EGON VIELROSE

MIKRO- I MAKROEKONOMICZNE FUNKCJE PRODUKCJI

1. Jako funkcję produkcji rozumiemy taką funkcję, która daje związek między wielkością produkcji a wielkością nakładów na produkcję. Funkcje produkcji wyznacza się zarówno dla poszczególnych przedsiębiorstw, jak też dla zespołów przedsiębiorstw, np. dla całych gałęzi przemysłu lub dla całego rolnictwa. Można więc mówić o funkcjach produkcji mikro- i makroekonomicznych.

Sens funkcji produkcji dla poszczególnych przedsiębiorstw jest zupełnie jasny. Funkcja taka pozwala stwierdzić jednoznacznie, w jakim kierunku i o ile zmienią się rozmiary produkcji, gdy zmieni się wielkość poszczególnych nakładów. Można by co prawda wysunąć zastrzeżenie, że taka sama co do wielkości zmiana danego rodzaju nakładów daje zależnie od sposobu jej przeprowadzenia różne co do wielkości zmiany produkcji, np. nowo przyjętych pracowników można kierować zarówno do produkcji, jak też do brygady remontowej czy do transportu wewnątrzzakładowego. Wzrost rozmiarów produkcji będzie oczywiście za każdym razem inny. Jeżeli jednak założymy, że spośród wszystkich możliwości realizowany jest zawsze wariant dający największy przyrost produkcji, tzn. wariant najbardziej sprawny, to wynika stąd bezpośrednio jednoznaczność funkcji produkcji dla przedsiębiorstwa.

Zupełnie inna jest sytuacja, gdy rozpatrujemy kilka lub wiele przedsiębiorstw łącznie. Operujemy wtedy łączną produkcją, łącznym zatrudnieniem i łącznymi nakładami innych czynników produkcji. Przyrost łącznego zatrudnienia może się wtedy koncentrować w jednym przedsiębiorstwie lub rozkładać się na wiele przedsiębiorstw. Zależnie od tego kształtuje się przyrost produkcji. Jeżeli zatrudnienie zwiększa się w przedsiębiorstwach najbardziej sprawnych, to uzyskany dzięki temu przyrost produkcji będzie stosunkowo znaczny, jeżeli natomiast wzrost zatrudnienia dotyczy przedsiębiorstw niezbyt sprawnych, to produkcja wzrośnie w mniejszym stopniu. Tutaj nie możemy już zakładać, że wzrost zatrudnienia odbywa się właśnie w przedsiębiorstwach najsprawniejszych, zależy to bowiem od wielu czynników, zarówno ekonomicznych, jak też pozaekonomicznych. Te same uwagi dotyczą oczywiście spadku zatrudnienia, jak również zmiany wielkości jakiegokolwiek rodzaju nakładów.

Innym zagadnieniem, które także sprawia wiele trudności i prowadzi do zaciemnienia istotnego stanu rzeczy, jest agregacja. Sposób agregacji powinien być zawsze uzależniony od postaci funkcji produkcji. Jeżeli funkcja produkcji jest liniowa względem nakładów, to agregacja polega na sumowaniu; przy potęgowej funkcji produkcji właściwym sposobem agregacji byłoby natomiast mnożenie. Otóż liniowa funkcja produkcji w żadnym razie nie jest zgodna z danymi empirycznymi, a nawet intuicyjnie wydaje się całkowicie nierealistyczna. Przy takiej postaci funkcyjnej bowiem efekt nakładu jednego czynnika produkcji nie byłby zależny od wielkości nakładów innych czynników, np. efekt zwiększenia zatrudnienia o 10 osób byłby niezależny od tego, czy zakład jest mniej lub więcej wyposażony w maszyny i urządzenia techniczne. Stąd wniosek, że sumowanie nie jest z pewnością właściwą metodą agregacji. Ale dane empiryczne są podawane właśnie w postaci sum; mamy więc łączną produkcję w danej gałęzi produkcji, łączne zatrudnienie, łączną wartość środków trwałych itd. Nigdy natomiast dane liczbowe nie są publikowane w taki sposób, żeby odpowiadały potęgowej funkcji produkcji. Wymagałoby to bowiem obliczenia iloczynu produkcji we wszystkich zakładach danej gałęzi, iloczynu zatrudnienia w tych zakładach, iloczynu wartości zużytych środków trwałych itd. Nieprzestrzeganie tego warunku stanowi jednak źródło dalszych niejasności i wywołuje zniekształcenie istotnie zachodzących zależności ilościowych.

W niniejszym artykule chcielibyśmy najpierw na podstawie przykładów liczbowych wykazać następstwa wynikające z operowania danymi liczbowymi zagregowanymi w sposób niewłaściwy, tzn. przez sumowanie. Wyprzędzając dalsze wywody stwierdzimy tutaj, że obliczanie funkcji produkcji na podstawie takich danych może doprowadzić do wniosków całkowicie błędnych, a nawet nonsensowych. Zatem w zasadzie należy się opierać wyłącznie na danych dotyczących poszczególnych zakładów (albo na danych reprezentujących choćby w przybliżony sposób poszczególne zakłady).

Przykłady będą fikcyjne, ale dobieraliśmy je w taki sposób, żeby możliwie jak najwyraźniej świadczyły o prawdziwości wysuwanych przez nas tez. Jest rzeczą jasną, że w rzeczywistości sytuacja może nie być tak krańcowa, jak w tych przykładach, ale chodzi nam przede wszystkim o wnioski natury jakościowej, a nie ilościowej.

Na podstawie tych przykładów zaproponujemy pewną metodę wstępnego przetwarzania danych statystycznych, która według naszych doświadczeń pozwala na wyznaczanie funkcji produkcji w sposób nie budzący tylu zastrzeżeń. W szczególności postaramy się wyeliminować trudności wynikające z agregacji przez sumowanie. Na konkretnych przykładach pokażemy zastosowanie tej metody.

2. Będziemy operowali w przykładach jednolitą funkcją produkcji dla

wszystkich przedsiębiorstw, której wzór ogólny jest następujący:

$$P = C^{0,4}L^{0,8}, \tag{1}$$

gdzie P oznacza produkcję, C — nakłady pracy uprzedmiotowionej, czyli zużycie środków trwałych, L — nakłady pracy żywej. Wszystkie te wielkości są mierzone w takich jednostkach, że dla C=1, L=1 jest również P=1. Suma wykładników potęgowych przy C i L wynosi 1,2, mamy więc do czynienia z rosnącą wydajnością nakładów.

Będziemy operowali pewną niewielką ilością typów przedsiębiorstw różniących się między sobą wartościami C, L, a zatem także P. Typy te przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Typy przedsiębiorstw

Typ nr	C	L	P
1	10	10	15,85
2	20	10	20,91
3	10	20	27,59
4	30	30	59,23
5	30	20	42,82
6	40	30	66,45

Przykład 1. W okresie I mamy 30 przedsiębiorstw typu 1, w okresie II — 15 przedsiębiorstw typu 2 i 15 przedsiębiorstw typu 3, a w okresie III — 10 przedsiębiorstw typu 4. Zachodzi więc stopniowa koncentracja produkcji połączona ze zmniejszeniem się liczby przedsiębiorstw z 30 w okresie I do 20 w okresie II i do 10 w okresie III. Z tabeli 1 wyznaczamy odpowiednie łączne rozmiary wielkości C, L i P (tzn. wielkości analogiczne do tych, jakie można znaleźć zazwyczaj w materiałach statystycznych).

Tabela 2

Dane do przykładu 1

Okres	Liczba przedsiębiorstw N	ΣC	ΣL	ΣP
I	30	300	300	475,5
II	20	300	300	485,0
III	10	300	300	592,3

Tym samym łącznym rozmiarom obu rodzajów nakładów — tj. zużycia środków trwałych i pracownikogodzin — odpowiada więc w każdym okresie inna wielkość produkcji. Gdybyśmy operowali tylko zagregowanymi wielkościami i chcieli na podstawie danych dla tych trzech okresów wyznaczyć funkcję produkcji według ogólnego wzoru Cobba—Douglasa:

$$P = AC^{\alpha}L^{\beta} \tag{2}$$

zawierającego trzy parametry, to wszelkie usiłowania spełzłyby na niczym. Wypływa to stąd, że na podstawie danych dla tych trzech okresów możemy sformułować trzy równania, z których należałoby wyznaczyć trzy parametry *A*, α i β, a równania te są sprzeczne, ponieważ ich lewe strony są różne, a prawe dokładnie jednakowe. Gdybyśmy natomiast przeliczyli dane z tabeli 2 na jedno przedsiębiorstwo, to otrzymalibyśmy liczby tego rodzaju, że można by na ich podstawie wyprowadzić parametry funkcji produkcji.

Tabela 3

Dane tabeli 2 przeliczone na jedno przedsiębiorstwo

Okres	$\frac{\Sigma C}{N}$	$\frac{\Sigma L}{N}$	$\frac{\Sigma P}{N}$
I	10	10	15,85
II	15	15	24,25
III	30	30	59,23

Wobec tego, że tutaj stale $\Sigma C : \Sigma L = 1$ dla wszystkich trzech okresów, zatem nie można wyznaczyć oddzielnie wartości wykładników α *i* β, ale tylko ich sumę $\alpha+\beta$. W związku z tym nie można stosować wszystkich trzech równań jednocześnie, jeżeli nie korzystamy np. z metody najmniejszych kwadratów, ale należy brać tylko po dwa równania.

Równania dla poszczególnych okresów otrzymujemy ogólnie na podstawie zlogarytmowanego wzoru (2), co daje:

$$\log P = \log A + \alpha \log C + \beta \log L \tag{4}$$

Podstawiając kolejno wartości dotyczące okresu I, II i III, otrzymujemy stąd trzy równania:

$$\log A + \alpha + \beta = 1{,}2 \tag{4a}$$

$$\log A + 1{,}17609\alpha + 1{,}17609\beta = 1{,}38471 \tag{4b}$$

$$\log A + 1{,}47712\alpha + 1{,}47712\beta = 1{,}77254 \tag{4c}$$

Będziemy teraz obliczali wielkości *A i* $\alpha + \beta$ *na* podstawie dwóch spośród trzech równań. Istnieją oczywiście trzy możliwości, mianowicie: równania (4a) i (4b), równania (4a) i (4c), oraz równania (4b) i (4c). Rozpatrzmy je kolejno.

Odejmując stronami równanie (4a) od (4b) otrzymujemy:

$$0{,}17609\ (\alpha+\beta)=0{,}18471$$

skąd

$$\alpha+\beta=1{,}05$$

a więc

$$\log A=0{,}15$$

czyli

$$A=1{,}413$$

Z równań (4a) i (4c) otrzymujemy analogicznie:

$$\alpha+\beta=1{,}2 \qquad A=1$$

a z równań (4b) i (4c)

$$\alpha+\beta=1{,}27 \qquad A=0{,}923$$

Odpowiednie wartości dla mikrofunkcji produkcji zgodnie z wzorem (1) wynoszą:

$$\alpha+\beta=1{,}2 \qquad A=1$$

Gdybyśmy zastosowali metodę najmniejszych kwadratów, to moglibyśmy uwzględnić dane dla wszystkich trzech okresów. Otrzymalibyśmy wtedy:

$$\alpha+\beta=1{,}21 \qquad A=0{,}865.$$

Otrzymane wartości są więc niezbyt dalekie od wartości przyjętych za podstawę, a w każdym razie są logicznie do przyjęcia, podczas gdy opierając się na danych zagregowanych w ogóle nie można było otrzymać żadnych, nawet najbardziej niedokładnych wartości parametrów.

Można by podać przykład jeszcze bardziej „złośliwy", gdzie nawet przeciętne na jedno przedsiębiorstwo na dałyby wyników choćby w przybliżeniu zgodnych z mikroekonomiczną funkcją produkcji. Przykład taki byłby jednak nieco sztuczny i tutaj poprzestajemy tylko na zasygnalizowaniu tego rodzaju możliwości.

P r z y k ł a d 2 . W okresie I mamy 40 przedsiębiorstw typu 1, w okresie II — 25 przedsiębiorstw typu 5 i w okresie III — 20 przedsiębiorstw typu 6. Otrzymujemy stąd zestawienie (tab. 4).

Tabela 4

Dane do przykładu 2

Okres	N	ΣC	ΣL	ΣP
I	40	400	400	634,0
II	25	750	500	1070,5
III	20	800	600	1329,0

Tutaj już można wyznaczyć wszystkie trzy parametry A, α i β. Otrzymujemy wartości następujące:

$$\alpha = 0{,}471$$

$$\beta = 1{,}021$$

$$A = 0{,}0831$$

Suma wykładników potęgowych jest znacznie wyższa niż w funkcji mikroekonomicznej. Wartość parametru A jest natomiast kilkanaście razy mniejsza.

Gdybyśmy przeliczyli wielkości dla każdego roku na jedno przedsiębiorstwo i do tych danych zastosowali te same metody co poprzednio, to otrzymalibyśmy dokładnie wyjściową mikroekonomiczną funkcję produkcji.

Przykład 3. W okresie I mamy 20 przedsiębiorstw typu 1, w okresie II — 15 przedsiębiorstw typu 2, a w okresie III — 10 przedsiębiorstw typu 6.

Tabela 5

Dane do przykładu 3

Okres	N	ΣC	ΣL	ΣP
I	20	200	200	317
II	15	300	150	314
III	10	100	300	382

Wartości parametrów funkcji produkcji uzyskane na podstawie tych danych wynoszą:

$$\alpha = -1{,}406$$

$$\beta = -1{,}945$$

$$A = 1{,}628 \cdot 10^{11}$$

Takie rozwiązanie oczywiście nie ma żadnego sensu, bo ujemne wykładniki potęgowe zawsze należy uznać za niedopuszczalne (chociaż w literaturze cytuje się czasem takie wykładniki ujemne). Tak samo niemożliwa jest aż tak wysoka wartość współczynnika A. Rozwiązanie jest więc tylko formalnie prawidłowe, ale nie do przyjęcia logicznie. Na podstawie wielkości przeliczonych na jedno przedsiębiorstwo otrzymalibyśmy znowu wyniki całkowicie dokładne. Opierając się na tych przykładach można sformułować następujące wnioski:

a) agregowanie danych przez sumowanie nie odpowiada możliwej do przyjęcia postaci funkcji produkcji, w związku z czym dane zagregowane czasem nie pozwalają na wyznaczenie funkcji produkcji, prowadząc do wyników bez sensu lub też dają wyniki wysoce niezgodne z mikroekonomiczną funkcją produkcji;

b) przeliczanie danych zagregowanych na jeden zakład pozwala natomiast wyznaczyć parametry funkcji produkcji w sposób bardziej zadowalający;

c) wobec tego, że w badaniach funkcji produkcji typu (2) najbardziej podstawowe znaczenie mają wykładniki potęgowe, a te wyznacza się stosunkowo dokładnie na podstawie danych dla poszczególnych przedsiębiorstw, zatem wydaje się celowe przyjmować do obliczeń dane przeliczone na jedno przedsiębiorstwo, ponieważ prowadzi to do wyników bardziej wiarygodnych niż operowanie danymi łącznymi dla wielu przedsiębiorstw.

Na podstawie tych wniosków będziemy teraz próbowali wyznaczyć funkcje produkcji dla poszczególnych gałęzi przemysłu w Polsce.

3. Wszystkie gałęzie przemysłu można podzielić na trzy grupy zależnie od tego, czy zwiększenie (nakładów powoduje wzrost wydajności produkcji, spadek wydajności produkcji czy też nie wywołuje żadnej zmiany wydajności. W związku z tym gałęzie przemysłu rozpadają się na cztery wyraźnie różniące się typy:

a) Gałęzie, które wytwarzają produkcję jednorodną drogą przetwarzania surowca na jednym lub na kilku agregatach powiązanych między sobą technologicznie, których wydajność zależy od stopnia nowoczesności konstrukcji i od wielkości agregatu. W tych gałęziach dominują fizyko-chemiczne procesy przetwarzania surowców, moce produkcyjne zmieniają się w sposób nieciągły (przez uruchamianie lub wyłączanie jednego lub wielu agregatów), a efektywność zwiększenia skali produkcji jest wysoka. Należy tutaj energetyka, hutnictwo żelaza i metali nieżelaznych przemysł cementowy, drzewny i naftowy.

b) Gałęzie wytwarzające jednorodną produkcję przy użyciu głównie procesów mechanicznych, gdzie w zakładzie zainstalowane są wielkie ilości jednorodnych urządzeń, których wydajność zależy przed wszystkim od jakości ich konstrukcji, a wielkość przedsiębiorstwa jest wyznaczona przez ilość urządzeń mających te same rozmiary i tę samą moc. Tutaj należy wymienić przede wszystkim przemysł włókienniczy.

c) Gałęzie przemysłu wytwarzające bardzo zróżnicowaną i wieloasortymentową produkcję, w których każde przedsiębiorstwo składa się z wielu małych i technologicznie różniących się działów, a efektywność wykorzystania zasobów zależy przede wszystkim od specjalizacji, a nie od rozmiarów całego przedsiębiorstwa. Tutaj specjalizacja może się łączyć ze zmniejszeniem średnich rozmiarów przedsiębiorstwa. Do tych gałęzi należy np. przemysł budowy maszyn i przemysł elektrotechniczny.

d) Górnictwo, gdzie optymalna skala produkcji zależy w znacznym stopniu od wielkości zasobów naturalnych i od warunków ich eksploatacji.

Gałęzie przemysłu pierwszego typu i nowe działy górnictwa wykazują z reguły rosnącą efektywność zwiększenia skali produkcji. W starych działach górnictwa przeważa malejąca efektywność. Gałęzie należące do typu drugiego i trzeciego wykazują po części efektywność rosnącą, a po części efektywność malejącą przy zwiększaniu produkcji.

W ogólnych zarysach będziemy mogli sprawdzić te prawidłowości na danych dotyczących przemysłu w Polsce. Klasyfikacja przemysłu — jeżeli chodzi o zasób danych, jakimi będziemy się posługiwali — jest jednak niezbyt szczegółowa, tak że różnice, które przy szczegółowym rozbiciu ujawniłyby się wyraźnie, mogą występować w słabszym stopniu lub też mogą nawet wcale nie wystąpić wskutek zbyt daleko posuniętego procesu łączenia gałęzi przemysłu.

4. Aby można było wyznaczyć funkcję produkcji dla pewnej grupy zakładów, muszą być spełnione zupełnie określone warunki. Technologia stosowana przez te zakłady powinna być ta sama, a stosunki ilościowe między wielkością nakładów poszczególnych czynników produkcji a wielkością produkcji powinny być w przybliżeniu jednakowe.

Nie znając dobrze przemysłu nie można jednak z góry przewidzieć, czy te warunki są spełnione w danym konkretnym przypadku. Postawiliśmy więc zagadnienie inaczej, od przeciwnej strony: jeżeli wyniki obliczeń okażą się logicznie nie do przyjęcia, będziemy uważali, że warunki, przy jakich wolno wyznaczać funkcje produkcji, nie są spełnione. Jeżeli natomiast otrzymana funkcja produkcji będzie w sposób zadowalający zgodna z danymi empirycznymi i logicznie będzie do przyjęcia, to uznamy, że warunki podane wyżej są spełnione.

Próbę wyznaczenia funkcji produkcji przeprowadziliśmy dla poszczególnych gałęzi przemysłu w Polsce dla r. 1965 (rachunki wstępne za lata wcześniejsze nie dały wyników zadowalających). Oparliśmy się na danych wojewódzkich. Znaczy to, że za podstawę przyjęliśmy dane przekrojowe, a nie szeregi chronologiczne.

Postać funkcyjną funkcji produkcji przyjęliśmy zgodnie z wzorem (2). Jest to funkcja produkcji Cobba—Douglasa. Postać tę przyjęliśmy dlatego, że jest najprostsza spośród funkcji stosowanych obecnie, a ponadto jakość danych liczbowych, jakimi rozporządzaliśmy, była niezbyt dobra, co nie uzasadnia stosowania jakichś bardziej wyszukanych wzorów i metod.

W funkcji produkcji Cobba—Douglasa występują trzy zmienne: wielkość pracy uprzedmiotowionej, wielkość pracy żywej i wielkość produkcji. Zmienne te trzeba w jakiś sposób statystycznie uchwycić. W zasadzie zmienne powinny być strumieniami, a nie stanami, ze względów praktycznych jednak czasami jesteśmy zmuszeni odstąpić od tej reguły.

Jako zmienną charakteryzującą wielkość pracy uprzedmiotowionej przyjęliśmy wartość początkową środków trwałych. Byłoby bardziej prawidłowe dać tutaj zużycie środków trwałych w danym roku. Jednak takimi informacjami nie rozporządzaliśmy. Ponadto operujemy poszczególnymi gałęziami przemysłu, wobec czego można uważać, że zużycie w poszczególnych województwach w tej samej gałęzi przemysłu jest w przybliżeniu proporcjonalne do wartości środków trwałych. Uwzględniliśmy przy tym wartość początkową środków trwałych, ponieważ uważaliśmy, że bieżące wydatki na remont i utrzymanie urządzeń sprawiają, że ich moce produkcyjne pozostają takie same, jak w chwili nabycia tych urządzeń. Wobec tego moc można scharakteryzować wartością początkową urządzeń. Przy tym nie zostały nigdzie opublikowane dane o zużyciu środków trwałych w poszczególnych gałęziach przemysłu w przekroju wojewódzkim.

Jako miarę wielkości pracy żywej przyjmujemy liczbę zatrudnionych. Nie jest to w zasadzie dobra miara, ponieważ bardziej właściwa byłaby liczba przeprowadzonych godzin czy dni (a więc strumień), a ponadto nie uwzględnia się charakteru pracy, wymagającej większych lub mniejszych kwalifikacji załogi, pomija się także stopień wykorzystania załogi. Ponieważ jednak w każdej gałęzi wziętej oddzielnie warunki pod tym względem układają się raczej dość jednolicie, zatem nie powinno być z tego tytułu żadnych znaczniejszych błędów w wynikach ostatecznych.

Za miarę wielkości produkcji przyjęliśmy produkt globalny. Można by uważać, że należałoby stosować raczej produkt czysty. Z punktu widzenia teoretycznego byłoby to na pewno słuszne. Ale nie posiadamy informacji o rozmiarach produktu czystego według gałęzi przemysłu i województw, posiadamy natomiast informacje o produkcie globalnym w takim właśnie przekroju gałęziowo-terytorialnym. Można przypuszczać, że dla danej gałęzi przemysłu produkt czysty będzie stanowił wszędzie mniej więcej ustaloną część produktu globalnego. A ponieważ istotne są dla nas raczej stosunki, a w mniejszym stopniu wielkości absolutne, więc wystarczą w zupełności dane o produkcji globalnej. Przez zastosowanie stałego mnożnika (który daje się obliczyć na podstawie istniejących danych, ale tylko jednolicie dla wszystkich województw) dla każdej poszczególnej gałęzi można przejść od wartości produktu globalnego do wartości produktu czystego.

Wszystkie dane, które przyjęliśmy do obliczeń, dotyczą przemysłu uspołecznionego, obejmują więc w pewnych przypadkach całą gałąź przemysłu, a w innych — większą część gałęzi.

Dane dla każdej gałęzi przemysłu dotyczące tych trzech zmiennych są sklasyfikowane według województw. Znaczy to, że dla każdego województwa znamy łączną liczbę zatrudnionych, łączną wartość środków trwałych i łączny produkt globalny w danej gałęzi przemysłu. Mając liczbę przedsiębiorstw w każdym województwie, możemy obliczyć dla każdego województwa przeciętne zatrudnienie na jedno przedsiębiorstwo, przeciętną wartość środków trwałych na jedno przedsiębiorstwo i przeciętną wartość produkcji globalnej na jedno przedsiębiorstwo.

Stosujemy więc przeciętne arytmetyczne. Jest to jednak niezgodne z postacią funkcji produkcji, jaką przyjmujemy do obliczeń, tzn. z funkcją Gobba—Douglasa. Funkcja ta wymaga bowiem przy agregacji liczenia średnich geometrycznych. Obliczając średnie arytmetyczne wprowadzamy pewien błąd. Można jednak udowodnić, że jeżeli dyspersja nie jest wielka, to zależność między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną ma postać

$$G = A\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{A^2}\right), \tag{5}$$

skąd w przybliżeniu

$$\frac{A}{G} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^2. \tag{6}$$

Błąd jest więc in plus i równa się w przybliżeniu połowie kwadratu współczynnika zmienności. Jeżeli współczynnik zmienności jest taki sam dla produkcji, zatrudnienia i środków trwałych, to stosunkowe błędy dla tych trzech wielkości są w przybliżeniu jednakowe i można je pominąć. W tych warunkach stosowanie średnich arytmetycznych jest dopuszczalne.

5. Na podstawie danych, o których była poprzednio mowa, wyznaczyliśmy parametry funkcji Cobba—Douglasa metodą najmniejszych kwadratów. Stopień zgodności danych empirycznych z funkcją mierzyliśmy za pomocą współczynnika determinacji wielokrotnej, który oznacza, jaką część całkowitej wariancji wyjaśnia funkcja. Współczynik determinacji (kwadrat współczynnika korelacji wielokrotnej, który oznaczamy przez $R^2_{P(CL)}$, jest związany ze współczynnikami korelacji całkowitej i częściowej zależnością:

$$1 - R^2_{P(CL)} = (1 - r^2_{PC})\,(1 - r^2_{PL\cdot C}).$$

Po pewnych prostych przekształceniach można ten wzór przedstawić w postaci:

$$1 - R^2_{P(CL)} = \frac{1 - r^2_{PC} - r^2_{PL} - r^2_{CL} : 2\, r_{PC}\, r_{PL}\, r_{CL}}{1 - r^2_{CL}}.$$

W tym wzorze licznik jest symetryczny względem wszystkich trzech zmiennych. Można stąd uzyskać wzór dogodny przy obliczeniach numerycznych, który daje bezpośrednio współczynnik determinacji:

$$R^2_{P(CL)} = \frac{r^2_{PC} + r^2_{PL} - 2\, r_{PC}\, r_{PL}\, r_{CL}}{1 - r^2_{CL}}.$$

Wzór ten jednak nie jest symetryczny względem zmiennych.

Wyniki obliczeń dające wartość parametrów funkcji Cobba—Douglasa oraz współczynniki determinacji dla poszczególnych gałęzi przemysłu zamieszczamy poniżej.

Tabela 6

Parametry funkcji produkcji

Gałąź przemysłu	A	α	β	$\alpha+\beta$	R^2
Wytwarzanie energii elektrycznej i cieplnej	0,070	0,611	0,402	1,013	0,155
Przemysł maszyn i konstrukcji metalowych	0,234	0,652	0,430	1,082	0,960
Przemysł elektrotechniczny	0,217	0,855	0,234	1,089	0,937
Przemysł środków transportu	2,09	0,012	0,861	0,873	0,854
Przemysł metalowy	0,289	0,738	0,235	0,973	0,972
Przemysł chemiczny	1,42	0,181	0,671	0,852	0,829
Przemysł gumowy	0,681	0,550	0,454	1,004	0,890
Przemysł materiałów budowlanych	0,050	1,074	0,203	1,277	0,867
Przemysł szklarski	0,083	0,995	0,063	1,058	0,875
Przemysł drzewny	0,074	1,115	0,164	1,279	0,905
Przemysł papierniczy	0,147	0,845	0,250	1,095	0,988
Przemysł poligraficzny	0,135	0,886	0,125	1,011	0,888
Przemysł włókienniczy	0,043	0,978	0,309	1,117	0,950
Przemysł odzieżowy	0,128	1,023	0,309	1,332	0,931
Przemysł skórzano-obuwniczy	0,157	0,945	0,101	1,046	0,924
Przemysł spożywczy	0,671	0,572	0,475	1,047	0,973

Z dalszych rozważań wykluczamy od razu wytwarzanie energii elektrycznej i cieplnej, ze względu na bardzo niski współczynnik determinacji. Współczynnik ten, wynoszący zaledwie 0,155, wskazuje, że zgodność funkcji Cobba—Douglasa z danymi empirycznymi jest słaba. Wyprowadzamy stąd wniosek, że nie są spełnione założenia, które muszą być spełnione, aby wolno było obliczać parametry funkcji produkcji. Mówiąc inaczej, gałąź ta jest wyraźnie niejednorodna i należałoby ją jeszcze rozdzielić na poddziały, aby dla każdego z nich wyznaczyć odrębną funkcję produkcji. Wiadomo bowiem, że elektrownie mają bardzo różny wiek i dlatego różnią się znacznie pod względem technologicznym. Skutek jest taki, że nie można wyprowadzić dla nich jednej funkcji produkcji.

Współczynniki determinacji dla pozostałych gałęzi przemysłu są wszystkie wysokie, przekraczają bowiem 0,8 a w kilku przypadkach są bliskie jedności.

Wykładnik potęgowy α jest równy elastyczności produkcji względem nakładów pracy uprzedmiotowionej, a wykładnik β jest elastycznością produkcji względem nakładów pracy żywej. Suma tych wykładników również ma bardzo istotne znaczenie jako charakterystyka poszczególnych gałęzi przemysłu. Jeżeli mianowicie $\alpha+\beta<1$, to produkcja wzrasta wolniej niż nakłady, jeżeli $\alpha+\beta>1$, to produkcja wzrasta w tempie szybszym niż nakłady, a jeżeli $\alpha+\beta=1$, to produkcja wzrasta w tym samym tempie co nakłady. Mówimy wtedy również o rosnącej, malejącej czy niezmiennej wydajności produkcji lub o rosnącej, malejącej czy niezmiennej efektywności zwiększenia produkcji.

Wysoką elastyczność produkcji względem nakładów pracy żywej wykazuje przemysł drzewny, przemysł materiałów budowlanych i przemysł odzieżowy. W tych trzech gałęziach elastyczność jest wyższa od jedności, tzn. że wzrost zatrudnienia wywołuje więcej niż proporcjonalny wzrost produkcji nawet wtedy, gdy nie zwiększają się środki trwałe. Elastyczność względem zatrudnienia bliską jedności wykazuje także przemysł szlarski, włókienniczy i skórzano-obuwniczy. Bardzo niską elastyczność produkcji względem zatrudnienia wykazuje natomiast przemysł środków transportu i przemysł chemiczny. Dość niska jest także elastyczność w przemyśle gumowym i spożywczym.

Wysoką elastyczność produkcji względem nakładów pracy uprzedmiotowionej wykazuje przemysł środków transportu i przemysł chemiczny, a więc te gałęzie, które miały szczególnie niską elastyczność względem zatrudnienia. Bardzo niska jest elastyczność względem środków trwałych w przemyśle szklarskim i skórzano-obuwniczym. Zwraca uwagę fakt, że gałęzie, które wykazywały najwyższą elastyczność względem zatrudnienia, zajmują co do elastyczności względem środków trwałych miejsca środkowe.

Najwyższą efektywność zwiększania produkcji wykazuje przemysł odzieżowy, drzewny i materiałów budowlanych. Ostatnie dwie gałęzie wymieniliśmy już poprzednio wśród tych, które z reguły mają wysoką efektywność. Najniższa jest efektywność zwiększania produkcji w przemyśle chemicznym i środków transportu.

Wydaje się, że zagadnienie należy badać dalej. Obliczenia dla innych lat mogłyby potwierdzić uzyskane wyniki, a dałyby również obraz przesunięć, jakie się dokonują w gospodarce.

Dalszym etapem mogłyby być próby wyznaczenia wpływu postępu technicznego. Sprawa ta jest zupełnie prosta, gdy stosuje się szeregi chronologiczne jako podstawę dla obliczeń. Tutaj jednak opieramy się na danych przekrojowych, wobec czego wyznaczenie wpływu postępu technicznego można by uzyskać tylko drogą pośrednią. Zadanie jest raczej trudne, ale nie niemożliwe do wykonania. Można oczekiwać, że tą drogą uda się rozszerzyć naszą wiedzę o zależnościach ilościowych zachodzących w przemyśle polskim.

MICRO- AND MACROECONOMIC PRODUCTION FUNCTIONS

Summary

There exist both micro- and macroeconomic production functions. Microecoinomic functions concern individual firms whereas macroeconornic functions are valid e.g. for whole industries or branches of national economy.

On the basis of suitably chosen numerical examples it is shown that the usual aggregation procedure by summing sometimes leads to nonsensical, or heavily

biased results. By performing the same computations on data for average firms better results are obtained.

If we use the Cobb-Douglas production function, aggregation must be multiplicative and thus geometric means are appropriate It can be shown, however, that, if the dispersion of the variables involved is small and the respective measures are approximately equal, then arithmetic instead of geometric means can be used.

An attempt is made to evaluate production functions for certain industries in Poland in 1965 on the basis of data concerning average firmis in 22 territorial units (voivodships). In order to use the available data certain assumptions have to be made. If these assumptions are confirmed the goodness of fit must be very satisfactory. Thus it seems very plausible that a good fit proves the assumption to be confirmed.

The goodness of fit is measured by coefficients of determination.

The attempt has proved successful, as is shown by the values of the coefficients of determination which, in some instances, are very close to unity. On the base of these results characteristic features of particular industries are discussed.