TADEUSZ JUJA

DUALNY MODEL MIĘDZYREGIONALNY I JEGO PRZYDATNOŚĆ W PLANOWANIU

Jednym z zadań planowania długookresowego jest wyznaczenie racjonalnej struktury przestrzennej gospodarki narodowej. W pracach planistycznych, których celem jest realizacja tego zadania, można wykorzystać optymalizacyjne modele międzyregionalne. Rozwiązań uzyskanych z obliczeń planistycznych prowadzonych według takich modeli nie należy jednak przyjmować za ostateczne, gdyż zależne są one od parametrów modelu. Parametry te mogą osiągnąć w przyszłości inne wartości, tzn. odmienne od przyjętego wstępnie wariantu. Jedynie część parametrów modelu jest względnie niezależna od decyzji planisty. Z drugiej strony pewne wielkości przyjmowane w modelu za dane są nie tylko zależne od decyzji planistycznych, ale powinny być nimi wyznaczone. Nie wystarczy zatem rozwiązanie jednego modelu (programu) międzyregionalnego, bowiem wyniki uzyskane z jego rozwiązania mogą być ,,gorsze" od tych, które otrzymano by z rozwiązania tego modelu przy innych danych wyjściowych — współczynnikach lub wyrazach wolnych. W całej serii obliczeń planistycznych przeprowadzonych według pewnego optymalizacyjnego modelu międzyregionalnego można zbadać wrażliwość optymalnych rozwiązań modelu na zmianę danych wyjściowych[1].

O ogólnych kierunkach takich zmian wartości wyrazów wolnych, które wpływają na polepszenie funkcji celu informują wartości zmiennych dualnych uzyskane z rozwiązania modelu dualnego względem optymalizacyjnego modelu międzyregionalnego. Z rozwiązania dualnego modelu międzyregionalnego — z tego punktu widzenia — można uzyskać bardzo interesującą informację planistyczną.

Przedmiotem artykułu jest zagadnienie zastosowania dualnych modeli międzyregionalnych w planowaniu przestrzennym. Najpierw przed-

[1] Badaniem wrażliwości optymalnych rozwiązań programu na zmianę parametrów zajmuje się programowanie parametryczne. Szersze informacje na temat badań wrażliwości i programowania parametrycznego można znaleźć w pracy J. Kornaia, *Zastosowanie programowania w planowaniu,* Warszawa 1969, rozdz. 16

stawiono prymalny model międzyregionalny, następnie zbudowano na jego podstawie model dualny. W końcowej części opracowania przeprowadzono szczegółową analizę zmiennych dualnych.

II. OPTYMALIZACYJNY MODEL MIĘDZYREGIONALNY

Poniżej przedstawiono liniowy model międzyregionalny[2], którego funkcją celu jest maksymalizacja wolumenu konsumpcji[3] w ostatnim roku okresu planowego. W modelu tym przyjęto następującą symbolikę.

Wskaźniki:

$i,j=1,...,n$ — numer gałęzi (produkcji i zużycia);

$q=1,...,p$ — numer gałęzi transportu;

$r,s=1,...,m$ — numer regionu; wskaźnik r jest stosowany do oznaczenia regionu, którego dotyczy dany rachunek; natomiast wskaźnik s jest używany do oznaczenia pozostałych regionów;

$z=1,...,Z$ — numer rynku zagranicznego.

Zmienne decyzyjne dotyczą ostatniego roku planu i przedstawia się je w wyrażeniu wartościowym. Są nimi:

V_i^r — przyrost produkcji i-tej gałęzi w r-tym regionie uzyskany w ostatnim roku planu w wyniku realizacji inwestycji w całym okresie objętym planem;

W_i^r — produkcja i-tej gałęzi w r-tym regionie uzyskana w wyniku wykorzystania starych zdolności produkcyjnych (istniejących w okresie wyjściowym);

X_i^r — produkcja globalna i-tej gałęzi w r-tym regionie;

$X_i^r = V_i^r + W_i^r$

X_i^{rs} — wywóz i-tej produkcji z regionu r do regionu s;

K — wolumen konsumpcji wytworzony w całym kraju;

E_i^{rz} — eksport produkcji i-tej gałęzi z regionu r na rynek z;

M_i^{zr} — import i-tej produkcji z rynku z do regionu r;

X_q^r — produkcja globalna q-tej gałęzi transportu w r-tym regionie.

Parametry modelu:

a) wyrazy wolne:

N^r — maksymalna produkcja globalna i-tej gałęzi w r-tym regio-

[2] Model ten posiada strukturę podobną do struktury modelu skonstruowanego przez A. G. Granberga, *Mnogootrieslewaja modiel optimalnowo rozwitija i razmieszczenija proizwodstwa w płanowo-ekonomiczeskich rasczetach.* Ekonomika i matiematiczeskije mietody, 1970, nr 3, ss. 393 - 406. W modelu prezentowanym w niniejszym artykule uwzględniono dodatkowo wymianę zagraniczną. Jednocześnie bilanse zapisano w postaci słabych nierówności. Ostatni zabieg formalny ułatwił interpretację ekonomiczną ocen dualnych.

[3] Konsumpcja ta jest rozumiana szeroko. W skład jej wchodzi nie tylko spożycie indywidualne i zbiorowe, ale również i inwestycje nieprodukcyjne.

nie możliwa do uzyskania w ostatnim roku planu ze starych mocy produkcyjnych;

I_i — maksymalny nakład inwestycyjny produkcji i-tej gałęzi możliwy do wydatkowania w kraju w całym okresie planowym;

Z^r — ustalony dla ostatniego okresu planu limit zasobów siły roboczej możliwych do wykorzystania w sferze produkcyjnej w r-tym regionie;

d_i^r — maksymalny przyrost produkcji i-tej gałęzi w r-tym regionie;

$\check{E}_i^z$ — dolny limit eksportu produkcji i-tej gałęzi na rynek z ustalony dla ostatniego roku planu;

$\check{M}_i^z$ — górny limit importu i-tej gałęzi z rynku z ustalony dla ostatniego roku planu;

b) współczynniki:

a_{ij}^r — współczynnik bieżących nakładów właściwy dla starych mocy produkcyjnych w regionie r; nakład produktu[4] i na wytworzenie, przy użyciu istniejących zdolności produkcyjnych, jednostki dobra j w regionie r;

$\bar{a}_{ij}^r$ — współczynnik bieżących nakładów właściwy dla nowych mocy produkcyjnych w regionie r; nakład produktu i na wytworzenie, przy użyciu nowych zdolności produkcyjnych, jednostki dobra j w regionie r;

h_{ij}^r — i-ty nakład inwestycyjny (dokonany w całym okresie planowym) warunkujący przyrost o jednostkę produkcji j-tej gałęzi w r-tym regionie;

b_{ij}^r — i-ty nakład inwestycyjny w ostatnim roku planu przypadający na jednostkę przyrostu produkcji w r-tym regionie; współczynnik $b_{ij}^r = h_{ij}^r \lambda$, gdzie λ — udział nakładów inwestycyjnych ostatniego roku planu w ogólnym wolumenie nakładów inwestycyjnych możliwych do wydatkowania w całym okresie planowym;

l_j^r — współczynnik nakładów pracy właściwy dla produkcji uzyskanej przy użyciu starych zdolności produkcyjnych w r-tym regionie; ustalony dla starych zdolności produkcyjnych nakład pracy warunkujący wytworzenie jednostki produktu j w regionie r;

$\bar{l}_j^r$ — współczynnik nakładów pracy właściwy dla produkcji uzyskanej przy użyciu nowych zdolności produkcyjnych w regionie r; ustalony dla nowych zdolności produkcyjnych nakład pracy warunkujący wytworzenie jednostki produktu j w regionie r;

a_{iq}^r — współczynnik nakładu dobra i na wytworzenie jednostki q-tej usługi transportowej w regionie r;

[4] Zwykle gałęzie będą wytwarzały kilka produktów. Używa się tutaj słowa „produkt" ze względów czysto stylistycznych. W praktyce pod takim produktem będzie się krył agregat.

l^r_q — współczynnik nakładu pracy na wytworzenie jednostki q-tej usługi transportowej w regionie r;

a^{rr}_{qj} — współczynnik nakładu q-tej usługi transportowej na przewiezienie jednostki j-tego produktu wewnątrz r-tego regionu;

a_{qj} — współczynnik nakładu q-tej usługi transportowej na przewiezienie jednostki j-tego produktu z regionu r do regionu s;

a^{rz}_{qj} — współczynnik nakładu q-tej usługi transportowej na przewiezienie jednostki j-tego produktu z regionu r na rynek z;

a^{zr}_{qj} — współczynnik nakładu q-tej usługi transportowej na przewiezienie jednostki j-tego produktu z rynku z do regionu r;

α^r — udział konsumpcji i-tego dobra w r-tym regionie w całym wolumenie konsumpcji ustalonym dla kraju.

Mając powyższe oznaczenia możemy przystąpić do zapisu modelu. Bilanse produkcji i-tych gałęzi w r-tych regionach:

$$-\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\bar{a}^r_{ij}-b^r_{ij})V^r_j-\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-a^r_{ij})W^r_j+\sum_{q=1}^{p}a^r_{iq}X^r_q+ \tag{1}$$

$$+\alpha^r_i K+\sum_{s\neq r}^{m}X^{rs}_i-\sum_{s\neq r}^{m}X^{sr}_i+\sum_{z=1}^{Z}E^{rz}_i-\sum_{z=1}^{Z}M^{zr}_i\leqslant 0$$

gdzie

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j, \quad i=1,\dots,n;\ r=1,\dots,m.\end{cases}$$

Nierówność (1) postuluje, ażeby produkcja, przywóz z innych regionów oraz import dobra i w pewnym regionie r w sumie co najmniej pokrywały występujące w tym regionie zapotrzebowanie na to dobro (pośrednie produkcyjne, inwestycyjne, transportowe, konsumpcyjne) oraz zapotrzebowanie innych regionów i zagranicy. Bilanse produkcji q-tych gałęzi transportu w r-tym regionie [5]:

$$\sum_{j=1}^{n}a^{rr}_{qj}V^r_j+\sum_{j=1}^{n}a^{rr}_{qj}W^r_j-X^r_q+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s\neq r}^{m}(a^{rs}_{qj}-a^{rr}_{qj})X^{rs}_j+ \tag{2}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{z=1}^{Z}(a^{rz}_{qj}-a^{rr}_{qj})E^{rz}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{z=1}^{Z}a^{zr}_{qj}M^{zr}_j\leqslant 0$$

$$q=1,\dots,p;\quad r=1,\dots,m.$$

[5] Bilanse te można wyprowadzić z zależności:

$$X^r_q\geqslant\sum_{j=1}^{n}a^{rr}_{qj}X^{rr}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s\neq r}^{m}a^{rs}_{qj}X^{rs}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{z=1}^{Z}a^{rz}_{qj}E^{rz}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{z=1}^{Z}a^{zr}_{qj}M^{zr}_j.$$

Z powyższej nierówności po zastąpieniu zmiennej X^{rr}_j następującym wyrażeniem:

$$V^r_j+W^r_j-\sum_{s\neq r}^{m}X^{rs}_j-\sum_{z=1}^{Z}E^{rz}_j$$

oraz po odpowiednich przekształceniach otrzymamy zależność (2).

Podaż usług transportowych w każdym regionie powinna być co najmniej tak duża, ażeby mogła pokryć zapotrzebowanie na nie wynikające z przewozów wewnątrzregionalnych, wywozów produktów do innych regionów i za granicę oraz z przywozów produktów importowanych z rynków zagranicznych. Ograniczenia produkcji przez zasoby siły roboczej możliwe do wykorzystania w poszczególnych regionach:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{l}_j^r V_j^r + \sum_{j=1}^{n} l_j^r W_j^r + \sum_{q=1}^{p} l_q^r X_q^r \leqslant Z^r \qquad r=1, \ldots, m. \tag{3}$$

Ograniczenia w zakresie rozmiarów nakładów inwestycyjnych dla całego okresu planowanego[6]:

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^r V_j^r \leqslant I_i \qquad i=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Ograniczenia przyrostu produkcji *i*-tych gałęzi w *r*-tych regionach:

$$V_i^r \leqslant d_i^r \qquad i=1, \ldots, n; \ r=1, \ldots, m. \tag{5}$$

Ograniczenia produkcji *i*-tej gałęzi w *r*-tym regionie możliwej do uzyskania przy wykorzystaniu starych zdolności produkcyjnych:

$$W_i^r \leqslant N_i^r \qquad i=1, \ldots, n; \ r=1, \ldots, m. \tag{6}$$

Ograniczenia eksportu:

$$-\sum_{r=1}^{m} E_i^{rz} \leqslant -\check{E}_i^z \qquad i=1, \ldots, n; \ z=1, \ldots, Z. \tag{7}$$

Ograniczenia importu:

$$\sum_{r=1}^{m} M_i^{zr} \leqslant \check{M}_i^z \qquad i=1, \ldots, n; \ z=1, \ldots, Z. \tag{8}$$

Warunki brzegowe:

$$V_i^r \geqslant 0, \quad W_i^r \geqslant 0, \quad X_q^r \geqslant 0, \quad K \geqslant 0, \quad X_i^{rs} \geqslant 0, \quad E_i^{rz} \geqslant 0, \quad M_i^{zr} \geqslant 0. \tag{9}$$

Funkcja celu:

$$K = \text{maksimum}. \tag{10}$$

Powyższy model posiada (nie licząc warunków brzegowych) $m(3n+p+1)+n(2Z+1)$ warunków ograniczających i $m[p+n(m+2Z+1)]+1$ niewiadomych nie wliczając w tę liczbę zmiennych pomocniczych. Tak więc w przypadku, gdy podzielimy gospodarkę narodową na sto gałęzi produkcyjnych, trzy gałęzie transportowe i dziesięć regionów oraz gdy wyróżnimy dziesięć rynków zagranicznych otrzymamy model o 31 031 zmiennych decyzyjnych i 5140 warunków ograniczających.

[6] Model nie uwzględnia inwestycji w transporcie.

III. DUALNY MODEL MIĘDZYREGIONALNY

Sformułujemy teraz model dualny względem przedstawionego wyżej modelu międzyregionalnego. W modelu tym wystąpią nowe zmienne (oceny dualne):

w_i^r — ocena dualna produktu i w regionie r;

w_q^r — ocena dualna q-tej usługi transportowej w r-tym regionie;

w^r — ocena dualna zasobów siły roboczej w regionie r;

w_i — ocena dualna i-tego limitu inwestycyjnego;

v_i^r — ocena dualna ograniczenia przyrostu produkcji i-tej gałęzi w r-tym regionie;

$\bar{w}_i^r$ — ocena dualna zdolności produkcyjnych i-tej gałęzi występujących w r-tym regionie;

u^z — ocena dualna limitu eksportu produktu i na rynek z;

$\bar{u}_i^z$ — ocena dualna limitu importu produktu i z rynku z.

Przy powyższych oznaczeniach dualny model międzyregionalny przyjmie następującą postać:

Warunki wyznaczające poziom ceny produktu i wytworzonego w wyniku realizacji inwestycji w regionie r;

$$-\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}-\bar{a}_{ij}^r-b_{ij}^r)w_i^r+\sum_{q=1}^{n}a_{qj}^{rr}w_q^r+\bar{l}_j^r w^r+\sum_{i=1}^{n}h_{ij}^r w_i+v_j^r\geqslant 0 \tag{11}$$

$$j=1,\ldots,n;\qquad r=1,\ldots,m.$$

Warunki wyznaczające poziom ceny produktu i wytworzonego przy użyciu starych zdolności produkcyjnych w regionie r:

$$-\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}-a_{ij}^r)w_i^r+\sum_{q=1}^{n}a_{qj}^{rr}w_q^r+l_j^r+\bar{w}_j^r\geqslant 0\qquad j=1,\ldots,n;\qquad r=1,\ldots,m. \tag{12}$$

Warunki wyznaczające poziom wyceny q-tej usługi transportowej w r-tym regionie:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{iq}^r w_i^r-w_q^r+l_q^r w^r\geqslant 0\qquad q=1,\ldots,p;\qquad r=1,\ldots,m. \tag{13}$$

Zależności między wszystkimi ocenami produktów:

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^r w_i^r\geqslant 1. \tag{14}$$

Warunki wyznaczające poziom oceny produktu j w s-tym regionie konsumpcji:

$$w_j^r-w_j^s+\sum_{q=1}^{p}(a_{qj}^{rs}-a_{qj}^{rr})w_q^r\geqslant 0\qquad \begin{array}{l} j=1,\ldots,n;\ r=1,\ldots,m;\\ s=1,\ldots,m;\ r\neq s.\end{array} \tag{15}$$

Warunki wyznaczające poziom oceny produktu j eksponowanego na rynek z:

$$w_j^r + \sum_{q=1}^{p} (a_{qj}^{rz} - a_{qj}^{rr}) w_q^r - u_j^z \geqslant 0 \qquad \begin{array}{l} j=1, \dots, n;\ z=1, \dots, Z; \\ r=1, \dots, m. \end{array} \tag{16}$$

Warunki wyznaczające poziom oceny produktu j importowanego z rynku z:

$$-w_j^r + \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{zr} w_q^r + \bar{u}_j^z \geqslant 0 \qquad \begin{array}{l} j=1, \dots, n;\ z=1, \dots, Z; \\ r=1, \dots, m. \end{array} \tag{17}$$

Warunki brzegowe:

$$w_i^r \geqslant 0, \quad w_q^r \geqslant 0, \quad w^r \geqslant 0, \quad w_i \geqslant 0, \quad v_i^r \geqslant 0, \quad \bar{w}_i^r \geqslant 0, \quad u_i^z \geqslant 0, \quad \bar{u}_i^z \geqslant 0. \tag{18}$$

Funkcja celu:

$$\sum_{r=1}^{m} Z^r w^r + \sum_{i=1}^{n} I_i w_i + \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_i^r v_i^r + \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} N_i^r \bar{w}_i^r - \\ - \sum_{z=1}^{Z} \sum_{i=1}^{n} \check{E}_i^z u_i^z + \sum_{z=1}^{Z} \sum_{i=1}^{n} \check{M}_i^z \bar{u}_i^z = \text{minimum}. \tag{19}$$

Powyższy dualny model międzyregionalny ma jedno rozwiązanie optymalne w przypadku, gdy wśród rozwiązań modelu pierwotnego nie ma rozwiązań zdegenerowanych [7]. Wartości zmiennych (ocen dualnych) uzyskane w wyniku rozwiązania tego modelu pokazują, jaki przyrost wartości funkcji celu w optymalnym rozwiązaniu modelu pierwotnego otrzymano by przy wzroście o jednostko pewnego wyrazu wolnego, przy nie zmienionych pozostałych wyrazach wolnych.

Wartości wycen nie są stałe. W pewnych przypadkach (gdy pewien warunek ograniczający jest prawie liniowo zależny od pozostałych) — nawet niewielkie zmiany warunków ograniczających mogą w zasadniczy sposób wpłynąć na wartości zmiennych dualnych. Niestabilność wycen utrudnia ich wykorzystanie w planowaniu. Wskazują one jedynie opłacalne kierunki korekty wyrazów wolnych i już z tego względu posiadają dużą wartość dla planisty. Na pytanie, do jakiej granicy opłaca się ,,poprawiać" pewien wyraz wolny, możemy odpowiedzieć stosując metodę kolejnych przybliżeń.

IV. CHARAKTERYSTYKA WYCEN DUALNYCH I ICH PRZYDATNOŚĆ W PLANOWANIU

W wyniku rozwiązania dualnego modelu międzyregionalnego otrzymaliśmy zmienne dualne w_j^r. Są one cenami j-tych produktów w r-tych regionach. Ceny te wskazują, o ile wzrósłby wolumen konsumpcji, gdyby

[7] Tzn. rozwiązań, w których liczba zmiennych przyjmujących wartości dodatnie jest mniejsza od liczby warunków spełnionych z równością. W przypadku występowania rozwiązań zdegenerowanych program dualny względem programu pierwot-

zużycie tego produktu w regionie r zmniejszyło się o jednostkę (przy nie zmienionych pozostałych warunkach ograniczających). Wewnętrzna struktura cen produktów wytworzonych przy pomocy istniejących zdolności produkcyjnych nie pokrywa się ze strukturą cen produktów wytworzonych w wyniku realizacji inwestycji.

W przypadku, gdy $V_j^r > 0$, warunek (11) spełniony jest z równością, a cena produktu j w r-tym regionie produkcji

$$w_j^r = \sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ij}^r + b_{ij}^r) w_i^r + \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{rr} w_q^r + \bar{l}_j^r w^r + \sum_{i=1}^{n} h_{ij}^r w_i + v_j^r. \tag{20}$$

Zatem cena ta obejmuje odpowiednio wycenione nakłady materiałowe, inwestycyjne, transportowe, pracy oraz rentę v_j^r. Współczynniki nakładów: $\bar{a}_{ij}^r$, b_{ij}^r, a_{qj}^{rr}, $\bar{l}_j^r$ i h_{ij}^r są zróżnicowane regionalnie. Jednocześnie — jak to zobaczymy dalej — oceny dualne w_q^r, w^r i v_j^r mogą przyjmować różne wartości w poszczególnych regionach. Te dwa czynniki wpływają na regionalną dyferencjację ceny tego samego produktu.

W przypadku, gdy

$$w_j^r < \sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ij}^r + b_{ij}^r) w_i^r + \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{rr} w_q^r + \bar{l}_j^r w^r + \sum_{i=1}^{n} h_{ij}^r w_i + v_j^r,$$

wtedy realizacja inwestycji jest nieopłacalna, gdyż przyniosłaby stratę. V_j^r w modelu pierwotnym równe jest w tym przypadku zeru.

Dla produktu wytworzonego przy użyciu istniejących zdolności produkcyjnych, a więc w przypadku, gdy $W_j^r > 0$, cena

$$w_j^r = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^r w_i^r + \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{rr} w_q^r + l_j^r w^r + \bar{w}_j^r. \tag{21}$$

Cena pewnego produktu j w r-tym regionie produkcji obejmuje w tym przypadku odpowiednio wycenione nakłady: materiałowe, transportu, pracy oraz rentę $\bar{w}_j^r$; nie wchodzą do niej nakłady inwestycyjne oraz renta v_j^r. Możliwe jest również otrzymanie w optymalnym rozwiązaniu modelu pierwotnego $W_j^r = 0$. W tej sytuacji cena produktu w_j^r jest mniejsza od nakładów poniesionych na jego wytworzenie (prawa strona równania (21)). Oznacza to, że zapotrzebowanie regionu r na ten produkt powinno być zaspokojone importem lub przywozem z innych regionów (niewykluczony jest również przypadek braku zapotrzebowania na ten produkt w rozpatrywanym regionie).

Zmienną dualną w_q^r możemy zinterpretować jako cenę q-tej usługi transportowej (taryfę przewozową) w regionie r. Cena tej usługi wska-

nego może nie mieć jednoznacznego rozwiązania. Jak podkreśla Z. Czerwiński, rozwiązanie programu dualnego nie informuje nas wtedy o tym, jaki wpływ na wzrost funkcji celu w optymalnym rozwiązaniu programu pierwotnego miałoby zwiększenie wyrazu wolnego. Zob. praca tego autora, *Matematyka na usługach ekonomii,* Warszawa 1969, s. 129.

zuje, o ile zwiększy się wolumen konsumpcji (rozumianej w szerokim znaczeniu), gdy zużycie q-tej usługi transportowej w r-tym regionie zmniejszy się o jednostkę, a pozostałe ograniczenia nie ulegną zmianie. Cena usługi transportowej

$$w_q^r = \sum_{i=1}^{n} a_{iq}^r w_i^r + l_q^r w^r, \tag{22}$$

gdy wytwarzanie danej usługi w regionie r jest opłacalne. Natomiast, gdy wytwarzanie tej usługi jest nieopłacalne taryfa w_q^r jest mniejsza od prawej strony zależności (22). Na cenę usługi transportowej w pewnym regionie składają się nakłady materiałów wycenione w ocenach dualnych oraz nakłady pracy ustalone również w tych ocenach.

Wszystkie ceny produktów powinny spełnić warunek

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^r w_i^r = 1\,. \tag{23}$$

Ponieważ α_i^r są udziałami gałęzi i regionów w zużyciu ogólnego wolumenu konsumpcji, zatem $\sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^r = 1$. Jednocześnie ceny produktów nie mogą być ujemne. Stąd powinny się one wahać wokół jednostki.

Ceny produktów można zinterpretować również z punktu widzenia powiązań międzyregionalnych. W tym celu wyróżnimy cenę produktu j w r-tym regionie produkcji i cenę tegoż produktu w s-tym regionie konsumpcji. Między tymi cenami zachodzi następująca zależność:

$$w_j^s = w_j^r + \sum_{q=1}^{p} (a_{qj}^{rs} - a_{qj}^{rr})\, w_q^r$$

lub (24)

$$w_j^s < w_j^r + \sum_{q=1}^{p} (a_{qj}^{rs} - a_{qj}^{rr})\, w_q^r\,.$$

W pierwszym przypadku dostawa produktu j z regionu r do regionu s jest opłacalna, zatem w rozwiązaniu programu pierwotnego mamy $X_j^{rs} > 0$ Cena tego produktu w s-tym regionie konsumpcji jest równa cenie tego produktu w r-tym regionie produkcji powiększonej o koszt jego przewiezienia z regionu r do regionu s. Zaś, gdy cena rozpatrywanego przez nas produktu w s-tym regionie konsumpcji jest niższa od ceny tego samego produktu w r-tym regionie produkcji powiększonej o koszt przewozu, plan optymalny nie będzie przewidywał dostaw tego produktu z regionu r (producent) do regionu s (konsument) i zmienna $X_i^{rs} = 0$

Zmienna dualna u_j^z jest ceną produktu j eksportowanego na rynek z. Wskazuje ona, o ile zwiększy się wolumen konsumpcji, gdy zmniejszymy o jednostkę limit eksportu tego produktu na rynek z (przy nie zmienionych pozostałych wyrazach wolnych). W sytuacji, gdy $E_j^{rz} > 0$ cena produktu j eksportowano na pewien rynek z

$$u_j^z = w_j^r + \sum_{q=1}^{p} (a_{qj}^{rz} - a_{qj}^{rr}) w_q^r, \tag{25}$$

zatem składa się na nią cena tego produktu w r-tym regionie-eksporterze i odpowiednio wycenione nakłady transportowe. Do eksportu produktu j nie dochodzi, gdy

$$u_j^z < w_j^r + \sum_{q=1}^{p} (a_{qj}^{rz} - a_{qj}^{rr}) w_q^r. \tag{25'}$$

Eksport w tym przypadku przyniósłby stratę. Eksporterem produktu j jest region, dla którego jednostkowy koszt wytworzenia i transportu jest mniejszy lub co najwyżej równy cenie produktu eksportowanego. Należy zatem preferować eksport z regionów o niższych cenach produktów oraz bliżej położonych rynków zagranicznych.

Zmienną dualną $\bar{u}_j^z$ można określić jako cenę produktu j importowanego z rynku z. Mierzy ona wzrost wolumenu konsumpcji spowodowany zwiększeniem o jednostkę limitu importu produktu j z rynku z. W przypadku, gdy j-ty produkt jest importowany z rynku z do regionu r, tzn., gdy $M_j^{zr} > 0$

$$\bar{u}_j^z = w_j^r - \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{zr} w_q^r. \tag{26}$$

Import produktu j z rynku z do regionu r jest bowiem opłacalny wówczas, gdy cena produktu importowanego jest co najwyżej równa cenie tego produktu w regionie-importerze pomniejszonej o odpowiednio wyceniony koszt transportu. Import produktu j z rynku z nie jest opłacalny, gdy

$$\bar{u}_j^z > w_j^r - \sum_{q=1}^{p} a_{qj}^{zr} w_q^r, \tag{26'}$$

a więc, gdy cena produktu importowanego z rynku z do regionu r jest większa od ceny identycznego produktu w regionie-importerze pomniejszonej o odpowiednio wyceniony koszt transportu.

W naszym modelu koszty transportu spełniają bardzo ważną funkcję z punktu widzenia powiązań regionów z rynkami zagranicznymi. Stanowią one pewnego rodzaju barierę chroniącą produkcję w pewnym regionie r przed ,,konkurencją" dóbr importowanych. Bariera ta działa skuteczniej w odniesieniu do regionów położonych dalej od rynków zagranicznych.

Otrzymane w wyniku rozwiązania modelu dualnego oceny siły roboczej w^r wskazują, o ile można byłoby powiększyć wolumen konsumpcji, gdybyśmy powiększyli o jednostkę zasoby siły roboczej w pewnym regionie r, przy nie zmienionych pozostałych wyrazach wolnych. W przypadku, gdy zasoby siły roboczej w regionie zostały w pełni wykorzystane ich ocena dualna jest dodatnia. Natomiast, gdy model (pierwotny) nie przewiduje pełnego wykorzystania tych zasobów w pewnym regionie ich ocena jest równa zeru. Oceny dualne siły roboczej są tym większe im większa jest jej deficytowość.

Powyższe właściwości ocen dualnych siły roboczej mogą być wykorzystane przez planistę do poprawiania planu. Może on zbadać, czy dopuszczalne jest przesunięcie części zasobów siły roboczej z regionów nadwyżkowych (w których oceny siły roboczej są równe zeru) do regionów wykazujących deficyt w zakresie siły roboczej (a więc, do regionów o dodatnich ocenach dualnych siły roboczej). Przy idealnej mobilności siły roboczej możliwa byłaby taka jej przestrzenna alokacja, przy której wyceny siły roboczej we wszystkich regionach byłyby równe. Ograniczona mobilność tego zasobu stawia pod znakiem zapytania możliwość regionalnego wyrównania się jego ocen.

Gałęzie powinny być poinformowane o kształtowaniu się wycen siły roboczej w poszczególnych regionach. Informację tę będą mogły one wykorzystać przy określaniu regionalnej lokalizacji swojej działalności gospodarczej i ewentualnie — do regionalnego zróżnicowania techniki wytwarzania (substytucja siły roboczej majątkiem trwałym).

Zmienne dualne w_i są ocenami i-tych limitów inwestycyjnych. Wskazują one, o ile powiększyłby się wolumen konsumpcji w ostatnim roku planu, gdybyśmy zwiększyli o jednostkę limit nakładów inwestycyjnych wydzielony na cały czasokres planu (przy nie zmienionych pozostałych wyrazach wolnych). Dla deficytowych limitów inwestycyjnych ich oceny są dodatnie. Natomiast ocena dualna częściowo wykorzystanego limitu inwestycyjnego jest równa zeru. Ewentualnie można zbadać, czy jest możliwe (i w jakim stopniu) zastąpienie i-tych limitów inwestycyjnych (deficytowych) j-tymi nie w pełni wykorzystanymi.

Oceny dualne v_i^r mierzą możliwy do uzyskania przyrost konsumpcji w przypadku podwyższenia o jednostkę górnej granicy przyrostu produkcji dobra i w regionie r przy nie zmienionych pozostałych wyrazach wolnych. Załóżmy, że przyrost produkcji pewnego dobra i w regionie r jest ograniczony zasobami naturalnymi. Ocena dualna v_i^r — przy tym założeniu — jest rentą. Renta ta jest dodatnia, gdy przyrost produkcji napotkał na ograniczenie ze strony zasobów naturalnych i równa zeru gdy przyrost produkcji jest mniejszy od potencjalnie możliwego. Zasoby naturalne nie są mobilne. Stąd nie jest realne regionalne zrównanie się ich ocen. Ewentualnie można zbadać, czy prawidłowo określono w pierwszym przybliżeniu górne granice możliwego przyrostu produkcji i-tej gałęzi w r-tym regionie, dla której otrzymano dodatnią rentę v_i^r

Ostatnia z występujących w naszym modelu zmiennych dualnych — ocena dualna i-tych zdolności produkcyjnych istniejących w regionie r $(\bar{w}^r)$ wskazuje, o ile wzrósłby wolumen konsumpcji w całym kraju, gdyby r-ty region dysponował większymi o jednostkę starymi zdolnościami produkcyjnymi, a pozostałe wyrazy wolne nie zmieniły się. Istniejące zdolności produkcyjne są planiście dane. Jednocześnie — w przypadku regionalnego zróżnicowania wycen $\bar{w}_i^r$ — nie jest możliwe przesuwanie starych zdolności produkcyjnych z regionów o relatywnie niskich ocenach $\bar{w}_i^r$ do regionów o wysokich ocenach $\bar{w}_i^r$. Powyższe względy decydują o możliwościach wykorzystania informacji o ocenach dualnych istniejących zdolności produkcyjnych w planowaniu przestrzennym. Regionalna dyferencjacja tych ocen może być podstawą do przestrzennego zróżnicowania okresu eksploatacji zdolności produkcyjnych istniejących w poszczególnych regionach, regionalnej dyferencjacji zmianowości oraz do regionalnego zróżnicowania polityki w zakresie inwestycji odtworzeniowych. W regionach o zerowych rentach $\bar{w}_i^r$ korzystne może być skrócenie okresu eksploatacji starych zdolności produkcyjnych. Natomiast w odniesieniu do regionów o wysokich rentach $\bar{w}_i^r$ należałoby zastanowić się, czy dopuszczalne jest przedłużenie okresu eksploatacji istniejących zdolności produkcyjnych poprzez przeprowadzenie inwestycji odtworzeniowych.

THE INTERREGIONAL DUAL MODEL AND ITS APPLICATION TO PLANNING

Summary

The aim of the article is to discuss the possibility of using an interregional dual programming model in the central planning for regional development. First, a direct two-period interregional model has been presented and then that model has been used for constructing its dual.

As a result of solving the dual of an interregional programming model one obtained the following dual variables (accounting prices): regional prices for commodities, transportation services, manpower, valuations on restrictions concerning production increases, old production facilities, national investment quotas, export to and import from particular foreign markets.

These accounting prices point to the directions of changes in the free terms of constraints where one could find an improvement to the objective function. Therefore they are of paramount importance to the planner.

The article contains a detailed review of factors which determine the regional differentiation of accounting prices and a survey of possibilities how to equalize them in space. In the author's view the only possibility to eliminate regional differences in accounting prices exists with respect to mobile resources, particularly to the labour force.