczna zbioru A,

$A = B$ – równość zbiorów z dokładnością do zbioru miary zero,

$\mathcal{S}(x)$ – nośnik elementu, tj. $\mathcal{S}(x) = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$,

$\int x = \int\limits_I x(t)dt$,

$\left(\int\limits_A + \int\limits_B\right) f = \int\limits_A f + \int\limits_B f.$

W rozdziałach 2 i 3 przyjmujemy zasadę, że twierdzenia, lematy oraz uwagi własne rozprawy pochodzące z prac [15], [51], [52], [53] autorki rozprawy nie będą dodatkowo cytowane numerem artykułu z bibliografii. Pozostałe wyniki obce są cytowane numerem z literatury. Wszystkie definicje pojęć i własności rozważanych w pracy pochodzą z odpowiednich pozycji literatury.

Definicja 1.1 ([67]). Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową (liniową) i $\leqslant$ - relacją częściowego porządku w E. Parę $E = (E, \leqslant)$ nazywamy siatką wektorową jeśli relacja $\leqslant$ spełnia następujące własności dla $x, y, z \in E$ i $a \in \mathbb{R}$:

(1) jeśli $x \leqslant y$ to $x + z \leqslant y + z$,

(2) jeśli $x \geqslant \theta$ i $a \geqslant 0$, to $ax \geqslant \theta$,

gdzie θ jest elementem zerowym przestrzeni E oraz dla każdego zbioru $\{x, y\} \subset E$ mamy $\sup\{x, y\} = x \vee y \in E$ lub, równoważnie, $\inf\{x, y\} = x \wedge y \in E$.

W języku polskim siatki Banacha określa się również mianem krat Banacha.

Definicja 1.2 ([67]). Parę $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy siatką Banacha, jeśli E jest siatką wektorową, a norma $\|\cdot\|_E$ w przestrzeni E jest zupełna.

W przestrzeni $L^0(T)$ z miarą μ, relacja $\leqslant$ wprowadzona wzorem

$$x \leqslant y, \quad \text{jeśli} \quad x(t) \leqslant y(t) \quad \text{dla} \quad \mu - \text{p.w. } t \in T$$

jest relacją częściowego porządku.

Definicja 1.3. Siatkę Banacha $(E, \|\cdot\|_E)$ nazywamy przestrzenią Köthego, jeśli jest podprzestrzenią liniową $L^0(T)$ spełniającą następujące warunki:

(1) Jeśli $x \in L^0$, $y \in E$ oraz $|x| \leqslant |y|$ p.w., to $x \in E$ i $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

(2) Istnieje funkcja $x \in E$ ściśle dodatnia na T.

Warunek (1) nazywany jest często warunkiem ideału. Element, o którym mowa w warunku (2) nazywany jest słabą jedynką.

Uwaga 1.4. W literaturze tak zdefiniowane przestrzenie funkcjonują również jako funkcyjne przestrzenie Banacha. W niniejszej pracy rozważamy jednak zarówno funkcyjne jak i ciągowe przestrzenie Köthego.

Przestrzeń Köthego nazywamy funkcyjną (ciągową) przestrzenią Köthego gdy rozważamy ją nad przestrzenią miary bezatomowej (lub odpowiednio nad przestrzenią miary czysto atomowej z miarą liczącą).

W pracy będziemy pisać $\|\cdot\|$ zamiast $\|\cdot\|_E$, jeśli będzie oczywiste o jakiej przestrzeni i normie jest mowa.

Niech E, F będą dwiema przestrzeniami Köthego. Jeśli $E \subset F$, to z twierdzenia o domkniętym wykresie wynika, że włożenie to jest ciągłe, tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $x \in E$,

$$\|x\|_F \leqslant M \|x\|_E . \tag{1}$$

Wtedy będziemy pisali $E \overset{M}{\hookrightarrow} F$. Jeśli $E \subset F$ i $F \subset E$, to przestrzenie te są izomorficzne, co oznaczamy $E = F$. Jeżeli dodatkowo dla każdego $x \in E = F$ mamy $\|x\|_E = \|x\|_F$, to piszemy $E \equiv F$.

Mówimy, że E ma własność Fatou, tzn. dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $0 \leqslant x_n \leqslant x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $x \in L^0$, $x_n \uparrow x$ p.w. oraz $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$, mamy $x \in E$ i $\|x_n\|_E \uparrow \|x\|_E$.

Definicja 1.5. Element $x \in E$ nazywamy punktem porządkowej ciągłości ($x \in E_a$), jeżeli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ i $x_n \to 0$ p.w., mamy $\|x_n\|_E \to 0$. Przez E_a oznaczamy podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych w E.

Przestrzeń E jest porządkowo ciągła (co oznaczamy przez $E \in (OC)$), jeżeli każdy element jest punktem porządkowej ciągłości, tzn. $E = E_a$.

Warto zauważyć, że $x \in E_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek $\left\|x\chi_{A_n}\right\|_E \downarrow 0$ jest spełniony dla każdego ciągu zbiorów A_n takich, że $A_n \searrow \emptyset$ (tzn. $A_n \supset A_{n+1}$ oraz $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$) (zob. [3]).

Definicja 1.6. Mówimy, że element $x \in E$ jest punktem Kadeca–Klee względem globalnej zbieżności wg miary (x jest H_g punktem), jeśli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E$ warunki $x_n \overset{m}{\to} x$ oraz $\|x_n\| \to \|x\|$ implikują, że $\|x_n - x\| \to 0$.

Przestrzeń E ma własność Kadeca–Klee względem globalnej zbieżności wg miary (co oznaczamy przez $E \in (H_g)$) jeśli każdy element $x \in E$ jest H_g punktem.

Definicja 1.7. Mówimy, że element $x \in E^+\backslash\{0\}$ jest

1. Punktem dolnej monotoniczności (x jest LM punktem), jeżeli dla każdego $y \in E^+$ takiego, że $y \leqslant x$ i $y \neq x$ zachodzi $\|y\|_E < \|x\|_E$.

2. Punktem górnej monotoniczności (x jest UM punktem), jeżeli dla każdego $y \in E^+$ takiego, że $x \leqslant y$ i $y \neq x$ mamy $\|x\|_E < \|y\|_E$.

3. Punktem dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (x jest LLUM punktem), jeżeli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $0 \leqslant x_n \leqslant x$ i $\|x_n\| \to \|x\|$ zachodzi $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Punktem górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (x jest ULUM punktem), jeżeli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $x \leqslant x_n$ i $\|x_n\| \to \|x\|$ mamy $\|x_n - x\| \to 0$.

Przestrzeń E jest ściśle monotoniczna (ozn. $E \in (SM)$), jeżeli dla każdego $0 \leqslant y \leqslant x$ i $y \neq x$ mamy $\|y\|_E < \|x\|_E$.

Uwaga 1.8 ([34]). Następujące warunki są równoważne:

1. $E \in (SM)$.

2. Każdy element $x \in E^+ \setminus \{0\}$ jest LM punktem.

3. Każdy element $x \in E^+ \setminus \{0\}$ jest UM punktem.

2. Przestrzenie symetryczne

Ważną podklasą przestrzeni Köthego są przestrzenie symetryczne. Będziemy rozważać przestrzenie symetryczne określone na I z miarą Lebesgue'a (zob. (2)). W niniejszym rozdziale, o ile nie będzie napisane inaczej, przez I będziemy rozumieć przedział

$$I = [0, \alpha), \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha = 1 \quad \text{lub} \quad \alpha = \infty. \tag{2}$$

Symbol α będzie oznaczał koniec tego przedziału.

Definicja 2.1 ([3],[56]). Funkcję dystrybucji d_x elementu $x \in L^0(I)$ definiujemy wzorem

$$\mathrm{d}_x(\lambda) = \mathrm{m}\{t \in I \colon |x(t)| > \lambda\} \tag{3}$$

dla każdego $\lambda \geqslant 0$.

Nierosnące przestawienie funkcji $x \in L^0(I)$ definiujemy jako

$$x^*(t) = \inf\{\lambda > 0 \colon \ \mathrm{d}_x(\lambda) \leqslant t\} \tag{4}$$

dla każdego $t \geqslant 0$.

Uwaga 2.2. W przypadku przestrzeni ciągowych, gdy $x \in l_0$, we wzorze na funkcję dystrybucji (3) symbol m oznacza miarę liczącą, natomiast definicja elementu x^* dana wzorem (4) przyjmuje postać

$$x^*(i) = \inf\{\lambda > 0 \colon \ \mathrm{d}_x(\lambda) < i\} \tag{5}$$

dla każdego $i \in \mathbb{N}$ (zob. [24]). Konieczność zastosowania nierówności ostrej $<$ we wzorze (5) (inaczej niż we wzorze (4)) wynika z faktu, że zastosowanie nierówności $\leqslant$ powoduje dla niektórych elementów utratę informacji pomiędzy elementem x a jego nierosnącym przestawieniem x^*, nawet w przypadku, gdy $\mathcal{S}(x)$ jest zbiorem skończonym.

Definicja 2.3. Mówimy, że dwie funkcje $x, y \in L^0(I)$ są równomierzalne (ozn. $x \sim y$), jeżeli $\mathrm{d}_x(\lambda) = \mathrm{d}_y(\lambda)$ dla wszystkich $\lambda \geqslant 0$. Równoważnie, $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^* = y^*$.

W niniejszej rozprawie będziemy przyjmować następujące oznaczenia:

$$x^*(\infty) := \lim_{t\to\infty} x^*(t), \quad \text{jeśli} \quad \mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) = \infty,$$
$$x^*(\infty) := 0, \quad \text{jeśli} \quad \mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) < \infty.$$

Definicja 2.4 ([3],[10],[56]). Przestrzeń Köthego E nazywamy funkcyjną przestrzenią symetryczną (niezmienniczą ze względu na przestawienia), jeśli dla wszystkich $x \in L^0(I)$ i $y \in E$ takich, że $x \sim y$, mamy, że $x \in E$ oraz $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Analogicznie definiujemy ciągowe przestrzenie symetryczne biorąc $x \in l_0$ i $y \in E$.

Uwaga 2.5 (Twierdzenie 4.1, [56]). Każda nietrywialna symetryczna przestrzeń Köthego E jest przestrzenią pośrednią pomiędzy $L^1(I)$ i $L^\infty(I)$, tzn.

$$L^1(I) \cap L^\infty(I) \overset{C_1}{\hookrightarrow} E \overset{C_2}{\hookrightarrow} L^1(I) + L^\infty(I),$$

gdzie $C_1 = 2\left\|\chi_{[0,1]}\right\|_E$, $C_2 = 1/\left\|\chi_{[0,1]}\right\|_E$ oraz

$$\|x\|_{L^1(I)\cap L^\infty(I)} = \max(\|x\|_{L^1}, \|x\|_{L^\infty}),$$
$$\|x\|_{L^1(I)+L^\infty(I)} = \inf\left\{\|x_0\|_{L^1} + \|x_1\|_{L^\infty} : x = x_0 + x_1, x_0 \in L^1, x_1 \in L^\infty\right\} = \int_0^1 x^*(s)ds$$

Twierdzenie 2.6 ([3],[56]). Niech $x, y, x_n \in L^0$ i $a \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje d_x oraz x^* są nieujemne, nierosnące i prawostronnie ciągłe na $[0, \infty)$. Ponadto

1. Jeżeli $|y| \leqslant |x|$, to $\mathrm{d}_y \leqslant \mathrm{d}_x$ i $y^* \leqslant x^*$.
2. Dla dowolnych $t_1, t_2 \geqslant 0$ mamy
$$\mathrm{d}_{x+y}(t_1 + t_2) \leqslant \mathrm{d}_x(t_1) + \mathrm{d}_y(t_2), \quad (x + y)^*(t_1 + t_2) \leqslant x^*(t_1) + y^*(t_2).$$
3. $x \sim x^*$.
4. Jeśli $|x_n| \uparrow |x|$ p.w. to $d_{x_n} \uparrow d_x$ i $x_n^* \uparrow x^*$.
5. $(ax)^* = |a|x^*$.
6. $(|x|^p)^* = (x^*)^p$ dla $0 < p < \infty$.

Twierdzenie 2.7 (Nierówność Hardy'ego–Littlewooda, Twierdzenie 2.2 w [3], Własność 13°, str. 68 w [56]). Dla $x, y \in L^0(I)$, $I = [0, \alpha)$, $\alpha = 1$ lub $\alpha = \infty$ mamy

$$\int_0^\alpha xy \leqslant \int_0^\alpha x^*y^*.$$

Lemat 2.8 ([56], Własność 7°, str. 64). Niech $x \in L^0[0,\infty)$. Jeśli $x^*(t) > x^*(\infty)$, to istnieje taki zbiór $e_t(x)$, że $\mathrm{m}(e_t(x)) = t$ oraz

$$\int_0^t x^* = \int_{e_t(x)} |x|.$$

Uwaga 2.9. Warto zauważyć, że Lemat 2.8 zachodzi bez założenia $x^*(t) > x^*(\infty)$ dla przestrzeni $L^0(I)$ przy pewnych warunkach nałożonych na liczbę t.

Niech $x \in L^0[0,\alpha)$ gdzie $\alpha = 1$ lub $\alpha = \infty$. Wtedy istnieje taki zbiór $e_t(x)$, że $\mathrm{m}(e_t(x)) = t$ oraz

$$\int_0^t x^* = \int_{e_t(x)} |x|$$

dla każdego $t \in (0, \mathrm{m}(Z))$, gdzie $Z = \{t \colon |f(t)| \geqslant f^*(\infty)\}$ albo dla każdego $t \in (0,\alpha)$, w przypadku $\mathrm{m}(\mathcal{S}(f)) < \infty$.

Lemat 2.10 ([56], Własność 8°, str. 64). Równość

$$\int_0^t x^* = \sup_{\mathrm{m}(e)=t} \int_e |x|$$

zachodzi dla każdego $x \in L^0[0,\infty)$.

Twierdzenie 2.11 ([56], Własność 9°, str. 65). Niech x i y będą dwiema lokalnie całkowalnymi funkcjami oraz $d_x(\lambda), d_y(\lambda) < \infty$ dla wszystkich $\lambda > 0$. Wtedy równość

$$(x+y)^*(t) = x^*(t) + y^*(t)$$

zachodzi dla wszystkich $t > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje x i y są prawie wszędzie jednakowego znaku i mają wspólny system zbiorów e_t, $0 < t < \infty$.

Definicja 2.12 ([3], Definicja 3.1, str. 52, [56], str. 124). Dla danej funkcji $x \in L^0(I)$ definiujemy funkcję maksymalną nierosnącego przestawienia x^* jako

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)ds$$

dla każdego $t > 0$.

Twierdzenie 2.13 ([3], str. 52-55). Niech $x, y, x_n \in L^0$, $a \in \mathbb{R}$. Wtedy x^{**} jest funkcją nieujemną, nierosnącą i ciągłą na L^0. Ponadto

1. $x^{**} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ p.w.

2. $x^* \leqslant x^{**}$ i $(ax)^{**} = |a|x^{**}$.

3. $(x \pm y)^{**}(t) \leqslant x^{**}(t) + y^{**}(t)$, $t \in (0, \alpha)$.

4. Jeśli $|y| \leqslant |x|$ p.w., to $y^{**} \leqslant x^{**}$ punktowo.

5. Jeśli $|x_n| \uparrow |x|$ p.w., to $x_n^{**} \uparrow x^{**}$ punktowo.

Definicja 2.14 ([43]). Niech $1 \leqslant p < \infty$. Niech $w \in L^0(I)$ będzie nieujemną, lokalnie całkowalną funkcją wagową. Przestrzenią Lorentza $\Gamma_{p,w} := \Gamma_{p,w}(I)$ nazywamy podprzestrzeń tych elementów $x \in L^0(I)$, dla których

$$\|x\|_{\Gamma_{p,w}} = \left(\int_0^\alpha (x^{**})^p w \right)^{1/p} = \left(\int_0^\alpha (x^{**})^p(t) w(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Gdy mowa będzie o przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ będziemy zakładać, że waga w jest klasy D_p, tzn. spełnia następujące warunki

$$0 < W(t) = \int_0^t w(s) ds < \infty \quad \text{i} \quad W_p(t) = t^p \int_t^\alpha s^{-p} w(s) ds < \infty$$

dla wszystkich $0 < t \leqslant \alpha$, jeśli $\alpha = 1$ i wszystkich $0 < t < \alpha$ dla $\alpha = \infty$. Warunki te zapewniają, że przestrzeń $\Gamma_{p,w}$ jest nietrywialną symetryczną przestrzenią Köthego z własnością Fatou (por. [14], [43]).

W artykułach innych autorów rozważane są przestrzenie $\Gamma_{p,w}$ również dla $p \in (0, 1)$, jednak wtedy takie przestrzenie są quasi-unormowane.

Uwaga 2.15. Niech $x, y \in S(\Gamma_{p,w})$. Załóżmy, że istnieje zbiór mierzalny Z taki, że $m(Z \cap \mathcal{S}(w)) > 0$ oraz

$$(x + y)^{**}(t) < x^{**}(t) + y^{**}(t) \quad \text{dla} \quad t \in Z. \tag{6}$$

Wówczas $\|x + y\| < 2$.

W istocie,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p = \int_0^\alpha \left[\left(\frac{x+y}{2} \right)^{**} \right]^p w < \int_0^\alpha \left[\frac{x^{**} + y^{**}}{2} \right]^p w \leqslant \int_0^\alpha \frac{(x^{**})^p + (y^{**})^p}{2} w = 1.$$

Definicja 2.16. Niech $1 \leqslant p < \infty$. Niech $w \in L^0(I)$ będzie nierosnącą, nieujemną, lokalnie całkowalną funkcją wagową. Przestrzenią Lorentza $\Lambda_{p,w} := \Lambda_{p,w}(I)$ nazywamy podprzestrzeń tych elementów $x \in L^0(I)$, dla których

$$\|x\|_{\Lambda_{p,w}} = \left(\int_0^\alpha (x^*)^p w \right)^{1/p} = \left(\int_0^\alpha (x^*)^p(t) w(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Tak zdefiniowane przestrzenie $\Lambda_{p,w}$ są szczególnym przypadkiem przestrzeni Orlicza–Lorentza rozważanych w pracy [39] (zob. również Definicję 3.6). Każda przestrzeń $\Lambda_{p,w}$ jest symetryczną przestrzenią Banacha.

Przestrzenie $\Gamma_{p,w}$ są naturalnie związane z przestrzeniami Lorentza $\Lambda_{p,w}$. Oczywiście $\Gamma_{p,w} \subset \Lambda_{p,w}$ dla każdego $0 < p < \infty$. Wynika to z nierówności $x^* \leqslant x^{**}$, mamy bowiem dla $x \in \Gamma_{p,w}$, że

$$\left(\int_0^\alpha (x^*)^p w\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^\alpha (x^{**})^p w\right)^{1/p} < \infty.$$

Zatem $x \in \Lambda_{p,w}$. Ponadto równość $\Gamma_{p,w} = \Lambda_{p,w}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy waga w spełnia tzw. warunek B_p, tzn. istnieje $A > 0$ takie, że dla każdego $x > 0$,

$$\int_x^\infty t^{-p} w(t) dt \leqslant A x^{-p} \int_0^x w(t) dt$$

(zob. [1], [43], [66]).

Przedstawimy teraz definicję transformacji zachowującej miarę a także wykorzystywane w pracy znane wyniki.

Definicja 2.17 ([3]). Niech (T_1, Σ, μ_1), (T_2, Σ, μ_2) będą dwiema σ-skończonymi przestrzeniami miary. Odwzorowanie $\gamma \colon T_1 \to T_2$ nazywamy transformacją zachowującą miarę, jeśli dla μ_2-mierzalnego zbioru $A \subset T_2$, zbiór $\gamma^{-1}[A] = \{t \in T_1 : \gamma(t) \in A\}$ jest μ_1-mierzalnym podzbiorem T_1 i $\mu_1(\gamma^{-1}(A)) = \mu_2(A)$.

Twierdzenie 2.18 ([65], str. 410). Niech zbiory $A, B \subset [0, \infty)$ będą takie, że $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Wtedy istnieje transformacja zachowująca miarę $\delta \colon A \to B$.

Poniższe twierdzenie jest wnioskiem z Twierdzenia Ryffa (zob. [3]).

Twierdzenie 2.19 ([3], Wniosek 7.6). Niech $x \in L^0(I)$ ($x \in l_0$) będzie nieujemną funkcją (ciągiem), taką, że $x^*(\infty) = 0$. Wtedy istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma \colon \mathcal{S}(x) \overset{na}{\to} \mathcal{S}(x^*)$ taka, że $|x| = x^* \circ \sigma$ p.w. na $\mathcal{S}(x)$.

2.1. Rezultaty ogólne

W niniejszym rozdziale przedstawimy ogólne wyniki dotyczące funkcji mierzalnych, a także wyniki dotyczące lokalnych własności monotonicznościowych oraz porządkowej ciągłości elementu przestrzeni i jego nierosnącego przestawienia w przestrzeniach symetrycznych.

Definicja 2.20 (Warunek (+) z pracy [40]). Mówimy, że mierzalna funkcja $x\colon I \to \mathbb{R}$ spełnia warunek (+) jeśli istnieje $\theta_1 \geqslant 0$ takie, że $|x(t)| \geqslant \theta_1$ p.w. i $d_{|x|-\theta_1}(\theta) < \infty$ dla wszystkich $\theta > 0$.

W dalszej części pracy będziemy używać następujący warunek

$$\mathrm{m}\{t \in I\colon |x(t)| < x^*(\infty)\} = 0. \tag{7}$$

Uwaga 2.21. Warto zauważyć, że warunek (7) jest równoważny warunkowi (+).

Dowód. W istocie, jeśli $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) < \infty$, to

$$|x(t)| \geqslant 0 = x^*(\infty) \text{ p.w.} \quad \text{oraz} \quad d_{|x|}(\theta) < \infty \quad \text{dla każdego} \quad \theta > 0$$

a także $\mathrm{m}\{t \in I\colon |x(t)| < 0\} = 0$.

Rozważając przypadek $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) = \infty$ pokażemy tę równoważność w dwóch krokach.

I. Implikacja (7) $\Rightarrow$ (+).

Biorąc $\theta_1 = x^*(\infty)$ otrzymujemy, że $|x(t)| \geqslant \theta_1$ p.w. Ponadto niech $\theta > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} d_{|x|-x^*(\infty)}(\theta) = d_{|x|-\theta_1}(\theta) &= \mathrm{m}\{t \in I\colon |x(t)| - x^*(\infty) > \theta\} \\ &= \mathrm{m}\{t \in I\colon |x(t)| > x^*(\infty) + \theta\} \\ &= d_{|x|}(x^*(\infty) + \theta) = d_{x^*}(x^*(\infty) + \theta) < \infty. \end{aligned}$$

II. Implikacja (+) $\Rightarrow$ (7).

Z założenia istnieje takie $\theta_1 \geqslant 0$, że $|x(t)| \geqslant \theta_1$ p.w. Stąd $x^*(\infty) \geqslant \theta_1$. Zauważmy ponadto, że $d_{|x|}(\theta) = d_{x^*}(\theta) < \infty$ dla $\theta \geqslant x^*(\infty)$ oraz $d_{|x|}(\theta) = d_{x^*}(\theta) = \infty$ dla $0 < \theta < x^*(\infty)$. Pokażemy, że

$$\theta_1 = x^*(\infty). \tag{8}$$

Załóżmy, że $\theta_1 < x^*(\infty)$. Wtedy istnieje $\theta_0 > 0$, że $0 < \theta_1 + \theta_0 < x^*(\infty)$ oraz

$$d_{|x|-\theta_1}(\theta_0) = \mathrm{m}\{t \in I\colon |x| > \theta_1 + \theta_0\} = d_{|x|}(\theta_1 + \theta_0) = \infty,$$

sprzeczność. To dowodzi równości (8) i kończy dowód. $\square$

Rozważymy także modyfikację warunku (+) w którym będziemy rozważać obcięcie elementu x do jego nośnika, tzn.

$$\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < |x(t)| < x^*(\infty)\} = 0. \tag{9}$$

Oczywiście powyższy warunek jest słabszy od warunku (7). Dla wygody Czytelnika podajemy (wykorzystywane w dalszej części rozprawy)

(a) Lemat 3.2 z pracy [39], udowodniony jako pierwszy oraz

(b) Lemat 5 z pracy [40], będący wzmocnieniem poprzedniego.

Udowodniony poniżej Lemat 2.24 jest uogólnieniem Lematu 5 z [40] (patrz przypadek I dowodu).

Lemat 2.22 (Lemat 3.2, [39]). Niech $x, y \in L^0(I)$. Załóżmy, że $|x(t)| < |y(t)|$ dla $t \in A \subset I$, gdzie $m(A) > 0$ i $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ dla p.w. $t \in I$. Jeśli $d_x(\theta) < \infty$ dla każdego $\theta > 0$, to istnieje taki zbiór $B \subset I$ miary dodatniej, że $x^*(t) < y^*(t)$ dla $t \in B$.

Lemat 2.23 (Lemat 5, [40]). Niech $x, y \in L^0$, x spełnia warunek (+) i $|x(t)| < |y(t)|$ dla $t \in A \subset I$, gdzie $m(A) > 0$ i $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ dla p.w $t \in I$. Wtedy istnieje taki zbiór $B \subset I$, miary dodatniej, że $x^*(t) < y^*(t)$ dla $t \in B$.

Lemat 2.24. Niech $x, y \in L^0(I)$ będą takie, że $|x| \leqslant |y|$, $|x(t)| < |y(t)|$ dla $t \in A$, gdzie $m(A) > 0$ oraz $|y(t)| > x^*(\infty)$ dla każdego $t \in A$. Wtedy istnieje taki zbiór B o dodatniej mierze, że $x^*(t) < y^*(t)$ dla $t \in B$.

Dowód. Niech $x, y \in L^0(I)$, $|x| \leqslant |y|$, $|x(t)| < |y(t)|$ dla $t \in A$, gdzie $m(A) > 0$ oraz $|y(t)| > x^*(\infty)$ dla każdego $t \in A$. Zauważmy, że teza powyższego lematu dla przypadku $x^*(\infty) = 0$ jest spełniona na mocy Lematu 2.22.

Rozważmy zatem przypadek, gdy $x^*(\infty) > 0$. Wtedy $m(\mathcal{S}(x)) = \infty$. Oznaczmy zbiór

$$D = \{t \in I : 0 < |x(t)| < x^*(\infty)\}.$$

Dalszą część dowodu podzielimy na przypadki:

Przypadek I. $m(D) = 0$ oraz

(a) $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y)$.

(b) $\mathcal{S}(x) \neq \mathcal{S}(y)$.

Przypadek II. $m(D) > 0$.

Pokażemy po kolei każdy z nich.

I. (a) Załóżmy, że $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y)$. Wtedy $A \subset \mathcal{S}(x)$, $0 < x^*(\infty) \leqslant |x|(t) < |y|(t)$ dla $t \in A$ oraz $x^*(\infty) \leqslant |y(t)|$ dla p.w. $t \in \mathcal{S}(y)$. Zdefiniujmy,

$$\tilde{x} = (|x| - x^*(\infty))\chi_{\mathcal{S}(x)} \quad \text{i} \quad \tilde{y} = (|y| - x^*(\infty))\chi_{\mathcal{S}(y)}.$$

Wówczas $\tilde{x}, \tilde{y} \geqslant 0$ i $(\tilde{x})^*(\infty) = 0$, $(\tilde{y})^*(\infty) \geqslant 0$. Ponadto $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ oraz $\tilde{x}(t) < \tilde{y}(t)$ dla wszystkich $t \in A$. Na mocy Lematu 2.22, istnieje zbiór B miary dodatniej, że $(\tilde{x}^*)(t) <$

$(\tilde{y})^*(t)$ dla każdego $t \in B$. Zauważmy, że dla $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{(\tilde{x})^*}(\theta) = \mathrm{d}_{\tilde{x}}(\theta) &= \mathrm{m}\{t \in I : (|x| - x^*(\infty))\chi_{\mathcal{S}(x)}(t) > \theta\} \\ &= \mathrm{m}\{t \in \mathcal{S}(x) : |x(t)| - x^*(\infty) > \theta\} \\ &= \mathrm{m}\{t \in \mathcal{S}(x^*) : x^*(t) - x^*(\infty) > \theta\} = \mathrm{d}_{x^* - x^*(\infty)}(\theta), \end{aligned}$$

skąd $(\tilde{x})^* = x^* - x^*(\infty)$. Analogiczne rozumowanie zachodzi dla $d_{(\tilde{y})^*}(\theta)$ dla $\theta > 0$, skąd $d_{(\tilde{y})^*}(\theta) = d_{y^* - x^*(\infty)}(\theta)$ dla $\theta > 0$ i w konsekwencji $(\tilde{y})^* = y^* - x^*(\infty)$. Podsumowując, otrzymujemy, że $x^*(t) < y^*(t)$ dla $t \in B$.

I. (b) Załóżmy, że $\mathcal{S}(x) \neq \mathcal{S}(y)$ oraz $\mathrm{m}(A \cap \mathcal{S}(x)) > 0$. Bez straty ogólności, możemy założyć, że $A \subset \mathcal{S}(x)$. Weźmy $r = y\chi_{\mathcal{S}(x)}$. Mamy $|x(t)| < |r(t)|$ dla $t \in A$, $|x(t)| \leqslant |r(t)| \leqslant |y(t)|$ dla p.w. $t \in I$ i $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(r)$. Powtarzając rozumowanie jak w dowodzie przypadku I. (a) dla elementu r w miejsce y, wnioskujemy, że istnieje taki zbiór B o mierze dodatniej, że

$$x^*(t) < r^*(t) \leqslant y^*(t) \quad \text{dla} \quad t \in B.$$

Jeżeli $\mathrm{m}(A \cap \mathcal{S}(x)) = 0$, to wtedy $A \subset \mathcal{S}(y)$. Weźmy

$$r = x\chi_{\mathcal{S}(x)} + x^*(\infty)\chi_A \quad \text{i} \quad s = y\chi_{\mathcal{S}(x)} + y\chi_A.$$

Oczywiście $|x| \leqslant |r| \leqslant |s| \leqslant |y|$, $|r(t)| < |s(t)|$ dla wszystkich $t \in A$ oraz $\mathcal{S}(r) = \mathcal{S}(s)$. Rozumowanie analogiczne jak w dowodzie przypadku I. (a), dla elementu r w miejsce x i elementu s w miejsce y, kończy dowód przypadku I. (b).

II. Oznaczmy

$$\tilde{x} = |x|\chi_{I \setminus D} + x^*(\infty)\chi_D \quad \text{i} \quad \tilde{y} = |y|\chi_{I \setminus D} + |y|\chi_{D_2} + x^*(\infty)\chi_{D_1},$$

gdzie $D_1 = \{t \in D : |y(t)| \leqslant x^*(\infty)\}$, $D_2 = D \setminus D_1$.

Pokażemy, że

$$\tilde{x} \sim x \quad \text{oraz} \quad \tilde{y} \sim y.$$

Oczywiście $\tilde{x} \geqslant x$. Zauważmy, że dla każdego $0 < \theta < x^*(\infty)$ mamy

$$\mathrm{d}_{\tilde{x}}(\theta) = \mathrm{m}\{t \in I : |\tilde{x}(t)| > \theta\} \geqslant \mathrm{d}_x(\theta) = \infty.$$

oraz dla każdego $\theta \geqslant x^*(\infty)$ mamy

$$\mathrm{d}_{\tilde{x}}(\theta) = \mathrm{m}\{t \in I : |\tilde{x}(t)| > \theta\} = \mathrm{m}\{t \in I \setminus D : |x(t)| > \theta\} = \mathrm{d}_x(\theta).$$

Podobnie, dla każdego $0 < \theta < x^*(\infty)$ mamy

$$d_{\tilde{y}}(\theta) = m\{t \in I : |\tilde{y}(t)| > \theta\} \geqslant d_y(\theta) \geqslant d_x(\theta) = \infty$$

oraz dla każdego $\theta \geqslant x^*(\infty)$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} d_{\tilde{y}}(\theta) &= m\{t \in I : |\tilde{y}(t)| > \theta\} = m\{t \in I \backslash D_1 : |\tilde{y}(t)| > \theta\} \\ &= m\{t \in I \backslash D_1 : \; = |y(t)| > \theta\} = d_y(\theta). \end{aligned}$$

Z definicji elementu $\tilde{x}$ wnioskujemy, że $(\tilde{x})^*(\infty) = x^*(\infty)$ a zbiór $\tilde{D} = \{t \in I : 0 < |\tilde{x}| < x^*(\infty)\}$ ma miarę zero. Ponadto $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$, a także $\tilde{x}(t) < \tilde{y}(t)$ dla $t \in A$, z uwagi na inkluzję $A \subset I \backslash D_1$. Idąc dalej mamy, że $\tilde{y}(t) > (\tilde{x})^*(\infty) = x^*(\infty)$ dla $t \in A$.

Podsumowując, elementy $\tilde{x}$ (w miejsce x) oraz $\tilde{y}$ (w miejsce y) spełniają założenia Lematu 2.24, a także założenie Przypadku I dowodu, tj. $m(\tilde{D}) = 0$ (w miejsce $m(D) = 0$). Postępując analogicznie wnioskujemy, że istnieje taki zbiór B, $m(B) > 0$, dla którego $x^*(t) = (\tilde{x})^*(t) < (\tilde{y})^*(t) = y^*(t)$ dla $t \in B$. □

Lemat 2.26 jest uogólnieniem Lematu 2 z pracy [40], który podajemy poniżej dla wygody Czytelnika.

Lemat 2.25 (Lemat 2, [40]). Niech $x \in L^0$ i $C = \{t : |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Ponadto niech x spełnia warunek (+) (zob. Definicję 2.20). Jeśli $m(C) < \infty$ ($m(C) = \infty$ odpowiednio), to istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma : I \to I$ ($\sigma : C \to I$ odpowiednio), taka, że $x^* \circ \sigma = |x|$ p.w (dla p.w $t \in C$ odpowiednio).

Lemat 2.26. Niech $x \in L^0$ i $C = \{t : |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Wtedy istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma : C \to [0, m(C))$, taka, że $x^* \circ \sigma = |x|$ p.w. na C.

Dowód. W przypadku $x^*(\infty) = 0$, lemat wynika z Twierdzenia 2.19. Załóżmy zatem, że $x^*(\infty) > 0$. Ponadto niech

$$\tilde{x} = (|x| - x^*(\infty))\, \chi_C.$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie Lematu 2.24 dostajemy $(\tilde{x})^*(\infty) = 0$ i $(\tilde{x})^* = x^* - x^*(\infty)$. Stąd i z Twierdzenia 2.19, istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma : C \to [0, m(C))$, taka, że $(\tilde{x})^*(\sigma(t)) = \tilde{x}(t)$ dla p.w. $t \in C$. Zauważmy, że $C \subset \mathcal{S}(x)$ oraz

$$|x|(t) - x^*(\infty) = \tilde{x}(t) = (\tilde{x})^*(\sigma(t)) = x^*(\sigma(t)) - x^*(\infty)$$

dla $t \in C$, co kończy dowód. □

Lemat 2.27. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I oraz $x \in E^+ \backslash \{0\}$. Jeżeli x jest LM punktem, to $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} > 0$. Weźmy zbiór $C \subset \{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\}$, o dodatniej i skończonej mierze. Biorąc

$$y = x\chi_C$$

otrzymujemy, że $y \leqslant x$ oraz

$$\mathrm{d}_{x-y}(\tau) = \mathrm{d}_x(\tau) = \mathrm{d}_{x^*}(\tau) = \infty$$

dla każdego $\tau < x^*(\infty)$. Ponadto

$$\begin{aligned} d_{x-y}(\tau) &= \mathrm{m}\{s\colon (x-y)(s) > \tau\} \\ &= \mathrm{m}\{s \in C\colon (x-y)(s) > \tau\} + \mathrm{m}\{s \in \mathcal{S}(x)\backslash C\colon (x-y)(s) > \tau\} \\ &= \mathrm{m}\{s \in \mathcal{S}(x)\backslash C\colon x(s) > \tau\} = \mathrm{m}\{s \in \mathcal{S}(x)\colon x(s) > \tau\} = \mathrm{d}_x(\tau) \end{aligned}$$

dla $\tau \geqslant x^*(\infty)$. W konsekwencji $\|x - y\| = \|x\|$, tzn. x nie jest LM punktem. □

Lemat 2.28. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Jeżeli $x \in E^+ \backslash \{0\}$ jest UM punktem, to $\mathrm{m}\{s \in I\colon x(s) < x^*(\infty)\} = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{m}\{s \in I\colon x(s) < x^*(\infty)\} > 0$. Wtedy $x^*(\infty) > 0$. Zdefiniujmy

$$A_k = \left\{s \in I\colon x(s) + \frac{1}{k} < x^*(\infty)\right\} \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Istnieje wtedy $k \in \mathbb{N}$, że $\mathrm{m}(A_k) > 0$. Weźmy

$$y = \frac{1}{k}\chi_{A_k}.$$

Z uwagi na nierówność $x^*(\infty) > 0$ wnioskujemy, że $\chi_{[0,\infty)} \in E$ oraz $y \in E$. Wtedy $(x+y)\chi_{I\backslash A_k} = x\chi_{I\backslash A_k}$ i $\mathrm{d}_{x+y}(\tau) = \mathrm{d}_x(\tau)$ dla dowolnego $\tau \geqslant x^*(\infty)$. Oczywiście $\mathrm{d}_{x+y}(\tau) = \mathrm{d}_x(\tau) = \infty$ dla $\tau < x^*(\infty)$. Ostatecznie $\|x + y\| = \|x\|$ tzn. x nie jest UM punktem. □

Uwaga 2.29. W teorii funkcyjnych siatek Banacha w naturalny sposób stawia się pytanie, czy własność P może być równowżnie rozważana tylko na stożku E^+ siatki E (zob. [34]). Trudniej udowodnić, że dana własność może być rozważana równoważnie tylko na stożku elementów nieujemnych i nierosnących (piszemy wtedy $E \in (P^*)$, zob. [6]). Przy rozważaniu własności geometrycznych pojedynczego punktu pojawiają się podobne, naturalne pytania.

Przedyskutujmy zatem następujący problem: czy dla danej własności P ustalonego elementu x zachodzi równoważność $x \in (P) \Leftrightarrow x^* \in (P)$?

Twierdzenie 2.30. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Wtedy $x \in E^+ \setminus \{0\}$ jest LM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x^* jest LM punktem i $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$.

Dowód. Konieczność. Niech $0 \leqslant y \leqslant x^*$ i $0 \neq y \neq x^*$. Z Lematu 2.27 dostajemy, że $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$. Na mocy Lematu 2.26, istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma\colon C \to [0, \mathrm{m}(C))$, taka, że $x^* \circ \sigma = x$ p.w. na $C = \{t\colon |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Skoro $C = \mathcal{S}(x)$, to $0 \neq y \circ \sigma \leqslant x^* \circ \sigma = x$ i $y \circ \sigma \neq x$. Założenie, że x jest LM punktem implikuje, że $\|y\| = \|y \circ \sigma\| < \|x\| = \|x^*\|$.
Dostateczność. Niech $0 \leqslant y \leqslant x$ i $y \neq x$. Rozważmy dwa przypadki.
(i) Niech $x^*(\infty) = 0$. Ponieważ $0 \leqslant y \leqslant x$ i $y \neq x$, zatem $y^* \leqslant x^*$ oraz istnieje taki zbiór miary dodatniej $A \subset I$, że $|y(t)| < |x(t)|$ dla p.w. $t \in A$. Oczywiście $\mathrm{d}_x(\theta) < \infty$ dla każdego $\theta > 0$ z uwagi na założenie $x^*(\infty) = 0$. Z Lematu 2.22 otrzymujemy zatem, że istnieje taki zbiór miary dodatniej $B \subset I$, że $y^*(t) < x^*(t)$ dla $t \in B$, tzn. $y^* \neq x^*$. Ponieważ x^* jest LM punktem, to $\|y\| = \|y^*\| < \|x^*\| = \|x\|$, więc x jest również LM punktem.
(ii) Niech $x^*(\infty) > 0$. Zdefiniujmy

$$z(t) = \begin{cases} (x-y)(t), & \text{jeśli } (x-y)(t) \geqslant x^*(\infty), \\ 0, & \text{jeśli } x(t) = 0, \\ x^*(\infty), & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy $(x-y)(t) \leqslant z(t) < x(t)$ dla $t \in \mathcal{S}(y)$, skoro $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$. Ponadto $x - y \leqslant z \leqslant x$. Zauważmy, że $x^*(\infty) = z^*(\infty)$, $\mathcal{S}(z) = \mathcal{S}(x) \supset \mathcal{S}(y)$ i $\mathrm{m}\{t \in I\colon 0 < z(t) < z^*(\infty)\} = 0$. Oczywiście $x(t) > z^*(\infty)$ dla wszystkich $t \in \mathcal{S}(z)$. Na mocy Lematu 2.24 istnieje zbiór C, dodatniej miary, że

$$(x-y)^*(t) \leqslant z^*(t) < x^*(t)$$

dla wszystkich $t \in C$. Z tego, że x^* jest LM punktem, otrzymujemy

$$\|x-y\| = \|(x-y)^*\| < \|x^*\| = \|x\|.$$

□

Twierdzenie 2.31. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Wtedy $x \in E^+\backslash\{0\}$ jest UM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x^* jest UM punktem i $\mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) < x^*(\infty)\} = 0$.

Dowód. <u>Konieczność.</u> Warunek $\mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) < x^*(\infty)\} = 0$ wynika z Lematu 2.28. Niech $x^* \leqslant z$, $x^* \neq z$. Weźmy $C = \{t \in I\colon x(t) > x^*(\infty)\}$. Jeśli $\mathrm{m}(C) < \infty$ ($\mathrm{m}(C) = \infty$), to z Lematu 2.25, istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma\colon I \to I$ ($\sigma\colon C \to [0, \infty)$), taka, że $x^* \circ \sigma = x$ p.w. ($x^* \circ \sigma$ p.w. na C). W pierwszym przypadku dowód można łatwo dokończyć wykorzystując element $y = z \circ \sigma$.

Rozważmy przypadek $\mathrm{m}(C) = \infty$. Zdefiniujmy

$$y(t) = \begin{cases} z(\sigma(t)), & \text{jeśli } t \in C, \\ 0, & \text{jeśli } t \notin C. \end{cases}$$

Wtedy $x\chi_C \leqslant y$ i $x\chi_C \neq y$. Oznaczmy

$$D = \{t \in \mathcal{S}(x)\colon x(t) = x^*(\infty)\} \quad \text{oraz} \quad g = y + x^*(\infty)\chi_D.$$

Oczywiście $D \subset I\backslash C$. Twierdzimy, że $x\chi_C \sim x$. Zauważmy, że dla każdego $\theta > x^*(\infty)$ mamy

$$\mathrm{d}_{x\chi_C}(\theta) = \mathrm{m}\{t \in I\colon x\chi_C(t) > \theta\} = \mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) > \theta\} = \mathrm{d}_x(\theta). \tag{10}$$

Ponadto dla każdego $\theta \leqslant x^*(\infty)$, mamy

$$\mathrm{d}_x(\theta) = \mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) > \theta\} \geqslant \mathrm{m}\{t \in I\colon x\chi_C(t) > \theta\} = \mathrm{d}_{x\chi_C}(\theta) = \infty, \tag{11}$$

co dowodzi stwierdzenie $x\chi_C \sim x$. Analogicznie wnioskujemy, że $g \sim y$ biorąc w równaniach (10) i (11) element y w miejsce $x\chi_C$ oraz g w miejsce x.

Z uwagi na $x \leqslant g$ i $x \neq g$, mamy

$$\|x^*\| = \|x^* \circ \sigma\| = \|x\chi_C\| = \|x\| < \|g\| = \|y\| = \|z \circ \sigma\| = \|z\|.$$

<u>Dostateczność.</u> Niech $x \leqslant y$ i $y \neq x$. Ponieważ $\mathrm{m}\{t\colon x(t) < x^*(\infty)\} = 0$, zatem z Lematu 2.23, $x^*(t) < y^*(t)$ dla $t \in B$, gdzie $\mathrm{m}(B) > 0$. Oczywiście $x^* \leqslant y^*$. Fakt, że x^* jest UM punktem kończy dowód. □

Lemat 2.32 jest wynikiem dobrze znanym w literaturze (zob. np. [56]). Przeprowadzimy dowód dla kompletności.

Lemat 2.32.

(i) Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na $I = [0, \infty)$ i $x \in E$. Jeżeli $x \in E_a$, to $x^*(t) \to 0$ przy $t \to \infty$.

(ii) Niech E będzie symetryczną ciągową przestrzenią Banacha i $x \in E$. Jeżeli $x \in E_a$, to $x^*(i) \to 0$ przy $i \to \infty$.

Dowód. (i) Załóżmy, że $x^*(\infty) > 0$. Zdefiniujmy

$$C = \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon x(t) > \frac{x^*(\infty)}{2} \right\}.$$

Wtedy $\mathrm{m}(C) = \infty$. Niech ciąg zbiorów $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie taki, że $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ dla dowolnych $i \neq j$, oraz $\mathrm{m}(C_i) < \infty$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Z uwagi na to, że $E \overset{1}{\hookrightarrow} L_1 + L_\infty$, otrzymujemy, że dla każdego $z \in E \subset L_1 + L_\infty$ oraz $\int_0^1 z^* = \|z\|_{L_1+L_\infty} \leqslant \|z\|_E$.

Weźmy ciąg $A_n = C \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Wtedy $A_n \subset C$ oraz $\mathrm{m}(A_n) = \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Tak zdefiniowany ciąg zbiorów jest zstępujący, tj. $A_n \downarrow \emptyset$. W konsekwencji

$$\left\| x\chi_{A_n} \right\|_E \geqslant \left\| x\chi_{A_n} \right\|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 (x\chi_{A_n})^* > \frac{x^*(\infty)}{2} > 0.$$

Ostatecznie $x \notin E_a$, co kończy dowód.
(ii) Załóżmy przeciwnie, że $x^*(i) \not\to 0$, tzn. istnieją $\delta > 0$ i podciąg $(i_k)_{k=1}^{\infty}$ takie, że

$$|x(i_k)| \geqslant \delta \quad \text{dla każdego} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Niech $x_n = |x| \chi_{\{i_n, i_{n+1}, \dots\}}$. Zauważmy, że $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to 0$ punktowo. Z drugiej strony, można zauważyć, że

$$x_n^*(i) \geqslant \delta \quad \text{dla wszystkich} \quad n, i \in \mathbb{N}.$$

Z symetrii przestrzeni istnieje takie $a > 0$, że dla każdego i mamy $\|e_i\|_E = a$. Ostatecznie $\|x_n\|_E = \left\| x_n^* \right\|_E \geqslant \delta \|e_i\| = a > 0$, więc $x \notin E_a$. □

Warto zauważyć, że implikacja przeciwna w Lemacie 2.32 nie zachodzi, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 2.33. Niech ϕ będzie funkcją quasi wklęsłą na $I = [0, \infty)$ (zob. [3]) oraz $\phi(0+) = 0$. Przypomnijmy definicję funkcyjnych przestrzeni Marcinkiewicza M_ϕ, M_ϕ^*:

$$M_\phi = \left\{ x \in L^0 : \ \|x\|_{M_\phi} = \sup_{t \in I}\{x^{**}(t)\phi(t)\} < \infty \right\},$$
$$M_\phi^* = \left\{ x \in L^0 : \ \|x\|_{M_\phi^*} = \sup_{t \in I}\{x^{*}(t)\phi(t)\} < \infty \right\}.$$

Oczywiście z uwagi na nierówność $x^* \leqslant x^{**}$ oraz definicję włożenia przestrzeni (zob. (1)) mamy, że $M_\phi \overset{1}{\hookrightarrow} M_\phi^*$. Ponadto $M_\phi^* \overset{c}{\hookrightarrow} M_\phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^t (1/\phi(s)) ds \leqslant ct/\phi(t) \quad \text{dla każdego} \quad t \in I \tag{12}$$

(zob. [50]). Rozważmy przestrzenie M_ϕ, M_ϕ^* dla funkcji $\phi(t) = \sqrt{t}$. Weźmy

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1} \right) \chi_{[i-1,1)}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Z uwagi na wklęsłość funkcji $f(u) = \sqrt{u}$ otrzymujemy, że $x = x^*$. Zauważmy również, że funkcja ϕ spełnia warunek (12), więc $M_\phi^* = M_\phi$ i normy $\|\cdot\|_{M_\phi}$ oraz $\|\cdot\|_{M_\phi^*}$ są równoważne. Ponadto

$$\sup_{t>0} x^*(t)\phi(t) \leqslant \sup_n \sqrt{n} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \right) \leqslant 1,$$

a zatem $x \in M_\phi^* = M_\phi$. Zauważmy również, że $x^*(\infty) = 0$ z uwagi na równość $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \right) = 0$. Zdefiniujmy $x_n = x\chi_{[n,\infty)} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1} \right)\chi_{[i-1,i)}$. Z faktu, że $x^{**} \geqslant x^*$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \sup_t x_n^{**}(t)\phi(t) \geqslant \sup_t x_n^*(t)\sqrt{t} \\ &= \lim_{k\to\infty} x_n^*(k)\sqrt{k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{k}\left(\sqrt{n+k+1} - \sqrt{n+k} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dla każdego n. Zatem $x \notin (M_\phi)_a$, ponieważ $0 \leqslant x_n \leqslant x$ oraz $x_n \to 0$ punktowo.

Poniższy lemat był udowodniony w bardziej ogólnym przypadku w pracy [20] (Proposition 2.3). Poniżej przedstawiamy dowód bezpośredni.

Lemat 2.34. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Wtedy $x \in E_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^* \in E_a$.

Dowód. Konieczność. Jeżeli $x \in E_a$, to $x^*(\infty) = 0$ na mocy Lematu 2.32. Ponadto istnieje transformacja zachowująca miarę σ, taka, że $x^* \circ \sigma = |x|$ (zob. [3]). Weźmy taki ciąg $0 \leqslant x_n \leqslant x^*$, że $x_n \to 0$ p.w. i zdefiniujmy $y_n = x_n \circ \sigma$. Wtedy

$$y_n = x_n \circ \sigma \leqslant x^* \circ \sigma = |x| \in E_a.$$

Ponadto, z uwagi na $x_n \to 0$ p.w., otrzymujemy $y_n \to 0$ p.w. Stąd i z symetrii przestrzeni E wnioskujemy, że

$$\|x_n\| = \|x_n \circ \sigma\| = \|y_n\| \to 0.$$

Dostateczność. Załóżmy, że $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ i $x_n \to 0$ p.w. Wtedy $0 \leqslant x_n^* \leqslant x^*$. Z Lematu 2.32, $x^*(\infty) = 0$, a zatem $x_n^* \to 0$ punktowo z Własności 12°, str. 67, [56]. Ostatecznie $\|x_n\| = \left\|x_n^*\right\| \to 0$.

□

W pracy [10] (Tw 3.2, implikacja (iii)⇒(ii)) pokazano, że ciąg x_n jest zbieżny do x wg miary jeśli $0 \leqslant x \leqslant x_n$, $x \in E_a$ i $\left\|x_n^* - x^*\right\| \to 0$. Analogiczny wynik dla przypadku $0 \leqslant x_n \leqslant x$, przedstawiony w Lemacie 2.36, wymaga innych technik. Wspomniane Twierdzenie jest kilkakrotnie wykorzystywane w niniejszej pracy, zatem przedstawiamy je tu dla wygody Czytelnika.

Twierdzenie 2.35 (Twierdzenie 3.2, [10]). (a) Jeśli przestrzeń $(E, \|\cdot\|_E)$ z miarą Lebesgue'a m jest ośrodkową symetryczną przestrzenią na I, to następujące warunki są równoważne.

(i) Norma $\|\cdot\|_E$ jest ściśle monotoniczna i $(E, \|\cdot\|_E)$ ma własność Kadeca–Klee względem globalnej zbieżności wg miary.

(ii) Norma $\|\cdot\|_E$ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna

(iii) Niech $x \in E$, $(x_n) \subset E$ będą takie, że $0 \leqslant x^* \leqslant x_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\|x_n\| \to \|x\|_E$, to $\left\|x_n^* - x^*\right\|_E \to 0$.

(b) Jeśli przestrzeń $(E, \|\cdot\|_E)$ z miarą Lebesgue'a m jest ośrodkową symetryczną przestrzenią na $I = [0, \infty)$, wtedy warunki (i) - (iii) są równoważne również warunkowi

(iv) Przestrzeń E ma własność Kadeca–Klee względem lokalnej zbieżności wg miary.

Lemat 2.36. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Niech $x \in E$, $\{x_n\} \subset E$, $0 \leqslant x_n \leqslant x$ oraz $x^*(\infty) = 0$. Jeżeli $\left\|x_n^* - x^*\right\| \to 0$, to x_n jest zbieżny do x wg miary.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $x_n \not\to x$ wg miary, tzn. istnieją liczby $0 < \delta < \varepsilon < 1$, że (przechodząc w razie potrzeby do podciągu) mamy

$$\mathrm{m}\{t\colon x_n(t) < x(t) - 2\varepsilon\} > 2\delta \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Skoro $x^*(\infty) = 0$, to istnieje $\gamma > 1$ spełniające nierówność

$$x^*(\gamma - \delta) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

Na mocy Twierdzenia 2.19, istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma\colon \mathcal{S}(x) \to \mathcal{S}(x^*)$ taka, że $x^* \circ \sigma = x$ p.w. na $\mathcal{S}(x)$. Niech, dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \sigma^{-1}\{t\colon x^*(t) \leqslant 2\varepsilon\} \quad \text{oraz} \quad \Omega_n = \{t\colon x_n(t) + 2\varepsilon < x(t)\}.$$

Weźmy $t_{2\varepsilon} = \mathrm{m}(A^c) = \mathrm{d}_x(2\varepsilon)$. Oczywiście $\Omega_n \subset A^c$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z warunku (13) wynika

$$\mathrm{m}\left\{t \in \Omega_n\colon \frac{\varepsilon}{4} < x_n(t)\right\} > \delta \quad \text{lub} \quad \mathrm{m}\left\{t \in \Omega_n\colon x_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} > \delta$$

dla każdego $n \in N$. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\mathrm{m}\left\{t \in \Omega_n\colon x_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} > \delta$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc do podciągu i przenumerowując w razie konieczności, zdefiniujmy dla $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \left\{t \in \Omega_n\colon x_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} \quad \text{oraz} \quad y_n = \left(\frac{\varepsilon}{4}\chi_{F_n} + x\chi_{F_n^c}\right).$$

Zauważmy, że $x_n \leqslant y_n \leqslant x$ i $\delta < \mathrm{m}(F_n) \leqslant \mathrm{m}(\Omega_n) \leqslant t_{2\varepsilon}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_{2\varepsilon}} x_n^*(s)ds &\leqslant \int_0^{t_{2\varepsilon}} y_n^*(s)ds = \int_0^{t_{2\varepsilon}-\delta} y_n^*(s)ds + \int_{t_{2\varepsilon}-\delta}^{t_{2\varepsilon}} y_n^*(s)ds \\
&\leqslant \int_0^{t_{2\varepsilon}-\delta} x^*(s)ds + \int_{t_{2\varepsilon}-\delta}^{t_{2\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{4}ds \\
&< \int_0^{t_{2\varepsilon}-\delta} x^*(s)ds + \int_{t_{2\varepsilon}-\delta}^{t_{2\varepsilon}} 2\varepsilon ds - \varepsilon\delta \leqslant \int_0^{t_{2\varepsilon}} x^*(s)ds - \varepsilon\delta.
\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}
a\left\|x_n^* - x^*\right\| &= a\left\|(x_n^* - x^*)^*\right\| \geqslant a\left\|(x_n^* - x^*)^*\, \chi_{[0,t_{2\varepsilon})}\right\| \\
&\geqslant \int_0^{t_{2\varepsilon}} (x^* - x_n^*)^* \geqslant \int_0^{t_{2\varepsilon}} (x^* - x_n^*) > \varepsilon\delta > 0,
\end{aligned}$$

gdzie $a = t_{2\varepsilon}/\left\|\chi_{[0,t_{2\varepsilon})}\right\| > 0$ (zob. nierówność (4.6) w pracy [56], str. 92). Zatem $\left\|x_n^* - x^*\right\| \not\to 0$, co kończy dowód pierwszego przypadku.

Przypadek II. Załóżmy, że $\mathrm{m}(E_n) > \delta$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, gdzie $E_n = \left\{t \in \Omega_n \colon \frac{\varepsilon}{4} < x_n(t)\right\}$. Z uwagi na $0 \leqslant x_n \leqslant x$ i $x^*(\infty) = 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma_n \colon \mathcal{S}(x_n) \to \mathcal{S}(x_n^*)$ taka, że $x_n^* \circ \sigma_n = x_n$ p.w. na $\mathcal{S}(x_n)$. W konsekwencji, dzięki nierówności Hardy'ego–Littlewooda (zob. [3]), dostajemy

$$\begin{aligned}\int_0^\gamma x_n^*(t)dt &= \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)} x_n(t)dt = \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n} x_n(t)dt + \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n^c} x_n(t)dt \\ &\leqslant \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n} x(t)dt + \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n^c} x(t)dt - \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n^c} 2\varepsilon dt \\ &= \int_{\sigma_n^{-1}[0,\gamma)} x(t)dt - 2\varepsilon\, \mathrm{m}\left(\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n^c\right) \\ &\leqslant \int_0^\gamma x^*(t)dt - 2\varepsilon\, \mathrm{m}\left(\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n^c\right)\end{aligned} \tag{15}$$

Korzystając z nierówności (14) dostajemy

$$t_{2\varepsilon} = \mathrm{m}(A^c) = \mathrm{d}_x(2\varepsilon) \leqslant \mathrm{d}_x(\varepsilon/4) \leqslant \mathrm{d}_{x^*}(x^*(\gamma-\delta)) < \gamma.$$

Skoro $E_n \subset \Omega_n \subset A^c$, widzimy, że $E_n \subset \sigma_n^{-1}[0,\gamma)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ostatecznie

$$\mathrm{m}\left(\sigma_n^{-1}[0,\gamma)\cap E_n\right) = \mathrm{m}(E_n) > \delta \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

skąd, razem z nierównością (15), otrzymujemy

$$\int_0^\gamma x_n^*(t)dt \leqslant \int_0^\gamma x^*(t)dt - 2\varepsilon\delta.$$

W konsekwencji rozważań analogicznych jak w przypadku I, wnioskujemy że $\left\|x_n^* - x^*\right\| \not\to 0$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.37. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Element $x \in E^+$ jest LLUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x jest LM i OC punktem.

Uwaga 2.38. Zostało udowodnione, że mając symetryczną funkcyjną przestrzeń Banacha E, $E \in (LLUM)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (SM)$ i $E \in (OC)$ (por. Tw 2.6. w [26]). Poniższy dowód jest „lokalizacją" dowodu wspomnianego twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 2.37. Konieczność wynika z Lematu 6 w [37] oraz z definicji. Dostateczność. Niech $0 \leqslant x_n \leqslant x$ i $\|x_n\| \to \|x\|$. Ustalmy

$$A_n^k = \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon x_n(t) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) x(t) \right\} \quad \text{dla} \quad n, k \in \mathbb{N} .$$

Twierdzimy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

$$x\chi_{A_n^k} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{globalnie wg miary.} \tag{16}$$

Załóżmy przeciwnie, że istnieją liczby $k \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon, \delta > 0$ takie, że przechodząc do podciągu i przenumerowując w razie konieczności, dostaniemy $\mathrm{m}\left(B_n^k\right) > \varepsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $B_n^k = \left\{t \colon x(t)\chi_{A_n^k}(t) > \delta\right\}$. Twierdzimy ponadto, że

$$a = \liminf_{n\to\infty} \left\| x - \frac{\delta}{k}\chi_{B_n^k} \right\| < \|x\| . \tag{17}$$

Jeśli nierówność (17) nie jest spełniona, to $a = \|x\|$. Biorąc $y_n = x - \frac{\delta}{k}\chi_{B_n^k}$, otrzymujemy $0 \leqslant y_n \leqslant x$, skąd $y_n^* \leqslant x^*$. Korzystając z Twierdzenia Helly'ego, przechodząc do podciągu w razie konieczności, wnioskujemy, że $y_n^* \to y$ punktowo i $y = y^*$. Z Lematu 2.34, $x^* \in E_a$. Zatem warunki $y \leqslant x^*$ i $|y_n^* - y| \leqslant 2x^*$ implikują $\left\|y_n^* - y\right\| \to 0$. Z drugiej strony, z uwagi na równość $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| = \|x\|$, dostajemy

$$\left\|y_n^*\right\| = \|y_n\| \to \|x\| = \|x^*\| .$$

Z Twierdzenia 2.30, x^* jest LM punktem, Stąd $y = x^*$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $\|y\| < \|x\|$. W konsekwencji $\left\|y_n^* - x^*\right\| \to 0$. Z Lematu 2.36 wnioskujemy, że

$$y_n \to x \quad \text{globalnie wg miary,}$$

sprzeczność z definicją y_n, co kończy dowód nierówności (17).

Oznaczmy $\left(A_n^k\right)^c = I \backslash A_n^k$. Mamy

$$\|x_n\| = \left\| x_n\chi_{A_n^k} + x_n\chi_{\left(A_n^k\right)^c} \right\| \leqslant \left\| \left(1 - \frac{1}{k}\right) x\chi_{A_n^k} + x_n\chi_{\left(A_n^k\right)^c} \right\| \leqslant \left\| x - \frac{\delta}{k}\chi_{B_n} \right\| \to a < \|x\| ,$$

sprzeczność z założeniem, że $\|x_n\| \to \|x\|$, co dowodzi (16). Razem z warunkiem $x\chi_{A_n^k} \leqslant x \in E_a$ otrzymujemy $\left\|x\chi_{A_n^k}\right\| \to 0$. Z nierówności $x_n\chi_{\left(A_n^k\right)^c} \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) x\chi_{\left(A_n^k\right)^c}$ wnioskujemy, że

$$(x - x_n)\chi_{\left(A_n^k\right)^c} \leqslant \frac{1}{k} x\chi_{\left(A_n^k\right)^c} ,$$

a co za tym idzie,

$$\left\|(x-x_n)\chi_{(A_n^k)^c}\right\| \leqslant \frac{1}{k}\|x\|.$$

Niech $\varepsilon > 0$ i $k_0 > \frac{2}{\varepsilon}\|x\|$. Stąd istnieje n_0 takie, że $\left\|x\chi_{A_n^{k_0}}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > n_0$. Wtedy

$$\|x-x_n\| \leqslant \left\|(x-x_n)\chi_{A_n^{k_0}} + (x-x_n)\chi_{\left(A_n^{k_0}\right)^c}\right\| < \varepsilon$$

dla $n > n_0$, co kończy dowód. □

Poniższy wniosek wynika natychmiast z Twierdzenia 2.37, Lematu 2.34 i Twierdzenia 2.30.

Wniosek 2.39. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Wtedy x jest LLUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x^* jest LLUM punktem.

Twierdzenie 2.40. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I i $0 \leqslant x \in E$.

(i) Jeżeli x jest ULUM punktem, to x^* jest ULUM punktem i $\mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) < x^*(\infty)\} = 0$.

(ii) Załóżmy, że $E \in (OC)$ lub x jest H_g punktem. Jeżeli x^* jest ULUM punktem, to x jest ULUM punktem.

Dowód. (i) Warunek $\mathrm{m}\{t \in I\colon x(t) < x^*(\infty)\} = 0$ wynika z Lematu 2.28. Załóżmy, że $x^* \leqslant x_n$ i $\|x_n\| \to \|x^*\|$. Weźmy $C = \{t \in I\colon x(t) > x^*(\infty)\}$. Jeśli $\mathrm{m}(C) < \infty$ ($\mathrm{m}(C) = \infty$), to z Lematu 2.25, istnieje transformacja zachowująca miarę $\sigma\colon I \to I$ ($\sigma\colon C \to [0,\infty)$), taka, że $x^* \circ \sigma = x$ p.w. ($x^* \circ \sigma = x$ p.w. na C). Jeżeli $\mathrm{m}(C) < \infty$, to $x = x^* \circ \sigma \leqslant x_n \circ \sigma =: \tilde{x}_n$. Mamy

$$\|x_n - x^*\| = \|x_n \circ \sigma - x^* \circ \sigma\| = \|x - \tilde{x}_n\| \to 0.$$

Załóżmy, że $\mathrm{m}(C) = \infty$. Weźmy

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(\sigma(t)), & \text{jeśli } t \in C, \\ 0, & \text{jeśli } t \notin C. \end{cases}$$

Wtedy $x\chi_C = x^* \circ \sigma \leqslant x_n \circ \sigma = \tilde{x}_n\chi_C$. Niech $y_n = \tilde{x}_n + x^*(\infty)\chi_D$, gdzie $D = \{t \in \mathcal{S}(x)\colon x(t) = x^*(\infty)\}$. Zauważmy, że $x\chi_C \sim x$ i $y_n \sim \tilde{x}_n$ (por. dowód Twierdzenia 2.31), skąd $\|y_n\| \to \|x\|$. Skoro $x \leqslant y_n$, to $\|y_n - x\| \to 0$. W konsekwencji

$$\|x_n - x^*\| = \|x_n \circ \sigma - x^* \circ \sigma\| = \|\tilde{x}_n - x\chi_C\| = \|y_n - x\| \to 0.$$

(ii) Niech $x \leqslant x_n$ i $\|x_n\| \to \|x\|$. Wtedy $x^* \leqslant x_n^*$ oraz $\left\|x_n^*\right\| \to \|x^*\|$. Z założenia wnioskujemy, że $\left\|x_n^* - x^*\right\| \to 0$. Zatem $x_n \xrightarrow{m} x$ (wystarczy wykorzystać dowód implikacji (iii)$\Rightarrow$(ii) Twierdzenia 2.35). Z faktów $x_n \xrightarrow{m} x$ oraz $\left\|x_n^* - x^*\right\| \to 0$ wnioskujemy, że $\|x_n - x\| \to 0$ na mocy Wniosku 1.6 w pracy [10], gdy $E \in (OC)$. W przypadku, gdy x jest H_g punktem, to z warunków $x_n \xrightarrow{m} x$ oraz $\|x_n\| \to \|x\|$ wynika, że $\|x_n - x\| \to 0$. □

Zwróćmy uwagę, że Twierdzenie 2.40 (ii) zachodzi przy słabszym założeniu, że $x \in E_a$ zamiast $E \in (OC)$, lecz wtedy trzeba wykorzystać Proposition 2.4 w pracy [20], co wymaga zastosowania teorii algebr von-Neumanna (symetrycznych przestrzeni mierzalnych operatorów).

Warto zwrócić uwagę, że pełną charakteryzację dla punktu ULUM znajdziemy w pracy [16], Twierdzenie 3.10. Z tego twierdzenia wynika poniższy wniosek.

Wniosek 2.41. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I oraz $x \in E_a$. Wtedy x jest ULUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x jest UM i H_g punktem.

Przyjmijmy, że dla każdej globalnej własności P, przez wyrażenie $E \in (P^*)$ rozumiemy tak, że E ma własność P tylko dla nierosnących funkcji nieujemnego stożka z E (zob. Uwagę 2.29). Na przykład, mówimy, że $E \in (SM^*)$ gdy dla każdego $0 \leqslant x \leqslant y$ warunki $x = x^*$, $y = y^*$ oraz $y \neq x$ implikują, że $\|x\| < \|y\|$. Oczywiście, jeśli $E \in (P)$, to $E \in (P^*)$.

Naturalne pytanie, czy zachodzi implikacja przeciwna, było rozważane w [6] dla własności wypukłościowych (ścisła wypukłość). W przypadku własności monotonicznościowych otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.42. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha na I. Wtedy

(i) $E \in (SM)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (SM^*)$ i $x^*(\infty) = 0$ dla każdego $x \in E$.

(ii) $E \in (LLUM)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (LLUM^*)$.

(iii) Niech $E \in (OC)$. Wtedy $E \in (ULUM)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (ULUM^*)$.

Dowód. Wystarczy zastosować powyższe wyniki dotyczące LM, UM, LLUM i ULUM punktów. Przypadki (*i*) oraz (*ii*) są nowe, przypadek (*iii*) był udowodniony w Twierdzeniu 2.35 (równoważność (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*)). □

Uwaga 2.43. Niech $E = E([0,\infty))$. Zauważmy, że $x^*(\infty) = 0$ dla każdego $x \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_{[0,\infty)} \notin E$.

2.2. Punkty monotoniczności i porządkowej ciągłości w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$

W niniejszym rozdziale zajmować się będziemy własnościami punktów w przestrzeniach Lorentza $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$ dla $1 \leqslant p < \infty$ (zob. Definicje 2.14, 2.16). Wyniki te będą miały zastosowanie w dowodzeniu odpowiednich kryteriów dla punktów w przestrzeniach Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\phi,w}$. Ponadto wywnioskujemy z nich charakteryzacje własności globalnych dla przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$.

Zauważmy, że $\Gamma_{p,w}[0,1) \in (OC)$ oraz $\Lambda_{p,w}[0,1) \in (OC)$ (z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności). Ponadto dla $I = [0,\infty)$ wnioskujemy podobnie, gdy $\int_0^\infty w = \infty$ (zob. również [13], [43]). Zatem punkty porządkowej ciągłości sensownie jest rozważać tylko w pozostałym przypadku.

W dalszej części tego rozdziału będziemy używać następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} &\gamma = \inf\{t\colon\ \mathrm{m}(\mathcal{S}(w) \cap (t,\alpha)) = 0\} \quad \text{dla} \quad \alpha = 1 \text{ lub } \alpha = \infty, \\ &\beta = \sup\{t\colon\ \mathrm{m}(\mathcal{S}(w) \cap [0,t)) = 0\}, \end{aligned} \tag{18}$$

przyjmując $\inf \emptyset := \alpha$, $\sup \emptyset := 0$. Oczywiście α jest końcem przedziału $I = [0,\alpha)$ (zob. (2)).

Twierdzenie 2.44. Niech $E = \Gamma_{p,w}[0,\infty)$ lub $E = \Lambda_{p,w}[0,\infty)$, $\int_0^\infty w < \infty$ oraz $x \in E$. Wtedy $x \in E_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^*(\infty) = 0$.

Dowód. <u>Konieczność</u> wynika z Lematu 2.32.
<u>Dostateczność.</u> Udowodnimy tylko przypadek $E = \Gamma_{p,w}$, z uwagi na to, że dla przestrzeni $\Lambda_{p,w}$ dowód jest prostszy. Niech $\varepsilon > 0$. Weźmy

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\left(\int_0^\infty w\right)^{1/p}}, \quad A_{\varepsilon_1} = \{t\colon x^*(t) \geqslant \varepsilon_1\} \quad \text{oraz} \quad t_{\varepsilon_1} = \mathrm{m}(A_{\varepsilon_1}).$$

Skoro $x^*(\infty) = 0$, to $t_{\varepsilon_1} < \infty$. Weźmy zbiór B_{ε_1} taki, że

$$\mathrm{m}(B_{\varepsilon_1}) = t_{\varepsilon_1} \quad \text{i} \quad \int_0^{t_{\varepsilon_1}} x^*(s)ds = \int_{B_{\varepsilon_1}} |x(s)|ds$$

(zob. Lemat 2.8). Niech $A_n \downarrow \emptyset$, tzn. $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{m}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Oznaczmy $A_n^1 = A_n \cap B_{\varepsilon_1}$ i $A_n^2 = A_n \backslash B_{\varepsilon_1}$. Zauważmy, że $\mathrm{m}(A_n^1) \downarrow 0$ oraz, z nierówności Hardy'ego–Littlewooda (zob [3]),

$$\left(x\chi_{A_n^1}\right)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left(x\chi_{A_n^1}\right)^*(s)ds \leqslant \frac{1}{t}\int_0^{m\left(A_n^1\right)} x^*(s)ds$$

dla wszystkich $t > 0$ i dostatecznie dużych n. Stąd $(x\chi_{A_n^1})^{**}(t) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla wszystkich $t > 0$. Oczywiście $\left(x\chi_{A_n^1}\right)^{**} \leqslant x^{**}$, skąd $\left(\left(x\chi_{A_n^1}\right)^{**}\right)^p w \leqslant (x^{**})^p w \in L^1$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zdominowanej zbieżności, $\left\|x\chi_{A_n^1}\right\| < \varepsilon/2$ dla dostatecznie dużych n. Ponadto $\left\|x\chi_{A_n^2}\right\| \leqslant \varepsilon_1\left(\int_0^\infty w\right)^{1/p} = \varepsilon/2$ i w konsekwencji $\left\|x\chi_{A_n}\right\| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. To kończy dowód. □

Twierdzenie 2.45. Niech $E = \Gamma_{p,w}$ lub $E = \Lambda_{p,w}$. Wtedy $x \in E^+$ jest LM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x^*) \cap (\gamma, \alpha)) = 0$,

(ii) $\mathrm{m}\{t \in I \colon 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18) oraz α w (2).

Dowód. Rozważmy dowód dla przestrzeni $E = \Gamma_{p,w}$. Gdy $E = \Lambda_{p,w}$, to dowód jest nawet prostszy, a ponadto twierdzenie wynika również z wyników w pracy [28].
Konieczność. Warunek (ii) wynika z Lematu 2.27.

(i) Jeżeli $\gamma = \alpha$, to warunek (i) jest spełniony. Załóżmy przez transpozycję, że $\gamma < \alpha$ i $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x^*) \cap (\gamma, \alpha)) > 0$. Oznaczmy $z = x^*\chi_{(0,\gamma)}$. Wtedy $0 \leqslant z \leqslant x^*$, $z \neq x^*$ i $\|z\| = \|x^*\|$. Stąd x^* nie jest LM punktem, więc z Twierdzenia 2.30 wynika, że x nie jest LM punktem
Dostateczność. Niech $y \in E^+$ będzie takie, że $0 \leqslant y \leqslant x$, $y \neq 0$. Wtedy $x - y \leqslant x$ oraz $(x - y)(t) < x(t)$ dla p.w. $t \in \mathcal{S}(y)$.

Załóżmy, że $\gamma < \alpha$ lub $x^*(\infty) = 0$. Z Lematu 2.22, istnieje taki zbiór $B \subset I$ o dodatniej mierze, że

$$(x - y)^*(t) < x^*(t)$$

dla $t \in B$. Z warunku (*i*) wnioskujemy, że $B \subset [0, \gamma)$. Ponadto istnieje $t_0 \in B$, że

$$\int_0^{t_0} (x - y)^* < \int_0^{t_0} x^*.$$

Dla każdego $t_0 < t < \gamma$, otrzymujemy

$$(x-y)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (x-y)^* < \frac{1}{t}\int_0^t x^* = x^{**}(t).$$

Skoro $(x-y)^{**} \leqslant x^{**}$ i $m(\mathcal{S}(w) \cap (t_0, \gamma)) > 0$, zatem $\|x-y\| < \|x\|$, tzn. x jest LM punktem.

Załóżmy, że $\gamma = \alpha = \infty$ i $x^*(\infty) > 0$. Wtedy $m(\mathcal{S}(x)) = \infty$. Weźmy element

$$z(t) = \begin{cases} (x-y)(t), & \text{jeśli } (x-y)(t) \geqslant x^*(\infty), \\ 0, & \text{jeśli } x(t) = 0, \\ x^*(\infty), & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy $(x-y)(t) \leqslant z(t) < x(t)$ dla $t \in \mathcal{S}(y)$, skoro $m\{t \in I : 0 < x(t) \leqslant x^*(\infty)\} = 0$. Ponadto $x - y \leqslant z \leqslant x$. Zauważmy, że $x^*(\infty) = z^*(\infty)$, $\mathcal{S}(z) = \mathcal{S}(x) \supset \mathcal{S}(y)$ i $m\{t \in I : 0 < z(t) < z^*(\infty)\} = 0$. Oczywiście $x(t) > z^*(\infty)$ dla wszystkich $t \in \mathcal{S}(z)$. Na mocy Lematu 2.24 wnioskujemy, że istnieje taki zbiór $C \subset I$ o dodatniej mierze, że

$$(x-y)^*(t) \leqslant z^*(t) < x^*(t)$$

dla każdego $t \in C$. Ponadto istnieje $t_0 \in C$, że spełniona jest nierówność

$$\int_0^{t_0} (x-y)^* < \int_0^{t_0} x^*.$$

Dla każdego $t > t_0$ mamy

$$(x-y)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (x-y)^* < \frac{1}{t}\int_0^t x^* = x^{**}(t).$$

Nierówności $(x-y)^{**} \leqslant x^{**}$ i $m(\mathcal{S}(w) \cap (t_0, \infty)) > 0$ implikują, że $\|x-y\| < \|x\|$, więc x jest LM punktem. □

Poniższy wniosek wynika bezpośrednio z Twierdzeń 2.37, 2.44 i 2.45. Kryterium dla przestrzeni $E = \Lambda_{p,w}$ może być również wywnioskowane z Wniosku 2.52 przy $\phi(u) = u^p$.

Wniosek 2.46. Niech $E = \Gamma_{p,w}$ lub $E = \Lambda_{p,w}$. Wtedy $x \in E^+$ jest LLUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $m(\mathcal{S}(x^*) \cap (\gamma, \alpha)) = 0$,

(ii) $x^*(\infty) = 0$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18) oraz α w (2).

Twierdzenie 2.47. Niech $E = \Gamma_{p,w}$ lub $E = \Lambda_{p,w}$. Wtedy $x \in E^+$ jest UM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\mathrm{m}\{s \in I : x(s) < x^*(\gamma)\} = 0$,

(ii) $x^*(\gamma) = x^*(\gamma^-)$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18), oraz $x^*(\gamma^-) = \lim_{t\to\gamma^-} x^*(t)$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko dla $E = \Gamma_{p,w}$.
Konieczność. (i) Jeśli $\gamma = \infty$ lub $x^*(\gamma) = x^*(\infty)$, to warunek (i) zachodzi na mocy Lematu 2.28. Załóżmy zatem, że $\gamma < \infty$, $x^*(\gamma) > x^*(\infty)$ oraz $\mathrm{m}\{t \in I : x(t) < x^*(\gamma)\} > 0$. Stąd $x^*(\gamma) > 0$.

Ponadto $\gamma < \alpha$ w przypadku, gdy $\alpha = 1$. Istotnie, gdyby $\alpha = \gamma = 1$, to definiując zbiory A_k następująco:

$$A_k = \left\{ t \in I : x(t) + \frac{1}{k} < x^*(\gamma) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

otrzymamy, że istnieje takie $k_0 \in \mathbb{N}$, że $\mathrm{m}(A_{k_0}) > 0$ oraz $\mathrm{d}_x(x^*(\gamma) - 1/k_0) < \mathrm{d}_{x^*}(x^*(\gamma) - 1/k_0)$, sprzeczność z warunkiem $x \sim x^*$.

Rozważmy dwa przypadki.
1. Załóżmy, że $\alpha = \infty$. Z warunku $x^*(\infty) < x^*(\gamma)$ i prawostronnej ciągłości funkcji x^* wynika, że istnieje $t_0 > \gamma$ dla którego

$$x^*(\infty) < x^*(t_0) < x^*(\gamma).$$

Biorąc $y = x^*\chi_{[0,t_0)} + x^*(t_0)\chi_{[t_0,\infty)}$ mamy, że $y \geqslant x^*$, $y \neq x^*$ oraz $\|y\| = \|x^*\|$. Stąd x^* nie jest UM punktem. Na mocy Twierdzenia 2.31 element x również nie jest UM punktem.
2. Niech teraz $\alpha = 1$. Wtedy $\gamma < 1$ i wówczas $x^*(1^-) < x^*(\gamma)$, gdyż w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy sprzeczność z faktem iż $x \sim x^*$ (jak wyżej). Istnieje zatem $\gamma < t_0 < 1$, dla którego zachodzi nierówność

$$x^*(1^-) < x^*(t_0) < x^*(\gamma).$$

Kontynuując dowód jak w punkcie 1. wnioskujemy, że x nie jest UM punktem.

(ii) W przypadku $\gamma = \infty$ warunek jest spełniony. Załóżmy, że $\gamma < \infty$, $x^*(\gamma) \neq x^*(\gamma^-)$. Wtedy $a = \lim_{t\to\gamma^-} x^*(t) > x^*(\gamma)$. Zdefiniujmy $z = x^* + \frac{1}{2}[a - x^*(\gamma)]\chi_{[\gamma,\alpha)}$. Mamy wtedy $x^* \leqslant z$, $x^* \neq z$ oraz $\|x^*\| = \|z\|$, skąd x^* nie jest UM punktem, więc, na mocy Twierdzenia 2.31, element x nie jest UM punktem.

Dostateczność. Z uwagi na (i) oraz Twierdzenie 2.31 wystarczy pokazać, że x^* jest UM punktem. Niech $x^* \leqslant z$ i $x^* \neq z$. Wystarczy pokazać, że istnieje zbiór $A \subset [0,\gamma)$ dodatniej miary, że dla $t \in A$ zachodzi nierówność $x^*(t) < z^*(t)$ i podążać jak w dowodzie dostateczności Twierdzenia 2.45.

Załóżmy przeciwnie, że $x^*(t) = z^*(t)$ dla p.w. $t \in [0,\gamma)$. Z Lematu 2.24, istnieje zbiór B dodatniej miary, że $x^*(t) < z^*(t)$ dla $t \in B$. W konsekwencji $\mathrm{m}(B \cap [\gamma,\alpha]) > 0$. Niech $B_n = \{t \in B\colon x^*(t) + 1/n < z^*(t)\}$. Wtedy $\mathrm{m}(B_{n_0}) > 0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Stąd $z^*(\gamma) > x^*(\gamma) + 1/n_0$, a wtedy

$$x^*(t) = z^*(t) > x^*(\gamma) + 1/n_0$$

dla p.w. wszystkich $0 < t < \gamma$. Wtedy $\lim_{t\to\gamma^-} x^*(t) \geqslant x^*(\gamma) + 1/n_0$, otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem (ii). □

Uwaga 2.48. Przypomnijmy, że w przestrzeni ściśle monotonicznej E własności LM punktu i UM punktu pokrywają się (zob. Uwaga 1.8). Tak już jednak nie jest, gdy E nie jest ściśle monotoniczna.

Weźmy $E = \Lambda_{p,w}(I)$ lub $E = \Gamma_{p,w}(I)$ dla $I = [0,\infty)$ oraz $\gamma = 1$ (gdzie γ jest zdefiniowane w (18)). Niech $x = \chi_{[0,\infty)}$ oraz $y = \chi_{[0,1]}$. Wtedy $x, y \in E$ oraz, na mocy Twierdzeń 2.45 oraz 2.47, element x nie jest LM punktem ale jest UM punktem podczas gdy element y jest LM punktem ale nie jest UM punktem.

Wiadomo, że $\Gamma_{p,w} \in \left(H_g\right)$ dla każdej funkcji wagowej w oraz dla $1 \leqslant p < \infty$ (zob Twierdzenie 4.1 w pracy [16]). Ponadto $\Lambda_{1,w} \in \left(H_g\right)$ na mocy Wniosku 1.3 z pracy [10], natomiast, patrząc bardziej ogólnie, $\Lambda_{p,w} \in \left(H_g\right)$ wynika z Wniosku 3.21 w [49]. W konsekwencji, wykorzytując Wniosek 2.41, Twierdzenie 2.44 oraz Twierdzenie 2.47 w niniejszej rozprawie otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 2.49. Niech $E = \Gamma_{p,w}$ lub $E = \Lambda_{p,w}$, $x \in E^+$ oraz $x^*(\infty) = 0$. Wtedy x jest ULUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\mathrm{m}\{s \in I\colon x(s) < x^*(\gamma)\} = 0$,

(ii) $x^*(\gamma) = x^*(\gamma^-)$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18).

2.3. Zastosowania

2.3.1. Lokalna struktura przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\phi,w}$

Przypomnijmy najpierw definicję przestrzeni Orlicza–Lorentza (dla szczegółów patrz początek rozdziału 3). Niech ϕ będzie funkcją Orlicza, a w - nierosnącą, nieujemną, lokalnie całkowalną funkcją wagową. Dla $x \in L^0(I)$ zdefiniujmy wypukły modular I_ϕ wzorem

$$I_\phi(x) = \begin{cases} \int_I \phi(x^*(t))w(t)dt, & \text{jeśli} \quad \phi \circ x \in \Lambda_{1,w}(I), \\ \infty, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przestrzeń modularna $\Lambda_{\phi,w}$ generowana przez ten modular jest nazywana przestrzenią Orlicza–Lorentza, tzn.

$$\Lambda_{\phi,w} = \{x \in L^0(I) \colon \phi \circ (\lambda x) \in \Lambda_{1,w} \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}.$$

Rozważamy tę przestrzeń z normą Nakano–Luxemburga, tj.

$$\|x\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 \colon I_\phi(x/\lambda) \leqslant 1\}.$$

W tym rozdziale przedyskutujemy wyniki dotyczące LM, UM, LLUM i ULUM punktów we wspomnianych przestrzeniach Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\phi,w}$. Wynikają one z ogólnych faktów dotyczących przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego E_ϕ jak również z wyników przedstawionych w rozdziale 2.2.

Warto zauważyć, że W. Gong i Z. Shi w pracy [28] badali te punkty pokazując dowód bezpośredni w klasie funkcyjnych przestrzeni Orlicza–Lorentza generowanych przez funkcje Orlicza, które znikają tylko w zerze i przymują tylko skończone wartości. Ponadto kryterium na LLUM punkty i ULUM punkty w pracy [28] są podane tylko dla $I = [0, 1)$. Poniżej zaprezentowane są warunki w pełnej ogólności.

Wniosek 2.50. Niech $x \in \Lambda^+_{\phi,w}(I)$. Wtedy x jest LM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy następujęce warunki są spełnione

(i) $\inf\{\lambda > 0 \colon \int_0^\alpha \phi(x^*(t)/\lambda)w(t)dt < \infty\} < 1$,

(ii) $\mathrm{m}\{t \in I \colon 0 < x(t) \leqslant \max\{a_\phi, x^*(\infty)\}\} = 0$,

(iii) $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x^*) \cap (\gamma, \alpha)) = 0$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18).

Dowód. Zastosujemy Twierdzenie 2 z pracy [37] dla $E = \Lambda_{1,w}(0, \alpha)$ oraz Twierdzenie 2.45 niniejszej rozprawy. Pokażemy równoważność odpowiednich warunków dowodzonego wniosku i wspomnianego Twierdzenia 2 przy wykorzystaniu Twierdzenia 2.45. Przez (i)-(iii) będziemy rozumieć warunki dowodzonego wniosku. Gdy będzie mowa o odpowiednich warunkach Twierdzenia 2 z pracy [37] będziemy pisali np. (i) Tw. 2. Analogicznie odwołamy się np. do warunku (i) Twierdzenia 2.45, tzn. (i) Tw. 2.45.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &= \quad \text{(i) Tw. 2.} \\ \text{(ii)} \quad &\Rightarrow \quad \text{(ii) Tw. 2.} \\ \text{(ii) wraz z (iii) oraz Tw. 2.45} \quad &\Rightarrow \quad \text{(iii) Tw. 2.} \\ \text{(ii)} \quad &\Leftarrow \quad \text{(ii) oraz (iii) Tw. 2 oraz (ii) Tw. 2.45.} \\ \text{(iii)} \quad &\Leftarrow \quad \text{(iii) Tw. 2 oraz (i) Tw. 2.45.} \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.51. Niech $x \in \Lambda^+_{\phi,w}(I)$. Wtedy x jest UM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $x = b_\phi \chi_I$ lub spełnione są następujące warunki:

(i) $x \geqslant \max\{a_\phi, x^*(\gamma)\}\chi_I$,

(ii) $\int_0^\alpha \phi(x^*(t))w(t)dt = 1$,

(iii) $x^*(\gamma^-) = x^*(\gamma)$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18).

Dowód. Zastosujemy Twierdzenie 1 w pracy [37] dla $E = \Lambda_{1,w}(I)$ oraz Twierdzenie 2.47 niniejszej rozprawy. Pokażemy, wykorzystując sposób notacji z dowodu poprzedniego wniosku, równoważność odpowiednich warunków dowodzonego wniosku i wspomnianego Twierdzenia 1 przy wykorzystaniu Twierdzenia 2.47. Będziemy zatem pisali na przykład (i), gdy będzie mowa o warunku dowodzonego wniosku, (i) Tw. 1, albo (i) Tw. 2.47.

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &\ \Rightarrow\ \text{(i) Tw. 1.}\\
\text{(ii)} &\ =\ \text{(ii) Tw. 1.}\\
\text{(i) wraz z (iii) oraz Tw. 2.47} &\ \Rightarrow\ \text{(iii) Tw. 1.}\\
\text{(i)} &\ \Leftarrow\ \text{(i) Tw. 1. oraz (i) Tw. 2.47.}\\
\text{(iii)} &\ \Leftarrow\ \text{(iii) Tw. 1. oraz Tw. 2.47.}
\end{aligned}$$

Ponadto zauważmy, że alternatywny warunek $x = b_\phi \chi_I$ występuje zarówno w dowodzonym wniosku jak i Twierdzeniu 1 w pracy [37]. □

Wniosek 2.52. Niech $x \in \Lambda^+_{\phi,w}(I)$. Wtedy x jest LLUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\inf\{\lambda > 0 \colon \int_0^\alpha \phi(x^*(t)/\lambda)w(t)dt < \infty\} = 0$,

(ii) $m\{t \in I \colon 0 < x(t) \leqslant a_\phi\} = 0$,

(iii) $x^*(\infty) = 0$,

(iv) $b_\phi = \infty$,

(v) $m(\mathcal{S}(x^*) \cap (\gamma, \alpha)) = 0$,

gdzie γ jest zdefiniowane w (18).

Dowód. Zastosujemy Twierdzenie 2.37, Wniosek 2.50 oraz Wniosek 3.28 z niniejszej rozprawy. Zwróćmy uwagę, że równość $x^*(\infty) = 0$ oznacza, że $(\phi \circ x)^*(\infty) = 0$, czyli $\phi \circ x \in (\Lambda_{1,w}(I))_a$. Warto również zauważyć, że warunek (i) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ spełnia lokalny warunek $\Delta_2^E(x)$ i $\phi \circ x \in (\Lambda_{1,w}(I))_a$ przy założeniu, że $b_\phi = \infty$ (zob. Definicję 3.12). □

Kryteria na ULUM punkt w przestrzeni $\Lambda_{1,w}(I)$ były udowodnione bezpośrednio we Wniosku 5.1 w [55] oraz, przy pewnych dodatkowych założeniach, w Twierdzeniu 5 w [28]. Gdyby były znane kryteria na H_g punkt w $\Lambda_{\phi,w}(I)$ (nie były jeszcze rozważane), to moglibyśmy wywnioskować taką charakteryzację opisującą ULUM punkty z Wniosków 2.41, 2.51 oraz 3.28 w niniejszej rozprawie. Jeżeli ϕ spełnia odpowiedni globalny warunek Δ_2, to $\Lambda_{\phi,w}(I) \in H_g$ na mocy Wniosku 3.21 w pracy [49]. Wtedy, jeśli $0 \leqslant x \in \left(\Lambda_{\phi,w}(I)\right)_a$ (zob. Wniosek 3.28), to x jest ULUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x jest UM punktem. Przypomnijmy, że jeżeli $\phi \in \Delta_2$ oraz $\int_I w = \infty$ dla $I = [0, \infty)$, to $\Lambda_{\phi,w} = \left(\Lambda_{\phi,w}\right)_a$.

Uwaga 2.53. Z Wniosków 2.50, 2.51 oraz 2.52 otrzymujemy w szczególności Twierdzenia dla przestrzeni $\Lambda_{p,w}$ biorąc $\phi(u) = u^p$.

2.3.2. Globalna struktura przestrzeni Lorentza $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$

Poniższy wniosek został pokazany wprost w pracy [13] (Twierdzenie 2.2). Jednocześnie wniosek ten wynika z wcześniejszych twierdzeń rozprawy.

Wniosek 2.54. Następujące warunki są równoważne

(a) $\Gamma_{p,w} \in (LLUM)$,

(b) $\Gamma_{p,w} \in (SM)$,

(c) Jeżeli $\alpha = \infty$, to $\int_0^\infty w(t)dt = \infty$,

jeżeli $\alpha = 1$, to $\mathrm{m}((\beta, 1) \cap \mathcal{S}(w)) > 0$ dla $\beta \in (0, 1)$.

Dowód. Implikacja $(a) \Rightarrow (b)$ wynika z definicji.

$(b) \Rightarrow (c)$ Gdyby $\alpha = \infty$ i $\int_0^\infty w(t)dt < \infty$, wtedy dla $x = \frac{1}{2}\chi_{(0,1)} + \chi_{(1,\infty)} \in \Gamma_{p,w}$ wywnioskowalibyśmy, że x nie jest LM punktem na mocy Twierdzenia 2.45. Zatem $\Gamma_{p,w} \notin (SM)$. Niech $\alpha = 1$ i $\mathrm{m}((\beta, 1) \cap \mathcal{S}(w)) = 0$ dla pewnego $\beta \in (0, 1)$. Z Twierdzenia 2.45, $x = \chi_{(0,1)} \in \Gamma_{p,w}$ nie jest LM punktem.

$(c) \Rightarrow (a)$ Zauważmy, że (c) implikuje, że każdy punkt x spełnia warunki (i) oraz (ii) Wniosku 2.46, zatem każdy punkt jest LLUM punktem, co kończy dowód. □

Wniosek 2.55. Przestrzeń $\Gamma_{p,w}$ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ściśle monotoniczna.

Dowód. Z uwagi na fakt, że $\Gamma_{p,w} \in \left(H_g\right)$ (zob. [16]), wniosek wynika z Twierdzenia 2.35. Z drugiej strony, korzystając z Wniosku 2.49 rozprawy, x jest ULUM punktem wtedy i tylko wtedy, gdy x jest UM punktem w przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ o ile $x^*(\infty) = 0$. Ponadto, jeżeli $E \in (SM)$, to każdy punkt $x \in E$ jest LM punktem, skąd $x^*(\infty) = 0$ dla każdego $x \in E$ (zob. Lemat 2.27). □

Można również łatwo wywnioskować odpowiednie wyniki tego rozdziału dla przestrzeni $E = \Lambda_{p,w}$.

2.4. Punkty niekwadratowości w przestrzeni $\Gamma_{p,w}$

W niniejszym rozdziale zaprezentowane są warunki konieczne na to by punkt przestrzeni symetrycznej lub przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ był punktem niekwadratowości. Następnie podane są warunki konieczne i dostateczne dla punktu niekwadratowości w przestrzeni $\Gamma_{p,w}(I)$ przy uwzględnieniu własności funkcji wagowej w oraz rodzaju przedziału I. Podział ten wynikał z technicznych różnic w procesie dowodowym. Na końcu podane są wnioski o globalnej własności niekwadratowości przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ oraz $\left(\Gamma_{p,w}\right)_a$.

Definicja 2.56. Mówimy, że element $x \in S_X$ jest punktem niekwadratowości (w sktócie NSQ punktem), jeśli

$$\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} < 2$$

dla wszystkich $y \in S_X$.

Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest niekwadratowa ($X \in (NSQ)$) jeżeli każdy punkt sfery jednostkowej S_X jest NSQ punktem.

Istotnie silniejszą własnością jest jednostajna niekwadratowość ([29]). Pełni ona ważną rolę w geometrii przestrzeni Banacha, ponieważ implikuje ona zarówno superrefleksywność jak i własność punktu stałego ([27]). Przedmiotem badań były różne rodzaje niekwadratowości oraz problemy z nimi związane ([7, 24, 25, 45, 46]).

Lemat 2.57. Niech $x, y \in L^0 \backslash \{0\}$. Jeżeli $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = 0$, to

$$(x+y)^{**}(t) < x^{**}(t) + y^{**}(t)$$

dla każdego $0 < t < m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$.

Dowód. Weźmy

$$t_0 = \sup\{t\colon (x+y)^*(t) > (x+y)^*(\infty)\}$$

i przyjmijmy, że $\sup\emptyset := 0$.

Skoro $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = 0$, to $(x+y)^*(\infty) = \max\{x^*(\infty), y^*(\infty)\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $(x+y)^*(\infty) = x^*(\infty)$. W istocie,

$$\int_0^t y^* > 0 \quad \text{oraz} \quad \int_0^t x^* > 0 \quad \text{dla każdego} \quad t > 0. \tag{19}$$

Zauważmy, że dla każdego $0 < t \leqslant t_0$, jeśli $t_0 < \infty$ i dla każdego $0 < t < t_0$ w przypadku $t_0 = \infty$, z Lematu 1 w [52], mamy

$$\int_0^t (x+y)^* < \int_0^t x^* + \int_0^t y^* \quad \text{jeśli} \quad t_0 > 0. \tag{20}$$

Ponadto, jeśli $t_0 < \infty$, to dla $t_0 < t < m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x^*(s)ds + \int_{t_0}^t y^*(s)ds &\geqslant \int_{t_0}^t x^*(\infty)ds + \int_{t_0}^t y^*(s)ds \\ &= \int_{t_0}^t (x+y)^*(\infty)ds + \int_{t_0}^t y^*(s)ds \\ &= \int_{t_0}^t (x+y)^*(s)ds + \int_{t_0}^t y^*(s)ds \\ &\geqslant \int_{t_0}^t (x+y)^*(s)ds \end{aligned} \tag{21}$$

z uwagi na $(x+y)^*(s) = (x+y)^*(\infty)$ dla każdego $s \geqslant t_0$.

Jeżeli $t_0 > 0$, to z nierówności (20) i (21) otrzymujemy

$$\int_0^t (x+y)^* < \int_0^t x^* + \int_0^t y^*$$

dla wszystkich $0 < t < m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$.

Jeżeli $t_0 = 0$, to z nierówności (19) i (21) mamy

$$\int_0^t x^*(s)ds + \int_0^t y^*(s)ds \geqslant \int_0^t (x+y)^*(s)ds + \int_0^t y^*(s)ds > \int_0^t (x+y)^*(s)ds$$

dla wszystkich $0 < t < m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$. □

Uwaga 2.58. Niech $x \in L^0 \backslash \{0\}$ oraz

$$C = \{t \colon |x(t)| > x^*(\infty)\}.$$

Wtedy funkcja x^* jest stała na $[0, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m(C) = 0$.

Dowód. Oczywiście $m(C) = m\{t \colon x^*(t) > x^*(\infty)\}$ (gdyż $x \sim x^*$) i $x^*(t) \geqslant x^*(\infty)$ dla każdego $t \geqslant 0$. Zatem $m(C) = 0$ jest równoważne wyrażeniu $x^* = a\chi_{[0,\infty)}$ dla pewnego $a > 0$. □

Poniższe dwa twierdzenia przedstawiają warunki konieczne na to, aby element x był punktem niekwadratowości w przestrzeni symetrycznej oraz w przestrzeni $\Gamma_{p,w}$.

Twierdzenie 2.59. Niech E będzie symetryczną, funkcyjną przestrzenią Banacha, $x \in S_E$ i $C = \{t \colon |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Jeżeli x jest NSQ punktem, to $\mathrm{m}(C) > 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{m}(C) = 0$. Z Uwagi 2.58, $x^*(t) = x^*(\infty) = a > 0$ dla każdego $t \geqslant 0$. Wtedy $d_x(\theta) = \infty$ dla każdego $0 \leqslant \theta < x^*(\infty)$ i $d_x(\theta) = 0$ dla każdego $\theta \geqslant x^*(\infty)$. Ponadto każda z funkcji postaci $y = \pm x^*(\infty)\chi_Z$, przy $\mathrm{m}(Z) = \infty$, jest równomierzalna z x z uwagi na równości $d_y(\theta) = \mathrm{m}(Z) = \infty$ dla każdego $0 \leqslant \theta < x^*(\infty)$ oraz $d_y(\theta) = 0$ dla każdego $\theta \geqslant x^*(\infty)$. Zatem $\|y\| = \|x\|$ dla każdej funkcji y postaci $y = \pm x^*(\infty)\chi_Z$, gdzie $\mathrm{m}(Z) = \infty$.

Oznaczmy

$$A = \{t \colon |x(t)| = x^*(\infty)\}, \quad B = \{t \colon 0 < |x(t)| < x^*(\infty)\}.$$

Przypadek I. Załóżmy, że $\mathrm{m}(A) = \infty$ i oznaczmy

$$A_+ = \{t \in A \colon x(t) > 0\}, \quad A_- = \{t \in A \colon x(t) < 0\}.$$

Jeżeli $\mathrm{m}(A_+) = \infty$, to weźmy A_+^1 i A_+^2 takie, że $A_+ = A_+^1 \cup A_+^2$, $A_+^1 \cap A_+^2 = \emptyset$ i $\mathrm{m}(A_+^1) = \mathrm{m}(A_+^2) = \infty$. Zdefiniujmy

$$y = x^*(\infty)\chi_{A_+^1} - x^*(\infty)\chi_{A_+^2}.$$

Wtedy

$$(x + y)^* = (x - y)^* = 2x^*,$$

skąd $\|x + y\| = \|x - y\| = 2\|x\|$, tzn. x nie jest NSQ punktem. Przypadek $\mathrm{m}(A_-) = \infty$ jest analogiczny.

Przypadek II. Niech $\mathrm{m}(A) < \infty$ i $\mathrm{m}(B) = \infty$. Zdefiniujmy

$$B_+ = \{t \in B \colon x(t) > 0\}, \quad B_- = \{t \in B \colon x(t) < 0\}.$$

Zauważmy, że możliwe są dwa przypadki:

$$d_{x\chi_{B_+}}(\theta) = \infty \quad \text{dla każdego} \quad 0 \leqslant \theta < x^*(\infty) \tag{22}$$

albo

$$d_{x\chi_{B_-}}(\theta) = \infty \quad \text{dla każdego} \quad 0 \leqslant \theta < x^*(\infty). \tag{23}$$

W istocie, załóżmy przeciwnie, że istnieją $\theta_1, \theta_2 < x^*(\infty)$, że

$$d_{x\chi_{B_+}}(\theta_1) < \infty \quad \text{i} \quad d_{x\chi_{B_-}}(\theta_2) < \infty.$$

Wtedy, biorąc $\theta_0 = \max\{\theta_1, \theta_2\}$, otrzymujemy

$$d_{x\chi_B}(\theta_0) = d_{x\chi_{B_+}}(\theta_0) + d_{x\chi_{B_-}}(\theta_0) < \infty.$$

A zatem

$$d_x(\theta_0) = d_{x\chi_A}(\theta_0) + d_{x\chi_B}(\theta_0) < \infty.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zachodzi warunek (22) lub (23).

Bez straty ogólności możemy założyć, że spełniony jest warunek (22), tj. $d_{x\chi_{B_+}}(\theta) = \infty$ dla wszystkich $0 \leqslant \theta < x^*(\infty)$, ponieważ w drugim możliwym przypadku dowód przebiega analogicznie. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$B_n = \left\{t \in B_+ : \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^*(\infty) < x(t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^*(\infty)\right\}.$$

Zauważmy, że $\bigcup_n B_n = B_+$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$ i $n \neq m$. Niech B_n^1, B_n^2 spełniają warunki $B_n = B_n^1 \cup B_n^2$, $\mathrm{m}(B_n^1) = \mathrm{m}(B_n^2)$ i $B_n^1 \cap B_n^2 = \emptyset$. Oznaczmy

$$D_1 = \bigcup_n B_n^1 \quad \text{i} \quad D_2 = \bigcup_n B_n^2.$$

Zauważmy, że $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = B_+$ i $\mathrm{m}(D_1) = \mathrm{m}(D_2) = \infty$. Twierdzimy, że

$$d_{x\chi_{D_1}}(\theta) = \infty \quad \text{i} \quad d_{x\chi_{D_2}}(\theta) = \infty \tag{24}$$

dla wszystkich $0 < \theta < x^*(\infty)$. Jeżeli istnieje $0 < \theta_0 < x^*(\infty)$ takie, że $d_{x\chi_{D_1}}(\theta_0) < \infty$, to weźmy n_0 takie, aby $(1 - 1/n_0)x^*(\infty) \leqslant \theta_0 < (1 - 1/(n_0 + 1))x^*(\infty)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\infty > d_{x\chi_{D_1}}\left(\left(1 - \frac{1}{n_0+1}\right)x^*(\infty)\right) &= \mathrm{m}\left\{t \in D_1 : x(t) > \left(\left(1 - \frac{1}{n_0+1}\right)x^*(\infty)\right)\right\}\\ = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} B_n^1\right) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} B_n^2\right) &= d_{x\chi_{D_2}}\left(\left(1 - \frac{1}{n_0+1}\right)x^*(\infty)\right).\end{aligned}$$

Zatem $d_{x\chi_{B_+}}((1-1/(n_0+1))x^*(\infty)) < \infty$, sprzeczność. Jeżeli $d_{x\chi_{D_2}}(\theta_0) < \infty$ dla pewnego $0 < \theta_0 < x^*(\infty)$, to dowód przebiega podobnie. To kończy dowód stwierdzenia (24).

Niech $y = x^*(\infty)\chi_{D_1} - x^*(\infty)\chi_{D_2}$. Wtedy, dla wszystkich $0 < \theta < x^*(\infty)$, mamy

$$\begin{aligned}d_{(x+y)/2}(\theta) &= \mathrm{m}\left\{t : \left|\left(\frac{x+y}{2}\right)(t)\right| > \theta\right\} \geqslant \mathrm{m}\left\{t \in D_1 : \left|\left(\frac{x+y}{2}\right)(t)\right| > \theta\right\}\\ &= \mathrm{m}\left\{t \in D_1 : \frac{x(t) + x^*(\infty)}{2} > \theta\right\} = \mathrm{m}\{t \in D_1 : x(t) > 2\theta - x^*(\infty)\}\\ &= d_{x\chi_{D_1}}(\theta_0) = \infty,\end{aligned}$$

gdzie $\theta_0 = \max\{0, 2\theta - x^*(\infty)\} < x^*(\infty)$, z uwagi na $x\chi_{D_1} \geqslant 0$ i $\mathrm{m}(D_1) = \infty$. Analogicznie, dla $0 < \theta < x^*(\infty)$, wnioskujemy, że $d_{(x-y)/2}(\theta) \geqslant d_{x\chi_{D_2}}(\theta_0) = \infty$.

Oczywiście, z założenia, że $\mathrm{m}(C) = 0$, mamy $|x(t)| \leqslant x^*(\infty)$ i $|y(t)| \leqslant x^*(\infty)$. Zatem

$$\left|\frac{x \pm y}{2}\right| \leqslant x^*(\infty),$$

skąd $d_{(x\pm y)/2}(\theta) = d_x(\theta) = 0$ dla każdego $\theta \geqslant x^*(\infty)$. Zatem $\left(\frac{x\pm y}{2}\right)^* = x^*$, czyli x nie jest NSQ punktem. □

Twierdzenie 2.60. Niech $x \in S(\Gamma_{p,w})$. Jeśli x jest NSQ punktem, to

(i) $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$,

(ii) x^* nie jest funkcją stałą na przedziale $(0, 2\gamma)$, jeśli $\alpha = \infty$;

(iii) x^* nie jest funkcją stałą na przedziale $(0, 2\gamma)$, jeśli $\alpha = 1$ i $\gamma \leqslant 1/2$;

gdzie β, γ są zdefiniowane w (18).

Dowód. (i) Załóżmy, że $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) < \beta$. To znaczy $\beta > 0$. Weźmy $a = \beta - \mathrm{m}(S(x))$, $y = b\chi_A$, gdzie $\mathrm{m}(A) = a$, $A \cap \mathcal{S}(x) = \emptyset$, i $b = \frac{1}{a}\int_0^\beta x^*$. Wtedy $y^{**}(\beta) = x^{**}(\beta)$ oraz $\left\|\frac{x\pm y}{2}\right\| = \|x\|$ z uwagi na równość

$$\left(\frac{x \pm y}{2}\right)^{**}(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \left(\frac{x \pm y}{2}\right)^* = \frac{1}{2\beta}\left(\int_0^\beta x^* + \int_0^\beta y^*\right) = x^{**}(\beta).$$

(ii) oraz (iii) W przypadku, gdy $\gamma = \infty$ dowód wynika z Uwagi 2.58 i Twierdzenia 2.59.

Załóżmy, że $\gamma < \infty$, jeśli $\alpha = \infty$, lub $\gamma \leqslant 1/2$, jeśli $\alpha = 1$. Ponadto przypuśćmy przez transpozycję, że

$$x^*\chi_{(0,2\gamma)} = a\chi_{(0,2\gamma)} \quad \text{dla pewnego} \quad a > 0. \tag{25}$$

Niech $C = \{t \colon |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Wtedy, w przypadku, gdy $\alpha = \infty$, Twierdzenie 2.59 implikuje $\mathrm{m}(C) \geqslant 2\gamma$. Stąd $a > x^*(\infty)$. Z Lematu 2.8 istnieje zbiór e_1 miary γ, że $\int_0^\gamma x^* = \int_{e_1} |x|$. Dla elementu $x\chi_{I\setminus e_1}$ z tego samego lematu istnieje zbiór e_2 miary γ, że $\int_0^\gamma (x\chi_{I\setminus e_1})^* = \int_{e_2} |x\chi_{I\setminus e_1}|$. Oczywiście zbiory e_1 i e_2 są rozłączne oraz $\int_0^\gamma (x\chi_{I\setminus e_1})^* = \int_\gamma^{2\gamma} x^*$ z uwagi na (25). Z drugiej strony $\int_{e_2} |x| = \int_{e_2} |x\chi_{I\setminus e_1}|$. Podsumowując otrzymujemy, że

$$\int_0^\gamma x^* = \int_{e_1} |x| \quad \text{oraz} \quad \int_\gamma^{2\gamma} x^* = \int_{e_2} |x|.$$

Ponadto $e_1 \cup e_2 \subset C$ i $|x(t)| = a$ dla $t \in e_1 \cup e_2$. Biorąc $y = x\chi_{e_1} - x\chi_{e_2}$ mamy

$$y^*\chi_{(0,2\gamma)} = x^*\chi_{(0,2\gamma)} \quad \text{oraz} \quad (x+y)^*\chi_{(0,\gamma)} = (x-y)^*\chi_{(0,\gamma)} = 2x^*\chi_{(0,\gamma)}.$$

Z uwagi na $m(\mathcal{S}(w) \cap (\gamma, \alpha)) = 0$ mamy, że $y \in S(\Gamma_{p,w})$ oraz $\|x \pm y\| = 2\|x\|$, tzn. x nie jest NSQ punktem. □

Twierdzenie 2.61. Niech $x \in S(\Gamma_{p,w}[0,\infty))$, β i γ będą jak w (18). Niech ponadto funkcja wagowa będzie taka, że $\gamma = \infty$. Element x jest NSQ punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $m(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$ i funkcja x^* nie jest stała na przedziale $[0,\infty)$.

Dowód. Konieczność wynika z Twierdzenia 2.60.
Dostateczność. Niech $y \in S(\Gamma_{p,w}[0,\infty))$. Jeśli $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = 0$ to z Lematu 2.57, $(x+y)^{**}(t) < x^{**}(t)+y^{**}(t)$ dla wszystkich $t \in (0, m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))$. Ponieważ $m(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$, zatem $m(\mathcal{S}(w) \cap (\beta, m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))) > 0$, skąd $\|x+y\| < 2$ (zob. Uwaga 2.15 i definicja liczby β, (18)), tzn. x nie jest NSQ punktem.

Teraz załóżmy, że $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) > 0$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} A_1 &= \{t \in I \colon x(t)y(t) > 0\}, \quad A_2 = \{t \in I \colon x(t)y(t) < 0\}, \\ A_3 &= \{t \in I \colon x(t)y(t) = 0 \ \text{ i } \ |x(t)| + |y(t)| > 0\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Mamy

$$m(A_1 \cup A_2) > 0. \tag{27}$$

Oczywiście

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{dla} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad \text{oraz} \quad i \neq j. \tag{28}$$

Rozważymy dwa niezależne przypadki i ich podprzypadki.
Przypadek I. $(|x| + |y|)^*(\infty) = 0$.
Przypadek II. $(|x| + |y|)^*(\infty) > 0$.

Przypadek II.A. Istnieje $t_0 > 0$ takie, że $(x+y)^*(t_0) < (|x|+|y|)^*(t_0)$ lub istnieje takie $t_1 > 0$, że $(x-y)^*(t_1) < (|x|+|y|)^*(t_1)$.

Przypadek II.B. Dla każdego $t > 0$, $(x+y)^*(t) = (x-y)^*(t) = (|x|+|y|)^*(t)$.
Przedyskutujmy teraz wymienione przypadki.
Dowód Przypadku I. Skoro $(|x| + |y|)^*(\infty) = 0$ i $\gamma = \infty$, to $|x| + |y|$ spełnia warunki (i) oraz (ii) Twierdzenia 2.45, tzn. $|x| + |y|$ jest LM punktem. Oczywiście mamy

$$|(x+y)(t)| < (|x|+|y|)(t) \text{ dla } t \in A_2 \quad \text{oraz} \quad |(x-y)(t)| < (|x|+|y|)(t) \text{ dla } t \in A_1.$$

Skoro $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$, to wobec warunku (27) jedna z nierówności zachodzi

$$\|x + y\| < \||x| + |y|\| \leqslant \|x\| + \|y\| = 2 \quad \text{lub} \quad \|x - y\| < \||x| + |y|\| \leqslant \|x\| + \|y\| = 2.$$

Dowód przypadku II.A. Załóżmy, że istnieje $t_0 > 0$ takie, że $(x+y)^*(t_0) < (|x|+|y|)^*(t_0)$. Ponieważ $|x \pm y| \leqslant |x|+|y|$, zatem $(x \pm y)^* \leqslant (|x|+|y|)^*$. Na mocy prawostronnej ciągłości nierosnącego przestawienia, istnieje $\delta > t_0$, że $(x + y)^*(t) < (|x| + |y|)^*(t)$ dla każdego $t \in (t_0, \delta)$. Zatem

$$\int_0^t (x + y)^* < \int_0^t (|x| + |y|)^*$$

dla $t > t_0$. Jest jasne, że $\int_0^t (|x| + |y|)^* \leqslant \int_0^t x^* + \int_0^t y^*$ (zob. Uwaga 2.13), skąd

$$(x + y)^{**}(t) < x^{**}(t) + y^{**}(t)$$

dla każdego $t > t_0$. Skoro $\mathrm{m}(\mathcal{S}(w) \cap (t_0, \infty)) > 0$, to $\|x + y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15).

Zauważmy, że jeśli istnieje $t_1 > 0$, że $(x - y)^*(t_1) < (|x| + |y|)^*(t_1)$, to wtedy w analogiczny sposób otrzymujemy nierówność $\|x - y\| < 2$.

Dowód przypadku II.B. Załóżmy, że

$$(x + y)^*(t) = (x - y)^*(t) = (|x| + |y|)^*(t) \tag{29}$$

dla każdego $t > 0$. W konsekwencji

$$(x \pm y)^*(\infty) = (|x| + |y|)^*(\infty). \tag{30}$$

Oznaczmy

$$t_0 = \sup\{t \colon (|x| + |y|)^*(t) > (|x| + |y|)^*(\infty)\}$$

i rozważmy trzy przypadki.

a) Załóżmy, że $t_0 = \infty$. Wtedy funkcje

$$(|x| + |y|)^* \chi_{(a,\infty)} \quad \text{i} \quad (x \pm y)^* \chi_{(a,\infty)} \quad \text{nie są stałe dla każdego } a > 0. \tag{31}$$

W konsekwencji, wyrażenie (31) implikuje, że istnieje $0 < t_1 < \infty$ spełniające nierówność

$$(x + y)^*(t) < \lim_{t \to t_1^-} (x + y)^*(t) \tag{32}$$

dla każdego $t > t_1$. Analogiczna nierówność zachodzi dla funkcji $(x-y)^*$ oraz $(|x|+|y|)^*$. Weźmy zbiory B_+, B_-, B_0 miary t_1, takie że

$$\int_0^{t_1} (x + y)^* = \int_{B_+} |x + y|, \qquad \int_0^{t_1} (x - y)^* = \int_{B_-} |x - y|,$$
$$\int_0^{t_1} (|x| + |y|)^* = \int_{B_0} |x| + |y|,$$

(zob. Lemat 2.8). Oczywiście, z definicji t_1 oraz równoważności funkcji i jej nierosnączego przestawienia, otrzymujemy, że

$$B_+ = \{t\colon |(x+y)(t)| > (x+y)^*(t_1)\},$$
$$B_- = \{t\colon |(x-y)(t)| > (x-y)^*(t_1)\},$$
$$B_0 = \{t\colon (|x|+|y|)(t) > (|x|+|y|)^*(t_1)\}.$$

Niech

$$B_+^i = B_+ \cap A_i, \quad B_-^i = B_- \cap A_i, \quad B_0^i = B_0 \cap A_i, \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,3\} \tag{33}$$

(zob. notację (26)). Z warunków $|x \pm y|\chi_{A_3} = (|x|+|y|)\chi_{A_3}$, (29), (30) i (32) wnioskujemy, że

$$B_+^3 = B_-^3 = B_0^3. \tag{34}$$

Analogicznie równość $|x+y|\chi_{A_1} = (|x|+|y|)\chi_{A_1}$ implikuje

$$B_+^1 = B_0^1.$$

Ponadto równość $|x-y|\chi_{A_2} = (|x|+|y|)\chi_{A_2}$ prowadzi do

$$B_-^2 = B_0^2.$$

Twierdzimy, że $m(B_+^2) = m(B_-^1) = 0$. W istocie, jeśli bowiem $m(B_+^2) > 0$, to z Lematu 2.10 i równości (29), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} (x+y)^* &= \int_{B_+} |x+y| = \left(\int_{B_+^2} + \int_{B_+^1 \cup B_+^3}\right) |x+y| \\ &< \left(\int_{B_+^2} + \int_{B_+^1 \cup B_+^3}\right) |x| + |y| = \int_{B_+} |x| + |y| \leqslant \int_0^{t_1} (|x|+|y|)^* = \int_0^{t_1} (x+y)^*\end{aligned}$$

- sprzeczność. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w przypadku dla $m(B_-^1) > 0$, co dowodzi stwierdzenie.

Ponadto powyższe rozumowanie i (28) implikują, że $m(B_0^2) = m(B_0^1) = 0$, skoro

$$m(B_+^1 \cup B_+^3) = m(B_+) = m(B_0) = m(B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3) = m(B_+^1 \cup B_0^2 \cup B_+^3)$$

oraz

$$m(B_-^2 \cup B_-^3) = m(B_-) = m(B_0) = m(B_0^1 \cup B_0^2 \cup B_0^3) = m(B_0^1 \cup B_-^2 \cup B_-^3).$$

Wtedy $B_0 = B_0^3$, skąd równości (34) implikują, że $\mathrm{m}(B_+^1) = \mathrm{m}(B_-^2) = 0$. Podsumowując, mamy

$$B_0 = B_+ = B_- \subset A_3. \tag{35}$$

Dla każdego $0 < t \leqslant t_1$ istnieje zbiór $B_+(t)$ miary t taki, że

$$\int_0^t (x+y)^* = \int_{B_+(t)} |x+y| = \int_{B_+^x(t)} |x| + \int_{B_+^y(t)} |y|,$$

gdzie

$$B_+^x(t) = B_+(t) \cap \mathcal{S}(x) \quad \text{i} \quad B_+^y(t) = B_+(t) \cap \mathcal{S}(y).$$

Mamy, że $B_+(t) = B_+^x(t) \cup B_+^y(t)$ oraz, z inkluzji (35), wnioskujemy, że $\mathrm{m}(B_+^x \cap B_+^y) = 0$. Powyższe rozumowanie, razem z Lematem 2.10 i równością $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)) = \infty$ implikują, że zachodzi przynajmniej jedna z poniższych nierówności

$$\int_{B_+^x(t)} |x| \leqslant \int_0^{\mathrm{m}(B_+^x(t))} x^* < \int_0^t x^* \quad \text{lub} \quad \int_{B_+^y(t)} |y| \leqslant \int_0^{\mathrm{m}(B_+^y(t))} y^* < \int_0^t y^*$$

dla każdego $0 < t \leqslant t_1$. Wtedy, dla każdego $0 < t \leqslant t_1$, mamy

$$\int_0^t (x+y)^* < \int_0^t x^* + \int_0^t y^* \tag{36}$$

Wykorzystując wyrażenie (31), znajdziemy ciąg (t_n), $t_n \to \infty$, taki, że nierówność (32) jest spełniona dla każdego t_n. Podobnie jak powyżej wnioskujemy, że nierówność (36) jest spełniona z t_n zamiast t_1. W konsekwencji (36) zachodzi dla wszystkich $t > 0$. To oznacza, że $\|x+y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15).

b) Załóżmy, że $0 < t_0 < \infty$ i weźmy zbiory B_+, B_-, B_0 miary t_0 takie, że

$$\int_0^{t_0} (x+y)^* = \int_{B_+} |x+y|, \qquad \int_0^{t_0} (x-y)^* = \int_{B_-} |x-y|,$$
$$\int_0^{t_0} (|x|+|y|)^* = \int_{B_0} |x|+|y|,$$

(zob. Lemat 2.8). Oczywiscie, z definicji t_0 i równoważności funkcji i jej nierosnącego przestawienia otrzymujemy

$$B_+ = \{t\colon |(x+y)(t)| > (x+y)^*(\infty)\},$$
$$B_- = \{t\colon |(x-y)(t)| > (x-y)^*(\infty)\},$$
$$B_0 = \{t\colon (|x|+|y|)(t) > (|x|+|y|)^*(\infty)\}.$$

Niech zbiory B^i_+, B^i_- i B^i_0 dla $i \in \{1,2,3\}$ będą jak w (33). Z równości $|x \pm y|\chi_{A_3} = (|x| + |y|)\chi_{A_3}$, (29) i (30) wnioskujemy, że zachodzą równości (34). Podobnie, jak wcześniej, wnioskujemy, że nierówność (36) zachodzi dla t_0 zamiast t_1.

Ponadto, z definicji t_0, dla każdego $t > t_0$ mamy

$$\int_{t_0}^{t} (x \pm y)^* = \int_{t_0}^{t} (|x| + |y|)^* = \int_{t_0}^{t} (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant \int_{t_0}^{t} x^*(\infty) + \int_{t_0}^{t} y^*(\infty) \leqslant \int_{t_0}^{t} x^* + \int_{t_0}^{t} y^*.$$

Ostatecznie, z nierówności (36) oraz powyższej, otrzymujemy, że

$$\int_{0}^{t} (x + y)^* < \int_{0}^{t} x^* + \int_{0}^{t} y^*$$

dla każdego $t > 0$. Zatem, $\|x + y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15).

c) Załóżmy, że $t_0 = 0$, to znaczy

$$(x \pm y)^*\chi_{[0,\infty)} = (|x| + |y|)^*\chi_{[0,\infty)} = (|x| + |y|)^*(\infty)\chi_{[0,\infty)} = a\chi_{[0,\infty)}$$

dla pewnego $a > 0$. Zauważmy, że $\mathrm{m}(C) > 0$. Wtedy, dla każdego $0 < t < \mathrm{m}(C)$, mamy

$$(|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant x^*(\infty) + y^*(\infty) < x^*(t) + y^*(t).$$

Ponadto dla każdego $t > 0$ mamy

$$(|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant x^*(\infty) + y^*(\infty) \leqslant x^*(t) + y^*(t).$$

Skoro $\gamma = \infty$ i funkcja $(|x| + |y|)^*$ spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 2.47, to $(|x| + |y|)^*$ jest UM punktem. W konsekwencji $\|(|x| + |y|)^*\| < \|x^* + y^*\|$. Zatem

$$\|x + y\| = \|(|x| + |y|)^*\| < \|x^* + y^*\| \leqslant \|x^*\| + \|y^*\| = \|x\| + \|y\|,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.62. Element $x \in S(\Gamma_{p,w}[0,1))$ jest NSQ punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$ oraz, jeśli $\gamma \leqslant 1/2$, to funkcja x^* nie jest stała na przedziale $[0, 2\gamma]$, gdzie β i γ są zdefiniowane w (18).

Dowód. Konieczność wynika z Twierdzenia 2.60.
Dostateczność. Niech $y \in S(\Gamma_{p,w}[0,1))$. Jeżeli x i y mają rozłączne nośniki, to z Lematu 2.57 wnioskujemy, że $(x + y)^{**}(t) < x^{**}(t) + y^{**}(t)$ dla każdego $t \in (0, \mathrm{m}(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))$. Skoro $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$ to $\mathrm{m}(\mathcal{S}(w) \cap (\beta, \mathrm{m}(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))) > 0$, skąd $\|x + y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15).

Załóżmy, że x i y nie mają rozłącznych nośników, tzn.

$$m(A_1 \cup A_2) > 0, \tag{37}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &A_1 = \{t \in (0,1)\colon x(t)y(t) > 0\}, \quad A_2 = \{t \in (0,1)\colon x(t)y(t) < 0\}, \\ &A_3 = \{t \in (0,1)\colon x(t)y(t) = 0 \ \text{ i } \ |x(t)| + |y(t)| > 0\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Rozważmy dwa przypadki dowodu.

$\mathcal{A}$. Załóżmy, że $m(\mathcal{S}(|x| + |y|)) \leqslant \gamma$. Z Twierdzenia 2.45, $|x| + |y|$ jest LM punktem. Z nierówności (37) wnioskujemy, że zachodzi przynajmniej jedna z nierówności

$$|x + y|\chi_{A_2} < (|x| + |y|)\chi_{A_2} \quad \text{lub} \quad |x - y|\chi_{A_1} < (|x| + |y|)\chi_{A_1}.$$

Oczywiście $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$, skąd przynajmniej jedna z nierówności zachodzi $\|x + y\| < \||x| + |y|\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ lub $\|x - y\| < \||x| + |y|\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$\mathcal{B}$. Załóżmy, że

$$m(\mathcal{S}(|x| + |y|)) > \gamma. \tag{39}$$

Oznaczmy zbiory B_+, B_-, B_0, B_x, B_y miary γ takie, że

$$\begin{aligned} &\int_0^\gamma (x+y)^* = \int_{B_+} |x+y|, \quad \int_0^\gamma (x-y)^* = \int_{B_-} |x-y|, \\ &\int_0^\gamma (|x|+|y|)^* = \int_{B_0} |x|+|y|, \quad \int_0^\gamma x^* = \int_{B_x} |x|, \quad \int_0^\gamma y^* = \int_{B_y} |y| \end{aligned} \tag{40}$$

(zob. Lemat 2.8 i Uwaga 2.9). Zauważmy, że

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{dla} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad \text{oraz} \quad i \neq j. \tag{41}$$

Ponadto

$$A_1 \cup A_2 \subset \mathcal{S}(x), \quad A_1 \cup A_2 \subset \mathcal{S}(y), \quad \mathcal{S}(|x| + |y|) = A_1 \cup A_2 \cup A_3. \tag{42}$$

Dalszy dowód podzielimy na szereg przypadków.

Przypadek I. Istnieje $t_0 \in (0,\gamma)$ takie, że $(x + y)^*(t_0) < (|x| + |y|)^*(t_0)$ lub istnieje $t_1 \in (0,\gamma)$, że $(x - y)^*(t_1) < (|x| + |y|)^*(t_1)$.

Przypadek II. $(x + y)^*(t) = (x - y)^*(t) = (|x| + |y|)^*(t)$ dla wszystkich $t \in (0,\gamma)$.

Przypadek II. 1. $m(B_+ \cap A_3) > 0$ lub $m(B_- \cap A_3) > 0$.

Przypadek II. 1. A. $S(y) = B_+ \cap A_1$ lub $S(x) = B_+ \cap A_1$.

Przypadek II. 1. B. $S(x) \supsetneq B_+ \cap A_1$ i $S(y) \supsetneq B_+ \cap A_1$.

Przypadek II. 2. $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) = 0$ i $\mathrm{m}(B_- \cap A_3) = 0$.

Teraz przedyskutujemy powyższe przypadki.

Dowód Przypadku I. Załóżmy, że istnieje $t_0 \in (0, \gamma)$ takie, że $(x+y)^*(t_0) < (|x|+|y|)^*(t_0)$. Skoro $(x \pm y) \leqslant |x| + |y|$, to $(x \pm y)^* \leqslant (|x| + |y|)^*$. Z prawostronnej ciągłości nierosnącego przestawienia, istnieje liczba $\delta > t_0$ taka, że $(x + y)^*(t) < (|x| + |y|)^*(t)$ dla wszystkich $t \in (t_0, \delta)$. Wtedy

$$\int_0^t (x + y)^* < \int_0^t (|x| + |y|)^*$$

dla $t \in (t_0, \gamma)$. Oczywiście $\int_0^t (|x| + |y|)^* \leqslant \int_0^t x^* + \int_0^t y^*$ (zob. Uwagę 2.13), skąd

$$(x + y)^{**}(t) < x^{**}(t) + y^{**}(t)$$

dla każdego $t \in (t_0, \gamma)$. Z definicji γ (zob. (18)) wnioskujemy, że $\mathrm{m}(\mathcal{S}(w) \cap (t_0, \gamma)) > 0$ i w konsekwencji $\|x + y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15).

Jeżeli istnieje $t_1 \in (0, \gamma)$, że $(x - y)^*(t_1) < (|x| + |y|)^*(t_1)$, to analogiczne rozumowanie prowadzi do nierówności $\|x - y\| < 2$.

Dowód Przypadku II. Załóżmy, że

$$(x + y)^*(t) = (x - y)^*(t) = (|x| + |y|)^*(t) \tag{43}$$

dla każdego $t \in (0, \gamma)$. Warunek (43) implikuje, że

$$\mathrm{m}(B_+ \cap A_2) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(B_- \cap A_1) = 0. \tag{44}$$

W istocie, w przeciwnym przypadku, np. gdy $\mathrm{m}(B_+ \cap A_2) > 0$, to z inkluzji $\mathcal{S}(x + y) \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$ otrzymalibyśmy, że

$$\begin{aligned}\int_0^\gamma (x + y)^* &= \int_{B_+} |x + y| = \int_{B_+ \cap A_2} |x + y| + \int_{B_+ \cap (A_1 \cup A_3)} |x| + |y| \\ &< \int_{B_+ \cap A_2} |x| + |y| + \int_{B_+ \cap (A_1 \cup A_3)} |x| + |y| = \int_{B_+} |x| + |y| \leqslant \int_0^\gamma (|x| + |y|)^*\end{aligned}$$

co przeczy równości (43) i dowodzi warunku (44).

Zauważmy, że z nierówności (39) i równości (43) mamy, że

$$\min\{\mathrm{m}(\mathcal{S}(x + y)), \mathrm{m}(\mathcal{S}(x - y))\} \geqslant \gamma. \tag{45}$$

Przypadek II. 1. Załóżmy, że $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) > 0$. Wtedy równość $\mathrm{m}(B_+) = \gamma$ implikuje, że

$$\mathrm{m}(B_+ \cap A_1) < \gamma \tag{46}$$

Z warunku (44) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^\gamma (x+y)^* &= \int_{B_+} |x+y| = \int_{B_+\cap A_3} |x+y| + \int_{B_+\cap A_1} |x+y| \\ &= \int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(y)} |y| + \int_{B_+\cap A_1} |x| + |y|\end{aligned} \tag{47}$$

Przypadek II. 1. A. Załóżmy, że $S(y) = B_+ \cap A_1$. Wtedy na mocy nierówności (46) zachodzi $\mathrm{m}(\mathcal{S}(y)) < \gamma$. Ponadto $\mathcal{S}(y) = A_1$ z uwagi na inkluzję (42). Stąd

$$A_3 \subset \mathcal{S}(x), \quad \mathrm{m}(A_2) = 0,$$

$$\int_{B_+\cap A_3\cap\mathcal{S}(y)} |y| = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{B_+\cap A_1} |y| = \int_{B_y} |y|. \tag{48}$$

Ponadto z nierówności (39) i równości $\mathcal{S}(|x| + |y|) = A_1 \cup A_3 = \mathcal{S}(x)$, wnioskujemy, że $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) > \gamma$.

Twierdzimy, że

$$\int_{B_+\cap A_3\cap\mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| < \int_{B_x} |x|. \tag{49}$$

Załóżmy przeciwnie, że $\int_{B_+\cap A_3\cap\mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| = \int_{B_x} |x|$. Z warunków (47) i (48) mamy

$$\int_0^\gamma (x+y)^* = \int_{B_x} |x| + \int_{B_y} |y| = \int_0^\gamma x^* + \int_0^\gamma y^*. \tag{50}$$

Ponadto, z warunku (44) i równości $\mathrm{m}(A_2) = 0$, dostajemy, że $B_- \cap (\mathcal{S}(x-y)) \subset A_3 \subset \mathcal{S}(x)$. Idąc dalej, z równości (40) i (43), otrzymujemy

$$\int_0^\gamma (x+y)^* = \int_0^\gamma (x-y)^* = \int_{B_-} |x-y| = \int_{B_-} |x| \leqslant \int_0^\gamma x^* < \int_0^\gamma x^* + \int_0^\gamma y^*,$$

co stoi w sprzeczności z warunkiem (50). To dowodzi stwierdzenie (49). W konsekwencji warunki (47), (48), (49) implikują, że

$$\int_0^\gamma (x+y)^* < \int_0^\gamma x^* + \int_0^\gamma y^*,$$

co kończy dowód bierzącego podprzypadku (zob. Uwagę 2.15 i definicję γ, tj. (18)).

Dowód dla przypadku $S(x) = B_+ \cap A_1$ jest analogiczny, wystarczy w rozumowaniu zamienić miejscami elementy x oraz y, a także ich nierosnące przestawienia i nośniki.

Przypadek II. 1. B. Załóżmy, że $\mathcal{S}(x) \supsetneq B_+ \cap A_1$ i $\mathcal{S}(y) \supsetneq B_+ \cap A_1$. Wtedy

$$\mathrm{m}(S(x)) > \mathrm{m}(B_+ \cap A_1) \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(S(y)) > \mathrm{m}(B_+ \cap A_1). \tag{51}$$

Twierdzimy, że zachodzi przynajmniej jedna z poniższych nierówności (52) lub (53)

$$\int_{B_+\cap A_3\cap\mathcal{S}(y)} |y| + \int_{B_+\cap A_1} |y| < \int_{B_y} |y|, \tag{52}$$

$$\int_{B_+\cap A_3\cap\mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| < \int_{B_x} |x|. \tag{53}$$

Jeżeli $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(y)) = 0$ lub $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(x)) = 0$ to, z nierówności (46) oraz (51), dostajemy (52) lub (53), odpowiednio.

Jeżeli $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(x)) > 0$ i $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(y)) > 0$ to

$$\mathrm{m}(B_+ \cap \mathcal{S}(x)) < \gamma \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(B_+ \cap \mathcal{S}(y)) < \gamma. \tag{54}$$

Załóżmy przeciwnie, że nierówności (52) i (53) nie zachodzą, tzn.

$$\int_{B_+\cap[A_1\cup(A_3\cap\mathcal{S}(y))]} |y| = \int_{B_y} |y| \quad \text{i} \quad \int_{B_+\cap[A_1\cup(A_3\cap\mathcal{S}(x))]} |x| = \int_{B_x} |x|. \tag{55}$$

Równości $\mathcal{S}(y) = A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))$ oraz (44) implikują, że

$$B_+ \cap \mathcal{S}(y) = B_+ \cap [A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))] = B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))]$$

i analogicznie otrzymujemy, że

$$B_+ \cap \mathcal{S}(x) = B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(x))].$$

Zatem, z założenia (55), wnioskujemy

$$\int_{B_+\cap\mathcal{S}(y)} |y| = \int_{B_+\cap[A_1\cup(A_3\cap\mathcal{S}(y))]} |y| = \int_{B_y} |y| = \int_0^\gamma y^*$$

i

$$\int_{B_+\cap\mathcal{S}(x)} |x| = \int_{B_+\cap[A_1\cup(A_3\cap\mathcal{S}(x))]} |x| = \int_{B_x} |x| = \int_0^\gamma x^*.$$

Wtedy z nierówności (54), dostajemy, że $\mathcal{S}(x) \subset B_+$ i $\mathcal{S}(y) \subset B_+$, skąd $\mathcal{S}(|x|+|y|) \subset B_+$. Z uwagi na $\mathrm{m}(B_+) = \gamma$ otrzymujemy sprzeczność z nierównością (39). To dowodzi, że zachodzi przynajmniej jedno z wyrażeń (52) lub (53).

Ostatecznie, z warunków (47) i ((52) lub (53)), mamy

$$\int_0^{\gamma} (x+y)^* < \int_0^{\gamma} x^* + \int_0^{\gamma} y^*,$$

co kończy dowód podprzypadku (zob. Uwagę 2.15 i definicję γ, tj. (18)).

Dowód Przypadku II 1. (wraz z podprzypadkami A i B) przeprowadzony został, gdy spełniona jest nierówność $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) > 0$. Dla drugiej nierówności, tj. $\mathrm{m}(B_- \cap A_3) > 0$ dowód przebiega analogicznie, biorąc zbiór B_- w miejsce B_+ i element $(x-y)^*$ w miejsce $(x+y)^*$.

Przypadek II. 2. Załóżmy, że $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) = 0$ i $\mathrm{m}(B_- \cap A_3) = 0$. Wtedy, z równości (44), mamy

$$B_+ \cap \mathcal{S}(x+y) \subset A_1 \quad \text{i} \quad B_- \cap \mathcal{S}(x-y) \subset A_2. \tag{56}$$

Twierdzimy, że

$$\mathrm{m}(A_1) \geqslant \gamma \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(A_2) \geqslant \gamma.$$

Jeżeli $\mathrm{m}(A_1) < \gamma$, to $\mathrm{m}(B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)) < \gamma$, skąd $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x+y)) < \gamma$ z definicji zbioru B_+, co daje sprzeczność z nierównością (45). Rozumowanie dla przypadku $\mathrm{m}(A_2) < \gamma$ przebiega analogicznie, co kończy dowód stwierdzenia.

Z warunku (41) mamy $\gamma \leqslant 1/2$ i $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) \geqslant 2\gamma$. Skoro x^* nie jest stała na $(0, 2\gamma)$, to

$$\int_0^{2\gamma} x^* < 2\int_0^{\gamma} x^*.$$

Warunki (56) implikują, że $(B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)) \cap (B_- \cap \mathcal{S}(x-y)) = \emptyset$. W konsekwencji

$$\int_{B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)} |x| + \int_{B_- \cap \mathcal{S}(x-y)} |x| \leqslant \int_0^{2\gamma} x^* < 2\int_0^{\gamma} x^*.$$

Zatem

$$\int_{B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)} |x| < \int_0^{\gamma} x^* \quad \text{lub} \quad \int_{B_- \cap \mathcal{S}(x-y)} |x| < \int_0^{\gamma} x^*.$$

Ostatecznie, z inkluzji (56), wynika, że zachodzi jedna z nierówności

$$\int_0^{\gamma} (x+y)^* = \int_{B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)} |x+y| = \int_{B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)} |x| + |y| < \int_0^{\gamma} x^* + \int_0^{\gamma} y^*$$

lub

$$\int_0^{\gamma} (x-y)^* = \int_{B_- \cap \mathcal{S}(x-y)} |x-y| = \int_{B_- \cap \mathcal{S}(x-y)} |x| + |y| < \int_0^{\gamma} x^* + \int_0^{\gamma} y^*,$$

co kończy dowód (zob. Uwagę 2.15 i definicję γ, tj. (18)). $\square$

Twierdzenie 2.63. Niech $x \in S(\Gamma_{p,w}[0,\infty))$, β i γ będą jak w (18). Ponadto niech funkcja wagowa będzie taka, że $\gamma < \infty$. Wtedy x jest NSQ punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $m(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$ i x^* nie jest stała na przedziale $(0, 2\gamma)$.

Dowód. Konieczność wynika z Twierdzenia 2.60.
Dostateczność. Niech $y \in S(\Gamma_{p,w})$. Jeżeli $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = 0$ to, z Lematu 2.57 otrzymujemy, że $(x+y)^{**}(t) < x^{**}(t)+y^{**}(t)$ dla wszystkich $t \in (0, m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))$. Ponieważ $m(\mathcal{S}(x)) \geqslant \beta$, zatem $m(\mathcal{S}(w) \cap (\beta, m(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)))) > 0$, skąd $\|x + y\| < 2$ (zob. Uwagę 2.15 i definicję β, tj. (18)).

Oznaczmy

$$\begin{aligned} A_1 &= \{t \in (0,1) \colon x(t)y(t) > 0\}, \quad A_2 = \{t \in (0,1) \colon x(t)y(t) < 0\}, \\ A_3 &= \{t \in (0,1) \colon x(t)y(t) = 0 \ \text{ i } \ |x(t)| + |y(t)| > 0\}. \end{aligned} \tag{57}$$

Pozostało rozważyć przypadek, gdy $m(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) > 0$, tzn.

$$m(A_1 \cup A_2) > 0. \tag{58}$$

Oczywiście

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{dla} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad \text{oraz} \quad i \neq j. \tag{59}$$

$\mathcal{A}$. Załóżmy, że $m(\mathcal{S}(|x| + |y|)) \leqslant \gamma$. Postępujemy jak w przypadku $\mathcal{A}$ dowodu Twierdzenia 2.62.
$\mathcal{B}$. Załóżmy, że

$$m(\mathcal{S}(|x| + |y|)) > \gamma. \tag{60}$$

Pozostały dowód podzielimy na wiele przypadków (definicje s_0, s_+, s_-, B_+ i B_- przedstawione są poniżej w wyrażeniach (63) i (65)):
Przypadek I. Istnieje $t_0 \in (0,\gamma)$ takie, że $(x + y)^*(t_0) < (|x| + |y|)^*(t_0)$ lub istnieje $t_1 \in (0,\gamma)$ takie, że $(x - y)^*(t_1) < (|x| + |y|)^*(t_1)$.
Przypadek II. $(x + y)^*(t) = (x - y)^*(t) = (|x| + |y|)^*(t)$ dla każdego $t \in (0,\gamma)$.
Przypadek II. A. $s_0 = 0$ lub $s_+ = 0$ lub $s_- = 0$.
Przypadek II. B. $s_0 > 0$ i $s_+ > 0$ i $s_- > 0$.
Przypadek II. B. a. $s_0 \leqslant \gamma$.
Przypadek II. B. a. 1. $m(B_+ \cap A_3) > 0$ lub $m(B_- \cap A_3) > 0$.
Przypadek II. B. a. 1. A. $S(y) = B_+ \cap A_1$ lub $S(x) = B_+ \cap A_1$.
Przypadek II. B. a. 1. B. $S(x) \supsetneq B_+ \cap A_1$ i $S(y) \supsetneq B_+ \cap A_1$.

Przypadek II. B. a. 2. $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) = 0$ i $\mathrm{m}(B_- \cap A_3) = 0$.

Przypadek II. B. a. 2. A. Przynajmniej jedna z funkcji x^* lub y^* nie jest stała na $(0, 2s_0)$.

Przypadek II. B. a. 2. B. $x^*\chi_{(0,2s_0)} = a > 0$ i $y^*\chi_{(0,2s_0)} = b > 0$.

Przypadek II. B. b. $s_0 > \gamma$.

Poniżej przedyskutujemy wszystkie przypadki.

Dowód przypadku I. Dowód przebiega tak samo jak dowód Twierdzenia 2.62, przypadek $\mathcal{B}$.I.

Dowód przypadku II. Niech

$$(x + y)^*(t) = (x - y)^*(t) = (|x| + |y|)^*(t) \tag{61}$$

dla każdego $t \in (0, \gamma)$. Na mocy powyższego oraz nierówności (60) wnioskujemy, że

$$\min\{\mathrm{m}(\mathcal{S}(x + y)), \mathrm{m}(\mathcal{S}(x - y))\} \geqslant \gamma. \tag{62}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} s_0 &= \sup\{t\colon (|x| + |y|)^*(t) > (|x| + |y|)^*(\infty)\},\\ s_+ &= \sup\{t\colon (x + y)^*(t) > (x + y)^*(\infty)\},\\ s_- &= \sup\{t\colon (x - y)^*(t) > (x - y)^*(\infty)\}. \end{aligned} \tag{63}$$

Przypadek II. A.

a) Załóżmy, że $s_0 = 0$, tzn.

$$(|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) = a > 0$$

zachodzi dla każdego $t > 0$. Skoro x^* nie jest stała na przedziale $(0, 2\gamma)$, zatem z Uwagi 2.58 wnioskujemy, że $\mathrm{m}(C) > 0$, gdzie $C = \{t\colon |x(t)| > x^*(\infty)\}$. Zatem, dla każdego $0 < t < \mathrm{m}(C)$, mamy

$$(|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant x^*(\infty) + y^*(\infty) < x^*(t) + y^*(t).$$

Ponadto, dla każdego $t > 0$,

$$(|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant x^*(\infty) + y^*(\infty) \leqslant x^*(t) + y^*(t).$$

Skoro funkcja $(|x| + |y|)^*$ jest stała na $[0, \infty)$, to spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 2.47. Zatem $(|x| + |y|)^*$ jest UM punktem, skąd $\|(|x| + |y|)^*\| < \|x^* + y^*\|$. Ostatecznie

$$\|x + y\| \leqslant \||x| + |y|\| = \|(|x| + |y|)^*\| < \|x^* + y^*\| \leqslant \|x^*\| + \|y^*\| = \|x\| + \|y\|,$$

co kończy dowód podprzypadku.

b) Załóżmy, że $s_+ = 0$. Z nierówności (62), wnioskujemy, że $(x+y)^*(t) = (x+y)^*(\infty) = a > 0$ dla każdego $t > 0$. Z równości (61) i nierówności $(x+y)^*(\infty) \leqslant (|x|+|y|)^*(\infty)$ otrzymujemy, że

$$(x+y)^*(t) = (|x|+|y|)^*(t) = a$$

dla wszystkich $t > 0$, skąd $s_0 = 0$. Dalsza część dowodu jest analogiczna jak w dowodzie przypadku a).

c) Jeżeli $s_- = 0$, to dowód przebiega analogiczne jak w b) dla elementu $(x-y)^*$.

Przypadek II. B. Załóżmy, że $s_0 > 0$ i $s_+ > 0$, i $s_- > 0$. Oczywiście

$$\min\{s_+, s_-\} \geqslant \min\{s_0, \gamma\}. \tag{64}$$

W istocie, w każdym z przypadków $s_0 \geqslant \gamma$ albo $s_0 < \gamma$, z równości (61) wnioskujemy nierówność (64). W konsekwencji

$$(x \pm y)^*(\infty) \leqslant (|x|+|y|)^*(\infty) < (|x|+|y|)^*(t) = (x \pm y)^*(t)$$

dla każdego $t \in (0, \min\{s_0, \gamma\})$.

Przypadek II. B. a. Załóżmy, że $s_0 \leqslant \gamma$. Na mocy Lematu 2.8 i Uwagi 2.9 znajdziemy zbiory B_+, B_-, B_0 miary s_0 dla których

$$\begin{aligned} &\int_0^{s_0} (x+y)^* = \int_{B_+} |x+y|, \qquad \int_0^{s_0} (x-y)^* = \int_{B_-} |x-y|, \\ &\int_0^{s_0} (|x|+|y|)^* = \int_{B_0} |x|+|y|. \end{aligned} \tag{65}$$

Oczywiście na mocy nierówności (64) i $s_0 \leqslant \gamma$, wynika, że zbiory B_+ i B_- są dobrze określone.

Warunek (61) implikuje, że

$$\mathrm{m}(B_+ \cap A_2) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(B_- \cap A_1) = 0. \tag{66}$$

W istocie, załóżmy dla sprzeczności, że $\mathrm{m}(B_+ \cap A_2) > 0$. Wobec inkluzji $\mathcal{S}(x+y) \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} (x+y)^* &= \int_{B_+} |x+y| = \int_{B_+ \cap A_2} |x+y| + \int_{B_+ \cap (A_1 \cup A_3)} |x|+|y| \\ &< \int_{B_+ \cap A_2} |x|+|y| + \int_{B_+ \cap (A_1 \cup A_3)} |x|+|y| = \int_{B_+} |x|+|y| \leqslant \int_0^{s_0} (|x|+|y|)^* \end{aligned}$$

sprzeczność z równością (61). Jeżeli $\mathrm{m}(B_- \cap A_1) > 0$, to analogicznie otrzymujemy sprzeczność dla elementu $x - y$.

Przypadek II. B. a. 1. Załóżmy, że $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3) > 0$. Wtedy równość $\mathrm{m}(B_+) = s_0$ implikuje, że

$$\mathrm{m}(B_+ \cap A_1) < s_0. \tag{67}$$

Na mocy równości (66) dostajemy

$$\begin{aligned}\int_0^{s_0} (x+y)^* &= \int_{B_+} |x+y| = \int_{B_+\cap A_3} |x+y| + \int_{B_+\cap A_1} |x+y| \\ &= \int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| + \int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(y)} |y| + \int_{B_+\cap A_1} |y|.\end{aligned} \tag{68}$$

Przypadek II. B. a. 1. A. Załóżmy, że $S(y) = B_+ \cap A_1$. Wtedy $\mathrm{m}(\mathcal{S}(y)) < s_0$ wynika z nierówności (67). Ponadto $\mathcal{S}(y) = A_1$ skoro $A_1 \subset \mathcal{S}(y)$. Stąd

$$A_3 \subset \mathcal{S}(x), \quad \mathrm{m}(A_2) = 0,$$

$$\int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(y)} |y| = 0 \quad \text{i} \quad \int_{B_+\cap A_1} |y| = \sup_{\mathrm{m}(B_y)=s_0} \int_{B_y} |y| = \int_0^{s_0} y^* \tag{69}$$

(zob. również Lemat 2.10). Ponadto, z nierówności (60) i równości $\mathcal{S}(|x| + |y|) = A_1 \cup A_3 = \mathcal{S}(x)$, otrzymujemy $\mathrm{m}(\mathcal{S}(x)) > \gamma$.

Twierdzimy, że

$$\int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| < \sup_{\mathrm{m}(B_x)=s_0} \int_{B_x} |x| = \int_0^{s_0} x^*, \tag{70}$$

gdzie ostatnia równość wynika z Lematu 2.10. Załóżmy przeciwnie, że $\int_{B_+\cap A_3\cap \mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+\cap A_1} |x| = \sup\limits_{\mathrm{m}(B_x)=s_0} \int_{B_x} |x|$. Z Lematu 2.10, warunków (68) i (69) dostajemy, że

$$\int_0^{s_0} (x+y)^* = \sup_{\mathrm{m}(B_x)=s_0} \int_{B_x} |x| + \sup_{\mathrm{m}(B_y)=s_0} \int_{B_y} |y| = \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^*. \tag{71}$$

Ponadto, z równości (66) i $\mathrm{m}(A_2) = 0$, mamy $B_- \cap (\mathcal{S}(x-y)) \subset A_3 \subset \mathcal{S}(x)$. Ponadto, stosując warunki (61) i (65), otrzymujemy

$$\int_0^{s_0} (x+y)^* = \int_0^{s_0} (x-y)^* = \int_{B_-} |x-y| = \int_{B_-} |x| \leqslant \int_0^{s_0} x^* < \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^*,$$

co daje sprzeczność z równością (71) i dowodzi stwierdzenie (70). Wtedy warunki (68), (69) i (70) implikują, że

$$\int_0^{s_0} (x+y)^* < \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^*. \tag{72}$$

Ponadto, z definicji s_0, dla każdego $t > s_0$ mamy

$$(x \pm y)^*(t) \leqslant (|x| + |y|)^*(t) = (|x| + |y|)^*(\infty) \leqslant x^*(\infty) + y^*(\infty) \leqslant x^*(t) + y^*(t).$$

Zatem

$$\int_{s_0}^{t} (x \pm y)^* \leqslant \int_{s_0}^{t} x^* + y^* \quad \text{dla} \quad t > s_0. \tag{73}$$

Ostatecznie

$$\int_0^t (x + y)^* < \int_0^t x^* + \int_0^t y^* \quad \text{dla} \quad t \geqslant s_0. \tag{74}$$

Biorąc $t = \gamma$ kończymy dowód tego podprzypadku dla $\mathcal{S}(y) = B_+ \cap A_1$ (zob. Uwagę 2.15 i definicję γ, tj. 18).

Analogiczne rozumowanie zachodzi dla przypadku $S(x) = B_+ \cap A_1$ zamieniając miejscami elementy x oraz y, a także ich nierosnące przestawienia i nośniki.
Przypadek II. B. a. 1. B. Załóżmy, że $\mathcal{S}(y) \supsetneq B_+ \cap A_1$ i $\mathcal{S}(x) \supsetneq B_+ \cap A_1$, skąd

$$\mathrm{m}(S(x)) > \mathrm{m}(B_+ \cap A_1) \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(S(y)) > \mathrm{m}(B_+ \cap A_1). \tag{75}$$

Twierdzimy, że jest spełniona przynajmniej jedna z nierówności (76) lub (77)

$$\int_{B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(y)} |y| + \int_{B_+ \cap A_1} |y| < \sup_{\mathrm{m}(B_y) = s_0} \int_{B_y} |y| = \int_0^{s_0} y^*, \tag{76}$$

$$\int_{B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(x)} |x| + \int_{B_+ \cap A_1} |x| < \sup_{\mathrm{m}(B_x) = s_0} \int_{B_x} |x| = \int_0^{s_0} x^*, \tag{77}$$

gdzie ostatnie równości wynikają z Lematu 2.10. Jeżeli $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(y)) = 0$ lub $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(x)) = 0$ wtedy, z nierówności (67) i (75), dostajemy (76) lub (77), odpowiednio.

Niech $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(x)) > 0$ i $\mathrm{m}(B_+ \cap A_3 \cap \mathcal{S}(y)) > 0$. Wtedy

$$\mathrm{m}(B_+ \cap \mathcal{S}(x)) < s_0 \quad \text{i} \quad \mathrm{m}(B_+ \cap \mathcal{S}(y)) < s_0. \tag{78}$$

Załóżmy przeciwnie, że (76) i (77) nie zachodzą, tzn.

$$\int\limits_{B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))]} |y| = \sup_{\mathrm{m}(B_y) = s_0} \int_{B_y} |y| \quad \text{oraz} \quad \int\limits_{B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(x))]} |x| = \sup_{\mathrm{m}(B_x) = s_0} \int_{B_x} |x|. \tag{79}$$

Na mocy równości (66) wnioskujemy, że

$$B_+ \cap \mathcal{S}(y) = B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))]$$

i

$$B_+ \cap \mathcal{S}(x) = B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(x))].$$

Wtedy, z założenia (79) i Lematu 2.10, mamy

$$\int_{B_+ \cap S_y} |y| = \int_{B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(y))]} |y| = \sup_{m(B_y)=s_0} \int_{B_y} |y| = \int_0^{s_0} y^*$$

i

$$\int_{B_+ \cap S_x} |x| = \int_{B_+ \cap [A_1 \cup (A_3 \cap \mathcal{S}(x))]} |x| = \sup_{m(B_x)=s_0} \int_{B_x} |x| = \int_0^{s_0} x^*.$$

Stąd i z nierówności (78) dostajemy, że $\mathcal{S}(x) \subset B_+$ i $\mathcal{S}(y) \subset B_+$ i w konsekwencji $\mathcal{S}(|x| + |y|) \subset B_+$. Z uwagi na wyrażenie $m(B_+) = s_0 \leqslant \gamma$ otrzymujemy sprzeczność z nierównością (60). To dowodzi, że zachodzi przynajmniej jedna z nierówności (76) lub (77).

Wtedy, wykorzystując równość (68) i jeden z warunków (76) lub (77), otrzymujemy, że

$$\int_0^{s_0} (x+y)^* < \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^*. \tag{80}$$

Analogicznie jak w Przypadku II. B. a. 1. A., otrzymujemy nierówność (73) jak również nierówność (74), co dla $t = \gamma$ kończy dowód dla przypadku II. B. a. 1., gdy $m(B_+ \cap A_3) > 0$.

Rozważając przypadek II. B. a. 1. gdy $m(B_- \cap A_3) > 0$ możemy postępować analogicznie jak powyżej z elementem $(x-y)^*$ w miejsce $(x+y)^*$ i zbiorem B_- w miejsce B_+.

Przypadek II. B. a. 2. Załóżmy, że $m(B_+ \cap A_3) = 0$ i $m(B_- \cap A_3) = 0$. Wtedy warunek (66) implikuje, że

$$B_+ \cap \mathcal{S}(x+y) \subset A_1 \quad \text{i} \quad B_- \cap \mathcal{S}(x-y) \subset A_2. \tag{81}$$

Twierdzimy, że

$$m(A_1) \geqslant s_0 \quad \text{i} \quad m(A_2) \geqslant s_0. \tag{82}$$

Jeżeli $m(A_1) < s_0$, to $m(B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)) < s_0$, skąd $m(\mathcal{S}(x+y)) < s_0 \leqslant \gamma$ z definicji zbioru B_+, co daje sprzeczność z nierównością (62). Rozumowanie dla przypadku $m(A_2) < s_0$ jest analogiczne biorąc zbiór B_- zamiast B_+ oraz nośnik $\mathcal{S}(x-y)$ zamiast $\mathcal{S}(x+y)$. Zachodzą zatem obie nierówności $m(A_1) \geqslant s_0$ oraz $m(A_2) \geqslant s_0$.

Korzystając z warunków (59) wnioskujemy, że

$$m(\mathcal{S}(x)) \geqslant 2s_0 \quad \text{i} \quad m(\mathcal{S}(y)) \geqslant 2s_0. \tag{83}$$

Przypadek II. B. a. 2. A. Jeżeli funkcja x^* nie jest stała na przedziale $(0, 2s_0)$, to

$$\int_0^{2s_0} x^* < 2\int_0^{s_0} x^*.$$

Warunki (81) oraz (59) implikują, że $(B_+ \cap \mathcal{S}(x+y)) \cap (B_- \cap \mathcal{S}(x-y)) = \emptyset$. W konsekwencji

$$\int_{B_+\cap\mathcal{S}(x+y)} |x| + \int_{B_-\cap\mathcal{S}(x-y)} |x| \leqslant \int_0^{2s_0} x^* < 2\int_0^{s_0} x^*.$$

Zatem

$$\int_{B_+\cap\mathcal{S}(x+y)} |x| < \int_0^{s_0} x^* \quad \text{lub} \quad \int_{B_-\cap\mathcal{S}(x-y)} |x| < \int_0^{s_0} x^*.$$

Ostatecznie, z powyższego rozumowania oraz inkluzji (81), wnioskujemy, że zachodzi jedna z poniższych nierówności

$$\int_0^{s_0} (x+y)^* = \int_{B_+\cap\mathcal{S}(x+y)} |x+y| = \int_{B_+\cap\mathcal{S}(x+y)} |x| + |y| < \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^* \tag{84}$$

lub

$$\int_0^{s_0} (x-y)^* = \int_{B_-\cap\mathcal{S}(x-y)} |x-y| = \int_{B_-\cap\mathcal{S}(x-y)} |x| + |y| < \int_0^{s_0} x^* + \int_0^{s_0} y^*. \tag{85}$$

Analogicznie jak w Przypadku II. B. a. 1. A., dostajemy nierówności (73) oraz (74), co dla $t = \gamma$ kończy dowód podprzypadku.

Jeśli y^* nie jest stała na $(0, 2s_0)$, to wtedy dowód przebiega analogicznie zamieniając miejscami elementy x oraz y, ich nierosnące przestawienia i nośniki.

Przypadek II. B. a. 2. B. Załóżmy, że $x^*\chi_{(0,2s_0)} = a > 0$ i $y^*\chi_{(0,2s_0)} = b > 0$. Ponieważ dla p.w. $t > 0$ mamy $|x(t)| \leqslant a$ i $|y(t)| \leqslant b$, zatem

$$(x \pm y)^*(t) \leqslant (|x| + |y|)^*(t) \leqslant a + b = x^*(t) + y^*(t) \tag{86}$$

dla wszystkich $0 < t < 2s_0$.

Jeśli istnieje $t_0 \leqslant s_0$ takie, że $(|x| + |y|)^*(t_0) < x^*(t_0) + y^*(t_0)$, to wtedy, dla każdego $t_0 < t < 2s_0$,

$$(x \pm y)^*(t) \leqslant (|x| + |y|)^*(t) < x^*(t) + y^*(t). \tag{87}$$

Jeżeli $(|x| + |y|)^*(t) = x^*(t) + y^*(t)$ dla każdego $t \leqslant s_0$, to, z definicji s_0, dostajemy nierówność (87) dla każdego $s_0 \leqslant t < 2s_0$. Wtedy, korzystając z nierówności (86), mamy

$$\int_0^t (x+y)^* < \int_0^t x^* + \int_0^t y^*$$

dla $s_0 < t < 2s_0$.

Analogicznie jak dla przypadku II. B. a. 1. A., otrzymujemy nierówności (73) oraz (74), co, dla $t = \gamma > s_0$, kończy dowód podprzypadku.

Przypadek II. B. b. Dowód tego przypadku można podzielić na podprzypadki analogiczne jak dla Przypadku II. B. a. Stosujemy wedy argumentację jak w dowodach przypadków II. B. a. 1. (wraz z podprzypadkami) i II. B. a. 2. A. dla γ zamiast s_0. Ze względu na założenie, że funkcja x^* nie jest stała na przedziale $(0, 2\gamma)$ nie ma konieczności rozważania przypadku analogicznego do II. B. a. 2. B. Poniżej omówimy występujęce drobne różnice w rozumowaniach.

1. Dowód podprzypadku analogicznego do II. B. a. 1. A. kończy się na nierówności (72), gdyż przedziałami całkowania są $(0, \gamma)$ zamiast $(0, s_0)$.

2. Rozważając podprzypadek analogiczny do II. B. a. 1. B. gdy $m(B_+ \cap A_3) > 0$, jego dowód kończy się na analogicznej nierówności (80) z liczbą γ w miejsce s_0.

3. Dowód podprzypadku analogicznego do II. B. a. 2. A. kończy się na etapie wnioskowania jednej z nierówności (84) lub (85) z liczbą γ zamiast s_0. Z uwagi na założenie, że funkcja x^* nie jest stała na przedziale $(0, 2\gamma)$ nie ma konieczności rozważania przypadku, gdy taka własność dotyczy elementu y^*.

$\square$

Poniższe wnioski były udowodnione bezpośrednio w pracy [52].

Wniosek 2.64. Przestrzeń Lorentza $\Gamma_{p,w}$ jest niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

(i) $\beta = 0$,

(ii) jeśli $\alpha = \infty$ to $\int_0^\infty w = \infty$,

(iii) jeśli $\alpha = 1$ to $\gamma > 1/2$,

gdzie β i γ są zdefiniowane w (18).

Dowód. Konieczność. (i) Załóżmy, że $\beta > 0$ i weźmy $x = \chi_A / \|\chi_A\|$, gdzie $0 < m(A) < \beta$. Wtedy $\|x\| = 1$. Z Twierdzenia 2.60 wnioskujemy, że x nie jest NSQ punktem.

(ii) oraz (iii). Załóżmy, że $\alpha = \infty$ i $\int_0^\infty w < \infty$ lub $\alpha = 1$ i $\gamma \leqslant 1/2$. Niech $x = \chi_I / \|\chi_I\|$. Wtedy $\|x\| = 1$ i z Twierdzenia 2.60 wynika, że x nie jest NSQ punktem.

Dostateczność. Niech $x \in S(\Gamma_{p,w})$.

Niech $\alpha = 1$. Z Twierdzenia 2.62 oraz założeń (i) i (iii) wnosimy, że x jest NSQ punktem.

Jeżeli $\alpha = \infty$, to warunek (ii) implikuje, że $\gamma = \infty$. Twierdzenie 2.61 implikuje, że x jest NSQ punktem. □

Zauważmy, że $\left(\Gamma_{p,w}(I)\right)_a \neq \Gamma_{p,w}(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I = [0,\infty)$ i $\int_0^\infty w < \infty$ (zob. [43]).

Wniosek 2.65. Załóżmy, że $\alpha = \infty$ i $\int_0^\infty w < \infty$. Przestrzeń $\left(\Gamma_{p,w}[0,\infty)\right)_a$ jest niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

(i) $\beta = 0$,

(ii) $\gamma = \infty$,

gdzie β i γ są zdefiniowane w (18).

Dowód. Konieczność. (i) Dowód jest analogiczny jak dowód Wniosku 2.64.

(ii) Niech $\gamma < \infty$ i weźmy $x = \chi_{(0,2\gamma)} / \left\|\chi_{(0,2\gamma)}\right\|$. Oczywiście z Twierdzenia 2.44 mamy, że $x \in \left(\Gamma_{p,w}\right)_a$. Definicja elementu x i Twierdzenie 2.60 implikują, że x nie jest NSQ punktem.

Dostateczność. Niech $x \in S\left(\left(\Gamma_{p,w}\right)_a\right)$. Z Twierdzenia 2.44 mamy, że $x^*(\infty) = 0$. Wtedy x^* nie jest stała na $[0,\infty)$. Ponadto (i) implikuje, że $m(\mathcal{S}(x)) > \beta$. Z Twierdzenia 2.61, x jest NSQ punktem. □

2.5. Problemy lokalnej zdominowanej aproksymacji

Załóżmy, że E jest siatką Banacha (zob. [58]) i $K \subset E$ jest podsiatką domkniętą ze względu na skończone suprema i infima (K nie musi być podprzestrzenią liniową). Odcinek porządkowy $[u, v] = \{z \in E : u \leqslant z \leqslant v\}$ jest typowym przykładem podsiatki.

Definicja 2.66 ([57]). Przez $f \leqslant K$, dla $f \in E$ będziemy rozumieć, że $f \leqslant g$ dla każdego $g \in K$. Mając system $f \leqslant K$ zdefiniujmy zbiór

$$P_K(f) = \left\{u \in K : \|u - f\| = \inf_{w \in K} \|w - f\|\right\}.$$

Oznaczmy

$$\operatorname{dist}(f, K) = d(f, K) = \inf_{w \in K} \|w - f\| .$$

Mówimy, że problem zdominowanej najlepszej aproksymacji dla systemu $f \leqslant K$ jest:

- rozwiązywalny, jeżeli $P_K(f) \neq \emptyset$;

- unikalny (jednoznacznie rozwiązywalny), jeżeli $P_K(f)$ jest singletonem.

Analogicznie możemy rozważać takie problemy dla systemu $f \geqslant K$.

Wiadomo, że

(i) dla wszystkich domkniętych normowo podsiatek K i wszystkich $f \leqslant K$ ($f \geqslant K$), problem najlepszej zdominowanej aproksymacji jest rozwiązywalny wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (OC)$ (zob. Twierdzenie 3.3 w pracy [57]).

(ii) Dla każdej podsiatki K i wszystkich $f \leqslant K$ ($f \geqslant K$) zbiór $P_K(f)$ jest co najwyżej singletonem wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (SM)$ (zob. Twierdzenie 3.1 w [57]).

Więcej faktów dotyczących tych problemów znajdziemy w [8] oraz [36].

Załóżmy, że $E \notin (SM)$ lub/i $E \notin (OC)$ oraz $f \in E$. Wtedy liczność zbioru $P_K(f)$ powinna zależeć od własności monotonicznościowych lub od porządkowej ciągłości danego punktu f. Innymi słowy, pokażemy rolę UM i LM punktów oraz punktów porządkowej ciągłości w problemie lokalnej zdominowanej najlepszej aproksymacji dla siatek Banacha.

Lemat 2.67. Niech E będzie siatką Banacha i $f \in E^+$. Jeżeli dla każdego porządkowego odcinka K przy $f \leqslant K$ ($f \geqslant K$), zbiór $P_K(f)$ jest co najwyżej singletonem, to f jest zarówno UM jak i LM punktem.

Dowód. Rozważmy przypadek $f \leqslant K$. Załóżmy, że f nie jest UM punktem, tzn. istnieje $0 \leqslant g \neq 0$, gdzie $\|f + g\| = \|f\|$. Ustalmy $K = [2f, 2f + g]$. Wtedy $f \leqslant K$ i, dla każdego $z \in K$, mamy $\|f - z\| = \|f\| = \mathrm{d}(f, K)$. Wtedy $P_k(f) = \mathrm{K}$.

Załóżmy, że f nie jest LM punktem. Wtedy $\|g\| = \|f\|$ dla pewnego $0 \leqslant g \leqslant f$ i $g \neq f$. Ustalając $z = f - g$ i $K = [2f - z, 2f]$ otrzymujemy, że $f \leqslant K$ i $\|f - u\| = \|f\| = \mathrm{d}(f, K)$ dla każdego $u \in K$. Wtedy $P_K(f) = K$.

Rozważmy przypadek, że $f \geqslant K$. Załóżmy, że f nie jest LM punktem, tzn $\|f - g\| = \|f\|$ dla pewnego $0 \leqslant g \leqslant f$ i $g \neq 0$. Jeżeli $K = [0, g]$, to $f \geqslant K$ i $P_K(f) = K$. Załóżmy, że f nie jest UM punktem. Wtedy $\|g\| = \|f\|$ dla pewnego $0 \leqslant f \leqslant g$ i $f \neq g$. Ustalmy $K = [u, v]$, gdzie $u = f - g$ i $v = 0$. Wtedy $f \geqslant K$ i $P_K(f) = K$. □

Twierdzenie przeciwne do powyższego lematu nie jest prawdziwe w ogólności, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 2.68. Niech $E = \Lambda_{1,w}[0,\infty)$ oraz $\int_0^\infty w(t)dt = 1$, $w(t) > 0$ dla $t > 0$. Ustalmy $f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} + 1$ dla $t \geqslant 0$. Wtedy f jest LM punktem i UM punktem na mocy twierdzeń 2.45 i 2.47. Niech $K_1 = [u_1, v_1]$, gdzie

$$u_1 = 2\chi_A + f\chi_B, \quad A = \bigcup_{i=0}^{\infty}(2i, 2i+1], \quad B = [0,\infty)\backslash A \quad \text{i} \quad v_1 = 3\chi_{[0,\infty)}.$$

Wtedy $f \leqslant K_1$, $\operatorname{dist}(f, K_1) = \|f - u_1\| = 1$, ponieważ $(f - u_1)^* = \chi_{[0,\infty)}$. Ponadto, dla każdego $z \in K_1$ postaci $u_1 \leqslant z \leqslant f + \chi_{[0,\infty)}$, mamy $\|f - z\| = 1$. Ostatecznie $\|f - z\| > 1$ dla każdego $z \geqslant f + \chi_{[0,\infty)}$ i $z \neq f + \chi_{[0,\infty)}$, co prowadzi do równości $P_{K_1}(f) = [u_1, f + \chi_{[0,\infty)}]$.

Niech $K_2 = [u_2, v_2]$, gdzie $u_2 = 0$ i $v_2 = \chi_{(1,2)}$. Ustalmy $w = \frac{1}{4}\chi_{(1,2)}$. Wtedy, dla każdego $z \in [w, v_2]$, mamy $(f - z)^* = (f - v_2)^*$ z uwagi na $f(1) = 5/4$. W konsekwencji $\|f - z\| = \|f - v_2\|$ dla każdego $z \in [w, v_2]$, skąd $P_{K_2}(f) \supset [w, v_2]$.

Dowód poniższego lematu może być przeprowadzony podobnie jak dowód Twierdzenia 3.3 w [57]. Przedstawimy go dla wygody Czytelnika

Lemat 2.69. Niech E będzie przestrzenią Köthego i $f \in E^+$. Wtedy f jest punktem porządkowej ciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej domkniętej normowo podsiatki $K \subset E$, gdzie $f \geqslant K$, mamy $P_K(f) \neq \emptyset$.

Dowód. Konieczność. Niech $f \geqslant K$ i $(h_n) \subset K$ będzie ciągiem minimalizującym, tzn.

$$\operatorname{dist}(f, K) = \inf_{h \in K} \|f - h\| = \lim_{n\to\infty} \|f - h_n\|.$$

Ponieważ K jest podsiatką, zatem $u_n = \sup\{h_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} \in K$. Ponadto nierówność $0 \leqslant f - u_n \leqslant f - h_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ implikuje, że (u_n) jest również ciągiem minimalizującym z uwagi na poniższe nierówności

$$\operatorname{dist}(f, K) \leqslant \|f - u_n\| \leqslant \|f - h_n\| \to \operatorname{dist}(f, K), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ istnieje element $u = \sup_n u_n \leqslant f$, zatem ciąg $u - u_n \geqslant 0$ dąży monotonicznie do zera. Ponadto $u - u_n \leqslant f \in E_a$, zatem $\|u - u_n\| \to 0$. Z faktu, iż podsiatka K jest normowo domknięta wnioskujemy, że $u \in K$. Wtedy

$$\operatorname{dist}(f, K) \leqslant \|f - u\| \leqslant \|f - u_n\| + \|u_n - u\| \to \operatorname{dist}(f, K).$$

Ostatecznie $P_K(f) \neq \emptyset$.

Dostateczność. Załóżmy, że f nie jest punktem porządkowej ciągłości. Wtedy istnieje taki ciąg zbiorów $A_n \downarrow \emptyset$, że $\inf_n \left\|f\chi_{A_n}\right\| > 0$. Zdefiniujmy ciąg $f_n = f\chi_{A_n}$. Wtedy $f_n \downarrow 0$ a zatem $f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$ punktowo dla każdego t. Weźmy

$$\tilde{f}_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) f_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

Wtedy, dla każdego $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$, mamy $\left\|\tilde{f}_n\right\| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\|f_n\|$ oraz

$$\left\|\tilde{f}_{n+1}\right\| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right)\|f_{n+1}\| < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\|f_n\| = \left\|\tilde{f}_n\right\|.$$

Weźmy $K = \{f - \tilde{f}_n\}_n$. Oczywiście, dla każdego $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$, mamy, że $f - \tilde{f}_n \leqslant f$, skąd $K \leqslant f$. Zauważmy, że

$$\operatorname{dist}(f, K) = \inf_{u \in K} \|u - f\| = \inf_n \left\|f - \tilde{f}_n - f\right\| = \inf_n \left\|\tilde{f}_n\right\| > 0. \tag{88}$$

Twierdzimy, że $P_K(f) = \emptyset$. Załóżmy przez transpozycję, że istnieje takie $u \in K$, że $P_K(f) = \{u \in K\colon \operatorname{dist}(f, K) = \|u - f\|\} = \{u\}$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, że $u = f - \tilde{f}_{n_0}$ oraz $\operatorname{dist}(f, K) = \inf_n \left\|\tilde{f}_n\right\| = \left\|\tilde{f}_{n_0}\right\|$ (zob. (88)). To prowadzi do sprzeczności z nierównością $\left\|\tilde{f}_{n+1}\right\| < \left\|\tilde{f}_n\right\|$ i dowodzi tezę.

Udowodnimy, że podsiatka K jest domknięta normowo. Załóżmy przez transpozycję, że nie jest, tzn. istnieje $g \in E$ takie, że $\left\|(f - \tilde{f}_n) - g\right\| \to 0$ oraz $g \notin K$. Wtedy $(f - \tilde{f}_n) \to g$ p.w. Równocześnie z definicji elementów $\tilde{f}_n$ wnioskujemy, że $(f - \tilde{f}_n) \to f$ p.w. Stąd $g = f$ p.w. A zatem $\left\|(f - \tilde{f}_n) - g\right\| = \left\|\tilde{f}_n\right\| \to 0$, co przeczy nierówności $\inf_n \left\|\tilde{f}_n\right\| > 0$.

Podsumowując, znaleźliśmy normowo domkniętą podsiatkę K taką, że $K \leqslant f$ oraz $P_K(f) = \emptyset$, co kończy dowód. □

Poniższy wniosek wynika natychmiast z powyższych dwóch lematów jak i twierdzenia 2.37.

Wniosek 2.70. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Banacha i $f \in E^+$. Jeżeli dla każdej normowo domkniętej podsiatki K, gdzie $f \geqslant K$, mamy $\operatorname{card}(P_K(f)) = 1$, to f jest LLUM punktem i UM punktem.

Lemat 2.71. Niech E będzie siatką Banacha, $f \in E$, K jej podsiatką, $f \leqslant K$ (odpowiednio $f \geqslant K$), $P_K(f) \neq \emptyset$ i $y_1 \in P_K(f)$. Jeżeli $y_1 - f$ (odpowiednio $f - y_1$) jest UM i LM punktem, to $P_K(f) = \{y_1\}$.

Dowód. Rozważmy przypadek $f \leqslant K$. Załóżmy, że $y_2 \in P_K(f)$. Niech $z := \min\{y_1, y_2\} \in K$. Jeżeli $z \neq y_1$, to $z - f \leqslant y_1 - f$, $z - f \neq y_1 - f$ oraz

$$\operatorname{dist}(f, K) \leqslant \|z - f\| \leqslant \|y_1 - f\| = \operatorname{dist}(f, K),$$

skąd $y_1 - f$ nie jest LM punktem. Wtedy $\min\{y_1, y_2\} = y_1$, tzn. $y_2 \geqslant y_1$. Jeżeli $y_2 \neq y_1$, to $y_2 - f \geqslant y_1 - f$ i $y_2 - f \neq y_1 - f$. Z drugiej strony, mamy

$$\operatorname{dist}(f, K) = \|y_1 - f\| \leqslant \|y_2 - f\| = \operatorname{dist}(f, K).$$

Stąd $y_1 - f$ nie jest UM punktem. W konsekwencji $y_1 = y_2$, co kończy dowód. □

Twierdzenie przeciwne do powyższego lematu nie zachodzi w ogólności.

Przykład 2.72. Niech $E = \Lambda_{1,w}[0, \infty)$, gdzie $w = \chi_{[0,1)}$. Ustalmy $x \in \chi_{(0,2)}$, $K_1 = [u_1, v_1]$, $u_1 = 2\chi_{(0,2)}$ i $v_1 = 3\chi_{(0,1)} + 2\chi_{(1,2)}$. Wtedy $x \leqslant K_1$, $\operatorname{dist}(x, K_1) = \|u_1 - x\| = 1$. Ponadto dla każdego $z \in K_1$, $z \neq u_1$, mamy $\|z - x\| > 1$, skąd $P_{K_1}(x) = \{u_1\}$. Z drugiej strony, $u_1 - x = \chi_{(0,2)}$ nie jest ani UM ani LM punktem. Podobnie dla $K_2 = [u_2, v_2]$, $u_2 = \frac{1}{2}\chi_{1,2}$ i $v_2 = \frac{1}{2}\chi_{(0,2)}$, wnioskujemy, że $x \geqslant K_2$, $\operatorname{dist}(x, K_2) = \|x - v_2\| = 1/2$ oraz $P_{K_2}(x) = \{v_2\}$. Ostatecznie $x - v_2 = \frac{1}{2}\chi_{(0,2)}$ nie jest ani UM ani LM punktem.

3. Uogólnione przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego

W bierzącym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia i lematy a także definicję lokalnego warunku $\Delta_2^E(x)$ dla danego elementu x. Warunek ten jest narzędziem w określeniu warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby element uogólnionej przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego był punktem porządkowej ciągłości. Jest to główny wynik tego rozdziału. W dalszej kolejności podamy również odpowiednie warunki dla punktu porządkowej ciągłości w szczególnych przypadkach w/w przestrzeni, tj. przestrzeniach Calderóna–Łozanowskiego, a także w przestrzeniach Orlicza–Lorentza.

Dla przestrzeni (T, Σ, μ) przez Ω oznaczymy bezatomową, a przez N czysto atomową część przestrzeni T. Wtedy (T, Σ, μ) możemy zapisać jako sumę prostą

$$(T, \Sigma, \mu) = (\Omega, \Sigma \cap \Omega, \mu|_{\Omega}) \oplus (\mathbb{N}, \Sigma \cap \mathbb{N}, \mu|_{\mathbb{N}}).$$

W literaturze możemy spotkać się z różnymi definicjami funkcji Orlicza. W niniejszej rozprawie będziemy rozpatrywać możliwie najszerszą klasę tych funkcji, dla których odpowiednia przestrzeń jest przestrzenią Banacha. Następnie podamy uogólnienie funkcji Orlicza do funkcji Musielaka–Orlicza. Funkcje te są niezbędne dla zdefiniowania uogólnionych przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego.

Definicja 3.1. Funkcją Orlicza nazywamy funkcję $\phi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, spełniającą warunki

1. $\phi(0) = 0$ oraz $0 < \phi(u) < \infty$ dla pewnego $u > 0$,
2. $\lim\limits_{u\to\infty} \phi(u) = \infty$,
3. ϕ jest funkcją parzystą,
4. ϕ jest lewostronnie ciągła i wypukła na zbiorze
   (i) $[0, b_\phi]$, gdy $\phi(b_\phi) < \infty$,
   (ii) $[0, b_\phi)$, gdy $\phi(b_\phi) = \infty$,
   (iii) $[0, \infty)$, gdy $b_\phi = \infty$, gdzie

$$b_\phi = \sup\{u > 0\colon \phi(u) < \infty\}. \tag{89}$$

Przyjmijmy także oznaczenie

$$a_\phi = \sup\{u \geqslant 0\colon \phi(u) = 0\}. \tag{90}$$

Definicja 3.2. Funkcją Musielaka–Orlicza nazywamy funkcję $\phi\colon T\times\mathbb{R} \to [0,\infty]$ taką, że

1. $\phi(t,\cdot)$ jest funkcją Orlicza dla p.w. $t \in T$,
2. $\phi(\cdot,u)$ jest Σ mierzalną funkcją dla każdego $u \in \mathbb{R}$.

Będziemy pisali $(\phi \circ x)(t)$ zamiast $\phi(t, x(t))$.

Dla funkcji Musielaka–Orlicza ϕ, przez a_ϕ i b_ϕ będziemy rozumieć uogólnienia formuł (90) i (89), tj.

$$a_\phi(t) = \sup\{u > 0\colon \phi(t,u) = 0\}, \quad b_\phi(t) = \sup\{u > 0\colon \phi(t,u) < \infty\}. \tag{91}$$

Uwaga 3.3 ([7], Prop 5.1). Dla każdej funkcji Musielaka–Orlicza ϕ, obie funkcje $a_\phi(t)$ i $b_\phi(t)$ są Σ-mierzalne.

Rozważając funkcję $\phi|_{\mathbb{N}}$ nad czysto atomową częścią przestrzeni T, będziemy pisali $\phi_a = (\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Funkcję $\phi|_\Omega$ nad bezatomową częścią przestrzeni będziemy oznaczać przez ϕ_c. Oczywiście

$$\phi = \phi_a + \phi_c \tag{92}$$

dla każdej przestrzeni miary.

Definicja 3.4 ([62]). Dla dowolnej funkcji Musielaka–Orlicza ϕ oraz przestrzeni Köthego E definiujemy na L^0 wypukły modular

$$I_\phi(x) = \begin{cases} \left\|\phi \circ x\right\|_E, & \text{jeśli } \phi \circ x \in E, \\ \infty, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Często funkcje Orlicza definiuje się bez własności parzystości, funkcja ta odwzorowuje wtedy $[0,\infty)$ w $[0,\infty]$, ponadto $I_\phi(x) = \left\|\phi \circ |x|\right\|_E$, jeśli $\phi \circ |x| \in E$.

Definicja 3.5. Niech E będzie przestrzenią Köthego, a ϕ - funkcją Musielaka–Orlicza. Przez uogólnioną przestrzeń Calderóna–Łozanowskiego rozumiemy

$$E_\phi = \{x \in L^0\colon \phi \circ (lx) \in E \text{ dla pewnego } l > 0\}$$

z normą Nakano–Luxemburga, tj.

$$\|x\|_\phi = \inf\left\{\lambda > 0\colon I_\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}.$$

W przypadku uogólnionych przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego, rozważając czysto atomową część przestrzeni T możemy ograniczyć się do przestrzeni z miarą liczącą $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mathrm{m}\right)$ (zob. [38]).

W tym rozdziale zakładamy o przestrzeni Köthego E, że ma własność Fatou, zatem przestrzeń E_ϕ również ma własność Fatou i jest przestrzenią Banacha (zob. [22, 59]).

Przestrzenie E_ϕ w sytuacji, gdy ϕ nie zależy od parametru, są szczególnym przypadkiem konstrukcji $\rho_\phi(E, F)$ dla $F = L^\infty$ rozważanej przez Łozanowskiego, a wcześniej przez Calderóna (zob. [22])

Definicja 3.6. Szczególnym przypadkiem przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego dla $E = \Lambda_{1,w}$ (przestrzeń Lorentza, zob. Definicję 2.16) i funkcji Orlicza ϕ (bez parametru) są przestrzenie Orlicza–Lorentza $E_\phi = \Lambda_{\phi,w}$.

Idąc dalej, dla $p \geqslant 1$ i funkcji $\phi(u) = u^p$, przestrzeń $\Lambda_{\phi,w}$ jest przestrzenią Lorentza $\Lambda_{p,w}$ (zob Definiję 2.16).

Definicja 3.7. Załóżmy, że funkcja ϕ_c pochodzi z równości (92). Mówimy, że ϕ_c spełnia

1. Globalny warunek Δ_2^E (ozn. $\phi_c \in \Delta_2^E$), jeśli istnieją stała $K > 0$ i nieujemna Σ-mierzalna funkcja f, takie, że

   $$\phi_c \circ (2f) \in E \quad \text{i} \quad \phi_c(t, 2u) \leqslant K\phi_c(t, u)$$

   dla p.w. $t \in \Omega$ i $u \geqslant f(t)$.

2. Globalny warunek $\Delta_2^E(\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ (ozn. $\phi_c \in \Delta_2^E(\varepsilon)$), jeśli $\phi_c \in \Delta_2^E$ przy $K = K_\varepsilon$, $f = f_\varepsilon$ i $\left\|\phi_c \circ (2f_\varepsilon)\right\|_E < \varepsilon$.

3. Globalny warunek Δ_l^E dla $l > 1$ (ozn. $\phi_c \in \Delta_l^E$), jeśli istnieją stała $K_l > 0$ i nieujemna Σ-mierzalna funkcja f_l, takie, że

   $$\phi_c \circ (lf_l) \in E \quad \text{i} \quad \phi_c(t, lu) \leqslant K_l\phi_c(t, u)$$

   dla p.w. $t \in \Omega$ i $u \geqslant f_l(t)$.

   Analogicznie jak powyżej definiujemy warunek $\Delta_l^E(\varepsilon)$ ze stałą $K_{\varepsilon,l}$ i funkcją $f_{\varepsilon,l}$.

4. Warunek Δ_2^E na zbiorze miary dodatniej $A \subset \Omega$ $\left(\text{ozn. } \phi_c \in \Delta_2^E\big|_A\right)$, jeśli istnieją $K > 0$ i nieujemna, Σ-mierzalna funkcja f, takie, że

   $$\mathcal{S}(f) \subset A, \quad \phi_c \circ (2f) \in E, \quad \text{i} \quad \phi_c(t, 2u) \leqslant K\phi_c(t, u)$$

dla p.w. $t \in A$ i wszystkich $u \geqslant f(t)$.

Równoważne definicje warunków można znaleźć w [22].

Uwaga 3.8. Zauważmy, że gdy $\phi \in \Delta_2^E\big|_\Omega$, to $b_\phi(t) = \infty$ p.w. w Ω. W przeciwnym przypadku, istnieje zbiór $B \subset \Omega$ taki, że $\mu(B) > 0$ i $b_\phi(t) < \infty$ dla $t \in B$. Ponadto, wobec $\phi \circ (2f) \in E$, wnioskujemy, że dla $t \in B$

1. $f(t) < b_\phi(t)$, gdy $\phi(t, b_\phi(t)) = \infty$

   lub

2. $f(t) \leqslant b_\phi(t)$, gdy $\phi(t, b_\phi(t)) < \infty$.

Wtedy znajdziemy $f(t) < u < b_\phi(t)$ w przypadku 1. ($f(t) < u = b_\phi(t)$ w przypadku 2.), takie, że $2u > b_\phi(t)$, co stoi w sprzeczności z warunkiem $\Delta_2^E\big|_\Omega$ i dowodzi równość $b_\phi(t) = \infty$ p.w. w Ω.

Definicja 3.9. Załóżmy, że funkcja ϕ_a pochodzi z równości (92). Mówimy, że ϕ_a spełnia

1. Globalny warunek δ_2^E (ozn. $\phi_a \in \delta_2^E$) jeśli istnieją stałe $\alpha, K > 0$, ciągi $b = (b_i)_{i=1}^\infty \geqslant 0$ i $d = (d_i)_{i=1}^\infty$ takie, że

$$\phi_a \circ (2b) \in E, \quad \left\|\phi_i(d_i)e_i\right\|_E = \alpha \quad \text{i} \quad \phi_i(2u) \leqslant K\phi_i(u)$$

   dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i $u \in [b_i, d_i]$.

   Analogicznie jak w przypadku funkcyjnym definiujemy warunki $\delta_2^E(\varepsilon)$, δ_l^E, $\delta_l^E(\varepsilon)$.

2. Warunek δ_2^E na przeliczalnie nieskończonym zbiorze $A \subset \mathbb{N}$ $\left(\text{ozn. } \phi_a \in \delta_2^E\big|_A\right)$, jeśli istnieją stałe $\alpha, K > 0$, ciągi $b = (b_i)_{i=1}^\infty \geqslant 0$ i $d = (d_i)_{i=1}^\infty$ takie, że

$$\phi_a \circ (2b) \in E, \quad \left\|\phi_i(d_i)e_i\right\|_E = \alpha \quad \text{i} \quad \phi_i(2u) \leqslant K\phi_i(u)$$

   dla każdego $i \in A$ i $u \in [b_i, d_i]$.

Więcej szczegółów dotyczących powyższych warunków można znaleźć w [23].

Definicja 3.10 ([38], Lemat 2). Mówimy, że funkcja Musielaka–Orlicza ϕ spełnia warunek Δ_2^E (ozn. $\phi \in \Delta_2^E$) jeśli $\phi_c \in \Delta_2^E$ i $\phi_a \in \delta_2^E$.

Uwaga 3.11 ([38], Lemat 2). Jeżeli funkcja ϕ nie zależy od parametru (ϕ jest funkcją Orlicza), to warunek Δ_2^E jest równoważny warunkowi

(i) $\Delta_2(\infty)$, gdy $L^\infty \hookrightarrow E$;

(ii) $\Delta_2(\mathbb{R}_+)$, gdy $L^\infty \not\hookrightarrow E$ i $E \not\hookrightarrow L^\infty$.

Przypomnijmy, że $\phi \in \Delta_2(\infty)$ (odpowiednio $\phi \in \Delta_2(0)$) jeśli istnieje takie u_0, że $\phi(u_0) < \infty$ (odpowiednio $\phi(u_0) > 0$) oraz $k > 1$, takie, że $\phi(2u) \leqslant k\phi(u)$ dla $|u| \geqslant u_0$ (odpowiednio $|u| \leqslant u_0$). Ponadto $\phi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$ jeśli istnieje $k > 1$ takie, że $\phi(2u) \leqslant k\phi(u)$ dla każdego $u \in \mathbb{R}$ (zob. [5], [38]).

Definicja 3.12. Niech $x \in E_\phi$. Mówimy, że funkcja ϕ spełnia lokalny warunek $\Delta_2^E(x)$ ze względu na element x (w skrócie $\phi \in \Delta_2^E(x)$), jeżeli dla każdego $l > 1$ spełniony jest warunek

$$\left\| \phi \circ (lx)\chi_{A_k^l} \right\|_E \to 0 \quad \text{przy} \quad k \to \infty,$$

gdzie

$$A_k^l = \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon l|x(t)| < b_\phi(t) \quad \text{i} \quad \phi(t, lx(t)) > k\phi(t, x(t)) \right\}. \tag{93}$$

Lokalny warunek $\Delta_2^E(x)$ dla funkcji Orlicza bez parametru został wprowadzony w pracy [54].

Poniższy przykład pokazuje, że funkcja ϕ może nie spełniać globalnego warunku Δ_2^E przy jednoczesnym spełnianiu warunku lokalnego $\Delta_2^E(x)$ dla pewnego $x \in E_\phi$.

Przykład 3.13. Rozważmy funkcję Orlicza $\phi(u) = 2^u - 1$, $E = L^1[0, \infty)$ i

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (0, 1), \\ \log_2\left(\frac{1}{t^2} + 1\right) & \text{dla } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Oczywiście, na podstawie Uwagi 3.11, mamy, że $\Delta_2^E = \Delta_2(\mathbb{R}_+)$, więc $\phi \notin \Delta_2^E$. Niech $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$. Wtedy

$$I_\phi(lx) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)^l - 1 \, dt = \int_1^\infty \sum_{i=1}^{l} \binom{l}{i} \frac{1}{t^{2i}} \, dt < \infty.$$

Niech $l > 1$. Zauważmy, że

$$A_k^l = \{ t \in \mathcal{S}(x) \colon \phi(lx(t)) > k\phi(x(t)) \}.$$

Wtedy

$$\bigcap_{k>l} A_k^l = \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon \frac{\phi(lx(t))}{\phi(x(t))} > k \text{ dla wszystkich } k > l \right\}$$
$$= \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon \frac{\phi(lx(t))}{\phi(x(t))} = +\infty \right\},$$

skąd $\mu\left(\bigcap_{k>l} A_k^l\right) = 0$ oraz $A_{k'}^l \subset A_k^l$ dla każdego $k' > k$. Ponieważ

$$\phi \circ \left(lx\chi_{A_k^l}\right) \leqslant \phi \circ (lx) \in L^1 = \left(L^1\right)_a,$$

zatem

$$\left\| \phi \circ \left(lx\chi_{A_k^l}\right) \right\|_{L^1} \to 0 \quad \text{przy} \quad k \to \infty.$$

Ostatecznie $\phi \in \Delta_2^E(x)$.

W dalszej części pracy będziemy korzystać z następujących oznaczeń

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ t \in T : a_\phi(t) = 0 \right\}, \quad \mathcal{A}_1 = \left\{ t \in T : a_\phi(t) = 0 \ \text{ i } \ b_\phi(t) = \infty \right\}, \\ \mathcal{B} &= \left\{ t \in T : a_\phi(t) > 0 \right\}, \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ t \in T : 0 < a_\phi(t) < b_\phi(t) \right\}. \end{aligned} \tag{94}$$

W dalszej części pokażemy, że warunek globalny Δ_2^E implikuje warunek lokalny $\Delta_2^E(x)$ dla każdego $x \in E_\phi$ przy pewnych dodatkowych założeniach dla funkcji ϕ (zob. Lemat 3.17).

Lemat 3.14. Jeżeli $\mu(\mathcal{B}_1) > 0$ to $\phi \notin \Delta_2^E(x)$ dla pewnego $x \in E_\phi$.

Dowód. Załóżmy, że $\mu(\mathcal{B}_1) > 0$. Pokażemy najpierw, że $\mu(A_{l_0}) > 0$ dla pewnego $l_0 > 1$, gdzie $A_{l_0} = \left\{ t \in \mathcal{B}_1 : l_0 a_\phi(t) < b_\phi(t) \right\}$. Załóżmy przeciwnie, że dla każdego $l > 1$ zbiór A_l jest miary zero, tzn. dla każdego $l > 1$ istnieje zbiór $C(l)$ miary zero, taki, że $la_\phi(t) \geqslant b_\phi(t)$ dla każdego $t \in \mathcal{B}_1 \backslash C(l)$. Weźmy ciąg $(l_n)_{n=1}^\infty$ taki, że $l_n = 1 + \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy ciąg zbiorów (C_n), że $\mu(C_n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\sum_{n=1}^\infty C_n\right) = 0$ oraz

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_\phi(t) \geqslant b_\phi(t) \quad \text{dla każdego} \quad t \in \mathcal{B}_1 \backslash C_n.$$

Zauważmy, że $C_n \subset C_m$ dla $n > m$. Oznaczmy $C = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$. Wtedy $\mu(C) = 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $t \in \mathcal{B}_1 \backslash C$ mamy

$$b_\phi(t) > a_\phi(t) \geqslant \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} b_\phi(t).$$

Przy $n \to \infty$ wnioskujemy, że $a_\phi(t) = b_\phi(t)$ dla p.w. $t \in \mathcal{B}_1$, sprzeczność.

Weźmy element $x = a_\phi \chi_{A_{l_0}}$. Zauważmy, że dla takiego x mamy $\mathcal{S}(x) = A_{l_0} = A_k^{l_0}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ (zob. (93)). W istocie, $A_k^{l_0} \subset A_{l_0}$ i nierówność

$$\phi \circ (l_0 a_\phi)\chi_{A_{l_0}} > k\phi \circ \left(a_\phi \chi_{A_{l_0}}\right) = 0$$

zachodzi dla każdego k, skąd $A_k^{l_0} \supset A_{l_0}$. Wnioskujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\phi \circ (l_0 x)\chi_{A_k^{l_0}}\right\|_E = \left\|\phi \circ (l_0 a_\phi)\chi_{A_{l_0}}\right\|_E > 0.$$

□

Następujące dwa lematy wykorzystują metody z dowodów Lematu 2 z pracy [22] i Lematu 2.1 z pracy [23].

Lemat 3.15. Załóżmy, że $\mu(A_\Omega) > 0$, gdzie $A_\Omega = \mathcal{A} \cap \Omega$ i $\mathcal{A}$ jest zdefiniowane w (94). Załóżmy również, że $\phi_c \in \Delta_2^E\big|_{A_\Omega}$ i $\phi_c \circ (2f) \in E_a$. Wówczas dla każdego $l > 1$ i $\varepsilon > 0$, mamy $\phi_c \in \Delta_l^E(\varepsilon)\big|_{A_\Omega}$ z funkcją $f_{\varepsilon,l}$ taką, że $\mathcal{S}(f_{\varepsilon,l}) \subset A_\Omega$ (zob. Definicję 3.7, punkty 3. i 4.)

Dowód. Niech f, K będzie jak w definicji warunku $\Delta_2^E\big|_{A_\Omega}$ (zob. 3.7). Niech $l > 1$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $l \leqslant 2^p$. Na mocy $\phi_c \in \Delta_2^E\big|_{A_\Omega}$ otrzymujemy, że

$$\phi_c \circ (lf) \leqslant \phi_c \circ (2^p f) \leqslant K^{p-1}\phi_c \circ (2f) \in E_a,$$

skąd

$$\phi_c \circ (lf) \in E_a.$$

Ponadto

$$0 \leqslant \left\|\phi_c \circ \left(\frac{1}{n} lf\right)\right\|_E \leqslant \left\|\frac{1}{n}\phi_c \circ (lf)\right\|_E = \frac{1}{n}\left\|\phi_c \circ (lf)\right\|_E \to 0 \text{ przy } n \to \infty.$$

Stąd istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, dla którego

$$\left\|\phi_c \circ \left(\frac{1}{n_0} lf\right)\right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{95}$$

Oznaczmy

$$A_1 = \{t \in A_\Omega \colon f(t) > 0\}, \quad A_2 = \{t \in A_\Omega \colon f(t) = 0\},$$

$$C_m = \left\{t \in A_1 \colon \frac{\phi_c(t, lu)}{\phi_c(t, u)} \leqslant 2^m \text{ dla } u \in \mathbb{R} \text{ takich, że } \frac{1}{n_0} f(t) \leqslant u \leqslant f(t)\right\} \text{ dla } m \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$ Udowodnimy, że $\mu\left(A_1 \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = 0$. Załóżmy przeciwnie, że

$$\mu\left(A_1 \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_1 \backslash C_m\right) > 0.$$

Oznaczmy $C = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_1 \backslash C_m$. Wtedy $t \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

$$\forall_{m\in\mathbb{N}}\, \exists_{u_m\in\mathbb{R}} \ \frac{1}{n_0} f(t) \leqslant u_m \leqslant f(t) \quad \text{i} \quad \frac{\phi_c(t, lu_m)}{\phi_c(t, u_m)} > 2^m.$$

Niech $t \in C$ będzie ustalone. Mamy

$$0 < \frac{1}{n_0} f(t) \leqslant u_m \leqslant f(t) \ \text{ dla } \ m \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \frac{\phi_c(t, lu_m)}{\phi_c(t, u_m)} \to \infty \text{ przy } m \to \infty. \tag{96}$$

Ponadto $f(t) > 0$ dla $t \in C$ i $a_\phi(t) = 0$ dla każdego $t \in A_\Omega$. Stąd, dla $t \in A_\Omega$, $\frac{\phi_c(t,lu)}{\phi_c(t,u)}$ jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $\left[\frac{1}{n_0} f(t), f(t)\right]$, skąd $\sup_{u\in\left[\frac{1}{n_0} f(t), f(t)\right]} \frac{\phi_c(t,lu)}{\phi_c(t,u)} < \infty$, co prowadzi do sprzeczności z warunkiem (96). W konsekwencji $\mu\left(A_1 \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = 0$. Niech

$$x_m = \phi_c \circ (lf)\chi_{A_1\backslash C_m}$$

dla $m \in \mathbb{N}$. Skoro $\phi_c \circ (lf) \in E_a$ otrzymujemy, że $\|x_m\|_E \to 0$ przy $m \to \infty$. Wtedy istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\|x_{m_0}\right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{97}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$f_{\varepsilon,l}(t) = \frac{1}{n_0} f(t)\chi_{C_{m_0}}(t) + f(t)\chi_{A_1\backslash C_{m_0}}(t) + f(t)\chi_{A_2}(t) = \frac{1}{n_0} f(t)\chi_{C_{m_0}}(t) + f(t)\chi_{A_\Omega\backslash C_{m_0}}(t).$$

Wtedy $\mathcal{S}(f_{\varepsilon,l}) = A_1 \subset A_\Omega$. Nierówności (95) i (97) implikują

$$\left\|\phi_c \circ (lf_{\varepsilon,l})\right\|_E \leqslant \left\|\phi_c \circ \left(\frac{1}{n_0} lf\right)\chi_{C_{m_0}}\right\|_E + \left\|\phi_c \circ (lf)\chi_{A_1\backslash C_{m_0}}\right\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Dla każdego $u \geqslant f_{\varepsilon,l}(t)$ mamy

$$\begin{aligned} &\phi_c(t, lu) \leqslant \max\{K^p, 2^{m_0}\}\ \phi_c(t, u), && \text{jeśli} \quad t \in C_{m_0};\\ &\phi_c(t, lu) \leqslant K^p \phi_c(t, u), && \text{jeśli} \quad t \in A_\Omega \backslash C_{m_0}. \end{aligned}$$

Wtedy, biorąc $K_{\varepsilon,l} = \max\{K^p, 2^{m_0}\}$, dla p.w. $t \in A_\Omega$ i każdego $u \geqslant f_{\varepsilon,l}(t)$, mamy

$$\phi_c(t, lu) \leqslant K_{\varepsilon,l}\ \phi_c(t, u).$$

$\square$

Lemat 3.16. Oznaczmy $A_{\mathbb{N}} = \mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{A}_1$ jest jak w (94). Niech $E|_{\mathbb{N}} \hookrightarrow c_0\{\|e_n\|_E\}$ oraz $m(A_{\mathbb{N}}) = \infty$. Jeżeli $\phi_a \in \delta_2^E\big|_{A_{\mathbb{N}}}$, gdzie $\phi_a \circ (2b) \in E_a$, to dla każdego $l > 1$ i $\varepsilon > 0$ mamy, że $\phi_a \in \delta_l^E(\varepsilon)\big|_{A_{\mathbb{N}}}$, tzn. istnieją takie stałe $\alpha_{\varepsilon,l} = \alpha, K_{\varepsilon,l} > 0$ i ciągi $b_{\varepsilon,l} = \left(b_i^{\varepsilon,l}\right)_{i=1}^{\infty}$ i $d_{\varepsilon,l} = d = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ spełniające warunki $\left\|\phi \circ (lb_{\varepsilon,l})\right\|_E \leqslant \varepsilon$ i $\phi_i(d_i)\,\|e_i\|_E = \alpha$, że

$$\phi_i(lu) \leqslant K_{\varepsilon,l}\phi_i(u)$$

dla każdego $i \in A_{\mathbb{N}}$ i $b_i^{\varepsilon,l} \leqslant u \leqslant \frac{d_i}{l}$, gdzie α, d pochodzą z definicji warunku $\delta_2^E\big|_{A_{\mathbb{N}}}$.

Uwaga. W sformułowaniu Lematu oraz w dowodzie poniżej, dla ułatwienia, piszemy E_a zamiast $(E|_{\mathbb{N}})_a$.

Dowód. Niech $\alpha, K, b = (b_i)_{i=1}^{\infty}, d = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ będą jak w definicji warunku $\delta_2^E\big|_{A_{\mathbb{N}}}$ (zob. Definicję 3.9). Weźmy $l > 1$ i $\varepsilon > 0$. Twierdzimy, że dla każdego $p \in \mathbb{N}$ istnieje $i_p \in A_{\mathbb{N}}$, że

$$\phi_a \circ \left(2^p b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_p\}}\right) \in E_a.$$

Przypadek $p = 1$ jest oczywisty. Wystarczy pokazać implikację

$$\exists_{i_p \in A_{\mathbb{N}}}\ \phi_a \circ \left(2^p b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_p\}}\right) \in E_a$$

$$\Downarrow$$

$$\exists_{i_0 \in A_{\mathbb{N}}, i_0 \geqslant i_p}\ \ \phi_a \circ \left(2^{p+1} b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_0\}}\right) \in E_a.$$

Z faktu, iż $\phi_a \circ \left(2^p b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_p\}}\right) \in E_a \subset E|_{\mathbb{N}} \hookrightarrow c_0\{\|e_n\|_E\}$ wnioskujemy, że istnieje $i_0 \geqslant i_p$, że dla każdego $i \geqslant i_0$

$$\phi_i\,(2^p b_i)\,\|e_i\| \leqslant \alpha = \phi_i(d_i)\,\|e_i\|\,.$$

Stąd $b_i \leqslant 2^p b_i \leqslant d_i$ dla $i \geqslant i_0$ oraz

$$\phi_a \circ \left(2^{p+1} b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_0\}}\right) \leqslant K\phi_a \circ \left(2^p b\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_0\}}\right) \in E_a$$

co dowodzi tezę. Zatem, dla $l > 1$ istnieje p takie, że $2^p \leqslant l \leqslant 2^{p+1}$ i $i_1 \in A_{\mathbb{N}}$ takie, że

$$\phi_a \circ \left(lb\chi_{\{i \in A_{\mathbb{N}}\,:\, i \geqslant i_1\}}\right) \in E_a \hookrightarrow c_0\{\|e_i\|_E\}.$$

Skoro $\phi_i(d_i)\,\|e_i\|_E = \alpha$ to znajdziemy takie $i_2 \geqslant i_1$, że

$$lb_i < d_i \quad \text{dla} \quad i \geqslant i_2.$$

Ponadto istnieje $k \in A_{\mathbb{N}}$, $k > i_2$, że

$$\left\| \left(\phi_i(lb_i) \right)_{i=k+1}^{\infty} \right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{98}$$

Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ istnieje $b'_i > 0$ takie, że $b'_i < \frac{d_i}{l}$ oraz

$$\left\| \phi_i(lb'_i)e_i \right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Oznaczmy $b' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_k, 0, 0, \ldots)$. Mamy wtedy

$$\left\| \phi \circ (lb') \right\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left\| (\phi_i(lb'_i)e_i) \right\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{99}$$

Niech

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad A_2 = A_{\mathbb{N}} \setminus A_1$$

oraz

$$K' = \max_{i \in A_1} \sup_{b'_i \leqslant u \leqslant \frac{d_i}{l}} \frac{\phi_i(lu)}{\phi_i(u)}.$$

Zauważmy, że dla każdego $i \in A_1$ funkcja $\frac{\phi_i(lu)}{\phi_i(u)}$ jest ciągła na zbiorze zwartym $\left[b'_i, \frac{d_i}{l} \right]$, z uwagi na założenie $a_\phi(i) = 0$ i $b_\phi(i) = \infty$ dla każdego $i \in A_{\mathbb{N}} = \mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}$. Stąd $\sup_{b'_i \leqslant u \leqslant \frac{d_i}{l}} \frac{\phi_i(lu)}{\phi_i(u)}$ jest skończone dla każdego $i \in A_1$. Jednakże A_1 jest zbiorem skończonym, skąd $K' < \infty$.

Zdefiniujmy $b_{\varepsilon,l} = \left(b_i^{\varepsilon,l} \right)_{i=1}^{\infty}$ jak poniżej

$$b_i^{\varepsilon,l} = \begin{cases} b'_i & \text{dla } i \in A_1, \\ b_i & \text{dla } i \in A_2. \end{cases}$$

Z nierówności (98) i (99) otrzymujemy, że $\left\| \phi_a \circ (lb_{\varepsilon,l}) \right\|_E \leqslant \varepsilon$. Zauważmy, że jeśli $i \in A_2$ i $b_i^{\varepsilon,l} \leqslant u \leqslant \frac{d_i}{l}$ to $\phi_i(lu) \leqslant K^p \phi_i(u)$ ze względu na $2^p \leqslant l \leqslant 2^{p+1}$.

Biorąc $\alpha_{\varepsilon,l} = \alpha$, $K_{\varepsilon,l} = \max\{K^p, K'\}$ i $d_{\varepsilon,l} = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ otrzymujemy

$$\phi_i(lu) \leqslant K_{\varepsilon,l} \phi_i(u)$$

dla każdego $i \in A_{\mathbb{N}}$ i $u \in \left[b_i^{\varepsilon,l}, \frac{d_i}{l} \right]$ co kończy dowód. □

Lemat 3.17. (i) Niech $A_\Omega = \mathcal{A} \cap \Omega$ będzie zbiorem miary dodatniej, gdzie $\mathcal{A}$ jest jak w (94). Jeżeli $\phi_c \in \Delta_2^E \big|_{A_\Omega}$ z funkcją f taką, że $\phi_c \circ (2f) \in E_a$, to $\phi_c \in \Delta_2^E (x\chi_{A_\Omega})$ dla każdego $x \in E_\phi$.

(ii) Niech $E|_{\mathbb{N}} \hookrightarrow c_0\{\|e_n\|_E\}$ i $A_{\mathbb{N}} = \mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Jeżeli $\phi_a \in \delta_2^E \big|_{A_{\mathbb{N}}}$ z ciągiem b takim, że $\phi_a \circ (2b) \in E_a$, to $\phi_a \in \delta_2^E (x\chi_{A_{\mathbb{N}}})$ dla każdego $x \in E_\phi$.

Dowód. (i) Weźmy $x \in E_\phi$, $l > 1$ i $\varepsilon > 0$. Przypomnijmy definicję zbioru $A_k^l = \left\{t \in \mathcal{S}(x)\colon l|x(t)| < b_\phi(t) \quad \text{i} \quad \phi(t, lx(t)) > k\phi(t, x(t))\right\}$ (zob. Definicję 3.12). W świetle Uwagi 3.8, zbiór A_k^l ma postać $A_k^l = \{t \in \mathcal{S}(x)\colon \phi(t, lx(t)) > k\phi(t, x(t))\}$. Stosując Lemat 3.15 z $K_{\varepsilon,l}$ i $f_{\varepsilon,l}$ otrzymujemy

$$\{t \in \mathcal{S}(x) \cap A_\Omega\colon\ |x(t)| \geqslant f_{\varepsilon,l}(t)\} \subset A_\Omega \backslash A_k^l$$

dla każdego $k \geqslant K_{\varepsilon,l}$ i w konsekwencji

$$A_\Omega \cap A_k^l \subset \{t \in \mathcal{S}(x) \cap A_\Omega\colon\ |x(t)| < f_{\varepsilon,l}(t)\}\,.$$

Zatem

$$\left\|\phi_c \circ (lx)\chi_{A_\Omega}\chi_{A_k^l}\right\|_E \leqslant \left\|\phi_c \circ (lf_{\varepsilon,l})\chi_{A_\Omega \cap A_k^l}\right\|_E \leqslant \left\|\phi_c \circ (lf_{\varepsilon,l})\right\|_E \leqslant \varepsilon, \tag{100}$$

czyli $\phi_c \in \Delta_2^E(x\chi_{A_\Omega})$.

(ii) Weźmy $x \in E_\phi$, $l > 1$ i $\varepsilon > 0$. Korzystamy z Lematu 3.16 ze stałymi $K_{\varepsilon,l}$, $\alpha_{\varepsilon,l} = \alpha$ oraz ciągami $b_{\varepsilon,l} = (b_i^{\varepsilon,l})_{i=1}^\infty$, $d = (d_i)_{i=1}^\infty$. Pokażemy, że istnieje i_0 takie, że

$$\phi_a \circ (lx)\chi_{\{i \in A_\mathbb{N}\,:\, i \geqslant i_0\}} \in E|_\mathbb{N}\,. \tag{101}$$

Rozważmy dwa przypadki

1. Niech $\|x\|_\phi \leqslant 1$. Wtedy $\phi_a \circ x \in E|_\mathbb{N} \hookrightarrow c_0\{\|e_i\|_E\}$, skąd

$$\phi_i(x(i))\,\|e_i\|_E \to 0 \quad \text{przy} \quad i \to \infty.$$

Zatem istnieje $i_0 \in A_\mathbb{N}$, że dla każdego $i \geqslant i_0$ mamy

$$\phi_i(x(i))\,\|e_i\| \leqslant \alpha = \phi_i(d_i)\,\|e_i\|\,,$$

skąd

$$x(i) \leqslant d_i \quad \text{dla każdego} \quad i \geqslant i_0.$$

Oznaczmy

$$N_1 = \left\{i \geqslant i_0\colon\ x(i) \in [b_i^{\varepsilon,l}, d_i]\right\} \quad \text{i} \quad N_2 = \left\{i \geqslant i_0\colon\ x(i) < b_i^{\varepsilon,l}\right\}.$$

Z warunku $\delta_l^E(\varepsilon)$ otrzymujemy

$$\phi_a \circ (lx)\chi_{N_1} \leqslant K_{\varepsilon,l}\ \phi_a \circ (x\chi_{N_1})\,.$$

Ponadto

$$\phi_a \circ (lx)\chi_{N_2} \leqslant K_{\varepsilon,l}\ \phi_a \circ (lb_{\varepsilon,l}\chi_{N_2})\,.$$

Zatem $\phi_a \circ (lx\chi_{\{i\in A_{\mathbb{N}}\,:\,i\geqslant i_0\}}) \in E|_{\mathbb{N}}$ jeśli $x \in B(E_\phi)$.

2. Załóżmy, że $\|x\|_\phi > 1$. Ustalmy $u = \frac{x}{\|x\|_\phi}$. Wtedy $lx = l\|x\|_\phi u$. Oznaczmy $l_0 = l\|x\|_\phi$. Na mocy wcześniejszego rozumowania otrzymujemy, że istnieje takie i_0, że $\phi_a \circ ((l_0u)\chi_{\{i\in A_{\mathbb{N}}\,:\,i\geqslant i_0\}}) \in E|_{\mathbb{N}}$. Stąd

$$\phi_a \circ (lx)\chi_{\{i\in A_{\mathbb{N}}\,:\,i\geqslant i_0\}} = \phi_a \circ ((l_0u)\chi_{\{i\in A_{\mathbb{N}}\,:\,i\geqslant i_0\}}) \in E|_{\mathbb{N}}$$

co kończy dowód stwierdzenia (101).

Ponieważ $E|_{\mathbb{N}} \hookrightarrow c_0\{\|e_i\|_E\}$, zatem istnieje $i_1 > i_0$, że

$$\phi_i(lx(i))\,\|e_i\| \leqslant \alpha = \phi_i(d_i)\,\|e_i\| \quad \text{dla każdego} \quad i \geqslant i_1,$$

skąd

$$lx(i) \leqslant d_i \quad \text{dla} \quad i \geqslant i_1.$$

Podzielmy zbiór $A_k^l \cap A_{\mathbb{N}}$ na podzbiory:

$$\begin{aligned}
B_1^k &= A_k^l \cap A_{\mathbb{N}} \cap \{i \in \mathbb{N} : i \leqslant i_1\},\\
B_2^k &= A_k^l \cap A_{\mathbb{N}} \cap \{i \in \mathbb{N} : i \geqslant i_1 \ \text{ i } \ x(i) \geqslant b_i^{\varepsilon,l}\},\\
B_3^k &= A_k^l \cap A_{\mathbb{N}} \cap \{i \in \mathbb{N} : i \geqslant i_1 \ \text{ i } \ x(i) < b_i^{\varepsilon,l}\}.
\end{aligned}$$

Ponieważ B_1 jest zbiorem skończonym, $a_\phi(i) = 0$ i $b_\phi(i) = \infty$ dla $i \in A_{\mathbb{N}}$, zatem

$$K_0 = \max_{i\in B_1} \frac{\phi_i(lx(i))}{\phi_i(x(i))} < \infty.$$

W konsekwencji, dla każdego $k \geqslant K_0$, otrzymujemy, że $B_1^k = \emptyset$.

Dla każdego $i \in B_2^k$, z Lematu 3.16 wnioskujemy, że

$$\phi_i(lx(i)) < K_{\varepsilon,l}\ \phi_i(x(i)).$$

W konsekwencji ,dla każdego $k > K_{\varepsilon,l}$, mamy, że $B_2^k = \emptyset$.

Ponadto Lemat 3.16 implikuje, że

$$\left\|\phi_a \circ (lx)\chi_{B_3}\right\| < \left\|\phi_a \circ (lb)\chi_{B_3}\right\| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Podsumowując, dla każdego $k > \max\{K_0, K_{\varepsilon,l}\}$ otrzymujemy

$$\left\|\phi_a \circ (lx)\chi_{A_k^l\cap A_{\mathbb{N}}}\right\| = \left\|\phi_a \circ (lx)\chi_{B_3}\right\| < \varepsilon. \tag{102}$$

To oznacza, że $\phi_a \in \delta_2^E(x|_{A_{\mathbb{N}}})$. □

W poniższym lemacie nośnik przestrzeni $(E|\Omega)_a$ rozumiemy tak, jak to zostało określone w pracy [50] i oznaczamy $\operatorname{supp}(E|_\Omega)_a$.

Lemat 3.18. (i) Załóżmy, że $\operatorname{supp}(E|_\Omega)_a = \Omega$ i $\mu(\mathcal{A}_1 \cap \Omega) > 0$. Wtedy $\phi_c \in \Delta_2^E\big|_{\mathcal{A}_1\cap\Omega}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \Delta_2^E\,(x\chi_{\mathcal{A}_1\cap\Omega})$ dla każdego $x \in E_\phi$.

(ii) Załóżmy, że $E|_{\mathbb{N}} \hookrightarrow c_0\{\|e_n\|_E\}$ i $\mathrm{m}(\mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}) = \infty$. Wtedy $\phi_a \in \delta_2^E\big|_{\mathcal{A}_1\cap\mathbb{N}}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \delta_2^E\,(x\chi_{\mathcal{A}_1\cap\mathbb{N}})$ dla każdego $x \in E_\phi$.

Dowód. Konieczność. Warunki (i) i (ii) wynikają z Lematu 3.17.
(i) Dostateczność. Załóżmy przeciwnie, że $\phi_c \notin \Delta_2^E\big|_{\mathcal{A}_1\cap\Omega}$. Wykorzystamy element $x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\chi_{B_n}$ skonstruowany w Lemacie 4 w [22] (str. 530), gdzie

$$g_n(t) = \sup\left\{u \in \mathbb{R}_+ : \phi\,(t, (1 + 1/n)u) \geqslant 2^{n+1}\phi(t, u)\right\}.$$

Pokażemy, że $\phi_c \notin \Delta_2^E\,(x\chi_{\mathcal{A}_1\cap\Omega})$.

Weźmy $\lambda > 1$. Istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\lambda \geqslant 1 + \frac{1}{m_0}$. Z dowodu Lematu 4 w [22] (str. 530) wynika, że dla każdego $t \in B_m$, gdzie $m \geqslant m_0$, mamy

$$\phi_c(t, \lambda x(t)) \geqslant \phi_c\left(t, \left(1 + \frac{1}{m}\right)x(t)\right) \geqslant 2^{m+1}\phi_c(t, x(t)).$$

Zatem dla każdego $t \in B_m$, gdzie $m \geqslant m_0$, wnioskujemy, że $B_m \subset A^{\lambda}_{2^{m+1}}$ dla każdego $m \geqslant m_0$. Wtedy

$$\left\|\phi_c \circ (\lambda x)\chi_{A^{\lambda}_{2^{m+1}}}\right\|_E \geqslant \left\|\phi_c \circ (\lambda x)\chi_{B_m}\right\|_E \geqslant 1 \quad \text{dla każdego} \quad m \geqslant m_0,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z dowodu Lematu 4 w [22] (str. 531).
(ii) Dostateczność. Dowód jest analogiczny jak dla punktu (i) (z wykorzystaniem dowodu Lematu 2.4 w [23], str. 529). Załóżmy, że $\phi_a \notin \delta_2^E\big|_{\mathcal{A}_1\cap\mathbb{N}}$. Weźmy element $x = (x(n))_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany wzorem $x = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in N_m} u_n^m e_n$ (zob. dowód Lematu 2.4 w [23]).

Niech $\lambda > 1$. Weźmy m_0 takie, że $\lambda \geqslant 1 + \frac{1}{m_0}$. Dla każdego $m \geqslant m_0$ i $n \in N_m$ mamy

$$\phi_n(\lambda x(n)) \geqslant \phi_n\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)x(n)\right) = \phi_n\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)u_n^m\right) \geqslant 2^{m+2}\phi_n\left(u_n^m\right),$$

gdzie ostatnia nierówność pochodzi z dowodu lematu 2.4 w [23], str. 530, warunek (6). Stąd $N_m \subset A^{\lambda}_{2^{m+2}}$ dla każdego $m \geqslant m_0$. Ostatecznie

$$\left\|\left(\phi_n(\lambda x(n))\right)_{n\in A^{\lambda}_{2^{m+2}}}\right\|_E \geqslant \left\|\left(\phi_n(\lambda x(n))\right)_{n\in N_m}\right\|_E \geqslant 1 \quad \text{dla każdego} \quad m \geqslant m_0$$

(patrz w/w dowód, str. 530), co kończy dowód. □

Uwaga 3.19. Zauważmy, że w pracy [54] lokalny warunek $\Delta_2^E(x)$ (oznaczymy go przez $\widetilde{\Delta_2^E(x)}$) został sformuowany nieco inaczej, tzn. zbiór A_k^l (oznaczmy go przez $\widetilde{A_k^l}$) jest zdefiniowany jak poniżej

$$\widetilde{A_k^l} = \left\{ t \in \mathcal{S}(x) \colon l^2|x(t)| < b_\phi \ \text{ i } \ \phi(lx(t)) > k\phi(x(t)) \right\}. \tag{103}$$

Warto zauważyć, że $\widetilde{A_k^l} \subset A_k^l$, a co za tym idzie, jeśli $\phi \in \Delta_2^E(x)$, to $\phi \in \widetilde{\Delta_2^E(x)}$.

Poniższy przykład pokazuje różnice w sformuowaniach, tzn. jest możliwa sytuacja, w której $\phi \in \widetilde{\Delta_2^E(x)}$ dla każdego $x \in E_\phi$, a jednocześnie $\phi \notin \Delta_2^E(x)$ dla pewnego $x \in E_\phi$.

Przykład 3.20. Niech E będzie przestrzenią Köthego taką, że $L^\infty \hookrightarrow E$ lub ($L^\infty \not\hookrightarrow E$ i $E \not\hookrightarrow L^\infty$). Niech ϕ będzie funkcją Orlicza zdefiniowaną jako $\phi(u) = \frac{1}{1-u} - 1$. Dla tak zdefiniowanej funkcji $b_\phi = 1$. Oczywiście $\phi \notin \Delta_2^E$ z uwagi na $\Delta_2^E = \Delta_2(\infty)$ lub $\Delta_2^E = \Delta_2(\mathbb{R}_+)$. Pokażemy, że $\phi \in \widetilde{\Delta_2^E(x)}$ dla każdego $x \in E_\phi$.

Weźmy $x \in E_\phi$ i $l > 1$. Wykorzystamy postać (103) zbioru A_k^l z pracy [54]. Jeżeli $t \in A_k^l$ to $|x(t)| < \frac{1}{l^2}$ oraz

$$\frac{1}{1 - lx(t)} - 1 > k\left(\frac{1}{1 - x(t)} - 1\right),$$

skąd

$$\frac{lx(t)}{1 - lx(t)} > k\frac{x(t)}{1 - x(t)}.$$

W konsekwencji

$$\frac{l}{k} \cdot \frac{1 - x(t)}{1 - lx(t)} > 1. \tag{104}$$

Ponieważ $lx(t) < \frac{1}{l}$, zatem

$$\frac{1 - x(t)}{1 - lx(t)} < \frac{1}{1 - \frac{1}{l}} = \frac{l}{l - 1}.$$

Stąd zamiast (104) możemy napisać

$$\frac{l}{k} \cdot \frac{l}{l - 1} > 1. \tag{105}$$

Jednakże, dla $k > \frac{l^2}{l-1}$ mamy

$$\frac{l}{k} \cdot \frac{l}{l - 1} < \frac{l}{\frac{l^2}{l-1}} \cdot \frac{l}{l - 1} = 1,$$

co prowadzi do sprzeczności ze (105). Stąd $\mu(A_k^l) = 0$ dla dostatecznie dużych k, więc $\phi \in \widetilde{\Delta_2^E(x)}$.

Rozważmy również powyższą funkcję ϕ i funkcyjną przestrzeń Köthego $E = L^1[0,1]$. Pokażemy, że wykorzystując sformułowanie zbioru A_k^l z definicji (93), istnieje $x \in E_\phi$, dla którego $\phi \notin \Delta_2^E(x)$.

Weźmy ciąg $u_n \to \frac{1}{2}$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$ taki, że $\phi(2u_n) > 2^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $(A_n) \subset [0,1]$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla każdego $n \neq m$ i $\mu(A_n) = \frac{1}{2^n}$. Niech

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \chi_{A_n}.$$

Wtedy

$$I_\phi(x_0) = \sum_n \phi(u_n)\mu(A_n) \leqslant \phi\left(\frac{1}{2}\right) \sum_n \frac{1}{2^n} = \phi\left(\frac{1}{2}\right),$$

skąd $x_0 \in E_\phi$. Pokażemy, że $\left\|\phi \circ (2x_0)\chi_{A_k^2}\right\|_{L^1} \not\to 0$ przy $k \to \infty$.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i weźmy n_0 takie, że $2^{n_0} > k\phi\left(\frac{1}{2}\right)$. Wtedy $2^{n_0} > k\phi(u_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n \subset A_k^2 = \{t \in \mathcal{S}(x_0) \colon 2|x_0(t)| < 1 \ \text{ i } \ \phi(2x_0(t)) > k\phi(x_0(t)\}.$$

Stąd

$$\left\|\phi \circ (2x_0)\chi_{A_k^2}\right\|_{L^1} = I_\phi\left((2x_0)\chi_{A_k^2}\right) \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \phi(2u_n)\mu(A_n) > \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Dla rozważanego przykładu, niezależnie od wyboru definicji warunku $\left(\Delta_2^E(x)\right.$ czy $\left.\widetilde{\Delta_2^E(x)}\right)$, żaden punkt $x \in B(E_\phi)$ nie będzie punktem porządkowej ciągłości z uwagi na punkt (iv) Twierdzenia 3.22 (patrz również Wniosek 3.24).

3.1. Wyniki

Lemat 3.21. Niech $x \in E_\phi$ i $\phi \in \Delta_2^E(x)$. Jeżeli $\phi \circ x \in E_a$, to $\phi \circ (lx)\chi_{B_l} \in E_a$ dla każdego $l > 1$, gdzie $B_l = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon l\,|x(t)| < b_\phi(t)\right\}$.

Powyższy lemat jest uogólnieniem Lematu 9 w pracy [54], a dowód przebiega analogicznie. Przedstawiamy szczegóły dowodu dla wygody Czytelnika.

Dowód. Niech $l > 1$ i $\varepsilon > 0$. Weźmy ciąg $0 \leqslant z_n \leqslant \phi \circ (lx)\chi_{B_l}$ taki, że $z_n \to 0$ p.w. Z uwagi na warunek $\phi \in \Delta_2^E(x)$ znajdziemy $k > l$ takie, że $\left\|\phi \circ (lx)\chi_{A_k^l}\right\|_E < \varepsilon/2$, gdzie

$$A_k^l = \{t \in B_l \colon \phi(t, lx(t)) > k\phi(t, x(t))\}.$$

Ponadto

$$z_n\chi_{B_l\setminus A_k^l} \leqslant \phi \circ (lx)\chi_{B_l\setminus A_k^l} \leqslant k\phi \circ x\chi_{B_l\setminus A_k^l} \in E_a$$

oraz $z_n\chi_{B_l\setminus A_k^l} \to 0$ p.w. przy $n \to \infty$. Stąd $\left\|z_n\chi_{B_l\setminus A_k^l}\right\|_E < \varepsilon/2$ dla dostatecznie dużych n. Ostatecznie, dla dostatecznie dużych n, zachodzi nierówność

$$\|z_n\|_E \leqslant \left\|z_n\chi_{A_k^l}\right\|_E + \left\|z_n\chi_{B_l\setminus A_k^l}\right\|_E < \varepsilon,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.22. Niech E będzie przestrzenią Köthego, ϕ - funkcją Musielaka–Orlicza i $x \in B(E_\phi)$. Oznaczmy dla każdego $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C &= \left\{t \in \mathcal{S}(x)\colon a_\phi(t) < |x(t)|\right\}, \\
C_m &= \left\{t \in \mathcal{S}(x)\colon \frac{1}{m}a_\phi(t) \leqslant |x(t)| \leqslant a_\phi(t)\right\}, \quad C_m^\Omega = C_m \cap \Omega, \quad C_m^\mathbb{N} = C_m \cap \mathbb{N}, \\
D &= \left\{t \in \Omega\colon b_\phi(t) < \infty\right\}.
\end{aligned} \tag{106}$$

Element $x \in \left(E_\phi\right)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $\phi \circ x \in E_a$,

(ii) $\phi \in \Delta_2^E(x\chi_C)$,

(iii) Dla każdego $m \in \mathbb{N}$

$$\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^\Omega} \in E_a.$$

Ponadto dla każdego $m \in \mathbb{N}$, jeśli $\mathrm{card}\left(C_m^\mathbb{N}\right) = \aleph_0$, to istnieje takie $i_0 = i_0(m) \in \mathbb{N}$, że

$$ma_\phi\chi_{C_m^\mathbb{N}\cap\{i\geqslant i_0\}} < b_\phi\chi_{C_m^\mathbb{N}\cap\{i\geqslant i_0\}} \quad \text{i} \quad \phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^\mathbb{N}\cap\{i\geqslant i_0\}} \in E_a. \tag{107}$$

(iv) $\mu(\mathcal{S}(x) \cap D) = 0$,

(v) $\limsup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x(i)|}{b_\phi(i)} = 0$.

Dowód. Konieczność. (i) Dowód przebiega identycznie jak dowód Lematu 7 w [37], str. 253.

(ii) Część dowodu dotycząca $\phi \in \Delta_2^E(x\chi_C)$ jest analogiczna jak w dowodzie Twierdzenia 11 w pracy [54]. Przedstawimy szczegóły dla wygody Czytelnika.

Załóżmy, że $\phi \circ x \in E_a$ i $\phi \notin \Delta_2^E(x\chi_C)$. Wtedy istnieje $l > 1$ i $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $k > l$ mamy $\left\|\phi \circ (lx)\chi_{A_k^l \cap C}\right\|_E \geqslant \varepsilon$, gdzie zbiór A_k^l jest zdefiniowany w (93).

Oznaczmy zbiory $B_k^l = A_k^l \cap C$ i $B = \bigcap_{k>l} B_k^l$. Zauważmy, że zbiór B ma postać

$$B = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon |x(t)| > a_\phi(t),\ l|x(t)| < b_\phi(t) \ \text{ i } \ \frac{\phi(t, lx(t))}{\phi(t, x(t))} = \infty\right\},$$

co oznacza, że $\mu(B) = 0$. Zauważmy również, że $B_{k'}^l \subset B_k^l$ dla każdego $k' > k$. Czyli $B_k^l \downarrow \emptyset$ przy $k \to \infty$.

Ustalmy $z_k = x\chi_{B_k^l}$. Wtedy $\left\|\phi \circ (lz_k)\right\|_E \geqslant \varepsilon$ dla każdego $k > l$. Ostatecznie $\|z_k\|_\phi \not\to 0$, skąd $|x| \notin (E_\phi)_a$.

(iv) Załóżmy, że $\mu\{\mathcal{S}(x) \cap D\} > 0$. Niech $\Omega_m = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \cap D\colon\ |x(t)| \geqslant \frac{1}{m}\right\}$. Wówczas istnieje takie $m_0 \in \mathbb{N}$, że $\mu(\Omega_{m_0}) > 0$. Rozważmy ciąg $(\Omega_k) \subset \Omega_{m_0}$ taki, że $\Omega_k = \left\{t \in \Omega_{m_0} \colon b_\phi(t) < k\right\}$. Istnieje k_0 dla którego $\mu(\Omega_{k_0}) > 0$. Faktycznie, w przeciwnym przypadku, jeżeli $\mu(\Omega_k) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, to $\mu(\Omega_{m_0} \backslash \Omega_k) = \mu(\Omega_{m_0}) > 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy, dla każdego $t \in \Omega_{m_0} \backslash \Omega_k$ i wszystkich $k \in \mathbb{N}$, mamy $b_\phi(t) \geqslant k$, sprzeczność.

Weźmy ciąg zbiorów $(C_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega_{k_0}$ takich, że $0 < \mu(C_n) \to 0$ przy $n \to \infty$. Niech $x_n = \frac{1}{m_0}\chi_{C_n}$. Wtedy $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ i $x_n \to 0$ p.w. w Ω_{k_0}. Niech $\varepsilon, \lambda > 0$ będą takie, że $\frac{1}{\lambda} = (1 + \varepsilon)k_0 m_0$. Stąd

$$I_\phi\left(\frac{1}{\lambda}x_n\right) = I_\phi\left((1 + \varepsilon)k_0 m_0 \frac{1}{m_0}\chi_{C_n}\right) > I_\phi\left((1 + \varepsilon)b_\phi\chi_{C_n}\right) = \infty$$

oraz $\|x_n\|_\phi \geqslant \lambda$. Zatem $x \notin \left(E_\phi\right)_a$.

(v) Oznaczmy

$$N_1 = \left\{i \in \mathbb{N} : b_\phi(i) < \infty\right\}. \tag{108}$$

Zauważmy, że wystarczy pokazać równość $\limsup\limits_{i \in N_1} \frac{|x(i)|}{b_\phi(i)} = 0$ dla przypadku $\mathbf{card}(N_1) = \aleph_0$. Załóżmy, że $a = \limsup\limits_{i \in N_1} \frac{|x(i)|}{b_\phi(i)} > 0$ i $\mathbf{card}(N_1) = \aleph_0$. Istnieje ciąg $(i_k) \subset N_1$ taki, że $\frac{|x(i_k)|}{b_\phi(i_k)} \geqslant \frac{a}{2}$. Niech $y_k = |x(i_k)|\, e_{i_k}$. Wtedy $y_k \leqslant |x|$ oraz $y_k \to 0$ punktowo. Z drugiej strony, biorąc $\lambda < \frac{a}{2}$ otrzymujemy $\frac{y_k}{\lambda} = \frac{|x(i_k)|}{\lambda} \geqslant \frac{a}{2\lambda} b_\phi(i_k)$, skąd $I_\phi(\frac{y_k}{\lambda}) = \infty$. Zatem $\|y_k\|_\phi \geqslant \lambda$, więc $x \notin \left(E_\phi\right)_a$.

(iii) Rozważymy trzy przypadki.

(a) Wykażemy najpierw, że zachodzi pierwszy z warunków punktu (iii). Załóżmy przeciwnie, że istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^\Omega} \notin E_a$. Wnioskujemy z (iv), że

$b_\phi(t) = \infty$ dla p.w. $t \in \Omega \cap \mathcal{S}(x)$, skąd $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^\Omega}$ przyjmuje skończone wartości. Ponadto istnieją $\delta > 0$ i ciąg $(D_n)_{n=1}^\infty \subset C_m^\Omega$ zbiorów parami rozłącznych, gdzie $\left\| \phi \circ (ma_\phi)\chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \delta$ dla każdego n (zob. Lemat 5 w [37]). Biorąc $z_n = |x|\chi_{D_n}$ otrzymujemy $0 \leqslant z_n \leqslant |x|$ i $z_n \to 0$ p.w. Ponadto dla $l > m^2$ mamy

$$I_\phi(lz_n) \geqslant \left\| \phi \circ \left(\frac{l}{m} a_\phi \right) \chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \left\| \phi \circ (ma_\phi)\chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \delta,$$

skąd $\|z_n\|_\phi \not\to 0$, ponieważ $\|z_n\|_\phi \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_\phi(\lambda z_n) \to 0$ dla wszystkich λ. Zatem $x \notin \left(E_\phi\right)_a$.

(b) Pokażemy teraz, że zachodzi nierówność w warunku (107). Załóżmy nie wprost, że $\mathrm{card}\left(C_m^{\mathbb{N}}\right) = \aleph_0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz istnieje przeliczalny zbiór $D \subset C_m^{\mathbb{N}}$ taki, że

$$ma_\phi\chi_D \geqslant b_\phi\chi_D. \tag{109}$$

Wtedy, dla każdego $i \in D$, mamy

$$\frac{1}{m} a_\phi(i) \leqslant |x(i)| \quad \text{i} \quad b_\phi(i) < \infty,$$

co razem z (v) implikuje, że

$$ma_\phi(i) \leqslant m^2 |x(i)| \text{ dla } i \in D \quad \text{i} \quad \limsup_{i \in D} \frac{|x(i)|}{b_\phi(i)} = 0.$$

Istnieje wtedy takie $i_0 = i_0(m)$, że

$$ma_\phi(i) \leqslant m^2 |x(i)| < b_\phi(i)$$

dla każdego $i \geqslant i_0$, $i \in D$, sprzeczność z nierównością (109).

(c) Pozostał do wykazania drugi z warunków (107). Wykorzystamy prawdziwość pierwszego z tej pary warunków. Załóżmy nie wprost, że $\mathrm{card}(C_m^{\mathbb{N}}) = \aleph_0$ dla pewnego m i istnieje $i_0 = i_0(m)$, takie, że $ma_\phi(i) < b_\phi(i)$ dla każdego $i \geqslant i_0$, $i \in C_m^{\mathbb{N}}$, a jednocześnie $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_1\}} \notin E_a$ dla dowolnego i_1, czyli $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^{\mathbb{N}}} \notin E_a$. W szczególności, biorąc $i_1 = i_0$ mamy, że $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_0\}} \notin E_a$. Oczywiście $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_0\}}$ przyjmuje skończone wartości.

Ponadto istnieją $\delta > 0$ i ciąg $(D_n)_{n=1}^\infty \subset C_m^{\mathbb{N}}$ zbiorów parami rozłącznych takie, że $\left\| \phi \circ (ma_\phi)\chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \delta$ dla każdego n (zob. Lemat 5 w [37], patrz również - Uwaga 1 w [18]). Biorąc $z_n = |x|\chi_{D_n}$ otrzymujemy $0 \leqslant z_n \leqslant |x|$ i $z_n \to 0$ p.w. Ponadto, dla $l > m^2$,

$$I_\phi(lz_n) \geqslant \left\| \phi \circ \left(\frac{l}{m} a_\phi \right) \chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \left\| \phi \circ (ma_\phi)\chi_{D_n} \right\|_E \geqslant \delta,$$

skąd $\|z_n\|_\phi \not\to 0$, ponieważ $\|z_n\|_\phi \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_\phi(\lambda z_n) \to 0$ dla wszystkich λ. Zatem $x \notin \left(E_\phi\right)_a$.

<u>Dostateczność.</u> Niech $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$, $x_n \to 0$ p.w. Niech $l > 1$. Pokażemy w dwóch krokach, że $I_\phi(lx_n) \to 0$.

1. Najpierw udowodnimy, że $I_\phi\left(lx_n\chi_{\mathcal{S}(x)\setminus C}\right) \to 0$. Niech $m > l$. Zauważmy, że $C_m \subset \mathcal{S}(x)\setminus C$. Wtedy $\phi \circ (lx_n\chi_{C_m}) \to 0$ p.w. przy $n \to \infty$ i, na mocy (iii)

$$\phi \circ \left(lx_n\chi_{C_m^\Omega}\right) \leqslant \phi \circ \left(la_\phi\chi_{C_m^\Omega}\right) \leqslant \phi \circ \left(ma_\phi\chi_{C_m^\Omega}\right) \in E_a.$$

Stąd $I_\phi\left(lx_n\chi_{C_m^\Omega}\right) \to 0$ przy $n \to \infty$.

Zauważmy, że (iii) implikuje, że jeśli $\operatorname{card}\left(C_m^{\mathbb{N}}\right) = \aleph_0$ to istnieje $i_0 = i_0(m)$, że

$$\phi \circ \left(lx_n\chi_{C_m^{\mathbb{N}}\cap\{i\geqslant i_0\}}\right) \leqslant \phi \circ \left(la_\phi\chi_{C_m^{\mathbb{N}}\cap\{i\geqslant i_0\}}\right) \leqslant \phi \circ \left(ma_\phi\chi_{C_m^{\mathbb{N}}\cap\{i\geqslant i_0\}}\right) \in E_a.$$

Z uwagi na fakt, iż zbiór $C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i < i_0\}$ jest skończony, to punktowa zbieżność $\phi \circ (lx_n)\chi_{C_m^{\mathbb{N}}\cap\{i<i_0\}}$ pociąga za sobą zbieżność w normie. Implikacja ta zachodzi również, jeśli zbiór $C_m^{\mathbb{N}}$ jest skończonej miary. Zatem $I_\phi\left(lx_n\chi_{C_m^{\mathbb{N}}}\right) \to 0$ przy $n \to \infty$. W konsekwencji $I_\phi\left(lx_n\chi_{C_m}\right) \to 0$ przy $n \to \infty$. Ponadto, biorąc $C'_m = (\mathcal{S}(x)\setminus C)\setminus C_m$, mamy

$$I_\phi\left(lx_n\chi_{C'_m}\right) \leqslant I_\phi\left(lx\chi_{C'_m}\right) < I_\phi\left(a_\phi\chi_{C'_m}\right) = 0.$$

2. Pokażemy teraz, że $I_\phi(lx_n\chi_C) \to 0$. Oznaczmy

$$D_1 = C \cap \Omega, \quad D_2 = C \cap \mathbb{N}, \quad D_{21} = D_2 \cap (\mathbb{N}\setminus N_1), \quad D_{22} = D_2 \cap N_1,$$

gdzie N_1 jest zdefiniowane w (108). Zauważmy, że (iv) implikuje $b_\phi = \infty$ p.w. w $\mathcal{S}(x) \cap \Omega$, a zatem

$$lx_n\chi_{D_1\cup D_{21}} \leqslant lx\chi_{D_1\cup D_{21}} < b_\phi\chi_{D_1\cup D_{21}}. \tag{110}$$

Z (ii) i Lematu 3.21 otrzymujemy, że $\phi \circ (lx)\chi_{D_1\cup D_{21}} \in E_a$, zatem $I_\phi\left(lx_n\chi_{D_1\cup D_{21}}\right) \to 0$.

Wystarczy pokazać, że $I_\phi\left(lx_n\chi_{D_{22}}\right) \to 0$ przy $n \to \infty$. Jest to oczywiste, gdy N_1 jest skończony. Załóżmy, że $\operatorname{card} N_1 = \aleph_0$. Warunek (v) implikuje istnienie takiego $i_0 \in N_1$, że dla każdego $i \geqslant i_0$, $i \in N_1$ mamy

$$\frac{l\,|x(i)|}{b_\phi(i)} < 1. \tag{111}$$

Faktycznie, w przeciwnym przypadku znajdziemy ciąg $(i_k) \subset N_1$ dla którego zachodzi $\frac{l|x(i_k)|}{b_\phi(i_k)} \geqslant 1$ dla wszystkich k. Wtedy

$$\limsup_{i\in N_1} \frac{|x(i)|}{b_\phi(i)} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{|x(i_k)|}{b_\phi(i_k)} \geqslant \frac{1}{l} > 0,$$

co przeczy (v). Oznaczmy

$$D_{22}^1 = \{i \in D_{22} \colon i \geqslant i_0\}, \quad D_{22}^2 = \{i \in D_{22} \colon i < i_0\}.$$

Oczywiście $I_\phi\left(lx_n\chi_{D_{22}^2}\right) \to 0$, gdyż D_{22}^2 jest skończony i $\phi \circ (lx_n)\chi_{D_{22}^2}$ jest punktowo zbieżny do zera. Ponadto $\phi \circ (lx_n)\chi_{D_{22}^1}$ jest również punktowo zbieżny, skąd na mocy (ii) i Lematu 3.21 otrzymujemy

$$\phi \circ (lx_n)\chi_{D_{22}^1} \leqslant \phi \circ (lx)\chi_{D_{22}^1} \in E_a.$$

Zatem $I_\phi\left(lx_n\chi_{D_{22}^1}\right) \to 0$ przy $n \to \infty$. Ostatecznie, z punktu 1. i 2., wnioskujemy, że $I_\phi(lx_n) \to 0$ dla każdego $l > 1$, co oznacza, że $\|x_n\|_\phi \to 0$. □

Uwaga 3.23. Dowód Twierdzenia 3.22 przebiega analogicznie dla warunku $\widetilde{\Delta_2^E(x)}$ (zob. Uwaga 3.19) z uwagi na to, że:

1. Odpowiednik Lematu 3.21 ze zbiorem $B_l = \{t \in \mathcal{S}(x) \colon l^2|x(t)| < b_\phi(t)\}$ przechodzi analogicznie.

2. Konieczność dowodu wynika z faktu, iż spełnianie przez funkcję ϕ warunku $\Delta_2^E(x)$ pociąga za sobą spełnianie warunku $\widetilde{\Delta_2^E(x)}$ (zob. Uwaga 3.19).

3. W punkcie 2 dowodu dostateczności zachodzi nierówność

$$l^2 x_n \chi_{D_1 \cup D_{21}} \leqslant l^2 x \chi_{D_1 \cup D_{21}} < b_\phi \chi_{D_1 \cup D_{21}},$$

   analogiczna do (110), ze względu na to, że $b_\phi \chi_{D_1 \cup D_{21}} = \infty$.

4. W punkcie 2 dowodu dostateczności, wartość i_0 można tak dobrać, by $\frac{l^2|x(i)|}{b_\phi(i)} < 1$ dla każdego $i \geqslant i_0$, $i \in \mathbb{N}_1$ (zob. (111)).

3.2. Zastosowania

3.2.1. Przestrzenie Calderóna–Łozanowskiego

Poniższe twierdzenie zostało udowodnione bezpośrednio w pracy [54, Theorem 11]. Poniżej przeprowadzimy dowód wynikający z Twierdzenia 3.22 rozprawy.

Wniosek 3.24. Niech E będzie przestrzenią Köthego, ϕ będzie funkcją Orlicza oraz $x \in B(E_\phi)$. Wtedy $x \in \left(E_\phi\right)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(i') $\phi \circ x \in E_a$,

(ii') $\phi \in \Delta_2^E(x\chi_C)$, gdzie $C = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon a_\phi < |x(t)|\right\}$;

(iii') $\chi_{A_m} \in E_a$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$, gdzie

$$A_m = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon \frac{1}{m} \leqslant |x(t)| \leqslant a_\phi\right\};$$

(iv') $\|x\chi_\Omega\|_\phi > 0$ implikuje $b_\phi = \infty$,

(v') Jeżeli $\|x\chi_\Omega\|_\phi = 0$ i $b_\phi < \infty$, to $|x(i)| \to 0$ przy $i \to \infty$.

Dowód. Zauważmy, że wystarczy pokazać równoważność warunków Wniosku i warunków Twierdzenia 3.22. Warunki (i') i (ii') są takie same jak (i) i (ii), odpowiednio.

Pokażemy najpierw, że warunki od (iii') do (v') wynikają z warunków od (iii) do (v).

(iv') Jeśli $\|x\chi_\Omega\|_\phi > 0$, to $\mu(\mathcal{S}(x) \cap \Omega) > 0$. Z warunku (iv) mamy, że $\mu(\mathcal{S}(x) \cap D) = 0$. Zatem $\mu(D) = 0$, skąd $b_\phi = \infty$.

(v') Niech $\|x\chi_\Omega\|_\phi = 0$ i $b_\phi < \infty$. Z (v) wnioskujemy, że $\limsup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x(i)|}{b_\phi} = 0$, skąd $|x(i)| \to 0$ przy $i \to \infty$.

(iii') Zauważmy, że jeżeli $\|x\chi_\Omega\|_\phi = 0$ i $b_\phi < \infty$ to z (v') wynika, że zbiór A_m jest skończonej miary dla każdego $m \in \mathbb{N}$, skąd $\chi_{A_m} \in E_a$. Na mocy powyższego i (iv') możemy założyć, że $b_\phi = \infty$. Niech $m \in \mathbb{N}$ i weźmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > ma_\phi$, więc $\frac{a_\phi}{n} < \frac{1}{m}$. Stąd

$$\frac{a_\phi}{n} < \frac{1}{m} \leqslant |x(t)| \leqslant a_\phi \quad \text{dla każdego} \quad t \in A_m.$$

Wtedy warunek (iii) implikuje, że $A_m \subset C_n$ oraz

$$0 < \phi \circ \frac{n}{m}\chi_{A_m} \leqslant \phi \circ \frac{n}{m}\chi_{C_n} < \phi \circ (na_\phi)\chi_{C_n} \in E_a.$$

Ostatecznie $\chi_{A_m} \in E_a$.

Załóżmy, że zachodzą warunki od (iii') do (v'). Wykażemy, że zachodzą warunki od (iii) do (v).

(iii) Zauważmy, że warunek $b_\phi < \infty$ może zachodzić tylko w przypadku $\|x\chi_\Omega\|_\phi = 0$ (zob. (iv')). Zachodzi wtedy oczywiście pierwszy z warunków w punkcie (iii).

Ponadto, z (v') wynika, że zbiór A_n jest skończony dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że nie zachodzi poprzednik implikacji w drugiej części warunku (iii), tzn. $\mathrm{card}\left(C_m^{\mathbb{N}}\right) < \infty$ dla każdego m, co zakończy dowód warunku (iii) przy $b_\phi < \infty$. Oczywiście, jeśli $a_\phi = 0$, to zbiór $C_m^{\mathbb{N}}$ jest pusty. Niech zatem $a_\phi > 0$ i załóżmy przeciwnie, że $\mathrm{card}\left(C_m^{\mathbb{N}}\right) = \aleph_0$ dla pewnego m. Dobierzmy takie $n \in \mathbb{N}$, aby $n > \frac{m}{a_\phi}$. Wtedy

$$\frac{1}{n} < \frac{a_\phi}{m} \leqslant |x(i)| \leqslant a_\phi \tag{112}$$

dla każdego $i \in C_m^{\mathbb{N}}$. Stąd (iii') implikuje, że $C_m^{\mathbb{N}} \subset A_n$, co przeczy skończoności zbioru A_n i dowodzi tezę.

Załóżmy, że $b_\phi = \infty$. Jeśli $\mathrm{card}(C_m^{\mathbb{N}}) = \aleph_0$, to oczywiście $ma_\phi \chi_{C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_0\}} < b_\phi \chi_{C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_0\}}$. Pozostaje pokazać, że $\phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m^\Omega \cup \left(C_m^{\mathbb{N}} \cap \{i \geqslant i_0\}\right)} \in E_a$. Podobnie jak powyżej możemy założyć, że $a_\phi > 0$. Niech $m \in \mathbb{N}$ i weźmy takie $n \in \mathbb{N}$, aby $n > \frac{m}{a_\phi}$. Wtedy (112) zachodzi dla każdego $t \in C_m = C_m^\Omega \cup C_m^{\mathbb{N}}$. Stąd (iii') implikuje, że $C_m \subset A_n$ oraz

$$0 \leqslant \phi \circ (ma_\phi)\chi_{C_m} < \phi \circ (ma_\phi)\chi_{A_n} \in E_a$$

dla każdego $m \in \mathbb{N}$, co kończy dowód (iii).

(iv) Niech $\|x\chi_\Omega\|_\phi > 0$. Z warunku (iv') mamy $b_\phi = \infty$, skąd $\mu(D) = 0$. Ostatecznie $\mu(\mathcal{S}(x) \cap D) = 0$.

(v) Jeśli $b_\phi = \infty$, to warunek (v) jest oczywisty. Niech $b_\phi < \infty$. Z warunku (iv') wnioskujemy, że $\|x\chi_\Omega\|_\phi = 0$. Wtedy z (v') mamy, że $x \in c_0$, skąd $\limsup_{i \in N_1} \frac{|x(i)|}{b_\phi} = 0$. □

3.2.2. Przestrzenie Orlicza–Lorentza

Uwaga 3.25 ([48]). Funkcyjna (ciągowa) przestrzeń Lorentza $\Lambda_{1,w}$ ($\lambda_{1,w}$) jest porządkowo ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty w = \infty \left(\sum_i w(i) = \infty\right)$.

W dalszej części wystarczy zatem rozważać tylko przypadek $\int_0^\infty w < \infty \left(\sum_i w(i) < \infty\right)$.

Poniższe dwa rezultaty są dobrze znane w literaturze (zob. np. [56]). Lemat 3.26 jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2.44 dla $E = \Lambda_{1,w}[0,\infty)$. Przedstawimy elementarne dowody dla kompletności pracy (ponieważ dowód Twierdzenia 2.44 został przeprowadzony dla przestrzeni $\Gamma_{p,w}$).

Lemat 3.26. Niech $\Lambda_w[0,\infty)$ będzie funkcyjną przestrzenią Lorentza oraz $\int\limits_0^\infty w(t)dt < \infty$ i $x \in \Lambda_w$. Wtedy $x \in (\Lambda_w)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d_x(\tau) < \infty$ dla każdego $\tau > 0$.

Dowód. Konieczność wynika z Lematu 2.32 (i).
Dostateczność. Niech $d_x(\tau) < \infty$ dla każdego $\tau \geqslant 0$. Niech ciąg (x_n) będzie taki, że $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ i $x_n \to 0$ p.w. Z własności nierosnącego przestawienia (zob. [56], własność 12°, str. 67) wnioskujemy, że $x_n^*(\tau) \to 0$ dla każdego τ oraz

$$x_n^*(\tau)w(\tau) \leqslant x^*(\tau)w(\tau) \in L^1 \in (OC).$$

Zatem $x_n^*(\tau)w(\tau) \to 0$ dla każdego τ oraz

$$\|x_n\|_w = \int\limits_0^\infty x_n^*(t)w(t)dt \to 0, \text{ przy } n \to \infty,$$

co kończy dowód. □

Lemat 3.27. Niech λ_w będzie ciągową przestrzenią Lorentza oraz $\sum\limits_{i=1}^\infty w(i) < \infty$ i $x \in \lambda_w$. Wtedy $x \in (\lambda_w)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^*(i) \to 0$ przy $i \to \infty$.

Dowód. Konieczność wynika z punktu (ii) Lematu 2.32 (ii).
Dostateczność. Weźmy ciąg (x_n) taki, że $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ i $x_n \to 0$ punktowo, tzn. dla każdego $i \in \mathbb{N}$

$$x_n(i) \to 0 \quad \text{przy} \quad n \to \infty. \tag{113}$$

Zauważmy również, że $x^*(i) \to 0$ implikuje

$$x(i) \to 0 \quad \text{przy} \quad i \to \infty. \tag{114}$$

Faktycznie, w przeciwnym przypadku, jeśli $x \notin c_0$ to istnieją $\delta > 0$ i nieskończony ciąg (i_k) takie, że $|x(i_k)| \geqslant \delta$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Stąd $x^*(i) > \delta$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, co przeczy założeniu $x^* \in c_0$.

Ponadto $0 \leqslant x_n \leqslant x$ implikuje, że

$$0 \leqslant x_n^* \leqslant x^* \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{115}$$

Zatem $x^*(i) \to 0$ pociąga za sobą $x_n^*(i) \to 0$ przy $i \to \infty$ dla wszystkich n, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$x_n(i) \to 0 \quad \text{przy} \quad i \to \infty. \tag{116}$$

Pokażemy, że $x_n^*(i) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Załóżmy przeciwnie, że istnieje takie i_0, że $x_n^*(i_0) \not\to 0$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ i podciąg $\left(x_{n_k}^*(i_0)\right)_{k=1}^{\infty}$, że $x_{n_k}^*(i_0) \geqslant \delta$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z warunku (116), dla każdego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy takie $i \in \mathbb{N}$, że $\left|x_{n_k}(i)\right| = x_{n_k}^*(i_0)$ (zob. Twierdzenie 2.19 w rozprawie i Twierdzenie 2.7 w pracy [3]). Oznaczmy $I_k = \left\{i \in \mathbb{N} : \left|x_{n_k}(i)\right| = x_{n_k}^*(i_0)\right\}$ i $I = \bigcup_k I_k$. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli zbiór I jest przeliczalny, to

$$0 < \delta \leqslant x_{n_k}(i) \leqslant |x(i)| \quad \text{dla każdego} \quad i \in I,$$

co przeczy warunkowi (114). Jeżeli I jest zbiorem skończonym, to wtedy istnieje $j_0 \in I$, że

$$x_{n_k}(j_0) \geqslant \delta$$

dla nieskończenie wielu k, co przeczy (113). Możemy zatem powiedzieć, że ciągi x_n^* i $x_n^* w$ zbiegają punktowo do zera dla wszystkich n.

Zauważmy, że z (115), dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$x_n^* w \leqslant x^* w \in l^1 \in (OC).$$

Ostatecznie $\|x_n\|_w = \left\|x_n^*\right\|_w = \sum_{i=1}^{\infty} x_n^*(i) w(i) \to 0.$ □

Warto zauważyć, że dostateczność Lematu 3.27 nie zachodzi w ogólności dla ciągowych przestrzeni symetrycznych. Wystarczy wziąć, analogicznie jak w Przykładzie 2.33, ciągową przestrzeń Marcinkiewicza

$$m_w = \left\{x \in l^0 : \ \|x\| = \sup_i w(i) x^{**}(i) < \infty\right\},$$

gdzie $x^{**}(i) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} x^*(k)$, z funkcją wagową $w(i) = \sqrt{i}$ dla $i \in \mathbb{N}$, a także element $x \in m_w$ taki, że $x(i) = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$ dla $i \in \mathbb{N}_+$.

Wniosek 3.28. Niech ϕ będzie funkcją Orlicza i $x \in B\left(\Lambda_{\phi,w}\right)$. Wtedy $|x| \in \left(\Lambda_{\phi,w}\right)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $x^*(\infty) = 0$,

(ii) $\phi \in \Delta_2^{\Lambda_w}(x\chi_C)$, gdzie $C = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon a_\phi < |x(t)|\right\}$;

(iii) $m(A_k) < \infty$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, gdzie $A_k = \left\{t \in \mathcal{S}(x) \colon \frac{1}{k} \leqslant |x(t)| \leqslant a_\phi\right\}$;

(iv) $b_\phi = \infty$.

Dowód. Konieczność. Warunek (i) wynika z faktu, iż przestrzeń $\Lambda_{\phi,w}$ jest symetryczna oraz z Lematu 2.32. Natomiast warunki (ii) i (iv) wynikają z Wniosku 3.24. (iii) Warunek ten wynika z faktu, iż $x^*(\infty) = 0$.
Dostateczność. Zastosujemy Wniosek 3.24. Wystarczy wykazać, że zachodzą warunki (i') i (iii').

(i') Ponieważ $x^*(\infty) = 0$, zatem $(\phi \circ x)^*(\infty) = 0$. Stąd $\phi \circ x \in (\Lambda_w)_a$ na mocy Lematu 3.26.

(iii') Niech $k \in \mathbb{N}$ Zauważmy, że $m(A_k) < \infty$ implikuje $d_{\chi_{A_k}}(\tau) < \infty$ dla każdego $\tau > 0$. Wtedy z Lematu 3.26 otrzymujemy, że $\chi_{A_k} \in (\Lambda_w)_a$. □

Wniosek 3.29. Niech $x \in B\left(\lambda_{\phi,w}\right)$. Wtedy $|x| \in \left(\lambda_{\phi,w}\right)_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $x^*(\infty) = 0$,

(ii) $\phi \in \Delta_2^{\lambda_w}(x\chi_C)$, gdzie $C = \left\{i \in \mathcal{S}(x) \colon a_\phi < |x(i)|\right\}$;

(iii) Jeżeli $b_\phi = \infty$, to $x\chi_{\{i\in\mathbb{N}\,:\, x(i)\leqslant a_\phi\}} \in c_0$.

(iv) Jeżeli $b_\phi < \infty$, to $x \in c_0$.

Dowód. Konieczność. Warunek (i) wynika z faktu, iż przestrzeń $\lambda_{\phi,w}$ jest symetryczna oraz z Lematu 2.32. Warunki (ii) i (iv) wynikają z Wniosku 3.24.
(iii) Na mocy Wniosku 3.24 mamy $\chi_{A_m} \in (\lambda_w)_a$. Stąd i z Lematu 3.26 otrzymujemy, że $(\chi_{A_m})^* \in c_0$, skąd $m(A_m) < \infty$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wtedy $x\chi_{\{i\in\mathbb{N}\,:\, x(i)\leqslant a_\phi\}} \in c_0$.
Dostateczność. Wykorzystamy Wniosek 3.24 w analogiczny sposób jak w dowodzie Wniosku 3.28.

(i') Ponieważ $x^*(\infty) = 0$, zatem $(\phi \circ x)^*(\infty) = 0$. Stąd $\phi \circ x \in (\Lambda_w)_a$ na mocy Lematu 3.27.

(iii') Zauważmy, że warunki (iii) oraz (iv) implikują, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $i_0 \in \mathbb{N}$ że $|x(i)| < \frac{1}{m}$ dla wszystkich $i \geqslant i_0$, zatem zbiór A_m jest miary skończonej i $\chi_{A_m} \in (\lambda_w)_a$. □

Literatura

[1] M. A. Ariño, B. Muckenhoupt; Maximal functions on cltassical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions; Trans. Amer. Math. Soc. 320 (2), 1990, 727–735.

[2] A. Beck; A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers; Proc. Amer. Math. Soc. 13 (2), 1962, 329–334,

[3] C. Bennett, R. Sharpley; Interpolation of operators; Pure and Applied Mathematics Series Vol. 129, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[4] A. P. Calderón; Intermiediate spaces and interpolation, the complex method; Studia Math. 24, 1964, 113–190.

[5] J. Cerdà, H. Hudzik, M. Mastyło; On the geometry of some Calderón–Lozanovskiĭ interpolation spaces; Indag. Math. N. S. 6 (1), 1995, 35–49.

[6] J. Cerdà, H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastyło; Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces; Positivity 2, 1998, 311–337.

[7] S. Chen; Geometry of Orlicz spaces; Dissertationes Math., 356, 1996, 1–204.

[8] S. Chen, X. He, H. Hudzik; Monotonicity and best approximation in Banach lattices; Acta Math. Sinica 25 (5), 2009, 785–794.

[9] E. W. Cheney; Introduction to approximation theory; McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[10] V. I. Chilin, P. G. Dodds, A. A. Sedaev, F. A. Sukochev; Characterizations of Kadec—Klee properties in symmetric spaces of measurable functions; Trans. Amer. Math. Soc. 348 (12), 1996, 4895–4918.

[11] M. Ciesielski; On geometric structure of symmetric spaces; J. Math. Anal. Appl. 430 (1), 2015, 98–125.

[12] M. Ciesielski, A. Kamińska; The best constant approximant operators in Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$ and their applications; J. Approx.Theory 162, 2010, 1518–1544.

[13] M. Ciesielski, A. Kamińska, P. Kolwicz, R. Płuciennik; Monotonicity and rotundity properties of Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$; Nonlinear Anal. 75, 2012, 2713–2723.

[14] M. Ciesielski, A. Kamińska, R. Płuciennik; Gâteaux derivatives and their applications to approximation in Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$; Math. Nachr., 282 (9), 2009, 1242–1264.

[15] M. Ciesielski, P. Kolwicz, A. Panfil; Local monotonicity structure of symmetric spaces with applications; J. Math. Anal. Appl. 409, 2014, 649–662.

[16] M. Ciesielski, P. Kolwicz, R. Płuciennik; Local approach to Kadec–Klee properties in symmetric function spaces; J. Math. Anal. Appl. 426 (2), 2015, 700–726.

[17] J. A. Clarkson; Uniformly convex spaces; Trans. Amer. Math. Soc. 40, 1936, 396–414.

[18] Y. A. Cui, H. Hudzik, T. Zhang; On some geometric properties of certain Köthe sequence spaces; Math. Bohem. 124 (2-3), 1999, 303–314.

[19] Y.A. Cui, L. Jie, R. Płuciennik; Local uniform nonsquareness in Cesaro sequence spaces; Comment. Math. (Prace Mat.) 37, 1997, 47–58.

[20] M. M. Czerwińska, A. Kamińska; Complex rotundities and midpoint local uniform rotundity in symmetric spaces of measurable operators; Studia Math. 201 (3), 2010, 253–285.

[21] M. Denker, H. Hudzik; Uniformly non–$l_n^{(1)}$ Musielak–Orlicz sequence spaces; Proc. Indian Acad. Math. Sci. 101, 1991, 71–86.

[22] P. Foralewski, H. Hudzik; Some basic properties of generalised Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Collect. Math. 48 (4–6), 1997, 523–538.

[23] P. Foralewski, H. Hudzik; On some geometrical and topological properties of generalised Calderón–Lozanovskiĭ sequence spaces spaces; Houston J. Math. 25 (3), 1999, 523–542.

[24] P. Foralewski, H. Hudzik, P. Kolwicz; Non-squareness properties of Orlicz–Lorentz sequence spaces; J. Funct. Anal. 264, 2013, 605–629.

[25] P. Foralewski, H. Hudzik, P. Kolwicz; Non-squareness properties of Orlicz–Lorentz function spaces; J. Inequal. Appl. 2013:32, 2013, doi: 10.1186/1029-242X-2013-32.

[26] P. Foralewski, P. Kolwicz; Local uniform rotundity in Calderón–Lozanovskiĭ spaces; J. Convex Anal. 14 (2), 2007, 395–412.

[27] J. García–Falset, E. Llorens–Fuster, E. M. Mazcuñan–Navarro; Uniformly non-square Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings; J. Funct. Anal. 233, 2006, 494-514.

[28] W. Gong, Z. Shi; Points of monotonicity in Orlicz–Lorentz function spaces; Nonlinear Anal. 73 (5), 2010, 1300–1317.

[29] R. C. James; Uniformly non-square Banach spaces; Ann. of Math. 80, 1964, 542–550.

[30] R. C. James; Super-reflexive spaces with bases; Pacific J. Math. 41, 1972, 409–419.

[31] W. B. Johnson, Red., J. Lindenstrauss, Red.; Handbook of the geometry of Banach spaces; Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 2003.

[32] W. B. Johnson, Red., J. Lindenstrauss, Red.; Handbook of the geometry of Banach spaces; Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 2001.

[33] H. Hudzik; Uniformly non–l_n^1 Orlicz spaces with Luxemburg norm; Studia Math. 81, 1985, 271–284.

[34] H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastyło; Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices; Rocky Mountain J. Math. 30 (3), 2000, 933–950.

[35] H. Hudzik, P. Kolwicz, A. Narloch; Local rotundity structure of Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Indag. Math. N. S. 17 (3), 2006, 373–395.

[36] H. Hudzik, W. Kurc; Monotonicity properties of Musielak–Orlicz spaces and dominated best approximation in Banach lattices; J. Approx. Theory 95 (3), 1998, 353-368.

[37] H. Hudzik, A. Narloch; Local monotonicity structure of Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Indag. Math. N.S. 15 (1), 2004, 1–12.

[38] H. Hudzik, A. Narloch; Relationships between monotonicity and complex rotundity properties with some consequances; Math. Scand. 96, 2005, 289–306.

[39] A. Kamińska; Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces; Math. Nachr. 147, 1990, 29-38.

[40] A. Kamińska; Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces; Arch. Math. (Basel) 55 (2), 1990, 173–180.

[41] A. Kamińska, D. Kubiak; On isometric copies of l_∞ and James constants in Cesàro–Orlicz sequence spaces; J. Math. Anal. Appl. 372, 2010, 574–584.

[42] A. Kamińska, D. Kubiak; The Daugavet property in the Musielak–Orlicz spaces; J. Math. Anal. Appl. 427 (2), 2015, 873–898.

[43] A. Kamińska, L. Maligranda; On Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$; Israel J. Math. 140, 2004, 285–318.

[44] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov; Functional Analysis; Nauka, Moscow, 1984.

[45] M. Kato, L. Maligranda; On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces; J. Math. Anal. Appl. 258, 2001, 457–465.

[46] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi; On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces; Studia Math. 144, 2001, 275–295.

[47] W. A. Kirk, Red., B. Sims, Red.; Handbook of metric fixed point theory; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[48] P. Kolwicz; Rotundity properties in Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Houston J. Math. 31 (3), 2005, 883–912.

[49] P. Kolwicz; Kadec–Klee properties of Calderón–Lozanovskiĭ function spaces; J. Funct. Spaces Appl., 2012, doi: 10.1155/2012/314068.

[50] P. Kolwicz, K. Leśnik, L. Maligranda; Pointwise multipliers of Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Math. Nachr. 286 (8-9), 2013, 876–907.

[51] P. Kolwicz, A. Panfil; Local Δ_2^E condition in generalized Calderón–Lozanovskiĭ spaces; Taiwanese J. Math. 16 (1), 2012, 259–282.

[52] P. Kolwicz, A. Panfil; Non-square Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$; Indag. Math 24, 2013, 254–263.

[53] P. Kolwicz, A. Panfil; Points of nonsquareness of Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$; J. Inequal. Appl. 2014:467, 2014, doi: 10.1186/1029-242X-2014-467.

[54] P. Kolwicz, R. Płuciennik; Local $\Delta_2^E(x)$ condition as a crucial tool for local structure of Calderón–Lozanovskiĭ spaces; J. Math. Anal. and Appl. 356, 2009, 605–614.

[55] P. Kolwicz, R. Płuciennik; Points of upper local uniform monotonicity in Calderón–Lozanovskiĭ spaces; J. Convex Anal. 17 (1), 2010, 111–130.

[56] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, E. M. Semenov; Interpolation of linear operators; Transl. Math. Monogr. 54, Amer. Math. Soc., Providence, 1982.

[57] W. Kurc; Strictly and uniformly monotone Musielak–Orlicz spaces and applications to best approximation; J. Approx. Theory 69 (2), 1992, 173–187.

[58] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri; Classical Banach Spaces II; Springer-Verlag, 1979.

[59] W. A. J. Luxemburg; Banach Function Spaces; Van Gorcum, Assen, 1955.

[60] G. G. Lorentz; On the theory of spaces Λ; Pacific J. Math. 1, 1951, 411–429.

[61] L. Maligranda, N. Petrot, S. Suantai; On the James constant and B-convexity of Cesàro and Cesàro-Orlicz sequence spaces; J. Math. Anal. Appl. 326, 2007, 312–331.

[62] J. Musielak; Przestrzenie modularne; Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1978.

[63] A. Pinkus; On L_1 Approximation; Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[64] Y. Raynaud; On Lorentz–Sharpley spaces; Israel Math. Conf. Proc. 5, 1992, 207–228.

[65] H. L. Royden; Real Analysis; MacMillan Publishing Company, NY, 1988.

[66] E. Sawyer; Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces; Studia Math. 96 (2), 1990, 145–158.

[67] W. Wnuk; Banach lattices with order continuous norms; PWN, Warszawa 1999.