EMANUEL SIMEONOFF

O PEWNEJ METODZIE INTERPOLACJI WSPÓŁCZYNNIKÓW PŁODNOŚCI I O PEWNYM PARAMETRZE NATĘŻENIA URODZEŃ

W niniejszym artykule przedstawimy dwa zagadnienia:

1. Metodę interpolacji, opartą na zasadzie zmienności. Metodę tę zademonstrujemy za pomocą współczynników urodzeń dla każdego wieku kobiet żyjących w Bułgarii. Tutaj też zdefiniujemy „szybkość procesu urodzeń" jako funkcję wieku kobiet oraz energię kinetyczną w procesie urodzeń jako całkę energii zależną od szybkości procesu urodzeń.

2. Ważoną energię kinetyczną w procesie urodzeń jako parametr, który będzie spełniał rolę miary natężenia urodzeń.

Niech ξ będzie zmienną typu ciągłego. Przypuśćmy, że ξ zależy od parametru τ, a odpowiednia funkcja częstości $f(x, \tau)$ spełnia warunki ciągłości dla każdego τ w przedziale $a \leq \tau \leq b$. Wówczas $f(x, \tau)$ możemy uznać za warunkową funkcję częstości, reprezentującą rozkład populacji w nieskończenie wąskim przedziale, w którym znajduje się punkt τ. Wtedy ustalonej wielkości $\tau = \tau_0$ odpowiada rozkład prawdopodobieństw, który ogólnie będzie zależał od r i od pewnych stałych: $a_0, a_1, \ldots, a_n$, a który można wyrazić formułą:

$$(1) = \varphi(\tau, a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

Jeżeli zajmujemy się tego rodzaju procesem, to możemy przyjąć, że istnieje prawo wyrażające związek między częstością zmiennej losowej a wartością parametru τ. Gdy τ zmienia się, punkty $[\tau, \varphi(\tau, a_0, a_1, \ldots, a_n)]$ wyznaczą krzywą. Z kształtu tej krzywej otrzymamy informację o umiejscowieniu warunkowego rozkładu zmiennej ξ dla różnych wartości zmiennej τ.,

Badając zmienną losową zależną od parametru t, który może oznaczać czas, wiek itd., spotykamy się ze szczególnymi problemami teoretycznych i technicznych metod obliczania wartości funkcji φ dla różnych wielkości parametru τ.

Załóżmy, że potrafimy wyrazić typowe wartości warunkowego rozkładu zmiennej ξ za pomocą funkcji φ zależnej od τ i pewnych stałych

a_0, a_1, ..., a_n (1). W praktyce dla takiej funkcji wybieramy wielomian stopnia k-tego

$$\varphi=\sum_{i=0}^{k} a_i \tau^i \tag{2}$$

i wyznaczamy stałe a_i, gdzie i=0,1, ... k, za pomocą metody najmniejszych kwadratów, jeżeli parametr τ jest zmienną losową.

Opierając się na zasadzie zmienności w niniejszym artykule podamy metodę obliczania wartości funkcji, którymi będą współczynniki płodności funkcyjnie zależne od wieku kobiet. Tutaj przyporządkowujemy wiekowi kobiet parametry zmiennej ciągłej, oznaczając je przez τ. Funkcję (1), z której otrzymujemy współczynniki płodności, będziemy nazywali funkcją współczynników płodności.

Załóżmy, że kobiety rodzą dzieci w wieku [a, b] i że $a \leq \tau \leq b$. W praktyce $a=15$ i b=50. Przedział [a, b] dzielimy na m równych odcinków, gdzie $a=\tau_0$, τ_1, τ_2, ..., τm; b lub przyrost $\Delta\tau=\tau_{i+1}-\tau_i=\frac{b-a}{m}$ $(i=0,$ $1,\ldots,$ $m-1)$ Z kolei każdy odcinek dzielimy na k części $\tau_i=\tau_{i0}$, τ_{i1} ,z_{i2}, ..., τ_{ik} = τ_{i+1} tak że $\Delta'\tau=\tau_{i_j+1}-\tau_{i_j}=\frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{k}=\frac{\Delta\tau}{k}$.
Zazwyczaj dane o urodzeniach dzieci podaje się jako liczbę dzieci urodzonych przez kobietę w wieku [x, $x+5$]. Zatem definiując wiek rozrodczy jako $[a=15,\ b=50]$, $\Delta\tau=5$, $\Delta'\tau=1$, $m=\frac{50-15}{5}=7$,

oraz k = 5. Zakładamy również, że dane te są wynikiem obserwacji dokonanych w ciągu roku.

Obecnie wprowadzimy następujące symbole

a) $l_{\tau_{i_j}}$ — średnia liczba kobiet w wieku od τ_{i_j} do τ_{i_j+1} w ciągu danego roku.

b) $l_{\tau_i}=\sum_j l_{\tau_{i_j}}$ — średnia liczba kobiet w wieku od τ_i do τ_{i+1} w ciągu roku.

c) $L=\sum_i l_{\tau_i}$ — średnia liczba kobiet w wieku od a do b, w ciągu danego roku.

d) $y_{\tau_{i_j}}$ — średnia liczebność zespołu kobiet, które stały się matkami w wieku od τ_{i_j} do $\tau_{i_{j+1}}$

e) $y_{\tau_i}=\sum_j y_{\tau_{i_j}}$ — średnia liczebność zespołu kobiet, które stały się matkami w wieku od τ_1 do τ_{i+1}

f) $A=\sum_i y_{\tau_i}$ — średnia liczebność zespołu kobiet, które stały się matkami w wieku od a do b.

g) $p_{\tau_{i_j}}=\varphi_i(\tau_{i_j}+\vartheta_j\Delta'\tau)\Delta'_\tau$ — współczynnik płodności w wieku [τ_i, τ_{i+1}], lub współczynnik zespołu kobiet, które stały się matkami.

h) $p_{\tau_i}=\sum_j p_{\tau_{i_j}}$ — średnia liczba dzieci urodzonych przez matkę w wieku od τ_i do τ_{i+1} .

i) $P=\sum_i p_{\tau_i}+1$ — średnia liczba dzieci urodzonych przez matkę w wieku od a do b.

Przypuszczamy, iż ze statystycznej obserwacji można otrzymać tylko $l_{\tau_{i_j}}$, gdzie $i=0, 1, 2, \ldots, 6$; $j = 0, 1, 2, 3, 4$ oraz $y\tau_i$, gdzie $i=0, 1, \ldots, 6$. Spróbujemy znaleźć $p_{\tau_{i_j}}$ oraz $y_{\tau_{i_j}}=l_{\tau_{i_j}}\cdot p_{\tau_{i_j}}$.

Załóżmy, że funkcja współczynników płodności $\varphi_i\ (\tau)$ jest ciągła w całym przedziale wieku: $\tau_i\leq\tau\leq\tau_{i+1}$. Krzywą S opisaną przez funkcję współczynników płodności $\varphi_i\ (\tau)$, gdzie $i=0, 1, \ldots, 6$, będziemy nazywali krzywą współczynników płodności.

Funkcja współczynników płodności powinna spełniać następujący związek

$$\sum_j l_{\tau_{ij}}\varphi_i(\tau_{ij}+\vartheta_j\Delta'\tau)\,\Delta'\tau=y_{\tau_i}\ , \tag{4}$$

gdzie $0\leq\vartheta_j\leq1$ Jest to warunek łączący funkcję φ, i dane z obserwacji.

Z kolei założymy, że funkcja współczynników płodności φ jest ciągła i ma pochodne ze względu na parametr τ. Wtedy szybkość $v\ (\tau)$ rozwoju współczynników urodzeń ze względu na τ może być wyrażona przez

$$v\,(\tau)=\frac{d\varphi\,(\tau)}{d\tau}=\varphi'\,(\tau). \tag{5}$$

Obecnie możemy zapisać wyrażenie:

$$T=\frac{1}{2}\int_a^b[v\,(\tau)]^2\,d\tau=\frac{1}{2}\int_a^b[\varphi'\,(\tau)]^2\,d\tau \tag{6}$$

oznaczające e n e r g i ą k i n e t y c z n ą rozważanego procesu. Metoda interpolacji przedstawiona w niniejszym artykule opiera się na zasadzie, że T powinno przyjąć wartość minimum.

Jeżeli rozważymy krzywą

$$y=\varphi(\tau) \tag{7}$$

jako krzywą współczynników płodności, to następujące wyrażenie

$$ds=\sqrt{1+[\varphi'\,(\tau)]^2}\,d\tau \tag{8}$$

oznacza długość nieskończenie małego elementu tej krzywej. Będziemy uważali tę krzywą za regularną, jeżeli

$$|\varphi'(\tau)|<1 \tag{9}$$

jest prawdziwe dla każdej wartości τ w przedziale $[a, b]$. Wówczas przybliżoną wartość ds można zapisać

$$ds \approx \left\{1 + \frac{1}{2}[\varphi'(\tau)]^2\right\} d\tau \tag{10}$$

oraz

$$\int_a^b ds = \int_a^b d\tau + \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi'(\tau)]^2 \, d\tau = b - a + T \tag{11}$$

Z formuły (11) wynika, że krzywa regularna posiada minimalną długość.

Obecnie pokażemy, jak należy obliczać wartości funkcji współczynników płodności φ dla różnych wielkości τ.

Wybierzmy dowolny odcinek (τ_i, τ_{i+1}). Funkcję współczynników płodności zapiszemy w następujący sposób:

$$\varphi_i(\tau) = u_i \psi_{i,1} + v_i \psi_{i,2} + y_{\tau_i} \psi_{i,3} \tag{12}$$

dla: $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ oraz $i=0, 1, 2 \ldots 6$

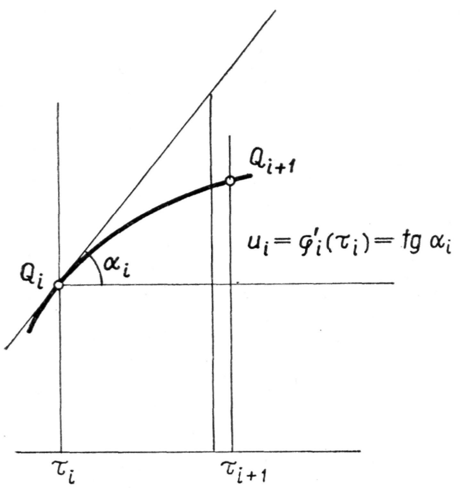
gdzie:

$$\begin{aligned} \psi_{i,1}(\tau) &= a_{i,1} + a_{i,2}\tau + a_{i,3}\tau^2 \\ \psi_{i,2}(\tau) &= b_{i,1} + b_{i,2}\tau + b_{i,3}\tau^2 \\ \psi_{i,3}(\tau) &= c_{i,1} + c_{i,2}\tau + c_{i,3}\tau^2 \end{aligned} \tag{13}$$

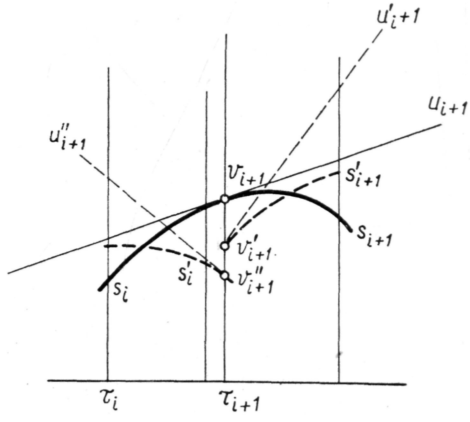
oraz

$$v_i = \varphi_i(\tau_i), \quad u_i = \varphi_i'(\tau_i). \tag{14}$$

Z formuły (13) widać dziewięć stałych, które muszą być wyznaczone. Do tego potrzeba dziewięć warunków określających relacje tych stałych.



Rys. 1



Rys. 2

Tymi warunkami są:

$$\varphi_i(\tau_i) = u_i \psi_{i,1}(\tau_i) + v_i \psi_{i,2}(\tau_i) + y_{\tau_i} \psi_{i,3}(\tau_i) = v_i$$

$$\varphi_i'(\tau_i) = u_i \psi_{i,1}'(\tau_i) + v_i \psi_{i,2}'(\tau_i) + y_{\tau_i} \psi_{i,3}'(\tau_i) = u_i \tag{15}$$

$$\sum_j l_{\tau_{i_j}} \varphi_i(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) = u_i \sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,1}(\tau_{i,j} + \vartheta_j \Delta'\tau) + v_i \sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,2}(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) +$$

$$+ y_{\tau_i} \sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,3}(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) = y_{\tau_i}$$

Z formuł (15) wynika:

$$\psi_{i,2}'(\tau_i) = 1 \qquad \psi_{i,2}'(\tau_i) = 0 \qquad \psi_{i,3}'(\tau_i) = 0$$

$$\psi_{i,1}(\tau_i) = 0 \qquad \psi_{i,2}(\tau_i) = 1 \qquad \psi_{i,3}(\tau_i) = 0 \tag{16}$$

$$\sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,1}(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) = 0 \qquad \sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,2}(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) = 0$$

$$\sum_j l_{\tau_{i_j}} \psi_{i,3}(\tau_{i_j} + \vartheta_j \Delta'\tau) = 1$$

lub

$$a_{i,2} + 2a_{i,3}\tau = 1 \qquad b_{i,2} + 2b_{i,3}\tau_i = 0 \tag{16'}$$

$$a_{i,1} + a_{i,2}\tau + a_{i,3}\tau^2 = 0 \qquad b_{i,1} + b_{i,2}\tau + b_{i,3}\tau^2 = 1$$

$$a_{i,1} M_{i,0} + a_{i,2} M_{i,1} + a_{i,3} M_{i,2} = 0 \qquad b_{i,1} M_{i,0} + b_{i,2} M_{i,1} + b_{i,3} M_{i,2} = 0$$

$$c_{i,2} + 2c_{i,3}\tau = 0$$

$$c_{i,1} + c_{i,2}\tau + c_{i,3}\tau^2 = 0$$

$$c_{i,1} M_{i,0} + c_{i,2} M_{i,1} + c_{i,3} M_{i,2} = 1.$$

Tutaj wzięliśmy: $\vartheta_j = 0$ oraz $M_{i,k} = \sum_j \tau_{i_j}^k l_{\tau_{i_j}} \ (\kappa = 0,1,2)$.

Jeżeli zmienimy początek układu współrzędnych, z równań (16') otrzymamy:

$$a_{i,1} = 0 \qquad b_{i,1} = 1 \qquad c_{i,1} = 0$$

$$a_{i,2} = 1 \qquad b_{i,2} = 0 \qquad c_{i,2} = 0 \tag{16''}$$

$$a_{i,3} = -\frac{M_{i,1}}{M_{i,2}} \qquad b_{i,3} = -\frac{M_{i,0}}{M_{i,2}} \qquad c_{i,3} = \frac{1}{M_{i,2}}.$$

Jeżeli dla punktów $\tau = \tau_i$ oraz $\tau = \tau_{i+1}$ wybierzemy dowolne (u_i', v_i') oraz (u_{i+1}', v_{i+1}') zamiast prawdziwych wartości (u_i, v_i) i (u_{i+1}, v_{i+1}) to odcinki S' oraz S_{i+1}' nie przetną punktów $\tau = \tau_{i+1}$.

Z drugiej zaś strony S powinna być wygładzona w całym przedziale $[a, b]$. Wówczas musimy wprowadzić następujące ograniczenia:

$$\varphi_i(\tau_{i+1}) = u_i \psi_{i,1}(\tau_{i+1}) + v_i \psi_{i,2}(\tau_{i+1}) + y_{\tau_i} \psi_{i,3}(\tau_{i+1}) = v_{i+1} \tag{17}$$

$$\varphi_i'(\tau_{i+1}) = u_i \psi_{i,1}'(\tau_{i+1}) + v_i \psi_{i,2}(\tau_{i+1}) + y_{\tau_i} \psi_{i,3}(\tau_{i+1}) = u_{i+1}$$

Znaczenie ograniczeń (17) polega na tym, że dane dwa odcinki S_i oraz S_{i+1} powinny mieć wspólny punkt i wspólny tangens dla $\tau=\tau_{i+1}$.

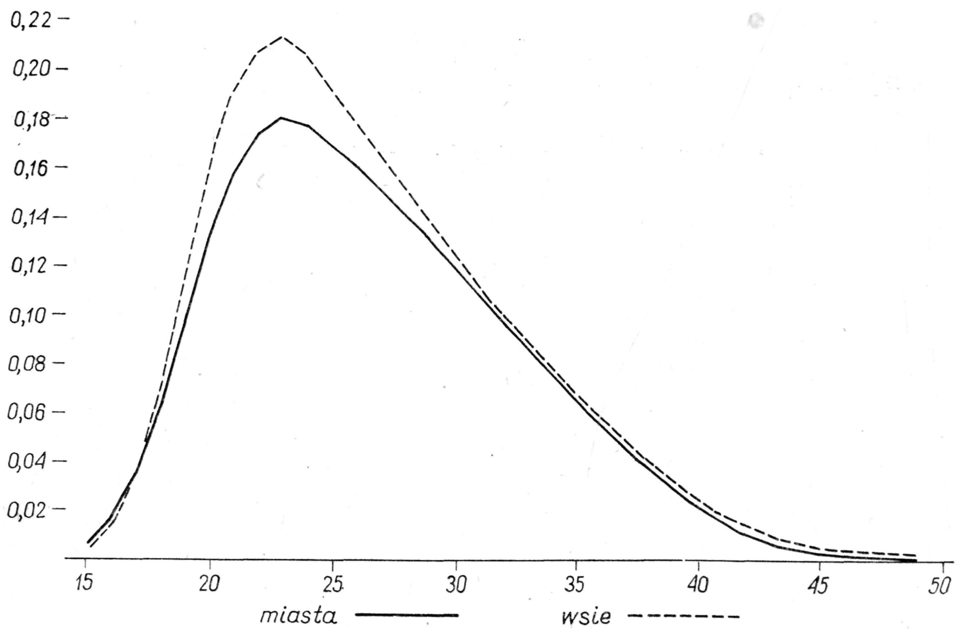
Ponadto widać z formuł (14) i (17), że dla każdego punktu $\tau(a\leq\tau\leq \leq b)$, u oraz v można wyrazić jako funkcję liniową zależną od u_0 i v_0. W ten sposób znajdujemy wartości funkcji współczynników płodności $\varphi_i(\tau)=v_\tau$ oraz szybkość $\varphi'(\tau)=u_\tau$ procesu dla każdego punktu τ, gdzie $\tau_i\leq\tau\leq\tau_{i+1}$ oraz $i=0$, 1, 2 ... 6), jako funkcji liniowych u_0 i v_0. Wówczas φ będzie zależne od τ, u_0 oraz v_0. W ten sposób, gdy u_0 i v_0 zmieniają się, otrzymujemy rodzinę krzywych φ (τ, u_0, v_0). Lecz wśród nich jest tylko jedna krzywa wyrażająca proces rozwojowy, który powinien spełniać następujące warunki: $\partial T=0$
lub

$$\frac{\partial T}{\partial u_0}=\int_b^a\varphi'(\tau,u_0,v_0)\frac{\partial\varphi'(\tau,u_0,v_0)}{\partial u_0}d\tau=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_0}=\int_a^b\varphi'(\tau,u_0,v_0)\frac{\partial\varphi'(\tau,u_0,v_0)}{\partial v_0}d\tau=0$$

co oznacza minimum energii kinetycznej w procesie urodzeń. Równania pod (19) mają charakter liniowy ze względu na u_0 i v_0 ; można je łatwo rozwiązać.

W tabeli 1 podane zostały wartości u i v dla kobiet w wieku od $a=15$ do $b=50$, żyjących w Bułgarii w latach 1947—1956. Na rysunku 3 wy-



Rys. 3

Wartości u oraz v obliczone dla każdego wieku kobiet w okresie rozrodczym

Wiek	Miasta		Wsie		Miasta		Wsie	
τ	$10^5 \cdot u$	$10^5 \cdot v$	$10^5 \cdot u$	$10^5 \cdot v$	$10^5 \cdot u$	$10^5 \cdot v$	$10^5 \cdot u$	$10^5 \cdot v$
	1947				1948			
15	+ 692	739	+ 507	460	+ 489	566	+ 572	512
16	+1506	1837	+1645	1536	+1502	1561	+1735	1665
17	+2319	3750	+2784	3750	+2515	3569	+2897	3981
18	+3133	6476	+3922	7103	+3527	6590	+4060	7459
19	+3947	10016	+5060	11594	+4540	10624	+5222	12100
20	+2994	13486	+3765	16007	+3361	14575	+3858	16640
21	+2041	16003	+2471	19125	+2182	17346	+2495	19816
22	+1089	17568	+1176	20948	+1002	18937	+1131	21629
23	+ 136	18181	− 119	21477	− 177	19350	− 233	22079
24	− 817	17840	−1413	20711	−1357	18583	−1596	21164
25	− 870	16997	−1395	19307	−1325	17242	−1545	19593
26	− 923	16100	−1376	17921	−1294	15933	−1494	18074
27	− 976	15151	−1358	16554	−1262	14655	−1443	16606
28	−1029	14148	−1339	15206	−1231	13409	−1391	15189
29	−1082	13094	−1321	13876	−1199	12194	−1340	13823
30	−1135	11984	−1302	12565	−1167	11011	−1289	12509
31	−1121	10856	−1244	11291	−1089	9883	−1218	11256
32	−1106	9743	−1186	10076	−1010	8833	−1147	10074
33	−1091	8644	−1128	8919	− 931	7863	−1076	8961
34	−1077	7560	−1070	7821	− 853	6971	−1005	7921
35	−1062	6491	−1012	6780	− 774	6157	− 934	6951
36	− 980	5470	− 944	5802	− 774	5383	− 897	6035
37	− 898	4531	− 877	4892	− 773	4610	− 860	5157
38	− 816	3674	− 809	4049	− 772	3838	− 823	4315
39	− 733	2900	− 741	3274	− 772	3066	− 785	3511
40	− 651	2208	− 674	2566	− 771	2294	− 748	2745
41	− 539	1613	− 564	1948	− 624	1597	− 623	2059
42	− 427	1129	− 454	1439	− 476	1047	− 498	1499
43	− 315	758	− 344	1039	− 328	645	− 373	1063
44	− 204	498	− 235	750	− 181	390	− 248	752
45	− 92	351	− 125	570	− 33	283	− 123	566
46	− 76	267	− 100	458	− 34	250	− 100	454
47	− 60	200	− 75	370	− 36	215	− 78	365
48	− 44	148	− 51	307	− 37	179	− 55	299
49	− 28	113	− 26	268	− 38	141	− 32	256
	1949				1950			
15	+ 791	917	+ 792	744	+ 729	873	+ 782	780
16	+1749	2187	+1815	2047	+1827	2151	+1864	2103
17	+2707	4416	+2838	4373	+2924	4523	+2946	4508
18	+3665	7602	+3861	7723	+4022	8000	+4028	7995
19	+4623	11746	+4884	12095	+5120	12510	+5110	12564
20	+3391	15753	+3637	16355	+3716	16988	+3762	17001
21	+2158	18527	+2389	19368	+2312	20003	+2414	20088
22	+ 926	20069	+1142	21134	+ 909	21613	+1065	21828
23	− 306	20379	− 105	21652	− 495	21820	− 283	22219
24	−1539	19457	−1352	20924	−1898	20624	−1632	21261

Wiek τ	Miasta $10^5 \cdot u$	Miasta $10^5 \cdot v$	Wsie $10^5 \cdot u$	Wsie $10^5 \cdot v$	Miasta $10^5 \cdot u$	Miasta $10^5 \cdot v$	Wsie $10^5 \cdot u$	Wsie $10^5 \cdot v$
25	−1501	17937	−1375	19560	−1798	18776	−1567	19662
26	−1464	16455	−1398	18174	−1697	17029	−1501	18128
27	−1426	15010	−1421	16765	−1596	15382	−1436	16659
28	−1389	13603	−1444	15333	−1495	13857	−1371	15255
29	−1351	12233	−1466	13878	−1394	12393	−1306	13917
30	−1313	10900	−1489	12400	−1293	11049	−1241	12643
31	−1192	9648	−1356	10978	−1191	9807	−1205	11420
32	−1071	8516	−1222	9689	−1090	8666	−1168	10234
33	− 949	7506	−1088	8534	− 988	7627	−1131	9084
34	− 828	6618	− 955	7512	− 866	6690	−1095	7971
35	− 706	5851	− 821	6624	− 785	5854	−1050	6895
36	− 712	5141	− 807	5811	− 758	5082	− 964	5884
37	− 718	4426	− 793	5011	− 732	4337	− 869	4967
38	− 724	3705	− 779	4225	− 705	3619	− 775	4145
39	− 730	2978	− 764	3454	− 679	2927	− 680	3417
40	− 736	2245	− 750	2696	− 652	2262	− 586	2784
41	− 598	1578	− 621	2011	− 543	1664	− 513	2235
42	− 460	1049	− 492	1454	− 434	1175	− 439	1759
43	− 323	657	− 363	1027	− 326	795	− 366	1357
44	− 185	403	− 234	729	− 217	524	− 293	1027
45	− 47	287	− 105	560	− 108	361	− 219	772
46	− 44	242	− 87	463	− 89	263	− 171	576
47	− 42	198	− 70	385	− 70	183	− 123	430
48	− 40	157	− 53	323	− 51	123	− 74	331
49	− 38	118	− 36	278	− 32	81	− 26	281
	1951				1952			
15	+1013	1114	+1075	1165	+ 777	987	+ 935	1042
16	+1827	2533	+1785	2596	+1677	2140	+1799	2409
17	+2641	4767	+2495	4736	+2578	4267	+2664	4641
18	+3455	7815	+3205	7586	+3478	7295	+3528	7737
19	+4269	11677	+3915	11146	+4379	11223	+4392	11697
20	+3275	15449	+2844	14526	+3156	14990	+3201	15494
21	+2281	18226	+1772	16834	+1933	17534	+2010	18099
22	+1287	20010	+ 701	18070	+ 710	18855	+ 819	19514
23	+ 293	20801	− 371	18235	− 513	18954	− 372	19738
24	− 701	20597	−1442	17329	−1736	17829	−1563	18770
25	−1016	19738	−1390	15913	−1661	16130	−1541	17218
26	−1332	18564	−1339	14549	−1587	14506	−1519	15688
27	−1647	17075	−1287	13236	−1512	12957	−1497	14180
28	−1963	15270	−1235	11975	−1437	11483	−1475	12694
29	−2278	13150	−1183	10766	−1362	10083	−1453	11230
30	−2593	10714	−1132	9609	−1287	8758	−1431	9788
31	−2090	8373	−1032	8527	−1137	7546	−1248	8449
32	−1586	6535	− 933	7544	− 986	6485	−1065	7293
33	−1082	5202	− 834	6661	− 836	5574	− 881	6320
34	− 578	4372	− 734	5877	− 685	4814	− 698	5530
35	− 74	4046	− 635	5193	− 534	4204	− 515	4924
36	− 202	3909	− 622	4564	− 525	3675	− 533	4400

Wiek τ	Miasta $10^5 \cdot u$	Miasta $10^5 \cdot v$	Wsie $10^5 \cdot u$	Wsie $10^5 \cdot v$	Miasta $10^5 \cdot u$	Miasta $10^5 \cdot v$	Wsie $10^5 \cdot u$	Wsie $10^5 \cdot v$
37	− 329	3643	− 610	3948	− 516	3154	− 551	3858
38	− 457	3250	− 598	3344	− 507	2642	− 568	3298
39	− 585	2729	− 585	2753	− 498	2140	− 586	2721
40	− 713	2080	− 573	2174	− 489	1646	− 604	2127
41	− 576	1436	− 480	1648	− 406	1199	− 500	1575
42	− 439	928	− 387	1214	− 323	834	− 396	1127
43	− 302	558	− 294	873	− 241	552	− 292	783
44	− 165	325	− 201	626	− 158	353	− 189	543
45	− 28	229	− 108	471	− 75	237	− 85	406
46	− 32	200	− 88	373	− 62	168	− 71	328
47	− 36	166	− 67	296	− 50	112	− 57	264
48	− 40	128	− 46	240	− 37	69	− 43	214
49	− 44	86	− 25	204	− 24	38	− 29	178
		1953				1954		
15	+ 926	1065	+1096	1217	+ 988	1068	+ 792	744
16	+1782	2419	+1883	2707	+1655	2389	+1815	2047
17	+2639	4630	+2671	4984	+2321	4377	+2838	4373
18	+3495	7697	+3459	8049	+2988	7032	+3861	7723
19	+4351	11620	+4247	11902	+3655	10353	+4884	12095
20	+3126	15359	+3085	15568	+2645	13503	+3637	16355
21	+1901	17872	+1923	18072	+1635	15643	+2389	19368
22	+ 675	19159	+ 761	19419	+ 625	16773	+1142	21134
23	− 551	19222	− 401	19594	− 385	16894	− 105	21652
24	−1776	18059	−1563	18612	−1395	16004	−1352	20954
25	−1702	16320	−1550	17055	−1368	14623	−1375	19560
26	−1627	14655	−1538	15511	−1342	13268	−1398	18174
27	−1553	13065	−1525	13980	−1315	11939	−1421	16765
28	−1478	11550	−1512	12461	−1289	10637	−1444	15333
29	−1404	10109	−1500	10955	−1263	9361	−1466	13878
30	−1330	8742	−1487	9462	−1236	8112	−1489	12400
31	−1182	7486	−1272	8082	−1091	6949	−1356	10978
32	−1034	6378	−1057	6918	− 945	5931	−1222	9689
33	− 886	5418	− 842	5968	− 800	5058	−1088	8534
34	− 739	4605	− 627	5233	− 654	4331	− 955	7512
35	− 591	3940	− 413	4713	− 509	3749	− 821	6624
36	− 551	3370	− 447	4283	− 490	3250	− 807	5811
37	− 511	2838	− 482	3818	− 470	2771	− 793	5011
38	− 472	2347	− 517	3319	− 451	2310	− 779	4225
39	− 432	1895	− 552	2785	− 431	1869	− 764	3454
40	− 392	1483	− 586	2216	− 412	1448	− 750	2696
41	− 333	1120	− 493	1676	− 346	1069	− 621	2011
42	− 274	816	− 400	1229	− 279	757	− 492	1454
43	− 215	572	− 307	875	− 213	511	− 363	1027
44	− 156	387	− 214	614	− 147	331	− 234	729
45	− 97	260	− 121	446	− 80	218	− 105	560
46	− 77	174	− 98	337	− 65	145	− 87	463
47	− 58	106	− 75	250	− 50	87	− 70	385
48	− 38	58	− 53	186	− 35	45	− 53	323
49	− 19	30	− 30	145	− 20	17	− 36	278

c d. tab. 1

Wiek τ	Miasta 1955 $10^5 \cdot u$	Miasta 1955 $10^5 \cdot v$	Wsie 1955 $10^5 \cdot u$	Wsie 1955 $10^5 \cdot v$	Miasta 1956 $10^5 \cdot u$	Miasta 1956 $10^5 \cdot v$	Wsie 1956 $10^5 \cdot u$	Wsie 1956 $10^5 \cdot v$
15	+1966	2059	+ 782	780	+ 746	711	+1540	1742
16	+2196	4140	+1864	2103	+1461	1814	+2298	3661
17	+2426	6452	+2946	4508	+2176	3633	+3055	6338
18	+2656	8993	+4028	7995	+2892	6167	+3813	9772
19	+2887	11764	+5110	12564	+3607	9416	+4570	13963
20	+2037	14226	+3762	17001	+2564	12502	+3226	17861
21	+1187	15838	+2414	20088	+1522	14545	+1882	20415
22	+ 337	16600	+1065	21828	+ 480	15546	+ 537	21624
23	− 512	16513	− 283	22219	− 563	15505	− 807	21489
24	−1362	15576	−1632	21261	−1605	14421	−2152	20009
25	−1344	14222	−1567	19662	−1492	12873	−2042	17912
26	−1326	12887	−1501	18128	−1378	11438	−1933	15925
27	−1309	11570	−1434	16659	−1265	10116	−1823	14047
28	−1291	10270	−1371	15255	−1151	8908	−1714	12279
29	−1273	8988	−1306	13917	−1038	7814	−1604	10620
30	−1255	7724	−1241	12643	− 925	6832	−1494	9071
31	−1095	6548	−1205	11420	− 854	5943	−1289	7679
32	− 935	5533	−1868	10234	− 783	5124	−1085	6492
33	− 775	4678	−1131	9084	− 713	4376	− 880	5510
34	− 615	3983	−1095	7971	− 642	3699	− 675	4733
35	− 455	3447	−1058	6895	− 571	3093	− 470	4160
36	− 442	2999	− 964	5884	− 507	2554	− 466	3692
37	− 429	2563	− 869	4967	− 443	2079	− 463	3228
38	− 416	2141	− 775	4145	− 378	1669	− 459	2767
39	− 403	1731	− 680	3417	− 314	1322	− 456	2310
40	− 390	1335	− 586	2784	− 250	1041	− 452	1856
41	− 325	978	− 513	2235	− 217	807	− 388	1436
42	− 260	686	− 439	1759	− 184	607	− 324	1080
43	− 195	458	− 366	1357	− 151	440	− 260	788
44	− 131	295	− 293	1027	− 118	305	− 196	559
45	− 66	196	− 219	772	− 85	204	− 133	395
46	− 54	136	− 171	576	− 66	128	− 105	276
47	− 43	88	− 123	430	− 47	72	− 78	184
48	− 31	51	− 74	331	− 27	35	− 51	119
49	− 20	25	− 26	218	− 8	17	− 24	82

kreślono krzywą współczynników płodności, celem ilustracji wyników zastosowanej metody.

Obecnie możemy przyjąć rozważaną wartość energii kinetycznej jako parametr wyrażający natężenie urodzeń. Na przykład, jeżeli uznamy szybkość $u_{\tau_{i_j}}$ jako średnią szybkość w wieku $\left(\tau_{i_j}-\frac{\Delta'\tau}{2}, \tau_{i_j}+\frac{\Delta\tau}{2}\right)$ to parametr $\bar{T}$ określający natężenie urodzeń możemy wyrazić jako

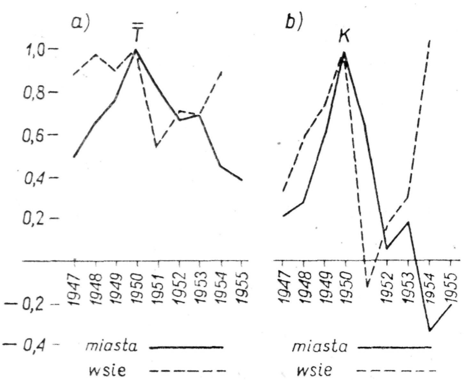
$$\bar{T}=\sum v_{\tau_{i_j}}[u_{\tau_{i_j}}]^2\Delta'\tau. \tag{20}$$

W kolumnach 2 i 5 tabeli 2 podane zostały wartości wyrażenia $\Sigma\, u^2$ odpowiednio dla miast i wsi, a w kolumnach 3 i 6 wartości parametru $\overline{T}$ (dla miast i wsi), określającego natężenie urodzeń w latach obserwacji 1947—1956.

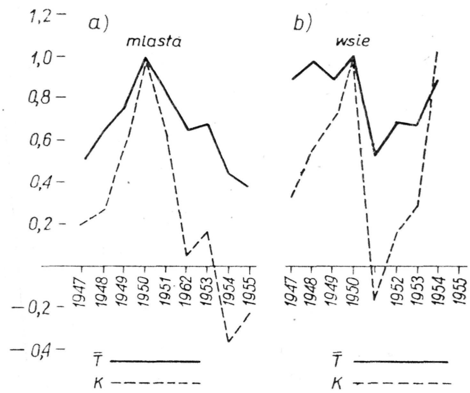
W kolumnach 2 i 7 podane zostały wartości parametru k, który jest miarą naturalnego wzrostu liczby ludności. Parametr k został obliczony z równania:

$$\frac{1-e^{-k}}{k}\sum_{i} e^{-kx_i}\cdot r_{x_i}=1 \qquad (21)$$

gdzie $r_x = L_x \Phi_x$ oraz
L_x — średnia liczba kobiet w wieku x, $x+1$,
Φ_x — średnia liczba urodzeń przypadających na kobiety w wieku x, $x+1$,
k — pierwiastek równania (21), wykorzystany jako parametr pomiaru naturalnego wzrostu liczby ludności.



Rys. 4



Rys. 5

Istnieje oczywiście poważna różnica między parametrami $\overline{T}$ i k. Obliczenia tego ostatniego parametru oparte zostały na dwóch zjawiskach: rodności i umieralności. Obliczenia zaś parametru $\overline{T}$, wyrażającego natężenie urodzeń, oparte zostały jedynie na rodności. Parametr k może być dodatni albo ujemny, podczas gdy parametr $\overline{T}$ tylko dodatni.

Umieralność i rodność jako koncepcje różnią się radykalnie między sobą. Człowiek żyjący może jedynie umrzeć i to tylko jeden raz, podczas gdy kobiet w wieku rozrodczym może urodzić dziecko wiele razy. Ponadto rodność zależy od naszej woli lub możliwości. Stąd można przyjąć, że umieralność jako zjawisko niezależne od nas, jest bardziej ustabilizowana aniżeli rodność.

Powyższe refleksje nad umieralnością i rodnością pozwalają przypuszczać, że parametr k będzie bardziej zależny od rodności aniżeli od umieralności. W tym zakresie możemy porównać obydwa parametry, $\overline{T}$

i k, oraz oczekiwać pewnych zależności między nimi, a mianowicie: jeżeli rodność wzrasta, $\overline{T}$ i k rosną, a jeżeli rodność maleje, to $\overline{T}$ i k również maleją.

Z tabeli 2 widać, że wartości obydwóch parametrów $\overline{T}$ i k, dla miast i wsi, są największe w 1950 r. Jeżeli te wartości przyrównamy do jedności, to dane tabeli 2 ulegną przekształceniu w dane tabeli 2a.

Tabela 2

Wartości parametrów $\bar{T}=\sum v\cdot u^2$ i k

Rok	Miasta			Wsie		
	$10^4\cdot\Sigma u^2$	$10^4\Sigma v\cdot u^2$	10^4k	$10^4\Sigma u^2$	$10^4\Sigma v\cdot u^2$	10^4k
1947	64,58	6,18	+14,17	96,74	11,03	+25,64
1948	78,28	8,10	+19,21	102,67	12,13	+43,08
1949	85,19	9,47	+39,74	95,10	11,05	+54,94
1050	101,30	12,17	+68,05	101,14	12,16	+76,01
1951	91,19	10,18	+42,84	65,58	6,62	−10,79
1952	77,31	8,16	+ 3,00	80,13	8,74	+13,21
1953	78,87	8,48	+12,35	78,54	8,50	+23,28
1954	58,44	5,48	−24,02	95,10	11,05	+81,00
1955	55,26	4,76	−15,26			

Tabela 2a

Wartości przeliczeniowe parametrów T i k
— rzeczywiste Wartości z 1950 r. = 1

Rok	Miasta		Wsie	
	$\bar{T}$	k	$\bar{T}$	k
1947	0,508	+0,208	0,906	+0,337
1948	0,666	+0,282	0,997	+0,567
1949	0,778	+0,584	0,908	+0,723
1950	1,000	+1,000	1,000	+1,000
1951	0,837	+0,624	0,544	−0,142
1952	0,671	+0,044	0,718	+0,174
1953	0,697	+0,182	0,698	+0,306
1954	0,450	−0,353	0,908	+1,066
1955	0,391	−0,227		

W ten sposób można łatwo zauważyć związek pomiędzy omawianymi parametrami oraz ich zależność od płodności. Na rysunkach 4a i 4b przedstawiono parametry $\overline{T}$ i k odpowiednio dla miast i wsi, a na rysunkach 5a i 5b osobno dla miast parametr $\overline{T}$ i k oraz osobno dla wsi te same parametry. Pierwsza para tych rysunków ilustruje różnice między rozwojem ludności w miastach i we wsiach, a druga para wskazuje na związek między parametrami $\overline{T}$ i k.

Tłumaczył
Stanisław Borowski

ON A METHOD OF INTERPOLATION OF FERTILITY RATES AND ON A NEW PARAMETER OF BIRTH INTENSITY

Summary

The paper deals with two subjects: 1) a method of interpolation resting on a variability principal, 2) the weighed kinetic energy in a birth process.

The said method of interpolation leads to an assessment of the values of a function, which in that context represent the coefficient of fertility functionaly depending on a women's age. It has been represented with the help of birth coefficients for women in the fertility group of age (15—60 years) living in Bulgaria in the years 1947—1956.

The deliberations with regard to the second problem lead to the construction of parameter T, showing the birth intensity. That parameter rests on fertility and parameter *k*, calculated on the basis of fertility and death rates.

The relations existing between those two parameters and their dependency on fertility are being illustrated by empirical data.