RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
ROK LXVIII – zeszyt 1 – 2006

EMIL PANEK, PAWEŁ KLIBER

OPTYMALNA PROGRESJA PODATKOWA

I. WSTĘP

Na całym świecie poszukuje się dobrego (sprawiedliwego) systemu podatkowego. Nikt nie kwestionuje potrzeby zasilania budżetu państwa podatkami. Działacze gospodarczy, społeczni, parlamentarzyści, teoretycy ekonomii toczą natomiast gorące spory o sprawiedliwą formułę opodatkowania obywateli. W artykule wracamy do tej kwestii na gruncie teorii sterowania optymalnego[1]. Jesteśmy przekonani, że nadanie problemowi opodatkowania rygoru ścisłości matematycznej pozwoli na głębsze zrozumienie założeń stojących za określonym systemem podatkowym, a także spodziewanych efektów tego systemu. Przedmiotem naszego zainteresowania jest podatek dochodowy od osób fizycznych. Nie podejmujemy się oceny innych rodzajów podatków obowiązujących w Polsce i za granicą.

Artykuł składa się z dwóch części. W części II prezentujemy model systemu podatkowego w gospodarce w krótkim okresie czasu (model statyczny). Model ten nie uwzględnia wpływu podatków na inwestycje, a w rezultacie – na przyszłe bogactwo społeczeństwa. Tę kwestię podnoszą też zwolennicy podatku liniowego. Dlatego w części III rozważamy model dynamiczny, który uwzględnia akumulację kapitału.

II. MODEL STATYCZNY

Przedstawimy najpierw model matematyczny opodatkowania obywateli pewnego kraju podatkiem dochodowym w krótkim okresie. Zakładamy, że mieszkańcy kraju tworzą społeczność złożoną z jednostek o różnych dochodach, a problem optymalnego opodatkowania polega na ustaleniu takiej formuły podatkowej, która maksymalizowałaby użyteczność społeczną rozumianą jako suma użyteczności poszczególnych obywateli. Problem tak rozumianej optymalnej stopy podatkowej jest więc *de facto* problemem redystrybucji dochodów w jednostce czasu, np.

[1] Tym też nasze podejście różni się od większości znanych prac z tego zakresu, por. np. A. Altay, *The Theory of Optimal Taxation and New Approaches: A Survey*, „Journal of Public Economics", 1986, nr 30; J. M. Buchanan, *The Political Eficiency of General Taxation*, „National Tax Journal" 1993, nr 46; W. Hettich, S. A. Winer, *A Positive Model of Tax Structure*, „ Journal of Public Economics" 1984, nr 24; F. R. Ramsey, *A Contribution to the Theory of Taxation*, „Economic Journal" 1992, nr 27; E. Saez, *Using Elasticities to Derive Optimal Income Tax*, „Review of Economic Studies" 2001, nr 68; J. B. Slemrod (red.), *On the High-income Laffer Curve. Tax Progressivity and Income Inequality*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

w pewnym roku. W punktcie 1 pomijamy mechanizm powstawania dochodów oraz wpływ redystrybucji dochodów na ich kształtowanie się w przyszłości. Zajmiemy się tym w punkcie 2.

Przeanalizujemy kolejno dwa modele. W pierwszym z nich (model podstawowy) zakładamy, że wszystkie jednostki w społeczeństwie mają taką samą funkcję użyteczności. W drugim (model rozszerzony) różne jednostki mogą mieć odmienne funkcje użyteczności.

1. Wersja podstawowa modelu

Społeczeństwo składa się z jednostek o różnych dochodach. Dochód jednostki oznaczamy przez x. Jest to liczba z przedziału $[0,\infty)$. Nieujemna funkcja rzeczywista $g(x)$ opisuje gęstość rozkładu dochodów w społeczeństwie i oznacza, jaka część społeczeństwa ma dochody w przedziale $[x,x+dx]$, gdzie dx jest wielkością nieskończenie małą. Całka $\int_0^\infty g(x)dx$ oznacza frakcję ludności, która ma dochody między x_0 a x_1. Z definicji $\int_0^\infty g(x)dx = 1$.

Zakładamy, że pewna część $I(x)$ dochodu x jest przeznaczana na cele społeczne – są to społeczne koszty obsługi dochodu x. Przyjmujemy następujące założenia odnośnie funkcji I:

$$I = 0, \qquad 0 < I'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} I'(x) = \mu > 0. \tag{1}$$

Przez $f(x)$ oznaczamy stopę podatkową, jaką obciążony jest dochód x. Przyjmujemy, że podatek płaci się od dochodu netto, czyli po odliczeniu kosztów obsługi. Zatem od osoby, której dochód wynosi x, kwota podatku wynosi $(x\text{-}I(x))f(x)$. Do jej dyspozycji pozostaje kwota $(1\text{-}f(x))(x\text{-}I(x))$. Łączne wpływy do budżetu państwa z podatku dochodowego wynoszą

$$N\int_0^\infty (x - I(x))f(x)g(x)dx, \tag{2}$$

gdzie N jest liczbą ludności. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, bez utraty ogólności, że N=1.

Zakładamy, że miarą dobrobytu każdego obywatela jest skalarna funkcja użyteczności $u(x)$, o standardowych własnościach: rosnąca i wklęsła, $\lim_{x\to 0} u'(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x\to+\infty} u'(x) = 0$. Dobrobyt społeczny U jest sumą dobrobytów jednostek, tj.

$$U = \int_0^\infty u(x)g(x)dx\ . \tag{3}$$

Przy ustalonej, wymaganej kwocie A>0 wpływów do budżetu państwa z tytułu podatku dochodowego płaconego przez obywateli szukamy takiego systemu podatkowego, który zapewni maksymalny poziom dobrobytu społecznego (rozumianego jako miara zadowolenia obywateli z posiadania tej części dochodu, która pozostaje do ich dyspozycji po opodatkowaniu). Matematycznie, szukamy funkcji $f: [0,\infty) \to [0,1]$, która stanowi rozwiązanie następującego zadania:

$$\max_f \int_0^{\infty} u((1-f(x))(x-f(x)))g(x)dx, \tag{4}$$

pod warunkiem że

$$\int_0^{\infty} (x-I(x))f(x)g(x) = A. \tag{5}$$

Wprowadzając funkcję $y(x)$ spełniającą równanie

$$\frac{dy}{dx} = (x-I(x))f(x)g(x),$$

zadanie (4)–(5) można zapisać w równoważnej postaci:

$$\max_f \int_0^{\infty} u((1-f(x))(x-f(x)))g(x)dx, \tag{6}$$

pod warunkiem że

$$\frac{dy}{dx} = (x-I(x))f(x)g(x), \tag{7}$$

$$y(0)=0, \quad y(\infty)=A, \tag{8}$$

$$\forall x: f(x) \in [0,1]. \tag{9}$$

Zadanie (6)-(9) jest klasycznym zadaniem sterowania optymalnego, w którym rolę sterowania pełni funkcja f, przebieg zmiennej stanu opisuje funkcja y, natomiast x jest zmienną niezależną. Hamiltonianem tego zadania jest funkcja

$$H(f,y,x,\lambda) = u((1-f(x))(x-f(x)))g(x) + \lambda(x-I(x))f(x)g(x),$$

gdzie zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina λ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Ponieważ jednak

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

więc

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Wynika stąd, że $\lambda(x)=\lambda=const.$

Zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina, dla każdego x optymalną wartość f należy wybrać tak, aby maksymalizowała hamiltonian[2]. Pochodna hamiltonianu względem f wynosi

[2] Zob. np. M. Athans, P. Falb, *Sterowanie optymalne: wstęp do teorii i jej zastosowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1969; W. H. Fleming, R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer Verlag, New York 1975; D. Leonard, N. Van Long, *Optimal control theory and static opimization*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.

$$\frac{\partial H}{\partial f} = (x - I(x))u'((1-f)x)g(x) + \lambda(x - I(x))g(x)$$
$$= (x - I(x))g(x)[\lambda - u'((1-f)(x - I(x)))],$$

Załóżmy, że stała λ w hamiltonianie H jest niedodatnia. Wówczas dla każdego $x>0$ i każdego $f\in[0,1]$ $\frac{\partial H}{\partial f} < 0$, czyli dla $x \geq 0$ hamiltonian osiąga maksimum w punkcie $f=0$, więc w myśl (7)

$$\forall x > 0: \frac{dy}{dx} = 0$$

i wobec tego, że $y(0)=0$, otrzymujemy $y(x)=0$ dla każdego $x>0$, co przeczy warunkowi $y(\infty)=A$ (zob. (8)). Zatem $\lambda>0$.

Przebieg funkcji $h(f)=u'((1-f)(x-I(x))$ w zależności od $f\in[0,1]$ (przy ustalonym $x>0$) przedstawiono na rysunku 1. Jak widać, możliwe są dwa przypadki. W pierwszym (rys. 1(a)) krzywa $h(f)$ i prosta λ nie przecinają się, co oznacza, że dla każdego $f\in(0,1]$ jest $u'>\lambda$. Wartość $\partial H/\partial f$ jest ujemna na przedziale $f\in(0,1]$, co oznacza, że hamiltonian ma maksimum w punkcie $f=0$. Funkcja u' maleje ma półosi $[0,\infty)$ od $+\infty$ do 0 i wobec tego przy przyjętych założeniach warunek $u'(x)>\lambda$ będzie spełniony dla małych wielkości x. Oznacza to, że niskie dochody powinny być całkowicie zwolnione od podatku.

W drugim przypadku (rys. 1(b)), krzywa $h(f)$ przecina prostą λ w punkcie f^*. Wartość $\partial H/\partial f$ jest dodatnia dla $f < f^*$ oraz ujemna dla $f > f^*$. Oznacza to, że hamiltonian osiąga maksimum w punkcie f^*. Pozostaje wyznaczyć współrzędne tego punktu. Oznaczmy przez ϑ funkcję odwrotną do funkcji użyteczności krańcowej $\vartheta = (u')^{-1}$, tj.

$$\vartheta(y) = x \Leftrightarrow u'(x) = y.$$

W punkcie f^* spełnione jest równanie

$$\lambda = u'((1-f^*)(x - I(x))),$$

a zatem

$$f^* = 1 - \frac{\vartheta(\lambda)}{x - I(x)}. \tag{10}$$

Ponieważ λ jest stałą, więc także $\vartheta(\lambda)=c>0$ jest stałą.

Optymalna progresja podatkowa (sterowanie) ma następującą postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x - I(x) \leq c, \\ 1 - \dfrac{c}{x - I(x)} & \text{dla } x - I(x) > c, \end{cases} \tag{11}$$

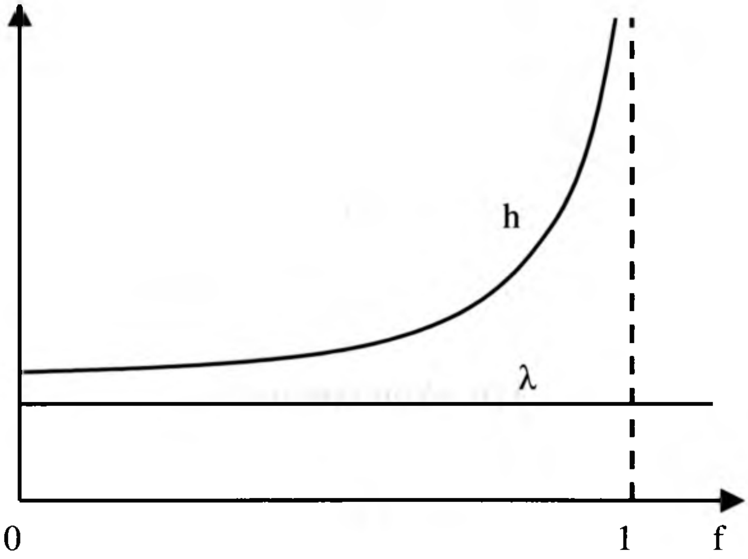
przy czym stałą $c>0$ należy dobrać w ten sposób, aby spełniony był warunek ograniczający głoszący, że suma zebranych podatków wyniesie A, tj.

$$\int_{\{x: x - I(x) > c\}} (x - I(x))\left(1 - \frac{c}{x - I(x)}\right) g(x)dx = A, \tag{12}$$

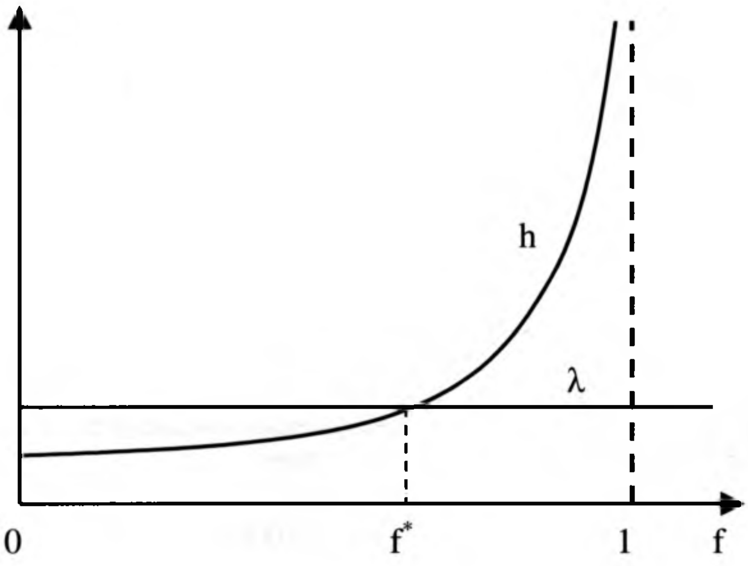
(por. (5)).

Rysunek 1

Wartość f maksymalizująca hamiltonian



(a) Rozwiązanie optymalne $f^* = 0$



(b) Rozwiązanie optymalne $f^* \in (0,1)$

2. Wersja rozszerzona modelu

W podstawowej wersji modelu zakładaliśmy, że każda osoba ma taką samą funkcję użyteczności u. Uchylimy obecnie to założenie i rozważymy model, w którym członkowie społeczeństwa mogą różnić się indywidualnymi ocenami swego dobrobytu. Dokładniej mówiąc zakładamy, że w społeczeństwie można wyróżnić pewne grupy ludności indeksowane przez $\theta \in \Theta$, gdzie Θ jest zbiorowością takich grup. Grupa o indeksie θ ma funkcję użyteczności $u(\theta,\cdot)$. Łączny rozkład typów i klas dochodów opisuje nieujemna funkcja $g(\theta,x)$ spełniająca warunek $\int_0^\infty \int_\Theta g(\theta,x)d\theta dx = 1$. Odpowiednikiem zadania (4)-(5) jest zadanie

$$\max \int_0^\infty \int_\Theta u(\theta,(1-f(x))(x-f(x)))g(\theta,x)d\theta dx, \tag{13}$$

pod warunkiem że

$$\int_0^\infty \int_\Theta (x-I(x))f(x)g(\theta,x) = A. \tag{14}$$

Wprowadzając funkcję $G(x)$:

$$G(x) = \int_\Theta g(\theta,x)d\theta \tag{15}$$

(jest to rozkład brzegowy dochodów) i funkcję $U(x,f)$:

$$U(x,f) = \int_\Theta u(\theta,(1-f)(x-I(x)))g(\theta,x)d\theta \tag{16}$$

(jest to średnia użyteczność w grupie o dochodach x przy stopie opodatkowania tej grupy równej f), zadanie to można przedstawić w następującej postaci (por. zadanie (6)-(9)):

$$\max_f \int_0^\infty u((1-f(x))(x-f(x)))g(x)dx, \tag{17}$$

pod warunkiem że

$$\frac{dy}{dx} = (x-I(x))f(x)g(x), \tag{18}$$

$$y(0)=0, \quad y(\infty)=A, \tag{19}$$

$$\forall x: f(x) \in [0,1]. \tag{20}$$

Zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina, hamiltonianem tego zadania jest funkcja $H=U(x,f)+\lambda(x-I(x))fG(x)$, gdzie (podobnie jak w zadaniu (6)-(9)) λ jest pewną stałą dodatnią, a optymalną wartość sterowania $f\in[0,1]$ należy wybrać tak, aby (przy ustalonym $x>0$) maksymalizowała hamiltonian H. Pochodna hamiltonianu względem sterowania wynosi

$$\frac{\partial H}{\partial f} = \frac{\partial U}{\partial f} + \lambda(x-I(x))G(x).$$

Z definicji funkcji U mamy jednak:

$$\frac{\partial U}{\partial f} = -\int_{\Theta} (x - I(x))u_2'(\theta,(1-f)(x-I(x)))g(\theta,x)d\theta = -(x - I(x))SUM(x,f),$$

gdzie $SUM(x,f)$ jest średnią użytecznością marginalną w grupie ludności o dochodach x przy stopie podatkowej w tej grupie równej f:

$$SUM(x,f) = \int_{\Theta} u_2'(\theta,(1-f)(x-I(x)))g(\theta,x)d\theta.$$

Pochodną hamiltonianu względem sterowania można zatem zapisać inaczej tak:

$$\frac{\partial H}{\partial f} = (x - I(x))[\lambda G(x) - SUM(x,f)].$$

Otrzymujemy następujące zasady opodatkowania:

1. Zwolnione z podatku powinny być ewentualnie te grupy osób, dla których średnia użyteczność marginalna $SUM(x)$ jest największa (niekoniecznie muszą to być grupy o najniższym dochodzie) – tam bowiem dla $f = 0$ pochodna $\frac{\partial H}{\partial f}$ może być mniejsza od 0, co daje rozwiązanie brzegowe f^*.

2. Dla pozostałych grup (opodatkowanych) reguła opodatkowania powinna być taka, aby średnia użyteczność marginalna była wprost proporcjonalna do liczebności grup o różnych dochodach: $SUM(x,f) \sim G(x)$.

Aby zilustrować powyższe zasady rozważmy społeczeństwo, w którym występują dwie grupy obywateli oznaczone przez θ_1 i θ_2. Zatem $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Obywatele z grupy θ_1 mają funkcję użyteczności $u(\theta_1, x) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$, zaś obywatele z grupy θ_2 funkcję użyteczności $u(\theta_2, x) = \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta}$, przy czym $0<\beta<\alpha<1$. Relatywna awersja do ryzyka obywateli z grupy θ_1 i θ_2 wynosi odpowiednio α i β, a zatem obywatele z grupy θ_1 mają większą awersję do ryzyka niż z grupy θ_2. Wszyscy obywatele dzielą się na „mniej zamożnych" i „zamożnych". Dochody mniej zamożnych leżą w przedziale $[a,b]$, a dochody zamożnych – w przedziale $[c,d]$, przy czym $0<a<b<c<d$. Zakładamy też, dla uproszczenia, że $b-a=d-c$. Wszyscy mniej zamożni należą do grupy θ_1, a wszyscy bardziej zamożni – do grupy θ_2. Funkcja rozkładu dochodów jest postaci:

$$g(\theta,x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{gdy}(\theta = \theta_1 \text{ i } x \in [a,b]) \text{ lub} (\theta = \theta_2 \text{ i } x \in [c,d]), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{21}$$

Jeżeli $I(x)=0$ dla każdego x, to średnia użyteczność marginalna przy dochodzie x i stopie podatkowej f wynosi

$$SUM(x,f) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(1-f)^{-\alpha} x^{-\alpha} & \text{dla} \quad x \in [a,b], \\ \frac{1}{b-a}(1-f)^{-\beta} x^{-\beta} & \text{dla} \quad x \in [c,d]. \end{cases} \tag{22}$$

Zgodnie z drugą z wyprowadzonych zasad optymalnego opodatkowania, średnia użyteczność marginalna powinna być proporcjonalna do liczebności grup. W tym przypadku obywatele o różnych dochodach są tak samo liczni, a zatem średnia użyteczność krańcowa powinna być stała dla wszystkich jednostek (zakładamy, że w obu grupach dochody są na tyle wysokie, iż nikt nie jest zwolniony z opodatkowania). Optymalna progresja podatkowa wynosi zatem

$$f^*(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{C^{\frac{-1}{\alpha}}}{x} & \text{dla} \quad x\in[a,b], \\ 1-\dfrac{C^{\frac{-1}{\beta}}}{x} & \text{dla} \quad x\in[c,d], \end{cases} \tag{23}$$

gdzie stała $C>0$ spełnia warunek brzegowy (12) (w którym obecnie $I(x)=0$). Podatek jest więc progresywny, ale progresja jest mniejsza niż w modelu z jednakowymi funkcjami użyteczności. Zamożniejsi mają po opodatkowaniu dochód nadal większy niż mniej zamożni – jest to ich premia za mniejszą awersję do ryzyka.

III. MODEL DYNAMICZNY

W poprzednim punkcie wyprowadziliśmy optymalną progresję podatkową w gospodarce, w której przy ocenie poziomu swego dobrobytu obywatele płacący podatek dochodowy kierowali się statycznymi funkcjami użyteczności (wyrażającymi stopień ich zadowolenia osiągnięty w jednym okresie). Realne procesy gospodarcze mają charakter dynamiczny, a rozwiązanie optymalne w krótkim okresie nie musi być najlepsze w okresie dłuższym. Na przykład reguła (11) oznacza silną progresję podatkową. Obrońcy podatku liniowego twierdzą czasami, że taka formuła jest dobra jako rozwiązanie doraźne, krótkookresowe. Podmioty z wyższym dochodem mają jednak znacznie większe możliwości inwestycyjne i jeśli obarczymy je zbyt dużymi podatkami, to pośrednio przyczynimy się do wolniejszego wzrostu gospodarczego w przyszłości, a zatem w długim okresie do niższego dobrobytu społecznego. Aby zbadać zasadność tej argumentacji, zbudujemy dwa dynamiczne modele gospodarki oraz sformułujemy i rozwiążemy odpowiednie (dynamiczne) zadania wyboru takich reguł opodatkowania, które zapewnią maksymalizację dobrobytu społecznego w długim okresie.

Pierwszy z nich, uproszczony, różni się konstrukcją od modeli rozważanych wcześniej w artykule. Nie interesuje nas w nim znajomość rozkładu dochodów. W zamian postulujemy istnienie skończonej liczby jednostek (obywateli) o różnych dochodach. Dla każdego obywatela stopa podatkowa ustalana jest oddzielnie. To uproszczenie było konieczne dla otrzymania rozwiązania, ale – jak się okaże – prowadzi do wyników posiadających naturalną interpretację ekonomiczną. W drugim modelu korzysta się z rozkładów dochodu. Stopa podatkowa zależy w nim tylko od dochodu, a nie od tego, czyją jest własnością.

1. Uproszczona wersja modelu dynamicznego

Zakładamy, że społeczeństwo składa się z l obywateli. W modelu rozważamy pewien ograniczony przedział czasu $[0,T]$. Czas jest zmienną ciągłą, którą oznaczamy przez t. Dochód i-tego obywatela w chwili t oznaczamy przez $x_i(t)$. Każdy z obywateli ma taką samą funkcję użyteczności $u(x)$, która spełnia takie same założenia, jak w modelu statycznym. Przez s_i oznaczamy stopę inwestycji i-tego obywatela, tj. stosunek jego oszczędności do jego dochodu. Zakładamy, że wielkość ta nie zmienia się w miarę upływu czasu. Stopę podatkową i-tego obywatela w chwili t oznaczamy przez $f_i(t)$. Przez A oznaczmy sumę podatków, która ma wpłynąć do budżetu państwa w okresie $[0,T]$, tj.

$$A = \int_0^T \sum_{i=1}^{l} f_i(t) x_i(t) dt > 0. \tag{24}$$

Zakładamy, że majątek i-tego obywatela rośnie ze stopą wzrostu $a_i s_i$, gdzie jest stałą opisującą wydajność inwestycji i-tego obywatela (można przyjąć, że pośrednio uwzględnia ona także koszty obsługi jego dochodu). Dochód do dyspozycji i-tego obywatela, po odliczeniu inwestycji i podatków wynosi $(1 - f_i - s_i)x_i$.

Chcemy tak ustalić wysokość stóp podatkowych wszystkich obywateli, aby dobrobyt społeczny rozumiany jako suma użyteczności indywidualnych obywateli w okresie $[0,T]$ był jak największy, przy czym do budżetu państwa powinien wpłynąć wymagany dochód A. Stosując tę samą technikę, jak w modelu statycznym, (tj.wprowadzając dodatkową zmienną y w celu przeformułowania ograniczenia (24)), otrzymujemy następujące klasyczne zadanie sterowania optymalnego:

$$\max_{f_1,\dots,f_l} \int_0^T \sum_{i=1}^{l} u[(1 - f_i(t) - s_i) x_i(t)] dt, \tag{25}$$

pod warunkiem że

$$\dot{x}_i(t) = a_i s_i x_i(t) \qquad \text{dla } i=1,\dots,l, \tag{26}$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{l} f_i(t) x_i(t), \tag{27}$$

$$0 \le f_i(t) \le 1 - s_i \qquad \text{dla każdego },\ i=1,\dots,l, \tag{28}$$

$$x_i(0) = x_i^0 > 0, \tag{29}$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = A. \tag{30}$$

Wielkość x_i^0, $i=1,\dots,l$, oznacza dochód początkowy i-tego obywatela.

Hamiltonian zadania (25)–(30) ma postać

$$H(\ , \mathbf{x}, y, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{l} u[(1 - f_i - s_i)x_i] + \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i a_i s_i x_i + \lambda_{l+1} f_i x_i), \tag{31}$$

gdzie $\mathbf{x}$ jest l-wymiarowym wektorem dochodu obywateli, $\mathbf{x} = (x_1, x_2,\dots,x_l)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2,\dots,f_l)$, jest wektorem ich stóp podatkowych, zaś $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_{l+1})$ jest $(l+1)$-wymiarowym wektorem zmiennych dualnych, których dynamikę opisuje następujący układ równań różniczkowych:

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -(1 - f_i(t) - s_i) u' [(1 - f_i(t) - s_i) x_i(t)] - \lambda_i(t) a_i s_i x_i(t) - \lambda_{l+1} f_i(t). \tag{32}$$

Natomiast zmienna dualna λ_{l+1} jest stałą większą od zera.

Zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina optymalne sterowanie f powinno w każdej chwili maksymalizować hamiltonian (31). Pochodna cząstkowa hamiltonianu względem zmiennej f_i wynosi:

$$\frac{\partial H}{\partial f_i} = -x_i u'[(1 - f_i - s_i)x_i] + \lambda_{l+1} x_i = \{\lambda_{l+1} - u'[(1 - f_i - s_i)x_i]\}x_i . \tag{33}$$

Znak pochodnej jest taki sam, jak znak wyrażenia znajdującego się w nawiasach klamrowych, gdyż x_i jest zawsze liczbą dodatnią. Optymalną stopę opodatkowania f_i^* łatwo wyznaczyć graficznie, analizując wykres prostej λ_{l+1} i krzywej $h(f_i) = u'[(1 - f_i - s_i)x_i]$. Wykresy te wyglądają jak na rysunku 1. Jeżeli dochód i-tego obywatela jest niski lub jego stopa oszczędności s_i jest na tyle wysoka, że pochodna $u'[(1 - s_i)x_i]$ jest większa od λ_{l+1}, to optymalna stopa opodatkowania $f_i^* = 0$. Natomiast jeżeli pochodna $u'[(1 - s_i)x_i]$ jest mniejsza od λ_{l+1}, to optymalnym opodatkowaniem jest punkt z przedziału (0,1), w którym pochodna (33) ma wartość zero. Zauważmy, że próg, od którego rozpoczyna się opodatkowanie, jest taki sam dla wszystkich obywateli i zależy od absolutnej wysokości dochodu przeznaczonego na konsumpcję. Oznaczając, podobnie jak w modelu statycznym, przez ϑ funkcję odwrotną do funkcji u', warunek ten można zapisać w następującej postaci:

$$(1 - f_i^* - s_i)x_i = \vartheta(\lambda_{l+1}). \tag{34}$$

Wielkość, która stoi po prawej stronie tego warunku, $\vartheta(\lambda_{l+1})$, jest stałą. Oznaczmy ją przez c. Przekształcając warunek (34) otrzymujemy następującą optymalną stopę opodatkowania:

$$f_i^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (1 - s_i)x_i(t) \le c, \\ 1 - \dfrac{c}{x_i(t)} - s_i & \text{dla} \quad (1 - s_i)x_i(t) > c. \end{cases} \tag{35}$$

Optymalna progresja podatkowa wyznaczona na podstawie modelu dynamicznego ma następującą postać: Osoby z niskim dochodem lub z wysoką stopą oszczędności (inwestycji) powinny być zwolnione z obowiązku płacenia podatku. O zwolnieniu decyduje wysokość tej części dochodu obywatela, która pozostaje po odliczeniu jego indywidualnych lokat inwestycyjnych. Osoby z wyższym dochodem lub z niższą stopą oszczędności powinny płacić podatek zgodnie z regułą (35).

Regułę tę można interpretować dwojako. W myśl pierwszej interpretacji optymalna stopa podatkowa f_i^* zależy od dochodu x_i oraz stopy s_i inwestycji pomnażających dochód i-tego obywatela. Zatem wysokość stopy podatkowej zależy nie tylko od dochodu, ale także od osoby, która dochód ten osiąga. Dwaj różni podatnicy o tych samych dochodach mogą być obciążeni różnym podatkiem w zależności od ich stóp inwestycji.

W celu zaprezentowania drugiej interpretacji zapiszmy regułę (35) i innej postaci:

$$w_i^*(t) = \begin{cases} s_i & \text{dla} \quad (1 - s_i)x_i(t) \le c, \\ 1 - \dfrac{c}{x_i(t)} & \text{dla} \quad (1 - s_i)x_i(t) > c, \end{cases} \tag{36}$$

gdzie $w_i^*(t) = f_i^*(t) + s_i$. Wówczas $(1 - w_i^*(t))x_i(t)$ jest częścią dochodu i-tego obywatela przeznaczoną na konsumpcję, a zatem $1 - w_i^*(t)$ jest jego indywidualną stopą konsumpcji. Wielkość w_i^* nazwiemy umownie optymalną stopą wyrzeczenia i-tego obywatela (podatnika). Reguła (36) przypomina regułę optymalnego opodatkowania (11) w modelu statycznym (przy upraszczającym założeniu, że $I(x)=0$). W jej myśl optymalna stopa wyrzeczenia podatnika, w_i^*, zależy wyłącznie od jego dochodu x_i (tj. stopy wyrzeczenia dwóch różnych podatników osiągających ten sam dochód powinny być identyczne).

W świetle przyjętego kryterium maksymalizacji dobrobytu społecznego w długim okresie nie jest istotna formuła opodatkowania (może to być podatek liniowy lub dowolny inny) pod warunkiem, że suma płaconych podatków i indywidualnych inwestycji pomnażających dochody obywateli będzie rosła progresywnie, zgodnie z formułą (36).

2. Pełna wersja modelu dynamicznego

W modelu prezentowanym w poprzednim podpunkcie zmienna w czasie stopa podatkowa $f_i(t)$ była ustalana odrębnie dla każdego obywatela. Taki system podatkowy jest oczywiście niepraktyczny. W rzeczywistym systemie podatkowym *ex definitione* stopa opodatkowania nie powinna zależeć od tego, od kogo pobierany jest podatek, lecz wyłącznie od wysokości dochodu. Progresja podatkowa nie powinna także zmieniać się zbyt często. W tym podpunkcie prezentujemy model, który spełnia te dwa warunki. Punktem wyjścia jest dla nas podstawowa wersja modelu statycznego z daną funkcją rozkładu dochodów w społeczeństwie.

Niech $g(t,x)$ będzie funkcją rozkładu dochodów w społeczeństwie w chwili t, gdzie $t \in [0,T]$. Zakładamy, że stopa inwestycji osoby z dochodem x wynosi $s(x)$. Dochód osoby rośnie ze stopą $as(x)$, gdzie $a>0$ jest wskaźnikiem efektywności inwestycji. Wszystkie osoby mają taką samą funkcję użyteczności $u(x)$ o standardowych własnościach. Podobnie jak w poprzednich modelach, szukamy takiej formuły opodatkowania obywateli, która zapewnia maksymalny poziom dobrobytu społecznego, a równocześnie zapewnia zasilanie budżetu państwa w wysokości $A>0$ z tytułu podatku dochodowego. Aby zapisać odpowiednie zadanie, musimy najpierw wyprowadzić równanie dynamiki rozkładu dochodów. Oznaczmy przez $G(t,x)$ dystrybuantę dochodów w chwili t, tj.

$$G(t,x) = \int_0^x g(t,y)dy. \tag{37}$$

Wielkość $G(t,x)$ informuje, ile osób ma w chwili t dochód nie większy od x. Rozważmy małą zmianę czasu dt. Dochód każdego obywatela zmienia się zgodnie z równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = as(x(t))x(t). \tag{38}$$

W przedziale czasu $[t,t+dt]$ dochód obywatela, który w chwili t wynosił $x(t)$, wzrośnie o $dx=asx(t)dt$. Weźmy dowolną liczbę $x>0$. Chcemy wyznaczyć wielkość $G(t+dt,x)$, czyli liczbę osób, które w momencie $t+dt$ będą miały dochód nie wyższy od x. Osoby, których dochód w chwili t przekraczał $x-dx$, w chwili $t+dt$ będą miały dochód większy od x. Zatem

$$G(t+dt,x)=G(t,x-dx)=G(t,x-as(x)xdt). \tag{39}$$

Odejmując w równaniu (39) obustronnie $G(t,x)$, otrzymujemy:

$$G(t+dt,x)-G(t,x)=G(t,x-as(x)xdt)-G(t,x). \tag{40}$$

Dzieląc obie strony równania (40) przez dt i przechodząc do granicy, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-as(x)x\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}. \tag{41}$$

Zgodnie z równaniem (37) $g(t,x)=\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}$. Zatem, aby otrzymać równanie opisujące zmiany rozkładu g, należy obie strony równania (41) zróżniczkować względem x. Ostatecznie otrzymujemy następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}+as(x)x\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}+(as'(x)x+s(x))g(t,x)=0,$$

które spełnia funkcja $g(t,x)$. Zadanie maksymalizacji dobrobytu społecznego w horyzoncie $[0,T]$ przy założeniu, że budżet państwa wymaga zasilania podatkiem dochodowym w wysokości $A>0$ przyjmie zatem następującą postać:

$$\max_f \int_0^T\int_0^\infty g(t,x)u((1-s(x)-f(x))x)dtdx, \tag{42}$$

pod warunkiem że

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}+as(x)x\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}+(as'(x)x+s(x))g(t,x)=0, \tag{43}$$

$$\int_0^T\int_0^\infty g(t,x)f(x)xdtdx=A, \tag{44}$$

$$f(x)\in[0,s(x)] \quad \text{dla każdego } x\in[0,\infty], \tag{45}$$

$$g(0,x)=g_0(x), \tag{46}$$

gdzie $g_0(x)$ jest rozkładem dochodów w społeczeństwie w momencie początkowym.

Łatwo pokazać, że rozwiązaniem optymalnym zadania (42)-(46) jest stopa podatkowa

$$f_i^*(t)=\begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x-s(x)\le c, \\ 1-\dfrac{c}{x}-s(x) & \text{gdy} \quad x-s(x)>c, \end{cases} \tag{47}$$

przy czym c jest pewną stałą, zależną od A. Oznaczmy przez $I(f)$ wartość funkcjonału (42) z funkcją progresji $f(x)$. Weźmy różnicę $I(f^*)-I(f)$, gdzie f jest dowolną dopuszczalną funkcją progresji spełniającą warunki zadania (42)-(46). Wówczas:

$$I(f^*) - I(f) = \int_0^T \int_0^\infty g(t,x)[u((1-s(x)-f^*(x))x) - u((1-s(x)-f(x))x)]dtdx \geq$$

$$\int_0^T \int_0^\infty g(t,x)u'((1-s(x)-f^*(x))x)(f^*(x)-f(x))dtdx =$$

$$\int_0^T \int_{\{x:f^*(x)>0\}} g(t,x)u'(c)(f^*(x)-f(x))dtdx + \int_0^T \int_{\{x:f^*(x)=0\}} g(t,x)u'((1-s(x))x)f(x))dtdx \geq$$

$$\int_0^T \int_{\{x:f^*(x)>0\}} g(t,x)u'(c)(f^*(x)-f(x))dtdx + \int_0^T \int_{\{x:f^*(x)=0\}} g(t,x)u'(c)f(x))dtdx =$$

$$\int_0^T u'(c)\int_{\{x:f^*(x)>0\}} g(t,x)f^*(x)dtdx + \int_0^T u'(c)\int_{\{x:f^*(x)=0\}} g(t,x)f(x)dtdx = 0.$$

W pierwszej nierówności skorzystaliśmy z wklęsłości funkcji u, a w drugiej z tego, że jeśli $f^*(x) = 0$, to $(1 - s(x) - f^*(x))x \leq c$.

Żadna dopuszczalna funkcja sterująca f nie jest lepsza niż f^*, a zatem f^* jest rozwiązaniem optymalnym zadania (42)–(46). Podobnie jak w uproszczonym modelu dynamicznym, optymalna stopa podatkowa charakteryzuje się tym, że suma podatków i inwestycji podatników powinna rosnąć progresywnie wraz ze wzrostem ich dochodów.

IV. WNIOSKI

Teoria sterowania optymalnego umożliwia wyznaczenie takiej progresji podatkowej, która pozwala osiągnąć maksymalny dobrobyt społeczny, i jednocześnie zapewnia wpływ do budżetu określonej wysokości dochodów z tytułu opodatkowania obywateli. Jak się okazuje, jeżeli wszyscy obywatele mają taką samą funkcję użyteczności i jeżeli nie uwzględniamy akumulacji kapitału podatników, to zgodnie z neoklasyczną teorią ekonomii stopa podatkowa powinna charakteryzować się wysoką progresją – taką, aby użyteczności krańcowe dochodów netto wszystkich jednostek wyrównywały się (na co ma oczywiście wpływ kształt społecznej funkcji użyteczności). Wniosek ten zostaje nieco złagodzony, jeśli dopuścimy, że każdy członek społeczeństwa ma swoją indywidualną funkcję użyteczności. Przy takim założeniu optymalna stopa podatkowa jest kształtowana w myśl zasady, że średnia krańcowa użyteczność dochodu netto grup społecznych o różnych dochodach jest proporcjonalna do liczebności tych grup. Jeśli zatem zamożniejsi obywatele stanowią tylko nieliczną część całego społeczeństwa i jeżeli w ich grupie jest większy niż w całym społeczeństwie odsetek takich osób, u których użyteczność krańcowa dochodu wolno maleje (osoby takie mają niską awersję do ryzyka), to stopa podatkowa w tej grupie społecznej może być niższa, niżby to wynikało z modelu z jednakowymi funkcjami użyteczności. Niemniej nawet w tak zmodyfikowanym modelu występuje progresja podatkowa.

Wyniki nie zmieniają się istotnie po uwzględnieniu dynamiki dochodów (kapitału) obywateli. Również wówczas optymalna stopa podatkowa jest progresywna. Progresja dotyczy jednak s u m y oszczędności (inwestycji) i podatków. Najlepszym systemem podatkowym, wyznaczonym na podstawie modeli dynamicznych, jest więc system progresywny z zachętami do inwestycji. Należy zauważyć, że zachęty te powinny być jeszcze silniejsze niż stosowane w polskim systemie podatkowym. Ulga inwestycyjna oznacza bowiem w polskim systemie zwolnienie z opodatkowania tylko części dochodu, przeznaczonej na inwestycje, podczas gdy w systemie optymalnym inwestycje powinny być traktowane jak podatek zapłacony. Stosując ulgę inwestycyjną, kwotę inwestycji odliczamy od p o d s t a w y podatku (lub, co na jedno wychodzi, od podatku odlicza się sumę inwestycji przemnożoną przez stopę podatkową). W optymalnym systemie podatkowym proponowanym w naszym modelu inwestycje odlicza się od k w o t y podatku.

Reasumując, optymalny system podatkowy powinien mieć dwie kalwińskie cechy: 1) sprzyjać temu, aby część dochodu przeznaczanego na konsumpcję była w społeczeństwie możliwie taka sama (tj. system pownien ograniczać nadmierną konsumpcję) oraz 2) silnie promować oszczędności (inwestycje)[3]. Z tego punktu widzenia nie znajduje głębokiego uzasadnienia dyskutowana ostatnio w Polsce idea podatku liniowego, o ile w ślad za nią nie pójdzie system bodźców ekonomicznych mobilizujących do podejmowania inwestycji rozwojowych uzupełniających podatek liniowy do poziomu wyznaczonej progresji optymalnej. W świetle otrzymanych wyników decyzje władz podatkowych w zakresie opodatkowania oszczędności czy redukcji ulg inwestycyjnych, a także plany opodatkowania dochodów giełdowych są szkodliwe z punktu widzenia długookresowej maksymalizacji dobrobytu społecznego.

Prof. dr hab. Emil Panek jest pracownikiem
Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
emil.panek@ae.poznan.pl

Dr Paweł Kliber jest adiunktem
Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
p.kliber@ae.poznan.pl

OPTIMAL TAX PROGRESSION

Summary

In this paper we try to find the optimal income tax system. The government must collect a certain amount of tax. The society consists of people with different wealth. The problem is to find an appropriate tax rate for every level of wealth so that the total social utility (measured as the sum of the personal utilities) is maximised. We consider two different tax models – a static one and a dynamic one. It turns out that the best tax system is progressive. However, if we consider its dynamics, we find that such a system should offer large tax reliefs for investments.

[3] Zob. M. Weber, *The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism*, George Allen & Unwin Ltd, Guilford, 1976.