

CLAUDE PONSARD*

TEORIA GRAFÓW i OPTYMALNA LOKALIZACJA JEDNOSTKI PRODUKCYJNEJ

W dziedzinie lokalizacji przedsiębiorstwa aż do dnia dzisiejszego dominuje teoria Alfreda Webera (1909), zachowując istotę swej konstrukcji w nowoczesnych sformułowaniach badań tego przedmiotu. Tymczasem ta dobrze znana teoria opiera się na zespole hipotez bardzo ograniczających i stąd granice ważności modelu są sprawdzalne w szczególnie wąskim zakresie. Co więcej, operacyjna wartość tego schematu jest prawie równa zeru¹.

* Claude Ponsard, ur. w 1927 r. w Dijon, studiował w Université de Dijon oraz Ecole Pratique des Hautes Etudes w Paryżu. Na jego koncie naukowym znajdujemy takie podstawowe opracowania, jak: *Economie et espace*, Paris 1955; *Histoire des théories économiques spatiales*, Paris 1958 (przetłumaczona na język angielski w Instytucie Badań Regionalnych w Pensylwanii); *Un modèle topologique d'équilibre économique interrégional*, Paris 1969. Ponadto w co najmniej dwudziestu artykułach znajdujemy wyniki jego badań metodologicznych i teoretycznych na tematy przestrzenne i ekonomiczne.

C. Ponsard jest profesorem na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu w Dijon, dyrektorem Instytutu Matematyki Ekonomicznej na tymże Uniwersytecie oraz redaktorem znakomitego dwumiesięcznika paryskiego *Revue d'Economie Politique*.

W stosunkach z Polską współpracuje z Instytutem Geografii PAN, z Instytutami Geografii przy Uniwersytecie Warszawskim i Wrocławskim, z Instytutem Statystyki i Ekonometrii WSE w Poznaniu, jak również z Zakładem Geografii tej uczelni. Na terenie Francji C. Ponsard jest znakomitym i ofiarnym organizatorem staży naukowych dla polskich naukowców oraz rzecznikiem uczciwej informacji o Polsce Ludowej (S. Borowski).

¹ A. Weber, *Über den Standort der Industrien*, Tübingen 1909. Bardziej nowoczesny wykład teorii zawarty jest w fundamentalnej pracy: W. Isard, *Location and Space Economy*, New York 1956, The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology s. 91 i nast. oraz s. 222 i nast. Dla wykładu w języku francuskim pozwalamy sobie odesłać czytelnika do naszej pracy: C. Ponsard, *Economie et espace*, Paris 1955, S.E.D.E.S., s. 353 i nast., natomiast bibliografię zawiera opracowanie C. Ponsard, *Histoire des théories économiques spatiales*, Paris 1958, s. 187 i nast. oraz najnowsza praca A. Schärliiga, *Localisation optimale et théorie des graphes*, Genève 1970, Cahiers Vilfredo Pareto.

Celem niniejszego studium jest zaprezentowanie w zarysie bardziej ogólnej teorii optymalnej lokalizacji jednostki produkcji za pomocą grafów. Pozwala ona uwzględnić struktury ubogie, to znaczy oparte na hipotezach prostych i nielicznych oraz uzyskiwać rezultaty lepsze i bardziej ogólne aniżeli te, które otrzymujemy przy pomocy klasycznych modeli matematycznych.

Ograniczamy się tutaj do wykładu modelu skonstruowanego dla warunków konkurencji doskonałej. Z tego powodu schemat ten nie ma charakteru operacyjnego. Jednakże opracowanie takiego schematu przynosi ułatwienia, a jego zasadniczy wątek zostaje zachowany w modelach bardziej złożonych i bardziej realistycznych, gdzie indywidualna lokalizacja produkcji zostanie potraktowana w strukturach konkurencji monopolu lub oligopolu. W tym sensie model nasz pojawia się jako schemat elementarny, który w drodze sukcesywnej konkretyzacji i stopniowego wzbogacania staje się odpowiedni do operacyjnego traktowania problemu mikroekonomicznego w warunkach rzeczywistych².

Ograniczając się zatem do modelu elementarnego sprecyzujemy przede wszystkim dokładnie zakres analizy. Z kolei przestudiujemy sytuację optymalną jednostki produkcji w przestrzeni ekonomicznej wstępnie zdefiniowanej.

1. Zakres analizy. Dana struktura konkurencji i jej przestrzenno-charakterystyka pociąga za sobą następujące hipotezy: 1) poszukiwana lokalizacja jest niezależna od innych, a szczególnie od lokalizacji jednostek konkurencyjnych; 2) lokalizacja rozpatrywanej jednostki nie zmienia danych branego pod uwagę modelu (ogółu cen itd.); 3) popyt na produkcję i podaż nakładów dla rozpatrywanej jednostki są nieskończenie elastyczne względem cen, to samo dotyczy podaży usług transportowych, przyporządkowanych nakładom; 4) ceny jednostkowe produkcji i nakładów są dane i różne w każdym miejscu, zaś koszty transportu są dane i zróżnicowane zależnie od tras³; 5) informacja jest doskonała; 6) dany jest rodzaj dóbr, które mają być wytwarzane, należy zaś podkreślić, że produkcja złożona jest traktowana jako jednorazowa; 7) każda rozważana lokalizacja posiada sobie właściwą, techniczną i lokalną funkcję produkcji.

² Pierwszy wykład sformalizowanej teorii został zaprezentowany w *Techniques Economiques Modernes (TEM)* 1966, nr 4. Następnie model ten został rozciągnięty na przypadki konkurencji monopolistycznej i monopolu zupełnego przez Alaina Schärliiga (A. Schärlig, op. cit.), a na przypadki oligopolu przez Maryse Gadreau (M. Gadreau, *Localisation et oligopole*, Collection Essais et Recherches de l'Institut de Mathématiques de Dijon 1970, nr 1, ss. 165).

³ Jeśli chodzi o jakiegokolwiek koszty transportu z punktu widzenia jednostki produkcyjnej nie są one koniecznie proporcjonalne do wagi i odległości jak w modelach weberiańskich.

Funkcją celu przypisaną jednostce produkcyjnej jest maksymalizacja czystego zysku. W gospodarce wolnorynkowej postulat ten jest ogólnie obowiązujący. Z drugiej strony trzeba zauważyć, że postulat ten nie jest konieczny do konstrukcji zamierzonego modelu. Jeśli funkcja celu jest inna i zawiera na przykład maksymalizację ze strony rynku, minimalizację kosztów itd., model można zastosować poprzez odpowiednie adaptacje⁴. W gospodarce planowej zysk może służyć jako kryterium racjonalnego zarządzania jednostką produkującą, a szczególnie dla optymalnego wyboru przy założeniu, że problem czystego rachunku ekonomicznego jest niezależny od problemu przeznaczenia zysku.

W modelu rachunek ekonomiczny funkcji celu jest przeprowadzany w następujących warunkach. Dane są:

(1) zbiór X_i n_1 miejsc podaży nakładów:

$$X_i = \{x_i / i = 1, 2, \dots, n_1\}$$

(2) zbiór X_j n_2 miejsc popytu na wyniki produkcji:

$$X_j = \{x_j / j = 1, 2, \dots, n_2\}$$

(3) zbiór X_K n_3 punktów przejścia:

$$X_K = \{x_K / K = 1, 2, \dots, n_3\}.$$

Wspomniane punkty przejścia są węzłami kolejowymi, portami, przewartami w załadunku, skrzyżowaniami dróg, lotniskami, punktami przeładunku, punktami węzłowymi itd.

(4) Zbiór X_p n_4 „punktów godnych uwagi”

$$X_p = \{x_p / p = 1, 2, \dots, n_4\}.$$

Przez „miejsca godne uwagi” rozumie się miejsca, które reprezentują korzyści ekonomiczne dla lokalizacji (na przykład oszczędności zewnętrzne).

Zbiór X danych miejsc jest zespołem zbiorów od (1) do (4). Jest to zbiór n elementów, przeliczalny i skończony.

$$n \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4.$$

Równość jest spełniona w szczególnym przypadku, gdzie zbiory (1) do (4) są zbiorami rozłącznymi.

Umawiamy się, że oznaczymy przez:

$$(1) \quad X^{g^0} = \{x^{g^0} / g = 1, 2, \dots, h\}$$

⁴ Należy jednakże zweryfikować rachunek tych funkcji celu przy hipotezie doskonałej konkurencji. To ograniczenie, które jest ważne tylko dla modelu elementarnego nie jest stosowane w modelach w warunkach konkurencji niedoskonałej A. Schärliiga i M. Gadreau'a.

zbiór h nakładów

$$(2) \quad X^{om} = \{x^{om}/m=1, 2, \dots, l\}$$

zbiór l wyników produkcji.

Wskaźnik O jest umieszczony po prawej stronie dla wyrażenia, że liczba g oznacza nakład, ten zaś jest umieszczony po lewej stronie, gdy liczba m oznacza wynik produkcji.

W końcu umawiamy się co do dodania na dole wskaźnika i lub wskaźnika j dla oznaczenia miejsc. Tak więc x_i^{g0} oznacza nakład g oferowany w miejscu i . Podobnie x_j^{om} oznacza wynik m , na który jest popyt w miejscu j . Ewentualnie wskaźnik dolny będzie uzupełniony nawiasem z lewej strony, jeśli występuje nadto punkt przejścia, a nawiasem z prawej strony, jeśli jest punkt godny uwagi. Na przykład $x_{(3)}^{40}$ oznacza nakład 4 oferowany w miejscu 3, który jest nadto punktem przejścia i punktem godnym uwagi. Tak samo x_7^{09} oznacza wynik produkcji, na który istnieje popyt w miejscu 9. Oczywiście, w tym samym miejscu może być popyt na więcej niż jeden wynik produkcji oraz w tym samym miejscu można oferować więcej niż jeden nakład.

Jeśli wprowadzi się teraz dane względne do sieci transportowej, która łączy między sobą wierzchołki zbioru X , to zostaje zdefiniowany zbiór zastosowań Γ pod względem X wewnątrz zbioru X i otrzymuje się p -graf $G=(X, \Gamma)$

A zatem rozwiązanie problemu optymalnej lokalizacji będzie zależało od własności p -grafu G . Hipoteza doskonałej konkurencji pociąga za sobą, jako warunek egzystencji, że p -graf byłby mocno połączony, to znaczy, że istnieje co najmniej jedna droga między każdą parą wierzchołków. W wyniku tego wejście do branży nasuwa wniosek, że istnieje co najmniej jedna droga dostępu do każdego wierzchołka, wychodząc z jakiegokolwiek bądź punktu. W sensie ekonomicznym silne powiązanie oznacza możliwość dostępu do źródła nakładów i do miejsc zbytu wyników produkcji.

Ponadto stabilność tej struktury konkurencji zależy od zdolności łączenia rozważanych grafów. Jest ona minimalna, jeśli graf zawiera punkt przegięcia, to znaczy jeden taki punkt, że odrzucając go podgraf pozostający nie łączy. Z punktu widzenia ekonomicznego jest to miejsce nieodzowne dla zagwarantowania dostępu. Można zauważyć, że punkt przejścia niekoniecznie musi być punktem przegięcia, natomiast punkt przegięcia musi być punktem przejścia. Z analogicznych przyczyn stabilność konkurencji jest minimalna, jeśli zniesienie krzywej wystarcza do utraty swojej łączności przez podgraf pozostający, to znaczy jeśli graf jest minimalnie połączony. Bardziej ogólnie: stopień tej stabilności rośnie przede wszystkim z liczbą łączności grafu, to znaczy z minimalną liczbą wierzchołków w zbiorze punktów przegięcia. Dalej, w przypadku grafu h łącznego, stopień stabilności jest o tyle wyższy o ile h jest większe,

ponieważ należy odrzucić co najmniej h krzywych dla rozłączenia tego grafu.

Wyjątek uczyniono od własności silnego łączenia, który wynika z hipotezy konkurencji; graf G może dopuścić jakiegokolwiek charakterystyki bez innych ograniczeń⁵.

Przestrzeń ekonomiczna, w której jednostka produkcyjna szuka swojej najlepszej lokalizacji, jest więc sformalizowana, należy teraz określić optymalną pozycję tej jednostki.

2. O p t y m a l n a p o z y c j a j e d n o s t k i p r o d u k c y j n e j .
Określenie miejsca, w którym czysty zysk jednostki produkcyjnej jest maksymalny, wynika z podwójnego wyboru. Należy przede wszystkim wybrać kombinację nakładów produkcyjnych i nakładów transportowych, która daje koszt minimalny. Następnie należy określić przyszłe wyniki produkcji. W każdym punkcie lokalna funkcja produkcji daje zbiór rozwiązań technicznie optymalnych. Wśród nich wyznacza się kombinację kosztów minimalnych przy pomocy cen relatywnych nakładów do kosztów transportu. Koszty te (czyste koszty transportowe wyników produkcji) i dochody połączone z różnymi poziomami produkcji określają optymalne wielkości produkcji, to znaczy takie, które są zgodne z realizacją celu zysku.

Warunek pierwszy, który powinien być spełniony, dotyczy więc zaopatrzenia w nakłady. Wymaga on, aby w każdym miejscu podlegającemu wyborowi pod jednostkę produkcyjną, niezbędne nakłady były dostępne po najmniejszym koszcie, z kosztami transportu włącznie.

Jeśli koszty transportu są dane, można wyprowadzić z p -grafu $G = (X, \Gamma)$, nh podgrafów cząstkowych w postaci $G_i^{g_0} = (B_i, \Gamma B_i)$ z $B_i = (X_i^{g_0} \cup \cup x_0)$ i $\Gamma B_i x \subset \Gamma x \cap B_i$, $g = 1, 2, \dots, h$ i $x = 1, 2, \dots, n$.

Łuki tych podgrafów cząstkowych zawierają wartości, które wyrażają koszty transportu.

W sensie ekonomicznym, każdy podgraf cząstkowy reprezentuje sieć zaopatrzenia, miejsce produkcji odpowiadające x_0 , będące punktem końcowym oraz wierzchołki $x_i \in X_i$, będące punktami początkowymi.

Łuki tej sieci, wyposażone w wartości, które wyrażają koszty transportu dla każdego nakładu x^{g_0} jeśli się połączy z każdą krzywą u liczbę $l(u) \geq 0$, nazywaną długością u , to dostawy zostaną skierowane drogami o minimalnej długości μ^{g_0} o ile $\Sigma l(u)$ przyjmuje minimum $u \in \mu^{g_0}$

W każdej z sieci $G_i^{g_0}$ istnieje co najmniej jedna droga o długości mini-

⁵ W zakresie teorii grafów konsultowano się szczególnie u C. Berge, *Théorie des graphes*, Paris 1958-1963; B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, t. 1 i 2, Paris 1969 - 1970.

malnej μ^{g_0} , wiodąca od samego wierzchołka $x_i^{g_0}$ do wierzchołka rozważanego jako x_0 . W całości można zliczyć co najmniej nh dróg o długości minimalnej, jednakże tylko jedna zostanie zachowana dla każdego grafu $G_i^{g_0}$ dla której wyrażenie $[\sigma_i^{g_0} + \sum_{u \in \mu^{g_0}} l(u)]$ przyjmie wartość minimalną, gdzie $\sigma_i^{g_0}$ jest ceną jednostkową na rynkach i nakładów x^{g_0} . Jeśli dróg tych jest kilka, które zadość czynią przytoczonemu warunkowi, to są one równorzędne i jedna z nich zostanie dowolnie wybrana spośród ich liczby równej ściśle nh .

Drugi warunek, który powinien być spełniony, dotyczy optymalnych wielkości wyników produkcji, która powinna być zrealizowana w x_0 i sprzedana na $x_j \in X_j$.

Ponownie, z p -grafu $G = (X, I)$, można wyprowadzić nl podgrafów cząstkowych w postaci $G_j^{om} = (A_j, \Gamma A_j)$ z $A_j = (X_j^{om} \cup x_0)$ i $\Gamma A_j x \subset \Gamma x \cap A_j$, $m = 1, 2, \dots, l$ i $x = 1, 2, \dots, n$.

W sensie ekonomicznym każdy podgraf cząstkowy reprezentuje sieć dystrybucji, miejsce produkcji odpowiadające x_0 , będące punktem początkowym oraz wierzchołki $x_j \in X_j$, będące punktami końcowymi.

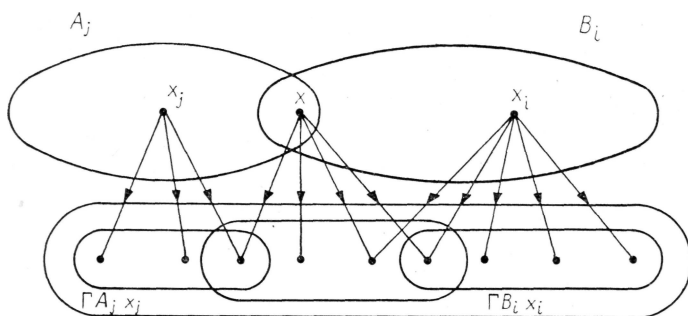
W każdej z sieci G_j^{om} istnieje co najmniej jedna droga o długości minimalnej μ_j^{om} wiodąca od wierzchołka traktowanego jako x_0 do każdego wierzchołka x_j^{om} . W całości można zliczyć nl dróg o długości minimalnej; jednakże tylko jedna zostanie zachowana dla każdego grafu G_j^{om} , ta dla której wyrażenie $[\sigma_j^{om} - \sum_{u \in \mu_j^{om}} l(u)]$ przyjmie wartość minimalną, gdzie σ_j^{om} jest ceną jednostkową na rynkach j wyników produkcji x^{om} . Jeśli dróg tych, które czynią zadość przytoczonemu warunkowi, jest kilka, to są one równorzędne i jedna z nich zostanie dowolnie wybrana spośród ich liczby równej ściśle nl .

Widać więc, że dla każdej $x \in X$ l dróg o długości minimalnej μ^{om} wybranych, wzięwszy pod uwagę ceny σ_i^{om} , stanowią graf $G_j^{ol} = (A_j, U_j)$, z $U_j = \left\{ \bigcup_m \mu^{om} \right\}$, $m = 1, 2, \dots, l$ oraz $x_0 = x_1, x_2, \dots, x_n$. Graf ten opisuje najlepszą sieć dystrybucji wyników produkcji dla x_0 . Tak samo h dróg o długości minimalnej μ^{g_0} , wybranych, wzięwszy pod uwagę ceny σ_j^{om} , tworzą graf $G_i^{ho} = (B_i, V_i)$, z $V_i = \left\{ \bigcup_g \mu^{g_0} \right\}$, $g = 1, 2, \dots, h$ oraz $x_0 = x_1, \dots, x_n$. Graf ten opisuje najlepszą sieć zaopatrzenia w nakłady dla jednostki produkcji x_0 .

W końcu, zbiór podgrafów cząstkowych połączonych z każdym szczytem $x \in X$ pozwoli skonstruować p -graf H , dla którego w każdym wierzchołku całkowite koszty transportu i koszty produkcji są minimalne, a czyste dochody jednostkowe maksymalne.

$$H = \left(\bigcup_{i,j} A_j \cup B_i, \bar{V} \right) \text{ z } Vx = \Gamma A_j x \cup \Gamma B_i x \text{ (por. ryc. 1).}$$

W tym stadium wypracowania teorii, jeśli porówna się p -graf G z



Ryc. 1

p -grafem H , zauważa się, że w tym ostatnim łuki $u \notin \mu^{om}$ i łuki $u \notin \mu^{go}$ i μ^{om} i μ^{go} oznaczają najkrótsze drogi, biorąc pod uwagę ceny) należące do G zostały wyeliminowane przy pomocy lokalnych funkcji produkcji. Selekcjonuje się więc, biorąc pod uwagę ceny, dla każdego wyniku produkcji m , strumień $\varphi(\mu^{om})$, odpowiadający czystemu zyskowi maksymalnemu, gdzie $\varphi(\mu)$ jest ilością dóbr przebiegającą drogę o minimalnej długości μ . Wyprowadza się stąd następnie dla każdego nakładu g optymalną ilość do użycia, to znaczy strumień $\varphi(\mu^{go})$

Można więc przestudiować funkcję zysku na p -grafie H , to znaczy funkcję Π , która przyporządkowuje każdemu wierzchołkowi x liczbę $\Pi(x)$, określoną jak następuje:

$$\Pi(x) = \sum_{om} \left[(\sigma_j^{om} - \sum_{u \in \mu^{om}} l(u)) \varphi(\mu^{om}) \right] - \sum_{go} \left[(\sigma_i^{go} + \sum_{u \in \mu^{go}} l(u)) \varphi(\mu^{go}) \right]$$

Wartości przyjęte przez tę funkcję celu definiują na p -grafie h zbiór maksymalnych czystych zysków dla każdego wierzchołka x_0 . Jest rzeczą jasną, że $\Pi(x)$ może być dodatnie, równe zero albo ujemne. Szczytem lub szczytami, dla których $\Pi(x)$ przyjmuje maksimum jest lub są optymalne miejsca zlokalizowania jednostki produkcji. Można zauważyć, że ta analiza pozwala usystematyzować empiryczną metodę kosztów porównywalnych w rozumieniu Waltera Isarda, zastosowaną do lokalizacji przedsiębiorstwa⁶.

Jednakże metoda ta nie wypełnia pola badań teoretycznych. W rezultacie ogranicza się ona tutaj do poszukiwania najlepszego wierzchołka wśród tych, które należą do zbioru X , określa więc optimum relatywne do danych wierzchołków. Widzimy, że uprzywilejowuje ona a priori lokalizację nazywaną kątową w klasycznych teoriach werberiańskich, wypracowanych dla dwuwymiarowych przestrzeni euklidesowskich. Wykorzystując teorię grafów operujemy w przestrzeni niemetrycznej, ale pozostaje uprzednio zdefiniowane optimum relatywne do rozpatrywanych

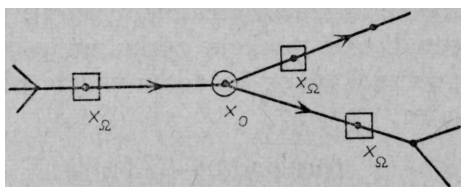
⁶ W. Isard, *Methods of Regional Analysis*, London 1960, The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, s. 232 i nast.

wierzchołków. To optimum może być absolutne, tak że czyni ono zadość warunkom, które pozostają do dokładnego określenia.

Poszukiwania należy rozszerzyć na określenie nie danych z góry wierzchołków, ale możliwych do przyjęcia dla założenia rozważanej jednostki produkcyjnej. Tak jest tylko, kiedy pozycje pośrednie między danymi wierzchołkami wykażą, że najlepszy wierzchołek znaleziony metodą poprzednią będzie mógł być zakwalifikowany jako optimum absolutne. Innymi słowy, określenie lokalizacji absolutnie optymalnej może być dokonane tylko pod warunkiem udowodnienia, że istnieje taka lokalizacja, gdzie czysty zysk jednostki produkcyjnej byłby wyższy niż w każdym innym miejscu.

Należy więc przede wszystkim określić ogół miejsc możliwych do przyjęcia pod założenie jednostki produkcyjnej, to znaczy do zdeterminowania, znając zbiór punktów danych, zespołu miejsc jeszcze dopuszczalnych z ekonomicznego punktu widzenia.

W p -grafie G niech będzie to jakkolwiek szczyt x_0 . Poszukuje się jednego lub kilku wierzchołków x_n „pośrednich” między x_0 i każdym wierzchołkiem przyległym (por. ryc. 2).



Ryc. 2

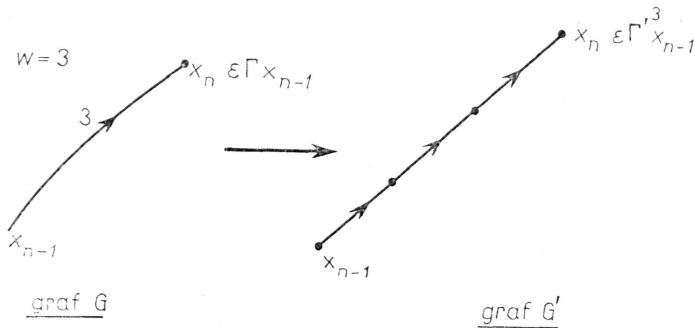
Niech będzie $X_q = \{x_y = /y1, 2, \dots, n; n+1, \dots, q\}$ zbiorem q możliwych lokalizacji. Wiadomo, że obejmuje on wszystkie dane lokalizacje i wszystkie lokalizacje „pośrednie”. Zatem $X \subset X_q$. Z drugiej strony będzie to zastosowanie Γ ze względu na X w zbiorze X .

Niech będzie p -graf $G' = (X_q, \Gamma')$, optymalnym rozwiązaniem problemu. Należy wyznaczyć takie G' , że wszystkie elementy $x_y \in X_q$ byłyby zidentyfikowane na podstawie danych elementów $x_n \in X$ oraz takie, że zbiór zastosowań Γ' z X_q w zbiorze X_q byłby określony na podstawie zbioru zastosowań danego Γ .

Otóż, w p -grafie G łuki są wyposażone w wartości. Jeśli dopuszcza się, że łuk wyposażony w wartość w może być zastąpiony przez drogę o długości w , to znaczy złożony z w łuków przyległych, to dysponuje się procedurą konstrukcji nowego p -grafu $G' = (X', \Gamma')$, którego łuki nie są wyposażone w wartości oraz w którym liczba wierzchołków i liczba łuków są wyższe, ale jeszcze skończone (por. ryc. 3).

Z punktu widzenia ekonomicznego p -graf G' respektuje warunki nałożone przez p -graf G na schemat transportowy.

Zapisujemy więc, że jeśli w p -grafie $G = (\Gamma, \Gamma)$, $x_n \in \Gamma x_{n-1}$ i $l(x_{n-1}, x_n) = w$, w p -grafie $G' = (X', \Gamma')$ będzie się miało $x_n \in \Gamma' w x_{n-1}$. Niech będzie $\hat{\Gamma}' x_{n-1} = \{x_{n-1}\} \cup \Gamma x_{n-1} \cup \Gamma^2 x_{n-1} \cup \dots$ zamknięciem przejściowym Γ' dla x_{n-1} . Wynika więc, że $X' = \bigcup_{x \in X} \hat{\Gamma}' x$. Ten zbiór X' zawiera część zbioru danych wierzchołków i część zbioru wierzchołków otrzymanych przez to przekształcenie.



Ryc. 3

Jedne i drugie są zdolne do uzyskania lokalizacji jednostki produkcyjnej. Zatem $X' = X_g$.

Zastosowanie Γ' zostało już zdefiniowane na podstawie Γ , ponieważ $\Gamma' x = \{x_y / x \hat{\Gamma}' x_{y-1}\}$.

Wszystkie wierzchołki należące do X' reprezentują te same cechy ekonomiczne w tym sensie, że mogą one być miejscami podaży nakładów i miejscami popytu na wyniki, punktami przejścia i miejscami godnymi uwagi. Tak samo każdy z nich może być wyposażony w lokalną funkcję techniczną produkcji szczegółowej.

Lokalizacja lub lokalizacje absolutnie optymalne są wyznaczone jak poprzednio. Na podstawie grafu G' nie wyposażonego w wartości, jaki by to nie był wierzchołek, łatwo wyznaczyć biorąc pod uwagę ceny, najlepsze sieci zaopatrzenia w nakłady oraz dystrybucji wyników, zawierające tylko drogi o minimalnej długości. Te optymalne sieci opisują na nowo zbiór podgrafów cząstkowych połączonych z każdym wierzchołkiem $x \in X'$ oraz pozwalają skonstruować p -graf H' , dla którego w każdym wierzchołku całkowite koszty transportu i produkcji są minimalne, a jednostkowe utargi netto maksymalne. Lokalne funkcje produkcji selekcionują optymalne strumienie; ostatecznie, funkcja zysku na p -grafie H' daje poszukiwane rozwiązanie. Wierzchołek lub wierzchołki, dla których $\Pi(x)$ przyjmuje maksimum, są miejscami absolutnie optymalnymi pod założenie jednostki produkcyjnej.

3. Wnioski. Niniejszy model, w porównaniu z klasyczną teorią Webera, opiera się na nielicznych i prostych hipotezach, daje jednak dobrze sprawdzające się wyniki. Nie zakłada się w nim figur lokalizacji (*Standortsfigur*), ani nie postuluje się istnienia obszaru transportowego, ani kosztów transportu proporcjonalnych do wagi ładunku i odległości, ani jednolitej funkcji produkcji, ani też jednolitych i równych w każdym miejscu cen nakładów i wyników ani jednej produkcji dla danej jednostki produkcyjnej.

Miejsca podaży nakładów efektywnie wykorzystanych oraz miejsca zbytu wyników efektywnie zużytych nie są już więcej danymi a priori, lecz determinowanymi przez model. Otoczenie jednostki produkcji jest wzbogacone przez uwzględnienie punktów przejścia i miejsc godnych uwagi. Dane geograficzne nie są już więcej przyjmowane jako zniekształcenia czystego modelu ekonomicznego, lecz są równocześnie formalizowane i integrowane w model teoretyczny.

Co więcej, liczba i lokalizacja urządzeń złożonych są zdeterminowane w przypadkach, w których powinny one występować. Uwzględnione są również, jednakże jako zmienne zależne, rozmiar tych urządzeń i ich zdolność produkcyjna.

Ponadto model dopuszcza różne rozszerzenia za pomocą pewnych dodatkowych powikłań. Można do niego wprowadzić jedną lub więcej granic monetarnych. Wystarczy odpowiednio, podzielić p -grafy i H lub H' , zależnie od przypadku i zastosować jeden lub więcej mnożników równych stopniom wymiany. Można również uwzględnić jedną lub kilka granic celnych pod warunkiem wprowadzenia mnożników odpowiadających przepisom w każdej cząstkowej podgrupie grafów. Odnosi się to również do podatków i subwencji, jakie wchodziły w rachubę. Będą one rozważone w każdej podgrupie cząstkowej, w p -grafie H lub p -grafie H' , zależnie od właściwości finansowych, które reprezentują ich instytucje.

Według wszelkich rygorów, model elementarny toleruje oczywiście te powikłania pod warunkiem, że hipoteza doskonałej konkurencji nie zostanie naruszona, z czego wynika ich ekonomiczna neutralność. Modele bardziej realistyczne pochodzące z modelu elementarnego są wolne od tych ograniczeń.

Jednakże model tutaj zaprezentowany pozostaje statyczny. Jego dynamizacja jest sprawą przyszłości. Zajęto się nią w cytowanym przypadku modelu rozszerzonego na sytuację oligopolu. W końcu model ten umożliwi włączenie klasycznych teorii lokalizacji typu weberiańskiego jako przypadków szczegółowych, ponieważ ich integracja zakładałaby tylko ograniczoną interpretację hipotez i danych oraz przejście od grafów typologicznych do grafów wyposażonych w metrykę.

Tłumaczył
S. Borowski

THE THEORY OF GRAPHS AND THE OPTIMUM LOCATION
OF A PRODUCTION UNIT

S u m m a r y

This model, in comparison to Weber's classical theory is based on few and weak hypotheses but they can be easily and adequately tested.

Neither location figures (*Standortsfigur*) are supposed nor transport area, transport costs proportional to weight and distance, uniform and equal in every place prices of inputs and outputs are postulated in the model.

The places for offering the effectively utilized inputs and the places for marketing the effectively used up outputs are no longer data a priori, but they are determined by the model. The environment of the production unit is enriched because passing points and noteworthy places are taken into account. Geographical data are no longer considered to be a distortion of the perfect economic model, but they are formalized and integrated into the theoretical model.

The number and location of multiple establishments are determined in the cases in which they should exist. The dimensions of the establishments and their productive capacity are also taken into consideration, but as dependent variables.

Besides, the model admits various extensions by means of some extra complications. It is possible to introduce one or more monetary frontiers. To do so it is sufficient to partition the H and H' p-graphs suitably, according to the case, and utilize one or more multipliers equal to the coefficients of change. It is also possible to consider one or several customs frontiers provided that multipliers corresponding to the regulations in each partial subgroup of graphs are introduced. The same holds also in the case of taxes and subventions that would come into question. They will be considered in each partial subgroup, in the H p-graph or the H' p-graph, according to the financial properties represented by their institutions.

According to all the rigours the elementary model evidently tolerates those complications provided that the hypothesis of perfect competition is intact, from which their economic neutrality results. The more realistic models issued from the elementary model are exempt from those restrictions.

The model presented here, however, remains static. Its dynamization is a question for the future. It has been considered in the quoted case of a model extended to the situation of oligopoly.

Lastly this model makes possible the inclusion of classical Weberian theories of location as particular cases because their integration would take for granted only a restricted interpretation of the hypotheses and of data as well as a passage from the topological graphs to the metric graphs.