

Eksperymentalna analiza modalna gitar i skrzypiec

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
SERIA AKUSTYKA NR 20

EWA B. SKRODZKA

Eksperymentalna analiza modalna gitar i skrzypiec



POZNAŃ 2016

ABSTRACT. Skrodzka Ewa B., *Eksperymentalna analiza modalna gitar i skrzypiec* [Experimental modal analysis of guitars and violins]. Poznań 2016. Adam Mickiewicz University Press. Seria Akustyka nr 20. Pp. 220. ISBN 978-83-232-2971-1. ISSN 0554-8039. Text in Polish with a summary in English.

The monograph deals with a wide range of issues that are related to the experimental modal analysis of guitars and violins. In particular, the book presents a reasonable theory of modal analysis and the results of the first modal analysis of a violin, reported by Marshall. It describes the influence of intentional structural modifications on modal parameters, e.g. the type of the guitar top plate bracing pattern, the mounting angle of the guitar's neck, the thickness of the violin's back plate, bass bar tension, etc. The results of modal tests that were conducted on a violin octet and Felix Savart's trapezoidal violin are also presented here. The monograph is intended for professionals who deal with modal analysis as well as for students of acoustics, physics, violin making, and technology at BA, MA and PhD levels.

Ewa Skrodzka, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Fizyki, Instytut Akustyki, Zakład Elektroakustyki, ul. Umultowska 85, 61-612 Poznań, Poland.
Akademia Muzyczna im. Ignacego Jana Paderewskiego w Poznaniu, Wydział Instrumentów Smyczkowych, Harfy, Gitary i Lutnictwa, ul. Św. Marcin 87, 61-808 Poznań, Poland.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Adam Lipowczan

© Ewa B. Skrodzka 2016

This edition © Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,
Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2016

Publikacja dofinansowana przez Akademię Muzyczną
im. Ignacego Jana Paderewskiego w Poznaniu

Fotografie skrzypiec Baltazara Dankwarta z XVII w. (s. 20) oraz skrzypiec Marcina Groblicza I (s. 21) pochodzą ze zbiorów Muzeum Narodowego w Poznaniu.

Projekt okładki: Helena Oszmiańska-Napierała

Redakcja: Karolina Hamling

Redakcja techniczna: Dorota Borowiak

Lamanie komputerowe: Eugeniusz Strykowski

ISBN 978-83-232-2971-1

ISSN 0554-8039

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIwersYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
UL. FREDRY 10, 61-701 POZNAŃ

www.press.amu.edu.pl

Sekretariat: tel. 61 829 46 46, faks 61 829 46 47, e-mail: wyd nauk@amu.edu.pl

Dział sprzedaży: tel. 61 829 46 40, e-mail: press@amu.edu.pl

Ark. wyd. 12,00. Ark. druk. 13,75.

DRUK I OPRAWA: EXPOL, WŁOCŁAWEK, BRZESKA 4

Serdecznie dziękuję Koleżankom i Kolegom z Instytutu Akustyki UAM oraz Katedry Lutnictwa Artystycznego Akademii Muzycznej w Poznaniu za sugestie, dyskusje i uwagi oraz słowa i gesty, które mnie mobilizowały. Pani Rektor Akademii Muzycznej w Poznaniu, Profesor Halinie Lorkowskiej, bardzo dziękuję za wsparcie finansowe, bez którego nie byłoby możliwe ukazanie się tej książki. Szczególne podziękowania kieruję do Profesor Honoraty Stalmierskiej i Profesora Andrzeja Łapy za cierpliwe i życzliwe wyjaśnianie mi tajników lutnictwa oraz mojego nauczyciela i długoletniego szefa – Profesora Edwarda Hojana – za słowa zachęty wtedy, gdy były najbardziej potrzebne. Najbliższym dziękuję za wyrozumiałość i tolerowanie moich nieobecności w ich życiu.

Ewa

SPIS TREŚCI

SPIS OZNACZEŃ I SYMBOLI	9
WSTĘP	13
Rozdział 1	
Gitary i skrzypce – pochodzenie i historia badań	17
1.1. Pochodzenie	17
1.2. Krótka historia badań skrzypiec i gitar	23
1.3. Wibrometria laserowa	26
Rozdział 2	
Układ o jednym stopniu swobody – podstawa rozumienia analizy modalnej	29
2.1. Układ o jednym stopniu swobody	29
2.2. Postaci funkcji transmitancji wyrażone we współrzędnych fizycznych	38
2.3. Nieliniowość układu o jednym stopniu swobody	48
Rozdział 3	
Analiza modalna – wprowadzenie w teorię i praktykę	55
3.1. Podstawy teoretyczne analizy modalnej	55
3.1.1. Macierzowy zapis równań ruchu układu bez tłumienia	56
3.1.2. Ortogonalność wektorów modalnych	60
3.1.3. Macierzowy zapis równań ruchu układu z tłumieniem	66
3.1.4. Transmitancja układu wyrażona we współrzędnych modalnych ...	71
3.2. Eksperymentalna analiza modalna	78
3.2.1. Transmitancja przejścia i transmitancja punktowa	78
3.2.2. Pomiary dwukanałowe	81
3.2.3. Współczynnik korelacji obwiedni modalnych	87
3.3. Terminologia	89
Rozdział 4	
Analiza modalna gitar	91
4.1. Analiza modalna i pomiary metodą wibrometrii laserowej gitar różniących się obelkowaniem płyty wierzchniej	91
4.1.1. Instrumenty i eksperymenty	93
4.1.2. Rezultaty	100
4.1.2.1. Gitary bez strunociągu i strun	101
4.1.2.2. Gitary ze strunociągiem i strunami	105
4.1.3. Liniowość gitar	109
4.2. Analiza modalna gitar różniących się kątem zamontowania szyjki	111
4.2.1. Instrumenty i eksperyment	111
4.2.2. Rezultaty	115
4.3. Analiza modalna wierzchniej płyty gitarowej na różnych etapach konstrukcji	118

4.3.1. Płyta i eksperyment	118
4.3.2. Rezultaty	120
Rozdział 5	
Analiza modalna skrzypiec	125
5.1. Oznaczenia modów	126
5.2. Analiza modalna klasycznych skrzypiec	127
5.2.1. Pierwszy eksperyment modalny	127
5.2.2. Mody sygnałowe	134
5.3. Analiza modalna swobodnych płyt skrzypcowych	138
5.3.1. Figury Chladniego swobodnych płyt skrzypcowych	138
5.3.2. Numeryczna symulacja zachowań modalnych izolowanej płyty wierzchniej o zmniejszonej lokalnie grubości	141
5.4. Analiza modalna skrzypiec różniących się grubością płyty spodniej	143
5.4.1. Instrumenty i eksperymenty	144
5.4.2. Rezultaty	148
5.5. Analiza modalna skrzypiec z duszą i bez duszy	153
5.5.1. Rola duszy skrzypcowej	153
5.5.2. Instrument i eksperyment	153
5.5.3. Rezultaty	154
5.6. Analiza modalna skrzypiec z belką basową o różnym napięciu	157
5.6.1. Rola belki basowej	157
5.6.2. Instrument i eksperyment modalny	158
5.6.3. Zależność odkształcenia belki basowej od zastosowanej siły	160
5.6.4. Rezultaty	160
5.7. Analiza modalna skrzypiec różniących się rodzajem zastosowanego lakieru	164
5.7.1. Rodzaje lakierów stosowanych w lutnictwie	164
5.7.2. Instrumenty, eksperyment modalny i eksperyment oceniający jakość dźwięku skrzypiec	164
5.7.3. Rezultaty	168
5.7.3.1. Analiza modalna	168
5.7.3.2. Subiektywna ocena jakości dźwięku skrzypiec	172
5.8. Analiza modalna podstawka skrzypcowego	174
5.8.1. Rola podstawka skrzypcowego i eksperyment modalny	174
5.8.2. Rezultaty	176
5.9. Analiza modalna oktetu wiolinowego	179
5.9.1. Budowa oktetu wiolinowego oraz eksperyment modalny	179
5.9.2. Rezultaty	186
5.9.2.1. Wpływ podatności mechanicznej płyt na mody A0 i A1	192
5.10. Analiza modalna skrzypiec trapezoidalnych	193
5.10.1. Instrument i eksperyment modalny	193
5.10.2. Rezultaty	198
ZAKOŃCZENIE	203
LITERATURA	205
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH POJĘĆ I TERMINÓW	215
EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS OF GUITARS AND VIOLINS (Summary)..	219

SPIS OZNACZEŃ I SYMBOLI

a	– przyspieszenie
$a(t)$	– sygnał pobudzenia układu
A	– amplituda
$A(f)$	– widmo sygnału pobudzenia układu
$A(0)$	– pierwszy mod objętości powietrza zawartego w korpusie skrzypiec, „rezonans Helmholtza” skrzypiec
$A(1)$	– drugi mod objętości powietrza zawartego w korpusie skrzypiec
$\alpha(\Omega)$	– funkcja przejścia (transmitancji) nazywana receptancją
$b(t)$	– sygnał odpowiedzi układu
$B(f)$	– widmo sygnału odpowiedzi układu
$B(1+), B(1-)$	– para modów zginających korpusu skrzypiec
$B(1)$	– średnia częstotliwość modów $B(1+)$ oraz $B(1-)$
$\beta(\Omega)$	– funkcja przejścia (transmitancji) nazywana admitancją
c	– współczynnik tłumienia lepkiego, wiskotycznego
c_i	– współczynnik tłumienia lepkiego i -tego stopnia swobody
c_{kr}	– współczynnik tłumienia krytycznego
$[c]$	– macierz współczynników tłumienia lepkiego
C_i	– tłumienie modalne i -tego stopnia swobody
CBR	– najniższy częstotliwościowo mod korpusu skrzypiec (ang. <i>C-bout rhomboid</i>)
d	– ułamek tłumienia krytycznego
e	– podstawa logarytmu naturalnego
ε	– parametr opisujący nieliniowość
f	– częstotliwość
f_0	– częstotliwość, na którą nastrojona jest najniższa struna oktetu wioli nowego
f_{rock}	– częstotliwość modu „kołyszącego” podstawka skrzypcowego
f_{BH}	– częstotliwość modu podstawka wynikająca ze zmian lokalnych właściwości materiałowych obszaru płyty wierzchniej, na której spoczywa ją stopy podstawka
F	– amplituda siły wymuszającej
$\tilde{F}$	– zespolona postać siły wymuszającej
$\hat{F}$	– $\frac{F}{k}$

F_i	– amplituda i -tej składowej siły wymuszającej
F_h	– siła związana z tłumieniem histerezy, strukturalnym
$\mathcal{F}$	– transformata Fouriera
ϕ_i	– wektor własny odpowiadający λ_i wartości własnej, obwiednia modalna i -tego modu
ϕ_{ij}	– i -ta składowa wektora ϕ_i , opowiadająca j -tej częstotliwości modalnej
$\{\phi_i\}^T$	– transpozycja wektora ϕ_i
$[\Phi]$	– macierz modalna
G_{AA}	– jednostronne widmo mocy sygnału $a(t)$
G_{BB}	– jednostronne widmo mocy sygnału $b(t)$
G_{AB}	– jednostronne widmo skrośne („od A do B”)
$\gamma(\Omega)$	– funkcja przejścia (transmitancji) nazywana inertancją
h	– współczynnik tłumienia histerezy, strukturalnego
$h(\tau)$	– odpowiedź impulsowa
$H(f)$	– funkcja przejścia, transmitancja ogólnie
H_A	– wewnętrzna wysokość sklepienia instrumentu oktetu
H_R	– wewnętrzna wysokość boczaków instrumentów oktetu
i	– numer częstotliwości modalnej, numer modu
$[I]$	– macierz jednostkowa
j	– jednostka urojona
k	– sztywność
k_i	– sztywność i -tego stopnia swobody
K_i	– uogólniona sztywność modalna
$[k]$	– macierz sztywności
$[k]^T$	– transponowana macierz $[k]$
$[K]$	– diagonalna macierz uogólnionych sztywności modalnych
λ_i	– i -ta wartość własna macierzy
L	– wewnętrzna długość korpusu instrumentu oktetu
m	– masa
m_i	– masa i -tego stopnia swobody
$[m]$	– macierz mas
$[m]^{-1}$	– macierz odwrotna do macierzy $[m]$
$[m]^T$	– transponowana macierz $[m]$
$[M]$	– diagonalna macierz uogólnionych mas modalnych
M_i	– uogólniona masa modalna
μ	– współczynnik tarcia suchego, kulombowskiego
N	– liczba stopni swobody, siła nacisku
Q	– dobroć układu
q	– współczynnik przy nieliniowym członie sztywności
r	– współczynnik tłumienia
S_{AA}	– widmo mocy sygnału $a(t)$
S_{BB}	– widmo mocy sygnału $b(t)$
S_{AB}	– widmo skrośne („od A do B”)
t	– czas

T	– okres
θ	– kąt fazowy między siłą a wychyleniem układu
$v = \dot{x}$	– prędkość
x	– wychylenie, odległość
x_i	– wychylenie i -tego stopnia swobody
x_m	– zespolona amplituda wychylenia
$\{x\}$	– wektor wychyleń
$\dot{x}$	– prędkość
$\{\dot{x}\}$	– wektor prędkości
$\ddot{x}$	– przyspieszenie
$\{\ddot{x}\}$	– wektor przyspieszeń
$\{u\}$	– wektor współrzędnych modalnych, wektor współrzędnych normalnych
u_i	– i -ta współrzędna normalna, i -ta współrzędna modalna
V	– objętość rezonatora Helmholtza
W_{lb}	– szerokość policzków dolnych instrumentów oktetu
W_{ub}	– szerokość policzków górnych instrumentów oktetu
ω_0	– częstość drgań swobodnych
ω_i	– częstość i -tego modu
ω_t	– częstość drgań tłumionych lepkościowo, wiskotycznie
Ω_i	– częstość i -tej siły wymuszającej
$\zeta^2(f)$	– koherencja

WSTĘP

Instrumenty muzyczne, takie jak gitary i skrzypce, towarzyszą ludziom od kilku stuleci. Na początku powstawały metodą prób i błędów. Systematyczne badania naukowe, których celem było poznanie podstaw fizycznych rządzących generacją dźwięku oraz ulepszanie i dostosowywanie instrumentów do rosnących wymagań wykonawczych, rozpoczęto na początku XX w. Szczególnie szybki rozwój wiedzy dotyczącej zachowań dynamicznych instrumentów muzycznych związany był z pojawieniem się technik eksperymentalnych umożliwiających obrazowanie drgań skrzypiec i gitar – analizy modalnej, interferometrii holograficznej i wibrometrii laserowej. To dzięki nim możemy oglądać tańczące skrzypce czy taniec brzucha w wykonaniu gitar. Duże znaczenie mają również metody komputerowe – metoda elementów skończonych i metoda elementów brzegowych.

Eksperymentalna analiza modalna instrumentów muzycznych (i nie tylko) to połączenie rzemiosła i sztuki. Rzemiosła, bo jak każdy eksperyment fizyczny wymaga solidnego i przemyślanego przygotowania, popartego wiedzą z mechaniki, akustyki, fizyki, przetwarzania sygnałów i lutnictwa, a sam test modalny bywa długi i żmudny, a sztuki – bo interpretacja uzyskanych wyników wymaga nie tylko solidnych podstaw teoretycznych i zmysłu analitycznego, ale wyobraźni oraz otwartości na nowe, nieraz zaskakujące, wyniki. Pomimo trudności natury technicznej, z którymi ma się do czynienia szczególnie podczas testu modalnego niepłaskich płyt skrzypcowych, prawidłowo wykonany i zinterpretowany test modalny jest źródłem dużej satysfakcji. Czasami, oglądając animacje obwiedni modalnych skrzypiec czy gitar, zastanawiałam się, czy to wszystko dzieje się naprawdę. Ale zmierzyłam, dzieje się.

Monografia jest przeznaczona dla praktyków zajmujących się analizą modalną, a także studentów akustyki, fizyki, wydziałów technicznych i lutnictwa. Mam nadzieję, że każdy znajdzie coś dla siebie.

W rozdziale pierwszym zawarto krótką historię ewolucji gitar i skrzypiec z wcześniejszych instrumentów, skondensowany przegląd

doniesień literaturowych dotyczących badań ich zachowań dynamicznych oraz ideowe wytłumaczenie zasady, na podstawie której działa wibrometr laserowy.

Rozdziały drugi i trzeci, to rozdziały zawierające podstawowe informacje o ruchu układu o jednym stopniu swobody oraz podstawy teoretycznej i eksperymentalnej analizy modalnej. Jeden z podrozdziałów jest poświęcony drganiom nieliniowym. Gdy takie drgania występują, analiza modalna staje się bezużyteczna, bo w układach nieliniowych nie obowiązuje zasada superpozycji modów. Na szczęście skrzypce i gitary można, pod pewnymi warunkami, traktować jak układy liniowe, co również zostało opisane. W rozdziale drugim wprowadzono pojęcie funkcji transmitancji wyrażonej parametrami fizycznymi układu i opisano jej rodzaje. W rozdziale trzecim funkcje transmitancji zapisano za pomocą parametrów modalnych, wyznaczanych w eksperymencie, czyli pokazano ścisły związek między teorią a praktyką. W drugim i trzecim rozdziale jest dużo wzorów i wyprowadzeń, ale to nie powinno zniechęcać Czytelnika. W wielu przypadkach podałam nie tylko końcowe rezultaty, ale również ich wyprowadzenia, aby Czytelnik mógł je powtórzyć i sprawdzić swoje wyniki „z książką”. Gorąco do tego zachęcam. Założyłam, że Czytelnik ma podstawowe wiadomości z rachunku macierzowego, różniczkowego oraz operuje liczbami zespolonymi. Nie ma powodu, żeby przerażać się stosowanymi symbolami i oznaczeniami. W fizyce już tak jest: każda wielkość, każda funkcja musi mieć swoje jednoznaczne oznaczenie. Inaczej jasność wyводу byłaby zachwiana. Zrozumienie praw i zasad rządzących ruchem układu o jednym stopniu swobody jest podstawą zrozumienia analizy modalnej.

Rozdział czwarty został poświęcony analizie modalnej płyt gitarowych, zarówno w kompletnym instrumencie, jak i poza nim. Opisano wpływ obelkowania, w tym klasycznego obelkowania sposobem Torreasa oraz kąta zamocowania szyjki na parametry modalne. Opisano również analizę modalną płyty gitarowej na kolejnych etapach konstrukcji.

Ostatni, piąty rozdział dotyczy analizy modalnej skrzypiec. Opisano w nim pierwszą, „kultową”, analizę modalną skrzypiec wykonaną przez Marshalla, analizę swobodnych wierzchnich i spodnich płyt skrzypcowych, wpływ modyfikacji, takich jak zmiana grubości płyty spodniej, rodzaj zastosowanego lakieru czy napięcie belki basowej na parametry modalne, analizę modalną podstawka oraz instrumentu z duszą i bez niej, a także analizę oktetu wiolinowego i skrzypiec tra-

pezoidalnych. W podrozdziałach traktujących o belce basowej, duszy, podstawku, lakierze, okciecie i skrzypcach trapezoidalnych zawarto krótkie wprowadzenie dotyczące przedmiotu analizy. Analiza modalna podstawka skrzypcowego wykazała, że np. eksploatowane kilka lat temu w literaturze zagadnienie „wzgórza podstawkowego”, czyli lokalnego maksimum obserwowanego w funkcji transmitancji, ma z samym podstawkiem niewiele wspólnego. Rezultaty analizy oktetu są szczególnie ważne, bo pozwoliły rozwikłać zagadkę „modu powietrznego A1”. Jest źródłem dźwięku, czy nie jest? I dlaczego rzadko ujawnia się w skrzypcach, a bardzo często w kontrabasie? W większości podrozdziałów rozważania ograniczono do tzw. modów sygnaturalnych, oznaczanych jako A0, A1, CBR, B(1-) oraz B(1+), tzn. modów objętości powietrza zawartej w korpusie i modów zginających korpusu, mających największy wpływ na jakość generowanego dźwięku. Raz tylko pozwoliłam sobie na nieco lżejsze potraktowanie tematu, czyli skrzypcowego „sera szwajcarskiego”. W rozdziałach traktujących o eksperymentalnych testach gitar i skrzypiec wyczerpująco opisano i zilustrowano wyniki oraz przebieg eksperymentów, zarówno tych znanych z literatury, jak i własnych. Informacje te mogą być przydatne, jeśli Czytelnik będzie planował, wykonywał i interpretował własne badania.

Eksperymentalna analiza modalna nie jest jedynym narzędziem wizualizacji modów drgań. Druga technika to metoda optyczna – interferometria holograficzna. Nie opisywano badań interferometrycznych skrzypiec i gitar, bo monografia jest o analizie modalnej. Niemniej jednak należy pamiętać, że obie techniki były, i nadal są, stosowane równolegle, a uzyskane wyniki są zbieżne. Podobnie świadomie zrezygnowano z opisu badań pola akustycznego generowanego przez gitary i skrzypce oraz subiektywnej oceny jakości ich brzmienia, z niewielkimi wyjątkami. Te zagadnienia i związane z nim techniki pomiarowe wykraczają poza ramy tematu monografii, choć w oczywisty sposób są z nią związane.

Na koniec słowo do Czytelników, którzy nie są wielbicielami matematyki. Jeśli nie dacie rady przebrnąć przez rozdziały drugi i trzeci, czyli te teoretyczne i „zmatematyzowane”, nie rezygnujcie. Dalej jest naprawdę interesująco.

GITARY I SKRZYPCE – POCHODZENIE I HISTORIA BADAŃ

1.1. Pochodzenie

Za dalekich przodków gitary uznaje się instrumenty pochodzące z Bliskiego Wschodu, datowane na VI w. p.n.e. Ich korpusy miały niewielkie przewężenie w talii i przypominały kształtem współczesną gitarę. Istnieją teorie mówiące, że gitara wywodzi się od instrumentów lutniowych. Zarówno lutnia, jak i gitara składają się z korpusu rezonansowego i szyjki z progami, jednak sposób ich budowy jest różny. W lutni nie ma boczków, jej charakterystyczny korpus rezonansowy klejony jest z nieparzystej liczby wygiętych pasków, płyta wierzchnia jest płaska, a skrzynka kołkowa mocno odgięta do tyłu. W gitarze korpus sklejony jest z płaskiej płyty wierzchniej i spodniej oraz boczków. Zarówno na jednym, jak i na drugim instrumencie gra się, szarpiąc struny.

W Hiszpanii, przed najazdem Arabów, popularny był instrument o nazwie *chrotta*, o wyglądzie przypominającym *kitarę*. Maurowie, którzy w VIII w. opanowali znaczną część Półwyspu Iberyjskiego, przynieśli ze sobą *rebek*, czyli instrument smyczkowy o owalnym korpusie w kształcie gruszki oraz wschodnią lutnię. Przez następne stulecia przestano używać smyczka i grano na rebeku palcami, a sam instrument, w wyniku przenikania się wpływów hiszpańskich i arabskich, zmieniał swą nazwę i wygląd, przechodząc ostatecznie w *vihuelę* nazywaną też *guitarra espagnola* (Fletcher i Rossing, 2010). W swojej ostatecznej siedemnastowiecznej formie *vihuela* była gitarą z sześcioma podwójnymi strunami jelitowymi.

W czasie ewolucji *rebeku* w Hiszpanii, we Włoszech instrumentem popularnym wśród ludu była *guitarra latina*, wywodząca się z rzymskiej *cithary*, a na dworach – lutnia. W wyniku przenikania się wpływów, głównie hiszpańskich i częściowo włoskich, w połowie XVII w.,

powstał pierwowzór gitary klasycznej, której bezpośrednio poprzedniczki to wspomniane już *vihuela*, *lutnia* i *guitarra latina* (Tyler, 1997). Wiek XVIII to dalszy rozwój instrumentu gitarowego w Europie. Z tego okresu znane są dwa instrumenty tego typu Antonia Stradivariiego. W połowie XIX w. hiszpański lutnik Antonio Torres Jurado (1817–1892) ustalił swoisty kształt i cechy charakterystyczne gitary klasycznej, które z mniejszymi lub większymi modyfikacjami funkcjonują do dziś. Połowę XIX w. przyjmuje się za okres, w którym po długiej ewolucji powstał nowoczesny instrument, o dobrych walorach brzmieniowych i dużych możliwościach techniczno-wykonawczych.

Wskazanie pierwowzoru skrzypiec jest równie trudne jak wskazanie archetypu gitary. Ich dalekimi przodkami były instrumenty smyczkowe: bizantyjska lira oraz renesansowa *fidel* nazywana też *viuolą* i arabski *rebek*. Ze względu na kształt, bezpośrednią poprzedniczką skrzypiec mogła być siedmiostrunowa *lira da braccio*, chętnie używana na europejskich dworach w XV i XVI w. jako instrument akompaniujący, od końca XVI w. wypierana (podobnie jak inne instrumenty smyczkowe) przez skrzypce. Historia skrzypiec to przede wszystkim historia instrumentów tworzonych przez lutników włoskich, francuskich, niemieckich i innych. Lutnicy polscy w XVI w. oraz na początku XVII w. budowali instrumenty porównywalne klasą do współczesnych im instrumentów mistrzów włoskich.

LUTNICY WŁOSCY

Rodzina Amaticch

Andrea Amati (ur. 1505 r., zm. 1577 r.) – założyciel kremonskiej szkoły lutniczej. Najprawdopodobniej to on ustalił obecny kształt skrzypiec. W połowie XVI w. wykonał dla dworu francuskiego zestaw skrzypiec, altówek i wiolonczel. Nieliczne egzemplarze jego instrumentów przetrwały do naszych czasów.

Antonio Amati (ur. przed 1540 r., zm. 1607 r.) i Girolamo Amati (ur. 1561 r., zm. 1630 r.) – następcy Andrei, znani jako „bracia Amati”, wprowadzili znaczące zmiany w konstrukcji skrzypiec.

Nicolo Amati (ur. 1596 r., zm. 1684 r.) – syn Girolama, najwybitniejszy z lutniczego rodu Amaticch, czołowy przedstawiciel kremonskiej szkoły lutniczej, nauczyciel Andrei Guarneriego, Antonia Stradivariiego i innych.

Girolamo II Amati (ur. 1649 r. zm. 1740 r.) – syn Nicola, ostatni lutnik z rodu Amaticch.

Rodzina Guarnerich

Andrea Guarneri (ur. 1626 r., zm. 1698 r.) – założyciel rodu, działał w Cremonie.

Pietro Giovanni Guarneri (ur. 1655 r., zm. 1720 r.) – starszy syn Andrei, znany również jako Pietro da Mantua.

Giuseppe Giovanni Battista Guarneri (ur. 1666 r., zm. 1739 lub 1740 r.) – młodszy syn Andrei, działał w Cremonie.

Pietro Guarneri (ur. 1695 r., zm. 1762 r.) – starszy syn Giuseppe, znany jako Pietro di Venezia. Na jego skrzypcach z 1734 r. gra Wanda Wilkomirska.

Giuseppe Bartolomeo Guarneri (ur. 1698 r., zm. 1744 r.), zwany del Gesù – młodszy syn Giuseppe, najwybitniejszy przedstawiciel rodu Guarnerich, działał w Cremonie. Do czasów współczesnych zachowały się jego skrzypce. Najśłynniejsze instrumenty to „Lord Wilton” (1742) i „Il Cannone” (1743), na których grał Niccolò Paganini oraz „Vieuxtemps” (1741) – sprzedany w 2013 r. za 16 mln dolarów.

Antonio Stradivari (ur. ok. 1643 lub 1644 r., zm. 1737 r.) – przedstawiciel kremoenkiej szkoły lutniczej, jeden z najwybitniejszych budowniczych instrumentów w historii lutnictwa. Budował skrzypce, viole, altówki, wiolonczele, gitary, mandoliny i inne. Najwcześniejszy instrument, który przetrwał do dziś, pochodzi z ok. 1660 roku. Pierwszych dwadzieścia lat XVIII w. to tzw. złoty okres Stradivariego – w tym czasie powstały jego najznakomitsze instrumenty, m.in. skrzypce „Mesjasz” (1716), które dotrwały do naszych czasów w bardzo dobrym stanie. Obecnie mówi się o około kilkuset skrzypcach, kilkunastu altówkach, kilkudziesięciu wiolonczelach, kilku gitarach i mandolinach, zbudowanych w pracowni Antonia Stradivariego. Popularnie jego instrumenty nazywane są „stradivariusami”. Wiele słynnych skrzypiec ma nazwę własną, np. „Herkules-King David” (1734), „The Emperor” (1715), nazwę pochodzącą od nazwiska skrzypka, który na nich grał, np. „Lipinski” lub nazwę pochodzącą od właściciela, np. „Hammer”.

Sławni wirtuozi chętnie grali na instrumentach Stradivariego. Z Polaków byli to: Henryk Wieniawski – na skrzypcach „Sasserno” (1717), Karol Lipiński – na instrumencie „Lipinski” (1715), Bronisław Huberman – na skrzypcach „Gibson” (1713), Henryk Szeryng – na skrzypcach „King David” (1734).

Ceny instrumentów Stradivariego nieustannie rosną. W końcu XX w. płacono za najśłynniejsze egzemplarze od kilkuset tysięcy do kilku

milionów dolarów. Na początku XXI w. ich ceny nadal rosną, np. skrzypce „Lady Blunt” (1721) sprzedano w 2011 r. za ok. 16 mln dolarów, a cena wywoławcza altówki „MacDonald” (1701) na aukcji w 2014 r. wynosiła 45 mln dolarów, lecz instrument nie znalazł nabywcy.

Historia instrumentów sławnych mistrzów bywa niekiedy dramatyczna. Wiele egzemplarzy zostało zagrabionych, skradzionych (część z nich odzyskano, inne nadal są poszukiwane) albo bezpowrotnie zniszczonych, np. w katastrofie lotniczej.

LUTNICY POLSCY

Mateusz Dobrucki (ur. 1520 r., zm. 1602 r.) – pierwszy znany polski lutnik, związany z Krakowem. Zajmował się budową cytr, skrzypiec, tenorek i wiolonczel, o czym wiadomo z zachowanego spisu inwentarza dokonanego po jego śmierci. Do naszych czasów nie dotrwał żaden jego instrument (Kamiński, 1984).

Rodzina Dankwartów

Baltazar Dankwart I (lub Danquart) (ur. 1550 r., zm. ok. 1622 r.) – senior rodu lutników, działał w Wilnie.

Jan Dankwart (ur. ok. 1600 r., zm. przed 1663 r.) – prawdopodobnie syn Baltazara I, działał w Warszawie.

Baltazar Dankwart II (ur. 1620 r., zm. 1682 r.) – prawdopodobnie syn Jana, związany z Wilnem.

W zbiorach Muzeum Narodowego w Poznaniu, w Muzeum Instrumentów Muzycznych, znajdują się nieliczne instrumenty Dankwartów (rys. 1.1). Skrzypce Baltazara



Rys. 1.1. Skrzypce Baltazara Dankwarta

Źródło: Muzeum Narodowe w Poznaniu, nr inw. MNP I 1521.

Dankwarta I przypominają budową skrzypce najbardziej znanego polskiego lutnika – Marcina Groblicza. Pod względem walorów brzmieniowych skrzypce Baltazara Dankwarta I z 1602 r. nie ustępują instrumentom wybitnych mistrzów włoskich (Vogel, 2007).

Rodzina Grobliczów

Marcin Groblicz I (ur. ok. 1530 r., zm. ok. 1609 r.) – założyciel rodu lutników z Krakowa i najwybitniejszy jego przedstawiciel. Skrzypce Groblicza I wyróżniają się główką rzeźbioną w kształcie głowy



Rys. 1.2. Skrzypce Marcina Groblicza I

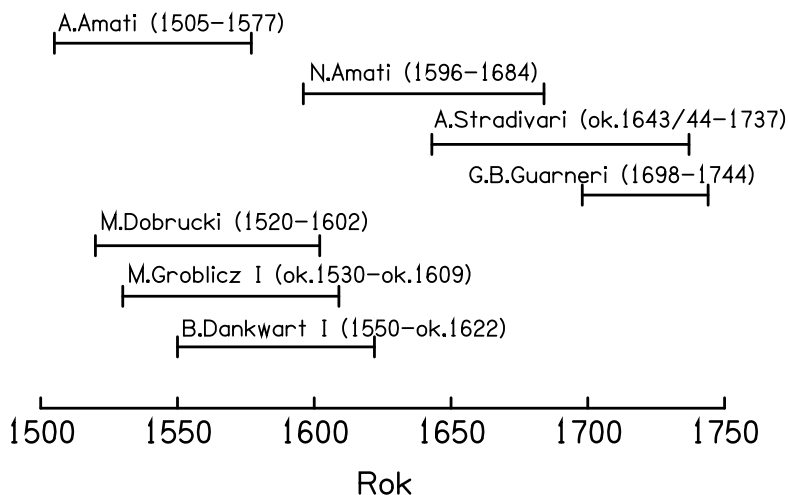
Źródło: Muzeum Narodowe w Poznaniu, nr inw. MNP I 233.

smoka, zamiast ślimaka (rys. 1.2). Zachowało się kilkanaście instrumentów jego autorstwa, z tego większość w zbiorach poznańskiego Muzeum Instrumentów Muzycznych.

Marcin Groblich III (ur. ok. 1650 r., zm. ok. 1730 r.).

Marcin Groblich IV (ur. ok. 1680 r., zm. ok. 1750 r.) – działał w Poznaniu.

Marcin Groblich V (zm. po 1760 r.) – działał w Warszawie. Z zachowanych w wileńskiej bibliotece odręcznych zapisów Groblicza V wynika, że był człowiekiem o bardzo szerokich zainteresowaniach. Obejmowały one nie tylko zagadnienia lutnicze, ale także takie dziedziny, jak wytwarzanie cichego prochu strzelniczego czy malarstwo. W Muzeum Narodowym w Krakowie znajdują się dwie niewielkie kompozycje malarskie wykonane techniką imitującą lakę wschodnią. Ich autorstwo zostało zidentyfikowane na podstawie analizy porównawczej sygnatur oraz analizy sygnatur instrumentów, które zbudował Marcin Groblich V (Krupska, 2010).



Rys. 1.3. Najważniejsi lutnicy polscy i włoscy – lata życia

Skrzypce Groblichów były wysoko cenione już za życia ich twórców (Vogel, 2007). Warto podkreślić, że pierwsi lutnicy polscy działali w czasach, kiedy tworzyli pierwsi wielcy lutnicy włoscy (rys. 1.3).

Instrumenty starych mistrzów włoskich, francuskich, niemieckich i polskich nadal są chętnie używane przez koncertujących skrzypków, na równi z instrumentami dziewiętnasto- i dwudziestowiecznymi, jak i współczesnymi (tab. 1.1).

Tabela 1.1. Lutnicy, których skrzypce były używane przez uczestników 14. Międzynarodowego Konkursu Skrzypcowego im. Henryka Wieniawskiego w Poznaniu, 2011

Carlo Bergonzi (1719)	Tadeusz Słodyczka (1995)
Nicola Bergonzi (1785)	Honorata Stalmierska (XXI w.)
Albert Caressa, Paryż (1925)	Honorata Stalmierska, kopia osiemnastowiecznych skrzypiec włoskich
Annibale Fagnola (1929)	Antonio Stradivari „Crespi” (1699)
Gagliano – współczesne	Antonio Stradivari „King George” (1710)
Nicola Gagliano (1762)	Antonio Stradivari nr 60 (1720)
Mattheus Goffriller (XVIII w.)	Antonio Stradivari „Rode”(1722)
Giovanni Battista Guadagnini (1753)	Józef Świrek (1975)
Giovanni Battista Guadagnini „ex-Bueckeburg” (1773)	Carlo Antonio Testore (1752)
Giuseppe Guarneri del Gesù (1734)	Wojciech Topa (2003)
Kopia instrumentu Pietro Guarneriego z XVII/XVIII w.	Ecevit Tunak, kopia skrzypiec „Heifetz del Gesù” (2008)
Dariusz Korcz (2008)	Karel Vávra (1934)
Francis Kuttner (1993)	Jean Baptiste Vuillaume (1827)
Pietro Antonio Landolfi (XVII w.)	Jean-Baptiste Vuillaume (1835)
Florian Leonhard (2010)	Jean Baptiste Vuillaume (1855–1860)
Joannes Mantegozza (1783)	Jean Baptiste Vuillaume
Giovanni Francesco Pressenda (1847)	A. Zubenko (2005)
Josef Rocca (1841)	Autor nieznany (XIX/XX w.)
Luigi Rovatti (1906)	Niemcy (1920)
Pierre Silvestre (1855)	Anonim

Źródło: opracowanie własne na podstawie strony internetowej Towarzystwa Muzycznego im. Henryka Wieniawskiego w Poznaniu <http://www.wieniawski.pl/uczestnicy_14_miedzynarodowego_konkursu_im_henryka_wieniawskiego.html>, dostęp kwiecień 2015.

1.2. Krótka historia badań skrzypiec i gitar

*... wśród wszystkich instrumentów muzycznych,
o skrzypcach można powiedzieć,
że zostały najlepiej zbadane i najmniej zrozumiane...*
(Arnold i Weinreich, 1982)

Pierwsze eksperymenty związane z dźwiękiem strun zostały przeprowadzone w starożytnej Grecji przez Pitagorasa w VI w. p.n.e. oraz Archyrasa w IV w. p.n.e. Były kontynuowane przez rzymskiego filozo-

fa Boetiusa w VI w. n.e. Dotyczyły one wysokości dźwięku w relacji do napięcia struny. W epoce renesansu badano związek między wysokością dźwięku a częstotliwością podstawową drgań struny i jej harmonicznymi. Martin Mersenne (1588–1648) doświadczalnie wykazał związek między napięciem struny a częstotliwością jej drgań. W XVII w. badania te kontynuowali fizycy: Robert Hooke (1633–1703), bardziej znany jako odkrywca związku między naprężeniem i odkształceniem, znanego dziś jako prawo Hooke’a i Joseph Sauveur (1653–1716), który wykorzystał zjawisko dudnienia do określenia częstotliwości podstawowej struny.

Wiek XIX to okres działalności Fouriera, Duhamela, Chladniego, Savarta i Helmholtza oraz pierwsze badania skrzypiec. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) podał słynne twierdzenie, zgodnie z którym dowolne drganie okresowe struny można rozłożyć na sumę drgań okresowych o częstotliwościach będących wielokrotnościami jej częstotliwości podstawowej. Jean-Marie-Constant Duhamel (1797–1872), bardziej znany z osiągnięć termodynamicznych, opisał dwie fazy wzajemnego ruchu smyczka i struny, tzw. styk-ślizg. Ernst Florens Friedrich Chladni (1756–1824) jako pierwszy pokazał linie węzłowe drgających płyt metalowych i szklanych, posypując je pyłkiem roślinnym i pobudzając do drgań postukiwaniem lub pocierając o nie smyczkiem. Pyłek gromadził się w niedrgających obszarach płyt, formując linie węzłowe. Powstawały w ten sposób słynne figury Chladniego, a ich wynalazca prezentował je na biletowanych pokazach. Félix Savart (1791–1841), lekarz i fizyk, współautor ilościowego prawa Biota-Savarta wiążącego indukcję magnetyczną z natężeniem prądu płynącego w przewodniku, był pierwszym badaczem roli duszy skrzypcowej oraz drgań płyt skrzypcowych Stradivariiego, Guarneriego del Gesù i wielu innych, metodą zapoczątkowaną przez Chladniego. Skonstruował skrzypce trapezoidalne o płaskiej płycie wierzchniej i belce basowej umieszczonej centralnie (Savart, 1819). Współczesne badania drgań skrzypiec trapezoidalnych opisano w podrozdziale 5.10. Hermann von Helmholtz (1821–1894) obserwował harmoniczne składowe dźwięku złożonego, generowanego przez różne instrumenty, m.in. skrzypce, za pomocą tzw. rezonatorów Helmholtza nastrojonych na różne częstotliwości. Jako pierwszy, wykorzystując urządzenie zaproponowane przez Jules’a Lissajous (1822–1880), zaobserwował piłokształtną falę rozchodzącą się w strunie pobudzanej smyczkiem.

Wiek XX to okres dynamicznego rozwoju metod pomiaru i wizualizacji drgań. Chandrasekara Venkanta Raman (1888–1970), fizyk-

-optyk, laureat Nagrody Nobla w 1930 r. za badania nad rozpraszaniem światła oraz odkrycie efektu Ramana, we wczesnym okresie działalności naukowej zajmował się również badaniami instrumentów smyczkowych (Raman, 1916, 1918), m.in. opisując jako pierwszy tzw. „wilczy” dźwięk wiolonczel i skrzypiec. Hermann Backhaus (1885–1958), fizyk, jako pierwszy pokazał deformacje wierzchnich i spodnich płyt skrzypcowych pobudzanych do drgań automatycznie (Backhaus, 1930). Drgania płyt wiolonczelowych po raz pierwszy zwizualizował Eggers (1959) metodą śledzenia zmian pojemności elektrycznej czujników kondensatorowych. Hermann Meinel (1904–1977), fizyk i lutnik, wykonał pionierskie eksperymenty, w których badał m.in. wpływ celowo wprowadzanych modyfikacji strukturalnych na mody drgań płyt skrzypcowych i barwę ich dźwięku (Meinel, 1937a, 1937b, 1957, 1975). Eksperymentalne badania drgań podstawka skrzypcowego rozpoczęli Minnaert i Vlam (1937), a badaniami podstawka wiolonczeli pierwszy zajął się Bladier (1961, 1964). Współczesne badania modalne drgań podstawka skrzypcowego opisano w podrozdziale 5.8.

Pierwszą pracę dotyczącą eksperymentalnej analizy modalnej skrzypiec opublikował Marshall (1985). Następnie efektywne narzędzie eksperymentalne, jakim jest analiza modalna, często wykorzystywano do opisu drgań własnych skrzypiec (Bissinger, 1995, 2003a; Dünwald, 1991; Skrodzka i in., 2009, 2013, 2014; Pyrkosz i Van Karsen, 2013), gitarowych (Torres i Boullosa, 2009; Skrodzka i in., 2005, 2011; Elie i in., 2012), wiolonczel (Fouilhe i Houssay, 2013; Fouilhe i in., 2009, 2011), oraz instrumentów rzadziej używanych, takich jak rosyjska bałalajka (Morrison i Rossing, 2001), harfa (Chomette i LeCarrou, 2015), cymbały (Canfield i Rossing, 1995), *kantele* (Penttinen i in., 2005), *jarana jarocho* (Boullosa i Gomez, 2014), *sundatang* (Batahong i in., 2014) czy trapezoidalne skrzypce Savarta (Duerinck i in., 2014). Zagadnienia związane z analizą modalną gitar i skrzypiec są przedstawione w rozdziale 4 i 5.

Metoda elementów skończonych (ang. *Finite Element Method*, FEM), czyli numeryczna metoda przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, znalazła również szerokie zastosowanie w modelowaniu zachowań dynamicznych skrzypiec i gitar (Rodgers, 1986; Richardson i in., 1987; Knott i in., 1989; Bretos Linaza i in., 1999; Elejabarrieta i in., 2001; Okuda i Ono, 2008; Yu i in., 2010; Zoran i in., 2012; Gorrostieta-Hurtado i in., 2012; Gough, 2015a, 2015b). Metoda ta, jako wirtualny substytut doświadczeń często niewykonalnych w laboratorium, ma wiele zalet, lecz wymaga znajomości wielu

parametrów fizycznych, których określenie dla skrzypiec i gitar bywa niemożliwe, bardzo trudne lub jedynie przybliżone, głównie ze względu na anizotropię drewna. Informacje o metodzie elementów skończonych można znaleźć w podręcznikach (Bathe, 1996; Grzymkowski i in., 2003; Zienkiewicz, 1972).

Badaniami właściwości drewna rezonansowego, używanego do wytwarzania skrzypiec i gitar klasycznych oraz ich związku z brzmieniem instrumentów zajęto się w XX w. (Barducci i Pasquallini 1948; Fukada 1950, 1951; Ghelmeziu i Beldie, 1972; Tove i Chu, 1974; Hutchins, 1978; Haines, 1979; Yano i in., 1997; Yankowskii 1980; Bukur, 1992; Sedik i in., 2010; Torres i in., 2014; Torres i Torres-Martínez, 2015). Obszerny przegląd badań drewna rezonansowego podali Harajda i Łapa (2002a). W badaniach drewna wykorzystywano również test modalny (Mania i in., 2015).

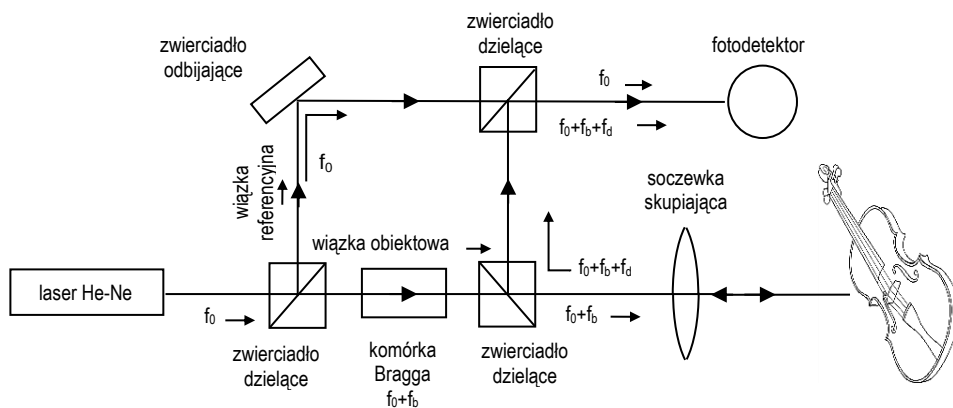
Gitary elektryczne, które generują dźwięk w wyniku przetwarzania sygnału drganiowego strun na sygnał elektryczny, a więc działają na zupełnie innych zasadach niż gitary klasyczne, również badano techniką analizy modalnej. W badaniach tych zwracano szczególną uwagę na niepożądane sprzężenie drgań strun i korpusu instrumentu, na które dodatkowo nakładają się niekorzystne zjawiska związane z dużym poziomem wytwarzanego dźwięku, emitowanego przez głośniki (Fleischer i Zwicker, 1998, 1999; Paté i in., 2014, 2015). Historię badań strun oraz instrumentów strunowych do lat osiemdziesiątych XX w. podaje Hutchins (1983) oraz wybiórczo Wróblewski (2009).

1.3. Wibrometria laserowa

Połowa lat sześćdziesiątych i lata siedemdziesiąte XX w. to okres dynamicznego rozwoju bezstykowych, optycznych metod wizualizacji drgań – *interferometrii holograficznej* (ang. *Electronic Speckle Pattern Interferometry*, ESPI), nazywanej też holografia elektroniczną lub telewizyjną oraz *dopplerowskiej wibrometrii laserowej*. Podstawy holografii można znaleźć w podręcznikach (Kaczmarek, 1979; Stankowski i Graja, 1972). Metodę interferometrii holograficznej po raz pierwszy do wizualizacji drgań podstawka skrzypcowego zastosowali Reinicke i Cremer (1970). Cykl badań drgań skrzypiec i gitar wykonanych przy użyciu interferometrii holograficznej opublikował Jansson (1971, 1973a, 1973b, 1976, 1982, 2004; Jansson i in., 1970, 1994). Rezultaty badań skrzypiec i gitar metodą interferometrii holograficznej nie są przedmiotem tej książki, ale w toku omawiania badań mo-

dalnych będą przywoływane, ponieważ były i nadal są prowadzone równoległe do testów modalnych i potwierdzają ich wyniki.

Bezstykowa metoda pomiaru prędkości lub wychylenia badanego obiektu, oparta na pomiarze dopplerowskiego przesunięcia częstotliwości fali laserowej nań padającej, nazywana jest wibrometrią laserową (ang. *Laser Doppler Vibrometry*). Schemat funkcjonowania metody przedstawiono na rys. 1.4. Wiązka monochromatycznego i spójnego światła laserowego rozdzielana jest na wiązkę padającą na drgający obiekt (po uprzednim przejściu przez modulator akustooptyczny) oraz na wiązkę referencyjną, która nie pada na obiekt. Modulator akustooptyczny, czyli tzw. komórka Bragga, to kryształ piezoelektryczny poddany działaniu sinusoidalnej fali ultradźwiękowej. W kryształach tym, w wyniku zmiennego rozkładu współczynnika załamania światła, powstaje „ruchoma” siatka dyfrakcyjna (Dobrucki, 2007). Wiązki – obiektowa i referencyjna – przebywają różne drogi optyczne. Modulator Bragga wprowadza kontrolowaną zmianę częstotliwości wiązki obiektowej, zachodzącą na skutek zjawiska Dopplera. Zmiana częstotliwości wiązki obiektowej, po przejściu przez komórkę Bragga, jest równa częstotliwości fali akustycznej wykorzystywanej w modulatorze i jest rzędu 10^7 Hz (a częstotliwość światła lasera helowo-neonowego jest rzędu 10^{14} Hz). Na skutek odbicia od drgającej powierzchni, wiązka obiektowa zostaje zmodulowana częstotliwościowo (ponownie na skutek zjawiska Dopplera) sygnałem drganiowym. Następnie dopro-



Rys. 1.4. Schemat układu do rejestracji drgań metodą wibrometrii laserowej

f_0 – częstotliwość światła laserowego

f_b – częstotliwość fali ultradźwiękowej w modulatorze akustooptycznym

f_a – częstotliwość drgań badanego obiektu

wadza się do interferencji wiązki referencyjnej i wiązki obiektowej. W fotodetektorze rejestruje się zmiany natężenia światła w obrazie interferencyjnym, które zachodzą z częstotliwością będącą różnicą częstotliwości obu wiązek i są zmodulowane częstotliwościowo sygnałem prędkości drgań obiektu. Poddając ten sygnał demodulacji, otrzymuje się przebieg rejestrowanego sygnału drganiowego. Należy podkreślić, że powyższy opis jest bardzo uproszczony; więcej informacji można znaleźć w literaturze (Drain, 1980; Albrecht in., 2003; Kaczmarek i in., 2004).

Zarówno wibrometria laserowa, jak i interferometria holograficzna jako bezstykowe, czyli nie obciążające dodatkową masą badanego obiektu metody pomiarowe, były i są szeroko wykorzystywane do badania drgań płyt skrzypcowych i gitarowych i ich elementów składowych, np. podstawka. Oprócz wymienionego już Janssona stosowali je z powodzeniem inni badacze (Hutchins i in., 1971; Alonso-Moral i Jansson, 1980, 1982; Arnold i Weinreich, 1982; Saldner i in., 1996; Rossing i Eban, 2000; Runnemalm i Molin, 2000; Boullosa, 2002; Bis-singer i Kieffer, 2003; Gren i in., 2006; Torres i Boullosa, 2009; Zoran i in., 2012; Plath, 2014).

UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY – PODSTAWA ROZUMIENIA ANALIZY MODALNEJ

2.1. Układ o jednym stopniu swobody

Poznanie praw i zasad rządzących ruchem układu o jednym stopniu swobody, a także odpowiedniej terminologii, jest kluczem do zrozumienia analizy modalnej. Analiza modalna, pod pewnymi warunkami, dokonuje rozkładu złożonego drgania obiektu na nierozkładalne dalej drgania własne nazywane modami, będące w istocie drganiami niezależnych układów o jednym stopniu swobody.

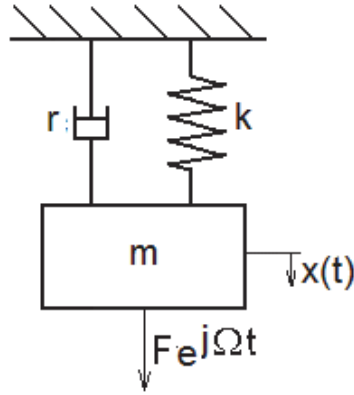
Liczbę możliwych ruchów składowych, jakie mogą wykonywać punkty materialne, nazywa się liczbą stopni swobody (Osiński, 1978). Ruch układu o jednym stopniu swobody odbywa się w jednym kierunku i opisywany jest jedną zmienną przestrzenną, np. wychyleniem lub kątem obrotu. Rozpatrując ruch układu o jednym stopniu swobody, czyni się zazwyczaj założenia ułatwiające jego analizę, czyli buduje się uproszczony model, który zawiera najistotniejsze cechy tego układu. Uproszczenia powinny być dokonane tak, aby ruch modelu był jakościowo identyczny z ruchem rzeczywistego układu o jednym stopniu swobody, a błąd związany z wprowadzeniem uproszczeń wpływał na analizę ilościową ruchu tego układu w określonych granicach (Osiński, 1978).

Punktem materialnym nazywamy ciało, którego rozmiary można zaniedbać i którego masa skupiona jest w punkcie matematycznym (Szczeniowski, 1980). Podobnie, na potrzeby modelowania ruchu układu o jednym stopniu swobody, można założyć, że elementy sprężyste i tłumiące są bezmasowe, bezwymiarowe i opisane odpowiednio przez sztywność i współczynnik tłumienia. Model układu o jednym

stopniu swobody złożony z punktu materialnego połączonego z taką sprężyną i elementem tłumiącym jest modelem układu o stałych skupionych. Cechą charakterystyczną *układu o stałych skupionych* jest to, że jego poszczególne wymiary są małe w porównaniu do długości fali sprężystej propagującej się w tym układzie, a zatem jej wpływ na układ jest pomijalny. Oznacza to, że różnice w fazie drgań poszczególnych punktów układu można pominąć. Implikuje to granicę stosowności opisu układu modelem o stałych skupionych – można to robić tylko do częstości rezonansowej układu, czyli do momentu, w którym długość fali staje się porównywalna z rozmiarami układu. Mimo iż opis układu modelem o stałych skupionych jest w dziedzinie częstości ograniczony (tylko do częstości rezonansowej), to jest on wygodny matematycznie – równania ruchu są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, z jedną zmienną niezależną, czyli czasem, które rozwiązuje się znacznie prościej niż równania różniczkowe cząstkowe opisujące układ o stałych rozłożonych. Gdy rozpatrujemy drgania układu w częstościach większych od jego częstości rezonansowej, czyli takiego, w którym rozchodzą się fale o długości mniejszej od wymiarów układu, to analiza drgań takiego układu staje się analizą propagacji fal sprężystych rozchodzących się w tym układzie. W takim przypadku nie możemy pominąć warunków brzegowych ograniczających ruch ani wymiarów i kształtu układu, które mają wpływ na rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w układzie. Taki układ nazywamy *układem o stałych rozłożonych*. Układ o stałych rozłożonych opisuje się równaniami różniczkowymi cząstkowymi, w których zmiennymi niezależnymi są czas i współrzędne przestrzenne. Zapisanie takich równań dla rozpatrywanego problemu jest zazwyczaj trudne (niekiedy niemożliwe), a ich rozwiązanie analityczne w niewielu przypadkach osiągalne. W rzeczywistości większość układów fizycznych jest układami o stałych rozłożonych. Na szczęście zazwyczaj można je zastąpić zbiorem układów o parametrach dyskretnych, czyli skończoną liczbą układów o jednym lub kilku stopniach swobody, co powoduje, że równania ruchu są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi oraz upraszcza stopień matematycznej złożoności rozpatrywanego problemu.

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody, o stałych skupionych: masie m , sztywności k oraz tłumieniu r , wymuszany siłą okresową $F \sin \Omega t$, przedstawiony na rys. 2.1.

Najpierw zajmiemy się drganiami *swobodnymi nietłumionymi* tego układu, tzn. pominiemy w rozważaniach tłumienie oraz siłę wymusza-



Rys. 2.1. Układ o jednym stopniu swobody

jącą. Równanie równowagi sił działających w takim układzie, czyli *równanie ruchu*, ma postać:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.1)$$

gdzie $\ddot{x}$ – przyspieszenie układu, x – wychylenie układu.

Równanie (2.1) przedstawia sumę jedynych sił działających w układzie, tj. siły bezwładności i siły sprężystości. Występowanie tych sił jest warunkiem koniecznym do zaistnienia ruchu drgającego.

Przekształćmy równanie (2.1) do postaci

$$a^2 \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ gdzie } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.2)$$

Parametrem równania (2.2) jest wielkość ω_0 nazywana *częstotliwością drgań swobodnych*, wyrażana w rad/s. Dla drgań swobodnych jest ona stała, niezależna od warunków początkowych i amplitudy drgań oraz zależna tylko od parametrów układu, tj. jego masy m i sztywności k . Równanie (2.2) jest liniowym równaniem różniczkowym, zatem rozpatrywany układ jest również liniowy. Rozwiązanie równania (2.2) można podać w postaci funkcji zespolonej:

$$x(t) = Ae^{-j\omega_0 t} + Be^{j\omega_0 t}, \quad (2.3)$$

gdzie j – jednostka urojona,

lub w postaci funkcji rzeczywistej:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (2.4)$$

Stałe C_1 oraz C_2 w równaniach (2.3) i (2.4) wyznacza się z warunków początkowych. Przyjmijmy następujące warunki początkowe $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$. Wówczas $C_1=x_0$ oraz $C_2=\frac{v_0}{\omega_0}$ i równanie (2.4) przyjmuje postać:

$$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega t, \quad (2.5)$$

a równanie (2.3) jest postaci:

$$x(t)=\frac{x_0+j\frac{v_0}{\omega_0}}{2}e^{-j\omega t}+\frac{x_0-j\frac{v_0}{\omega_0}}{2}e^{j\omega t}. \quad (2.6)$$

Drgania swobodne przedstawiono na rys. 2.2a.

Teraz rozpatrzmy *drżania swobodne tłumione*, z tłumieniem *wiskotycznym*, nazywanym też *lepkościowym*, tzn. takim, w którym siła tłumiąca jest proporcjonalna do prędkości układu. Są to drżania zaniżające w czasie, czyli nieustalone lub *transjentowe*. Równanie ruchu ma postać:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0, \quad (2.7)$$

lub

$$\ddot{x}+2r\dot{x}+\omega_0^2x=0, \quad (2.8)$$

gdzie $\dot{x}$ – prędkość układu, $2r=\frac{c}{m}$ – współczynnik tłumienia lepkiego.

Rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

$$x(t)=Ae^{g_1t}+Be^{g_2t}, \quad (2.9)$$

gdzie g_1 i g_2 są pierwiastkami *równania charakterystycznego* dla równania (2.8). Równanie charakterystyczne otrzymuje się po wstawieniu do równania (2.8) przewidywanego rozwiązania w postaci $x(t)=Ae^{gt}$. Ma ono postać:

$$g^2+2rg+\omega_0^2=0 \quad (2.10)$$

a jego wyróżnik $\Delta=4r^2-4\omega_0^2$.

1. Jeśli $\Delta < 0$, tzn. gdy $r < \omega_0$, to istnieją dwa pierwiastki zespolone równania (2.10):

$$g_{1,2} = -r \pm j\sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

i rozwiązanie równania ruchu (2.8) jest postaci zespolonej:

$$x(t) = e^{-rt} \left(A e^{j\sqrt{r^2 - \omega_0^2}t} + B e^{-j\sqrt{r^2 - \omega_0^2}t} \right), \quad (2.11)$$

lub w postaci rzeczywistej:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-rt} \left\{ C_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}t\right) \right\} = \\ &= e^{-rt} \{ C_1 \cos \omega_t t + C_2 \sin \omega_t t \}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

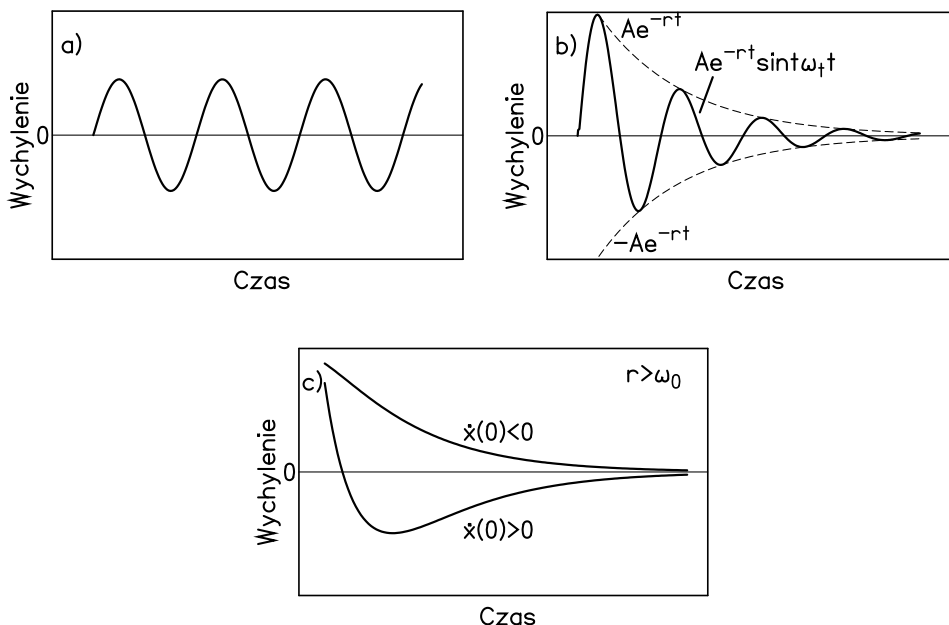
gdzie $\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$ – *częstość drgań tłumionych lekkościowo*.

Częstość drgań tłumionych lekkościowo ω_t jest mniejsza od częstości drgań swobodnych ω_0 . Równanie (2.11) opisuje *ruch harmoniczny* (na co wskazuje jednostka urojona j w wykładniku e , *tłumiony podkrytycznie*, z obwiednią amplitudy opisaną funkcją e^{-rt} . Ruch harmoniczny jawnie występuje w równaniu (2.12). Ruch ten trwa nieskończenie długo, a jego amplituda zmierza do zera, gdy czas dąży do nieskończoności. Ten ruch jest przedmiotem zainteresowania wibroakustyki, ponieważ jest to ruch drgający. Przedstawiono go na rys. 2.2b. Dwa pozostałe przypadki mają mniejsze zastosowanie w akustyce.

2. Jeśli $\Delta > 0$, tzn. gdy $r > \omega_0$, to istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste równania (2.10), $g_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$, a jego rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = e^{-rt} \left(A e^{\sqrt{r^2 - \omega_0^2}t} + B e^{-\sqrt{r^2 - \omega_0^2}t} \right). \quad (2.13)$$

Równanie (2.13) opisuje ruch *tłumiony aperiodyczny*, czyli ruch z tłumieniem nadkrytycznym. Ruch ten nie jest ruchem harmonicznym. W zależności od przyjętych warunków początkowych zanikająca w czasie amplituda drgań może przejść jeden raz przez zero lub też nie. Przedstawiono go na rys. 2.2c.



Rys. 2.2. a) drgania swobodne, b) ruch słabo (podkrytycznie) tłumiony, c) ruch aperiodyczny

3. Jeśli $\Delta > 0$, tzn. gdy $r > \omega_0$, to istnieje jeden, podwójny, pierwiastek rzeczywisty równania (2.10), a jego rozwiązanie jest postaci:

$$x(t) = e^{-rt}(A + Bt). \quad (2.14)$$

Równanie (2.14) opisuje *ruch aperiodyczny krytyczny*, czyli ruch z tłumieniem krytycznym i jak wskazuje jego nazwa, nie jest to ruch drgający. Jego amplituda zmierza monotonicznie do zera szybciej niż w ruchu aperiodycznym. Zależność wychylenia od czasu jest dla tego ruchu podobna do przedstawionych na rys. 2.2c. Z warunku $r > \omega_0$ można zdefiniować tzw. *współczynnik tłumienia krytycznego* (Ewins, 1995; Zaveri, 1985):

$$c_{kr} = 2m\omega_0. \quad (2.15)$$

Rozpatrzmy teraz układ o jednym stopniu swobody, tłumiony i wymuszany siłą okresową o częstotliwości Ω , jak na rys. 2.1.

Równanie ruchu dla tego przypadku ma postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\Omega t}, \quad (2.16)$$

lub po podzieleniu stronami przez m :

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{j\Omega t}, \quad (2.17)$$

albo po dalszych przekształceniach

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\frac{c}{2m\omega_0}\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x &= \ddot{x} + 2\frac{c}{c_{kr}}\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \\ &= \ddot{x} + 2d\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{F}{k} e^{j\Omega t}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie $d = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega_0}$ – *ułamek tłumienia krytycznego*. Parametr ten

jest wykorzystywany przy opisie parametrów modalnych drgającej struktury. Przyjmuje się, że gdy tłumienie modalne ma wartość mniejszą od 10% wartości krytycznej, to badany układ można traktować jak układ liniowy (Ewins, 1995).

Równanie (2.18) jest niejednorodne, a więc jego rozwiązanie składa się z sumy rozwiązania równania jednorodnego (całki ogólnej, opisującej drgania nieustalone) danej, w zależności od relacji między współczynnikiem tłumienia i częstością drgań swobodnych, wyrażeniem (2.11), (2.13) lub (2.14) oraz całki szczególnej, którą przewidujemy w postaci:

$$x(t) = x_m e^{j\Omega t}. \quad (2.19)$$

Pierwsza pochodna po czasie równania (2.19) to prędkość, a druga – przyspieszenie:

$$\dot{x}(t) = v(t) = j\Omega x_m e^{j\Omega t} = j\Omega x(t), \quad (2.19a)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\Omega^2 x_m e^{j\Omega t} = -\Omega^2 x(t), \quad (2.19b)$$

gdzie x_m oznacza niezależną od czasu, zespoloną amplitudę drgania ustalonego, zachodzącego z częstością siły wymuszającej Ω , $v(t)$ –

prędkość, a $a(t)$ – przyspieszenie. Po wstawieniu postulowanej całki szczególnej (2.19) do równania ruchu (2.18) otrzymujemy wyrażenie na x_m :

$$x_m = \frac{\omega_0^2 F/k}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\Omega\omega_0 d} = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd \frac{\Omega}{\omega_0}}. \quad (2.20)$$

Rozwiązanie szczególne równania (2.18) ma więc postać zespoloną. Część rzeczywista tego rozwiązania dana jest wyrażeniem:

$$\text{Re}(x) = \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{\Omega}{\omega_0} d\right)^2} \frac{F}{k} e^{j\Omega t}, \quad (2.21)$$

a część urojona ma postać:

$$\text{Im}(x) = -2 \frac{d \frac{\Omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2 \frac{\Omega}{\omega_0} d\right)^2} \frac{F}{k} e^{j\Omega t}. \quad (2.22)$$

Zatem kąt fazowy θ między siłą działającą w układzie a jego wychyleniem wynosi:

$$\text{arc tg} \theta = \frac{\text{Im}(x)}{\text{Re}(x)} = \frac{-2d \frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (2.23)$$

natomiast moduł $|x(t)|$ jest równy:

$$|x(t)| = \sqrt{\text{Re}^2(x) + \text{Im}^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\Omega/\omega_0)^2\right]^2 + (2d\Omega/\omega_0)^2}} \frac{F}{k} e^{j\Omega t}. \quad (2.24)$$

Rozwiązanie równania ruchu (2.16) w stanie ustalonym ma więc postać:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_m e^{j\Omega t} = |x_m| e^{-j\theta} e^{j\Omega t} = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd \frac{\Omega}{\omega_0}} e^{j\Omega t} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\Omega/\omega_0)^2\right]^2 + (2d\Omega/\omega_0)^2}} \frac{F}{k} e^{j(\Omega t - \theta)} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Są to drgania odbywające się z częstością siły wymuszającej Ω i tak długo jak działa siła, ich amplituda jest stała i opisana wyrażeniem (2.20).

Zapiszmy amplitudę wychylenia (2.20) w postaci

$$\frac{x_m \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)}{\frac{F}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\Omega/\omega_0)^2\right]^2 + (2d\Omega/\omega_0)^2}} \quad (2.26)$$

i zapytajmy, jakie przyjmuje wartości w zależności od częstości siły wymuszającej Ω . Trzeba więc zbadać przebieg zmienności funkcji $x \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)$

w zależności od $\frac{\Omega}{\omega_0}$, czyli przyrównać jej pierwszą pochodną po $\frac{\Omega}{\omega_0}$ do zera. Krzywą opisaną wyrażeniem (2.26) nazywa się *krzywą rezonansu wychylenia*. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2d^2} = \sqrt{1 - 2 \left(\frac{c}{2m\omega_0} \right)^2} \quad (2.27)$$

Wprowadzając *dobroć* Q układu tłumionego lepkościowo $Q = \frac{\omega_0}{2r} = \frac{\omega_0}{\frac{c}{m}} = \frac{\omega_0 m}{c}$ możemy wyrażenie (2.27) napisać w postaci:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (2.28)$$

Jest to *częstość rezonansu wychylenia*.

Na rysunku 2.3a przedstawiono krzywą rezonansu wychylenia w zależności od częstości siły wymuszającej Ω , odniesionej do częstości drgań swobodnych układu ω_0 , czyli do $\frac{\Omega}{\omega_0}$.

Sprawdźmy teraz, jak amplituda prędkości układu wymuszanego siłą okresową zależy od częstości tej siły, czyli od Ω . W tym celu obliczymy pochodną po czasie wyrażenia (2.25):

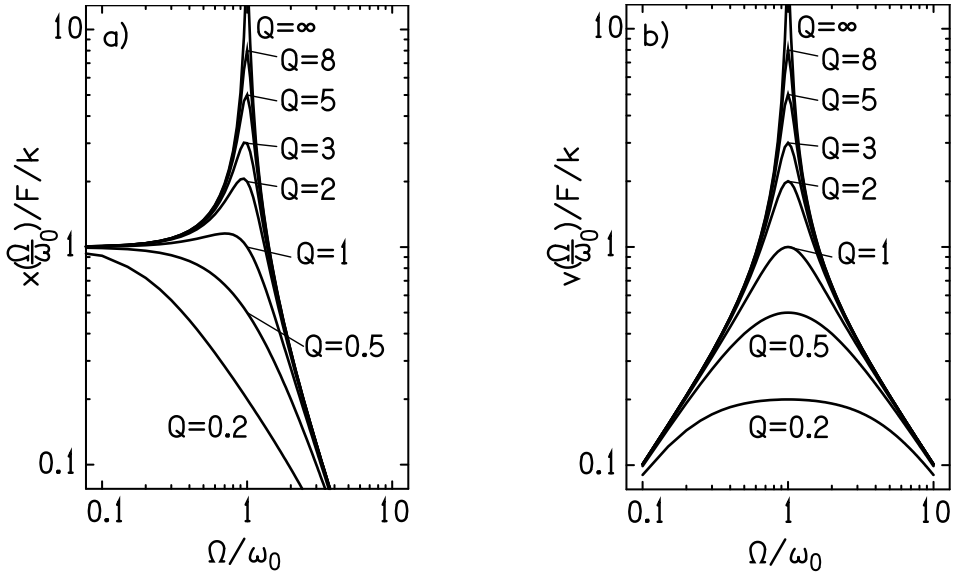
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) &= j\Omega x(t) = j\Omega x_m e^{j\Omega t} = v(t) = \frac{j\Omega}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd\frac{\Omega}{\omega_0}} \frac{F}{k} e^{j\Omega t} = \\ &= \frac{j\Omega}{\sqrt{\left[1 - (\Omega/\omega_0)^2\right]^2 + (2d\Omega/\omega_0)^2}} \frac{F}{k} e^{j(\Omega t - \theta)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

i zapytamy, dla jakich wartości $\frac{\Omega}{\omega_0}$ jej amplituda przyjmuje maksymalną wartość, czyli dla jakich wartości Ω *krzywa rezonansu prędkości* osiąga maksimum. Zauważamy, że stanie się tak, gdy $\Omega = \omega_0$ (można to sprawdzić, obliczając pochodną $\frac{dv}{d\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)}$ i przyrównując ją do

zera). Zatem w rezonansie prędkości częstość siły wymuszającej będzie równa częstości drgań swobodnych układu. Z tego powodu częstość drgań swobodnych nazywana jest częstością rezonansową. Zwyczajowo przez pojęcie rezonans rozumie się rezonans prędkości. Krzywe rezonansu prędkości przedstawiono na rys. 2.3b.

2.2. Postaci funkcji transmitancji wyrażone we współrzędnych fizycznych

Zdefiniujemy teraz ważną funkcję w eksperymentalnej analizie modalnej – *funkcję przejścia* lub inaczej *transmitancji*. Ta zespolona funkcja, zależna od częstości, powstaje w wyniku podzielenia funkcji będącej odpowiedzią układu na pobudzenie (wychylenia, prędkości lub przyspieszenia), przez funkcję opisującą to pobudzenie. Dzieląc wy-



Rys. 2.3. a) krzywe rezonansu wychyleń, b) krzywe rezonansu prędkości. Parametrem krzywych jest dobroć układu

rażenie (2.25) stronami przez $\tilde{F}(t) = Fe^{i\Omega t}$, zdefiniujemy dla układu o jednym stopniu swobody z wymuszeniem wiskotycznym funkcję przejścia nazywaną *receptancją* (ang. *receptance*), czyli stosunek wychyleń do wywołującej je siły (Ewins, 1995):

$$\alpha(\Omega) = \frac{x}{\tilde{F}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd \frac{\Omega}{\omega_0}}, \quad (2.30)$$

gdzie $\hat{F} = F/k$.

Wykorzystując wyrażenie (2.29), zdefiniujemy funkcję przejścia nazywaną *admitancją* (ang. *mobility*), czyli stosunek prędkości układu do wywołującej ją siły:

$$\beta(\Omega) = \frac{v}{\tilde{F}} = \frac{j\Omega}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd \frac{\Omega}{\omega_0}}. \quad (2.31)$$

Tabela 2.1. Wyrażenia na elementy składowe zespolonych funkcji przeniesienia układu o jednym stopniu swobody tłumionego lepkościowo

Postać funkcji transmisyjnej	Moduł	Kąt fazowy	Część rzeczywista	Część urojona
$\alpha(\Omega)$	$ \alpha(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$\arctg \theta = \frac{-2d\frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\text{Re}(\alpha) = \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\text{Im}(\alpha) = -2\frac{d\frac{\Omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$
$\beta(\Omega)$	$ \beta(\Omega) = \frac{\Omega}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$\arctg \theta = \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{2d\frac{\Omega}{\omega_0}}$	$\text{Re}(\beta) = 2\Omega\frac{d\frac{\Omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\text{Im}(\beta) = \frac{\Omega\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$
$\gamma(\Omega)$	$ \gamma(\Omega) = \frac{-\Omega^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$\arctg \theta = \frac{-2d\frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\text{Re}(\gamma) = \frac{-\Omega^2\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\text{Im}(\gamma) = 2\Omega^2\frac{d\frac{\Omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2d\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$

W podobny sposób definiujemy trzecią postać funkcji przejścia – *inertancję* (ang. *inertance*), czyli stosunek przyspieszenia układu do wywołującej je siły:

$$\gamma(\Omega) = \frac{a}{\tilde{F}} = \frac{-\Omega^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2jd \frac{\Omega}{\omega_0}}. \quad (2.32)$$

Funkcje $\alpha(\Omega)$, $\beta(\Omega)$ oraz $\gamma(\Omega)$ są zespolone. Ich moduły, kąty fazowe, części rzeczywiste i urojone przedstawiono w tabeli 2.1. Przedstawiono je również na rys. 2.4–2.6 dla arbitralnie dobranych parametrów fizycznych układu o jednym stopniu swobody tłumionego lepkościowo. Rysunki 2.3a i 2.4a oraz 2.3b i 2.4b przedstawiają w istocie te same krzywe, a różnią się jedynie wyskalowaniem osi.

Najczęściej transmitancję przedstawia się graficznie jako parę stanowiącą jej moduł i kąt fazowy, w zależności od częstości. Para ta nazywana jest *wykresem typu Bodego*.

Powróćmy do wyrażenia (2.17) przedstawiającego równanie ruchu dla układu o jednym stopniu swobody, wymuszanego siłą harmoniczną i tłumionego lepkościowo. Wstawiając do niego wyrażenia (2.19), (2.19a) i (2.19b) oraz pomijając zależność czasową, otrzymujemy:

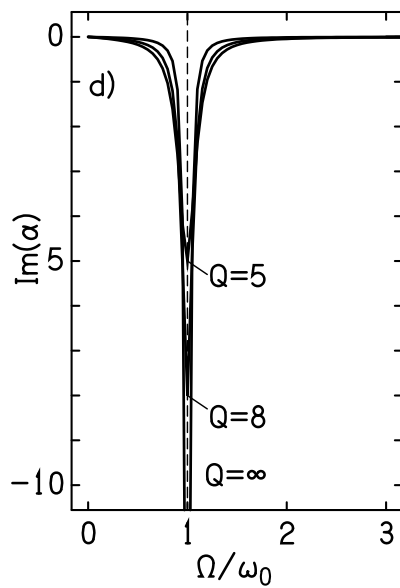
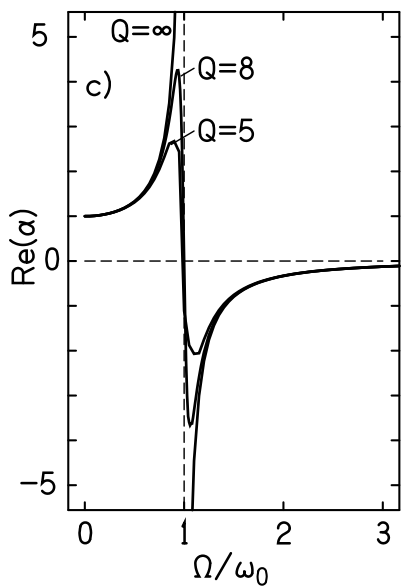
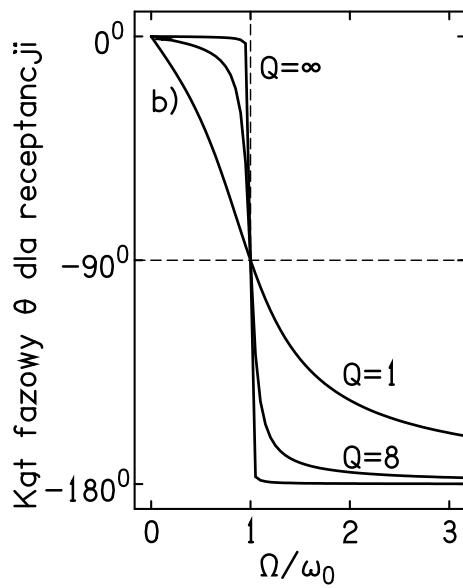
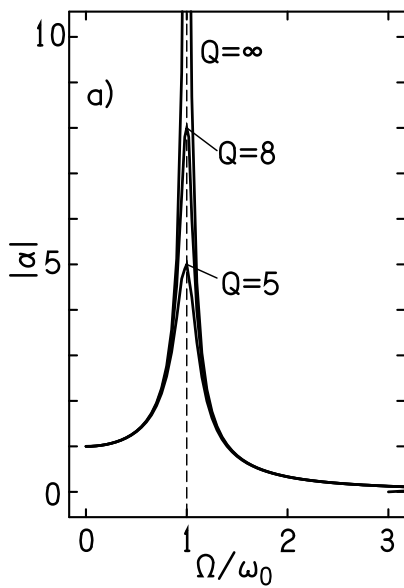
$$\frac{\frac{x}{F}}{m} = \frac{1}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2jr\Omega}. \quad (2.33)$$

Gdy Ω jest duże, to $\frac{x}{F} \rightarrow \frac{-1}{\Omega^2}$, a stąd $\alpha(\Omega) = \frac{x}{F} \rightarrow \frac{-1}{\Omega^2 m}$.

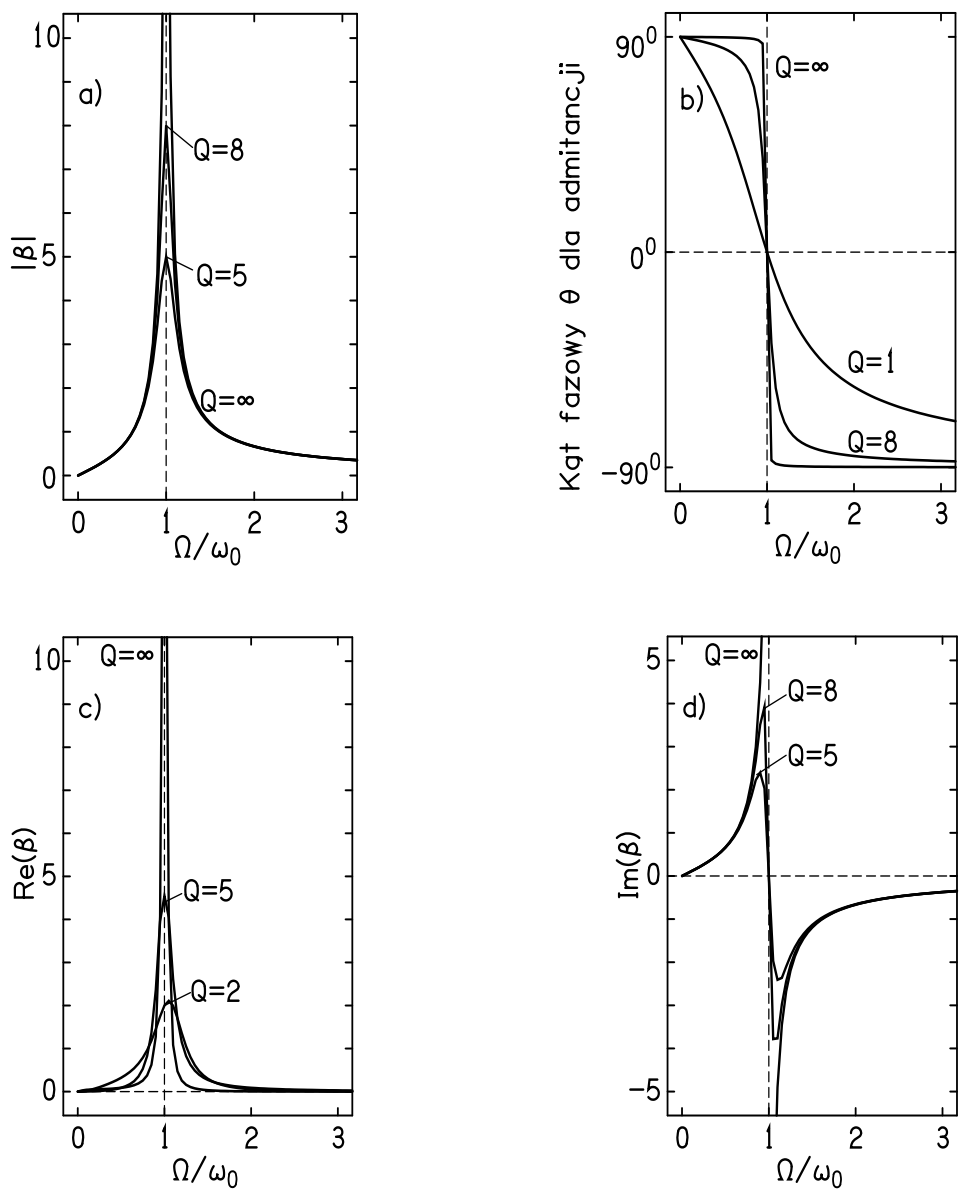
Gdy Ω jest małe, to $\frac{x}{F} \rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}$, a stąd $\alpha(\Omega) \rightarrow \frac{1}{k}$.

Pamiętając, że $\beta = j\Omega\alpha$ i rozumując podobnie, znajdujemy, że gdy Ω jest duże, to $\beta(\Omega) \rightarrow -j\frac{1}{\Omega m}$, a gdy Ω jest małe, to $\beta(\Omega) \rightarrow j\frac{\Omega}{k}$.

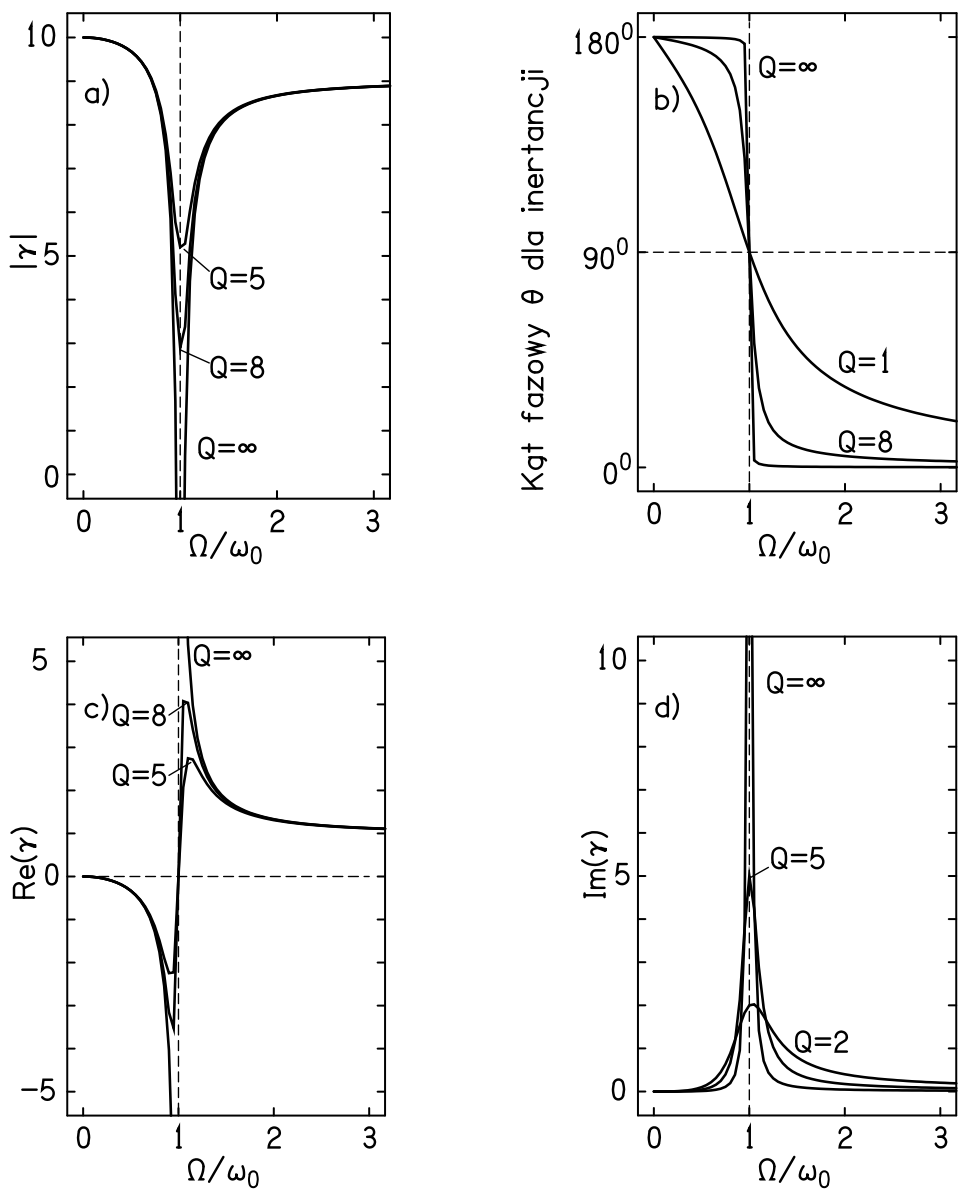
Podobnie dla $\gamma = -\Omega^2\alpha$, gdy Ω jest duże, to $\gamma(\Omega) \rightarrow \frac{1}{m}$, a gdy Ω jest małe, to $\gamma(\Omega) \rightarrow -\frac{\Omega^2}{k}$. Powyższe rozważania zostały zebrane w tabeli 2.2.



Rys. 2.4. Elementy funkcji receptancji: a) moduł, b) kąt fazowy, c) część rzeczywista, d) część urojona. Parametrem krzywych jest dobroć układu



Rys. 2.5. Elementy funkcji admitancji: a) moduł, b) kąt fazowy, c) część rzeczywista, d) część urojona. Parametrem krzywych jest dobroć układu



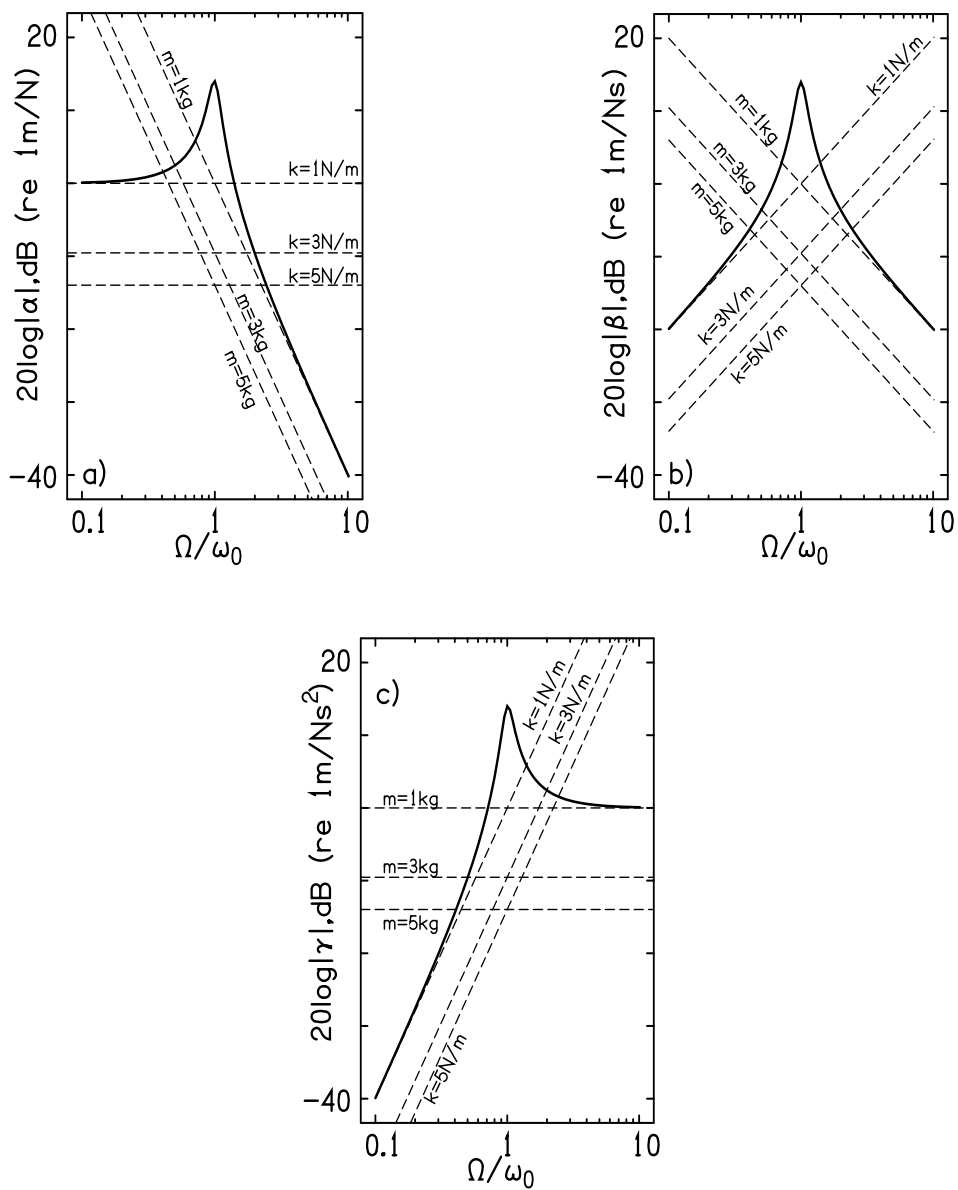
Rys. 2.6. Elementy funkcji inertancji: a) moduł, b) kąt fazowy, c) część rzeczywista, d) część urojona. Parametrem krzywych jest dobroć układu

Tabela 2.2. Granice, do których zdużąją funkcje przejścia dla małych i dułych częstotliwości siły wymuszającej Ω , dla funkcji przejścia wyrażonej w mierze liniowej i logarytmicznej

Ω jest małe, ruch zdominowany przez sztywność układu	Ω jest duże, ruch zdominowany przez bezwładność układu
$\alpha(\Omega) \rightarrow \frac{1}{k}$ $\alpha(\Omega) \rightarrow -\log(k)$	$\alpha(\Omega) \rightarrow \frac{-1}{\Omega^2 m}$ $\alpha(\Omega) \rightarrow -\log(m) - 2\log(\Omega)$
$\beta(\Omega) \rightarrow j \frac{\Omega}{k}$ $\beta(\Omega) \rightarrow \log(\Omega) - \log(k)$	$\beta(\Omega) \rightarrow -j \frac{1}{\Omega m}$ $\beta(\Omega) \rightarrow -\log(m) - \log(\Omega)$
$\gamma(\Omega) \rightarrow -\frac{\Omega^2}{k}$ $\gamma(\Omega) \rightarrow 2\log(\Omega) + \log(k)$	$\gamma(\Omega) \rightarrow \frac{1}{m}$ $\gamma(\Omega) \rightarrow -\log(m)$

Znajomość wyrażeń opisujących nisko- i wysokoczęstotściowe części funkcji przejścia przydaje się przy analizie wykresu ich modułu. Na rysunku 2.7 przedstawiono moduły funkcji przejścia z rys. 2.4a, 2.5a i 2.6a, dla $Q = 5$. Częstość względną siły wymuszającej przedstawiono tam w skali logarytmicznej, a na osi rzędnych odłożono poziom funkcji przejścia (podając wartości referencyjne) w skali liniowej. Zaznaczono również proste aproksymujące zachowanie krzywej dla małych i dużych wartości Ω/ω_0 , wykorzystując logarytmiczne wartości funkcji przejścia z tabeli 2.2. Na rysunku 2.7 uwidoczniono cechy charakterystyczne receptancji – równoległość do osi częstości niskoczęstotściowej części wykresu (poniżej Ω/ω_0), admitancji – symetrię, inertancji – równoległość do osi częstości części wysokoczęstotściowej wykresu. Mając narysowane poziomy funkcji transmitancji w opisanej powyżej skali i z naniesionymi liniami mas oraz sztywności, można łatwo znaleźć masę i sztywność układu. Masie odpowiada linia masy równoległa do wysokoczęstotściowego zbocza, a sztywności – linia równoległa do niskoczęstotściowego zbocza. Z rys. 2.7 można zatem wywnioskować, że masa przykładowego układu wynosiła 1 kg, a sztywność 1 m/N.

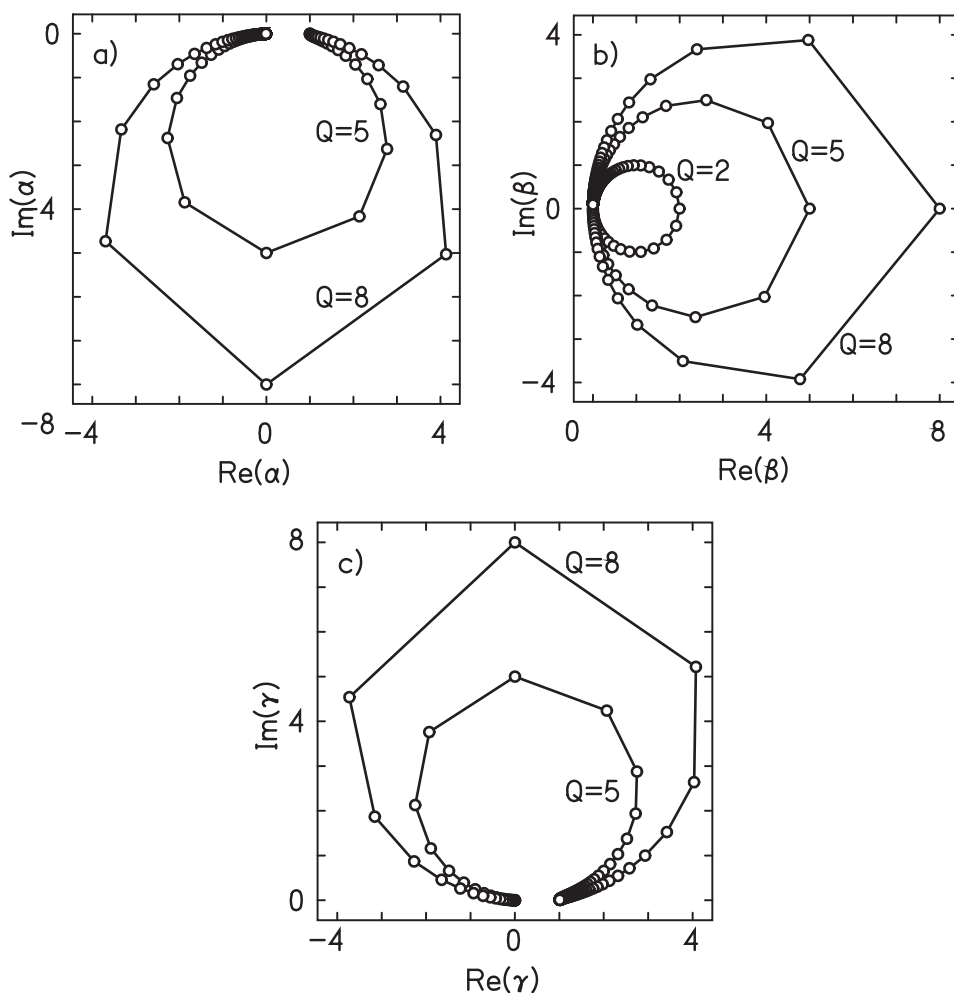
Z wykresów przedstawiających część rzeczywistą i część urojona funkcji transmitancji (rys. 2.4c,d–2.6c,d) wynika, że w częstości rezonansowej i dla skończonej dobroci układu część rzeczywista przechodzi przez zero (jak dla receptancji i inertancji) lub przyjmuje wartość skończoną (jak dla admitancji), a część urojona przyjmuje wartość skoń-



Rys. 2.7. Poziomy modułów: a) receptancji, b) admitancji, c) inertancji w logarytmicznej skali częstotliwości względnej

czoną (jak dla receptancji i inertancji) lub przechodzi przez zero (jak dla admitancji). W częstotliwości rezonansowej te części rzeczywiste i urojone, które dla skończonej dobroci przyjmowały wartość skończoną, dążą do wartości nieskończonej.

Innym sposobem graficznego przedstawienia funkcji przejścia jest wykreślenie zależności jej części urojonej od części rzeczywistej. Taki sposób prezentacji funkcji transmitancji nazywany jest *wykresem Nyquista* lub *wykresem w płaszczyźnie Arganda* (Ewins, 1995). Wy-



Rys. 2.8. Wykresy Nyquista dla funkcji przejścia w postaci: a) receptancji, b) admitancji, c) inertancji. Parametrem krzywych jest dobroć układu

kresy Nyquista dla receptancji α , admitancji β i inertancji γ przedstawiono na rys. 2.8. Są one odpowiednikami rys. 2.4c,d–2.6c,d. Wykresy te są mniej lub bardziej zniekształconymi okręgami. Im współczynnik dobroci jest mniejszy, czyli im tłumienie jest większe, tym kształt wykresu jest bardziej zbliżony do okręgu, np. rys. 2.8b dla $Q=2$. Na rysunku 2.8 punktami zaznaczono dane dla poszczególnych par wartości części rzeczywistej i części urojonej. Punkty te odpowiadają częstościom siły wymuszającej układ do drgań. Istotą wykresu Nyquista jest to, że w okolicy częstości rezonansowej punkty te leżą bardzo blisko siebie i formują część okręgu lub cały okrąg. W częstościach dalekich od częstości rezonansowej okrąg ulega deformacji. Zatem wykresy Nyquista, choć nie zawierają bezpośrednio informacji o częstości, to pozwalają określić ją za pomocą części rzeczywistej i urojonej transmittancji. Pozwalają one również określić wstępnie dobroć maksimum rezonansowego funkcji przejścia – im okrąg ma większy promień, tym dobroć jest większa, a maksimum krzywej rezonansowej – węższe. Ogólnie, w literaturze receptancję, admitancję i inertancję oznacza się symbolem $H(f)$, gdzie f jest częstotliwością wyrażaną w hercach i jest ona związana z częstością wyrażeniem $\omega = 2\pi f$.

2.3. Nieliniowość układu o jednym stopniu swobody

Rozpatrywany do tej pory układ o jednym stopniu swobody ze stałymi skupionymi był układem liniowym, tzn. jego charakterystyki były dane liniowymi równaniami różniczkowymi, zwyczajnymi, czyli między sygnałem siły wywołującej drgania a sygnałem będącym reakcją układu na wymuszenie (wychyleniem, prędkością lub przyspieszeniem) istniała relacja liniowa. Oznaczało to, że parametry układu (masa, sztywność i tłumienie) były niezależne od amplitudy drgań układu. Ruch takiego układu poddanego działaniu siły zmieniającej się w czasie sinusoidalnie jest ruchem harmonicznym.

W układach rzeczywistych siły sprężystości i tłumienia (rzadziej bezwładności) mogą zależeć od amplitudy drgań. Równania różniczkowe opisujące takie układy są nieliniowe. *W układach nieliniowych zasada superpozycji, szeroko wykorzystywana w układach liniowych, czyli m.in. w ich analizie modalnej, nie obowiązuje.* Oznacza to, że liniowe złożenie kilku rozwiązań szczególnych równania ruchu układu nieliniowego nie jest jego rozwiązaniem. Teoria układów nieliniowych

nie jest tak systematyczna i zamknięta jak teoria układów liniowych. Wynika to ze zróżnicowania problemów związanych z drganiami nieliniowymi oraz dużych trudności matematycznych. Dlatego w analizie drgań nieliniowych wykorzystuje się metody przybliżone, często przeznaczone do rozwiązania określonej klasy zagadnienia i nie mające zastosowania w innych problemach nieliniowych (Kaliski, 1966). Systematyczny wykład zagadnień związanych z drganiami nieliniowymi wykracza poza ramy niniejszej książki. Dlatego zostaną przedstawione wybrane zagadnienia z teorii drgań nieliniowych, czyli takie, z którymi można się spotkać w eksperymentach modalnych. Ograniczymy się do przypadku drgań słabo nieliniowych, podkreślając, że podstawowym założeniem w analizie modalnej jest liniowość badanego układu. Jest to oczywiste uproszczenie problemu, czyli przybliżony opis zjawisk drganiowych, jednak bardzo wygodne matematycznie i eksperymentalnie (Weyna, 2005). Jeśli w badanym, rzeczywistym, nieidealnym układzie występują nieliniowości sztywności lub tłumienia, to aby można było stosować technikę modalną, muszą być one małe. Ścisłą teorię nieliniowych układów o jednym stopniu swobody można znaleźć w podręcznikach akustyki i mechaniki (Malecki, 1964; Kaliski, 1966; Osiński, 1978; Giergiel, 2000).

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody, wymuszany siłą okresową, z liniowym członem tłumiącym i słabonieliniową sztywnością. W równaniu ruchu tego układu rezygnujemy z opisu sygnałów sinusoidalnych w notacji zespolonej ze względu na trudności matematyczne:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left(-2rx - qx^3 + \frac{F}{m} \sin \Omega t \right), \quad (2.34)$$

gdzie $\varepsilon \in (0,1)$ jest małym parametrem opisującym nieliniowość układu, a q – parametrem opisującym charakterystykę sztywnościową układu. Gdy $q = 1$, to układ ma twardą charakterystykę, a gdy $q = (-1)$, to charakterystyka elementu sprężystego jest miękka. Często występującym układem nieliniowym jest układ, dla którego $q = 1$, czyli tzw. *oscylator Duffinga*. Model Duffinga jest stosowany do opisu drgań zawieszonych membran głośnikowych oraz opisu drgań maszyn przemysłowych. Odzwierciedla on ruch amortyzowany, czyli ruch układu wymuszanego okresowo i z nieliniową sztywnością. Rozwiązanie równania (2.34) jest skomplikowane i wymaga stosowania przybliżonych metod rozwiązywania. Podamy zatem za Kaliskim (1966) jego rozwią-

zanie w pierwszym przybliżeniu:

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \theta) + \varepsilon \frac{qA^2}{32\Omega^2} \cos 3(\Omega t + \theta), \quad (2.35)$$

gdzie

$$A^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon q A^2 \right)^2 - \Omega^2 \right]^2 + 4 \varepsilon^2 r^2 \right\} = \varepsilon^2 \left(\frac{F}{m} \right)^2, \quad (2.36)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon q A^2 \right)^2 - \Omega^2}{2\Omega \varepsilon r}. \quad (2.37)$$

Okresowe wyrażenie (2.35) jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania (2.34) – oprócz znanego dla układów liniowych członu powielającego częstość siły wymuszającej ($A \cos(\Omega t + \theta)$), występuje w nim człon zależny od trzeciej harmonicznej częstości wymuszającej ($\varepsilon \frac{qA^2}{32\Omega^2} \cos 3(\Omega t + \theta)$). Kolejne przybliżenia rozwiązania równania

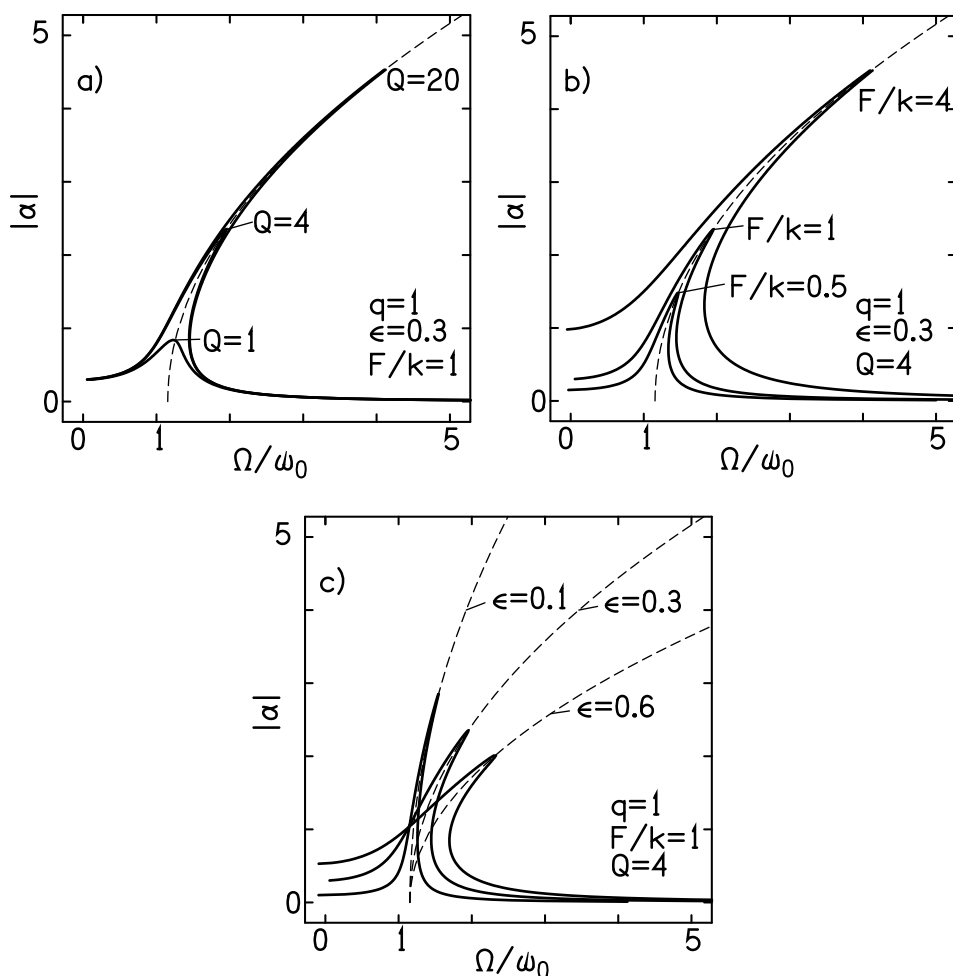
(2.34) zawierają człony zależne od $\cos 5(\Omega t + \theta)$, $\cos 7(\Omega t + \theta)$ itd., czyli są zależne od nieparzystych harmonicznych częstości wymuszającej. Wystąpienie w rozwiązaniu nieliniowego równania ruchu (2.34) nieparzystych harmonicznych, a w ogólnym przypadku harmonicznych parzystych i nieparzystych, jest cechą układów nieliniowych. Dlatego mówimy, że układ nieliniowy wprowadza zniekształcenia częstościowe.

Korzystając z wyrażeń (2.35–2.37), można wyznaczyć receptancję układu opisanego równaniem (2.34). Jej moduł przedstawiono na rys. 2.9 w zależności od dobroci układu Q , wartości amplitudy siły wymuszającej $\frac{F}{k}$ oraz wartości parametru nieliniowego ε . Wartości

stałych układu i warunki początkowe dobrano tak, aby uniknąć przypadku drgań niestacynnych. Mogą one wystąpić w rozwiązaniu równań ruchu układów nieliniowych, a charakteryzują się tym, że w rzeczywistości nie dają się zrealizować, ponieważ są bardzo niestabilne i najmniejsze zachwianie równowagi układu powoduje, że przechodzą w drgania stabilne (Kaliski, 1966). Drgań tych w analizie modalnej nie rozpatruje się. Na rysunku 2.9 przyjęto, że układ ma twardą charakterystykę elementu sprężystego. Z rysunku 2.9a wynika, że w układzie z nieliniową sztywnością typu Duffinga amplituda drgań jest

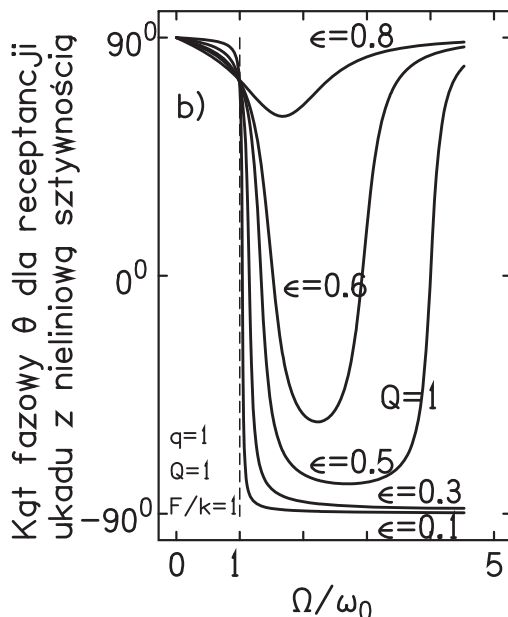
zawsze ograniczona dla skończonych wartości częstości, w przeciwieństwie do układu liniowego, dla którego w częstości rezonansowej amplituda rośnie do nieskończoności. Dlatego drgania takich układów nieliniowych nazywa się czasem drganiami o skończonej amplitudzie (Malecki, 1964).

Wartość siły wymuszającej wpływa na szerokość maksimum rezonansowego. Jest ono tym szersze, im większa jest wartość tej siły, rys. 2.9b. Mała nieliniowość, występująca w układzie objawia się



Rys. 2.9. Moduł funkcji receptancji układu z nieliniową sztywnością w zależności od:
a) dobroci Q , b) amplitudy siły wymuszającej, c) wartości parametru nieliniowego ϵ

odejściem od pionu krzywych rezonansowych. W miarę wzrostu parametru nieliniowego ε , krzywe pochylają się w prawo (dla $q=1$), rys. 2.9c, lub w lewo [dla $q=(-1)$].



Rys. 2.10. Charakterystyka fazowa receptancji układu z nieliniową sztywnością. Parametrem krzywych jest parametr nieliniowości ε

Na rysunku 2.10 przedstawiono charakterystykę fazową układu z nieliniową sztywnością. Parametrem krzywych jest ε . Rysunek ten (wraz z rys. 2.9c) w pełni opisuje moduł i kąt fazowy receptancji rozpatrywanego układu. Wynika z niego, że w częstotliwości rezonansowej przesunięcie fazowe między wychyleniem a okresową siłą wymuszającą jest mniejsze niż dla układu liniowego (rys. 2.5b). Ponadto, dla dużej wartości parametru $\varepsilon=0.8$ i częstotliwości większych od rezonansowej, przesunięcie to niewiele różni się od przesunięcia w rezonansie, a więc układ staje się sztywny.

Innym zjawiskiem powodującym nieliniowe zachowanie się układu i spotykanym w eksperymentach modalnych jest wystąpienie *tarcia suchego*, nazywanego też tarcie kulombowskim. Siła tłumiąca związana z tym tarcie jest opisana zależnością:

$$T = \mu N \text{sign}(\dot{x}), \quad (2.38)$$

gdzie N – siła nacisku, μ – współczynnik tarcia kulombowskiego, $\text{sign}(\dot{x})$ – funkcja zależna od kierunku prędkości ruchu:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{dla } \dot{x} < 0 \end{cases}.$$

Dla $\dot{x} = 0$ tarcie kulombowskie przechodzi w tarcie statyczne. Równanie ruchu układu wymuszanego siłą okresową, w którym jedyną siłą dyssypatywną jest tarcie suche, ma postać:

$$m\ddot{x} + \mu N \text{sign}(\dot{x}) + kx = F \sin \Omega t. \quad (2.39)$$

Rozwiązanie tego równania uzyskuje się metodami przybliżonymi i jest ono postaci (Giergiel, 2000):

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \theta), \quad (2.40)$$

gdzie

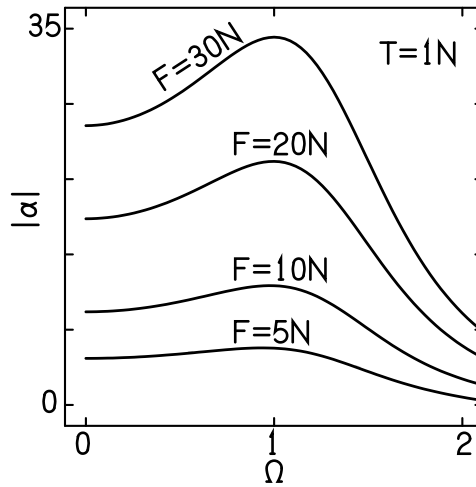
$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{4T}{\pi A F}\right)^2\right]}}, \quad (2.41)$$

$$\text{tg} \theta = \pm \frac{4T}{\pi F} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4T}{\pi F}\right)^2}}, \quad (2.42)$$

natomiast A jest liczbą rzeczywistą, gdy $\frac{T}{F} < \frac{\pi}{4}$. Jest to warunek spełniony w większości przypadków praktycznych. Przybliżone wyrażenie na tangens kąta fazowego (2.42) nie zależy od $\frac{\Omega}{\omega_0}$, a przy

$\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$ zmienia znak. W rozwiązaniu ścisłym występuje zależność kąta od $\frac{\Omega}{\omega_0}$ (Giergiel, 2000).

Z równań (2.40)–(2.42) można wyprowadzić przybliżone wyrażenie na receptancję układu wymuszanego okresowo z tarcieniem suchym. Moduł tej funkcji dla tarcia suchego o wartości 1 N przedstawiono na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Moduł funkcji receptancji układu nieliniowego z tarcieniem suchym, wymuszanego siłą okresową. Parametrem krzywych jest amplituda siły wymuszającej

ANALIZA MODALNA – WPROWADZENIE W TEORIĘ I PRAKTYKĘ

3.1. Podstawy teoretyczne analizy modalnej

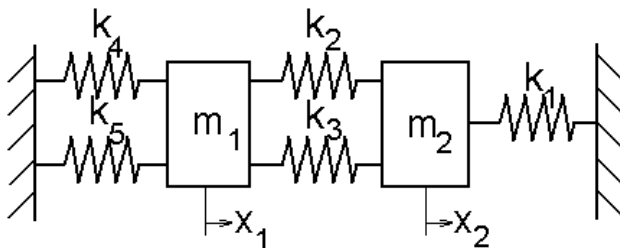
Ścisłe sformułowanie teorii analizy modalnej można znaleźć w licznych podręcznikach (Zaveri, 1985; Ewins, 1995; Natke, 1992; Maia i Silva, 1997; Craig i Kurdila, 2006; Brandt, 2011; Brickner i Ventura, 2014; Rainieri i Fabbrocino, 2014) oraz na wielu stronach internetowych. Rozbudowane, choć niezbyt skomplikowane formuły i operacje matematyczne mogą zniechęcić wielu Czytelników, ale nie da się ich uniknąć, ponieważ w teście modalnym rozpatruje się zazwyczaj dużą liczbę stopni swobody badanego układu, czyli układ równań ruchu. Obliczenia są nie tyle trudne, co żmudne. Eksperymentalna analiza modalna stała się popularnym narzędziem badawczym w połowie lat osiemdziesiątych XX w., kiedy pojawiły się komputery zdolne do takich obliczeń (rozdział 1.2). Dlatego zdecydowano się na przedstawienie podstaw teoretycznych analizy modalnej na przykładzie układu drgającego o dwóch stopniach swobody, świadomie rezygnując niekiedy ze ścisłych zapisów na rzecz jasności przekazu i koncentrując się na istocie zagadnienia.

Na rysunku 3.1 przedstawiono układ o dwóch stopniach swobody, bez tłumienia, drgający swobodnie. Założenie braku tłumienia to oczywista idealizacja i uproszczenie problemu. Rozpatrzymy jego drgania własne, tj. wyznaczmy częstości drgań własnych i związane z nimi wychylenia mas.

Sprężone równania ruchu układu o dwóch stopniach swobody, przedstawionego na rys. 3.1, w którym niewiadomymi są wychylenia

mas, mają postać:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_2 + k_3 + k_4 + k_5)x_1 - (k_2 + k_3)x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - (k_2 + k_3)x_1 + (k_1 + k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$



Rys. 3.1. Układ o dwóch stopniach swobody

3.1.1. Macierzowy zapis równań ruchu układu bez tłumienia

Układ równań (3.1) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 + k_3 + k_4 + k_5 & -(k_2 + k_3) \\ -(k_2 + k_3) & k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

lub

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}, \quad (3.3)$$

gdzie $\{\ddot{x}\}$ – wektor przyspieszeń mas m_1 i m_2 , $\{x\}$ – wektor ich wychyleń, $[m]$ – diagonalna macierz mas.

Macierz $[k]$ jest macierzą symetryczną (lecz nie diagonalną) stałych nazywanych sztywnościami sprężyn. Gdyby obie macierze, tj. $[m]$ i $[k]$ były diagonalne, to wówczas układ równań (3.2) byłby układem równań niezależnych i każde z nich można byłoby rozwiązywać niezależnie od innych. Macierz $[m]$ jest diagonalna, ponieważ jako zmienne w równaniach ruchu zostały wybrane wychylenia mas. Gdyby zmiennymi w równaniach ruchu były ugięcia sprężyn, to wówczas macierz $[k]$ byłaby diagonalna (Dobrucki, 2007).

Zakładając ruch harmoniczny układu, tj. taki, dla którego $\{\ddot{x}\} = -\lambda\{x\}$, gdzie $\lambda = \omega_0^2$, równanie (3.3) można przekształcić do postaci:

$$[[m]^{-1}[k] - \lambda[I]]\{x\} = 0, \quad (3.4)$$

gdzie $[m]^{-1}$ oznacza macierz odwrotną do macierzy $[m]$ a $[I]$ – macierz jednostkowa.

Macierz jednostkowa ma elementy jednostkowe na przekątnej, a pozostałe jej elementy są zerowe. Macierz odwrotna do danej jest definiowana jako transponowana macierz jej dopełnień algebraicznych, podzielona przez wyznacznik tej macierzy, dla której wyznacznik jest macierz odwrotna.

W przykładzie z rys. 3.1 przyjmijmy następujące wartości liczbowe: $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_2 = k_4 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ i $k_5 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Po podstawieniu danych liczbowych równanie macierzowe (3.2) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

gdzie: $[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[m]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[k] = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$.

Przekształcając równanie (3.5) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \lambda [I] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Aby wyznaczyć częstości własne drgań, czyli częstości modalne, należy zażądać, aby wyznacznik równania macierzowego (3.6) był równy zeru, tj. należy rozwiązać *równanie charakterystyczne*, nazywane też *równaniem wiekowym*, tego równania:

$$\begin{vmatrix} 12 - \lambda & -8 \\ -8 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

lub $(12 - \lambda)^2 - 64 = 0. \quad (3.7)$

Pierwiastkami równania (3.7) są:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 20,$$

oraz (na podstawie $\lambda = \omega^2$), częstości dwóch drgań własnych:

$$\omega_1 = 2 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}. \quad (3.8)$$

Teraz należy wyznaczyć obwiednie modalne, czyli wychylenia mas m_1 i m_2 , dla każdej z tych częstości, korzystając z równania (3.6): dla $\omega_1 = 2$ rad/s otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 12-4 & -8 \\ -8 & 12-4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

i dalej

$$\begin{cases} 8x_1 - 8x_2 = 0 \\ -8x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Rozwiązanie układu (3.10) jest w postaci względnej:

$$\frac{x_2}{x_1} = 1. \quad (3.11)$$

Dla $\omega_2 = 2\sqrt{5}$ rad/s mamy odpowiednio:

$$\begin{bmatrix} 12-20 & -8 \\ -8 & 12-20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

lub

$$\begin{cases} -8x_1 - 8x_2 = 0 \\ -8x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Rozwiązanie układu (3.13) jest w postaci względnej:

$$\frac{x_2}{x_1} = -1.$$

Zatem w częstości modalnej $\omega_1 = 2$ rad/s wektor wychyleń mas, nazywany w analizie modalnej *obwiednią modu* (Ewins, 1995), ma postać $\phi_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{Bmatrix}$ i obie masy drgają w fazie, z jednakowymi amplitudami.

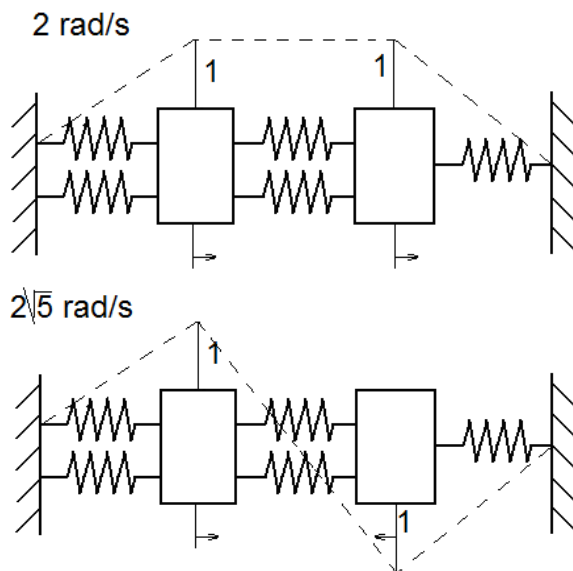
W częstości modalnej $\omega_2 = 2\sqrt{5}$ rad/s obwiednia modalna ma postać $\phi_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{Bmatrix}$ i masy poruszają się z jednakowymi amplitudami i przeciwnymi fazami.

Wartości składowych wektorów obwiedni modalnych są w postaci względnej, tj. zależą od przyjętej wartości x_1 . Z wektorów modalnych można utworzyć *macierz modalną* $[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2]$, tj. $[\Phi] = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ x_1 & -x_1 \end{bmatrix}$.

W celu normalizacji tej macierzy można przyjąć $x_1 = 1$. Wówczas macierz modalna przyjmie postać:

$$[\Phi_{x_1=1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Na rysunku 3.2 przedstawiono obwiednie modalne układu z rys. 3.1 w częstościach $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ ($f = 0.32 \text{ Hz}$, $T = 3.14 \text{ s}$) oraz $\omega_2 = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$ ($f = 0.71 \text{ Hz}$, $T = 1.40 \text{ s}$) dla normalizacji, w której $x_1 = 1$. *Normalizacja* polegająca na przyjęciu, że jedna ze składowych wektora obwiedni (w naszym przypadku składowa x_1) jest równa jedności to jedna z możliwych form normalizacji, niezbyt użyteczną w analizie modalnej. Innym sposobem normalizacji jest zażądanie, aby uogólniona macierz mas modalnych była macierzą jednostkową. Ten sposób normalizacji zostanie opisany po przedyskutowaniu ortogonalnych właściwości wektorów modalnych.



Rys. 3.2. Częstości modalne i obwiednie modalne układu o dwóch stopniach swobody, przy skalowaniu $x_1 = 1$

3.1.2. Ortogonalność wektorów modalnych

Powróćmy do równania (3.3), które na podstawie założenia $\{\ddot{\mathbf{x}}\} = -\lambda\{\mathbf{x}\}$ można zapisać w postaci:

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\} = \lambda[\mathbf{m}]\{\mathbf{x}\}. \quad (3.15)$$

Każda wartość własna λ_i i jej wektor własny $\{\phi_i\}$ spełniają równanie (3.15), tzn.:

$$[\mathbf{k}]\{\phi_i\} = \lambda_i[\mathbf{m}]\{\phi_i\}. \quad (3.16)$$

Przemnożymy równanie (3.16) z lewej strony przez transponowany wektor własny $\{\phi_j\}^T$:

$$\{\phi_j\}^T [\mathbf{k}]\{\phi_i\} = \lambda_i \{\phi_j\}^T [\mathbf{m}]\{\phi_i\}. \quad (3.17)$$

Równanie (3.15) będzie również spełnione przez wartość własną $\lambda_j \neq \lambda_i$ i odpowiadający jej wektor własny $\{\phi_j\} \neq \{\phi_i\}$:

$$[\mathbf{k}]\{\phi_j\} = \lambda_j[\mathbf{m}]\{\phi_j\}. \quad (3.18)$$

Równanie (3.18) przemnożymy z lewej strony przez transponowany wektor własny $\{\phi_i\}^T$:

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{k}]\{\phi_j\} = \lambda_j \{\phi_i\}^T [\mathbf{m}]\{\phi_j\}. \quad (3.19)$$

Ponieważ macierze $[\mathbf{m}]$ i $[\mathbf{k}]$ są macierzami symetrycznymi, tzn. $[\mathbf{m}]^T = [\mathbf{m}]$ oraz $[\mathbf{k}]^T = [\mathbf{k}]$, to równania (3.17) i (3.19) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T [\mathbf{k}]\{\phi_i\} &= \lambda_i \{\phi_i\}^T [\mathbf{m}]\{\phi_j\} \\ \{\phi_j\}^T [\mathbf{k}]\{\phi_i\} &= \lambda_j \{\phi_i\}^T [\mathbf{m}]\{\phi_j\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Po odjęciu stronami równań (3.20) otrzymujemy:

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \{\phi_i\}^T [\mathbf{m}]\{\phi_j\}. \quad (3.21)$$

Jeśli wartości własne λ_i oraz λ_j są różne ($\lambda_i \neq \lambda_j$), to:

$$\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_j\} = 0 \quad (3.22)$$

oraz na podstawie równania (3.19):

$$\{\phi_i\}^T [k] \{\phi_j\} = 0. \quad (3.23)$$

Jeśli $\{\phi_i\} = \{\phi_j\}$, to wówczas:

$$\begin{aligned} \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} &= M_i \\ \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} &= K_i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

M_i oraz K_i są liczbami różnymi od zera i odpowiadają wartości własnej i wektorowi własnemu o numerze i . Nazywamy je *uogólnioną masą modalną* i *uogólnioną sztywnością modalną*. Jeśli zatem macierz mas $[m]$ i macierz sztywności $[k]$ przemnożymy w prawej strony przez macierz modalną $[\Phi]$, a z lewej strony przez jej transpozycję $[\Phi]^T$, to otrzymamy **diagonalną** macierz mas $[M]$ i sztywności $[K]$. Jest to ważna własność macierzy modalnej nazywana *ortogonalnością* (Ewins, 1995).

Jak już wspomniano, można znormalizować macierz modalną, żądając, aby uogólniona macierz mas modalnych była macierzą jednostkową, tzn. aby:

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [M] = [I]. \quad (3.25)$$

Wtedy $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Przyjmijmy teraz, że $x_i = \phi_i$ i zapiszemy ogólną postać macierzy $[\Phi]$ dla układu o N stopniach swobody, który ma N częstości modalnych:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1j} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2i} & \cdots & \phi_{2j} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{ii} & \cdots & \phi_{ij} & \cdots & \phi_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{j1} & \phi_{j2} & \cdots & \phi_{ji} & \cdots & \phi_{jj} & \cdots & \phi_{jN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{Ni} & \cdots & \phi_{Nj} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}. \quad (3.26a)$$

Pierwszy indeks, czyli i , każdego elementu macierzy $[\Phi]$ oznacza numer składowej wektora modalnego (obwiedni modalnej) związanego z częstością modalną opisaną drugim wskaźnikiem, czyli przez j . Zatem pierwsza kolumna macierzy zawiera wszystkie (w liczbie N) składowe wektora obwiedni związanego z pierwszą częstością modalną. Pierwszy wiersz macierzy zawiera pierwszą składową wszystkich wektorów obwiedni, których też jest N , przy czym każdy element tego wiersza jest związany z inną częstością modalną.

Od tego momentu będziemy posługiwać się w naszym przykładzie macierzą modalną daną wyrażeniem (3.26). Jest to wygodne, ponieważ bardzo upraszcza obliczenia. Iloczyn macierzowy

$$[M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

opisuje diagonalną macierz częstości modalnych podniesionych do kwadratu.

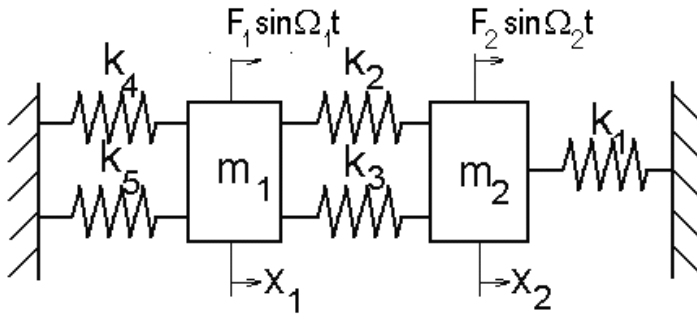
Macierz modalna $[\Phi]$, stworzona z wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym, ma własność diagonalizacji macierzy mas $[m]$ i sztywności $[k]$ układu, dla którego została wyznaczona. Zastosowanie macierzy modalnej $[\Phi]$ i jej transpozycji $[\Phi]^T$ do macierzowego równania ruchu pozwala więc rozprząc układ równań [w naszym przykładzie są to równania (3.2) oraz (3.1)]. Oznacza to, że każde równanie układu można rozwiązywać niezależnie od pozostałych, co znacznie przyspiesza i upraszcza obliczenia.

Zdiagonalizowanie macierzy mas i sztywności z wykorzystaniem ortogonalnych własności macierzy modalnej wiąże się z przejściem z *kartezjańskiego układu współrzędnych*, w którym obwiednia i -tego

modu opisana jest wektorem o składowych x_i , do układu tzn. *współrzędnych modalnych* nazywanych też *normalnymi*, w którym obwiednia i -tego modu opisana jest wektorem o składowych u_i . Przejścia ze współrzędnych kartezjańskich na współrzędne modalne dokonuje się za pomocą liniowej transformacji postaci:

$$\{x\} = [\Phi]\{u\}. \quad (3.28)$$

Powróćmy do naszego przykładu układu o dwóch stopniach swobody, dodając do niego harmoniczne siły wymuszające, jak na rys. 3.3.



Rys. 3.3. Układ o dwóch stopniach swobody z przyłożonymi siłami wymuszającymi

Zapiszmy macierzowe równanie ruchu układu z rys. 3.3 we współrzędnych modalnych, wykorzystując transformację współrzędnych (3.28) i mnożąc je z lewej strony przez $[\Phi]^T$:

$$\begin{aligned} & [\Phi]^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} [\Phi] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [\Phi]^T \begin{bmatrix} k_2 + k_3 + k_4 + k_5 & -(k_2 + k_3) \\ -(k_2 + k_3) & k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} [\Phi] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \\ & = [\Phi]^T \begin{Bmatrix} F_1 \sin \Omega_1 t \\ F_2 \sin \Omega_2 t \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie Ω_1 i Ω_2 są częstościami sił wymuszających.

Niech $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = 1$ rad/s i niech $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin t$ [N]. Podstawiając dane liczbowe do równania (3.29), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin t
\end{aligned}$$

lub

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \sin t. \quad (3.30)$$

Zatem układ równań (3.30) można zapisać we współrzędnych modalnych $\{u\}$ postaci dwóch niezależnych, niejednorodnych równań różniczkowych:

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t, \quad (3.31a)$$

$$\ddot{u}_2 + 20u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \quad (3.31b)$$

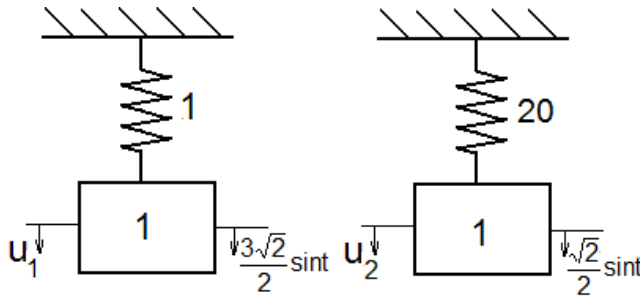
które powstały w wyniku wykonania działań w równaniu macierzowym (3.30). Implikuje to rozkład, czyli analizę, układu o dwóch stopniach swobody przedstawionego na rys. 3.3, na dwa niezależne układy o jednym stopniu swobody przedstawione na rys. 3.4, których parametry dane są we współrzędnych modalnych.

Rozwiązanie równania jednorodnego $\ddot{u}_1 + 4u_1 = 0$, czyli całkę ogólną równania (3.31a), zakładamy w postaci $u_1 = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t$. Przyjmując arbitralnie warunki początkowe $u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 1$ oraz $\omega_1 = 2$ rad/s otrzymujemy $A = \frac{1}{2}, B = 0$. Zatem całka ogólna równania (3.31a)

wynosi $u_1 = \frac{1}{2} \sin 2t$. Dla równania jednorodnego $\ddot{u}_2 + 10u_2 = 0$ zakładamy rozwiązanie, czyli całkę ogólną równania (3.31b), postaci $u_2 = C \sin \omega_2 t + D \cos \omega_2 t$. Wykorzystując warunki początkowe $u_2(0) = 0$, $\dot{u}_2(0) = 1$ oraz $\omega_2 = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$, otrzymujemy $C = \frac{\sqrt{5}}{10}$, $D = 0$ i w końcu całkę ogólną równania (3.31b) postaci $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} \sin 2\sqrt{5}t$.

Całkę szczególną równania (3.31a) przewidujemy w ogólnej postaci $u_{1,\text{szczeg}} = u_{1,m} \sin \Omega_1 t$, czyli dla założenia $\Omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ ma ona postać:

$$u_{1,\text{szczeg}} = u_{1,m} \sin t. \quad (3.32a)$$



Rys. 3.4. Układ o dwóch stopniach swobody z rys. 3.3 rozłożony na dwa niezależne układy o jednym stopniu swobody we współrzędnych modalnych

Po wstawieniu wyrażenia (3.32a) do równania (3.31a) otrzymujemy $u_{1,m} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Całka szczególna równania (3.31a) ma więc postać $u_{1,\text{szczeg}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$. Zatem rozwiązanie równania niejednorodnego (3.31a), będące sumą całki ogólnej i całki szczególnej ma postać:

$$u_{1,\text{og}} = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t. \quad (3.33a)$$

W podobny sposób wyznaczamy całkę ogólną równania (3.31b):

$$u_{2,\text{og}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \sin 2\sqrt{5}t + \frac{\sqrt{2}}{38} \sin t. \quad (3.34b)$$

Do współrzędnych kartezjańskich powracamy, wykorzystując transformację (3.28), tj.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \sin 2\sqrt{5}t + \frac{\sqrt{2}}{38} \sin t \end{Bmatrix}, \quad (3.35)$$

czyli

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2t + \frac{\sqrt{10}}{20} \sin 2\sqrt{5}t + \frac{10}{19} \sin t, \quad (3.36)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2t - \frac{\sqrt{10}}{20} \sin 2\sqrt{5}t + \frac{10}{19} \sin t. \quad (3.37)$$

Pierwsze dwa człony wyrażeń (3.36) i (3.37) opisują drgania swobodne obu mas z przykładu, przy skalowaniu do jednostkowej macierzy uogólnionej masy modalnej. W częstości drgań swobodnych $\omega_1 = 2$ rad/s obie masy poruszają się w fazie z amplitudą o wartości $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

W częstości drgań swobodnych $\omega_2 = 2\sqrt{5}$ rad/s obie masy poruszają się w fazach przeciwnych, z amplitudą równą $\frac{\sqrt{10}}{20}$. Trzeci człon wy-

rażeń (3.36) i (3.37) opisuje drgania wymuszone siłą o częstości $\Omega = 1$ rad/s. Równania (3.36) i (3.37) dobrze ilustrują podstawową zasadę analizy modalnej, zgodnie z którą drganie wypadkowe jest sumą drgań składowych, czyli modalnych i wymuszonych (Zaveri, 1985). Zatem drganie wypadkowe układu o wielu stopniach swobody może być rozłożone na sumę drgań własnych i wymuszonych, czyli badany układ musi spełniać zasadę superpozycji. Muszą więc istnieć podstawy do założenia, że badany układ jest układem liniowym, tzn. jego wychylenia są małe, skład częstotliwościowy sygnału na wyjściu układu jest taki sam jak sygnału na wejściu oraz sygnały te są addytywne i jednorodne.

3.1.3. Macierzowy zapis równań ruchu układu z tłumieniem

Do tej pory, idealizując i upraszczając nasz przykład, zakładaliśmy, że w rozpatrywanym układzie nie występuje tłumienie. W sytuacjach rzeczywistych mamy zawsze do czynienia z siłami tłumiącymi, więc

uwzględnimy je teraz w przykładzie układu o dwóch stopniach swobody, rys. 3.5. W przyrodzie występują różne rodzaje sił tłumiących, a prawidłowe ich rozpoznanie i opis bywa utrudniony, podrozdział 2.3. Z tego powodu czyni się założenia odnośnie do postaci sił tłumiących, aby przybliżyć opis tych sił do rzeczywistości w najlepszy sposób. Ponadto formuła opisująca siły tłumiące powinna łatwo poddawać się przekształceniom matematycznym, ponieważ bardzo upraszcza to opis i rozwiązanie problemu. Jedną z form tłumienia wygodnych do manipulacji matematycznych jest tłumienie lepkie, nazywane też wiskotycznym, w którym siła tłumiąca drgania jest proporcjonalna do prędkości układu. Tłumienie lepkie w rzeczywistości dobrze opisuje straty występujące w ruchu posuwistym ciała w gazie lub cieczy. Przyjmujemy, że tłumienie występujące na rys. 3.5 jest tłumieniem wiskotycznym.

Równania ruchu układu o dwóch stopniach swobody tłumionego lepkościowo i wymuszanego siłami periodycznymi mają następującą postać algebraiczną:

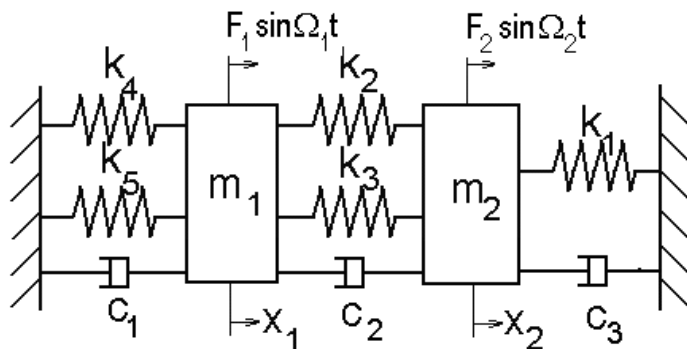
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_2 + k_3 + k_4 + k_5) x_1 - (k_2 + k_3) x_2 = F_1 \sin \Omega_1 t \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - (k_2 + k_3) x_1 + (k_1 + k_2 + k_3) x_2 = F_2 \sin \Omega_2 t \end{cases} \quad (3.38)$$

i macierzową:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_2 + k_3 + k_4 + k_5 & -(k_2 + k_3) \\ -(k_2 + k_3) & k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} F_1 \sin \Omega_1 t \\ F_2 \sin \Omega_2 t \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdzie $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$ jest wektorem prędkości mas, a $[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$, jest macierzą współczynników tłumienia lepkiego.

Zasadniczą trudnością w rozwiązaniu równania (3.39), czyli w przeprowadzeniu analizy modalnej lub inaczej, w przejściu ze współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych modalnych, jest konieczność diagonalizacji macierzy $[c]$. Aby diagonalizacja macierzy tłumienia lepkiego $[c]$ była możliwa, trzeba założyć, że jest to tłumienie proporcjonalne, tzn. że macierz $[c]$ jest proporcjonalna do macierzy $[k]$ lub do macierzy $[m]$ albo do ich kombinacji liniowej (Zaveri, 1985).



Rys. 3.5. Układ o dwóch stopniach swobody, tłumiony, wymuszany

Niech w naszym przykładzie $[c] = \frac{1}{4}[k]$, czyli niech macierz $[c]$ będzie proporcjonalna do macierzy sztywności; współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{1}{4}$. Wynika stąd, że macierz współczynników tłumienia lepkiego dla naszego przykładu ma postać: $[c] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Wszystkie stałe w przykładzie z rys. 3.5, tzn. elementy macierzy mas, sztywności oraz współczynników tłumienia wiskotycznego, a także amplitudy i częstości sił wymuszających zostały już zdefiniowane poprzednio, więc można podstawić liczby do równania (3.39):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin t. \quad (3.40)$$

Macierz modalną dla układu z rys. 3.5 znamy – jest dana wyrażeniem (3.26). Można zatem przejść, za pomocą równania transformacyjnego (3.28), ze współrzędnych kartezjańskich na modalne (normalne) i tym samym rozprząc układ równań (3.40):

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin t
\end{aligned}$$

lub po wykonaniu działań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \sin t. \quad (3.41)$$

Równanie macierzowe (3.41) zawiera dwa niezależne równania różniczkowe:

$$\ddot{u}_1 + \dot{u}_1 + 4u_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t \quad (3.42a)$$

$$\ddot{u}_2 + 5\dot{u}_2 + 20u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t. \quad (3.42b)$$

Zatem ortogonalne własności macierzy modalnej pozwoliły na rozprężenie równania (3.40) i rozkład układu o dwóch stopniach swobody przedstawionego na rys. 3.5 na dwa układy o jednym stopniu swobody opisane we współrzędnych normalnych. Po wyznaczeniu z równań (3.42a) i (3.42b) ich rozwiązań $u_1(t)$ oraz $u_2(t)$ (po bardzo mozolnych obliczeniach), można wyznaczyć przemieszczenia mas m_1 oraz m_2 we współrzędnych kartezjańskich, korzystając z równania transformacyjnego (3.28).

Inny typ tłumienia to *tłumienie histerezyowe*, nazywane również *strukturalnym*. Ten model tłumienia w wielu przypadkach jest lepszym przybliżeniem tłumienia występującego w sytuacjach rzeczywistych niż tłumienie lepkie. Z tłumieniem histerezyowym mamy do czynienia np. podczas cyklicznego ściskania i rozciągania materiałów (w granicach sprężystości), dla których relacja między naprężeniem a odkształceniem zatacza pętlę histerezyową (histereza sprężysta)

(Szczeniowski, 1980). Energia zamieniana na ciepło w wyniku tarcia wewnętrznego w każdym cyklu odkształcenia jest proporcjonalna do pola tej pętli (stąd nazwa). Siła związana z tłumieniem strukturalnym F_h jest proporcjonalna do siły sprężystości, jest to zatem tłumienie proporcjonalne, i dla układu o jednym stopniu swobody dane jest wyrażeniem:

$$F_h = j h k x, \quad (3.43)$$

gdzie h – współczynnik tłumienia histerezy, j – jednostka urojona.

Dla układu o wielu stopniach swobody macierzowe równanie ruchu wymuszanego okresowo z tłumieniem strukturalnym ma postać:

$$[m]\{\ddot{x}\} + jh[k]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}\sin\Omega t. \quad (3.44)$$

Mnożąc równanie (3.44) z lewej strony przez $[\Phi]^T$ i korzystając z transformacji na współrzędne normalne opisanej równaniem (3.28) otrzymujemy:

$$[\Phi]^T [m][\Phi]\{\ddot{u}\} + (1 + jh)[\Phi]^T [k][\Phi]\{u\} = [\Phi]^T \{F\}\sin\Omega t, \quad (3.45)$$

lub

$$[M]\{\ddot{u}\} + (1 + jh)[K]\{u\} = [\Phi]^T \{F\}\sin\Omega t,$$

gdzie $[M]$ – macierz uogólnionych mas modalnych, $[K]$ – macierz uogólnionych sztywności modalnych.

Po wykonaniu działań na macierzach zawartych w równaniu (3.44) diagonalizacji ulegną macierze $[m]$ oraz $[k]$, czyli układ równań opisanych równaniem macierzowym (3.44) będzie zawierał niezależne równania różniczkowe postaci:

$$\ddot{u}_i + (1 + jh)\omega_i^2 u_i = \frac{[\Phi]^T F_i}{M_i} \sin\Omega t, \quad (3.46)$$

które rozwiązuje się we współrzędnych modalnych. Ze współrzędnych tych można przejść na współrzędne kartezjańskie, wykorzystując równanie (3.28). Warto zauważyć, że częstość drgań własnych układu z tłumieniem histerezy jest równa częstości drgań własnych układu nietłumionego i w przeciwieństwie do częstości drgań własnych układu z tłumieniem lepkiem nie zależy od tłumienia.

Gdy tłumienie jest nieproporcjonalne, to macierz tłumienia nie jest proporcjonalna ani do macierzy masy, ani do macierzy sztywności i zadziałanie na równanie ruchu macierzą modalną nie prowadzi do diagonalizacji macierzy tłumienia. W takim przypadku układ sprzężonych różniczkowych równań ruchu drugiego stopnia należy rozwiązywać łącznie, metodami przybliżonymi (Osiński, 1978), lub sprowadzić go do układu równań różniczkowych pierwszego stopnia (Zaveri, 1985). Rozwiązanie układu równań z tłumieniem nieproporcjonalnym prowadzi do uzyskania modów tłumionych, które nie są takie same jak mody układu nietłumionego lub mody układu z tłumieniem proporcjonalnym. W modach układów nietłumionych lub tłumionych proporcjonalnie, tzw. *modach naturalnych*, obszary drgające rozdzielone linią węzłową poruszają się w fazie lub w przeciwfazie. W modach układów tłumionych nieproporcjonalnie, tzw. *modach zespolonych*, obszary drgające rozdzielone linią węzłową poruszają się z różnymi fazami, zazwyczaj różnymi od 0^0 i 180^0 . Różnica ta oznacza, że w modach naturalnych wszystkie punkty układu drgającego przechodzą przez położenie równowagi równocześnie i mają dobrze zdefiniowane, stałe linie węzłowe. W modach zespolonych nie wszystkie punkty układu drgającego przechodzą jednocześnie przez położenie równowagi.

Czytelnik z pewnością zauważył, że w miarę komplikowania przykładu z układem drgającym o dwóch stopniach swobody uciążliwość obliczeń zwiększała się. Im więcej będzie stopni swobody, tym obliczenia będą bardziej mozolne, aż staną się praktycznie niemożliwe do wykonania. Dlatego rozwiązania równań analizy modalnej dokonuje się przybliżonymi metodami numerycznymi.

3.1.4. Transmitancja układu wyrażona we współrzędnych modalnych

W rozdziale 2.2 zdefiniowano receptancję, opierając się na parametrach fizycznych układu, tzn. za pomocą jego masy, sztywności i tłumienia. Teraz wyprowadzimy wyrażenie na receptancję opierające się na parametrach modalnych, tj. obwiedni modu, masie modalnej i tłumieniu modalnym. Punktem wyjścia, dla uproszczenia rozważań, jest równanie opisujące układ o dwóch stopniach swobody, o sztywności liniowej, bez tłumienia, wymuszany siłą okresową. Można je napisać

formalnie w postaci:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}e^{j\Omega t}. \quad (3.47)$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci $\{x(t)\} = \{x\}e^{j\Omega t}$ i obliczając jego pierwszą i drugą pochodną po czasie, można równanie (3.47) zapisać jako:

$$\{x\} = \left[[k] - \Omega^2 [m] \right]^{-1} \{F\} \quad (3.48)$$

lub

$$\{x\} = [\alpha][F], \quad (3.49)$$

gdzie

$$[\alpha] = \left[[k] - \Omega^2 [m] \right]^{-1}. \quad (3.50)$$

Macierz $[\alpha]$ jest macierzą $N \times N$ (N – liczba stopni swobody układu, w naszym przykładzie jest to macierz 2×2) i jest nazywana macierzą transmitancji lub modelem odpowiedzi układu. Składa się ona z elementów postaci:

$$\alpha_{jk} = \frac{x_j}{F_k}, \quad (3.51)$$

które w istocie są receptancjami, zdefiniowanymi dla układu o jednym stopniu swobody wyrażeniem (2.30), między siłą przyłożoną do k -tego stopnia swobody a wychyleniem j -tego stopnia swobody.

Po pomnożeniu wyrażenia (3.50) z lewej strony przez transponowaną macierz modalną $[\Phi]^T$, a z prawej strony przez $[\Phi]$ otrzymujemy:

$$[\Phi]^T [\alpha] [\Phi] = [\Phi]^T \left[[k] - \Omega^2 [m] \right]^{-1} [\Phi]. \quad (3.52)$$

Pamiętając o ortogonalnych własnościach macierzy modalnej $[\Phi]$ oraz o przyjętej normalizacji do jednostkowych elementów uogólnionej macierzy masy, mamy:

$$[\Phi]^T [\alpha] [\Phi] = \left[\omega_i^2 - \Omega^2 \right]^{-1},$$

lub

$$[\alpha] = [\Phi] [\omega_i^2 - \Omega^2]^{-1} [\Phi]^T, \quad (3.53)$$

gdzie $[\omega_i^2 - \Omega^2]$ jest macierzą diagonalną a ω_i – i -tą częstością modalną.

Z wyrażenia (3.53) wynika, że macierz $[\alpha]$ jest macierzą symetryczną, tj. $\alpha_{jk} = \frac{x_j}{f_k} = \alpha_{kj} = \frac{x_k}{f_j}$.

Postać elementów macierzy $[\alpha]$ w naszym przykładzie układu z dwoma stopniami swobody można zapisać, wykorzystując wyrażenie (3.53):

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} & \frac{\phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} \\ \frac{\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} & \frac{\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}\phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} & \frac{\phi_{11}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} \\ \frac{\phi_{21}\phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{22}\phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} & \frac{\phi_{21}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{22}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} \end{bmatrix}, \\ \alpha_{11} &= \frac{\phi_{11}\phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\phi_{1i}\phi_{1i}}{\omega_i^2 - \Omega^2}, \\ \alpha_{12} &= \frac{\phi_{11}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\phi_{1i}\phi_{2i}}{\omega_i^2 - \Omega^2}, \\ \alpha_{21} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\phi_{2i}\phi_{1i}}{\omega_i^2 - \Omega^2}, \\ \alpha_{22} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\phi_{2i}\phi_{2i}}{\omega_i^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Ogólnie, wyrażenie dla elementu macierzy transmitancji układu wymuszanego siłą okresową, bez tłumienia ma postać:

$$\alpha_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{ji} \phi_{ki}}{\omega_i^2 - \Omega^2}. \quad (3.54)$$

Mianownik wyrażenia (3.54) jest nazywany niekiedy biegunem *transmitancji*, a licznik – *residuum* (Ewins, 1995).

W przypadku układu z tłumieniem proporcjonalnym (np. do macierzy sztywności), rozumując podobnie jak dla układu bez tłumienia, otrzymujemy wyrażenie na receptancję w postaci:

$$[\alpha] = [[k] - \Omega^2[m] + j\Omega[c]]^{-1}, \quad (3.55)$$

w którym po zastosowaniu macierzy modalnej $[\Phi]$ i jej macierzy transponowanej $[\Phi]^T$ wszystkie macierze, tj. $[k]$, $[m]$ i $[c]$, są diagonalne:

$$[\alpha] = [\Phi][\omega_i^2 - \Omega^2 + j\Omega[C]]^{-1}[\Phi]^T. \quad (3.56)$$

Element macierzy transmitancji (receptancji) dla układu z tłumieniem proporcjonalnym i wymuszeniem okresowym ma postać:

$$\alpha_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{ji} \phi_{ki}}{\omega_i^2 - \Omega^2 + j\Omega \frac{C_i}{M_i}}. \quad (3.57)$$

Z wyrażeń (3.54) i (3.57) wynika, że transmitancja układu złożonego jest sumą transmitancji układów o jednym stopniu swobody, wyrażonych przez parametry modalne tych układów, tj. częstości modalne ω_i , tłumienia modalne C_i oraz składowe wektorów obwiedni modalnej odpowiadające i -tej częstości modalnej ϕ_{ji} oraz ϕ_{ki} . W układzie złożonym jest zatem spełniona zasada superpozycji, a więc układ ten musi być układem liniowym. W funkcji przejścia zawarte są informacje o parametrach modalnych układu. Maksima funkcji transmitancji (receptancji, admitancji lub inertancji – w zależności od postaci sygnału będącego odpowiedzią na pobudzenie) występują w częstościach modalnych. Szerokość połówkowa krzywej składowej częstości ω_i , związana jest z tłumieniem modalnym występującym w tej częstości.

Jeśli wartość transmitancji jest wyrażona w mierze liniowej, to szerokość połówkowa jest szerokością maksimum rezonansowego w połowie wysokości krzywej. Jeśli wartość transmitancji jest wyrażona w mierze logarytmicznej, to szerokość połówkowa odpowiada szerokości krzywej 3 dB poniżej maksimum. Składowe wektora obwiedni modalnej odpowiadającej częstotliwości rezonansowej ω_i tworzą residuum modułu transmitancji i odpowiadają za jego amplitudę. Ponieważ transmitancja w ogólności (tzn. dla układów z tłumieniem) jest funkcją zespoloną, to do pełnego jej opisu, oprócz częstotściowej charakterystyki jej modułu, potrzebna jest jeszcze charakterystyka fazowa. Charakterystyki fazowe, dla układu o jednym stopniu swobody, zostały opisane w rozdziale 2.2. O częstotliwości modalnej i tłumieniu modalnym mówi się, że są parametrami lokalnymi transmitancji. Obwiednia modalna jest parametrem globalnym układu. Im bardziej skomplikowana postać sił dyssypacyjnych i sprężystych, tym postać funkcji transmitancji jest bardziej złożona (Ewins, 1995; Maia i Silva, 1997; Rainieri i Fabbrocino, 2014).

Ogólnie macierz transmitancji $[\alpha]$ ma postać:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} & \cdots & \alpha_{jN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{Ni} & \cdots & \alpha_{Nj} & \cdots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Pierwsza kolumna tej macierzy zawiera receptancje wyznaczone dla wszystkich stopni swobody, gdy siła jest przyłożona do pierwszego stopnia swobody. W pierwszym wierszu tej macierzy znajdują się receptancje pierwszego stopnia swobody wyznaczone w sytuacji, gdy siła przyłożona jest do wszystkich stopni swobody. Jeden wiersz i jedna kolumna macierzy $[\alpha]$ zostały wyróżnione zaznaczeniem w kształcie prostokąta. Powrócimy do nich przy omawianiu minimalnej liczby funkcji transmitancji niezbędnej do przeprowadzenia testu modalnego badanego układu.

Na przekątnej macierzy receptancji $[\alpha]$ znajdują się elementy o indeksach $j=k$. Poza przekątną znajdują się elementy o wskaźnikach $j \neq k$. Receptancję dla $j=k$ nazywamy *receptancją punktową*, a w innym przypadku – *receptancją przejścia* (Ewins, 1995). Dla naszego przykładowego układu o dwóch stopniach swobody bez tłumienia i wymuszanego siłą okresową, w module receptancji punktowej obserwuje się głębokie minimum między częstościami rezonansowymi obu stopni swobody, rys. 3.6a. Tak głębokiego minimum między częstościami rezonansowymi nie obserwuje się w przebiegu modułu receptancji przejścia, rys. 3.6b. Różnica ta wynika ze znaków, z jakimi sumowane są poszczególne elementy transmitancji punktowej, czyli α_{jj} , oraz transmitancji przejścia, czyli α_{jk} . W naszym przykładzie opisane są one wyrażeniem (3.54), a uogólniona macierz masy modalnej została wyskalowana do macierzy jednostkowej. W związku z tym macierz modalna $[\Phi]$, opisana wyrażeniem (3.26), ma trzy elementy dodatnie: ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{21} oraz jeden ujemny ϕ_{22} . Elementy te tworzą iloczyny występujące w licznikach części składowych α_{jk} .

Z tego powodu transmitancja punktowa, np. α_{11} jest sumą składników dodatnich, a transmitancja przejścia, np. α_{12} , jest sumą składnika dodatniego i ujemnego:

$$\alpha_{11} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega_2^2 - \Omega^2} = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{0.5}{\omega_2^2 - \Omega^2}, \quad (3.59a)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\omega_2^2 - \Omega^2} = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{0.5}{\omega_2^2 - \Omega^2}. \quad (3.59b)$$

Z rys. 3.6 można zaobserwować, że częstości modalne są równe: $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ i $\omega_2 = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$.

Powrócimy teraz do wyrażenia (3.58) i zapytamy, ile receptancji α_{jk} trzeba wyznaczyć, aby wypełnić macierz $[\alpha]$. Wiemy już, że jest to macierz symetryczna, więc wyznaczenie elementów znajdujących się nad jej przekątną określa również elementy znajdujące się pod przekątną. Skomplikujemy teraz nasz układ przykładowy i założymy, że składa się on nie z dwóch, lecz z trzech mas połączonych sprężynami, a tłu-

mienie w nim nie występuje. Macierz $[\alpha]$ jest więc postaci:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Wyznamy pierwszą kolumnę macierzy opisanej wyrażeniem (3.60), czyli α_{11} , α_{12} oraz α_{13} . Znamy zatem

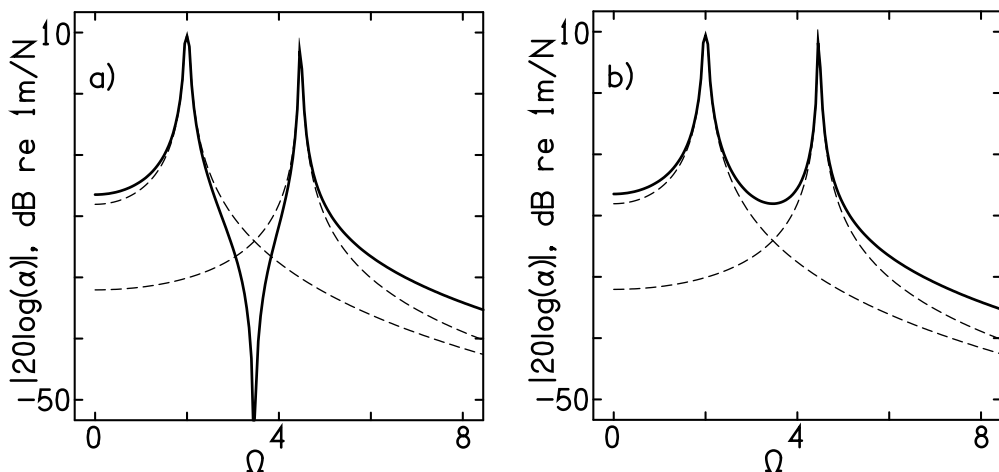
$$\alpha_{11} = \frac{\phi_{11}\phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{13}\phi_{13}}{\omega_3^2 - \Omega^2}, \quad (3.61)$$

czyli możemy wyznaczyć częstotliwości modalne ω_1 , ω_2 , ω_3 oraz składowe ϕ_{11} , ϕ_{12} oraz ϕ_{13} .

Teraz wyznaczymy α_{12} :

$$\alpha_{12} = \frac{\phi_{11}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{13}\phi_{23}}{\omega_3^2 - \Omega^2}. \quad (3.62)$$

Wyrażenie (3.62) pozwala powtórnie wyznaczyć częstotliwości modalne oraz ϕ_{21} , ϕ_{22} oraz ϕ_{23} , a ϕ_{11} , ϕ_{12} i ϕ_{13} już znamy.



Rys. 3.6. a) receptancja punktowa, b) receptancja przejścia układu o dwóch stopniach swobody bez tłumienia. Na rysunku zaznaczono linią przerywaną receptancję obu stopni swobody

Wyznamy jeszcze α_{13} :

$$\alpha_{13} = \frac{\phi_{11}\phi_{31}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{12}\phi_{32}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{13}\phi_{33}}{\omega_3^2 - \Omega^2}, \quad (3.63)$$

skąd znajdujemy ϕ_{31} , ϕ_{32} oraz ϕ_{33} . Do wypelnienia przekatnej i dolnej połowy macierzy opisanej wyrażeniem (3.60) potrzebujemy jeszcze α_{32} , α_{22} oraz α_{33} :

$$\begin{aligned} \alpha_{32} &= \frac{\phi_{31}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{32}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{33}\phi_{23}}{\omega_3^2 - \Omega^2} \\ \alpha_{22} &= \frac{\phi_{21}\phi_{21}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{22}\phi_{22}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{23}\phi_{23}}{\omega_3^2 - \Omega^2} \\ \alpha_{33} &= \frac{\phi_{31}\phi_{31}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{32}\phi_{32}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{33}\phi_{33}}{\omega_3^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Wszystkie elementy α_{32} , α_{22} i α_{33} już znamy. Zatem do wyznaczenia pełnej macierzy receptancji $[\alpha]$ wystarczyło wyznaczenie wszystkich elementów jej jednej kolumny. Podobne rozumowanie można przeprowadzić, zakładając, że znamy jeden pełny wiersz macierzy $[\alpha]$.

Zrekapitulujmy dotychczasowe rozważania dotyczące teoretycznej analizy modalnej. Pełne jej wyniki uzyskuje się, znając masy, tłumienia, sztywności i wymuszenia wszystkich stopni swobody. Wyniki teoretycznej analizy modalnej opisuje tzw. *model modalny* składający się z dwóch macierzy: macierzy funkcji przejścia i macierzy, w której zebrano częstości i tłumienia modalne. Funkcje przejścia składają się z wektorów własnych, odpowiadających wartościom własnym, nazywanym częstościami modalnymi. Wektory własne, czyli obwiednie modalne, zbudowane są z wychyleń, prędkości lub przyspieszeń związanych z poszczególnymi stopniami swobody.

3.2. Eksperymentalna analiza modalna

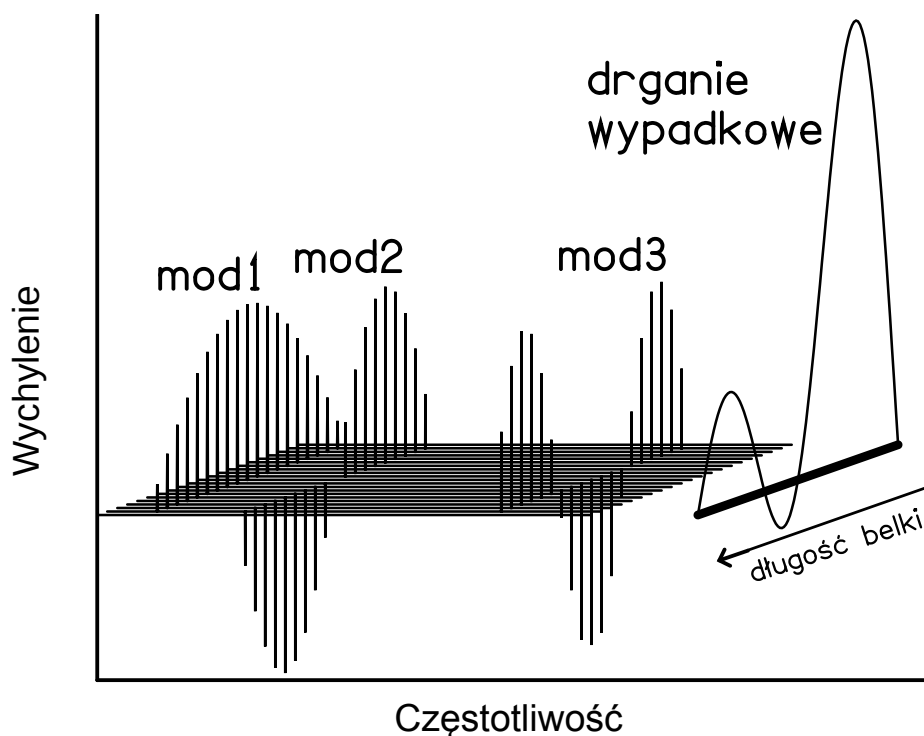
3.2.1. Transmitancja przejścia i transmitancja punktowa

Wiemy już, że dla układu o dowolnej skończonej liczbie stopni swobody do wyznaczenia macierzy funkcji przejścia, czyli receptancji, admittancji lub inertancji, wystarczy wyznaczyć jej jeden wiersz lub jedną kolumnę, co schematycznie zaznaczono w wyrażeniu (3.58). Wynikają

stąd dwie wersje eksperymentalnej analizy modalnej dla układu o N stopniach swobody:

- a) z ustalonym punktem pobudzenia i N punktami pomiaru odpowiedzi układu na to pobudzenie, co związane jest z wyznaczeniem jednej kolumny macierzy $[\alpha]$
- b) z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi układu i pobudzeniem w N punktach, co związane jest z wyznaczeniem jednego wiersza macierzy $[\alpha]$.

W obu przypadkach wyznaczenie macierzy transmitancji wiąże się z wyznaczeniem N funkcji transmitancji. W praktyce poprzestanie na wyznaczeniu jednej kolumny lub jednego wiersza macierzy transmitancji jest wymaganiem minimalnym (Ewins, 1995). Zaleca się wyznaczenie jeszcze jednego wiersza, kolumny lub przynajmniej kilku dodatkowych elementów macierzy transmitancji w celu sprawdzenia poprawności wcześniejszych pomiarów i ewentualnego zastąpienia pomiarów wadliwych lub o wątpliwej jakości, np. zanieczyszczonych

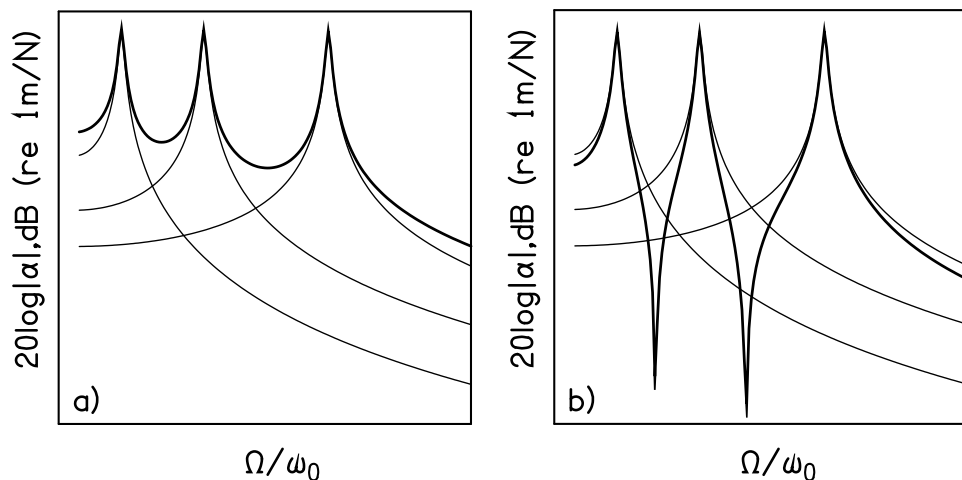


Rys. 3.7. Idea eksperymentalnej analizy modalnej – wypadkowe drżanie belki rozłożone na sumę trzech drgań modalnych

niepożądanym szumem, który może wystąpić w sygnale pobudzenia, sygnale odpowiedzi układu lub w obu tych sygnałach jednocześnie, podrozdział 3.2.2.

Najczęściej eksperymentalnie wyznacza się admitancję lub inercję ze względu na możliwość dokładnego pomiaru sygnału odpowiedzi w postaci prędkości (za pomocą wibrometru laserowego) lub przyspieszenia (za pomocą czujników akcelerometrycznych). Receptancję eksperymentalnie wyznacza się rzadko z powodu trudności i kosztów związanych z dokładnym wyznaczeniem wychylenia układu.

Na rysunku 3.7 przedstawiono ideę eksperymentalnej analizy modalnej. Badanym obiektem była belka o długości l , utwierdzona na obu końcach, o niewielkim tłumieniu ($Q=10$), dla której wyznaczono pierwsze trzy mody drgań. Na belce wybrano 21 równo odległych punktów pomiarowych. Belkę pobudzano do drgań sygnałem impulsowym (z młotka udarowego z przetwornikiem siły) kolejno we wszystkich wybranych punktach pomiarowych, a sygnał odpowiedzi mierzono w punkcie numer 3. Przeprowadzono więc analizę modalną z ustalonym punktem odpowiedzi. Wyznaczono dwadzieścia jeden transmitancji – receptancji (można policzyć na rys. 3.7) i narysowano je w ten sposób, że z każdym punktem pomiarowym związana jest jedna z nich, tzn. ta, która została zmierzona między tym punktem (pobudzającym do drgań) a punktem odpowiedzi. Transmitancje są funkcjami częstotliwości, więc na rys. 3.7 zaznaczono oś częstotliwości. Wypadkowe drganie zostało rozłożone na



Rys. 3.8. Transmitancja dla przykładu z belką: a) receptancja przejścia, b) receptancja punktowa

trzy drgania modalne, a obwiednie modów zaznaczono w częstotliwościach, w których transmitancja są niezerowe.

Na rysunku 3.8 przedstawiono przykłady modułów transmitancji dla przykładu z belką z rys. 3.7. Z ich przebiegu i z rys. 3.6 można wywnioskować, że transmitancja z rys. 3.8a jest transmitancją przejścia i została wyznaczona między ustalonym punktem odpowiedzi i punktem pobudzenia, który jest inny od punktu odpowiedzi. Transmitancja z rys. 3.8b jest transmitancją punktową, tzn. punkt odpowiedzi jest również punktem pobudzenia.

Funkcje transmitancji otrzymuje się doświadczalnie w cyfrowych analizatorach widmowych, z wykorzystaniem widm sygnałów wejściowych i wyjściowych wyznaczonych na podstawie algorytmu szybkiej transformaty Fouriera, FFT. Opis FFT wykracza poza ramy niniejszej książki. Zainteresowany Czytelnik może znaleźć informacje na ten temat w podręcznikach (Lyons, 2000; Szabatin, 2003).

3.2.2. Pomiary dwukanałowe

Eksperymentalne wyznaczenie funkcji transmitancji jest tzw. pomiarem dwukanałowym, ponieważ wymaga jednoczesnego pomiaru dwóch sygnałów: sygnału pobudzenia oraz sygnału odpowiedzi układu (Randall, 1987). Sygnały te można opisywać w dziedzinie czasu [odpowiednio jako $a(t)$ i $b(t)$] lub dziedzinie częstotliwości¹ – jako $A(f)$ i $B(f)$. Oba opisy są równoważne. Pierwotnymi sygnałami pochodzącymi z czujników pomiarowych są sygnały zależne od czasu. Funkcja opisująca układ w dziedzinie czasu nazywa się *odpowiedzią impulsową* i oznaczana jest przez $h(\tau)$. W dziedzinie częstotliwości układ opisuje jedna z omówionych już funkcji przejścia $H(f)$. Te dwie funkcje opisują zależności między sygnałem pobudzenia a sygnałem odpowiedzi układu w następujący sposób:

$$b(t) = h(t) * a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) a(t - \tau) d\tau, \quad (3.64)$$

$$B(f) = H(f) \cdot A(f), \quad (3.65)$$

gdzie znak $*$ oznacza operację splotu. Z powyższych wyrażeń widać, że opis w dziedzinie częstotliwości dany wyrażeniem (3.65) jest wygod-

¹ W akustyce powszechnie stosuje się pojęcie częstotliwości wyrażanej w hercach. Jest ona związana z częstością kołową (pulsacją) następująco: $\omega = 2\pi f$.

niejszy matematycznie. Mamy w nim iloczyn widm (w ogólności zespolonych) zamiast całki spłotowej danej wyrażeniem (3.64).

Pomiar dwukanałowy opiera się na obliczeniu *widma skrośnego sygnałów* $a(t)$ i $b(t)$ oraz widma mocy dla każdego z nich. Interesująca nas transmitancja (i koherencja) są wyznaczane na podstawie tych trzech widm.

Przebiegi czasowe $a(t)$ oraz $b(t)$ przenosi się w dziedzinę częstotliwości za pomocą transformaty Fouriera $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} A(f) &= \mathcal{F}\{a(t)\} \\ B(f) &= \mathcal{F}\{b(t)\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Widma $A(f)$ i $B(f)$ są w ogólności zespolone.

Widma mocy sygnałów $a(t)$ i $b(t)$ obliczane są z uwzględnieniem zespolonego charakteru ich transformat fourierowskich z wyrażen:

$$S_{AA}(f) = A^*(f) \cdot A(f), \quad (3.67)$$

$$S_{BB}(f) = B^*(f) \cdot B(f), \quad (3.68)$$

gdzie $A^*(f)$ – widmo sprzężone do widma $A(f)$, $B^*(f)$ – widmo sprzężone do widma $B(f)$.

Widmo skrośne S_{AB} („od A do B”) obliczane jest z wyrażenia:

$$S_{AB}(f) = A^*(f) \cdot B(f), \quad (3.69)$$

natomiast

$$S_{BA}(f) = S_{AB}^*(f) = A(f) \cdot B^*(f). \quad (3.70)$$

Ponieważ widma S_{AA} , S_{BB} i S_{AB} są symetryczne, czyli informacja dla częstotliwości ujemnych jest taka sama jak dla częstotliwości dodatnich, dla wygody obliczeń stosuje się odpowiadające im *widma jednostronne* tworzone według wzorów:

$$G_{AA}(f) = \begin{cases} 2S_{AA}(f) & f > 0 \\ S_{AA}(f) & f = 0, \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (3.71a)$$

$$G_{BB}(f) = \begin{cases} 2S_{BB}(f) & f > 0 \\ S_{BB}(f) & f = 0, \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (3.71b)$$

$$G_{AB}(f) = \begin{cases} 2S_{AB}(f) & f > 0 \\ S_{AB}(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (3.71c)$$

Podczas analizy systemu, gdy mierzony jest sygnał pobudzenia (wejścia) i sygnał odpowiedzi (wyjścia), bardzo ważną rzeczą jest określenie stopnia liniowości pomiędzy nimi. Do tego celu użyteczna okazuje się funkcja *koherencji* $\zeta^2(f)$ wyrażona wzorem:

$$\zeta^2(f) = \frac{|G_{AB}(f)|^2}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)} = \frac{|S_{AB}(f)|^2}{S_{AA}(f) \cdot S_{BB}(f)}. \quad (3.72)$$

Koherencja $\zeta^2(f)$ jest funkcją zależną od częstotliwości, która w skali od 0 do 1 określa stopień liniowości pomiędzy dwoma sygnałami $a(t)$ i $b(t)$ dla danej częstotliwości f . Powodem koherencji mniejszej od 1 może być niepożądany szum w sygnałach $a(t)$ i $b(t)$, nieliniowa relacja między tymi sygnałami lub błędy w znaczeniu $A(f)$ i $B(f)$.

Transmitancja $H(f)$ jest zdefiniowana wzorem:

$$B(f) = A(f) \cdot H(f), \quad (3.73)$$

gdzie $H(f) = \mathcal{F}(h(t))$.

Przed rozpoczęciem wyznaczania funkcji $H(f)$ należy przyjąć pewne założenia. Badany system musi być:

- przyczynowy: $h(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$,
- stacjonarny: $h(\tau, t) = h(\tau)$ oraz $H(f, t) = H(f)$, $-\infty < t < \infty$,
- liniowy,
- stabilny: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

W celu wyznaczenia pierwszej postaci transmitancji, $H_1(f)$, wychodzimy z wyrażenia (3.73) i mnożymy je obustronnie przez $A^*(f)$:

$$A^*(f) \cdot B(f) = H(f) \cdot A^*(f) \cdot A(f), \quad (3.74)$$

czyli

$$S_{AB}(f) = H(f) \cdot S_{AA}(f). \quad (3.75)$$

Zamieniając widma dwustronne $S_{AB}(f)$ i $S_{AA}(f)$ na widma jednostronne $G_{AB}(f)$ i $G_{AA}(f)$, otrzymujemy wyrażenie:

$$H_1(f) = \frac{G_{AB}(f)}{G_{AA}(f)}. \quad (3.76)$$

Drugą postać transmitancji, $H_2(f)$, wyznacza się, mnożąc wyrażenie (3.73) obustronnie przez $B^*(f)$:

$$H_2(f) = \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)}. \quad (3.77)$$

W praktyce najczęściej $H_1(f)$ różni się od $H_2(f)$.

Korzystając z faktu, iż $G_{BA}^* = G_{AB}$ mamy

$$\frac{H_1(f)}{H_2(f)} = \frac{G_{AB}(f) \cdot G_{BA}(f)}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)} = \zeta^2(f), \quad (3.78),$$

czyli stosunek $H_1(f)$ do $H_2(f)$ jest równy koherencji.

Wyrażenie (3.73) można także przekształcić, podnosząc je do kwadratu i wyznaczając trzeci typ transmitancji $H_a(f)$:

$$B^*(f) \cdot B(f) = H^*(f) \cdot H(f) \cdot A^*(f) \cdot A(f), \quad (3.79)$$

czyli

$$|H_a(f)|^2 = \frac{G_{BB}(f)}{G_{AA}(f)}, \quad (3.80)$$

gdzie $H^*(f) \cdot H(f) = |H(f)|^2$.

Rozpatrując przypadek idealny, w którym badane sygnały $a(t)$ i $b(t)$ są pozbawione jakichkolwiek zakłóceń, prawdziwe są równości: $H_1(f) = H_2(f) = H(f)$ oraz $|H_a(f)| = |H(f)|$,

$$\begin{aligned} H_1(f) &= H_2(f), \\ |H_a(f)| &= |H(f)|, \\ \frac{H_1(f)}{H_2(f)} &= \zeta^2(f) = 1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

W przypadku rzeczywistym, gdy do sygnałów pobudzenia i odpowiedzi dodają się zakłócenia, równości (3.81) zazwyczaj nie są spełnione. Ma to miejsce np. wtedy, gdy do sygnałów z czujników mierzących sygnał pobudzenia i odpowiedzi dodają się zakłócenia spowodowane ruchem przewodów doprowadzających te sygnały do analizatora dwukanałowego, czyli wtedy, gdy zakłócenia dodają się po pomiarze, ale przed podaniem tych sygnałów na wejścia analizatora.

Założmy, że do sygnału odpowiedzi $v(t)$ dodaje się szum $n(t)$, nie mający związku z sygnałem wejściowym $a(t)$. Wtedy $G_{AN}(f) = 0$ oraz $b(t) = v(t) + n(t)$. Na podstawie wyrażenia (3.80) możemy napisać:

$$\begin{aligned} G_{VV}(f) &= H^2(f) \cdot G_{AA}(f), \\ G_{BB}(f) &= G_{VV}(f) + G_{NN}(f), \\ G_{AB}(f) &= G_{AV}(f) + G_{AN}(f) = G_{AV}(f) = H(f) \cdot G_{AA}(f). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Widmo skróśne G_{AB} jest więc wolne od błędów spowodowanych przez dodatkowe źródło szumu w układzie, więc transmitancję najlepiej wyznaczać w tym przypadku z wyrażenia (3.76) definiującego $H_1(f)$.

Wyrażenie (3.77), definiujące $H_2(f)$, da w tym przypadku wynik zafałszowany, ponieważ do jej wyliczenia trzeba wykorzystać widmo mocy $G_{NN}(f)$:

$$\begin{aligned} H_2(f) &= \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)} = \frac{G_{VV}(f) + G_{NN}(f)}{G_{VA}(f)} = \frac{H^*(f) \cdot H(f) \cdot G_{AA}(f)}{H^*(f) \cdot G_{AA}(f)} + \frac{G_{NN}(f)}{H^*(f) \cdot \frac{G_{VV}(f)}{H^2(f)}} = \\ &= H(f) \left(1 + \frac{G_{NN}(f)}{G_{VV}(f)} \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Wyrażenie (3.80) definiujące H_a również będzie zafałszowane:

$$\left| H_a^2(f) \right| = \frac{G_{BB}(f)}{G_{AA}(f)} = \frac{G_{VV}(f) + G_{NN}(f)}{\frac{G_{VV}(f)}{H^2(f)}} = \left| H^2(f) \right| \left(1 + \frac{G_{NN}(f)}{G_{VV}(f)} \right). \quad (3.84)$$

Zatem, gdy podczas eksperymentu modalnego nie jest możliwe wyeliminowanie zakłóceń w sygnale odpowiedzi układu, należy posługiwać się transmitancją w postaci $H_1(f)$.

Założmy teraz, że w sygnale wejściowym znajdują się zakłócenia w postaci szumu $m(t)$ nie mającego wpływu na sygnał wyjściowy $b(t)$, czyli że sygnał wejściowy składa się z faktycznego sygnału pobudzającego $u(t)$ oraz zakłóceń $m(t)$, tj. $a(t) = u(t) + m(t)$. Możemy napisać:

$$G_{AA}(f) = G_{UU}(f) + G_{MM}(f),$$

$$G_{BB}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{UU}(f) = |H(f)|^2 \cdot (G_{AA}(f) - G_{MM}(f)), \quad (3.85)$$

$$G_{AB}(f) = G_{UB}(f) = H(f) \cdot G_{UU}(f).$$

Transmitancja $H_1(f)$ będzie w tym przypadku zafałszowana, ponieważ do jej wyliczenia trzeba wykorzystać widmo mocy $G_{MM}(f)$:

$$H_1(f) = \frac{G_{AB}(f)}{G_{AA}(f)} = \frac{H(f) \cdot G_{UU}(f)}{G_{UU}(f) + G_{MM}(f)} = H(f) \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_{MM}(f)}{G_{UU}(f)}}. \quad (3.86)$$

Transmitancja H_a też będzie zafałszowana:

$$|H_a^2(f)| = \frac{G_{BB}(f)}{G_{AA}(f)} = \frac{|H^2(f)| \cdot G_{UU}(f)}{G_{MM}(f) + G_{UU}(f)} = |H^2(f)| \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{G_{MM}(f)}{G_{UU}(f)}} \right). \quad (3.87)$$

Natomiast transmitancja $H_2(f)$ będzie wolna od błędu spowodowanego dodatkowym szumem dodającym się do sygnału pobudzenia,

$$H_2(f) = \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)} = \frac{|H(f)|^2 \cdot G_{UU}(f)}{H^*(f) \cdot G_{UU}(f)} = H(f). \quad (3.88)$$

Zatem w przypadku, gdy nie jest możliwe wyeliminowanie zakłóceń w sygnale pobudzenia układu, należy posługiwać się transmitancją w postaci $H_2(f)$.

Dobrym i praktycznym narzędziem pomiarowym do kontroli jakości zmierzonej transmitancji jest *koherencja* opisana wyrażeniem

(3.72). Koherencja, w paśmie częstotliwości, w którym mierzona jest transmitancja, a przynajmniej w okolicy częstotliwości modalnych, czyli maksimów modułu transmitancji, powinna być równa jedności lub być bliska jedności. Wtedy można mieć pewność, że sygnał odpowiedzi układu jest reakcją na sygnał pobudzenia i żadne sygnały niepożądane w sygnale wyjściowym i wejściowym nie zakłócają pomiaru. Jeśli tak się nie dzieje, tzn. gdy wartości koherencji są znacząco mniejsze od jedności, to jakość zmierzonej transmitancji jest wątpliwa, tzn. niekoniecznie opisuje ona relację wyłącznie między sygnałem odpowiedzi i sygnałem pobudzenia. W takim przypadku należy przeanalizować układ pomiarowy w celu wyeliminowania zakłóceń.

Eksperymentalnie parametry modalne badanego układu, czyli częstości, tłumienia i obwiednie modalne, wyznacza się ze zmierzonych funkcji przejścia, dopasowując do nich krzywe teoretyczne, czyli dobierając do krzywych wyznaczonych w teście modalnym, np. receptancji układu z małym tłumieniem proporcjonalnym, krzywe teoretyczne postaci (3.57). Krzywą teoretyczną można dopasowywać do krzywej eksperymetalnej na wiele sposobów: w otoczeniu częstości jej lokalnego maksimum, do całej krzywej eksperymetalnej lub do zbioru krzywych eksperymetalnych. Każda z metod dopasowania ma wady i zalety, których opis wykracza poza ramy tej książki. Można je znaleźć w podręcznikach analizy modalnej (Zaveri, 1985; Ewins, 1995; Maia i Silva, 1997; Craig i Kurdila, 2006; Brandt, 2011; Brickner i Ventura, 2014; Rainieri i Fabbrocino, 2014). Niezależnie od sposobu dopasowania jego cel jest zawsze ten sam: znalezienie współczynników krzywych teoretycznych, które najlepiej pasują do krzywych wyznaczonych eksperymetalnie, czyli wyznaczenie eksperymetalnego modelu modalnego testowanego układu, tj. elementów macierzy częstości i tłumień modalnych oraz macierzy funkcji przejścia, dopasowanych do danych eksperymetalnych. Zatem dopasowanie krzywych teoretycznych do krzywych eksperymetalnych jest punktem styku modelu teoretycznego i danych pochodzących z testu modalnego.

3.2.3. Współczynnik korelacji obwiedni modalnych

Do porównania zgodności obliczonych teoretycznie i wyznaczonych eksperymetalnie obwiedni modalnych stosuje się *współczynnik korelacji obwiedni modalnych* MAC (ang. *Modal Assurance Criterion*), czasem oznaczany MSCC (ang. *Mode Shape Correlation Coefficient*),

obliczany z wyrażenia (Ewins, 1995):

$$\text{MAC}(A, X) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_A)_j^* \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_X)_j^* \right) \left(\sum_{j=1}^n (\phi_A)_j (\phi_A)_j^* \right)}, \quad (3.89)$$

gdzie $(\phi_X)_j$ są składowymi wektora obwiedni modalnej o numerze j , $\{\phi_X\}_j$, wyznaczonej eksperymentalnie, $(\phi_A)_j$ to składowe obwiedni modu o numerze j , $\{\phi_A\}_j$, obliczonej teoretycznie lub wyznaczonej analitycznie. W ogólności obwiednie $\{\phi_X\}_j$ oraz $\{\phi_A\}_j$ mogą być zespolone – znak * oznacza obwiednię sprzężoną. W przypadku, gdy porównywana obwiednia modu eksperymentalnego jest identyczna (z dokładnością do stałej mnożenia) z obwiednią modu teoretycznego, $\text{MAC}(A, X) = 1$. W rzeczywistości odpowiedność obwiedni teoretycznych i eksperymentalnych może nie być idealna i wówczas MAC przyjmuje wartości bliskie jedności dla obwiedni teoretycznej i eksperymentalnej pochodzących od tego samego modu i wartości bliskie zeru dla obwiedni pochodzących od różnych modów. Rezultaty porównania obwiedni teoretycznych i eksperymentalnych gromadzi się w macierzy MAC, która jest macierzą $X \times A$, gdzie X – liczba obwiedni wyznaczonych eksperymentalnie, A – liczba obwiedni wyznaczonych teoretycznie. Elementy macierzy MAC mogą odbiegać od wartości 1 z następujących powodów (Ewins, 1995):

- a) model teoretyczny jest niepoprawny, np. nie uwzględniono w nim istotnych cech układu,
- b) badany układ jest nieliniowy i jest to nieliniowość nie dająca się zaniedbać,
- c) sygnał odpowiedzi układu, sygnał pobudzenia układu lub oba te sygnały są zanieczyszczone niepożądanym szumem, a przez to jakość wyznaczonych funkcji przejścia jest wątpliwa,
- d) dopasowanie krzywej teoretycznej do wyznaczonych eksperymentalnie funkcji przejścia jest niedokładne.

Przedstawiony powyżej skrócony opis eksperymentalnej analizy modalnej nie wyczerpuje całości problematyki, lecz sygnalizuje najważniejsze etapy testu modalnego. Informacje na temat przygotowania układu do eksperymentu modalnego, doboru sygnału pobudzającego,

doboru przetworników i układów mierzących sygnały pobudzenia i odpowiedzi, uśredniania wyników oraz inne szczegóły można znaleźć w podręcznikach (Zaveri, 1985; Ewins, 1995; Maia i Silva, 1997; Craig i Kurdila, 2006; Brandt, 2011; Brickner i Ventura, 2014; Rainieri i Fabbrocino, 2014).

3.3. Terminologia

Analiza modalna jest jedną z eksperymentalnych metod opisu drgań dowolnych obiektów (Ewins, 1995). Jej celem jest wyznaczenie tzw. *modów* drgań (drgań niepodzielnych, podstawowych, prostych, własnych) lub opis drgań za pomocą tzw. parametrów modalnych. Modem drgania nazywamy specyficzną formę drgania układu obserwowaną dla ściśle określonej (modalnej) częstotliwości drgań. Drgania o różnej częstotliwości modalnej podlegają zazwyczaj różnemu tłumieniu, które zależy od kształtu obiektu, stałych materiałowych i warunków brzegowych. Aby opisać drganie układu w danej częstotliwości własnej trzeba podać tę częstotliwość, tłumienie oraz obwiednię wychyleń wszystkich punktów układu w tej samej chwili czasu. Wypadkowe drganie jest kombinacją modów, a dzięki analizie modalnej możliwe jest dokonanie jego rozkładu na zbiór dyskretnych, niezależnych „drgań składowych” odpowiadających poszczególnym modom. W eksperymentalnej analizie modalnej parametry modalne (uporządkowane w macierz transmitancji) wyznacza się, opierając się na funkcjach transmitancji, zmierzonych między parami punktów pomiarowych, podrozdział 3.1.4. Ciągłe układy mechaniczne mają nieskończoną liczbę modów, których obwiednie stają się bardziej skomplikowane w miarę wzrostu częstotliwości modalnej. W praktyce wyznacza się tylko kilka pierwszych modów drgań skrzypiec i gitar. Ponieważ technika analizy modalnej pozwala na rozkład złożonych drgań wypadkowych dowolnego układu na drgania proste, to często mówi się, że ma ona pewien aspekt porządkujący informacje dotyczące dynamiki badanego układu (Skrodzka i in., 2011).

Jak już powiedziano, normalny mod drgania (mod własny) zależy od geometrii, parametrów materiałowych i warunków brzegowych (Runnemalm i Molin, 2000; Richardson, 1997; Skrodzka i in., 2011). Warunki brzegowe dla gitar i skrzypiec są skomplikowane ze względu na sprzężony ruch ich części składowych, tj. płyt wierzchnich, płyt spodnich, boczaków oraz objętości powietrza zawartej w pudle rezonan-

sowym. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na warunki brzegowe jest sposób zamontowania instrumentu na stanowisku pomiarowym. Wypadkowe drganie struktury jest opisywane sumą modów drgań. Taki opis wymaga uczynienia założenia o liniowości badanego obiektu. Słowo „mod” jest używane w tej monografii w sensie przedstawionym w pracy Runnemalm i Molina (2000), tzn. „mod” oznacza drganie korpusu instrumentu wraz z powietrzem zawartym w tym korpusie i powietrzem otaczającym instrument, zachodzące w częstotliwości modalnej. Gdy do instrumentu zostanie przyłożona zewnętrzna siła wymuszająca, rozkład amplitud drgania wymuszonego nazywany jest *drganiami operacyjnymi* (ang. *operating deflection shape*, ODS). Drganie operacyjne jest zależne od: geometrii instrumentu, właściwości fizycznych materiałów użytych do jego budowy, warunków brzegowych, punktu przyłożenia siły wymuszającej oraz sprzężenia z powietrzem wewnątrz i na zewnątrz instrumentu. Drganie to zachodzi z częstotliwością siły wymuszającej.

ANALIZA MODALNA GITAR

Współczesna sześciostrunowa gitara jest instrumentem o długości korpusu ok. 65 cm i strunach nastrojonych na częstotliwości E_6 , A_5 , D_4 , G_3 , H_2 , E_1 ($f=82, 110, 147, 196, 247$ i 330 Hz). Płyta wierzchnia jest zazwyczaj zbudowana z drewna świerkowego i ma grubość ok. 2.5 mm. Płyta spodnia jest wykonana z twardego drewna, np. mahoniowego, jaworowego, palisandrowego lub różanego drewna brazylijskiego. Obie płyty są obelkowane w celu zwiększenia ich sztywności. Układ obelkowania jest tym aspektem pracy lutnika, który pozwala mu wykazać się kreatywnością i innowacyjnością. Należy podkreślić, że o ile wymiary, konstrukcja i materiał, z którego są wykonane skrzypce, stanowią swoisty standard i rzadko zdarzają się odstępstwa od niego, o tyle w odniesieniu do gitar standard taki w zasadzie nie istnieje, a ostateczny kształt, obelkowanie, wygląd i brzmienie zależą od inwencji lutnika (Rossing, 2010). Gitary akustyczne dzieli się na: klasyczne, flamenco i folkowe. W gitarach klasycznych i flamenco stosuje się najczęściej struny nylonowe, a w folkowych – struny stalowe. Nie jest to jednak ścisła reguła.

Mody gitar oznaczane będą zgodnie z popularną notacją (m, n) , gdzie m oznacza liczbę linii węzłowych wzdłuż instrumentu, a n – liczbę tych linii w poprzek instrumentu (Elejabarrieta i in., 2000, 2001, 2002b; Caldersmith, 1986, 1995; Hill i in., 2004; Skrodzka i in., 2011).

4.1. Analiza modalna i pomiary metodą wibrometrii laserowej gitar różniących się obelkowaniem płyty wierzchniej

Obelkowanie gitar pełni ważną funkcję: usztywnia cienką płytę wierzchnią, umożliwiając jednocześnie jej drgania o amplitudzie potrzebnej do wytworzenia dźwięku. Bez obelkowania cienka płyta wierzchnia ulega

wybozceniom i niepożądanym odkształceniom. Zbyt gruba płyta wierzchnia nie drga z odpowiednimi amplitudami i w rezultacie wytwarza zbyt ciche dźwięki. Najpopularniejszy, wachlarzowy, typ obelkowania został opracowany przez słynnego lutnika hiszpańskiego Antonia Torresa Jurado (1817–1892). Projektując obelkowanie gitary, należy wziąć pod uwagę liczbę belek, ich wymiary, kształty oraz umiejscowienie na płycie wierzchniej. Układ belek ma wielki wpływ na zachowanie dynamiczne instrumentu (Elejabarrieta i in., 2001; Caldersmith, 1986). Najczęściej badanym i opisywanym typem obelkowania jest tradycyjny układ belek wprowadzony przez Torresa lub jego niewielkie modyfikacje (Elejabarrieta i in., 2000, 2001, 2002a, 2002b; Caldersmith, 1986, 1995; Flecher i Rossing, 2010; Boullosa, 2002; Hill i in., 2004; Skrodzka i in., 2005, 2011; Torres i Boullosa, 2009). Inne rodzaje obelkowania, np. obelkowanie typu X były również przedmiotem badań (Caldersmith, 1995; Fletcher i Rossing, 2010; Rossing i Eban, 2000; French i Hosler, 2001; Okuda i Ono, 2008). Ponadto kompletne gitary przebadano, eksperymentalnie lub numerycznie, i opisano w kilku doniesieniach (Caldersmith 1986, 1995; Elejabarrieta i in., 2002a, 2002b; Hill i in., 2004; Skrodzka i in., 2005, 2011; Rossing i Eban, 2000). Caldersmith (1986, 1995) jako pierwszy opisał pole akustyczne emitowane przez gitary, mody drgań i sformułował standard ich kategoryzacji oraz rodzinę gitar w pewnym sensie przypominającą słynny oktett wiolinowy (Bissinger, 2003a), podrozdział 5.9. Elejabarrieta wraz ze współpracownikami (2002a, 2002b) opisali mody powietrzne oraz mody sprzężone drewnianego korpusu i objętości powietrza zawartej w nim. Parametry akustyczne charakteryzujące gitary klasyczne, obejmujące małe częstotliwości rezonansowe modów oraz szerokość połówkową ich rezonansów Q opisali Hill i in. (2004). Zachowania dynamiczne gitar z szyjką wstawioną pod niestandardowym kątem badała Skrodzka i in. (2005). Opis normalnych modów asymetrycznie obelkowanej płyty wierzchniej kompletnego instrumentu gitarowego podali Rossing i Eban (2000) oraz Skrodzka i in. (2011). Eksperymentalne badania zachowań dynamicznych niepokrytych lakierem gitar bez strunociągu, obelkowanych sposobem Torresa, na kolejnych etapach konstruowania opisali Elejabarrieta i in. (2000). W wielu pracach wierzchnie płyty gitarowe były badane w odłączeniu od reszty instrumentu, co było znacznym spłyceniem i uproszczeniem zagadnienia. Badania trzech izolowanych płyt wierzchnich bez strunociągu, wykonanych z różnego drewna, obelko-

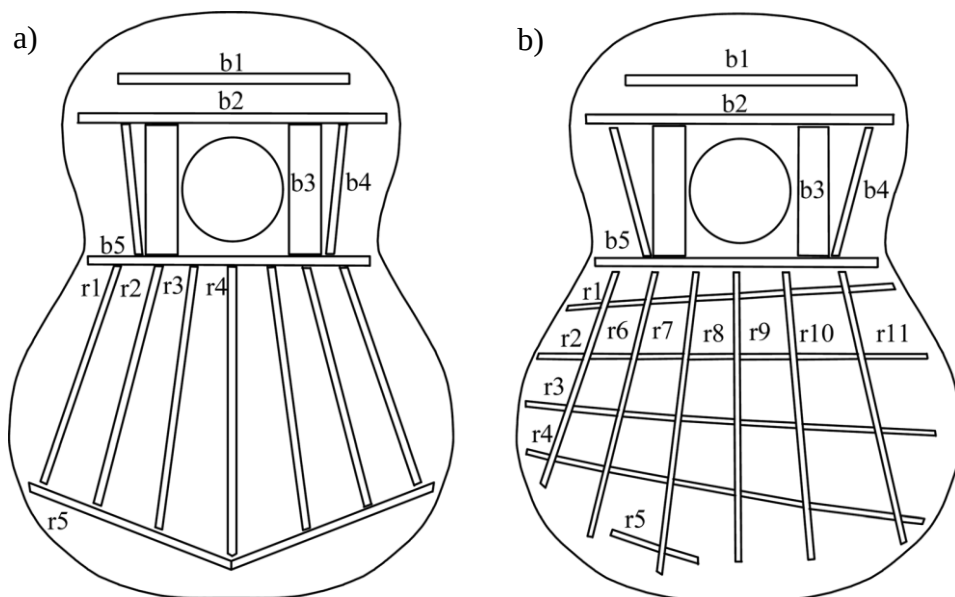
wanych sposobem Torresa zostały wykonane przez Boullosę (2002) z wykorzystaniem odpowiedzi impulsowych. Niekonwencjonalne płyty wierzchnie zbudowane z kompozytu pianki poliuretanowej, wzmocnionej anizotropowo włóknami węglowymi, z obelkowaniem oraz bez niego, i mające prawie takie same mody drgań jak drewniane płyty z obelkowaniem typu X opisali Okuda i Ono (2008).

4.1.1. Instrumenty i eksperymenty

W celu zbadania wpływu obelkowania na parametry modalne zbudowano i zbadano doświadczalnie dwie gitary. W eksperymentach wykorzystano technikę eksperymentalnej analizy modalnej oraz wyznaczono drgania operacyjne (ODS), podrozdział 3.3. Jeden instrument był obelkowany klasycznie sposobem Torresa, a drugi niesymetrycznie (Skrodzka i in., 2011). Instrumenty zaprojektował i wykonał lutnik Maurycy Zimmermann w Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego w Poznaniu. Gitary badano w dwóch fazach konstrukcyjnych: przed zamontowaniem strunociągu, podstrunnicy, progów i strun oraz po ich zamontowaniu.

Instrument obelkowany sposobem Torresa jest dobrze opisany w literaturze. Z tego powodu był on instrumentem referencyjnym dla gitary belkowanej niesymetrycznie. Obelkowanie niesymetryczne polegało na zbudowaniu z belek niejednorodnej „kratki” – kratki były gęstsze, tzn. miały mniejsze rozmiary, po stronie strun sopranowych, a większe rozmiary – po stronie strun basowych. Celem takiego obelkowania było uczynienie sopranowej strony płyty wierzchniej sztywniejszą, w porównaniu do obelkowania według tradycyjnego modelu Torresa. Posłużono się tu analogią sztywności do płyty wierzchniej skrzypiec, w których dusza usztywnia płytę bardziej po stronie sopranowej niż basowej. (Ponadto sztywność wierzchniej płyty skrzypcowej jest silnie zdeterminowana przez profil płyty, właściwości drewna oraz grubości.) Informacje o wpływie modyfikacji strukturalnych na drgania instrumentu mają duże znaczenie dla lutników, ponieważ gitary są wytwarzane w różnych rozmiarach, wzorach i z różnych materiałów. Niemniej jednak, standardowy opis wpływu tych modyfikacji na zachowania modalne nie ma zastosowania do wielu instrumentów, odmiennie niż dla „zestandaryzowanych” skrzypiec.

W literaturze opisano jak dotychczas różne problemy akustyczne dotyczące gitar, od wyboru odpowiedniego materiału, po promieniowanie akustyczne oraz sposoby ulepszenia walorów brzmieniowych. Jednak doniesień na temat wpływu obelkowania na zachowania drganiowe gitar jest niewiele.



Rys. 4.1. Obelkowanie badanych gitar: a) – obelkowanie sposobem Torresa, b) – obelkowanie niesymetryczne. Wymiary poszczególnych elementów podano w tabelach 4.1 i 4.2

Źródło: Skrodzka i in. (2011).

Badane instrumenty wykonano z tego samego kawałka drewna. Płyta wierzchnia instrumentu pierwszego, nazwanego A, została obelkowana wachlarzowo, sposobem Torresa, rys. 4.1a. Płyta wierzchnia drugiego instrumentu, nazwanego B, została obelkowana asymetrycznie, w formie „kratki”, jak pokazano na rys. 4.1b. Rozmiar „kratek” był większy po stronie basowej płyty wierzchniej i mniejszy po stronie sopranowej. Wymiary instrumentów, wymiary belek i ich kątowne położenie względem osi pionowej (kąt α , w stopniach) i osi poziomej (kąt β , w stopniach) przedstawiono w tabelach 4.1 i 4.2. Niektóre belki miały nieprostokątny przekrój. Wysokość belek formujących niestandardowe obelkowanie płyty wierzchniej instrumentu B wynosiła od 2 mm do 10 mm.

Szyjki obu instrumentów wykonano, sklejając 5 elementów: 2 zewnętrzne elementy mahoniowe, dwa jaworowe elementy o grubości 4 mm między elementami mahoniowymi oraz jeden element mahoniowy o grubości 4 mm między elementami jaworowymi. Wysokość szyjki przy stopie wynosiła 24 mm, a przy głowie – 18 mm. Listewki obszycia, stopę i pieńki wykonano z drewna lipowego. Listewki obszycia miały wysokość 12 mm, grubość 8 mm i były ponacinane co 15 mm. Płyty wierzchnie wykonano z drewna cedrowego. Płyty spodnie i boczki wykonano z palisandru.

Grubość płyt wierzchnich wynosiła ok. 3 mm w części centralnej i zmniejszała się w kierunku boczaków, do 2 mm. Grubość płyt spodnich wynosiła 3.4 mm w części centralnej i zmniejszała się w kierunku boczaków, osiągając na nich wartość 2.4 mm. Boczki miały stałą grubość 2 mm. Płyty spodnie obelkowano klasycznym wzorem Torresa (Caldersmith, 1986).

Tabela 4.1. Wymiary gitar A i B w milimetrach

Wymiar	Gitara A	Gitara B
Wysokość pudła rezonansowego	476	476
Maksymalna szerokość policzków górnych	282	281.5
Szerokość w talii	247	248
Maksymalna szerokość policzków dolnych	372	373
Wysokość w maksymalnej szerokości policzków górnych	391	391
Wysokość w talii	298	298
Wysokość w maksymalnej szerokości policzków dolnych	136	136
Wysokość boczaków na dolnym pieńku	100	103
Wysokość boczaków w talii	98	102
Wysokość boczaków przy stopie	90	94
Promień otworu	89	89

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2011).

Belki wykonano z drewna świerkowego. Szczególną uwagę zwrócono na to, aby wymiary korpusów rezonansowych i szyjek były jednakowe, a jeśli nie było to możliwe ze względów konstrukcyjnych – maksymalnie zbliżone. W rzeczywistości nie ma dwóch identycznych instrumentów ze względu na anizotropię drewna i dokładność wyko-

niania. Różnicami wprowadzonymi celowo były różne typy obelkowania płyty wierzchniej i wysokość boczków. Podobnie jak to uczyniono w innych pracach (Torres i Boullosa, 2009; Skrodzka i in., 2009, 2011), instrumenty nie były lakierowane i były przygotowane do gry, tj. wyposażone w struny i nastrojone.



Rys. 4.2. Sposób zamontowania gitar do pomiarów dopplerowską wibrometrią laserową. Ta sama obejmą była użyta podczas testu modalnego

Źródło: Skrodzka i in. (2011).

Na stanowisku pomiarowym instrumenty były zamontowane w drewnianej obejmie o dużej masie, rys. 4.2.

Wykonano następujące eksperymenty: analizę modalną przed zamontowaniem strunociągu i strun (instrumenty niekompletne) oraz po ich zamontowaniu (instrumenty kompletne), a także pomiary drgań operacyjnych kompletnych instrumentów A i B. Drgania operacyjne wyznaczono metodą dopplerowskiej wibrometrii laserowej, czyli bezstykową metodą optyczną, podrozdział 1.3. Masa płyty wierzchniej

obelkowanej wachlarzowo sposobem Torresa wynosiła 187 g, a masa płyty obelkowanej niesymetrycznie – 250 g. W badaniach modalnych gitar funkcje transmitancji (inertancje) były mierzone w wersji z ustalonym punktem pomiaru sygnału odpowiedzi układu. Szerokopasmowy sygnał pobudzenia pochodził z młotka uderowego PCB Impact Hammer 086C05 o czułości 2.25 mV/N, a sygnał odpowiedzi układu, czyli przyspieszenie – z akcelerometru Ono Sokki NP-2910 o masie 2 g i czułości 0.3 pC/m/s², przymocowanego na wosk pszczeli.

Masa akcelerometru (2 g) była znacznie mniejsza od masy badanych płyt i nie wpływała na wynik eksperymentu. Oba sygnały mierzono w kierunku prostopadłym do badanych płyt, a więc kierunku najistotniejszym ze względu na proces generacji dźwięku.

Funkcje transmitancji (inertancji) obliczano w analizatorze FFT Ono Sokki CF 6400 (po 10 uśrednieniach w dziedzinie częstotliwości), a następnie przekazywano do analizy komputerowej z wykorzystaniem profesjonalnego pakietu *STAR-Modal®* firmy Spectral Dynamic.

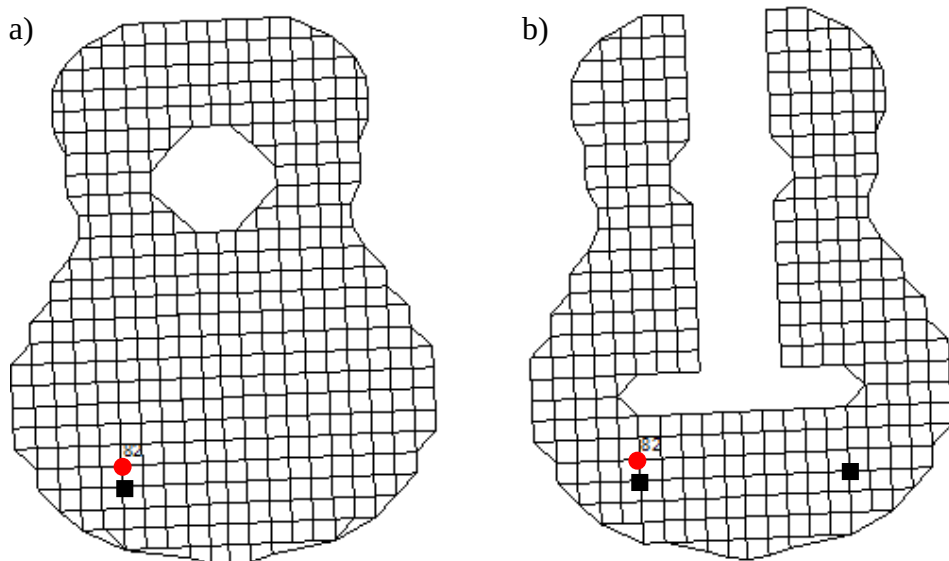
Funkcje transmitancji wyznaczono w 427 punktach na płytach wierzchnich bez strunociągu i strun oraz w 374 punktach na płytach wierzchnich z zamontowanym strunociągiem i strunami (obszary pod nimi pominięto). Rozkład punktów pomiarowych przedstawiono na rys. 4.3. Wszystkie funkcje transmitancji wyznaczono w zakresie częstotliwości 0–1600 Hz, z rozdzielczością spektralną 2 Hz, a ich jakość była kontrolowana przebiegiem funkcji koherencji, podrozdział 3.2.2. Przykłady wyznaczonych funkcji transmitancji pokazano na rys. 4.4–4.5. Wynika z nich, że maksima funkcji transmitancji są dobrze rozdzielone w dziedzinie częstotliwości.

W eksperymencie optycznym wyznaczono drgania operacyjne (ODS-y) w częstotliwościach wyznaczonych wcześniej w eksperymencie modalnym, dla obu instrumentów wyposażonych w strunociąg i struny (kompletnych). Drganie operacyjne jest definiowane jako odkształcenie struktury w danej częstotliwości (Marshall, 1985). Zatem, jeśli częstotliwość pobudzenia jest częstotliwością modalną, to odkształcenie operacyjne może być interpretowane jako obwiednia modalna. Sinusoidalny sygnał pobudzający o częstotliwości równej częstotliwości modalnej przykładano do instrumentu za pomocą zewnętrznego wzbudnika elektrodynamicznego BK 4809, wyposażonego w pręt o długości 17 cm. Końcówką pręta pobudzano punkt, który w eksperymencie modalnym był punktem pomiaru sygnału odpowiedzi, rys. 4.2 i 4.3. Masa pręta wynosiła 46 g. Kąt przyłożenia pręta do

Tabela 4.2. Wymiary (mm) i położenia katowe belek (stopnie). Symbole wskazano na rys. 4.1

Gitara A																
element	b1	b2	b3	b4	b5	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8	r9	r10	r11
długość [mm]	200	278	120	121	256	244	260	280	304	208						
szerokość [mm]	6	7	30	6	8	6	6	6	6	6						
wysokość [mm]	1.5	18	1.5	8	18	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5						
kąt α [stopnie]	0	0								29						
kąt β [stopnie]			0	7	7	15	11	5	0							
Gitara B																
długość [mm]	200	278	120	125	256	295	339	353.5	356	80.5	244	289	319	300	304	292.5
szerokość [mm]	6	7	30	6	8	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
wysokość [mm]	1.5	18	1.5	8	18	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10
kąt α [stopnie]	0	0				4	0	4	9	15						
kąt β [stopnie]			0	16	16						20	15	5	0	5	13

Źródło: Skrodzka i in. (2011).



Rys. 4.3. Siatka pomiarowa instrumentów gitarowych bez strunociągu i strun (a) oraz dla instrumentów wyposażonych w strunociąg i struny (b). Czerwonym kółkiem zaznaczono położenie akcelometru (punkt odpowiedzi). Czarnymi kwadratami zaznaczono punkty pobudzenia istotne dla rys. 4.4

Źródło: Skrodzka i in. (2011).

płyty wierzchniej wynosił 80–85 stopni i dlatego składową siły równoległą do powierzchni płyty można było zaniedbać, podobnie jak to uczyniono we wcześniejszych pracach (Torres i Boullosa, 2009). Siła wywierana przez pręt była kontrolowana poprzez napięcie dostarczane do wzbudnika i nie powodowała nieliniowych zniekształceń drgań badanych instrumentów. Sygnał odpowiedzi, czyli prędkość drgań, był mierzony w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty wierzchniej we wszystkich punktach, za pomocą dopplerowskiej wibrometrii laserowej (Drain, 1980). Warunki pomiarowe zilustrowano na rys. 4.2. Czerwony punkt widoczny w środkowej części rys. 4.2 (w pobliżu strunociągu) to odbicie promienia laserowego. Zestaw pomiarowy do wibrometrii laserowej nie jest widocznych na rys. 4.2. Pomiary optyczne umożliwiły bezkontaktowy pomiar prędkości drgającej powierzchni płyty wierzchniej. Zatem pomiary optyczne były uproszczoną wersją analizy modalnej z ustalonym punktem pobudzenia, podczas gdy analiza modalna była wykonywana z ustalonym punktem

pomiaru sygnału odpowiedzi. Gdyby analiza modalna była wykonywana w wersji ustalonego punktu pobudzenia, wymagałoby to przemieszczania czujnika mierzącego sygnał odpowiedzi (akcelerometru) z punktu do punktu. Takie postępowanie wprowadzałoby znaczący błąd pomiarowy spowodowany niedokładnością pozycjonowania akcelerometru w każdym punkcie pomiarowym. Rozdzielczość przestrzena siatki pomiarowej w eksperymencie optycznym była taka sama jak w eksperymencie modalnym przeprowadzonym na kompletnych instrumentach i obejmowała obszary strunociągu oraz powierzchnie pod strunami, pominięte ze względów technicznych w eksperymencie modalnym. Urządzeniem pomiarowym w eksperymencie optycznym była skanująca głowica systemu LDV Polytec PSV-300, pracująca w zakresie 10–1000 mm/s z dokładnością 1%, umieszczona w odległości 2 metrów od wierzchniej płyty gitarowej. System LDV pracował w modzie FFT, umożliwiając obserwację drgań wierzchnich płyt badanych instrumentów gitarowych.

4.1.2. Rezultaty

Przykłady funkcji transmitancji (ich moduły i fazy) wyznaczone dla instrumentów bez strunociągu i strun oraz dla instrumentów kompletnych przedstawiono na rys. 4.4–4.5. Okręgami zaznaczono częstotliwości modalne zebrane w tabeli 4.3 i 4.4. Z rysunków 4.4–4.5 oraz animacji obwiedni modalnych wynika, że niektóre mody są modami zespolonymi, ponieważ fazy ich ruchu nie wynoszą 0 lub 180 stopni. Wartości tłumienia modalnego też są niezerowe (tabela 4.3 i 4.4). W związku z tym rzeczywiste zachowania drganiowe opisują zarówno mody normalne, jak i zespolone.

Zespolony charakter modów drgań można było łatwo zaobserwować w przebiegu drgań operacyjnych (ODS-ów), w których zaburzenie falowe przemieszczało się od krawędzi do krawędzi, odbijając się na nich w przeciwfazie, zgodnie z prawem odbicia. We wcześniejszych publikacjach opisywano przede wszystkim mody normalne (Elejabarrieta i in., 2000, 2002b; Rossing i Eban, 2000), natomiast opis modów zespolonych pojawił się u Torresa i Boullosy (2009) oraz u Skrodzkiej i in. (2011). W analizie uzyskanych wyników skoncentrowano się na pierwszych pięciu modach, chociaż jak wskazują doniesienia literaturowe, w badanym zakresie częstotliwości jest ich więcej (Elejabarrieta

i in., 2000, 2002b; Rossing i Eban, 2000). Amplitud poszczególnych modów nie porównano dlatego, że każda obwiednia modalna była normalizowana niezależnie względem jednostkowej masy modalnej, podobnie jak to zrobiono w innych pracach (Elejabarrieta i in., 2000). W większych częstotliwościach modalnych obwiednie modów stają się coraz bardziej skomplikowane i obrazy statycznie nie opisują ich dobrze.

4.1.2.1. Gitary bez strunociągu i strun

Parametry pierwszych pięciu modów obu niekompletnych instrumentów (bez strunociągu i strun) przedstawiono w tabeli 4.3 i 4.4. Pierwsze trzy obwiednie modalne obu instrumentów występują w kolejności znanej z wcześniejszych prac (Elejabarrieta i in., 2001). Mod „powietrzny” (0,0), związany ze sprężaniem i rozprężaniem powietrza zawartego w korpusie, występuje w częstotliwości 95 Hz dla instrumentu A oraz w częstotliwości 107 Hz dla instrumentu B. Mod (0, 0) płyty wierzchniej, w którym obie płyty poruszają się jednocześnie albo w górę, albo w dół – w częstotliwości 195 Hz dla gitary A i w częstotliwości 205 Hz dla gitary B. Mod (1, 0) płyty wierzchniej wystąpił w częstotliwości 220 Hz dla gitary A i 260 Hz dla instrumentu B.

Pozostałe dwa mody niekompletnej gitary A, podane w tabeli 4.4, są modami z podłużnymi liniami węzłowymi – są to mody oznaczone (2,0) i (3,0). Mody niekompletnej gitary A o wyższych częstotliwościach (nieuwzględnione w tabeli 4.4) mają przede wszystkim podłużne linie węzłowe.

Szczegółowy opis modów (m , n) gitary obelkowanej wachlarzowo sposobem Torresa, bez strunociągu i strun, znalezionych w badaniach modalnych oraz ich wpływ na generowane pole akustyczne, można znaleźć w doniesieniach literaturowych opisujących mody izolowanych płyt wierzchnich (Elejabarrieta i in., 2000, 2001; Torres i Boulloussa, 2009) lub mody korpusów rezonansowych (Caldersmith, 1986, 1995; Elejabarrieta i in., 2002b; Lai i Burgess, 1990). Dla instrumentu B obwiednia modu (0,1) ma jedną, poprzeczną linię węzłową, a obwiednia modu (2,1) jedną, poprzeczną linię i dwie podłużne linie węzłowe. Mody o wyższych częstotliwościach znalezione dla instrumentu B (nieuwzględnione w tabeli 4.4) mają zarówno podłużne, jak i poprzeczne linie węzłowe.

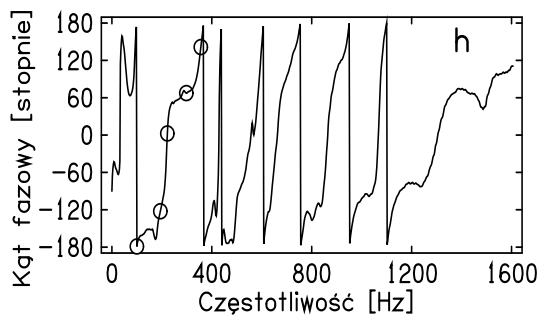
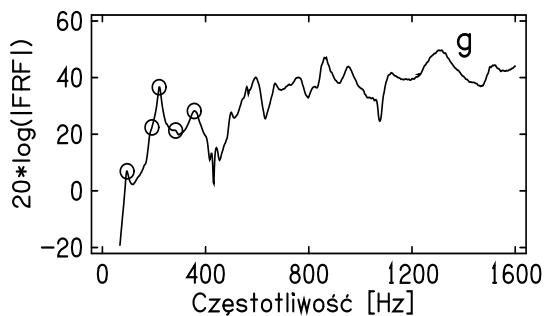
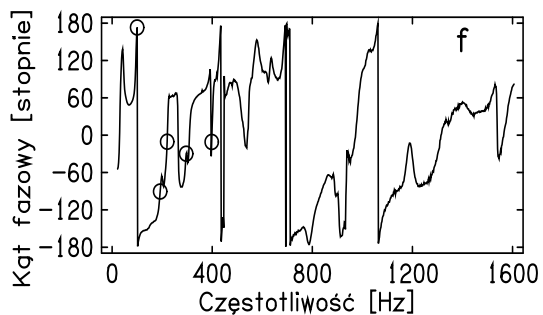
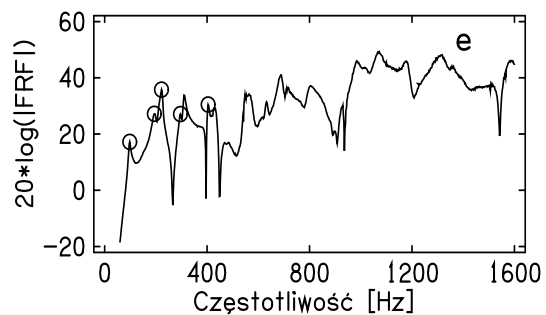
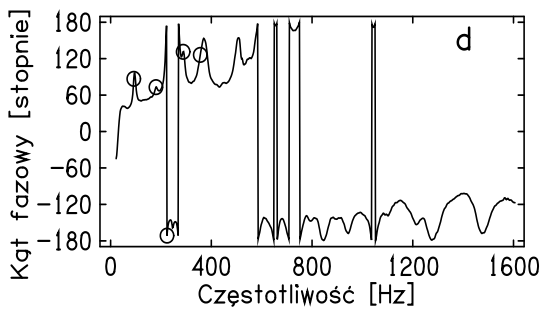
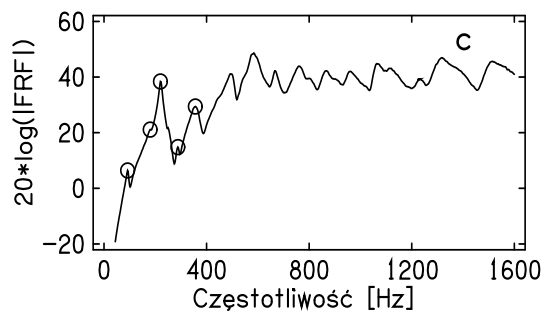
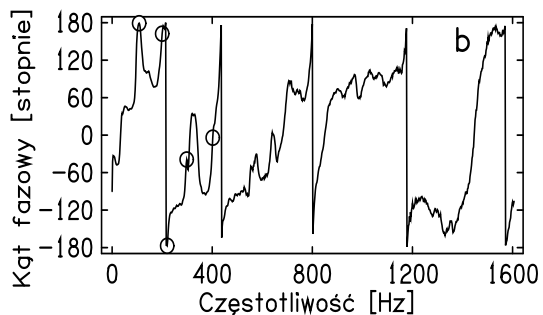
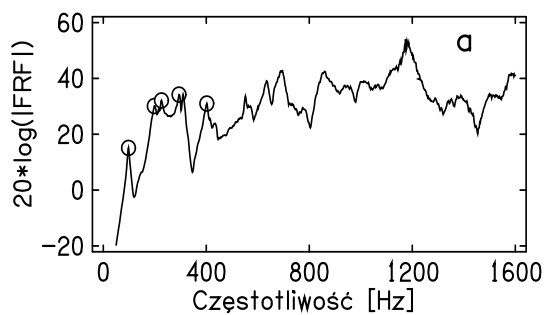
Częstotliwości modalne pierwszych trzech modów niekompletnego instrumentu B są większe od odpowiadających im częstotliwości mo-

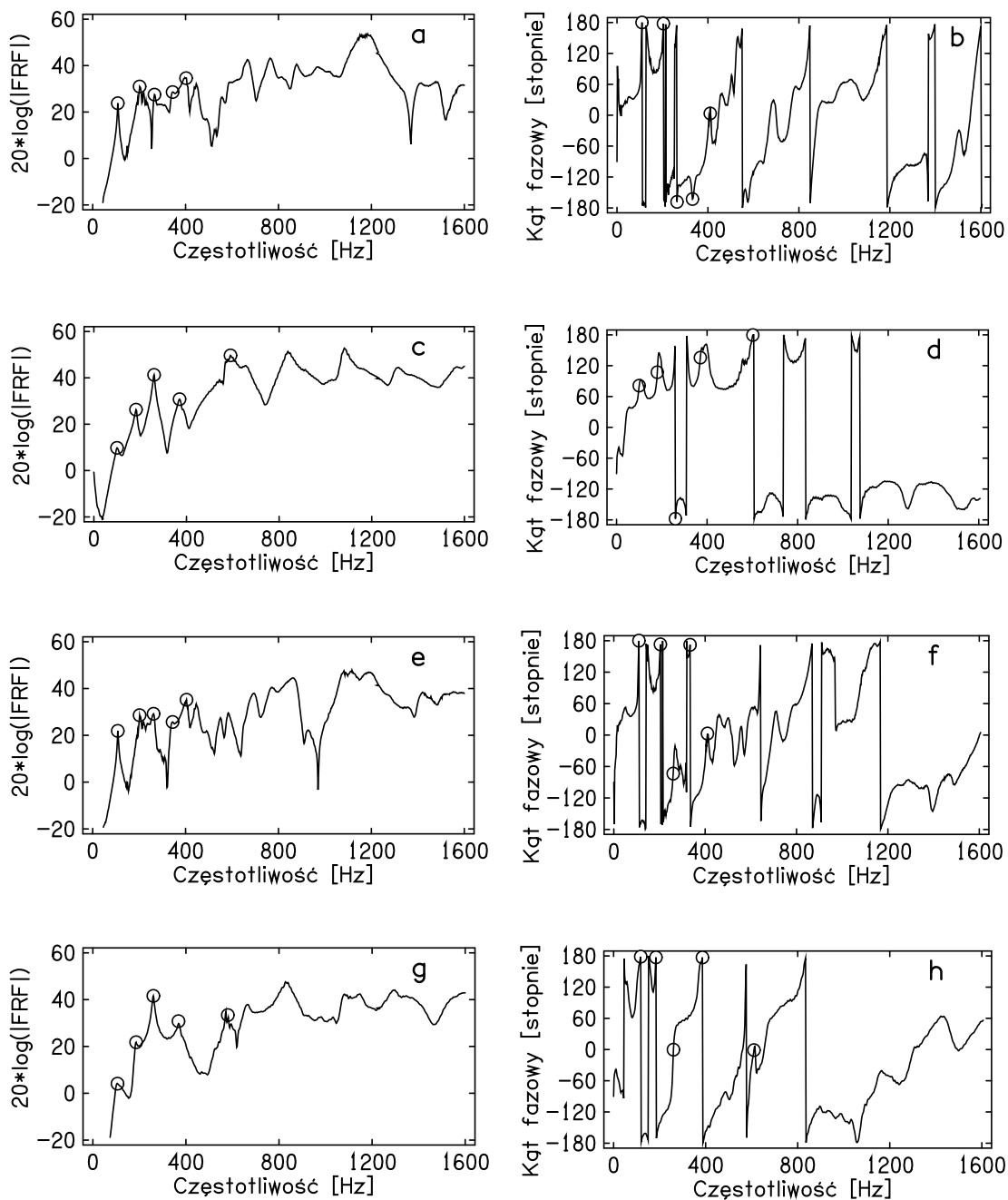
Tabela 4.3. Parametry modalne gitary A oraz gitary B przed zamontowaniem strunociagu i strun (instrument niekompletny) i po zamontowaniu strunociagu i strun (instrument kompletny)

Parametr modalny	Gitara A, niekompletna	Gitara A, kompletna	Gitara B, niekompletna	Gitara B, kompletna
Częstotliwość [Hz]	95	92	107	100
	195	181	205	181
	220	229	260	257
	298	286	333	369
	398	356	404	598
Tłumienie [Hz]	3.7	4.9	3.1	9.9
	6.5	6.9	6.3	5.7
	7.7	2.9	6.1	4.6
	6.9	7.5	8.9	14.2
	6.7	13.7	9.0	6.0
Tłumienie [%]	3.9	5.4	2.9	9.7
	3.3	3.8	3.1	3.2
	3.5	1.3	2.4	1.8
	2.3	2.6	2.7	3.8
	1.7	3.9	2.2	1.0

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2011).

Rys. 4.4. Przykłady funkcji transmitancji (FRF) dla gitary A, z obelkowaniem symetrycznym. Kolumna lewa: $20 \log(|FRF|)$, kolumna prawa: wykresy fazowe, wg Skrodzkiej i in. (2011). Pierwszy wiersz – gitara bez strunociagu i strun; funkcja transmitancji wyznaczona między punktem pomiaru odpowiedzi (czerwone kółko) i punktem pobudzenia zaznaczonym czarnym punktem na lewym dolnym policzku instrumentu (rys. 4.3). Drugi wiersz – gitara ze strunociagiem i strunami; funkcja transmitancji wyznaczona jak dla wiersza pierwszego. Trzeci wiersz – gitara bez strunociagu i strun; funkcję transmitancji wykonano między punktem pomiaru odpowiedzi (czerwone kółko) i punktem pobudzenia zaznaczonym czarnym kwadratem na prawym dolnym policzku instrumentu (patrz rys. 4.3). Czwarty wiersz – gitara ze strunociagiem i strunami; funkcję transmitancji wyznaczono jak dla wiersza trzeciego





Rys. 4.5. Przykłady funkcji transmitancji (FRF) wyznaczone dla instrumentu B, z obelkowaniem niesymetrycznym. Szczegóły opisu takie same jak dla rys. 4.4

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2011).

dalnych instrumentu A. Te różnice częstotliwości wynikają z różnego typu obelkowania i mogą również wynikać z anizotropii drewna oraz szczegółów wykonania obu instrumentów.

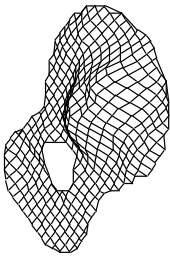
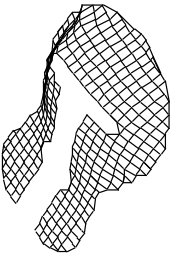
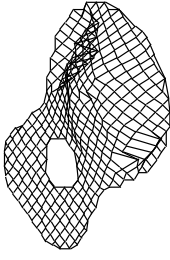
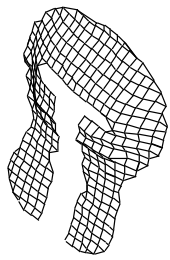
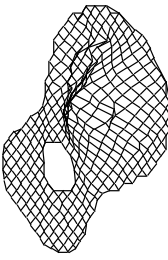
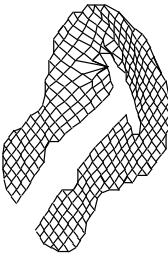
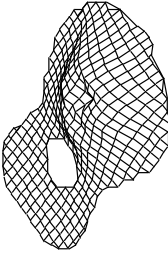
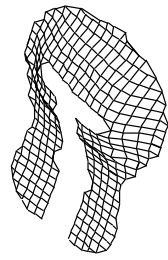
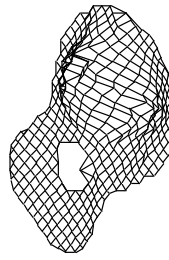
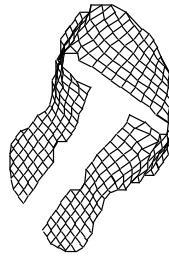
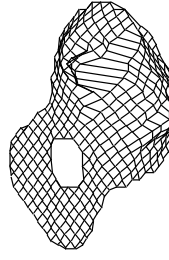
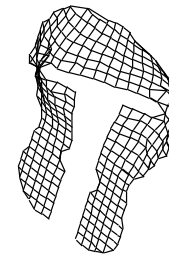
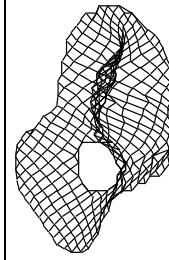
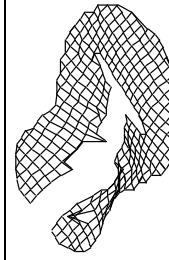
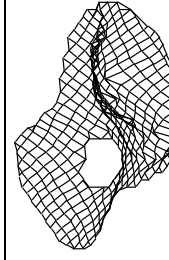
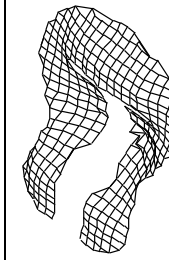
4.1.2.2. Gitary ze strunociągiem i strunami

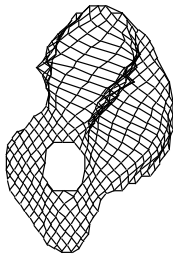
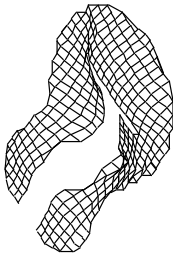
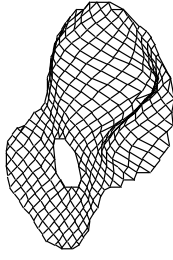
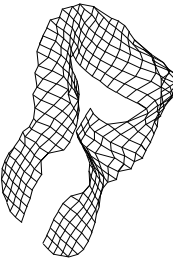
Wpływ strunociągu na zachowania dynamiczne wierzchnich płyt gitarowych ma ubogą literaturę. Kilku autorów, którzy zajmowali się tym zagadnieniem, komentowało wpływ strunociągu na drgania instrumentu jedynie pobieżnie (Elejabarrieta i in., 2002b; Hill i in., 2004; Rossing i Eban, 2000). Wpływ dwóch konfiguracji strunociągu na drgania płyty wierzchniej belkowanej sposobem Torresa badali eksperymentalnie, metodą ODS-ów i dopplerowskiej wibrometrii laserowej oraz numerycznie metodą elementów skończonych, Torres i Boullosa (2009). Wykazali oni, że strunociąg, w zależności od jego geometrii i mocowania, znacząco wpływa na zachowania modalne płyty wierzchniej w częstotliwościach większych od 300 Hz i może tworzyć albo obszar węzłowy na płycie, albo drgać z amplitudami porównywalnymi z amplitudami obszaru płyty, do którego jest przymocowany.

Parametry modalne pierwszych pięciu modów obu badanych instrumentów zawarto w tabeli 4.3 i 4.4. Przykłady drgań operacyjnych (ODS-ów) instrumentu B, uzyskane metodą dopplerowskiej interferometrii laserowej przedstawiono na rys. 4.6. Na rysunku 4.6 przedstawiono izolinie przyspieszenia; skala przyspieszeń w obu prezentowanych przykładach nie jest jednakowa. Wyposażenie gitar w strunociąg i struny nie pociągnęło za sobą zmiany kolejności pierwszych trzech obwiedni modalnych w instrumencie obelkowanym sposobem Torresa i pierwszych czterech obwiedni w instrumencie B. Nie zaobserwowano również zmiany częstotliwości modu (0,0) instrumentu A (95 ± 2 Hz dla instrumentu niekompletnego, 92 ± 2 Hz dla instrumentu kompletnego).

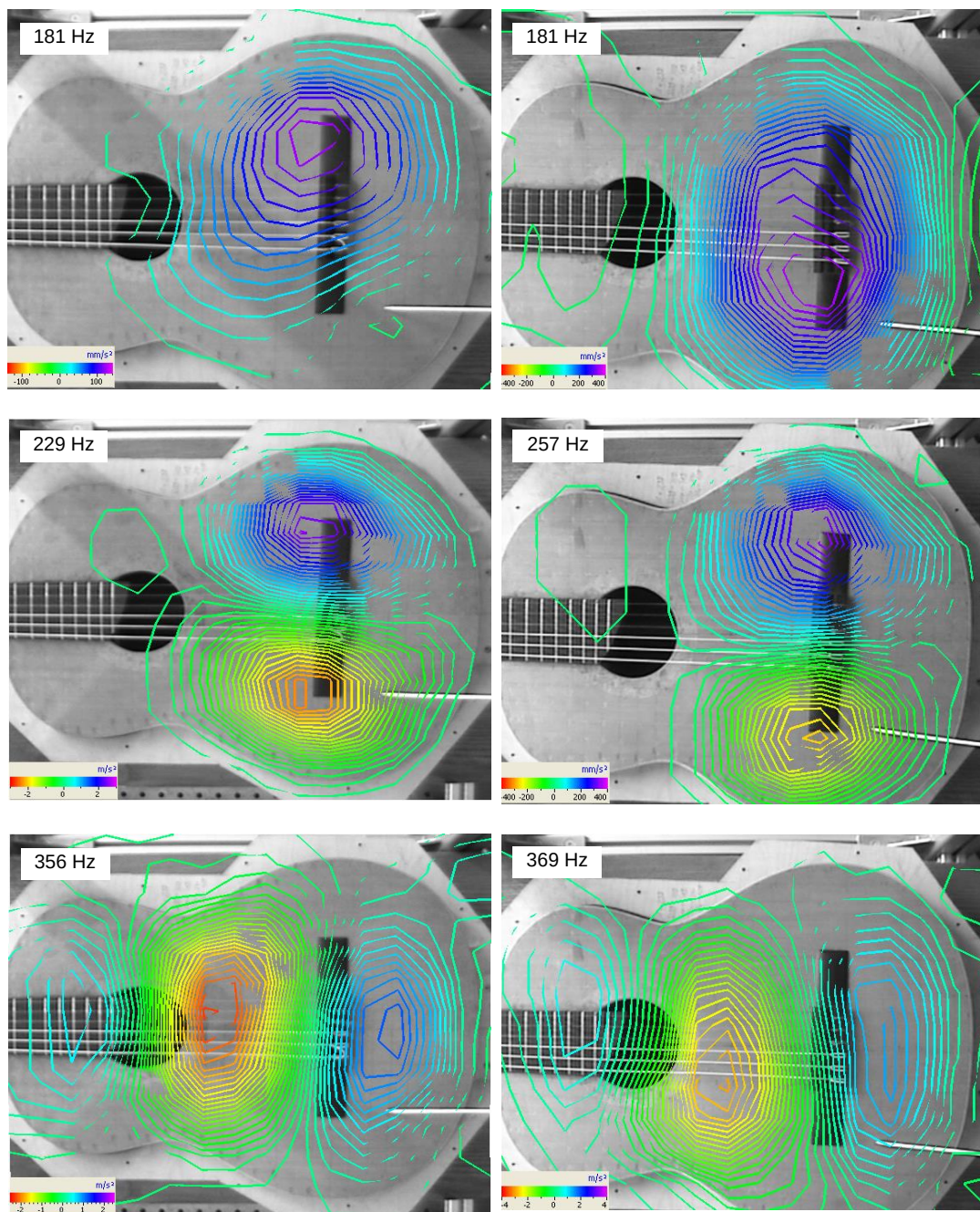
Wyposażenie gitary B w strunociąg i struny spowodowało zmniejszenie częstotliwości powietrznego modu (0, 0) ze 107 Hz do 100 Hz. Dołączenie strunociągu i strun zmniejszyło częstotliwość modu (0,0) płyty wierzchniej obu instrumentów (z 195 Hz do 181 Hz dla gitary A oraz z 205 Hz do 181 Hz dla gitary B). Dla modu (1,0) gitary B nie zaobserwowano zmiany częstotliwości modalnej (260 ± 2 Hz dla instrumentu niekompletnego oraz 257 ± 2 Hz dla instrumentu kom-

Tabela 4.4. Obwiednie modów gitary A – obelkowanej sposobem Torresa oraz gitary B – obelkowanej niesymetrycznie wraz z częstotliwościami i tłumieniami modalnymi oraz notacją modalną

Gitara A				Gitara B			
Niekompletna		Kompletna		Niekompletna		Kompletna	
95 Hz 3.9% (0,0)		92 Hz 5.4% (0,0)		107 Hz 2.9% (0,0)		100 Hz 9.7% (0,0)	
195 Hz 3.3% (0,0)		181 Hz 3.8% (0,0)		205 Hz 3.1% (0,0)		181 Hz 3.2% (0,0)	
220 Hz 3.5% (1,0)		229 Hz 1.3% (1,0)		260 Hz 2.4% (1,0)		257 Hz 1.8% (1,0)	
298 Hz 2.3% (2,0)		286 Hz 2.6% (0,1)		333 Hz 2.7% (0,1)		369 Hz 3.8% (0,1)	

398 Hz 1.7% (3,0)		356 Hz 3.9% (0,2)		404 Hz 2.2% (2,1)		598 Hz 1.0% (1,1)	
-------------------------	---	-------------------------	--	-------------------------	---	-------------------------	---

Źródło: Skrodzka i in. (2011).



Rys. 4.6. Przykłady drgań operacyjnych kompletnej gitary A obelkowanej wachlarzowo (lewa strona) oraz kompletnej gitary B obelkowanej niesymetrycznie (prawa strona). Częstotliwość modalną podano w lewym górnym rogu

pletnego). Mod (1,0) kompletnej gitary A ma częstotliwość większą od częstotliwości tego samego modu instrumentu niekompletnego.

Zatem typ obelkowania nie wpłynął na kolejność pierwszych trzech obwiedni modalnych, ale miał wpływ na częstotliwości ich obwiedni. Dla kompletnej gitary A mody (0,1) i (0,2) pojawiły się w miejsce modów (2,0) i (3,0) instrumentu niekompletnego. Częstotliwość modu (0,1) kompletnej gitary B była większa od częstotliwości tego modu dla instrumentu niekompletnego. Ogólnie, częstotliwości modalne pierwszych czterech modów instrumentu B nie są mniejsze od częstotliwości odpowiadających im modów gitary A, co powoduje, że barwa dźwięku instrumentu B jest subiektywnie oceniana jako ostrzejsza od barwy instrumentu A.

Drgania strunociągu przedstawiono w tabeli 4.4 oraz na rysunku 4.6. W dwóch najmniejszych częstotliwościach modalnych [oba mody (0, 0)] strunociąg jest prawie sztywny dla obu kompletnych instrumentów. Odkształcenia strunociągu naśladują i lekko spłaszczają drgania centralnego obszaru płyty wierzchniej. W modzie (1,0) strunociąg porusza się jak „belka równoważna”. Dla modu (0,1) obu instrumentów oraz dla modu (0,2) gitary A obserwuje się poprzeczną linię węzłową położoną powyżej strunociągu. Wybudzenie modu (0,2) oraz modów wyższych, mających linię węzłową w tym samym miejscu co mod (0,2), ma podstawowe znaczenie dla transmisji energii od strun do płyty wierzchniej w większych częstotliwościach.

4.1.3. Liniowość gitar

Podstawowym założeniem analizy modalnej jest założenie o liniowości badanego obiektu. Zatem, czy gitary można traktować jak układy liniowe, tzn. czy wykonywanie analizy modalnej ma dla nich sens? Zasada odpowiedniości Maxwella jest zazwyczaj weryfikowana w ten sposób, że mierzy się „pierwotne” funkcje transmitancji między dwoma punktami badanego obiektu, a następnie zamienia się ich role, tzn. „pierwotny” punkt pobudzenia staje się punktem odpowiedzi, a „pierwotny” punkt odpowiedzi staje się punktem pobudzenia. Następnie porównuje się „pierwotne” i „wtórne” funkcje transmitancji. Jeśli są takie same, to zasada Maxwella obowiązuje, a badany układ można traktować jako liniowy. W opisanych badaniach został zastosowany ten paradygmat i okazało się, że funkcje transmitancji były bardzo podobne dla wybranych par punktów testowych. Taka procedura dostarcza jednak jedynie informacji o liniowości między testo-

wanymi parami punktów pobudzenia oraz odpowiedzi i nie dostarcza informacji o liniowości całego badanego układu. Dlatego przebadano eksperymentalnie liniowość całych gitar poprzez porównanie módów drgań wyznaczonych w analizie modalnej i drgań operacyjnych (ODS-sów) uzyskanych metodą dopplerowskiej wibrometrii laserowej, którą wykonano dla częstotliwości modalnych. Przykłady drgań operacyjnych kompletnej gitary A i B przedstawiono na rys. 4.6.

Drgania operacyjne w częstotliwościach modalnych (ODS-y) można było uzyskać, ponieważ maksima funkcji transmitancji wyznaczone w eksperymencie modalnym były dobrze rozdzielone, rys. 4.4–4.5. Po dokonaniu szczegółowej inspekcji położenia linii węzłowych, obszarów drgających i faz ruchu (punkt po punkcie) okazało się, że obwiednie modalne uzyskane z eksperymentu modalnego i drgania operacyjne uzyskane metodą dopplerowskiej wibrometrii laserowej są bardzo podobne (por. drgania operacyjne z rys. 4.6 i odpowiadające im obwiednie modalne kompletnej gitary A i B z tabeli 4.4). Należy jednak zauważyć, że w kilku częstotliwościach modalnych zauważono pewne rozbieżności, które nie miały jednak większego wpływu na wnioski. Przed porównaniem obwiedni modalnych i drgań operacyjnych amplitudy prędkości tych drugich zostały przeliczone na amplitudy przyspieszenia, ponieważ sygnałem wyjściowym z analizy modalnej było przyspieszenie, a sygnałem wyjściowym z wibrometrii laserowej była prędkość. Punkt, który w eksperymencie modalnym był punktem pomiaru sygnału odpowiedzi gitary, w eksperymencie optycznym był punktem pomiaru sygnału pobudzenia. Zatem można powiedzieć, że funkcje transmitancji wyznaczone w eksperymencie modalnym i drgania operacyjne wyznaczone w eksperymencie optycznym były prawie identyczne. Wynika stąd, że definicja układu liniowego została spełniona (Ewins, 1995). Zatem gitary można traktować jak układy liniowe, pod warunkiem, że tłumienie modalne jest małe (nie przekracza 10% tłumienia krytycznego) oraz że amplituda pobudzenia nie jest zbyt duża. Ściśle mówiąc, żadna gitara nie jest układem liniowym, lecz wielu eksperymentatorów stosowało przybliżenie liniowości (Elejabarrieta i in., 2000, 2002b; Skrodzka i in., 2005; Torres i Boullosa, 2009).

W przeprowadzonych eksperymentach badano dwa instrumenty, co jest zbyt małą liczbą do przeprowadzenia jakichkolwiek analiz statystycznych. Jednak wielu autorów formułowało wnioski, opierając się na przebadanym jednym instrumencie (rzadziej kilku) (Elejabarrieta i in., 2000, 2002b; Boullosa, 2002; Hill i in., 2004; Skrodzka i in., 2005; 2011; Torres i Boullosa, 2009; Rossing i Eban, 2000).

Parametry modalne obu badanych gitar wyznaczono techniką eksperymentalnej analizy modalnej i dopplerowskiej wibrometrii laserowej przed zamontowaniem strunociągu i strun oraz po ich zamontowaniu. Uzyskane wyniki porównano, co pozwoliło na wyprowadzenie następujących wniosków:

- Typ obelkowania wpływa na parametry modalne gitar kompletnych i niekompletnych. Na parametry modalne niewielki wpływ mają również małe, lecz nieuniknione, niedoskonałości wykonania instrumentu oraz różnice własności materiałowych.

- Dla obu instrumentów bez strunociągu i strun obwiednie modalne modu „powietrznego” (0,0) i modów (0,0) oraz (1,0) płyty wierzchniej są podobne, lecz występują w różnych częstotliwościach. Częstotliwości tych modów dla niesymetrycznie obelkowanego instrumentu B bez strunociągu i strun są większe od odpowiadających im częstotliwości modów gitary A, obelkowanej klasycznie. Linie węzłowe niekompletnego instrumentu A są w większości podłużne. Takiej prawidłowości nie zaobserwowano dla gitary B.

- Typ obelkowania nie wpływa na kolejność występowania pierwszych trzech obwiedni modalnych kompletnych instrumentów, ale zmienia powiązane z nimi częstotliwości modalne. Wyposażenie gitary obelkowanej niesymetrycznie w strunociąg i struny zmniejsza pierwsze trzy częstotliwości modalne w porównaniu do częstotliwości gitary bez strunociągu i strun. Tak regularne zmiany częstotliwości modalnych nie zostały zaobserwowane dla gitary obelkowanej klasycznym, wachlarzowym sposobem Torresa.

- W zakresie małych częstotliwości strunociąg drga jak struktura sztywna. Dla większych częstotliwości drgania strunociągu stają się bardziej skomplikowane. Dla niektórych modów drgań płyty wierzchniej obserwuje się linię węzłową nad strunociągiem.

- Gitary mogą być traktowane jak układy liniowe w zakresie małych amplitud i małych wartości tłumienia, a więc główne założenie analizy modalnej o liniowości badanego obiektu jest spełnione.

4.2. Analiza modalna gitar różniących się kątem zamontowania szyjki

4.2.1. Instrumenty i eksperyment

Badaniom poddano dwie gitary o różnych kątach zamocowania szyjki, przedstawione na rys. 4.7. Płyty wierzchnie wykonano z drewna

świerkowego. Spodnie płyty wykonano z dwóch części afrykańskiego drewna kotibe, podobnie jak boczki. Gitary różniły się kątem zamontowania szyjki. W jednym instrumencie szyjka była wstawiona konwencjonalnie, równoległe do płyty wierzchniej, tzn. powierzchnia szyjki, do której przyklejono podstrunnice tworzyła płaszczyznę z powierzchnią płyty rezonansową. W drugim instrumencie szyjkę zamontowano



Rys. 4.7. Gitara z szyjką zamontowaną konwencjonalnie (z lewej) oraz gitara z szyjką zamontowaną pod kątem (z prawej). Na płytach wierzchnich widocznych jest 351 punktów pomiarowych wykorzystanych w teście modalnym

Źródło: Gordziej (2004).

pod kątem do płyty wierzchniej wynoszącym 8 stopni, rys. 4.8. Wstawienie szyjki pod kątem powodowało zmniejszenie siły równoległej do płyty wierzchniej, wywieranej przez strunociąg, w porównaniu do tej siły w instrumencie z szyjką wstawioną konwencjonalnie (Skrodzka i in., 2005).

Wewnętrzna konstrukcja obu instrumentów była taka sama. Płyty spodnie, od wewnątrz, wzdłuż łączenia, wzmocniono belką świerkową. Słoje w tym wzmocnieniu ułożone były prostopadłe do fugi płyty. Na płytach tych zamontowano trzy poprzeczne belki wykonane z drewna świerkowego, rys. 4.9b. Płyty spodnie miały grubość 3.2 mm w części

centralnej i ok. 2.5 mm przy krawędziach. Wierzchnie płyty rezonansowe wykonano z drewna świerkowego. Ich grubość wynosiła 2.5 mm w części centralnej do 2 mm przy krawędziach. Na tych płytach ułożono pięć belek wachlarzowo i dwie poprzecznie, rys. 4.9a. Obie badane gitary zbudowano według tego samego modelu, tzn., kontur korpusu i wysokość boczaków były takie same.



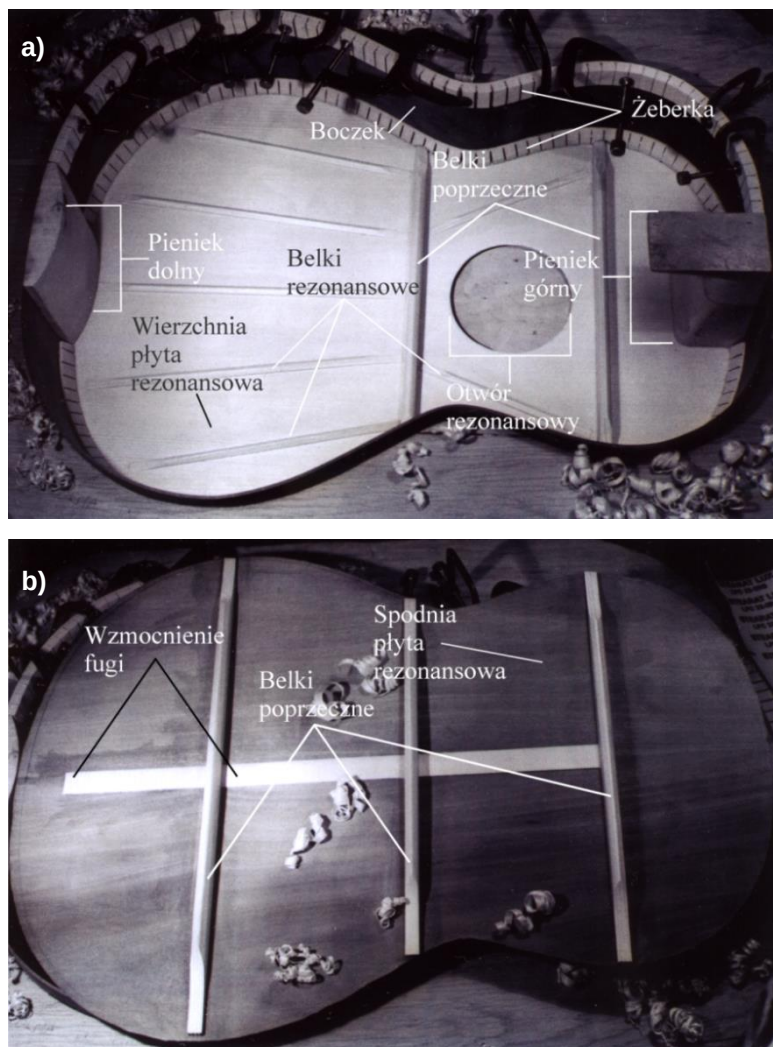
Rys. 4.8. Szyjka gitary zamontowana pod kątem

Źródło: Gordziej (2004).

Oba instrumenty pokryto cienką warstwą utwardzonego lakieru syntetycznego na bazie akrylu. W gitarze z szyjką zamontowaną konwencjonalnie drewno podbarwiono bejcami spirytusowymi. W instrumencie z szyjką zamontowaną pod kątem lakier położono na surowe drewno. Gitary zaprojektował i wykonał lutnik Marek Gordziej w Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego w Poznaniu.

Na potrzeby eksperymentu modalnego instrumenty zamontowano w drewnianej obejmie, podobnej do przedstawionej na rys. 4.2. Instrumenty były wyposażone w taki sam zestaw strun i były nastrojone typowo dla sześciostrunowej gitary: E_6 , A_5 , D_4 , G_3 , H_2 , E_1 ($f = 82, 110, 147, 196, 247$ i 330 Hz). Struny były lekko wytłumione kawałkiem gąbki wsuniętym między nie i podstrunnice.

W teście modalnym, w wersji z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi układu, instrumenty pobudzano uderowo, podobnie jak to opisano w podrozdziale 4.1.1. Pobudzenie przykładano kolejno w 351 punktach widocznych na rys. 4.7. Sygnał odpowiedzi mierzono akcelerometrem, którego położenie było stałe, w kierunku prostopadłym do płyt wierzchnich.

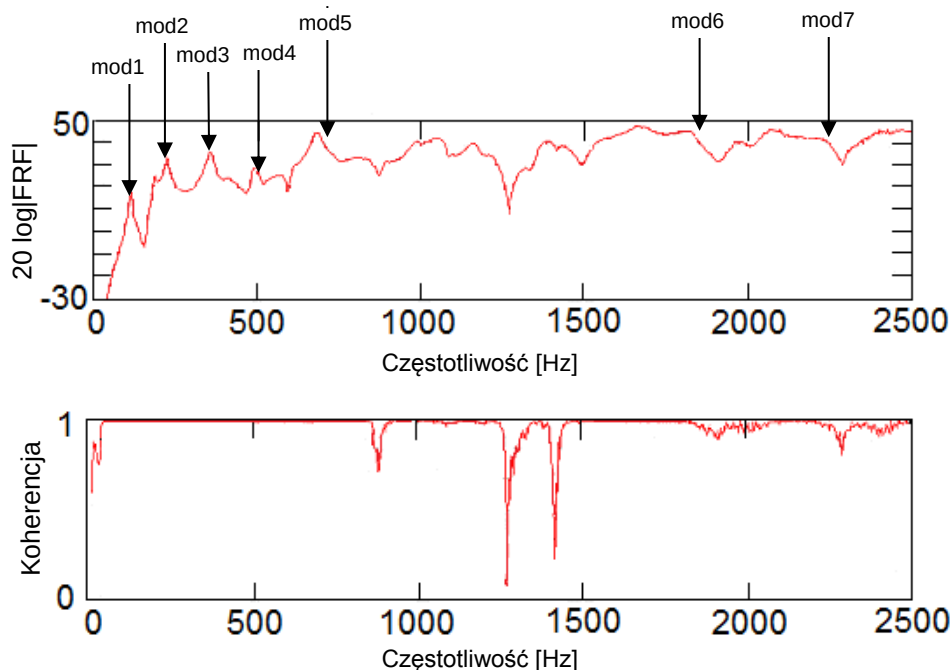


Rys. 4.9. Wewnętrzna konstrukcja korpusu rezonansowego gitary: a) płyta wierzchnia i boczki w formie, b) płyta spodnia

Źródło: Gordziej (2004).

Funkcje transmitancji wyznaczono w paśmie 0–2500 Hz, po dzieleniu uśrednieniach w dziedzinie częstotliwości. Ich jakość kontrolowano, obserwując przebiegi koherencji.

Przykład zmierzonej inertancji i odpowiadającej jej koherencji przedstawiono na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Przykładowy moduł funkcji transmitancji (inertancji) oraz przebieg koherencji wyznaczone dla gitary o szyjce zamontowanej konwencjonalnie

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2005).

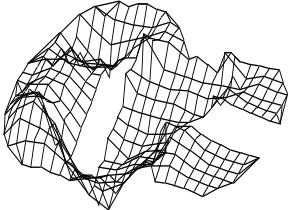
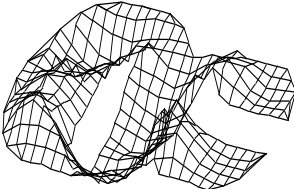
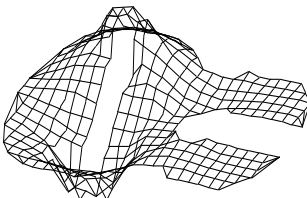
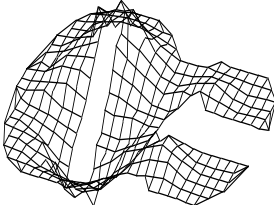
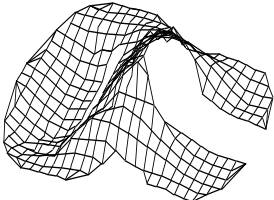
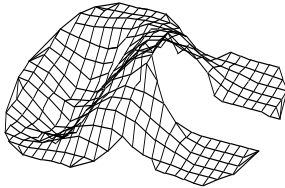
4.2.2. Rezultaty

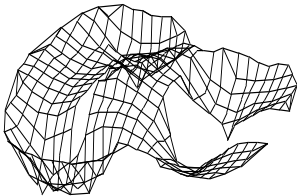
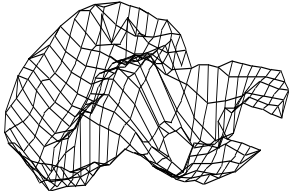
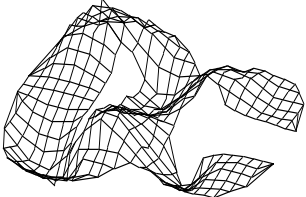
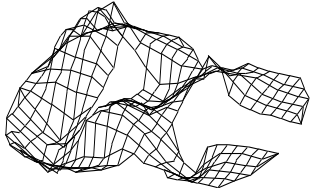
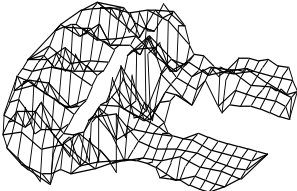
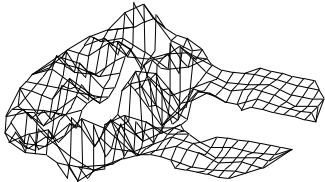
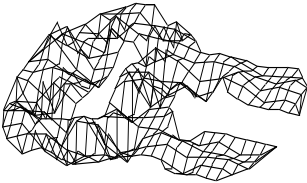
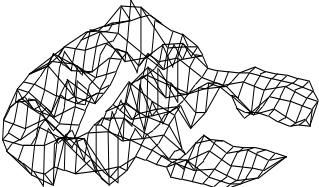
Parametry modalne obu gitar przedstawiono w tabeli 4.5. Pierwszy mod drgań występujący dla gitary z konwencjonalnie zamontowaną szyjką w częstotliwości 112 Hz, a dla gitary z szyjką pod kątem w częstotliwości 98 Hz nie ma wyraźnie określonych linii węzłowych i jest wynikiem silnego sprzężenia drgań korpusu i pierwszego modu drgań objętości powietrza zawartej w pudle rezonansowym. Można powiedzieć, że te mody to „niezbyt czysty” rezonans Helmholtza. Drugi mod

(w częstotliwości 224 Hz dla gitary z konwencjonalnie wstawioną szyjką i 202 Hz dla gitary z szyjką pod kątem) jest modem „kołyszącym” – linia węzłowa przebiega wzdłuż korpusu gitary dla obu badanych gitar. Mod trzeci (w częstotliwości 356 Hz dla gitary z konwencjonalnie wstawioną szyjką i 342 Hz dla gitary z szyjką pod kątem) w obu badanych przypadkach ma linię węzłową przebiegającą w najszerszym miejscu instrumentu. Mod czwarty jest podobny do modu trzeciego, lecz dodatkowo można w nim zaobserwować znaczny ruch górnych części korpusu, którego nie było w modzie trzecim.

Mod piąty ma jedną linię węzłową wzdłuż instrumentu oraz dwie w poprzek i oznaczany jest (1,2). Ten mod oraz dwa kolejne zawarte w tabeli 4.5 są modami słabo promieniującymi akustycznie ze względu na to, że liczne sąsiednie obszary płyty wierzchniej poruszają się względem siebie w różnych fazach.

Tabela 4.5. Obwiednie modów gitary z szyjką zamontowaną konwencjonalnie oraz gitary z szyjką zamontowaną pod kątem wraz z częstotliwościami i tłumieniami modalnymi oraz notacją modalną

Gitara z konwencjonalnie wstawioną szyjką		Gitara z szyjką wstawioną pod kątem	
1		2	
112 Hz 3.7% (0,0)		98 Hz 4.3% (0,0)	
224 Hz 2.3% (1,0)		202 Hz 4.6% (1,0)	
356 Hz 2.4% (0,1)		342 Hz 2.5% (0,1)	

1		2	
500 Hz 2.0% (0,2)		508 Hz 3.1% (0,2)	
681 Hz 2.0% (1,2)		639 Hz 3.3% (1,2)	
1840 Hz 2.5% (4,0)		1760 Hz 4.0% (4,0)	
2280 Hz 2.4%		2020 Hz 4.0%	

Źródło: Skrodzka i in. (2005); Gordziej (2004).

Gitara z szyjką zamontowaną pod kątem ma generalnie mniejsze częstotliwości modalne (z wyjątkiem modu czwartego) niż gitara z konwencjonalnie wstawioną szyjką, natomiast zmiana kąta nachylenia szyjki nie wpłynęła w znaczący sposób na zmianę kształtu obwiedni modów. Tłumienia modalne dla gitary z szyjką pod kątem są o kilka procent większe niż dla gitary konwencjonalnej, lecz ponieważ ich wartości dla obu gitar nie przekraczają 5%, można uznać, że oba instrumenty są strukturami słabo tłumionymi, o długim czasie wybrzmiewania. Zmniejszenie częstotliwości modalnych w instrumencie

o szyjce wstawionej pod kątem należy wiązać ze zmniejszeniem naprężeń wywieranych na płytę wierzchnią za pośrednictwem szyjki i podstrunnicy przez struny siły. Powoduje to zmniejszenie sztywności płyty i w konsekwencji zmniejszenie jej częstotliwości własnych. Ogólnie, otrzymana sekwencja obwiedni modalnych jest podobna do opisywanej w literaturze (French i Bissinger, 2001a, 2001b; French i Hosler, 2001; Flecher i Rossing, 2010), z tą różnicą, że w opisanych badaniach mod (1,0) występuje przed modem (0,1). Ta „zamiana pozycji” bywa charakterystyczna dla gitar różniących się sposobem obelkowania (Flecher i Rossing, 2010).

Mody drgań gitar są pobudzane podczas gry na instrumencie, kiedy struny są przyciskane do szyjki i generują składowe podharmoniczne i harmoniczne oraz ich kombinacje, które mogą pokrywać się z częstotliwościami modalnymi. W wyniku pobudzenia do drgań modów gitary o szyjce zamontowanej pod kątem, o mniejszych częstotliwościach niż w gitarze o szyjce wstawionej konwencjonalnie, instrument o szyjce wstawionej pod kątem uzyskuje niższe brzmienie. Jeśli zatem celem lutnika jest ocieplenie barwy gitary, należy rozważyć zamontowanie szyjki pod niewielkim kątem względem płyty wierzchniej.

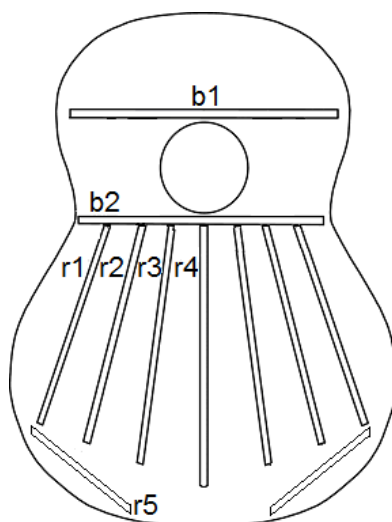
4.3. Analiza modalna wierzchniej płyty gitarowej na różnych etapach konstrukcji

Swobodna płyta gitarowa nie jest samodzielnym instrumentem muzycznym, lecz ważnym elementem kompletnej gitary, ponieważ w dużym stopniu determinuje jej właściwości akustyczne. Poszczególne elementy gitary, w tym płytę wierzchnią tworzy się oddzielnie, a następnie ze-spala w instrument, który powinien mieć dobre walory brzmieniowe. Prześledzenie zmian w parametrach modalnych na kolejnych etapach konstrukcji płyty wierzchniej pozwala zrozumieć wpływ poszczególnych elementów płyty na jej zachowania dynamiczne.

4.3.1. Płyta i eksperyment

Analizę modalną swobodnej, wierzchniej płyty gitarowej na różnych etapach budowy przedstawili Elejabarrieta i Santamaria (2000). Płytę wykonano z dwóch połówek z drewna cedrowego, sklejonych wzdłuż osi podłużnej konturu, z zachowaniem równoległości słoików. Płytę badano na następujących etapach konstruowania:

- etap 1 – wykonano kontur płyty większy o 1 cm od założonego, którego nie gładzono (grubość płyty nie była jednakowa), bez otworu rezonansowego,
- etap 2 – kontur doprowadzono do finalnego kształtu, zmniejszono jego grubość w kierunku brzegów oraz wygładzono, wycięto otwór rezonansowy i zamontowano na nim usztywniający, ozdobny pierścień (rozetę) z wielobarwnego drewna, tzw. *zuncho*,
- etap 3 – zamontowano dwie belki (b1 i b2 na rys. 4.11) nad i pod otworem rezonansowym, prostopadłe do osi podłużnej płyty,
- etap 4 – zamontowano siedem belek w układzie wachlarzowym Torresa oraz dwie belki w dolnej części płyty (r1-r4 oraz r5 na rys. 4.11). Na płycie nie zamontowano strunociągu.



Rys. 4.11. Obelkowanie płyty gitarowej badanej na różnych etapach konstruowania

Źródło: wg Elejabarriety i Santamarri (2000).

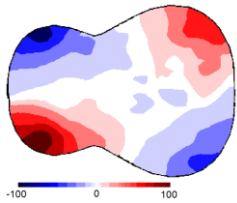
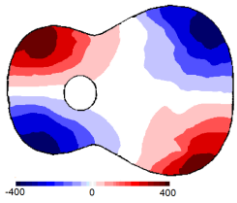
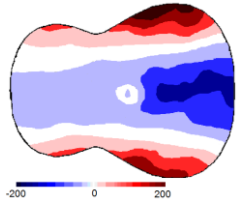
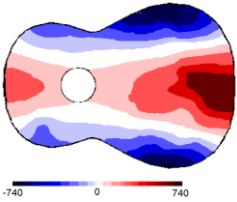
W kolejnych etapach testu płytę zawieszano na czterech gumach przymocowanych do górnej krawędzi, w obszarze osi podłużnej płyty. Obszar zamocowania gum wybrano, kierując się tym, że górna część płyty po zamontowaniu belek nie wykazuje dużych drgań. Płytę pobudzano do drgań młotkiem uderowym Brüel & Kjær 8203 o czułości 3.47 pC/N, kolejno w 115 punktach pomiarowych. Sygnał odpowiedzi

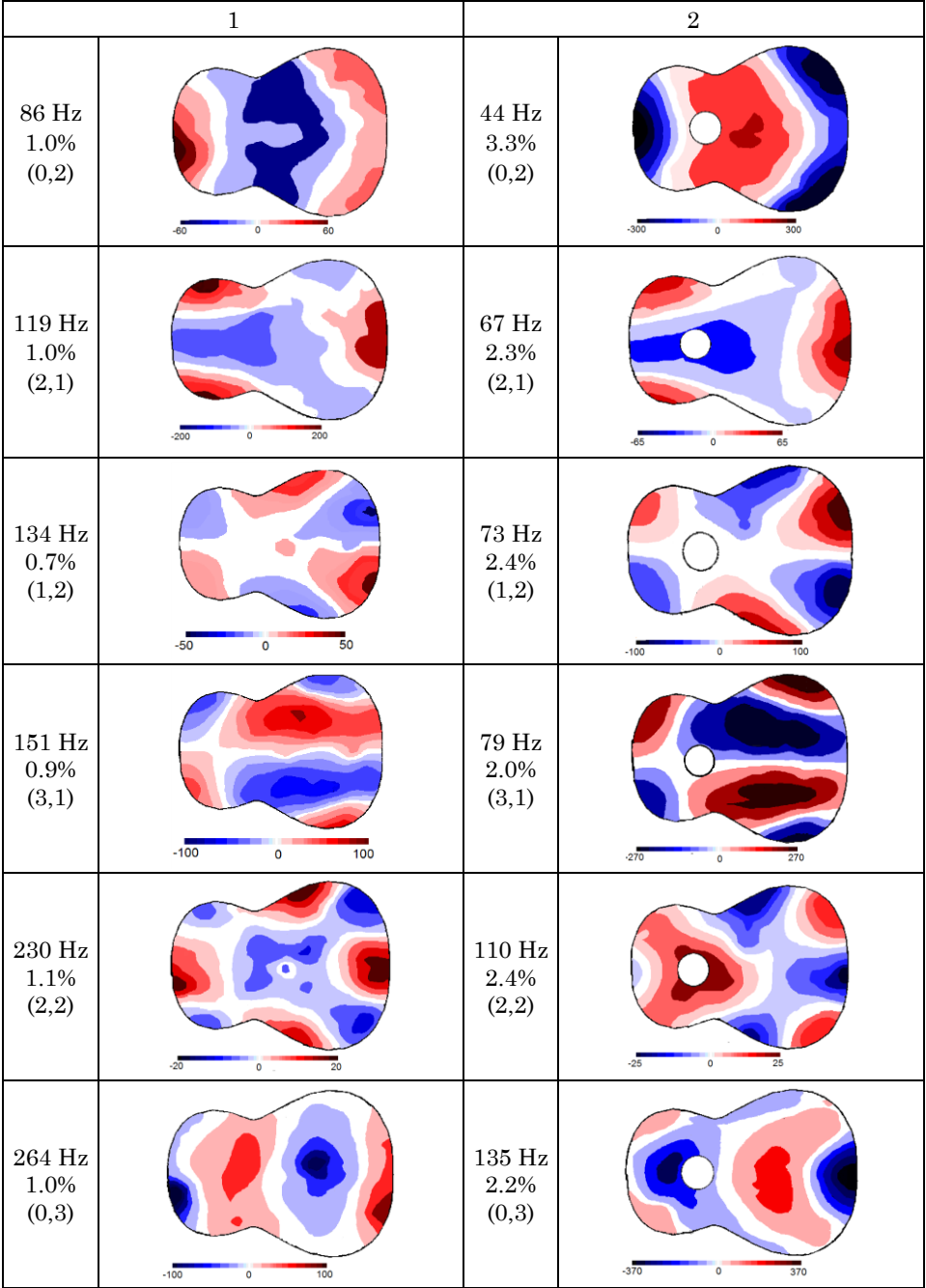
rejestrowano akcelerometrem Brüel & Kjær 4500 o czułości 0.3 pC/ms^{-2} i masie 3.5 g . Akcelerometr był przymocowany na wosk pszczeli w punkcie odpowiadającym punktowi styczności najniższej struny basowej oraz strunociągu. Oba sygnały rejestrowano w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty. Przeprowadzono więc test modalny w wersji z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi. Parametry modalne wyznaczono za pomocą oprogramowania CADA-PC. Rozdzielczość analizy wynosiła 1 Hz .

4.3.2. Rezultaty

Parametry modalne uzyskane na czterech etapach konstrukcji płyty wierzchniej przedstawiono w tabeli 4.6 i 4.7. W obwiedniach modalnych zaznaczono amplitudy drgań poszczególnych obszarów płyty, z uwzględnieniem fazy ruchu. Ze względu na to, że w analizie modalnej zastosowano normowanie do jednostkowej masy modalnej (rozdział 3), nie jest możliwe porównanie amplitud w różnych modach, a jedynie w obrębie każdego z nich – skale amplitud dla poszczególnych modów są różne.

Tabela 4.6. Obwiednie modalne płyt gitarowych otrzymane na 1 i 2 etapie konstrukcji

Etap 1		Etap 2	
1		2	
48 Hz 1.5% (1,1)		26 Hz 5.0% (1,1)	
56 Hz 1.5% (2,0)		30 Hz 4.5% (2,0)	



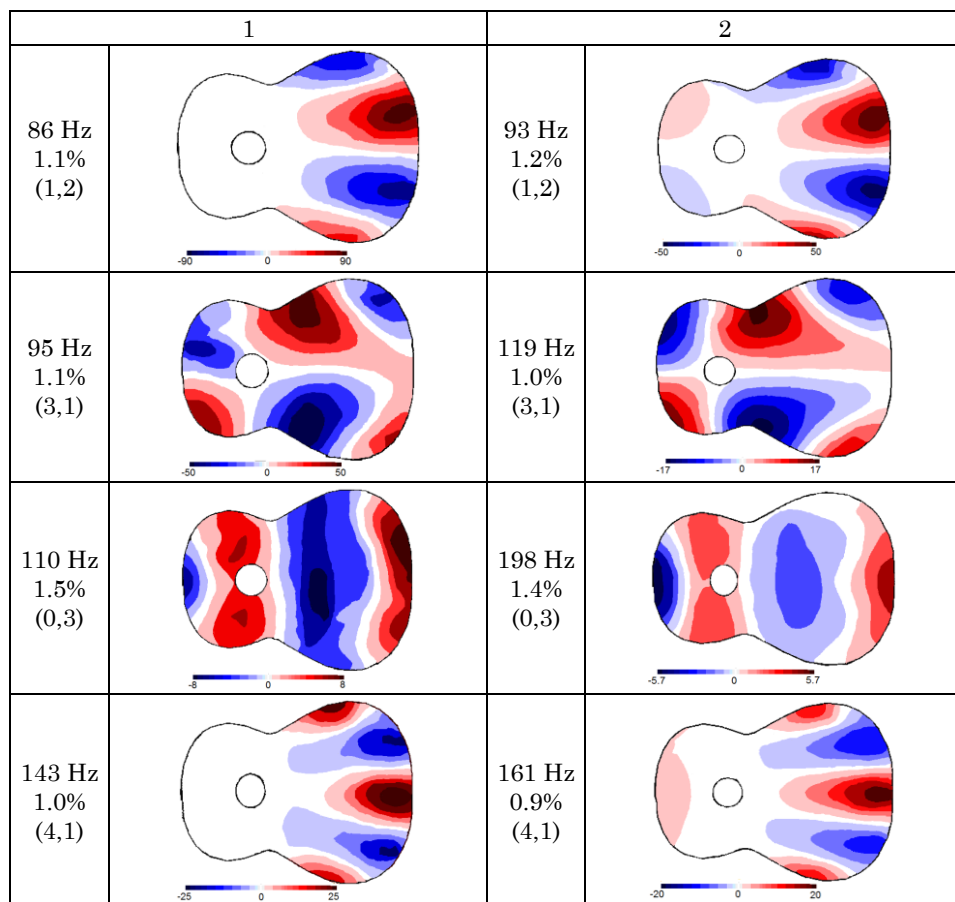
Źródło: wg Elejabarriety i Santamarri (2000).

Mody przedstawione w tabelach 4.6 i 4.7 są modami normalnymi, tzn. względna faza ruchu stopni swobody wynosiła 0 lub 180 stopni. Kolorem białym oznaczono obszary węzłowe. Masa wyjściowego konturu płyty na etapie 1 wynosiła 166.5 g, a po finalnym jego uformowaniu w etapie 2 – 123 g. W tabeli 4.6 przedstawiono skutki, jakie zmniejszanie masy konturu wywarło na parametry modalne pierwszych ośmiu modów. Obwiednie modalne uporządkowano względem zwiększającej się częstotliwości modalnej. Sekwencja częstotliwościowa obwiedni modalnych uzyskanych w etapie 1 i etapie 2 jest taka sama – zmniejszenie masy płyty na skutek uformowania ostatecznego konturu, zmniejszenie jej grubości, szlifowanie i wycięcie otworu rezonansowego nie zaburzyło kolejności modów, spowodowało jednak zwiększenie gradientu amplitudy w prawie wszystkich obwiedniach modalnych etapu 2. Jest to skutkiem pocienienia płyty w kierunku brzegów. Działania przeprowadzone w etapie 2 wpłynęły na częstotliwości modalne, które w etapie 2 były znacznie mniejsze niż w etapie 1.

Ponieważ zmniejszenie częstotliwości modalnych w etapie 2 jest znacznie większe, niż wynikałoby tylko z ubytku masy, przypisuje się je

Tabela 4.7. Obwiednie modalne płyt gitarowych otrzymane na 3 i 4 etapie konstrukcji

Etap 3		Etap 4	
1		2	
34 Hz 2.0% (1,1)		38 Hz 2.0% (1,1)	
48 Hz 1.4% (2,1)		57 Hz 1.5% (2,1)	
41 Hz 1.5% (0,2)		49 Hz 1.9% (0,2)	



Źródło: wg Elejabarriety i Santamarii (2000).

zwiększeniu sztywności płyty oraz ubytkowi jej masy na skutek działań przeprowadzonych na etapie 2.

Na etapach 3 i 4 płyta została usztywniona przez dodanie do niej belek symetrycznie rozłożonych względem osi podłużnej. Dodanie belek spowodowało wzrost masy struktury w porównaniu do etapu 2 – na etapie 3 wynosiła ona 149 g, a na etapie 4 – 165.2 g. Zatem na finalnym etapie 4 masa płyty była co do wartości prawie taka sama jak na etapie 1, lecz inaczej rozłożona. Dodanie dwóch poprzecznych belek (b1 i b2 na rys. 4.11), nad i pod otworem rezonansowym, ograniczyło drgania górnej części płyty, wzmocniło ją i usztywniło, tak aby mogła ona podolać obciążeniom wprowadzanym przez późniejsze za-

montowanie szyjki. Dodanie w dolnej części płyty belek wachlarzowych (r1-r5 na rys. 4.11) wzmocniło ją, tak aby mogła podolać obciążeniom i naprężeniom wywieranym przez strunociąg i struny.

Wyniki analizy modalnej wierzchniej płyty gitarowej na trzecim i czwartym etapie konstrukcji przedstawiono w tabeli 4.7. Uporządkowano je w kolejności podobnej jak dla etapu 1 z tą różnicą, że na etapie 3 i 4 zniknęły niektóre mody widoczne na etapach 1 oraz 2 i pojawiły się inne. Ogólnie z tabeli 4.7 wynika, że dodanie do płyty belek usztywniających spowodowało zmianę obwiedni modalnych, której nie obserwowano na etapach 1 i 2. Cechą charakterystyczną sekwencji obwiedni modalnych etapu 3 i 4 jest zniknięcie modów (2,1) oraz (2,2) obserwowanych na wcześniejszych etapach konstrukcji – wprowadzenie poprzecznych belek w okolicy otworu rezonansowego ograniczyło drgania górnej części płyty. Na etapie 3 i 4 mod (0,3) ma w górnej części płyty linie węzłowe pokrywające się z położeniem belek b1 i b2, a różnice amplitud poszczególnych obszarów płyty są niewielkie, inaczej niż to było na etapach 1 i 2. W modzie (0,2) etapu 4, czyli po dodaniu belek wachlarzowych, zakrzywienie dolnej linii węzłowej zmieniło kształt w porównaniu do wcześniejszych etapów. W odniesieniu do częstotliwości modalnych dodanie belek b1 i b2 na etapie 3 spowodowało zwiększenie masy górnej części płyty, co skutkowało zmniejszeniem częstotliwości modów (0,2) oraz (0,3) w porównaniu do ich częstotliwości na etapie 2. Umieszczenie na płycie belek wachlarzowych spowodowało zwiększenie częstotliwości modalnych na etapie 4 [największe dla modu (0,3)], w porównaniu do etapu 3.

Jak należało się spodziewać, obwiednie i częstotliwości modalne izolowanej, swobodnej płyty gitarowej i płyty zamontowanej w kompletnym instrumencie są inne (por. tabele 4.4 i 4.7). Wynika to z odmiennych warunków pracy w obu przypadkach. W kompletnym instrumencie na drgania płyty wierzchniej wpływa nie tylko jej kształt, obelkowanie, wymiary i sposób zamocowania, lecz także nieobecne w przypadku izolowanej płyty: objętość powietrza w pudle rezonansowym, strunociąg ze strunami oraz szyjka. Niemniej jednak prześledzenie ewolucji parametrów modalnych izolowanej wierzchniej płyty gitarowej na kolejnych etapach konstrukcji może dostarczyć cennych informacji lutnikowi projektującemu i wykonującemu instrument. Ze względu na różnorodność możliwego obelkowania obu płyt gitarowych nie wskazuje się dla nich, jak również dla kompletnych instrumentów, tzw. modów sygnaturalnych i pożądanых pasm częstotliwości, powszechnie stosowanych przy opisie drgań skrzypiec (podrozdział 5.2.2).

ANALIZA MODALNA SKRZYPIEC

Skrzypce zbudowane są z korpusu rezonansowego i szyjki. Korpus skrzypcowy składa się z płyty wierzchniej, płyty spodniej oraz boczaków. Szyjka składa się z chwytni, komory kołkowej oraz ślimaka lub rzeźbionej główki. Elementami skrzypiec są także podstrunnica, podstawek oraz strunociąg ze strunami. Największy wpływ na dźwięk instrumentu ma korpus rezonansowy, ale pozostałe elementy również wnoszą swój wkład. Płyta wierzchnia jest najczęściej wykonana z drewna świerkowego, ma łukowe wysklepienie oraz dwa otwory rezonansowe, nazywane efami. Jest ona wzmocniona belką basową umocowaną wzdłuż płyty, pod stopą podstawka, nad którą umieszczone są struny basowe, i podparta duszą. Krawędzie płyty wierzchniej są przyklejone do boczaków oraz pieńka dolnego i górnego, a także czterech klocków narożnikowych. Płyta spodnia, zazwyczaj wykonana z drewna jaworowego i również wysklepiona, jest przyklejona po przeciwnej stronie boczaków. Dusza, czyli mały drewniany element w kształcie walca, jest wciśnięta między obie płyty, pod stopą podstawka, nad którą umieszczone są struny sopranowe (Cremer, 1983). Na płycie wierzchniej umiejscowiony jest podstavek, który podpira struny biegnące od strunociągu umieszczonego w dolnej części płyty, przez prozek górny w górnej części szyjki, do komory kołkowej z kołkami. Zamontowanie strun i nastrojenie instrumentu powoduje powstanie naprężeń w instrumencie, na które nakładają się drgania płyt powstające podczas drgań strun (Runnemalm i in., 2000). Zagadnienia wpływu wstępnych naprężeń w płytach rezonansowych instrumentów muzycznych na jakość ich brzmienia badał Skalmierski (1986). Z zewnątrz skrzypce wyglądają jak układ symetryczny, lecz w istocie są układem niesymetrycznym z uwagi na umieszczoną wewnątrz belkę basową oraz duszę. Taka budowa skrzypiec, wraz z nieuniknionymi niejednorodnościami materiału drzewnego, czyni z nich

interesujący i niestandardowy obiekt badań modalnych szczególnie w kontekście poznania mniej lub bardziej wyimaginowanego „sekrety Stradivariego” (Bissinger i Olivier, 2007). Mimo wielu starań do tej pory nie zbudowano wiernej „kopii tonalnej” doskonałych instrumentów A. Stradivariego – „Schreibera” i „Mesjasza” (Schleske, 1996a).

Wartości częstotliwości modalnych i procentu tłumienia krytycznego, a także dokładne położenie linii węzłowych przedstawione w tym rozdziale należy traktować jako przybliżone. Opisane eksperymenty przeprowadzano bowiem dla skrzypiec (i płyt) różniących się (w niewielkim stopniu) wymiarami, kształtem, wykończeniem, parametrami drewna lub sposobem zamocowania podczas eksperymentu.

5.1. Oznaczenia modów

Oznaczenia i nazewnictwo opisowe modów skrzypiec stosowane przez różnych autorów nie zawsze są takie same, co może powodować zamieszanie związane z ich identyfikacją. W tym rozdziale mody drgań skrzypiec będą konsekwentnie oznaczane według popularnej konwencji Marshalla (1985), tzn.:

– A0 oznacza najważniejszy, najniższy częstotliwościowo mod. Jest on często nazywany modem powietrznym (*air*), ze względu na swą naturę, związaną z ruchem powietrza zawartego w korpusie instrumentu. Mod A0 jest silnym źródłem dźwięku promieniowanego przez efy i jest bardzo istotny dla dźwięku generowanego przez najniżej nastroszoną strunę G (196 Hz). Mod ten jest obserwowany w częstotliwości ok. 280 Hz.

– A1 oznacza kolejny mod objętości powietrza zawartego w korpusie, występujący w częstotliwości 450–470 Hz. W modzie tym powietrze przemieszcza się między górnymi i dolnymi policzkami oraz z powrotem, w reakcji na ruch płyt instrumentu. Mod ten jest silnie sprzężony z modem A0 i wzmacnia jego wkład w generację dźwięku, choć sam nie zawsze jest jego efektywnym źródłem w skrzypcach; więcej na ten temat napisano w podrozdziale 5.9.2. W przeszłości nazywany był „głównym rezonansem drewna” (ang. *main wood resonance*). Obecnie nazywa się tak parę modów korpusu B(1–), B(1+). Może to prowadzić do pomyłek przy lekturze starszych publikacji, które ukazały się przed 2000 r.

– A2, A3, ... oznaczają kolejne mody powietrza w korpusie (ang. *cavity modes*).

– CBR (ang. *C-bout rhomboid*) oznacza najniższy częstotliwościowo mod korpusu, występujący w częstotliwości ok. 400 Hz. Ten dość symetryczny mod z liniami węzłowymi na wierzchniej i spodniej płycie układającymi się w kształt podwójnego sztyletu ‡ (ang. *double degger*) sam nie jest silnym źródłem dźwięku, lecz jest istotny ze względu na współdziałanie z otaczającymi go modami A0 oraz B(1–). Oznaczany również przez C1 lub C2 od angielskiego *corpus*.

– B(1–) oznacza niższy zginający mod korpusu, występujący w częstotliwości ok. 460 Hz. Linie węzłowe płyty wierzchniej biegą wzdłuż instrumentu, a płyty spodniej – w poprzek instrumentu, w jego dolnej i górnej części. Jest to mod silnie promieniujący akustycznie. Czasem nazywany był *main wood* (podobnie do modu powietrznego A1). W starszej literaturze był oznaczany przez W, C2 lub T1.

– B(1+) oznacza wyższy mod zginający korpusu, występujący w częstotliwości ok. 530 Hz. Linie węzłowe płyty wierzchniej biegą w poprzek instrumentu w jego dolnej i górnej części, a płyty spodniej – wzdłuż instrumentu. Jest to mod silnie promieniujący akustycznie i bywa nazywany „barometrem tonalnym skrzypiec”. Tworzy z modelem B(1–) parę oznaczaną B1 i nazywaną obecnie *main wood* (Bissinger, 2003a) [podobnie do modu powietrznego A1 i niższego modu korpusu B(1–)]. W starszej literaturze oznaczany był przez C3.

Opisane w rozdziale 5.2.1 „mody gnące ciała sztywnego” oznaczane są niekiedy literą B i numerem. Są to mody, w których ruch skrzypiec jest podobny do ruchu zginającej się belki. Mod zginający występujący w częstotliwości ok. 185 Hz oznaczany był jako B1, B-1 lub C1. Mod zginający o częstotliwości ok. 300 Hz, czyli w zakresie zbliżonym do częstotliwości modu A0, oznaczany jest B2 lub B0. Mody te nie promieniują akustycznie w sposób znaczący. W rozdziale tym zrezygnowano z oznaczania literami „modów zginających ciała sztywnego”, aby nie wprowadzać zamieszania ze względu na zbieżność ich oznaczeń z oznaczeniami innych modów.

5.2. Analiza modalna klasycznych skrzypiec

5.2.1. Pierwszy eksperyment modalny

Pierwszą analizę modalną klasycznych skrzypiec przeprowadził Marshall (1985), wyznaczając swoisty standard testu modalnego skrzypiec, opisu oraz interpretacji obwiedni modalnych. Badaniom

poddał dobrej klasy instrument o nazwie SUS#295, wykonany przez Carleen Hutchins. Skrzypce były zamontowane na gumach przymocowanych do stalowej ramy i zaczepionych o narożniki instrumentu. Zapewniało to swobodne warunki drgań całej struktury. Instrument pobudzano do drgań szerokopasmowym impulsem pochodzącym z młotka uderowego PCB 086B80 o masie 4 g. Sygnał odpowiedzi rejestrowano za pomocą akcelerometru PCB 309 A, o masie 1 g. Akcelerometr był przymocowany na wosk pszczeli, poniżej stopy podstawka, nad którą znajdowały się struny basowe. Pomiary wykonano w zakresie częstotliwości 10–1800 Hz. Na obu płytach rezonansowych oraz podstrunnicy wybrano łącznie 190 punktów pomiarowych. Funkcje transmitancji (inertancje) wyznaczono dla ustalonego punktu pomiaru odpowiedzi układu (położenie akcelerometru), pobudzając uderowo instrument kolejno w 190 punktach. W badanym zakresie częstotliwości znaleziono kilkadziesiąt modów, z których najistotniejsze przedstawiono w tabeli 5.1. W tabeli tej obwiednie modalne płyty wierzchniej i spodniej narysowane są tak, jak byłyby widoczne, gdyby patrzeć na nie z góry, przy założeniu, że płyta wierzchnia jest przezroczysta. Czarnym punktem zaznaczono położenie duszy. Kolorem czerwonym oznaczono ruch przed płaszczyznę rysunku, a niebieskim – za płaszczyznę rysunku.

Opisując uzyskane obwiednie modalne, Marshall podzielił je na *mody zginające całego instrumentu*, *mody powietrzne* (obecnie nazywane modami powietrza zawartego w korpusie) i na *mody płyty* (obecnie nazywa się je modami korpusu i silnie podkreśla ich współdziałanie z modami powietrznymi i modami zginającymi całego instrumentu). Mody zginające charakteryzuje gnący ruch podstrunnicy, przypominający niskoczęstotliwościowe drgania belki. Korpus instrumentu zachowuje się w dużym przybliżeniu, ze względu na asymetrię wprowadzaną przez anizotropię drewna, belkę basową i duszę, jak para sprzężonych płyt prostokątnych w małych częstotliwościach. W modach objętości powietrza zawartego w korpusie (modach „powietrznych”) obie płyty rezonansowe pracują w sposób podtrzymujący ruch powietrza zawartego w korpusie. Są to mody bardzo silnie promieniujące energię akustyczną do otoczenia. Oprócz modów zginających i powietrznych obie płyty skrzypcowe mają bardzo dużo tzw. modów płytowych, czyli modów zginających korpusu, o różnych obwiedniach. Mody te nie zawsze są silnymi źródłami dźwięku, mają jednak znaczący wpływ na jakość dźwięku instrumentu. Opis ich wszystkich jest bardzo nużący, dlatego w tabeli 5.1 podano tylko nie-

które z nich. Pominęto w niej mody, w których ruch odbywa się w płaszczyźnie rysunku. Są to mody odczuwane przez skrzypka, lecz wnoszące znikomy wkład w promieniowanie dźwięku.

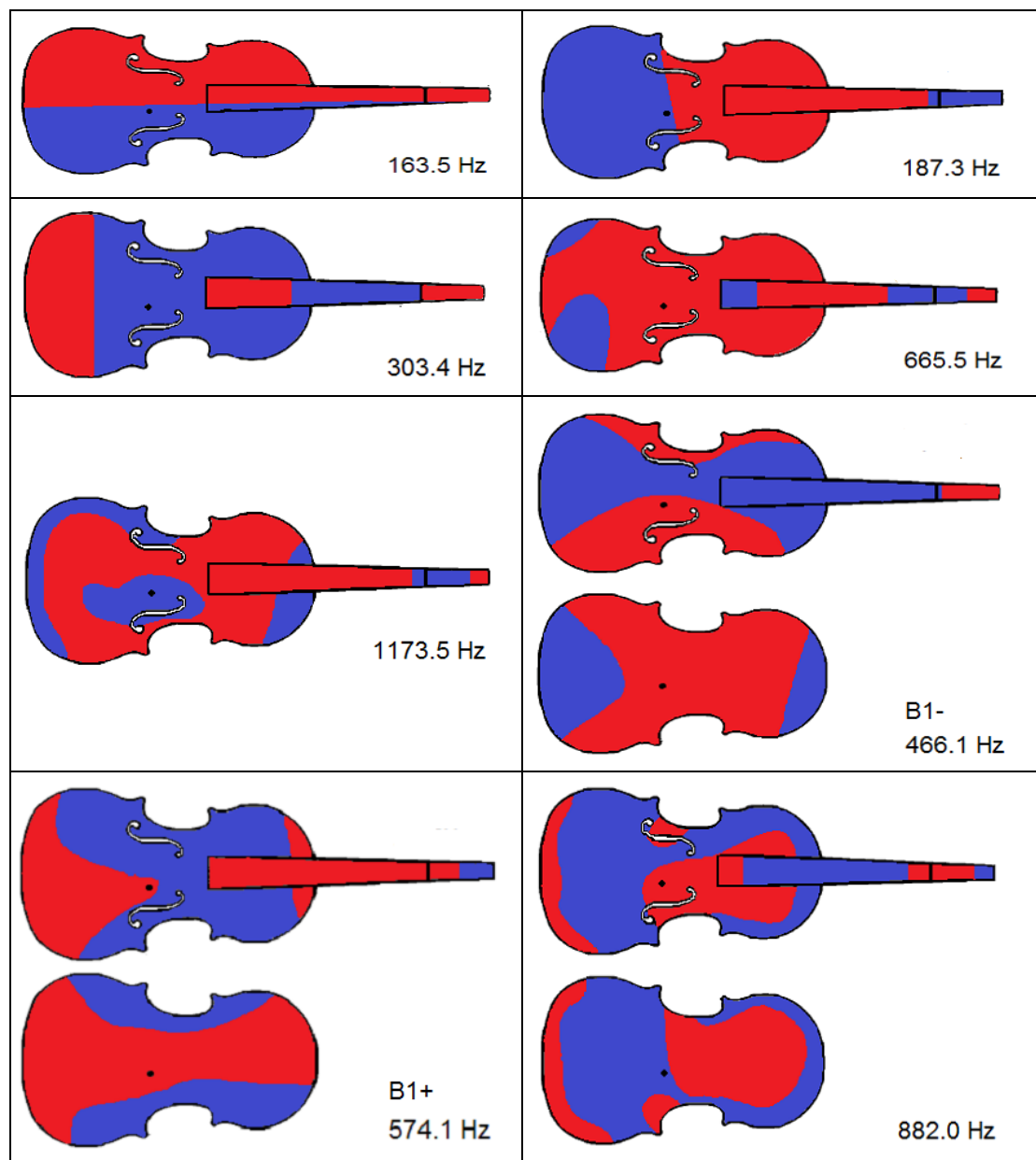
Pierwsze dwa mody zginające przedstawione w tabeli 5.1, o częstotliwościach 163.5 Hz (skręcający) i 187.3 Hz (falujący), nazywa się „gnącymi modami ciała sztywnego”, ponieważ podstrunnica oraz korpus instrumentu poruszają się jak dwa niezależne, sztywne elementy, połączone szyjką. Częstotliwości tych modów są skoncentrowane wokół częstotliwości, na jaką nastrojona jest struna G (196 Hz). Pobudzanie do drgań całej struny G może w niewielkim stopniu wzbudzać mod falujący. Mody o częstotliwościach 303.4 Hz, 665.5 Hz oraz 1173.5 Hz to mody zginające podstrunnicy z szyjką. Częstotliwości tych modów znajdują się w zakresie od częstotliwości strojenia struny D (294 Hz) do częstotliwości znacznie przewyższającej częstotliwość strojenia struny E (659 Hz). Są to mody łatwo wzbudzane podczas gry na instrumencie.

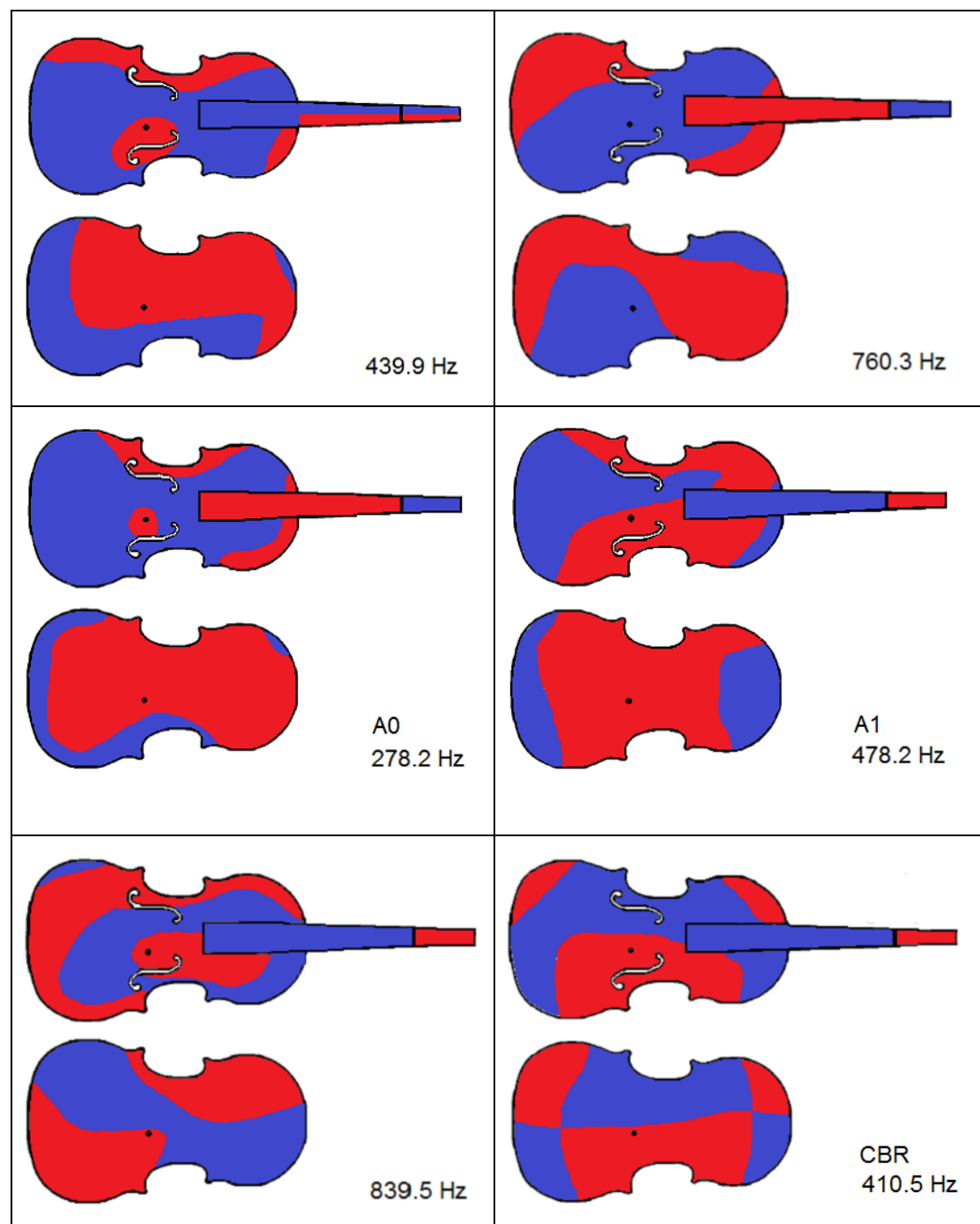
Pierwsze trzy mody gnące korpusu występują w częstotliwościach 466.1 Hz i 574.1 Hz oraz 882.0 Hz. Ze względu na duże obszary płyt drgające z tą samą fazą są to mody dające wkład w promieniowanie akustyczne instrumentu. Należy zauważyć, że mod o częstotliwości 466.1 Hz tworzy parę z modem o częstotliwości 574 Hz; mody te oznaczone są odpowiednio B(1-) oraz B(1+). W pierwszym z nich linie węzłowe płyty wierzchniej biegną wzdłuż instrumentu, a linie węzłowe płyty spodniej – mniej więcej w poprzek instrumentu w jego dolnej i górnej części. W drugim z nich linie węzłowe płyty wierzchniej „przechodzą” na płytę spodnią, a linie płyty spodniej – na wierzchnią. Oba mody są tzw. modami oddychającymi – duże obszary obu płyt wychylają się jednocześnie do wewnątrz lub na zewnątrz korpusu. Największe amplitudy drgań w obu przypadkach obserwuje się w okolicy stopy podstawka, nad którą znajdują się struny basowe. Stopa po stronie duszy porusza się w przeciwfazie do stopy, nad którą znajdują się struny basowe, z nieco mniejszą amplitudą. Zatem podstawek naciska płytę raz jedną raz drugą stopą – jest to dobrze znane zjawisko „tupania” podstawka w płytę wierzchnią (Reinicke i Cremer, 1970; Cremer, 1983; Saldner i in., 1996; Bissinger, 2004a, 2006). Więcej informacji o drganiach podstawka znajduje się w rozdziale 5.8.2. Mody o częstotliwościach 434.9 Hz i 760.3 Hz to mody skręcające szyjki i korpusu. Oba są łatwo wzbudzane podczas gry i odczuwane przez skrzypka. Jak opisano powyżej, tylko kilka dotąd przedstawionych modów wnosi wkład w promieniowanie akustyczne skrzypiec. Wkład pozostałych

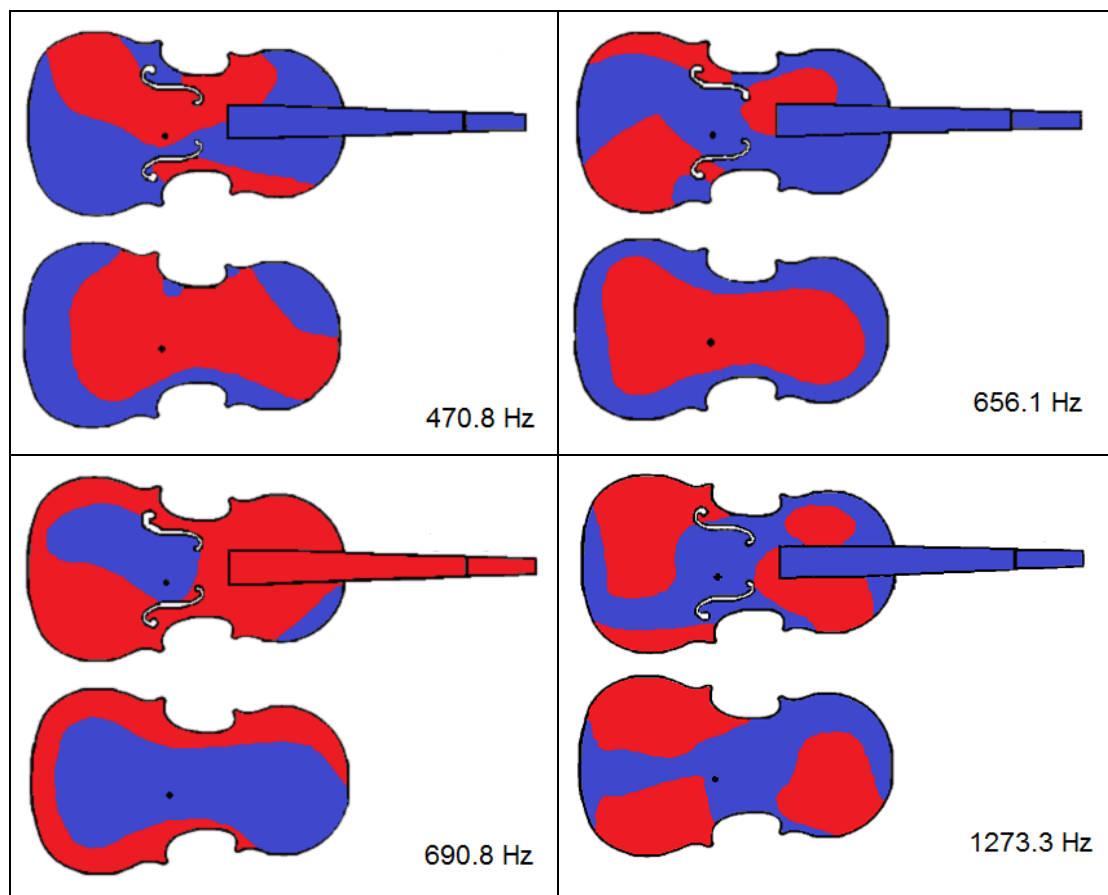
jest niewielki lub niezauważalny – dla słuchacza mody te mogą wydawać się nieistotne. Dla grającego skrzypka są one jednak bardzo ważne, ponieważ odczuwa on drgania obszarów instrumentu stykających się z jego ciałem – podstrunnicy z szyjką, strun, smyczka i podbródka. Receptory dotyku na ludzkim ciele są najbardziej czułe na małe częstotliwości – do ok. 10 Hz (Bolanowski i in., 1988; Bogusz i in., 2012; Wiciak i in., 2013). Tak pożądanego u skrzypka „czucie” instrumentu, lub jego brak, jest związane z odczuwaniem niskoczęstotliwościowych modów gnących i skręcających instrumentu, które albo są obecne, albo nie w drganiach instrumentu. Aby instrument został zaakceptowany przez skrzypka, musi nie tylko brzmieć odpowiednio, lecz również wytwarzać odpowiednie drgania odczuwane przez instrumentalistę.

Mody powietrzne to mody o częstotliwościach 278.2 Hz, 478.2 Hz oraz 839.5 Hz z tabeli 5.1. Pierwszy mod powietrzny (278.2 Hz) zwyczajowo jest oznaczany jako A0 i nazywany rezonansem Helmholtza. Drganie to charakteryzuje antyfazowy ruch obu płyt instrumentu, który powoduje, że objętość powietrza w korpusie jest na przemian sprężana i rozprężana. Gdyby płyty skrzypiec były sztywne (jak w klasycznym rezonatorze Helmholtza), to częstotliwość tego modu byłaby większa od obserwowanej dla instrumentu zbudowanego z drewna. W modzie tym niewielki obszar płyty wierzchniej umiejscowiony pod stopą podstawka, nad którą znajdują się struny sopranowe, porusza się w fazie z płytą spodnią (i w przeciwfazie do otaczającego go obszaru płyty wierzchniej) – podstawek tupie. Oś jego ruchu przebiega nieco w lewo od stopy, nad którą znajdują się struny sopranowe. Dusza porusza się w fazie z płytą spodnią. Drugi mod powietrzny (478.2 Hz) w starszej literaturze jest nazywany „głównym rezonansem drewna” (ang. *main wood resonance*). Zwyczajowo oznacza się go jako A1. Jego obwiednia implikuje przemieszczanie się powietrza z jednego końca korpusu na drugi i z powrotem oraz ruch powietrza przez efy. Górna i dolna część płyty wierzchniej poruszają się w przeciwnych fazach, przy czym obszary te poruszają się w antyfazie do odpowiadających im obszarów płyty spodniej. Ponadto amplitudy dolnych części obu płyt są znacznie większe od amplitud części górnych – taki rozkład drgań wymusza przepływ powietrza przez otwory rezonansowe, ruch powietrza w korpusie oraz generację dźwięku. Generowany dźwięk jest skutkiem ruchu powietrza w korpusie oraz współdziałających z nim drgań płyty wierzchniej.

Tabela 5.1. Obwiednie modalne płyt klasycznych, kompletnych skrzypiec. A0, A1, CBR, B(1+) oraz B(1-) – mody „charakterystyczne”, wyróżnione przez Schleskego (2002) oraz Bissingera i Gregorian (2003). Ruch instrumentu przed płaszczyznę rysunków oznaczono kolorem czerwonym, ruch za płaszczyznę rysunku – kolorem niebieskim. Czarnym punktem oznaczono położenie duszy. Czarna linia w górnej części szyjki oznacza prożek górny







Źródło: wg Marshalla (1985).

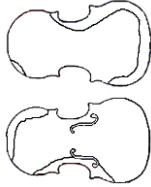
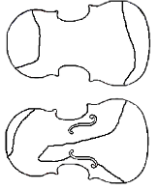
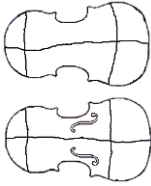
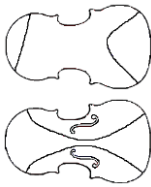
Przykłady modów korpusu, czyli w nomenklaturze Marshalla – płytowych, zawarto w ostatnich pięciu wierszach tabeli 5.1. We wszystkich modach płytowych obserwuje się ruch obu płyt (z większymi amplitudami płyty wierzchniej), co jest skutkiem ich połączenia głównie za pośrednictwem boczaków, klocków narożnikowych i klocka dolnego oraz w mniejszym stopniu poprzez duszę. Z ruchu obu płyt można także wywnioskować, że boczki są w ruchu o niewielkich amplitudach. W częstotliwościach mniejszych od ok. 650 Hz podstawek zawsze doznaje ruchu kołyszącego w swojej płaszczyźnie, czyli tupie. Oś ruchu znajduje się po lewej stronie stopy podstawka, nad którą znajdują się struny sopranowe. Obszar płyty wierzchniej pod sto-

pą, nad którą znajdują się struny sopranowe, dusza i płyta spodnia w obszarze styku z duszą poruszają się zawsze w fazie i z porównywalnymi amplitudami. W częstotliwościach większych od 650 Hz sytuacja zmienia się. Podstawek dalej tupie, lecz jednocześnie przesuwa się w górę i w dół instrumentu, a ruch płyt w okolicy duszy może odbywać się w antyfazie. Taki ruch płyt powoduje, że sprzężenie ich dolnych części przez duszę jest słabsze i w związku z tym amplitudy ich ruchu mogą być większe w porównaniu do sytuacji, gdy dusza i obszary jej styku z obiema płytami poruszają się w fazie. Ponadto w częstotliwościach mniejszych od 650 Hz największe amplitudy płyty wierzchniej obserwuje się po jej basowej stronie (nad belką basową), a dolna i górna część płyty poruszają się w fazie. W częstotliwościach większych od ok. 650 Hz tak dużej asymetrii w ruchu płyty wierzchniej nie obserwuje się.

5.2.2. Mody sygnaturalne

Przyjmuje się, że największy wpływ na walory brzmieniowe instrumentu mają tzw. niskoczęstotliwościowe mody charakterystyczne, nazywane *modami sygnaturalnymi* (ang. *signature modes*), których częstotliwości znajdują się w paśmie 190–650 Hz, czyli w tzw. pierwszym paśmie Dünnowalda (1991), istotnym w ocenie „bogactwa” dźwięku. Pozostałe pasma Dünnowalda to 650–1300 Hz – mające wpływ na nosowość dźwięku, 1300–4200 Hz – związane z jasnością dźwięku oraz 4200–6400 Hz – odpowiedzialne za przejrzystość i wyrazistość. Mody charakterystyczne skrzypiec wskazali Schleske (2002) oraz Bissinger i Gregorian (2003). Mody charakterystyczne to mody powietrzne i zginające korpusu. Mody powietrzne, oznaczone w tabeli 5.1 jako A0 i A1, to zawsze silnie promieniujący akustycznie „rezonans Helmholtza” A0 oraz drugi mod powietrzny, nie zawsze będący silnym źródłem dźwięku (Bissinger, 1996). Mody zginające korpusu instrumentu oznaczono w tabeli 5.1 jako B(1–), B(1+) (oba silnie promieniują akustycznie) oraz CBR (ang. *corpus body resonance* lub *C-bout resonance* lub *center-bout-rhomboid*). Mod CBR z powodu rozkładu linii węzłowych słabo promieniuje akustycznie, lecz jest istotny ze względu na współdziałanie z otaczającymi go modami A0 oraz B(1–) (Bissinger, 2003b, 2008; Fritz i in., 2007). Według Schleskego (2002) i Bissingera (2008) mod B(1+) jest „czujnikiem” jakości dźwięku skrzypiec lub jego „barometrem tonalnym”. Gdy częstotliwość

Tabela 5.2. Częstotliwości modalne i procent tłumienia krytycznego modów sygnatURALNYCH skrzypiec, których brzmienie oceniano subiektywnie jako „dobre” i „złe”. Instrumentem referencyjnym był stradivarius „Schreiber” oceniany jako „doskonały”. W pierwszym wierszu zamieszczono schematyczny układ linii węzłowych. Podano również parametry modów sygnatURALNYCH wyznaczone przez innych autorów

Instrument / lutnik	A0			A1			CBR			B(1-)			B(1+)		
															
A. Stradivari „Schreiber” (1712) ¹	f, Hz 286 ± 1			f, Hz 487 ± 17			f, Hz 409 ± 1			f, Hz 448 ± 1			f, Hz 518 ± 1		
Grupa skrzypiec „dobrych” ¹	f, Hz 277 ± 9	d, % 2.4 ± 0.1		f, Hz 466 ± 31	d, % 1.0 ± 0.1		f, Hz 430 ± 38	d, % 0.9 ± 0.1		f, Hz 480 ± 6	d, % 1.3 ± 0.4		f, Hz 545 ± 12	d, % 1.1 ± 0.3	
	274 ± 1	2.7 ± 0.3		455 ± 8	0.9 ± 0.9		388 ± 5	0.8 ± 0.1		485 ± 17	1.2 ± 0.2		537 ± 16	1.0 ± 0.1	
C. Hutchins SUS#295 ²	278.2			478.2			410.5			466.1			574.1		
C. Hutchins SUS#263 ³	278.5	0.731		464.2	0.639		401.6	0.583		495.1	1.370		547.9	0.837	
D. Montagna (1740) ⁴	268			367(?)			337			418			475		
Niewiczzyk, 1996 ⁵	276			460			420			470			540		
L. Bernardel (1909) ⁶	275			473			400			512			587		
Skrzypce fabryczne ⁷	291.70	2.27		502.70	1.35		465.56	1.53		538.47	1.61		559.59	1.06	

¹ Bissinger i Gregorian, 2003; ² Marshall, 1985; ³ Bissinger, 1995; ⁴ Schleske, 1996b; ⁵ Saldner i in., 1996; ⁶ Runnemalm i in., 2000; ⁷ Pyrkosz i Van Karsen, 2013.

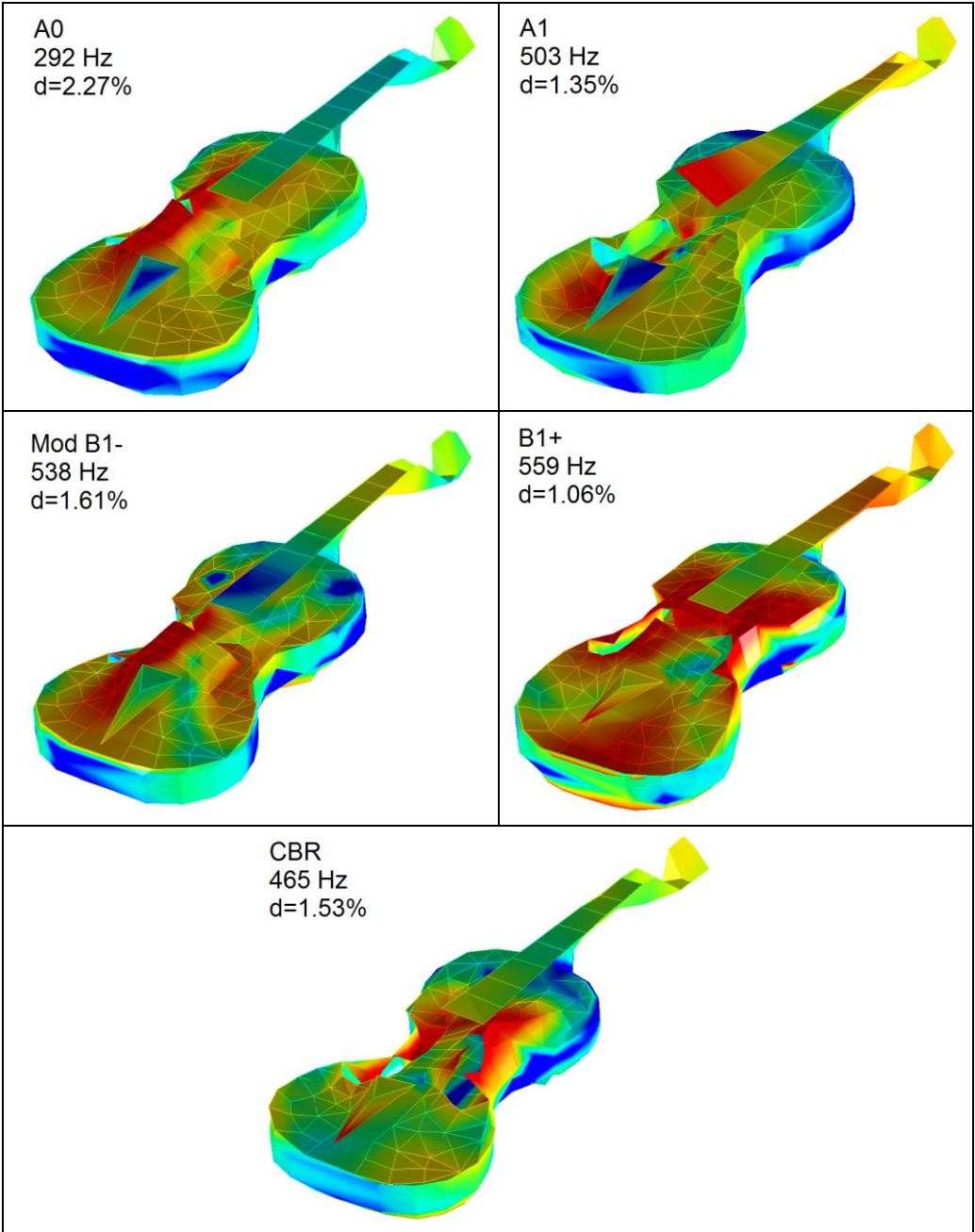
Źródło: Bissinger i Gregorian (2003).

modu B(1+) jest mniejsza od 510 Hz, instrument jest „miękki”, stawia niewielki „opór” skrzypkowi, a jego dźwięk ma ciemną barwę. Instrument o częstotliwości modu B(1+) większej od 550 Hz jest „uparty”, „oporny”, a jego dźwięk jest jasny z tendencją chropowatości. Częstotliwości i tłumienia modalne, wyrażone jako procent tłumienia krytycznego (podrozdział 2.1), charakteryzujące skrzypce, których brzmienie ocenione subiektywnie jako „dobre” i „złe” podali Bissinger i Gregorian (2003). Zebrano je w tabeli 5.2. Instrumentem referencyjnym, ocenianym subiektywnie jako „doskonały”, były skrzypce A. Stradivariiego „Schreiber” (1712), dla których procentu tłumienia krytycznego nie określono. W tabeli 5.2 podano również parametry modów sygnaturalnych wyznaczone przez innych autorów.

Dla porównania (i potwierdzenia) rezultatów otrzymanych trzydzieści lat temu przez Marshalla (1985), lepszego zobrazowania obwiedni modów sygnaturalnych i ich „odmian”, w tabeli 5.3 przedstawiono mody A0, A1, CBR, B(1–) oraz B(1+) otrzymane przez Pyrkosza (2013). Przeprowadził on test modalny skrzypiec fabrycznych, w wersji z ustalonym punktem akwizycji sygnału odpowiedzi, przy pobudzeniu impulsowym. Trudno wskazać jeden mod sygnaturalny i związaną z nimi częstotliwość, determinujący doskonale własności akustyczne instrumentu. Schleske (2002) wskazywał mod B(1+) o częstotliwości mniejszej od 550 Hz, Bissinger (2008) – mod A0, którego częstotliwość dla instrumentów „dobrych” jest znacznie większa niż dla „złych”. Natomiast w pracy Bissingera i Gregorian (2003) znajduje się sugestia, że to mod CBR może determinować dobre brzmienie instrumentu, choć nie jest to mod silnie promieniujący akustycznie. U Rossinga (2010) można znaleźć kontrowersyjne stwierdzenie, że skrzypce, których mod A1 jest silnym źródłem promieniowania akustycznego, są subiektywnie oceniane jako „złe”. Kontrowersje te budzą doniesienia dotyczące skrzypiec mistrzowskich, tj. „Plowdena” Guarneriego del Gesù i „Titana” A. Stradivariiego. Dla pierwszego z tych instrumentów zaobserwowano współdziałanie tego modu z modami korpusu B1, czyli był on źródłem dźwięku (Bissinger i Rowe, 2007), dla drugiego – przeciwnie. Zagadnienie to zostanie szerzej omówione w podrozdziale 5.9.2.1. Hutchins (1990) sugerowała, że współdziałanie modów A1 i B1 jest odpowiedzialne za jakość dźwięku skrzypiec.

Obecnie badacze są zgodni co do tego, że to **zbiór** modów sygnaturalnych determinuje jakość dźwięku instrumentu. Należy jeszcze dodać, że na dźwięk skrzypiec, oprócz odpowiednich częstotliwości

Tabela 5.3. Obwiednie modów sygnaturalnych, kolor czerwony oznacza maksymalne wychylenie, kolor niebieski – obszar węzłowy



Źródło: wg Pyrkosza (2013), za zgodą autora.

modalnych związanych z użytym materiałem, wymiarami i konstrukcją, wielki wpływ ma odpowiednio zaprojektowany i zamocowany podstavek (Rossing, 2010).

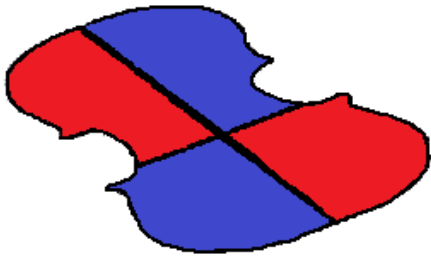
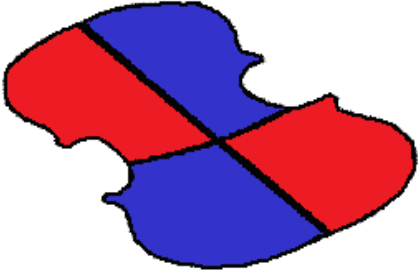
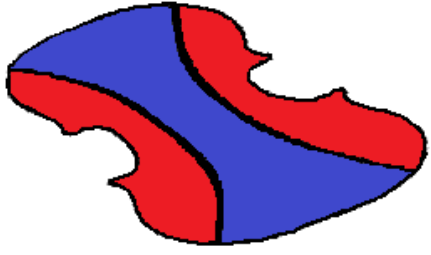
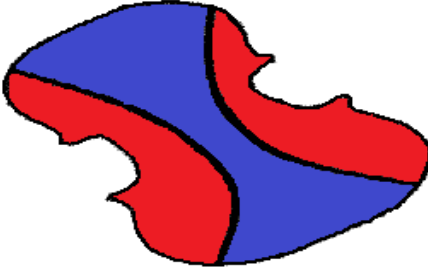
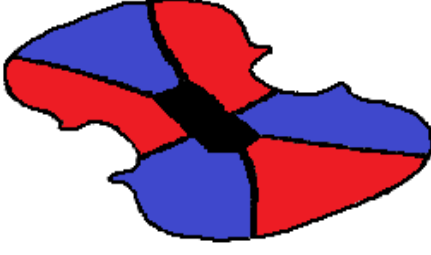
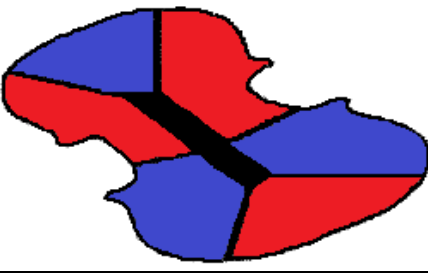
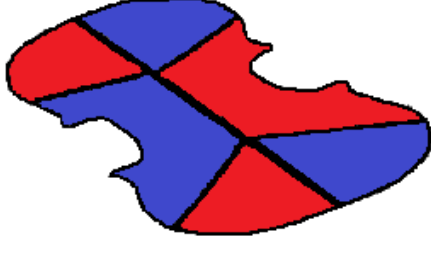
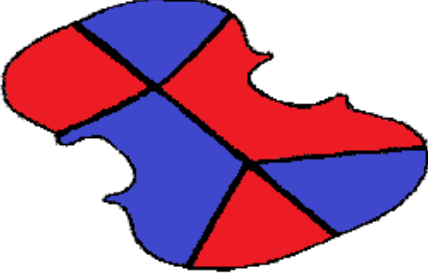
5.3. Analiza modalna swobodnych płyt skrzypcowych

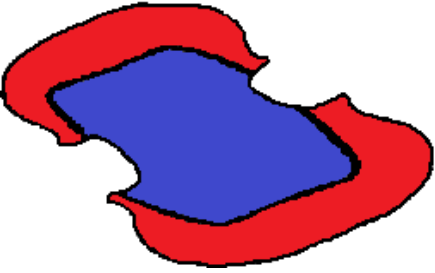
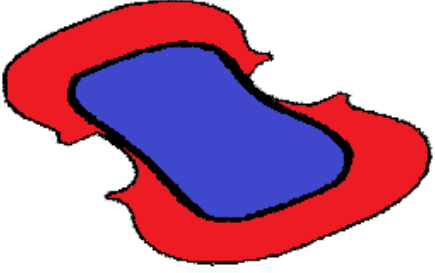
5.3.1. Figury Chladniego swobodnych płyt skrzypcowych

Wykorzystywanie figur Chladniego do badania rozkładu linii węzłowych na płytach skrzypcowych na różnych etapach ich budowy (przed przymocowaniem do boczków) jest metodą od dawna stosowaną przez lutników do tzw. strojenia płyt, tzn. do uzyskiwania pożądaných drgań o odpowiednich częstotliwościach (Cremer, 1983; Gough, 2007). Molin i inni badacze (1988) zastosowali te figury do eksperymentalnego wyznaczenia pierwszych pięciu modów swobodnych wierzchnich płyt skrzypcowych. Badaną płytę posypano pyłem drzewnym, podparto na krawędziach kawałkami gąbki (umożliwiło to quasi-swobodne warunki pracy płyty) i umieszczono nad głośnikiem, do którego z generatora podawano sygnał sinusoidalny, o kontrolowanej częstotliwości. Przestrzegając częstotliwość, wyznaczono mody drgań obu płyt i odpowiadające im częstotliwości (z dokładnością do 2 Hz). Badane płyty przygotowano na podstawie wymiarów wierzchniej płyty A. Stradivariiego „Ernst Neruda” (1709). Do eksperymentu przygotowano dwie płyty: świerkową (wierzchnią) i jaworową (spodnią), adaptując ich wymiary z płyty A. Stradivariiego. Płyta świerkowa miała wysokość mierzoną w pionie, od dolnej krawędzi do najwyższego punktu, czyli *wysokość sklepienia*, wynoszącą 16.5 mm, a płyta jaworowa – 13 mm. Obie płyty zostały sklezione z dwóch kawałków drewna wzdłuż osi podłużnej. Do płyty wierzchniej nie przymocowano belki basowej ani nie wycięto w niej otworów rezonansowych. Figury Chladniego wyznaczono dla płyt o stałej grubości 3.5 mm, czyli przed finalnym zmniejszeniem ich grubości. Rezultaty tych badań przedstawiono w tabeli 5.4. Kolorem czerwonym zaznaczono ruch „w górę”, kolorem niebieskim – ruch „w dół”.

W praktyce do strojenia płyt skrzypcowych wykorzystuje się mody o numerach 1, 2 oraz 5. „Strojenie” polega na zmniejszaniu grubości płyty w określonych obszarach – największe odjęcie (pocienienie) drewna stosuje się przy krawędzi, najmniejsze w centrum płyty. Po-

Tabela 5.4. Linie węzłowe oraz częstotliwości modalne pierwszych pięciu modów płyt skrzypcowych wyznaczone eksperymentalnie metodą figur Chladniego. Opis etapu budowy płyt podanych badaniom – w tekście. Kolorem czerwonym zaznaczono ruch „w górę”, kolorem niebieskim – „w dół”

Płyta z drewna świerkowego (wierzchnia) o gęstości 478 kg/m ³		Płyta z drewna jaworowego (spodnia) o gęstości 613 kg/m ³	
1		2	
	mod 1 105 Hz		mod 1 130 Hz
	mod 2 200 Hz		mod 2 209 Hz
	mod 3 332 Hz		mod 3 342 Hz
	mod 4 317 Hz		mod 4 367 Hz

1		2	
	mod 5 448 Hz		mod 5 493 Hz

Źródło: wg Molina i in. (1988).

woduje to zmniejszenie masy oraz zmniejszenie sztywności zginającej i skręcającej płyty. Te jednocześnie zmiany masy i sztywności w różny sposób wpływają na częstotliwości modalne – mogą one ulec zmniejszeniu lub zwiększeniu, w zależności od tego, która zmiana dominuje. Mod 1 ma dwie linie węzłowe – jedną biegnącą wzdłuż klejenia obu części płyty, a drugą (prostopadłą do pierwszej) mniej więcej w połowie płyty. Ruch sąsiadujących obszarów płyty odbywa się w antyfazie – jest to ruch skręcający płytę względem punktu przecięcia linii węzłowych. Mod 2 ma również dwie linie węzłowe biegnące wzdłuż płyty i położone mniej więcej symetrycznie względem jej osi pionowej. Mod 5 to mod symetryczny, nazywany modem „dzwoniącym”. Linia węzłowa ma gruszkowaty kształt – centralna część płyty porusza się w antyfazie do górnych i dolnych obszarów zewnętrznych. Obwiednie modalne płyty świerkowej są bardzo podobne, a w niektórych częstotliwościach prawie identyczne z obwiedniami płyty jaworowej. Różnice występują w częstotliwościach modalnych. Jest to skutek zastosowania drewna o różnej gęstości (tabela 5.4), różnych modułach sprężystości oraz różnych wysokości płyt.

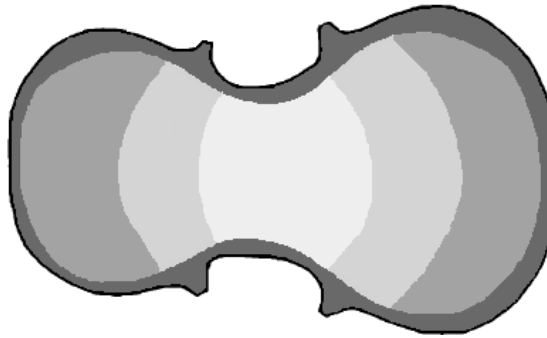
Porównując obwiednie modalne i ich częstotliwości z tabeli 5.4 oraz tabel 5.1 i 5.3 można zauważyć, że mody izolowanych płyt skrzypcowych nie mają istotnych cech wspólnych z modami płyt kompletnych instrumentów. Niemniej jednak, poprzez kształtowanie obwiedni modalnych izolowanych płyt i ich częstotliwości można wpływać na zachowania dynamiczne kompletnego instrumentu.

5.3.2. Numeryczna symulacja zachowań modalnych izolowanej płyty wierzchniej o zmniejszonej lokalnie grubości

Wpływ zmniejszania grubości płyty wierzchniej na obwiednie i częstotliwości modalne zbadano numerycznie, metodą elementów skończonych (Molin i in., 1988). Zbudowano model numeryczny płyty wierzchniej, wcześniej badanej metodą Chladniego (o stałej grubości 3.5 mm), i rozwiązano dla niego zagadnienie na wartości i wektory własne (rozdział 3). Wyznaczone numerycznie częstotliwości modalne różniły się od wyznaczonych eksperymentalnie nie więcej niż o 8%, rys. 5.2. Pozwoliło to na wyciągnięcie wniosku o poprawności działania modelu numerycznego. Następnie procedurę wyznaczania wartości i wektorów własnych powtórzono dla płyty, której grubość zmniejszono o 10% (względem wyjściowej grubości 3.5 mm), w przedstawionym na rys. 5.1. obszarze 1. Na krawędzi zewnętrznej obszaru 1 grubość płyty wynosiła ok. 2.5 mm, a na wewnętrznej – ok. 2.8 mm. Kolejne obwiednie i częstotliwości modalne obliczono w sytuacji, w której do obszaru 1, opisanego powyżej, dodano obszar 2. Jego grubość na krawędzi zewnętrznej wynosiła ok. 2.8 mm, a na wewnętrznej – ok. 3.1 mm. Następnie do obliczeń, do pierwszego i drugiego obszaru, dołączono obszar 3 – na zewnętrznej krawędzi miał on grubość ok. 3.1 mm, a na wewnętrznej – ok. 3.4 mm. W ostatnim kroku obliczeniowym do obszarów 1–3 dodano obszar 4. Na krawędzi zewnętrznej miał on grubość ok. 3.4 mm, a w najwyższym punkcie – 3.5 mm. Stopniowe zmniejszanie grubości płyty nieznacznie zaburzyło kolejność występowania obwiedni modalnych i znacznie wpłynęło na częstotliwości modalne, rys. 5.2 i tabela 5.5.

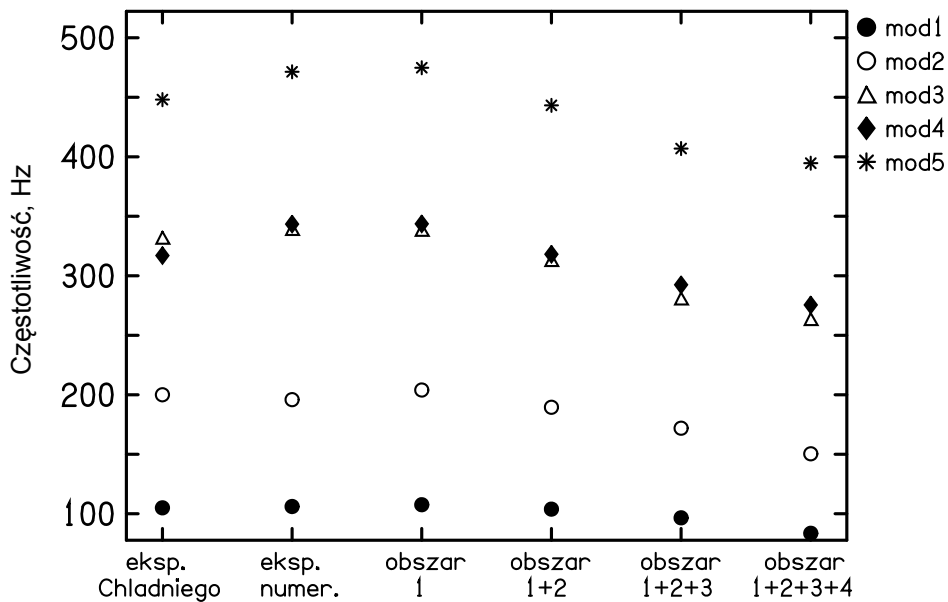
Z rysunku 5.2 i tabeli 5.5 wynika, że zmniejszanie grubości płyty wierzchniej, w kolejnych obszarach zaznaczonych na rys. 5.1, spowodowało zmiany częstotliwości wszystkich badanych modów, największe dla modów o numerach 1, 2 oraz 5. Na częstotliwość modu 1 największy wpływ miało zmniejszenie grubości płyty w okolicy przecięcia się linii węzłowych, czyli w środkowej części płyty (w obszarze 4 z rys. 5.1). Zmniejszanie grubości płyty przy krawędziach oraz w obszarze 2 miało na te częstotliwości wpływ niewielki. Na częstotliwość modu 2 największy wpływ miało zmniejszenie grubości płyty w obszarach jej największego ruchu, czyli w centrum płyty, tzn. w obszarach 4 i 3 z rys. 5.1. Natomiast na częstotliwość modu 5 największy wpływ miało odjęcie masy w obszarach 2 i 3, natomiast zmniejszenie grubości płyty na krawędziach nie zmieniło znacząco jego częstotliwości. Opisane powyżej, wyznaczone numerycznie, zmiany w częstotliwo-

ściach modalnych są ściśle reprezentatywne tylko dla badanej płyty. Należy traktować je jako ogólne i względne wskazówki dotyczące strojenia swobodnych płyt skrzypcowych.



Rys. 5.1. Obszary zmniejszania grubości płyty. Obszary przy krawędzi płyty – obszar 1. Dwa obszary w górnej i dolnej części płyty – obszar 2. Dwa obszary przylegające do obszaru 2 – obszar 3. Obszar środkowy, przylegający do obszaru 3 – obszar 4

Źródło: na podstawie Molina i in. (1988).



Rys. 5.2. Wpływ zmniejszania grubości swobodnej płyty świerkowej w obszarach zaznaczonych na rys. 5.1 na częstotliwości modalne

Źródło: wg Molina i in. (1988).

Tabela 5.5. Wpływ zmniejszania grubości swobodnej płyty świerkowej w obszarach zaznaczonych na rys. 5.1 na częstotliwości modalne

Warunki badania	Częstotliwość, Hz				
	mod 1	mod 2	mod 3	mod 4	mod 5
Eksperyment Chłodniego	105	200	332	317	448
Eksperyment numeryczny	106.1	195.2	339.3	343.4	471.4
Zmniejszona grubość w obszarze 1, rys. 5.1	107.6	204	338.6	343.6	474.8
Zmniejszona grubość w obszarach 1–2, rys. 5.1	103.9	189.5	313.2	318.1	443.2
Zmniejszona grubość w obszarach 1–3, rys. 5.1	96.6	171.9	280.9	292.4	406.9
Zmniejszona grubość w obszarach 1–4, rys. 5.1	83.6	150.4	263.5	275.5	394.6

Źródło: wg Molina i in. (1988).

Bezwzględne wartości częstotliwości modalnych swobodnych płyt skrzypcowych zależą od modelu płyty, zastosowanego drewna, a więc praktycznie dla każdej płyty będą nieco inne. Opis wpływu modyfikacji grubości płyty, w innych niż opisana powyżej fazach budowy, na jej zachowania modalne można znaleźć również np. u Schleskego (1996a, 1996b, 2002), Molina i Janssona (1989) i Bissingera (2004b). Wszyscy autorzy zgodnie podkreślają, że wpływ stopniowej zmiany grubości płyt na mody drgań znacznie bardziej uwidacznia się w kompletnym instrumencie niż dla swobodnych płyt.

5.4. Analiza modalna skrzypiec różniących się grubością płyty spodniej

Modalne testy porównawcze skrzypiec z celowo wprowadzonymi zmianami strukturalnymi przeprowadzano głównie w celu lepszego poznania ich działania oraz w celu uzyskania wskazówek do budowy instrumentów dobrych brzmieniowo. Zostaną one opisane w dalszych rozdziałach. Liczba doniesień literaturowych o wpływie grubości płyty spodniej na zachowania dynamiczne kompletnych skrzypiec jest skromna (Meinel, 1937b; Skrodzka i in., 2009). Badania modalne izolowanej płyty o zmieniającej się grubości opisano w podrozdziale 5.3.2.

Rezultaty testu modalnego dwóch kompletnych skrzypiec różniących się celowo wprowadzonymi grubościami płyty spodniej opisano poniżej (Skrodzka i in., 2009).

5.4.1. Instrumenty i eksperymenty

Na potrzeby porównawczej analizy modalnej wykonano dwie repliki instrumentu A. Stradivariego „Il Cremonese” (1715). Wierną kopię „Il Cremonese” oznaczono literą A natomiast instrument zmodyfikowany, z grubszą płytą spodnią – literą B. Przedstawiono je na rys. 5.3. Instrumenty zostały wykonane przez Reginę Borkowską i Joannę Jańczak w Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego w Poznaniu.

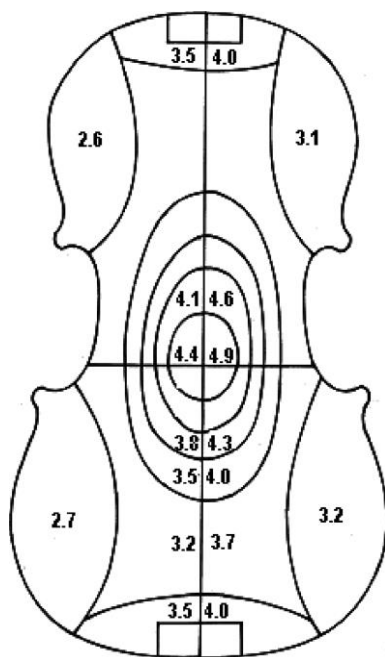


Rys. 5.3. Skrzypce A – replika instrumentu A. Stradivariego „Il Cremonese” (1715) – lewa strona fotografii, skrzypce B – instrument z pogrubioną płytą spodnią – prawa strona fotografii

Płyty wierzchnie i spodnie obu instrumentów wykonano z tego samego kawałka drewna świerkowego, a główki i boczki – z drewna jaworowego. Zadbano o to, żeby oba instrumenty były tak podobne do siebie pod względem wymiarów, konstrukcji i wykonania, jak to tylko było możliwe. Jediną celowo wprowadzoną różnicą była grubość płyt spodnich przedstawiona na rys. 5.4. Po lewej stronie rysunku podano

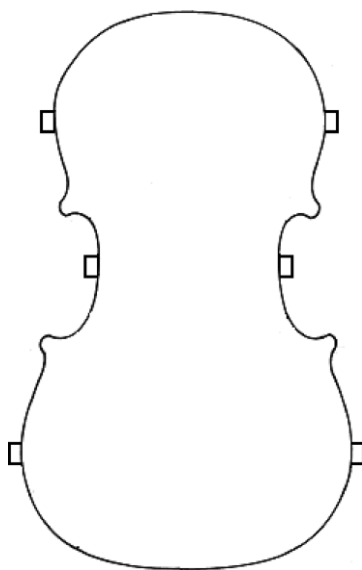
grubości płyty spodniej skrzypiec A, po prawej – skrzypiec B. W instrumencie B grubość płyty spodniej była na całej jej powierzchni większa od grubości płyty spodniej skrzypiec A o 0.5 mm. Zatem różnica w grubości płyt nie była różnicą stałoprocentową, jak np. w badaniach Molina i in. (1988). Kompletnych instrumentów przed badaniami nie pokryto lakierem, ale zamontowano na nich wszystkie elementy niezbędne do gry i nastrojono. Drgania strun wytłumiono kawałkiem filcu wsuniętym między struny i podstrunnice. Instrumenty zamontowano w drewnianej klatce o masie znacznie większej od masy skrzypiec, mocując je w sześciu punktach ułożonych na krawędzi płyty, której drgań nie badano, tj. gdy badano płytę spodnią, mocowanie było na płycie wierzchniej i na odwrót, rys. 5.5.

Przeprowadzono dwa eksperymenty: analizę modalną oraz pomiary drgań operacyjnych metodą wibrometrii laserowej. W teście modalnym skrzypce pobudzano do drgań sygnałem szerokopasmowym pochodzącym z młotka uderowego PCB 085C05 o czułości 2.25 mV/N,



Rys. 5.4. Grubości płyt spodnich skrzypiec będących wierną kopią „Il Cremonese” (1715) A. Stradivariiego – lewa strona (instrument A w tekście) oraz instrumentu z płytą grubszą o 0.5 mm – strona prawa (instrument B)

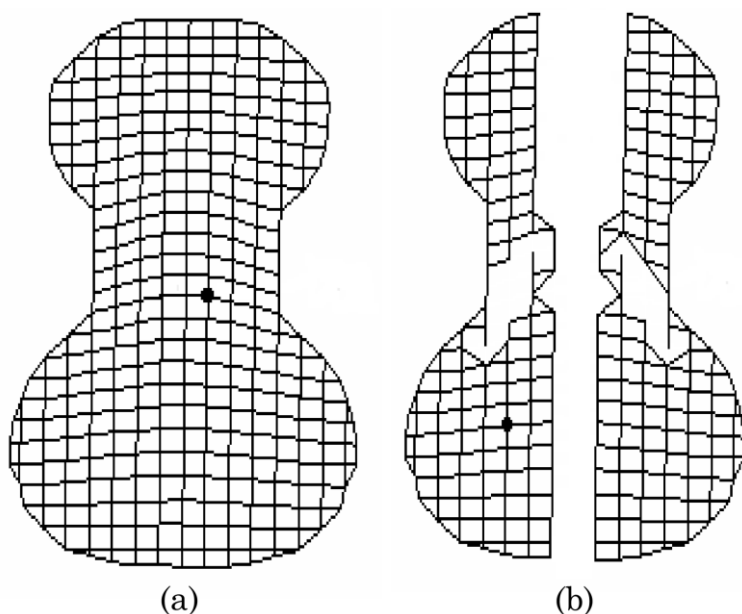
Źródło: Skrodzka i in. (2009).



Rys. 5.5. Mocowanie płyty wierzchniej podczas testu modalnego płyty spodniej

Źródło: Skrodzka i in. (2009).

kolejno w 325 punktach pomiarowych rozmieszczonych na płycie spodniej oraz w 270 punktach na płycie wierzchniej. Sygnał odpowiedzi mierzono akcelerometrem w jednym punkcie płyty, ulokowanym po lewej stronie płyty wierzchniej lub po prawej stronie płyty spodniej, jak pokazano na rys. 5.6. Pozycję akcelerometru na tym rysunku zaznaczono czarnym punktem. Użyto akcelerometru Ono Sokki NP-2910 o masie 2 g i czułości 0.3 pC/m/s^2 , przymocowanego na wosk pszczeli. Masa akcelerometru była znacznie mniejsza od 10% masy skrzypiec, a więc nie miała wpływu na uzyskane rezultaty. Funkcje transmitancji (inertancje) wyznaczano między ustalonym i niezmiennym punktem położenia akcelerometru oraz zmiennymi punktami pobudzenia impulsowego. Przeprowadzono więc analizę z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi układu. Dla płyty spodniej wyznaczono 325 inertancji, a dla płyty wierzchniej – 270 takich funkcji. Na płycie wierzchniej ominięto (z powodów technicznych) obszary pod strunociągami, strunami i podstrunnicą – dlatego liczba punktów pomiarowych jest mniejsza niż na płycie spodniej. Funkcje inertancji wyznaczono w paśmie częstotliwości 0–2500 Hz, z rozdzielczością 3 Hz. Każdą funkcję transmitancji wyznaczono dziesięć razy, a następnie uśredniono w dziedzinie częstotliwości. Ich jakość była kontrolowana przebiegiem

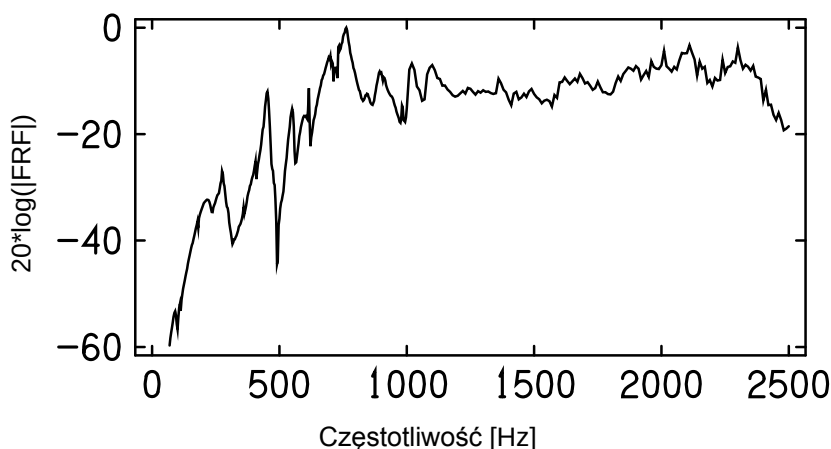


Rys. 5.6. Rozmieszczenie punktów pomiarowych w teście modalnym: (a) – płyta spodnia, (b) – płyta wierzchnia. Czarnymi punktami zaznaczono pozycje akcelerometru przy testowaniu płyty spodniej i wierzchniej. Punkty pomiaru sygnału przyspieszenia wykorzystane w teście modalnym posłużyły jako punkty pobudzenia w pomiarach wibrometrycznych

Źródło: Skrodzka i in. (2009).

funkcji koherencji. Przykład zmierzonej inertancji przedstawiono na rys. 5.7. Wynika z niego, że maksima modalne są dobrze rozseparowane, a w związku z tym drgania operacyjne mogą być interpretowane jako deformacje modalne.

W drugim eksperymencie wyznaczano drgania operacyjne metodą wibrometrii laserowej. Drgania te wyznaczano w częstotliwościach modalnych otrzymanych w teście modalnym. Drganie operacyjne jest definiowane jako deformacja badanej struktury w określonej częstotliwości (Richardson, 1997). Zatem jeśli częstotliwość pobudzenia jest równa częstotliwości modalnej, to drganie operacyjne może być interpretowane jako obwiednia modu. W pomiarach wibrometrycznych sinusoidalny sygnał pobudzający o częstotliwości modalnej przykładano do instrumentu za pomocą zewnętrznego wzбудnika elektrodynamicznego BK 4809, zakończonego prętem o długości 17 cm. Końcówką pręta pobudzano punkt, który w eksperymencie modalnym był



Rys. 5.7. Przykład funkcji inertancji dla płyty spodniej, wyznaczonej w eksperymencie modalnym – replika instrumentu A. Stradivariego „Il Cremonese” (1715)

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2009).

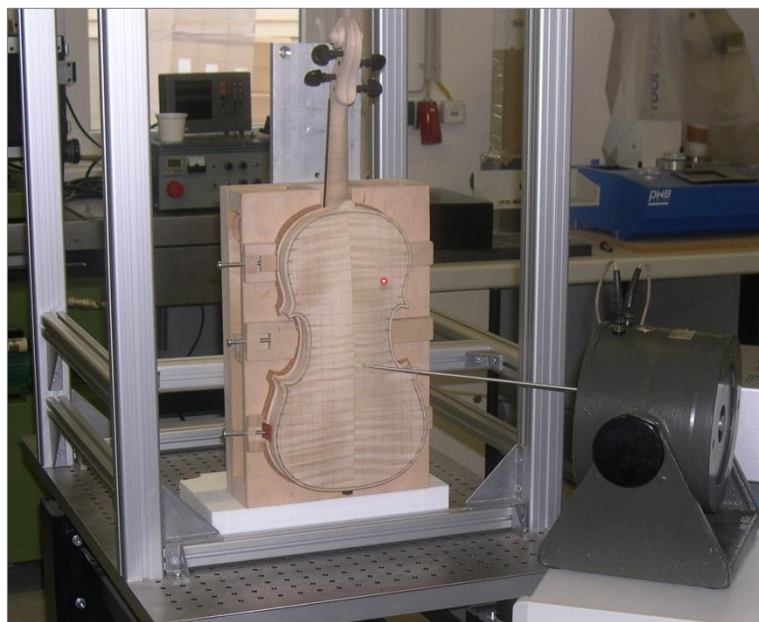
punktem pomiaru sygnału odpowiedzi, podobnie jak to opisano w podrozdziale 4.2.1. Sygnał odpowiedzi, czyli prędkość, mierzono za pomocą wibrometru laserowego Polytec PSV-300, we wszystkich punktach widocznych na rys. 5.6. Instrument był zamontowany tak samo jak w teście modalnym, rys. 5.8. Pomiary optyczne były w istocie pomiarami modalnymi w wersji z ustalonym punktem pobudzenia.

5.4.2. Rezultaty

Częstotliwości modalne i procent tłumienia krytycznego obu instrumentów różniących się grubością płyty spodniej uzyskane w teście modalnym zaprezentowano w tabeli 5.6. Choć w zakresie pomiarowym znaleziono wiele modów (Marshall, 1985), to w tabeli tej zebrano jedynie parametry modów o najlepiej zarysowanych liniach węzłowych i o tłumieniu d mniejszym od 10% tłumienia krytycznego. Z tego powodu liczba modów dla poszczególnych płyt nie jest jednakowa. Na przykład dla wierzchniej płyty instrumentu B w tabeli 5.6 nie zamieszczono modu o częstotliwości 300 Hz, a dla płyty spodniej – modu o częstotliwości ok. 2400 Hz, których tłumienia przekraczały 10% wartości tłumienia krytycznego. Kierowano się podstawowym założeniem analizy modalnej, której przeprowadzanie ma sens dla układów o małym tłumieniu, nie przekraczającym 10% wartości krytycznej,

ponieważ wtedy można je traktować jak układy liniowe (Marshall, 1985; Bissinger, 2003a; Skrodzka i in., 2011).

Biorąc pod uwagę trzyhercową rozdzielczość częstotliwościową, z jaką wyznaczone były funkcje inertancji, z tabeli 5.6 wynika, że różna grubość płyty spodniej wpłynęła na częstotliwości i tłumienia modalne niektórych modów. Według danych podawanych w literaturze (Molin i in., 1988) dziesięcioprocentowe zmiany grubości płyty skutkują zmianami częstotliwości rezonansowych wynoszącymi ok. 2%. Najmniejsza częstotliwość modalna wyznaczona dla skrzypiec A wynosiła 244 Hz. Ponieważ 2% z 244 Hz to 4.88 Hz, można uznać, że rozdzielczość trzyhercowa była wystarczająca do identyfikacji zmian w częstotliwościach modalnych spowodowanych różnymi grubościami płyty spodniej. Pierwsze dwie częstotliwości modalne obu płyt spodnich były więc jednakowe w granicy dokładności pomiaru. Pozostałe częstotliwości nie były jednakowe i nie zaobserwowano dla ich zmian regularnej tendencji. Dotyczyło to zarówno zmian częstotliwości płyt spodnich, jak i wierzchnich. Jest to oczywiste, jeśli weźmie się pod uwagę fakt, że obie płyty skrzypcowe są połączone za pośrednictwem boczaków i duszy.



Rys. 5.8. Sposób zamontowania skrzypiec do pomiarów wibrometrem laserowym oraz w teście modalnym. Czerwony punkt w prawej górnej części płyty spodniej to światło lasera

Obie płyty skrzypcowe można stroić, zmieniając ich grubość, co pociąga za sobą zmiany ich masy i sztywności (podrozdział 5.3.2). Działania te powodują zmianę globalnych parametrów modalnych, zwiększając je lub zmniejszając. Ponieważ dwie pierwsze częstotliwości modalne płyt obu instrumentów nie różniły się znacząco, nie ma silnych podstaw do poparcia rozpowszechnionej wśród lutników opinii, że grubsza płyta spodnia skutkuje zmianami jakości dźwięku w małych częstotliwościach. Jednak ponieważ częstotliwości kilku pierwszych modów instrumentu B, z grubszą płytą spodnią, są nieco większe od odpowiadających im częstotliwości skrzypiec A, można spekulować, że skrzypce B będą miały w małych częstotliwościach barwę dźwięku nieco ciemniejszą od barwy dźwięku skrzypiec A.

Tabela 5.6. Częstotliwości modalne i procent tłumienia krytycznego modów wyznaczonych dla skrzypiec A, czyli kopii instrumentu A. Stradivariego „Il Cremonese” (1715) oraz instrumentu B z pogrubioną płytą spodnią

Numer modu	Płyta spodnia				Płyta wierzchnia			
	Skrzypce A		Skrzypce B		Skrzypce A		Skrzypce B	
	f, Hz	d, %	f, Hz	d, %	f, Hz	d, %	f, Hz	d, %
1	244	5.54	250	7.40	301	7.04		
2	466	4.51	463	9.59	452	1.89	449	3.23
3	595	7.87	584	3.48	689	3.29	737	2.61
4	766	5.04	938	4.15	885	3.70	1044	3.53
5	1033	3.27			1096	3.46	1056	3.12
6	1125	3.78	1119	3.53	1105	2.60	1270	5.05
7	1133	2.72	1134	3.84	1601	2.29	1407	4.31
8	1359	5.49	1360	4.63	2071	2.73	1896	4.72
9	1596	1.56	1514	2.58			2124	4.69
10	1781	1.83	1682	1.24				
11	1994	3.26	1984	1.85				
12	2265	1.7	2124	1.29				

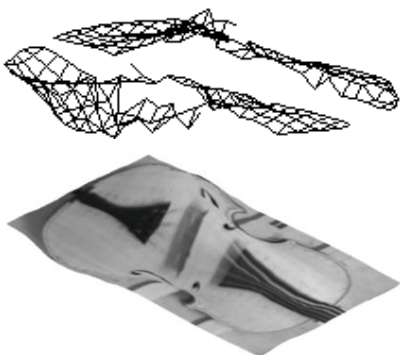
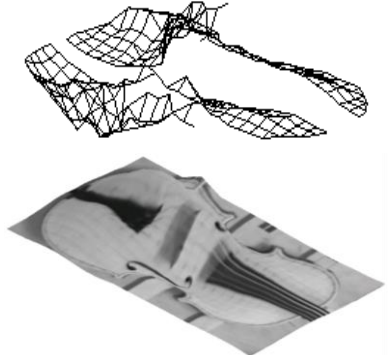
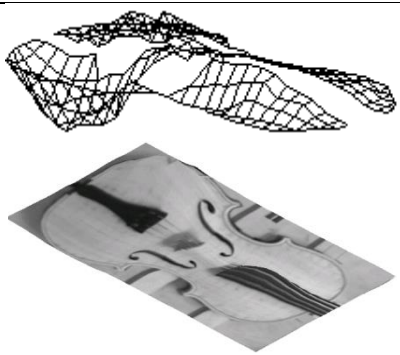
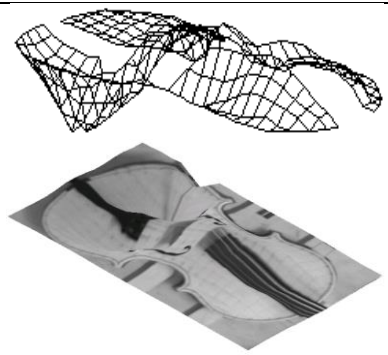
Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2009).

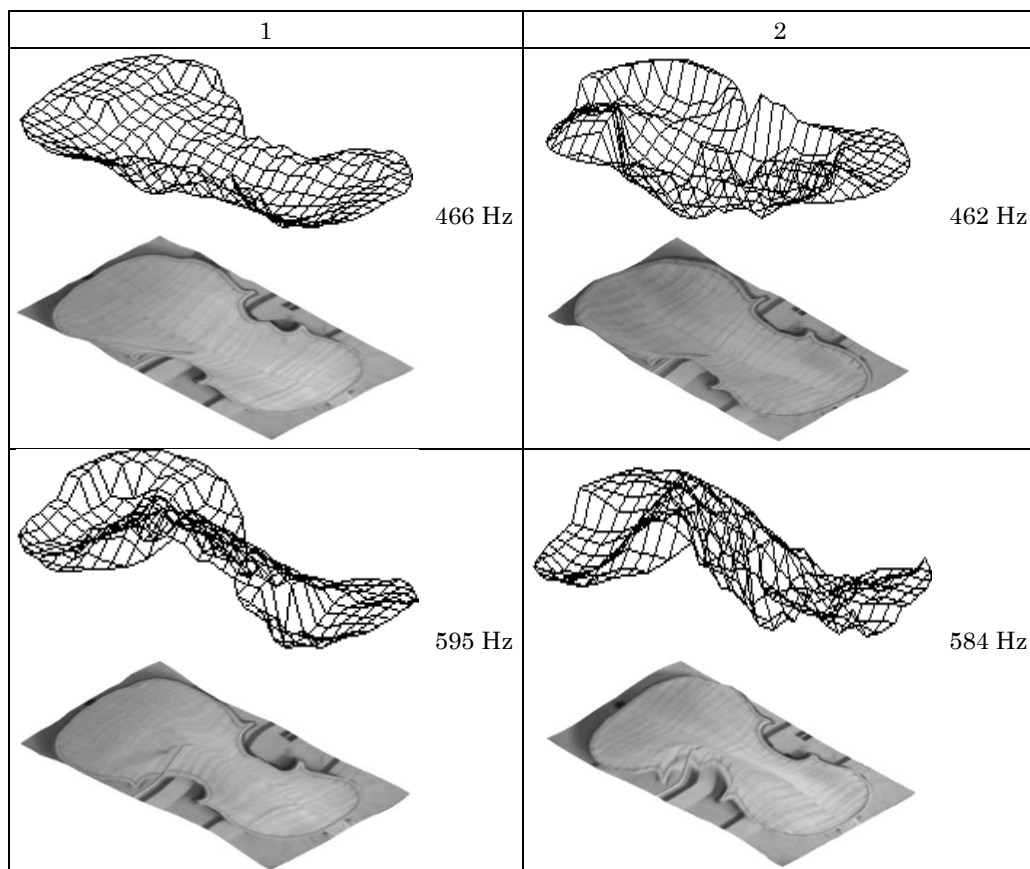
W tabeli 5.7 przedstawiono przykłady obwiedni modalnych wyznaczonych w eksperymencie modalnym i optycznym dla obu płyt skrzypiec A oraz B. Są one bardzo podobne do obwiedni opisanych w literaturze (Marshall, 1985; Bissinger, 1995; Saldner i in., 1996). W niektórych modach można zaobserwować silne drgania korpusu

instrumentu i niewielkie pozostałych elementów, np. szyjki z podstrunnicą. Dla innych modów – odwrotnie. W analizie obwiedni modalnych nie dokonano rozróżnienia na mody powietrzne, zginające i płytowe, ponieważ każde drganie modalne jest w mniejszym lub większym stopniu ich kombinacją. Drewniane powłoki, czyli np. korpusy skrzypiec, stanowią ograniczenie dla ruchu powietrza zawartego w ich wnętrzu, w związku z czym niemożliwy jest jednoczesny ruch tych powłok i bezruch powietrza (Bissinger, 2003c).

Obwiednie modalne uzyskane w teście modalnym porównano z drganiami operacyjnymi wyznaczonymi metodą wibrometrii laserowej, wymuszanymi sygnałami sinusoidalnymi o częstotliwościach modalnych. Przykłady takich porównań zebrano w tabeli 5.7.

Tabela 5.7. Przykłady obwiedni modalnych uzyskanych w teście modalnym oraz drgań operacyjnych uzyskanych metodą wibrometrii laserowej dla repliki instrumentu A. Stradivariego „Il Cremonese”) (1715) – skrzypce A oraz skrzypiec B z pogrubioną płytą spodnią

Skrzypce A	Skrzypce B
1	2
 452 Hz	 449 Hz
 689 Hz	 737 Hz



Źródło: wg Skodzkiej i in. (2009).

Przed porównaniem wielkość opisującą drgania operacyjne wyznaczone za pomocą wibrometru, czyli prędkość, przeliczono na przyspieszenie, ponieważ to ono było w eksperymencie modalnym sygnałem odpowiedzi. Szczegółowa analiza położenia linii węzłowych, obszarów o dużych amplitudach ruchu oraz względnych faz ruchu wykazała, że obwiednie modalne i drgania operacyjne, z warunkiem zachodzenia ich z tą samą częstotliwością, są podobne, choć nie we wszystkich analizowanych przypadkach jednakowe. Wskazuje to, choć nie w ścisłym sensie, na liniowość badanych instrumentów (Ewins, 1998; Natke, 1992). Układ jest liniowy, gdy sygnał jego odpowiedzi na pobudzenie jest proporcjonalny do sygnału tego pobudzenia. Implikuje to, że

funkcje transmitancji zmierzone między parą punktów tego układu są niezależne od tego, który z pary punktów jest punktem pobudzenia, a który punktem akwizycji sygnału odpowiedzi.

Zatem skrzypce, podobnie jak gitary (podrozdział 4.1.3), można traktować jak układy liniowe, pod warunkiem, że tłumienie modalne ma niewielkie wartości i amplitudy sygnału pobudzenia są małe. Wprowadzenie niewielkich, kontrolowanych różnic w grubości płyty spodniej nie zaburzyło sekwencji obwiedni modalnych ani pierwszych dwóch częstotliwości modalnych obu płyt skrzypcowych, ale miało wpływ na częstotliwości wyższych modów. Do powyższych wniosków należy podchodzić z ostrożnością, ponieważ porównano zachowania modalne tylko dwóch instrumentów. Porównywanie dwóch, rzadziej kilku instrumentów jest sytuacją dość często spotykaną w literaturze (Alonso-Moral i Jansson, 1982; Runnemalm i in., 2000; Bissinger 1995, 2003c; Gren i in., 2006; Skrodzka i in., 2013, 2014).

5.5. Analiza modalna skrzypiec z duszą i bez duszy

5.5.1. Rola duszy skrzypcowej

Dusza i belka basowa to dwa „ukryte” elementy skrzypiec powodujące, że ich konstrukcja jest asymetryczna. Asymetria ta powoduje znaczne zwiększenie wkładu płyty wierzchniej w generowany dźwięk. Dźwięk instrumentu bez duszy jest cichszy i niższy w porównaniu do dźwięku skrzypiec z duszą. Dusza to mały, cylindryczny kawałek drewna o promieniu ok. 6 mm, długości ok. 50 mm i masie ok. 0.7 g (masa skrzypiec to ok. 400 g). Najczęściej wykonuje się ją z tego samego gatunku drewna co płytę wierzchnią (Bissinger, 1995). Dusza jest umieszczana wewnątrz instrumentu, między jego płytami, pod stopą podstawka, nad którą znajdują się struny sopranowe. Nawet małe zmiany położenia duszy powodują znaczne zmiany w brzmieniu instrumentu (Cremer, 1984).

5.5.2. Instrument i eksperyment

Wpływ obecności duszy i jej braku na mody drgań wierzchniej i spodniej płyty kompletnego instrumentu badał Bissinger (1995). Badań modalnym poddano instrument nie pokryty lakierem, SUS#263,

wykonany przez C. Hutchins, z duszą oraz bez niej. Skrzypce były nastrojone, a drgania strun podczas eksperymentu nie były tłumione.

Przeprowadzono test modalny z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi układu. Skrzypce pobudzano do drgań młotkiem uderowym PCB 086C80, kolejno w 231 punktach pomiarowych rozmieszczonych na obu płytach. Sygnał odpowiedzi na pobudzenie (przyspieszenie) rejestrowano akcelerometrem PCB309a o masie 1 g, przymocowanym poniżej stopy podstawka, nad którą znajdowały się struny basowe. Funkcje inertancji wyznaczano w paśmie 0–200 Hz. Stosowano 5 uśrednień w dziedzinie częstotliwości. Funkcje koherencji wykorzystywano do śledzenia proporcjonalności między sygnałem pobudzenia i sygnałem odpowiedzi. Podczas testu modalnego instrument leżał na podkładkach z gąbki umieszczonych pod pieńkiem dolnym oraz pod stopą szyjki.

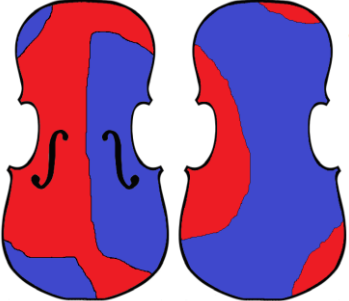
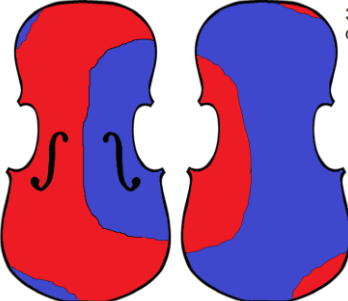
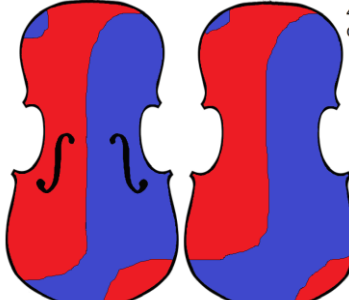
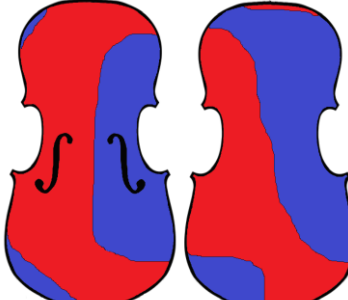
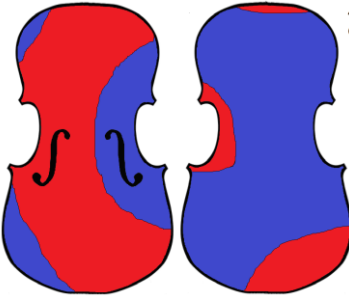
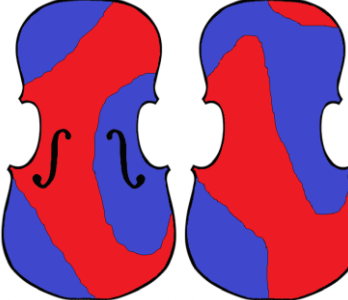
5.5.3. Rezultaty

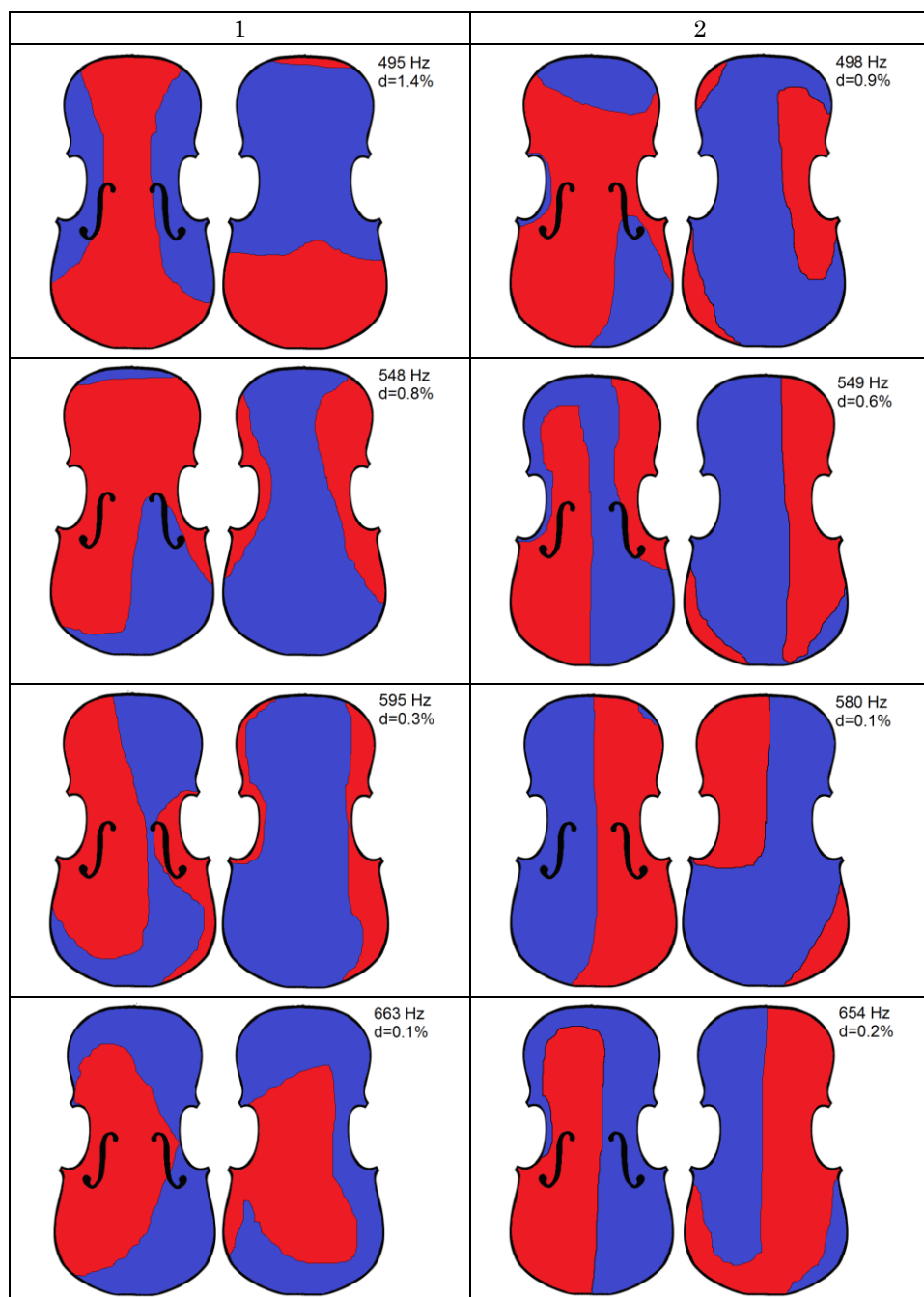
Rezultaty testu modalnego instrumentu z duszą oraz tego samego instrumentu bez duszy zebrano w tabeli 5.8. W tabeli tej nie zawarto modu powietrznego A0 (rezonansu Helmholtza), który dla skrzypiec z duszą występował w częstotliwości 278 Hz, a dla skrzypiec bez duszy w 245 Hz. W lewej kolumnie tabeli 5.8 przedstawiono mody instrumentu kompletnego, tj. z duszą. Sekwencja obwiedni modalnych, ich częstotliwości i procent tłumienia krytycznego są bardzo podobne do przedstawionych w tabeli 5.1. W istocie, w obu przypadkach badano kompletne skrzypce, wykonane przez tego samego lutnika, według zbliżonych modeli. W prawej kolumnie tabeli 5.8 zebrano mody instrumentu bez duszy. Porównując parametry modalne skrzypiec z duszą i bez duszy, można bez trudu zauważyć, że usunięcie duszy nie „niszczy” modów obu płyt, lecz zmienia ich obwiednie i częstotliwości oraz w niewielkim stopniu – procent tłumienia krytycznego (Bissinger, 1995).

Umieszczenie w skrzypcach duszy, której masa stanowi 0.2–0.3% masy całego instrumentu, wprowadza w obu płytach nie tylko lokalną (w obszarze umocowania duszy), lecz globalną, znaczną zmianę stosunku sztywności do masy. Energia dostarczana do instrumentu z drgających strun może więc łatwo, za pośrednictwem boczków, przemieszczać się między płytami, co nie pozostaje bez wpływu na parametry modalne.

Gdy rozpatruje się mody obu płyt w instrumencie bez duszy, można zauważyć, że znacznie więcej z nich (w porównaniu do modów płyt instrumentu z duszą) jest symetrycznych, z linią węzłową przebiegającą w pobliżu pionowej osi symetrii płyt. Spektakularnym przykładem jest mod o częstotliwości 549 Hz w instrumencie bez duszy.

Tabela 5.8. Parametry modalne wierzchniej i spodniej płyty skrzypiec z duszą i bez duszy. Kolorem czerwonym oznaczono ruch w kierunku dodatnich wartości hipotetycznej osi prostopadłej do płyty wierzchniej w jej najwyższym punkcie i skierowanej przed instrument, kolorem niebieskim – ruch w stronę ujemnych wartości tej osi

Skrzypce z duszą	Skrzypce bez duszy
1	2
 390 Hz d=0.2%	 382 Hz d=0.2%
 402 Hz d=0.6%	 395 Hz d=0.8%
 431 Hz d=0.6%	 427 Hz d=0.2%



Źródło: wg Bissingera (1995).

Wykazuje on znacznie większą symetrię obszarów poruszających się w przeciwnych fazach niż mod $B(1-)$, o częstotliwości 548 Hz, w instrumencie z duszą. Mod ten w instrumencie z duszą jest modem silnie promieniującym akustycznie, natomiast w instrumencie bez duszy – nie. Mod ten, w skrzypcach bez duszy, nie jest wydajnym źródłem energii akustycznej ze względu na porównywalną powierzchnię symetrycznych obszarów poruszających w fazie i w przeciwfazie. W instrumencie z duszą symetria ta jest wyraźnie zaburzona (Bissinger, 1995; Saldner i in., 1996), przez co jego dźwięk jest subiektywnie oceniany jako głośniejszy. Rozpatrzmy częstotliwości modalne w paśmie do 600 Hz. Sześć (z siedmiu) modów instrumentu z duszą ma częstotliwości większe od odpowiadających im częstotliwości modów instrumentu bez duszy. Dlatego dźwięk instrumentu z duszą subiektywnie oceniany jest jako wyższy od dźwięku instrumentu pozbawionego duszy.

5.6. Analiza modalna skrzypiec z belką basową o różnym napięciu

5.6.1. Rola belki basowej

Belka basowa jest drewnianym, łukowym elementem usztywniającym, wykonanym zazwyczaj z drewna świerkowego, umocowanym równolegle do podłużnej osi symetrii instrumentu, pod lewą stopą podstawka. Element ten nazywany jest belką basową dlatego, że basowe struny instrumentu znajdują się nad nim, po zewnętrznej stronie płyty wierzchniej. Belka basowa i dusza spełniają w skrzypcach zadania mechaniczne i akustyczne. Funkcja mechaniczna belki basowej polega na podparciu płyty wierzchniej poddanej obciążeniu pochodzącemu od strun i podstawka i rozprowadzeniu tego obciążenia na płycie wierzchniej. Dusza przenosi to obciążenie na płytę spodnią. Płyta bez belki basowej ulega wykrzywieniom i pęknięciom. Funkcja akustyczna belki basowej polega na symfazowym pobudzeniu możliwie największego obszaru płyty wierzchniej. Boczki, łącznie z objętością powietrza w korpusie i duszą, przenoszą drgania podstawka na płytę spodnią (Cremer, 1984). Z upływem czasu belka basowa traci napięcie, instrument nie odpowiada na dźwięki o małych częstotliwościach, a płyta wierzchnia ulega deformacji. Belka basowa, dusza i podstawek są tymi elementami, które trzeba okresowo wymieniać, aby utrzymać instrument w dobrej kondycji dźwiękowej.

5.6.2. Instrument i eksperyment modalny

Do badania wpływu napięcia belki basowej na parametry modalne przygotowano replikę skrzypiec A. Stradivariego „Dickson-Poynder” (1703). Płytę wierzchnią wykonano z drewna świerkowego, klejąc ją z dwóch części o prawie identycznych szerokościach przyrostów rocznych (1–1.5 mm). Płyta spodnia również powstała ze sklejenia dwóch części, wykonanych z drewna jaworowego. Wymiary skrzypiec podano w tabeli 5.9. Skrzypce zostały wykonane przez Stanisława Bafię w Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego w Poznaniu. Jedyną celowo wprowadzaną różnicą było napięcie belki basowej. Termin „napięcie”, wyrażone w milimetrach, jest tu używany w znaczeniu popularnym wśród lutników, tj. jako napięcie niezbędne do połączenia swobodnych końców belki basowej z powierzchnią płyty wierzchniej, gdy szczelina między końcami belki i płytą jest niezerowa w warunkach „bez napięcia”.

Badano trzy napięcia belki basowej: z „normalnym” napięciem 1.5 mm (odległość między końcami belki a powierzchnią płyty wyno-

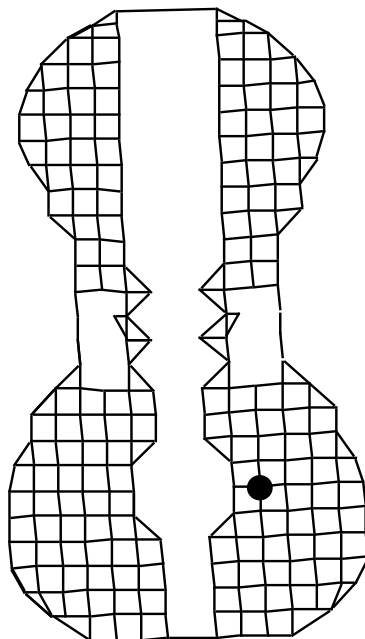
Tabela 5.9. Wymiary w milimetrach skrzypiec będących repliką instrumentu A. Stradivariego „Dickson-Poynder” (1703)

Wymiar	Płyta wierzchnia	Płyta spodnia
Wysokość korpusu	356	356
Maksymalna szerokość policzków górnych	167	167
Szerokość w talii	113	113
Maksymalna szerokość policzków dolnych	206	206
Maksymalna wysokość sklepienia	16	15.5
Grubość w centrum płyty	3.3	4.5
Grubość policzków górnych płyty	2.6	2.6
Grubość policzków dolnych płyty	2.7	2.7
Długość belki basowej	270	
Maksymalna wysokość belki basowej	13.5	
Szerokość belki basowej	3-6	
Wysokość boczaków	29.5–30.5	

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2014).

siła 1.5 mm, gdy na belkę nie działa żadna siła), napięciem „dużym”, czyli wynoszącym 3 mm oraz bez napięcia (końce belki basowej swobodnie przylegały do powierzchni płyty wierzchniej) (Skrodzka i in., 2014).

W skrzypcach montowano kolejno belki o napięciu opisanym powyżej. Instrument wyposażono w zestaw strun Thomastik Dominant i nastrojono. Podczas wykonywania testu modalnego strun nie tłumiono. Testowanego instrumentu nie pokrywano lakierem, aby nie wprowadzać dodatkowego czynnika mogącego wpływać na rezultaty, choć wiadomo, że wpływ ten jest niewielki (Skrodzka i in., 2013). Test modalny przeprowadzono w wersji z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi. Impulsowy sygnał pobudzenia pochodził z młotka uderowego, a sygnał odpowiedzi z akcelerometru. Zastosowano aparaturę taką samą jak opisana w podrozdziale 5.4.1. Funkcje transmitancji wyznaczono w 244 punktach płyty wierzchniej, w zakresie częstotliwości 0–2000 Hz, z rozdzielczością spektralną wynoszącą 2 Hz. Zastosowano 10 uśrednień w dziedzinie częstotliwości. Poprawność pomiaru inercyjności kontrolowano, opierając się na funkcjach koherencji. Do testu modalnego instrument zamontowano w uchwycie przedstawionym na rys. 5.8. Rozkład punktów pomiarowych przedstawiono na rys. 5.9.

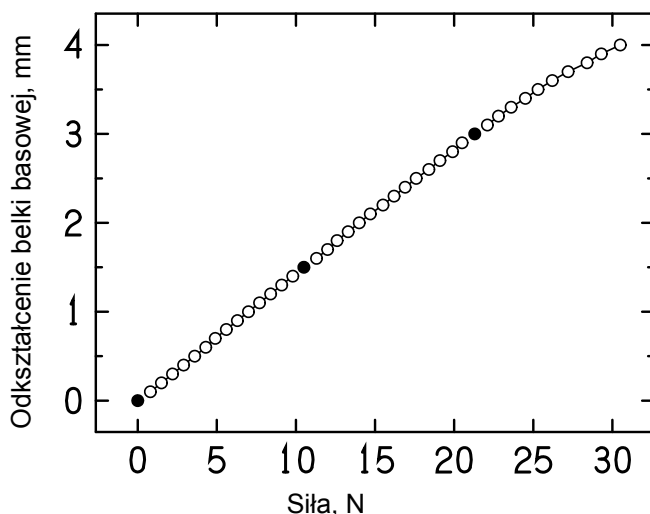


Rys. 5.9. Rozkład punktów pomiarowych na skrzypcach-kopii instrumentu „Dickson-Poynder” (1703) A. Stradivariego w eksperymencie modalnym z różnymi napięciami belki basowej. Pozycję akcelerometru zaznaczono czarnym punktem

Źródło: Skrodzka i in. (2014).

5.6.3. Zależność odkształcenia belki basowej od zastosowanej siły

W celu opisu napięcia belki basowej przeprowadzono eksperyment, w którym określono związek między wartością siły niezbędnej do zamknięcia szczeliny między końcami belki a powierzchnią nienapiętej płyty wierzchniej. Do badań użyto cyfrowego miernika siły Sauter FH 500 o dokładności pomiarowej 0.1 N, zamontowanego na statywie Sauter TVL wraz z cyfrowym miernikiem odległości, o dokładności pomiaru 0.01 mm. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 5.10. Wartość siły niezbędnej do uzyskania odkształcenia 1.5 mm wynosiła 10.5 N. Uzyskanie odkształcenia belki basowej o wartości 3 mm wymagało siły o wartości 21.3 N. Wartości te na rysunku 5.10 oznaczono czarnymi punktami. W badanym zakresie wartości siły relacja między wartością siły a odkształceniem belki basowej była proporcjonalna.



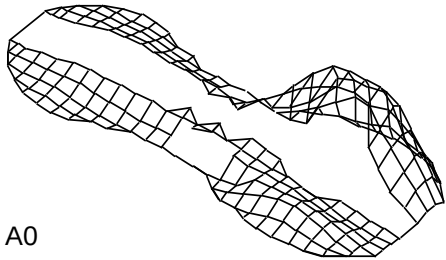
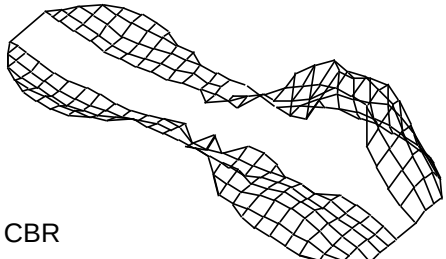
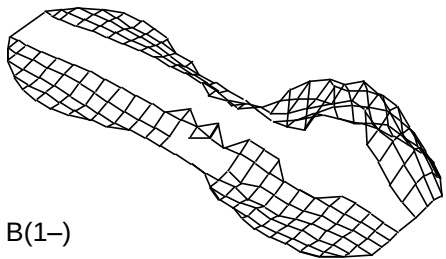
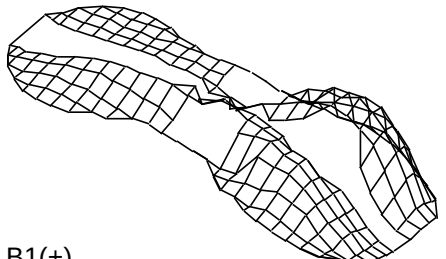
Rys. 5.10. Zależność odkształcenia belki basowej od przyłożonej siły w skrzypcach zbudowanych wg modelu instrumentu „Dickson-Poynder” (1703). Czarnymi punktami oznaczono napięcia belki basowej stosowane w eksperymencie modalnym

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2014).

5.6.4. Rezultaty

Częstotliwościowy zakres analizy ograniczono do 700 Hz, ponieważ w tym zakresie występują najważniejsze mody sygaturalne płyty wierzchniej A0, CBR, B(1–) i B(1+) (Bissinger, 2008). W tabeli 5.10

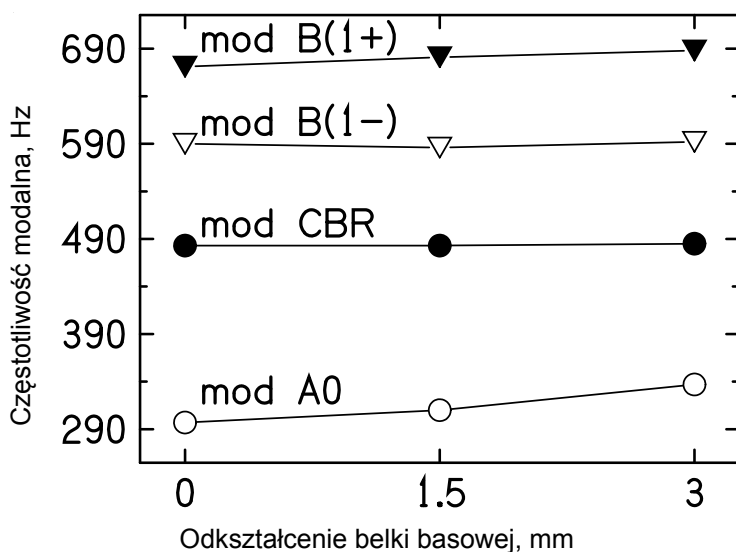
Tabela 5.10. Parametry modów A0, CBR, B(1–) i B(1+) płyty wierzchniej z belką basową o różnym napięciu w skrzypcach zbudowanych wg modelu instrumentu „Dickson-Poynder” (1703)

Obwiednia modu	Odształcenie belki basowej, mm					
	0		1.5		3	
	f, Hz	d, %	f, Hz	d, %	f, Hz	d, %
 A0	297	8.1	310	8.2	337	8.0
 CBR	483	3.3	483	2.8	485	2.6
 B(1–)	590	5.7	586	5.9	592	3.0
 B(1+)	671	5.0	681	4.3	687	4.6

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2014).

przedstawiono obwiednie modalne, ich częstotliwości oraz procent tłumienia krytycznego rozpatrywanych modów dla trzech testowanych napięć belki basowej.

Mod oznaczony A0 jest rezonansem Helmholtza („modem powietrznym”). Mod oznaczony CBR jest modem korpusu o najmniejszej częstotliwości, z jedną linią węzłową wzdłuż instrumentu i dwiema poprzecznymi liniami węzłowymi, przechodzącymi przez górne i dolne policzki. Dwa kolejne mody, B(1–) i B(1+), są modami płytowymi i wynikają ze zginania i rozciągania płyty wierzchniej. Mod B(1–) płyty wierzchniej ma dwie podłużne linie węzłowe, położone niemal symetrycznie po obu stronach osi symetrii. Mod B(1+) płyty wierzchniej ma dwie poprzeczne linie węzłowe, przecinające górne i dolne policzki. Jak napisano w podrozdziale 5.2.2, mody A0, B(1+) oraz B(1–) są modami silnie promieniującymi akustycznie i decydującymi o walorach brzmieniowych skrzypiec (Bissinger, 2008). Obwiednie modalne analizowanych modów dla wszystkich trzech testowanych napięć belki basowej oraz ich częstotliwości i tłumienia modalne są podobne do opisanych w literaturze (Marshall, 1985; Bissinger, 2008; Skrodzka i in., 2009). Wszystkie mody przedstawione w tabeli 5.10 mają tłumienie modalne



Rys. 5.11. Związek między częstotliwością modalną modów A0, CBR, B(1–) oraz B(1+) i odkształceniem belki basowej w skrzypcach zbudowanych wg modelu instrumentu „Dickson-Poynder” (1703)

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2014).

mniejsze od 10% tłumienia krytycznego, co oznacza, że założenie liniowości badanego układu jest spełnione w stopniu dostatecznym (Ewins, 1995; Skrodzka i in., 2005, 2011).

Wpływ napięcia belki basowej na częstotliwości modalne przedstawiono na rys. 5.11.

Częstotliwości modów A0 i B(1+) płyty wierzchniej wzrastają wraz ze wzrastaniem napięcia belki basowej. Częstotliwość modu A0 wynosiła 297 Hz dla belki bez napięcia, 310 Hz dla belki z napięciem 1.5 mm i 337 Hz dla belki z napięciem 3 mm. Częstotliwość modu B(1+) wzrastała od 671 Hz dla belki bez napięcia, poprzez 681 Hz dla belki o napięciu 1.5 mm, do 687 Hz dla belki o napięciu 3 mm. Napięcie belki nie wpłynęło na częstotliwości modów CBR i B(1-). Tłumienie modalne nie było stałe, lecz zmieniało się nieznacznie dla rozważanych modów i zastosowanych napięć belki basowej, tabela 5.10. Nie wpłynęło to jednak na jakość dźwięku generowanego przez instrument, ponieważ trend zmian tłumienia modalnego nie jest czynnikiem determinującym tę jakość (Bissinger, 2008).

Częstotliwości modów A0 oraz B(1+), wyznaczone dla trzech zastosowanych napięć belki, były nieco większe niż opisywane w literaturze (Marshall, 1985; Bissinger, 2008, Fritz i in., 2007). Nie musi to oznaczać, że testowane skrzypce był instrumentem złej jakości, ponieważ wiadomo, że choć częstotliwości tych modów mają wpływ na walory brzmieniowe instrumentu, to nie muszą być czynnikiem bezwzględnie determinującym jakość jego dźwięku (Bissinger, 2008).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że napięcie belki basowej wpływa na częstotliwości dwóch ważnych, ze względu na promieniowanie akustyczne, modów, tj. modów A0 i B(1+). Związek między wartością siły niezbędnej do dociśnięcia końców belki basowej do płyty wierzchniej a wielkością szczeliny między swobodnymi końcami belki i nienapiętą płytą wierzchnią jest proporcjonalny i zwiększenie napięcia belki powodowało wzrost częstotliwości modów A0 i B(1+). Jednak relacja między częstotliwościami modalnymi a napięciem belki nie jest ściśle proporcjonalna. Mimo braku proporcjonalności kontrolowanie napięcia belki basowej wydaje się użytecznym narzędziem strojenia częstotliwości dwóch najważniejszych modów silnie promieniujących akustycznie, tj. modów A0 i B(1+). Badania przeprowadzono bezpośrednio po zamontowaniu belki basowej. Jej starzenie się może wywoływać istotne zmiany częstotliwości modalnych płyty wierzchniej i może wpływać na jakość dźwięku generowanego przez instrument (Skrodzka i in., 2014).

5.7. Analiza modalna skrzypiec różniących się rodzajem zastosowanego lakieru

5.7.1. Rodzaje lakierów stosowanych w lutnictwie

Drewniane instrumenty muzyczne tradycyjnie pokrywa się lakierem w celu ochrony drewna przed wilgocią i kurzem oraz w celach estetycznych. Powłoka lakierowa złożona z jednej lub kilku warstw zmieszanych materiałów organicznych i mineralnych jest przygotowywana przez lutnika poprzez rozkruszanie, mieszanie, rozpuszczanie i podgrzewanie surowców składowych. Mieszaniny te są następnie nakładane na powierzchnię skrzypiec za pomocą pędzla z włosia, tworzywa sztucznego lub kawałka materiału (Echard i in., 2008). Wyróżnia się trzy główne rodzaje lakierów stosowanych w lutnictwie:

- a) alkoholowe roztwory żywic, nazywane lakierami spirytusowymi, które szybko schną w wyniku parowania rozpuszczalnika,
- b) roztwory żywic w lotnych olejach, będące podstawowymi lakierami olejnymi, które schną wolniej od lakierów spirytusowych,
- c) mieszaniny żywic z olejami sykatywnymi, tj. lakiery olejowe wolnoschnące.

Przykładem oleju lotnego jest olej terpentynowy. Olejami sykatywnymi są oleje lniane i orzechowy. Kalafonia, terpentyna strasburska i wenecka, sandarak, benzoës, gummi elemi i mastyks są żywicami roślinnymi wykorzystywanymi w lakierach do skrzypiec. Szelak jest żywicą wydzielaną przez pewien gatunek insekta (Echard i in., 2007). Do lakierowania gitar powszechnie wykorzystuje się lakiery syntetyczne. Przedstawiony opis lakierów stosowanych w lutnictwie jest bardzo ogólny. W praktyce każdy lutnik stosuje własne kompozycje ich składu.

5.7.2. Instrumenty, eksperyment modalny i eksperyment oceniający jakość dźwięku skrzypiec

Do badania wpływu rodzaju zastosowanego lakieru na parametry modalne wykonano dwie repliki instrumentu „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), przedstawione na rys. 5.12. Nazwano je A i B. Dwuczęściowe (klejone) płyty wierzchnie obu instrumentów wykonano z tego samego kawałka drewna świerkowego. Jednocześnie płyty spodnie i boczki wykonano z jaworu falistego. Specjalną uwagę zwrócono na to, aby wykonane dwa instrumenty były do siebie podobne,



Rys. 5.12. Skrzypce, repliki instrumentu „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), pokryte lakierem spirytusowym – z lewej strony (widoczna siatka pomiarowa testu modalnego), skrzypce pokryte lakierem olejnym z prawej strony

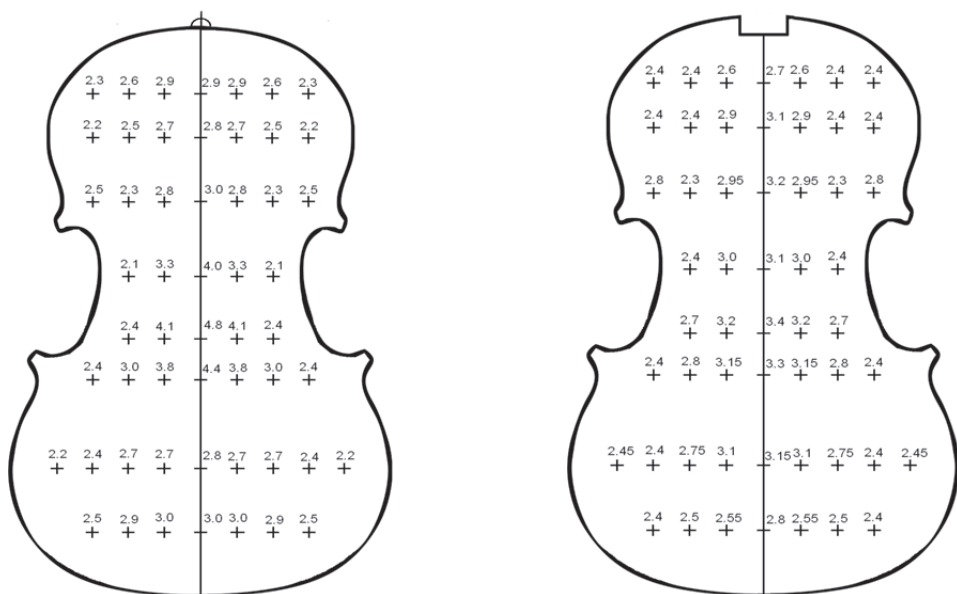
jak to tylko możliwe. Jediną różnicą wprowadzoną celowo był rodzaj użytego lakieru. Na rysunku 5.13 przedstawiono grubości płyt wierzchnich (rysunek po lewej stronie) i spodnich (rysunek po prawej stronie; grubości podano w milimetrach). Wymiary skrzypiec zawarto w tabeli 5.11. W obu instrumentach założono ten sam zestaw strun: G – Pirastro Flexocore, D – Thomastik Infeld Red, A – Pirastro Chromcore Eudoxa, E – Pirastro Gold. Instrumenty wykonał lutnik Jan Sebastian Adamczyk w Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego w Poznaniu.

Pierwszy eksperyment modalny przeprowadzono na instrumentach niepokrytych lakierem. Drugi eksperyment modalny – po pokryciu skrzypiec lakierami. Przed lakierowaniem na drewno została naniesiona bejca wodna o delikatnym odcieniu złoto-brązowym. Następnie zewnętrzne powierzchnie instrumentów zagruntowano przy

Tabela 5.11. Wymiary skrzypiec w milimetrach, replik instrumentu „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), różniących się rodzajem zastosowanego lakieru

Wymiar	Płyta wierzchnia	Płyta spodnia
Wysokość korpusu	353	353
Maksymalna szerokość policzków górnych	167.5	167.5
Szerokość w talii	110.5	110.5
Maksymalna szerokość policzków dolnych	206	206
Maksymalna wysokość sklepienia	14	15.5
Długość belki basowej	270	
Maksymalna wysokość belki basowej	13.0	
Szerokość belki basowej	3–6	
Położenie belki basowej względem osi symetrii instrumentu	18 (góra) 20 (dół)	
Menzura		195
Wysokość boczków	29.0–32.0	

Źródło: Skrodzka i in. (2013).

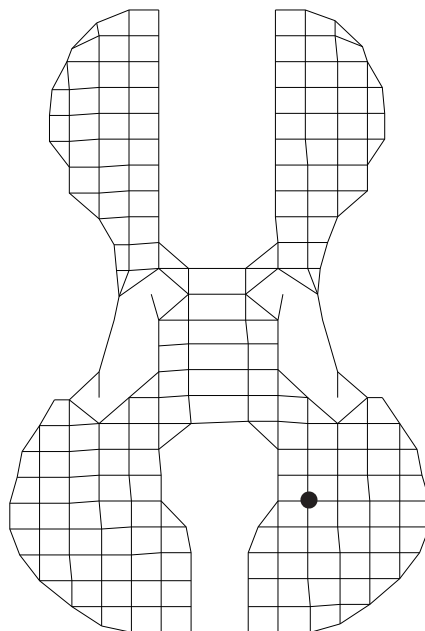


Rys. 5.13. Grubości, w milimetrach, płyty wierzchniej (lewa strona) i spodniej (prawa strona) replik skrzypiec „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), różniących się rodzajem zastosowanego lakieru

Źródło: Skrodzka i in. (2013).

użyciu oleju lnianego. Po wyschnięciu oleju instrumenty polakierowano. Instrument A pokryto lakierem spirytusowym, instrument B – lakierem olejnym. Lakier spirytusowy został przygotowany przez wykonawcę instrumentu i składał się z bezbarwnego 96% spirytusu, szelaku rubinowego, sandaraku, mastyksu, gummi elemi i benzoesu. Lakier olejny był lakierem gotowym, firmy JOHA® Oil Varnish, klasy IA. Lakier ten zawierał mieszaninę żywic naturalnych i syntetycznych rozpuszczonych w terpentynie, oleju lnianym, lawendowym i rozmarynowym. Aby uzyskać kolor, użyto gotowych barwników spirytusowych. Korzystano z następujących kolorów: złoto-żółty, bursztynowy, brązowy. Sykatywy nie stosowano. Do nakładania lakieru użyto pędzla z włosa borsuczego. Instrument A pokryto dwudziestoma warstwami lakieru spirytusowego, instrument B – dziesięcioma warstwami lakieru olejnego.

Analizę modalną, w wersji z ustalonym punktem pomiaru odpowiedzi układu, przeprowadzono z wykorzystaniem siatki pomiarowej o 230 punktach przedstawionej na rys. 5.14. Do wygenerowania impulsowego sygnału pobudzającego wykorzystano młotek uderowy PCB 085C05, a sygnał odpowiedzi (przyspieszenie) rejestrowano akcelerometrem Ono Sokki NP-2910 o masie 2 g, w kierunku prostym do płyty. Pomiar przeprowadzono w zakresie częstotliwości 0–3200 Hz. Rozdzielczość częstotliwościowa pomiaru wynosiła 4 Hz. Zastosowano dziesięć uśrednień w dziedzinie częstotliwości. Oba instrumenty poddane badaniom były nastrojone, a struny – nietłumione, podobnie jak w badaniach Bissingera (2008). Podczas pomiarów instrumentu skrzypce były umieszczone w objęmnym o dużej masie, umożliwiającej nieskrępowane drgania obu płyt.



Rys. 5.14. Siatka pomiarowa użyta w analizie modalnej skrzypiec pokrytych lakierem spirytusowym i olejnym. Czarną kropką zaznaczono punkt mocowania akcelerometru

Źródło: Skrodzka i in. (2013).

W celu subiektywnej oceny brzmienia instrumentów polakierowanych zdecydowano się na ich ocenę w warunkach naturalnych, tj. w jednej z sal Akademii Muzycznej w Poznaniu. W eksperymencie wzięło udział 13 słuchaczy-studentów lutnictwa, mających pewne doświadczenie w porównywaniu brzmienia skrzypiec.

Zadaniem słuchaczy było wypełnienie kwestionariusza po wysłuchaniu dźwięków zagranych na obu instrumentach. Formularz kwestionariusza przedstawiono na rys. 5.15. Słuchacze stawiali znak „+” dla instrumentu subiektywnie ocenionego w danym zadaniu jako lepszy i znak „-” dla instrumentu gorszego. W przypadku, gdy oba instrumenty były ocenione jednakowo, stawiano dwa znaki „+” (oba dobre) lub dwa znaki „-” (oba złe). Kwestionariusz był podobny do kwestionariuszy wykorzystywanych na konkursach lutniczych. Słuchacze nie byli poinformowani o rodzaju lakieru, którym były pokryte skrzypce A i B.

Ocena	Dźwięk	Skrzypce A	Skrzypce B
Brzmienie poszczególnych strun	Gama na strunie G		
	Gama na strunie D		
	Gama na strunie A		
	Gama na strunie E		
Wyrównanie dźwięku na wszystkich strunach oraz siła dźwięku	Gama przez 4 struny	Wyrównanie	Wyrównanie
		Siła	Siła
Podsumowanie: łączna ocena wyrównania głośności, nośności dźwięku oraz jego barwy	J.S. Bach, Largo z III sonaty C-dur, BWV 1005		
Ewentualne uwagi, uzasadnienie:			

Rys. 5.15. Kwestionariusz wykorzystany w ocenie subiektywnej jakości dźwięku badanych replik skrzypiec – replik skrzypiec „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), pokrytych lakierem spirytusowym i olejnym

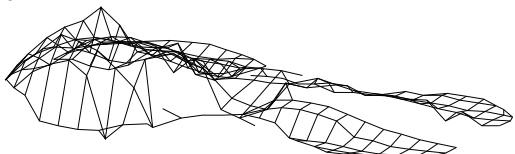
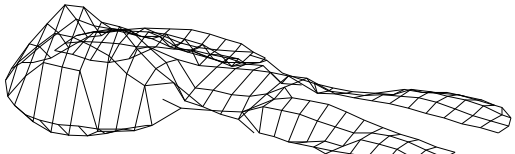
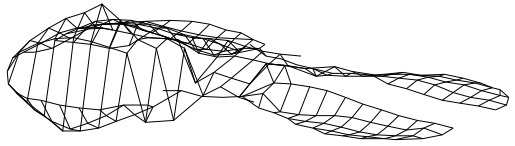
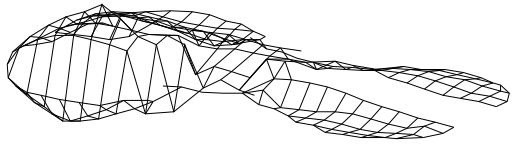
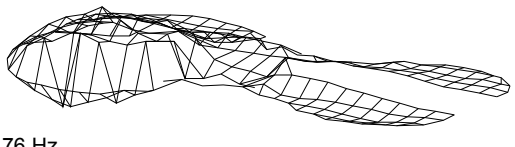
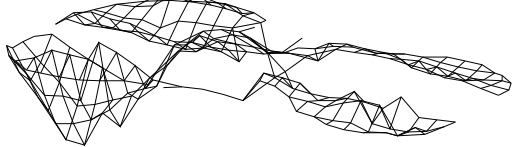
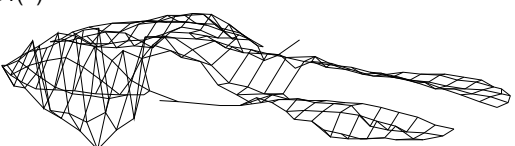
Źródło: Skrodzka i in. (2013).

5.7.3. Rezultaty

5.7.3.1. Analiza modalna

Rezultaty analizy modalnej skrzypiec A i B przed nałożeniem lakieru przedstawiono w tabeli 5.12. Rezultaty dla instrumentu A pokrytego lakierem spirytusowym oraz skrzypiec B pokrytych lakierem olejnym

Tabela 5.12. Mody sygnaturalne skrzypiec A i B, będących kopiami skrzypiec „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740), przed nałożeniem lakieru

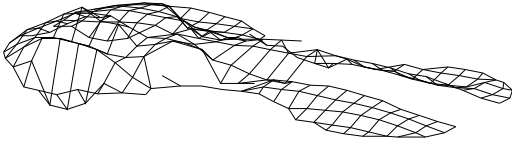
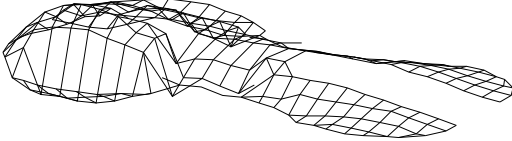
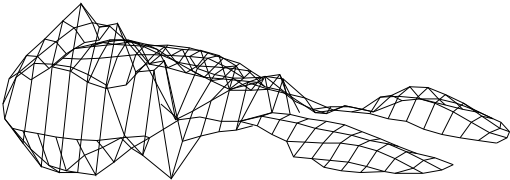
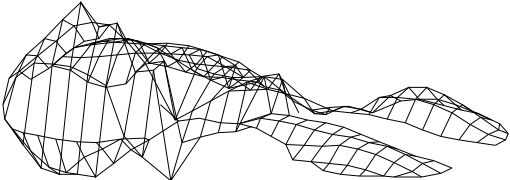
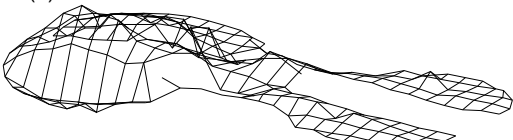
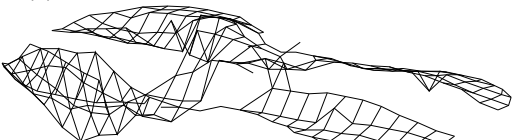
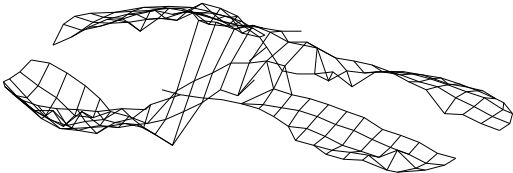
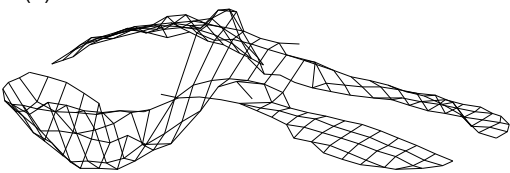
Skrzypce A (bez lakieru)	Skrzypce B (bez lakieru)
A0  281 Hz d=10.1%	A0  280 Hz d=9.0%
CBR  355 Hz d=14.0%	CBR  350 Hz d=13.2%
B1(-)  476 Hz d=9.6%	B1(-)  451 Hz d=7.1%
B1(+)  548 Hz d=8.1%	B1(+)  540 Hz d=5.0%

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2013).

zebrano w tabeli 5.13. W badanym zakresie częstotliwości wyznaczono kilkanaście modów drgań. Sekwencja, czyli kolejność występowania obwiedni modalnych była podobna do opisywanej we wcześniejszych pracach (Marshall, 1985; Bissinger, 1995, 2003a, 2008; Skrodzka i in.,

2009, 2013). Dyskusję modów ograniczono do trzech silnie promieniujących akustycznie modów płyty wierzchniej, tj. modów A0, B(1–) i B(1+) (Bissinger, 2008). Ponadto w tabelach 5.12 i 5.13 zamieszczono

Tabela 5.13. Mody sygnaturalne skrzypiec A, pokrytych lakierem spirytusowym oraz skrzypiec B pokrytych lakierem olejnym, będących kopiami instrumentu „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740)

Skrzypce A (lakier spirytusowy)	Skrzypce B (lakier olejny)
A0  277 Hz d=5.2%	A0  276 Hz d=6.4%
CBR  358 Hz d=12.5%	CBR  348 Hz d=12.3%
B1(–)  492 Hz d=4.6%	B1(–)  469 Hz d=7.2%
B1(+)  598 Hz d=4.1%	B1(+)  534 Hz d=5.1%

Źródło: wg Skrodzkiej i in. (2013).

mody CBR, które nie są modami silnie promieniującymi akustycznie, lecz mają znaczący wpływ na jakość dźwięku instrumentu.

Wyznaczone eksperymentalnie częstotliwości modów A0, B(1–) oraz B(1+) wpadają w pierwsze pasmo częstotliwości Dünwald (190–650 Hz) i są odpowiedzialne za „bogactwo” dźwięku (Dünwald, 1999). Rezonans Helmholtza („mod powietrzny”, mod objętości powietrza zawartej w korpusie) jest oznaczony jako A0. Mody B(1–) i B(1+) są „modami płyty”, czyli poprawniej – modami korpusu, powstającymi w wyniku zginania i ściskania płyty.

Mod B(1–) płyty wierzchniej ma dwie podłużne linie węzłowe położone prawie symetrycznie względem głównej osi symetrii instrumentu. W modzie B(1+) na płycie wierzchniej zaobserwowano dwie linie węzłowe przecinające w poprzek górne i dolne policzki.

Należy zauważyć, że dla niektórych modów z tabel 5.12 i 5.13 wartości procentu tłumienia krytycznego nieznacznie przekraczają kryterium 10%, a więc dla nich założenie o liniowości badanego układu nie jest ściśle spełnione (Skrodzka i in., 2009; Ewins, 1995). Obwiednie modalne, częstotliwości modalne i tłumienia modalne rozważanych modów, zarówno instrumentów bez lakieru, jak i polakierowanych, są podobne do opisywanych w literaturze (Marshall, 1985; Bissinger, 2003a, 2008; Schleske, 2002).

Porównując częstotliwości modalne instrumentów bez lakieru i biorąc pod uwagę rozdzielczość częstotliwościową analizy (4 Hz), jedyną istotną różnicę znaleziono dla modu B(1–), tabela 5.12. Zatem parametry modalne instrumentów „białych” były bardzo podobne.

Lakierowanie nie wpłynęło na kolejność pojawiania się obwiedni modalnych, lecz zmieniło niektóre częstotliwości modalne.

Systematycznego trendu zmian częstotliwości modalnych nie zaobserwowano. Częstotliwość modu A0 nie uległa zmianie w wyniku lakierowania (była taka sama przed pokryciem instrumentów lakierem i po nim). Częstotliwość modu B(1–) „białego” instrumentu A wynosiła 476 Hz, a instrumentu polakierowanego lakierem spirytusowym – 492 Hz.

Znaczący wzrost częstotliwości zaobserwowano również dla modu B(1+) skrzypiec A: od 548 Hz dla „białego” instrumentu, do 598 Hz dla instrumentu polakierowanego. W przypadku nielakierowanego instrumentu B, mod B(1–) miał częstotliwość 451 Hz; a dla skrzypiec polakierowanych lakierem olejnym – 469 Hz. Częstotliwość modu B(1+) instrumentu B przed lakierowaniem wynosiła 540 Hz, a po lakierowaniu – 534 Hz, więc zgodnie z dokładnością pomiarową (4 Hz) – nie uległa zmianie. Porównując częstotliwości modu (B1+) instrumen-

tu B polakierowanego olejno i instrumentu A pokrytego lakierem spirytusowym, zauważono, że dla instrumentu B częstotliwość ta była znacznie mniejsza (534 Hz) od częstotliwości tego modu dla instrumentu A (598 Hz).

5.7.3.2. Subiektywna ocena jakości dźwięku skrzypiec

Rezultaty subiektywnej oceny jakości dźwięku obu polakierowanych instrumentów przedstawiono w tabeli 5.14. Ocena poszczególnych strun była następująca:

- struna G – 9 osób wskazało instrument B, 2 osoby – instrument A, a 2 słuchaczy stwierdziło, że struna ta w obu instrumentach brzmi dobrze;
- struna D – 11 słuchaczy preferowało instrument B, 1 słuchacz – instrument A i 1 osoba uważała, że struna ta brzmi dobrze w obu instrumentach;
- struna A – 7 słuchaczy wskazało instrument A, 6 osób – instrument B;
- struna E – 11 słuchaczy wybrało instrument B, 1 osoba wskazała instrument A i 1 osoba oceniła tę strunę jako jednakowo dobrą w obu instrumentach.

W ocenie wyrównania dźwięku żaden instrument nie uzyskał znaczącej przewagi: sześć osób wybrało instrument B, pięciu słuchaczy wskazało instrument A, jedna osoba oceniła oba instrumenty jako jednakowo złe i jedna osoba – jako jednakowo dobre. W ocenie siły dźwięku lepiej wypadł instrument B (12 wskazań); tylko jeden słuchacz wskazał instrument A. Instrument B, pokryty lakierem olejnym całościowo oceniło jako lepszy dziesięć osób. Instrument A pokryty lakierem spirytusowym oceniły całościowo jako lepszy dwie osoby. Jedna osoba oceniła całościowo oba instrumenty jako dobre.

Lakierowanie nieznacznie wpłynęło na tłumienie modalne modów obu instrumentów, lecz raczej nie miało to wpływu na jakość brzmienia instrumentu, ponieważ kierunki zmiany tłumienia nie są istotnym czynnikiem determinującym jakość dźwięku (Bissinger, 2008).

Jakość dźwięku obu polakierowanych instrumentów była oceniana subiektywnie. Słuchacze wskazali pokryty lakierem olejnym instrument B jako „całościowo” lepszy od pokrytego lakierem spirytusowym instrumentu A. To subiektywne odczucie zostało potwierdzone obiektywnie wartością częstotliwości modu B(1+): dla instrumentu polakie-

Tabela 5.14. Rezultaty subiektywnej oceny jakości dźwięku skrzypiec A pokrytych lakierem spirytusowym i skrzypiec B pokrytych lakierem olejnym. Instrumenty były kopiami skrzypiec „Ysaÿe” Giuseppe Guarneriego del Gesù (1740)

Ocena	Skrzypce A lakier spirytusowy		Skrzypce B lakier olejny		Oba instru- menty dobre	Oba instru- menty złe
	dobre (+)	złe (–)	dobre (+)	złe (–)	(++)	(–)
Struna G	9	2	2	9	2	0
Struna D	1	11	11	1	1	0
Struna A	7	6	6	7	0	0
Struna E	1	11	11	1	1	0
Wyrównanie	5	6	6	5	1	1
Siła	1	12	12	1	0	0
Ocena łączna	2	10	10	2	1	0

Źródło: Skrodzka i in. (2013).

rowanego oleju wynosiła ona 543 Hz (tj. mniej od 550 Hz), a dla instrumentu pokrytego lakierem spirytusowym była znacznie większa (598 Hz). Częstotliwość modu B(1+) ma duży wpływ na dźwięk generowany przez skrzypce i nazywana jest mechanicznym „czujnikiem” jakości dźwięku. Według Schleskego (2002) częstotliwość ta funkcjonuje jak „barometr tonalny” jakości dźwięku skrzypiec. Gdy częstotliwość modu B(1+) jest mniejsza od 510 Hz, instrument jest „miękki”, stawia niewielki „opór” skrzypkowi, a jego dźwięk ma ciemną barwę (Bissinger, 2008; Schleske, 2002). Porównując więc jakość dźwięku obu polakierowanych instrumentów, skrzypce pokryte lakierem olejnym były oceniane jako lepsze zarówno subiektywnie, jak i obiektywnie (Skrodzka i in., 2013). Należy jeszcze dodać, że słynne skrzypce pochodzące z XVIII i XIX wieku były zazwyczaj pokrywane lakierem olejnym.

Istnieje kilka powodów, które nie pozwalają na wyciągnięcie jednoznacznego wniosku, że lakier olejny ma przewagę nad lakierem spirytusowym, gdy rozpatruje się jego wpływ na jakość dźwięku instrumentu. Po pierwsze, przebadano jedynie dwa instrumenty. Ta liczba nie upoważnia do żadnych analiz statystycznych. Po drugie, skrzypce B, subiektywnie ocenione jako „lepsze” z pary ocenianych instrumentów, najprawdopodobniej nie są akustycznie „doskonałe”, ponieważ w eksperymencie subiektywnym nie pokonały instrumentu A we wszystkich kategoriach. Dlatego lepszy rezultat osiągnięty

w eksperymencie subiektywnym przez pokryty lakierem olejnym instrument B można wytłumaczyć mniejszą częstotliwością „barometru tonalnego”, czyli modu B(1+). Po trzecie, eksperymenty przeprowadzono tuż po utwardzeniu lakieru. Schnięcie i starzenie się lakieru w znaczący sposób zmienia jego skład i może wpływać zarówno na wygląd instrumentu, jak i na jego brzmienie.

Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzono, że:

- a) dla instrumentów niepokrytych lakierem jedyną różnicę w częstotliwościach modalnych stwierdzono dla modu B(1–);
- b) lakierowanie nie zmienia częstotliwościowej kolejności występowania obwiedni modalnych;
- c) pokrycie lakierem olejnym nie wpłynęło na częstotliwości modów A0 i B(1+) z dokładnością do 4 Hz rozdzielczości częstotliwościowej pomiarów;
- d) częstotliwość „barometru tonalnego” [modu B(1+)] była mniejsza dla instrumentu pokrytego lakierem olejnym. Wartość tej częstotliwości modalnej sugeruje, że jakość dźwięku instrumentu B pokrytego lakierem olejnym może przewyższać jakość dźwięku instrumentu A pokrytego lakierem spirytusowym;
- e) badane instrumenty nie były instrumentami „doskonałymi”. Nie można zatem kategorycznie stwierdzić, że lakier olejny „lepiej” czy też, że lakier spirytusowy „gorzej” wpływa na jakość dźwięku. Jednak z pary zbadanych instrumentów jakość dźwięku skrzypiec pokrytych lakierem olejnym została oceniona subiektywnie jako lepsza od jakości dźwięku instrumentu pokrytego lakierem spirytusowym.

5.8. Analiza modalna podstawka skrzypcowego

5.8.1. Rola podstawka skrzypcowego i eksperyment modalny

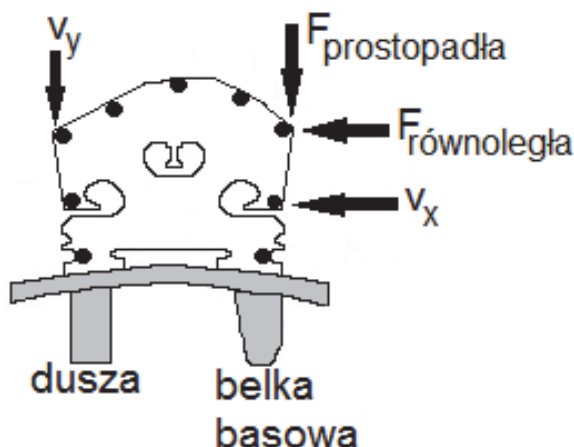
Podstawek skrzypcowy jest rzeźbioną płytką z drewna platanowego, jaworowego lub klonowego o asymetrycznym kształcie (Harajda i Łapa, 2002b) i masie ok. 2–3 gramów (Bissinger, 2006). Podstawową funkcją podstawka jest przekazanie drgań strun na płytę wierzchnią (Jansson, 2004). Ten „element przekaźnikowy” jest delikatny i wymaga konserwacji lub wymiany (podobnie jak dusza), jeśli instrument ma być utrzymany w dobrej kondycji dźwiękowej (Woodhouse, 2005).

Podstawek musi być dostatecznie sztywny, by wytrzymać nacisk strun i jednocześnie lekki, żeby drgające struny mogły wprowadzić go w ruch drgający (Waldham, 2009). Z praktyki lutniczej oraz badań teoretycznych i eksperymentalnych wiadomo, że materiał, z którego jest wykonany podstawek, jego kształt i wymiary oraz umiejscowienie na płycie wierzchniej mają wielki wpływ na jakość dźwięku instrumentu (Harajda i Łapa, 2002b; Jansson, 2004; Woodhouse, 2005; Durup i Jansson, 2005).

Pierwsze badania podstawka skrzypcowego przeprowadzili Minnaert i Vlam (1937), a podstawka wiolonczelowego – Bladier (1961, 1964). Reinicke i Cremer (1970) zastosowali technikę interferometrii holograficznej do wizualizacji drgań podstawka umocowanego na sztywnym podłożu. Wykazali, że podstawek kołysze się w swojej płaszczyźnie, „tupiąc” raz jedną, raz drugą stopą w płytę wierzchnią.

Kompleksową analizę modalną drgań podstawka przeprowadził Bissinger (2006), obalając mit tzw. wzgórza podstawkowego (ang. *bridge hill*), czyli szerokiego maksimum funkcji transmitancji podstawka, obserwowanego w zakresie 2–3 kHz (Jansson, 2004; Durup i Jansson, 2005). Przykład struktury widmowej, o której mowa, można zobaczyć na rys. 5.7 w zakresie 2–2.5 kHz. Do testu modalnego Bissinger (2006) wybrał dwanaście skrzypiec. Troje z nich było instrumentami ocenionymi subiektywnie jako bardzo dobre, pozostałe były średniej klasy. Analizę modalną, w wersji z ustalonym punktem pobudzenia, przeprowadzono, pobudzając skrzypce do drgań impulsowo, w górnym narożniku podstawka, nad którym przebiegały struny basowe, w kierunkach (w przybliżeniu) równoległym i prostopadłym do powierzchni płyty wierzchniej. Udarowe pobudzanie podstawka skrzypcowego w jego górnym narożniku dobrze naśladuje pobudzanie go przez smyczek i struny (Zhang i Woodhouse, 2014). Prędkościowy sygnał odpowiedzi mierzono wibrometrem laserowym w dziewięciu punktach na krawędzi podstawka. Sygnał ten mierzono w dwóch kierunkach, jak pokazano na rys. 5.16. Ponadto drgania stóp podstawka wyznaczono z pomiarów drgań płyty w kierunku prostopadłym do jej płaszczyzny, w punktach położonych blisko stóp.

Instrumenty były zawieszone na sprężystych gumach podtrzymujących je za łuki talii. Utrzymanie szyjki w pozycji pionowej zapewniały odpowiednio przyłożone kawałki elastycznego materiału, które nie powodowały jej podparcia. Instrumenty były nastrojone, a strun nie tłumiono.



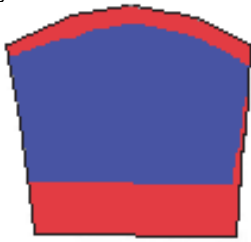
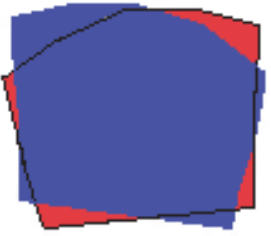
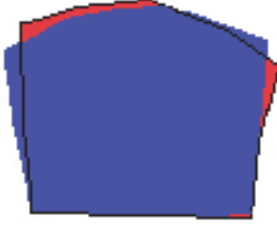
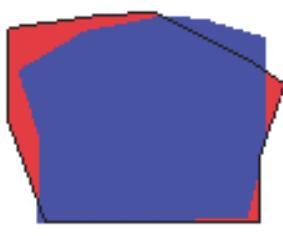
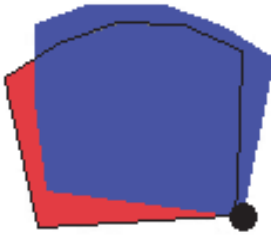
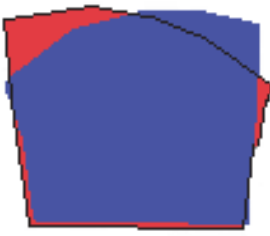
Rys. 5.16. Punkty pomiarowe (na krawędzi podstawka) w teście modalnym podstawka. Zaznaczono również miejsce i kierunek przyłożenia impulsu pobudzającego oraz kierunki pomiaru sygnału odpowiedzi (prędkości)

Źródło: wg Bissingera (2006).

5.8.2. Rezultaty

Wyniki eksperymentalnej analizy modalnej podstawka przykładowych skrzypiec przedstawiono w tabeli 5.15. W tabeli tej czarnymi punktami zaznaczono oś obrotu podstawka względem stopy nad duszą lub stopy nad belką basową. W lewym górnym rogu tabeli 5.15 podano oznaczenie modu skrzypiec. Rezultaty uzyskane dla dwunastu przebadanych instrumentów były porównywalne. W zakresie częstotliwości mniejszych od 700 Hz podstawek poruszał się zgodnie z ruchem płyty, czyli tak jak ciało sztywne, niewiele zmieniając kształt. W niektórych przypadkach wykonywał on ruch obrotowy wokół jednej lub drugiej stopy. Wyjątkiem jest tu ruch podstawka w modzie CBR korpusu, w którym obie stopy były aktywne, co jest odzwierciedleniem deformacji płyty wierzchniej w tym modzie. W częstotliwościach mniejszych od 600 Hz dominował ruch stopy, nad którą znajdują się struny basowe, w częstotliwościach większych od 600 Hz – stopy, nad którą znajdują się struny sopranowe, umiejscowionej nad duszą. W częstotliwościach większych od 1000 Hz stopy wykazywały niewielkie drgania. Powyżej 700 Hz zaobserwowano głównie mody giętnie samego podstawka, tj. takie, w których modom podstawka nie towarzyszą dominujące drgania instrumentu. Są to rezultaty zbieżne z opisem Marshalla (1985), podrozdział 5.2.1. Opisane drgania pod-

Tabela 5.15. Mody drgań podstawka skrzypcowego. Położenie duszy i belki basowej jak na rys. 5.16. Opis w tekście

Mody ciała sztywnego	Mody podstawka
A0  0.28 kHz	skaczący  0.71 kHz
CBR  0.49 kHz	 1.3 kHz
B(1+)  0.55 kHz	BH  2.4 kHz
 0.63 kHz	 3.4 kHz

Źródło: wg Bissingera (2006).

stawka nie zachodzą niezależnie od drgań płyty i strun. Istnieją dwa argumenty popierające powyższe stwierdzenie. Po pierwsze, w funkcji transmitancji podstawka, aż do częstotliwości 4000 Hz, nie znaleziono maksimów częstotliwościowych, które nie pokrywałyby się z maksimami modów korpusu lub strun.

Po drugie, masa podstawka jest znacznie mniejsza od masy korpusu i porównywalna z masą wszystkich strun – zatem podstawek nie może drgać zupełnie niezależnie od korpusu. Interesującym modem podstawka jest mod „skaczący”, występujący w częstotliwości nieco powyżej 700 Hz. Mod ten zaobserwowano dla dziewięciu z dwunastu badanych instrumentów. W modzie tym struny i płyta wierzchnia ograniczają ruch podstawka. Podstawek wychyla się poza swoją płaszczyznę, odmiennie od modu „kołyszącego” ($f_{\text{rock}} = 3.4$ kHz), w którym zginanie jest obserwowane w płaszczyźnie podstawka. Mod „kołyszący” jest obecnie uznawany za najbardziej charakterystyczny mod podstawka.

Mod oznaczony w tabeli 5.15 jako BH (ang. *bridge hill*) zaobserwowano w częstotliwości $f_{\text{BH}} = 2.4$ kHz. Obecnie wiadomo, że mod ten zależy silnie od lokalnych właściwości materiałowych obszaru płyty wierzchniej, na której spoczywają stopy podstawka i z samym podstawkiem ma niewiele wspólnego (Beldie, 2003). Mimo że natura modu BH została wyjaśniona, jego nazwa nadal utrzymuje się w literaturze. Mod BH jest dowodem na wpływ drgań płyty na drgania podstawka. Co więcej, często jest on modem dominującym (o dużej amplitudzie) funkcji transmitancji podstawka w paśmie 2–3 kHz dla skrzypiec o **złych** właściwościach brzmieniowych, co przeczy spekulacjom na temat jego istotnego wkładu w jakość dźwięku skrzypiec uznawanych za bardzo dobre. W teście modalnym podstawek pobudzano impulsowo równolegle i prostopadle do płyty. Pobudzenie prostopadle skutkowało silniejszym jego pobudzeniem do drgań.

Bissinger (2006) zbadał również wpływ szerokości talii podstawka, czyli odległości między jego wycięciami bocznymi, na częstotliwość modu „kołyszącego” f_{rock} . Zmniejszanie szerokości talii podstawka, czyli jego trzymowanie, powodowało zmniejszanie tej częstotliwości. Badaniom poddano cztery podstawki skrzypcowe, wszystkie o wyjściowej $f_{\text{rock}} = 3.6$ kHz. Podstawki te różniły się masą, która wynosiła m , $0.96m$, $0.92m$ i $0.88m$. Następnie stopniowo zmniejszano szerokość talii podstawka, tak aby f_{rock} wynosiła kolejno 3.4 kHz, 3.2 kHz, 3.0 kHz i 2.8 kHz. Zmiany szerokości talii podstawka wiązały się ze

zmianą jego masy w zakresie 0.014 g–0.068 g, czyli średnio 0.043 g i szerokości talii od 16.3–17.8 mm do 11.8–13.1 mm. Bissinger podał ogólne, przybliżone stosunki, które mogą być wskazówką dla lutników przy strojeniu częstotliwości modu „kołyszącego” podstawka:

$$\frac{\Delta f_{\text{rock}}}{\Delta m} \approx 24 \pm 14 \text{ kHz/g}, \quad (5.1)$$

gdzie Δf_{rock} – zmiana częstotliwości modu „kołyszącego” podstawka, Δm – zmiana masy podstawka wynikająca z trymowania talii,

$$\frac{\Delta f_{\text{rock}}}{\Delta x} \approx 180 \text{ Hz/mm}, \quad (5.2)$$

gdzie Δx – zmiany szerokości talii podstawka,

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \approx 0.009 \text{ g/mm}. \quad (5.3)$$

Wpływ zmiany masy podstawka spowodowanej odjęciem materiału w jego górnej części, nazywanej niekiedy „skrzydełkami”, na f_{rock} był niewielki, $\Delta f_{\text{rock}} / \Delta x \approx 0.75 \text{ kHz/mm}$.

Częstotliwość modu BH okazała się mało wrażliwa na zmiany szerokości talii podstawka, co potwierdza jego pochodzenie od drgań płyty wierzchniej, a nie od samego podstawka.

5.9. Analiza modalna oktetu wiolinowego

5.9.1. Budowa oktetu wiolinowego oraz eksperyment modalny

Oktet wiolinowy, nazywany również od nazwisk jego twórców oktetem Hutchins-Schellenga, to zestaw ośmiu instrumentów smyczkowych o charakterystykach dźwiękowych zbliżonych do skrzypiec, z których najmniejszy, czyli tzw. skrzypce dyszkantowe, jest nastrojony oktawę wyżej od skrzypiec, a największy, tj. duży bas – dwie i pół oktawy niżej niż skrzypce. Poczynając od najmniejszego instrumentu, każdy kolejny jest nastrojony pół oktawy niżej od poprzedniego, tak że cały oktet pokrywa zakres trzech i pół oktawy (Hutchins, 1992; Rossing, 2010). W oryginalnej pracy Hutchins (1992) instrumenty nazwane są w kolejności od najmniejszego do największego: *treble violin*, *soprano violin*, *mezzo violin*, *alto violin*, *tenor violin*, *baritone violin*, *small*

bass violin oraz *large bass violin* lub *contrabass violin*. W tym podrodziale trzy najmniejsze instrumenty nazywane będą odpowiednio skrzypcami dyszkantowymi, skrzypcami sopranowymi i skrzypcami mezzo. Korpus tych ostatnich jest nieco dłuższy od klasycznych skrzypiec, lecz nastrojone są tak samo. Skrzypce altowe, czyli *altówka*, są również nieco większe od klasycznej altówki i można na nich grać tak jak na skrzypcach lub po zamocowaniu nóżki – tak jak na wiolonczeli, czyli w pozycji siedzącej. *Tenor violin*, czyli wiolonczela tenorowa ma długość korpusu o połowę mniejszą od klasycznej wiolonczeli, niższe boczki i dłuższą szyjkę. *Baritone violin* jest konwencjonalną wiolonczelą, dla zachowania spójności nazywana będzie wiolonczelą barytonową. *Small bass violin*, czyli mały bas, ma wymiary nieco mniejsze od klasycznego kontrabasu i można na nim grać w pozycji siedzącej lub stojącej. *Contrabass violin*, czyli duży bas, ma wymiary większe od konwencjonalnego kontrabasu. Oktet wiolinowy zbudowano w latach sześćdziesiątych XX w. Sama koncepcja jest jednak znacznie starsza, ponieważ zestaw podobnych (sześciu) instrumentów istniał ok. 1500 r. (Hutchins, 1992; Praetorius, 1619; Bessaraboff, 1941).

Instrumentem bazowym, na którym oparto oktet wiolinowy, były skrzypce – instrument uznawany za najdoskonalszy w rodzinie instrumentów skrzypcowych. Zauważono, że częstotliwość modu powietrznego A0 skrzypiec jest zbliżona do częstotliwości, na którą nastrojona jest struna G, a średnia częstotliwość modów korpusu B(1–) oraz B(1+) (czyli częstotliwość B1) – do częstotliwości, na którą nastrojona jest struna A, zaś same skrzypce strojone są w interwałach kwintowych. Podstawowym zadaniem twórców oktetu było znalezienie takich wymiarów pozostałych instrumentów, dla których częstotliwości modów A0 oraz B1 i częstotliwości, na które nastrojone są dwie środkowe struny tych instrumentów, są podobne. Zdecydowano się zatem na *skalowanie akustyczne*, odrzucając skalowanie względem wymiarów czy masy. Autorzy oktetu przyjęli, że mod A0 ma mieć częstotliwość 1.5 raza większą od częstotliwości strojenia najniższej struny f_0 , a mod B1 – częstotliwość 2.25 raza większą od f_0 i ... zaniedbali inne mody z powodu braku w latach sześćdziesiątych informacji na temat ich wpływu na dźwięk generowany przez skrzypce. Ten brak informacji w początkowym okresie tworzenia oktetu był źródłem kilku błędów skalowania (Hutchins, 1967), które sukcesywnie, w miarę pojawiania się nowych doniesień dotyczących natury i istoty modów drgań skrzypiec oraz ich wzajemnych relacji, były korygowane (Hut-

chins, 1992). Dziś wiadomo, że mody A0 oraz B1 są źródłem silnego, **bezpośredniego** promieniowania akustycznego skrzypiec (odpowiednio w wyniku przepływu powietrza zawartego w korpusie przez efy oraz w wyniku ruchu obu płyt), a źródłem promieniowania **pośredniego** są drgania płyt spowodowane modem powietrznym A1 oraz przepływ powietrza przez efy wywołany modami korpusu (Ros-sing, 2010; Bissinger, 1998; Bissinger i in., 2007).

Przed przystąpieniem do skalowania wymiarów i częstotliwości modów sygnaturalnych oktetu określono częstotliwości, na które mają być nastrojone instrumenty, rys. 5.17. Skalowanie było procesem długotrwałym. Popelniano w nim błędy, które dla czterech największych instrumentów zauważono w odsłuchu subiektywnym i następnie skorygowano. Finalnie, skalując oktet, kierowano się trzema założeniami, które musiały być spełnione równocześnie:

- założenie podobieństwa. Oznaczało, że stosunek szerokości policzków dolnych, policzków górnych, szerokości talii oraz wysokości boczków do długości korpusu powinien być taki jak w instrumencie wyjściowym, tj. skrzypcach. Takie, pierwsze, podejście spowodowało, że dwa skrajne instrumenty oktetu nie nadawały się do grania – skrzypce dyszkantowe były zbyt małe (korpus miał długość ok. 17 cm), a duży bas, o długości korpusu bez nóżki wynoszącej ok. 210 cm, zbyt duży;
- założenie „ergonomiczności” rozmiarów. Instrumenty musiały mieć takie wymiary, aby gra na nich była możliwa. Skrzypce dyszkantowe powiększono, a duży bas zmniejszono, manipulując długością korpusu, wysokością sklepienia, wymiarami efów, wysokością boczków oraz umiejscowieniem podstawka. Wymiary innych instrumentów również uległy zmianie;
- umiejscowienie częstotliwości modów A0 i B1 w skali częstotliwości, tak aby $f(A0) = 1.5 f_0$ i $f(B1) = 2.25 f_0$ (f_0 – częstotliwość, na którą nastrojona jest najniższa struna instrumentu). Zostało ono w przybliżeniu spełnione po ukazaniu się pracy Shawa (1990). Był to przełom w odniesieniu do skalowania akustycznego oktetu, ponieważ opierając się na analogii elektro-akustycznej układu o kształcie skrzypiec o sztywnych ściankach:
 - wykazano silne sprzężenie modów A0 oraz A1, co oznaczało, że nie można pomijać modu A1 przy skalowaniu akustycznym, jak pierwotnie czynili twórcy oktetu;
 - wykazano nieadekwatność wzoru Raileigha na częstotliwość rezonatora Helmholtza o sztywnych ściankach [$f(A0) \sim V^{-0.5}$,

gdzie, V – objętość powietrza zawartego w korpusie], w stosunku do instrumentów skrzypcowych, stosowanego pierwotnie przez twórców oktetu do wyznaczania częstotliwości modu A0 instrumentów zestawu;

- podano sposób wyznaczania częstotliwości modów A0 oraz A1 dla instrumentów oktetu na podstawie analogii elektro-akustycznej.

Opis szczegółów modelu Shawa wykracza poza ramy tej książki. Można je znaleźć w oryginalnej pracy (Shaw, 1990).

Bissinger (1996, 1998, 2003c) uzupełnił, rozbudował i skorygował model Shawa (1990) i zaproponował następujące zależności:

- zależność częstotliwości modu A0 od objętości powietrza w korpusie w postaci $f(A0) \sim V^{-0.3}$, uwzględniając podatność ścian instrumentu. Wynika z niej m.in., że zarówno zwiększanie wysokości sklepienia, jak i wysokości boczaków prowadzi do zmniejszenia tej częstotliwości;
- półempiryczny wzór na częstotliwość modu A(1):

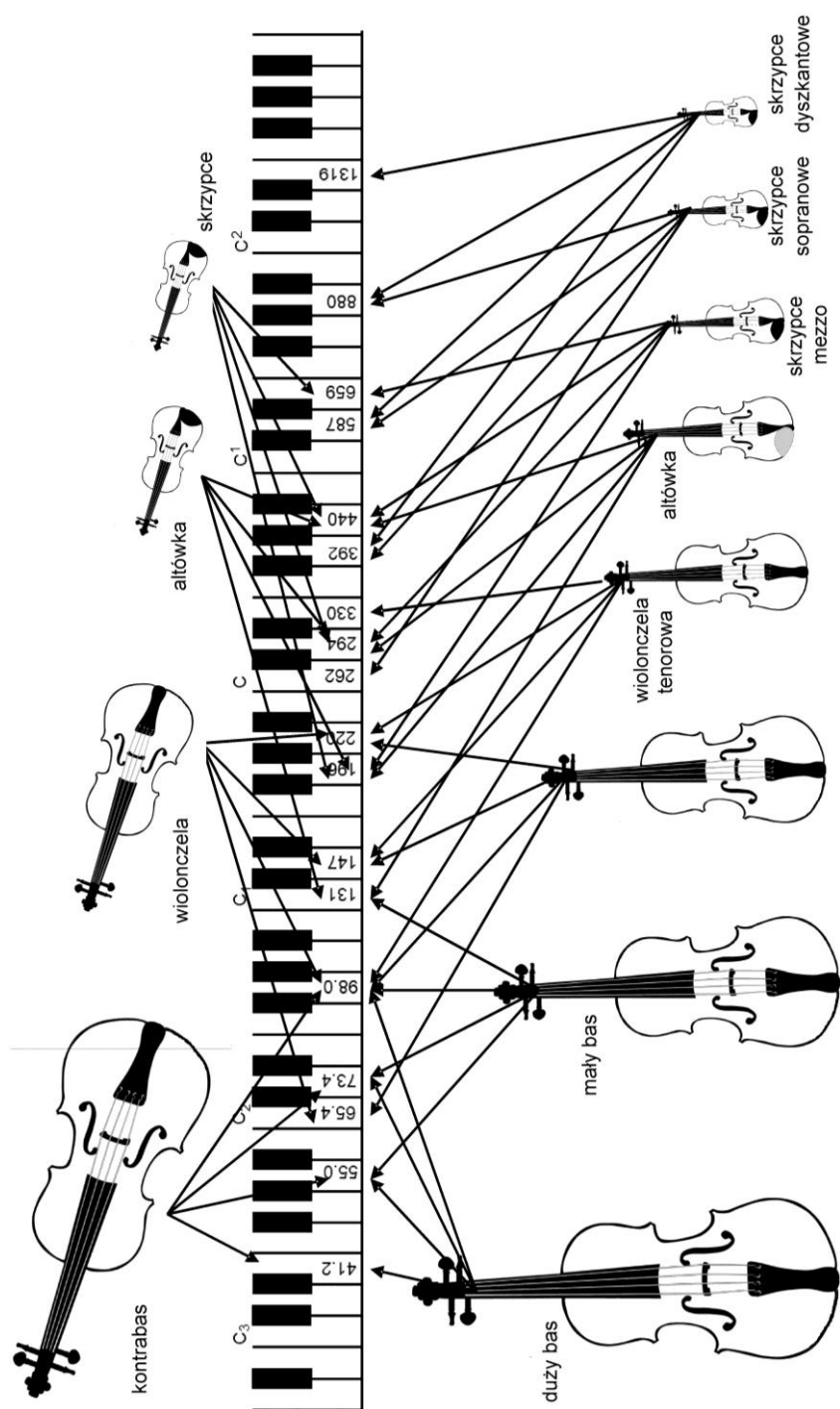
$$f(A1) = \frac{c}{2.1L + 0.985H_R - 2.830H_A}, \quad (5.4)$$

gdzie c – prędkość dźwięku 34 300 cm/s, H_R – wewnętrzna wysokość boczaków, H_A – wewnętrzna wysokość sklepienia, L – wewnętrzna długość korpusu instrumentu. Ze wzoru (5.4) wynika, że zwiększanie wysokości boczaków zmniejsza częstotliwość $f(A1)$, a zwiększanie wysokości sklepienia zwiększa ją. Wartości obliczone z wyrażenia (5.4) nie różnią się więcej niż 10% od wyznaczonych doświadczalnie;

- półempiryczne wyrażenia na częstotliwość modów A2 i A4. Mody te są rzadko obserwowane w skrzypcach, ale wyraźnie manifestują się dla czterech największych instrumentów oktetu. Są one modami powietrza zawartego odpowiednio w dolnej i górnej części instrumentu, czyli w dolnych i górnych policzkach. Powietrze przemieszcza się w policzkach w poprzek, prostopadle do podłużnej osi instrumentu. Do wyznaczania częstotliwości tych modów zaproponowano następujące wyrażenia:

$$f(A2) = \frac{1.68c}{V^{0.16}W_{lb}}, \quad (5.5)$$

$$f(A4) = \frac{1.68c}{V^{0.16}W_{ub}}, \quad (5.6)$$



Rys. 5.17. Częstotliwości, na które nastrojone są instrumenty oktetu wiolinowego (dolny wiersz) oraz dla porównania częstotliwości, na które nastrojone są klasyczne instrumenty smyczkowe (górny wiersz)
Źródło: wg Hutchins (1992).

Tabela 5.16. Liniowe wymiary wewnętrzne oktetu wiolinowego w cm, pole powierzchni efów w cm² oraz objętość powietrza zawarta w korpusie w cm³

Instrument	Długość korpusu	Długość strun	Całkowita długość	Szerokość policzków dolnych	Szerokość policzków górnych	Wysokość boczaków	Szerokość w tali	Uśredniona wysokość sklepienia	Grubość płyty w efach	Pole powierzchni efów	Objętość powietrza w korpusie
Skrzypce dyszkantowe	28.6	26.0	48	15.7 (0.55)*	12.4 (0.43)*	1.9 (0.066)*	8.0 (0.28)*	0.93 (0.033)*	0.5 (0.017)*	14.6	800
Skrzypce sopranowe	30.9	29.7	53–54	19.3 (0.62)*	14.8 (0.48)*	1.9 (0.061)*	9.6 (0.31)*	1.00 (0.032)*	0.4 (0.013)*	12.4	1060
Skrzypce mezzo	37.8	32.4	61–62	22.4 (0.59)*	17.0 (0.45)*	2.2 (0.058)*	11.2 (0.30)*	1.23 (0.033)*	0.35 (0.008)*	13.4	1760
Altówka	49.7	42.6	81–82	30.0 (0.60)*	23.5 (0.47)*	3.9 (0.078)*	15.5 (0.31)*	1.80 (0.036)*	0.4 (0.008)*	27.2	5 410
Wiolonczela tenorowa	64.3	59.8	105.2	38.4 (0.60)*	30.1 (0.47)*	5.5 (0.086)*	19.9 (0.31)*	1.93 (0.030)*	0.5 (0.008)*	31.0	12 120
Wiolonczela barytonowa	85.3	71.1	140.2	52.2 (0.61)*	40.0 (0.47)*	7.7 (0.090)*	26.5 (0.31)*	2.23 (0.026)*	0.85 (0.01)*	63.0	29 450
Mały bas	104.0	91.8	170.7	62.2 (0.60)*	48.0 (0.46)*	9.8 (0.094)*	31.0 (0.30)*	2.83 (0.027)*	0.8 (0.008)*	72.0	54 240
Duży bas	128.0	108.3	210–211	78.2 (0.61)*	60.8 (0.47)*	12.0 (0.094)*	38.6 (0.30)*	3.45 (0.027)*	0.9 (0.007)*	112.4	103 300

* wgłędem długości korpusu instrumentu.

Źródło: na podstawie Hutchins (1992); Bissinger (2003c); Rossinga (2010) oraz Fletcher i Rossinga (2010).

gdzie W_{lb} i W_{ub} to szerokości policzków dolnych i górnych, wyrażone w centymetrach, c – prędkość dźwięku wyrażona w cm/s. Wartości obliczone z wyrażeń (5.5–5.6) nie różnią się więcej niż 20% od wyznaczonych doświadczalnie.

W wyniku prac Bissingera (1996, 1998, 2003c) wyznaczono finalne wymiary instrumentów oktetu wiolinowego, przedstawione w tabeli 5.16. Tabela ta zawiera liniowe wymiary wewnętrzne wyrażone w centymetrach, a także objętość powietrza zawartą w korpusie w cm^3 oraz pole powierzchni efów w cm^2 . Dla porównania w tabeli 5.17 zawarto niektóre wymiary zewnętrzne klasycznych skrzypiec, altówki,

Tabela 5.17. Orientacyjne zewnętrzne wymiary liniowe standardowych instrumentów smyczkowych w cm oraz objętość powietrza zawarta w korpusie w cm^3

Instrument	Długość korpusu	Długość strun	Całkowita długość	Szerokość policzków dolnych	Szerokość policzków górnych	Wysokość boczkw	Uśredniona wysokość sklepienia	Objętość powietrza w korpusie
Skrzypce	35.5	32.7	59–60	21.3 (0.60)*	16.0 (0.45)*	3.0 (0.080)*	1.3 (0.33)*	1825
Altówka	43.0	37.5	70–71	25 (0.57)*	18.5 (0.44)*	3.4 (0.8)*	1.5 (0.35)*	3360
Wiolonczela	75.5	68.5	124	43.0 (0.57)*	34 (0.45)*	12 (0.16)*	2.5 (0.33)*	31 000
Kontrabas	109–122	104–117	178–198	Brak standardu	Brak standardu	Brak standardu	Brak standardu	Brak standardu

* względem długości korpusu instrumentu.

Źródło: na podstawie Rossinga (2010) oraz Fletchera i Rossinga (2010).

wiolonczeli i kontrabas. Należy zauważyć, że wysokości boczkw czterech największych instrumentów, tj. obu wiolonczel i obu basów zawarte w tabeli 5.16 są znacznie mniejsze niż wynikałoby to z ich prostego skalowania w proporcji do wysokości boczkw skrzypiec. Długości korpusów trzech najmniejszych instrumentów są natomiast nieco większe niż wynikałoby to ze skalowania proporcji. Jest to skutek zastosowania opisanych powyżej rezultatów prac Bissingera (1996, 1998, 2003c) i Shawa (1990). Również z tego powodu klasyczne skrzypce zastąpiono w oktecie nieco dłuższymi skrzypcami mezzo.

Eksperymentalną analizę modalną pełnego, poprawnie wyskalowanego oktetu wiolinowego o wymiarach podanych w tabeli 5.16 przeprowadził Bissinger (2003a). Instrumenty pobudzano automatycznym młotkiem uderowym uderzającym w narożnik podstawka po

stronie najniższej struny, równoległe do płyty wierzchniej. Prędkościowy sygnał odpowiedzi mierzono wibrometrem laserowym działającym na podstawie zjawiska Dopplera. Na każdym z instrumentów wybrano ponad 500 punktów pomiarowych umiejscowionych na obu płytach, bocznych, podstawku, strunociągu i szyjce.

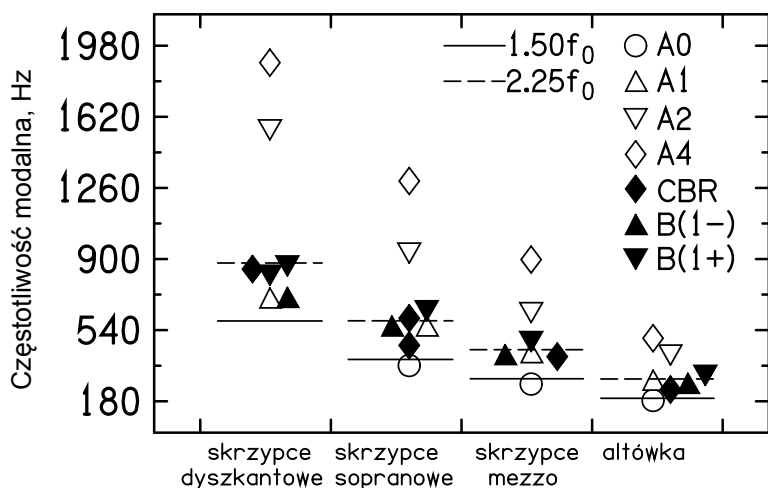
Dla trzech najmniejszych instrumentów pomiary przeprowadzono w zakresie 0–4000 Hz z rozdzielczością częstotliwościową 1.25 Hz, a dla pięciu pozostałych w zakresie 0–2000 Hz z rozdzielczością 0.625 Hz. Obszary instrumentów o dużych krzywiznach, dla których występowały trudności z pomiarem sygnału odpowiedzi z powodu „ślizgania się” promienia laserowego, pokryto talkiem. Instrumenty do testu modalnego były zamocowane pionowo, szyjką w dół, na elastycznych gumach podtrzymujących je za łuki talii. Utrzymanie szyjki w pozycji pionowej zapewniały odpowiednio przyłożone kawałki elastycznego materiału, które nie powodowały jej podparcia. Instrumenty były nastrojone, a strun nie tłumiono.

5.9.2. Rezultaty

Na rysunku 5.18 i 5.19 przedstawiono wyznaczone eksperymentalnie częstotliwości modów A0, A1, A2, A4 objętości powietrza zawartej w korpusie oraz modów korpusu CBR, B(1–) oraz B(1+) instrumentów oktetu. Na rysunkach tych zaznaczono również częstotliwości, do których dostrajano mod A0 oraz B1, czyli odpowiednio $1.5f_0$ oraz $2.25f_0$, gdzie f_0 oznacza częstotliwość, na którą nastrojona jest najniższa struna instrumentu.

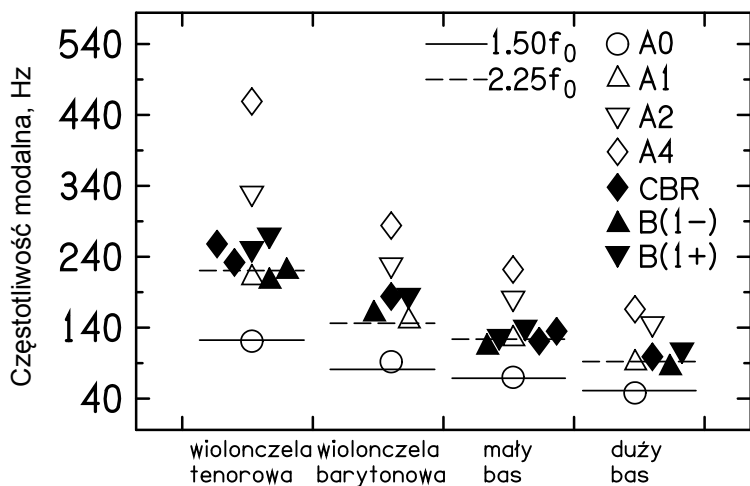
Dodatkowo częstotliwości modów „powietrznych” A0 i A1 wyznaczono, aktywując je szumem białym lub różowym doprowadzanym naprzemiennie do objętości górnych i dolnych policzków za pomocą cienkich falowodów. Relacje fazowe między ciśnieniem w tych obszarach badano, doprowadzając do nich sygnał sinusoidalnych o częstotliwościach modów A0 oraz A1.

Zmiany częstotliwości i fazy ciśnienia powietrza obserwowano jednocześnie dwoma małymi mikrofonami wprowadzonymi przez otwory efowe do górnych i dolnych policzków instrumentów. Pomiary przeprowadzono w zakresie 0–2000 Hz z rozdzielczością 2.5 Hz, stosując 50 uśrednień widm uzyskanych z każdego obszaru (Bissinger, 1998; 2003c). Dla niektórych instrumentów oktetu znaleziono kilkuprocentową różnicę częstotliwości modu A1 w górnych i dolnych policzkach.



Rys. 5.18. Wyznaczone eksperymentalnie częstotliwości modów objętości powietrza zawartych w korpusie A0, A1, A2, A4 oraz modów korpusu CBR, B(1-), B(1+) skrzypiec dyszkantowych, sopranowych i mezo oraz altówki oktetu wiolinowego o wymiarach podanych w tabeli 5.16. Na rysunku zaznaczono częstotliwości, do których dostrajano akustycznie mody A0 oraz B1 (odpowiednio $1.5f_0$ oraz $2.25f_0$, gdzie f_0 – częstotliwość strojenia najniższej struny instrumentu)

Źródło: wg Bissingera (2003a, 2003c).



Rys. 5.19. Wyznaczone eksperymentalnie częstotliwości modów objętości powietrza zawartych w korpusie A0, A1, A2, A4 oraz modów korpusu CBR, B(1-), B(1+) wiolonczeli tenorowej, barytonowej oraz małego i dużego basu oktetu wiolinowego o wymiarach podanych w tabeli 5.16. Oznaczenia jak na rys. 5.18

Źródło: wg Bissingera (2003a, 2003c).

Tabela 5.18. Częstotliwości modów sygnaturalnych objętości powietrza zawartej w korpusie instrumentów oktetu wiolinowego, w Hz, wyznaczone z eksperymentalnej analizy modalnej, z pomiarów mikrofonem (Bissinger, 2003a) oraz obliczone (Bissinger, 2003c); f_0 – częstotliwość strojenia najniższej struny w Hz

Instrument	Analiza modalna							Pomiary mikrofonem				Obliczenia				Częstotliwość strojenia i jej krotność		
	A0	A1	A2	A4	CBR	B1–	B1+	A0	A1	A0	A1	A0	A1	A2	A4	f_0	1.5 f_0	2.25 f_0
Skrzypce dyszkantowe	brak	703	1554	1894	849	706	818 865	476	700	390	546	1260	1594			391	587	880
Skrzypce sopranowe	361	ukryty*	930	1295	463 600	561	638	361	560	337	533	979	1277			261	392	587
Skrzypce mezzo	267	ukryty*	629	897	406	416	482	268	422	266	387	778	1025			196	294	441
Altówka	184	287	414	499	239	271	311	185	277	172	266	485	619			130	195	293
Wiolonczela tenorowa	121	215	325	459	232 258	210 224	247 266	120	215	112	186	333	425			98	147	220
Wiolonczela barytonowa	92	154	224	284	184	164	181	91	160	78	127	213	278			65	98	146
Mały bas	70	129	177	222	121 135	117	123 136	70	128	58	99	161	210			55	83	124
Duży bas	48	95	141	166	99	88	104	48	92	44	75	116	149			41	62	92

* częstotliwość bardzo bliska częstotliwości modu korpusu B(1–), w funkcjach transmitancji mod A1 jest niewidoczny.
Źródło: Bissinger (2003a, 2003c).

Różnica ta była największa dla altówki, częstotliwość w dolnych polichkach wynosiła 287 Hz, a dla górnych – 267 Hz. W tabeli 5.18 podano ich średnią dla altówki. Pomiary za pomocą mikrofonów pozwoliły także na wyznaczenie częstotliwości modu A0 skrzypiec dyszkantowych oraz modu A1 skrzypiec sopranowych i mezzo, które ze względu na bliskie sąsiedztwo częstotliwościowe z modelem B(1–) były niewidoczne w modalnych funkcjach transmitancji.

W tabeli 5.18 zebrano częstotliwości modów sygnaturalnych oktetu wyznaczone eksperymentalnie w teście modalnym, uzyskane z widm ciśnienia wewnątrz korpusu (pomiarów mikrofonami) oraz wyliczone z formuł zaproponowanych przez Bissingera (1996, 1998). W widmach wyznaczonych z sygnałów mikrofonowych widoczne były maksima odpowiadające modom A0 i A1. Pozostałe mody objętości powietrza w korpusie były w widmach zamaskowane przez struktury spektralne pochodzące od drgań korpusu (Bissinger, 2003c).

Wnioski Bissingera (2003a) z analizy modów sygnaturalnych oktetu wiolinowego są opisane poniżej. Obwiednie modów sygnaturalnych A0, A1, CBR, B(1–) i B(1+) są takie same jak opisane przez Marshalla (1985), podrozdział 5.2.1. Należy je rozważać, opierając się na danych zawartych w tabeli 5.18 oraz na rys. 5.18 i 5.19. Analiza obwiedni modalnych oktetu wykazała, że w niektórych częstotliwościach modalnych instrument drga jako całość albo znacząco drga tylko korpus, tj. płyty i boczki, a pozostałe elementy instrumentu (nazwijmy je „elementami dodatkowymi”), tj. strunociąg, szyjka z podstrunnicą i podstawek, są pasywne. W innych częstotliwościach obserwowano znaczące drgania tych elementów przy braku ruchu korpusu. Drgania „elementów dodatkowych” okazały się bardzo ważne mimo tego, że nie są istotnym źródłem energii akustycznej. Gdy częstotliwość modów „elementów” jest bliska częstotliwości modów korpusu istotnych akustycznie [B(1–) i B(1+)] lub częstotliwości modu sygnaturalnego CBR, następuje sprzężenie drgań korpusu i drgań „elementów”. Powoduje to powstanie „dubletowych” modów B(1–), B(1+) oraz CBR. Mody dubletowe to drgania o prawie identycznych obwiedniach modalnych płyt, występujące w dwóch częstotliwościach. Kołysanie wzdłużne strunociągu względem jego środka i sprzężenie tych drgań z modelem korpusu B(1+) jest odpowiedzialne za powstanie dubletowego modu B(1+) w wiolonczeli tenorowej (247 Hz i 266 Hz) i małym basie (123 Hz i 136 Hz). Za dubletowy mod B(1+) w skrzypcach dyszkantowych (818 Hz i 865 Hz) odpowiada sprzężenie modu korpusu B(1+) z pierwszym modelem zginającym szyjki z podstrunnicą w płaszczyź-

nie horyzontalnej, w którym zmieniająca się faza ruchu szyjki (o 180°) przypada naprzemiennie na niższy lub wyższy częstotliwościowo mod dubletu. Za powstanie dubletu modu B(1–), o częstotliwościach 210 Hz i 224 Hz, w wiolonczeli tenorowej odpowiada sprzężenie modu B(1–) z drganiami podstawka i pierwszym modem zginającym szyjki z podstrunną. Dla modów B1 obserwowany jest również ruch boczów w obszarze talii, w kierunku prostopadłym do głównej osi instrumentu. Ruch ten jest antyfazowy, tzn. gdy górna połowa boczów porusza się „do wewnątrz”, to dolna ich połowa porusza się „na zewnątrz”. Zatem na ruch modalny płyt w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ich przekroju podłużnego nakłada się ściskający lub rozciągający ruch boczów w kierunku równoległym do tej płaszczyzny.

Mod korpusu CBR, z układem linii węzłowych na wierzchniej i spodniej płycie w kształcie podwójnego sztyletu, jest bardzo słabym źródłem dźwięku, ale bardzo ważnym modelem mechanicznym. Mod ten jest modelem dubletowym dla kilku instrumentów oktetu. Jak wynika z testu modalnego, dla skrzypiec sopranowych dublet (463 Hz i 600 Hz) jest wynikiem sprzężenia modu CBR z modami podstawka i szyjki z podstrunną. W przypadku wiolonczeli tenorowej (232 Hz i 258 Hz) i małego basu (121 Hz i 135 Hz) wynika on ze sprzężenia modu CBR z drganiami szyjki z podstrunną. Dla modu CBR drgania boczów w obszarze talii są znaczne. Drgania te zachodzą zarówno prostopadle do płaszczyzny przekroju podłużnego, jak i równoległe. Równoległe drgania boczów są symfazowe, tzn. gdy ich górne połowy poruszają się w prawo, to dolne poruszają się w lewo i na odwrót. Taki ruch boczów implikuje horyzontalny ruch płyty wierzchniej w kierunku przeciwnym niż płyty spodniej, czyli ruch „ścinający”. Z tego powodu częstotliwość modu CBR może zależeć znacznie silniej od wymiarów boczów instrumentu niż częstotliwość innych modów.

Mody objętości powietrza w korpusie A0, A1, A2 oraz A4 wykazują silną interakcję z modami korpusu, a dodatkowo mody A0 i A1 są silnie sprzężone ze sobą. Dla całego oktetu zaobserwowano wywołane nimi drgania korpusu, które „naśladowały” zmiany ciśnienia wewnątrz instrumentów.

Dowodów na sprzężenie modów objętości powietrza w korpusie i modów korpusu dostarczyły m.in. eksperymenty i obliczenia, w których wyznaczano ciśnienie powietrza wewnątrz skrzypiec „Le Gruyère” (Hutchins, 1990; Weinreich i in., 2000; Gough, 2015c). Skrzypce „Le Gruyère” (od nazwy szwajcarskiego sera) zostały zbu-

dowane przez Hutchins w 1982 r. i zasłynęły jako instrument doświadczalny. Mają one 65 otworów rozmieszczonych w szachownicę, wywierconych w boczках. Takie rozmieszczenie otworów w niewielkim stopniu wpływa na mody korpusu, ale bardzo wpływa na mody „powietrzne”. Otwory te można zamykać (wszystkie lub część) sztywnymi korkami – wtedy brzmienie instrumentu jest podobne do brzmienia skrzypiec średniej jakości. Można pozostawić je otwarte lub zamknąć gąbką o dużym współczynniku pochłaniania – brzmienie skrzypiec jest bardzo złe, szczególnie w niskim paśmie częstotliwości. Za te efekty odpowiadają zmiany częstotliwości modów objętości powietrza w korpusie, których częstotliwości ulegają zmianie w wyniku otwierania i zamykania otworów. Można wreszcie „Le Gruyère” umieścić horyzontalnie w piasku (do wysokości boczków), a płytę wierzchnią dodatkowo obciążyć. Takie działanie spowoduje stłumienie modów korpusu, ale mody „powietrzne” pozostaną. Ta wielość możliwości eksperymentalnych pozwoliła na bezdyskusyjne stwierdzenie sprzężenia modów „powietrznych” i modów korpusu. Ponieważ szczegółowy opis rezultatów uzyskanych w badaniach doświadczalnych i eksperymentach numerycznych wykracza poza ramy tej książki, zainteresowanych Czytelników odsyłam do oryginalnych prac (Hutchins, 1990; Shaw, 1990; Weinreich i in., 2000; Gough, 2015c). I jeszcze jedno. W momencie powstania „Le Gruyère” średnica otworów wynosiła 5.5 mm. Po dziesięciu latach intensywnego użytkowania w laboratoriach średnica wszystkich otworów zwiększyła się, w niektórych przypadkach nawet do ponad 8 mm. „Szwajcarski ser” dojrzewał?

Z danych zawartych w tabeli 5.18 wynika, że częstotliwość modu A0 wyznaczona eksperymentalnie była zawsze nieco mniejsza niż $1.5 f_0$, przy czym różnice te są największe dla dwóch skrajnych instrumentów oktetu – skrzypiec dyszkantowych i dużego basu. Średnia częstotliwość modów zginających korpusu B(1–) i B(1+), czyli B1, dla większości instrumentów leży blisko $2.25f_0$ z wyjątkiem najmniejszych skrzypiec, dla których jest mniejsza od $2.25f_0$ i wiolonczeli barytonowej, dla której jest większa od $2.25f_0$. W przypadku skrzypiec dyszkantowych zmniejszenie wysokości boczków, którego dokonano, aby podwyższyć częstotliwość modu A0 do założonej wartości, bliskiej $1.5f_0$, skutkowało jednoczesnym zmniejszeniem częstotliwości modu B1. W przypadku wiolonczeli barytonowej wysokość boczków jest kompromisem między uzyskaną częstotliwością modu A0, B1 oraz zasadą podobieństwa.

5.9.2.1. Wpływ podatności mechanicznej płyt na mody A0 i A1

Analiza modalna i rozważania dotyczące podatności na zginanie płyt dużego basu dostarczyły wyjaśnienia obserwowanego eksperymentalnie dużego promieniowania akustycznego związanego z modelem A1 tego instrumentu (Rossing, 2010). Duży bas ma przy skalowaniu ergonomicznym wymiary ok. 3.67-krotnie większe od skrzypiec. Wynika stąd, że częstotliwość jego modu A1 powinna być w takiej samej proporcji do częstotliwości modu A1 skrzypiec, czyli powinna wynosić ok. 130 Hz. Z analizy modalnej uzyskano znacznie mniejszą wartość $f(A1) = 95$ Hz. Rozbieżność tę wyjaśniono, rozważając wpływ podatności mechanicznej płyt dużego basu na $f(A0)$ oraz $f(A1)$.

Rozważmy najpierw tłok, którym wolno i bez tarcia sprężamy powietrze w cylindrze o sztywnych ściankach. Wolne sprężanie oznacza, że temperatura układu nie zmienia się. Tłok na poduszce powietrznej sprężonego powietrza to inaczej masa m zawieszona na sprężynie o sztywności k . Po zaprzestaniu naciskania tłoka będzie on oscylował w cylindrze z częstotliwością f , zależną od sztywności słupa powietrza k i masy tłoka m , $f \sim \sqrt{\frac{k}{m}}$. Powtórzmy to rozumowanie dla cylin-

dra, którego ścianki nie są sztywne i pod wpływem ciśnienia wywieranego przez sprężane powietrze odkształcają się. Ta zmiana kształtu cylindra zwiększa jego objętość, a zatem ciśnienie wewnątrz musi być mniejsze niż w przypadku cylindra o sztywnych ściankach. W związku z tym sztywność słupa powietrza musi być mniejsza niż w przykładzie z cylindrem o sztywnych ściankach, co implikuje mniejszą częstotliwość drgań tłoka. W odniesieniu do instrumentów oktetu funkcję słupa powietrza z przykładów z cylindrem pełni objętość powietrza zawarta w efach. Płyty instrumentów są podatne, bo jak dobitnie wynika z eksperymentalnej analizy modalnej – zginają się. Im podatność płyty, czyli odwrotność jej sztywności, jest większa, tym łatwiej ją zgiąć. Zatem uwzględnienie podatności płyt powoduje zmniejszenie częstotliwości modu A0 w stosunku do modelu o sztywnych ściankach. Ponieważ mod A1 jest silnie sprzężony z modelem A0, to podatność płyt wpływa również na $f(A1)$. Powyższe rozumowanie wyjaśnia różnicę między częstotliwością modu A(1) wyznaczoną eksperymentalnie i przewidzianą na podstawie skalowania – płyty dużego basu oktetu wiolinowego są znacznie większe, a przez to bardziej podatne niż płyty skrzypiec. W eksperymencie modalnym stwierdzono ponadto, że dla

dużego basu (i żadnego innego instrumentu oktetu) częstotliwość modu $f(A1) = 95$ Hz jest zgodna z częstotliwością modu korpusu B1 wynoszącą $(88 \text{ Hz}_{B(1-)} + 104 \text{ Hz})_{B(1+)}/2 = 96$ Hz. Dlatego mod objętości powietrza zawartego w korpusie A1 jest bardzo silnie sprzężony z modami B(1-) oraz B(1+). W przypadku dużego basu oktetu mamy więc do czynienia ze źródłem silnego promieniowania akustycznego przez otwory rezonansowe (mod A1) oraz w mniejszym stopniu – promieniowania związanego z drganiami płyt w modach B(1-) i B(1+), które są dodatkowo wspomagane przez zmiany ciśnienia w korpusie związane z modelem A1. Jak już wspomniano, tak ścisła koincydencja częstotliwości modów A1 i B1 zachodzi tylko dla dużego basu i nie jest obserwowana dla innych instrumentów oktetu. Wyjaśnia to nieco tajemnicze stwierdzenie pojawiające się w literaturze (np. Marshall, 1985), że mod A1 w większości przypadków nie jest silnym źródłem dźwięku, ale czasem może nim być.

Eksperymentalna analiza modalna oktetu wiolinowego, czyli zestawu ośmiu instrumentów smyczkowych o charakterystykach dźwiękowych zbliżonych do skrzypiec, pozwoliła nie tylko na opis zachowań dynamicznych poszczególnych instrumentów, ale stała się podstawą do pogłębionych rozważań dotyczących istoty i natury modów sygnaturalnych. Kompletne oktety wiolinowe można podziwiać w Music Museet w Sztokholmie, National Music Museum w Vermillion w Południowej Dakocie, Metropolitan Museum of Art w Nowym Jorku oraz na uniwersytecie w Edynburgu (Rossing, 2010). Oktet wiolinowy jako zestaw instrumentów koncertujących zdobył pewną popularność w latach osiemdziesiątych XX w. Obecnie zainteresowanie nim zmalało.

5.10. Analiza modalna skrzypiec trapezoidalnych

5.10.1. Instrument i eksperyment modalny

Instrumentem, którego zachowania dynamiczne nie zostały jak dotychczas opisane wyczerpująco, są trapezoidalne skrzypce zbudowane przez Savarta. Félix Savart, znany przede wszystkim z prac dotyczących pola magnetycznego, interesował się również fizyką skrzypiec. W 1818 r. skonstruował eksperymentalne skrzypce trapezoidalne, czyli uproszczony instrument o prawie płaskich płytach, prostokątnych otworach rezonansowych i belce basowej umieszczonej centralnie, w osi podłużnej płyty wierzchniej. Ten niedrogi instrument, któ-

rego wykonanie jest znacznie prostsze niż budowa skrzypiec tradycyjnych, nie zyskał szerszej popularności, choć w subiektywnych testach odsłuchowych jakość jego dźwięku była porównywalna, według Savarta, z brzmieniem skrzypiec mistrzów włoskich (Savart, 1819). W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania muzyków tym instrumentem. Przed wykonaniem skrzypiec Savart przeprowadził doświadczenia, z których wysnuł wnioski dotyczące ich konstrukcji. Wnioski te dziś, przynajmniej w części, uznawane są za niepoprawne, ale zostaną przytoczone w celu zobrazowania rozumowania Savarta:

- a) regularny kształt instrumentu powoduje, że łatwiej wprowadzić go w drgania, tzn. płyty płaskie wpadają w drgania łatwiej niż płyty wyprofilowane,
- b) jakość dźwięku jest lepsza, gdy płyta drga symetrycznie (ten wniosek jest niezgodny z ustaleniami Bissingera (1995) oraz Saldnera i in. (1996), podrozdział 5.5.3).

Bazując na tych spostrzeżeniach, Savart umieścił belkę basową w środku płyty wierzchniej. Obie płyty uczynił płaskimi od wewnątrz instrumentu. Od strony zewnętrznej płyty miały nieznaczne wysklepienie wynikające wyłącznie z różnicy grubości między środkiem a krawędziami (Savart, 1819).

Skrzypce o tak niezwykłym kształcie nie były popularnym obiektem badań i analiz modalnych. Jedynie Fontana i Serafin (2003) numerycznie zamodelowali odpowiedź impulsową oraz widmo prędkości podstawka instrumentu, a Gough (2007) wyznaczył kilka obwiedni modalnych metodą elementów skończonych. Pierwszą pełną analizę modalną repliki skrzypiec Savarta przeprowadzili Duerinck i in. (2014). Instrument, który poddali badaniom, wykonano na podstawie opisu podanego w memuarach Savarta (1819) oraz korzystając ze skrzypiec trapezoidalnych nieznanego lutnika datowanych na 1818 r., eksponowanych w Muzeum Instrumentów Muzycznych w Brukseli.

Wymiary repliki skrzypiec Savarta podano w tabeli 5.19. Płyta wierzchnia i spodnia były płaskie wewnątrz instrumentu. Belkę basową zamontowano wzdłuż głównej osi podłużnej płyty wierzchniej. Belka była bez napięcia, tzn. końce belki basowej swobodnie przylegały do powierzchni płyty wierzchniej, tak jak to opisał Savart (1819). Duszę umieszczono klasycznie, tzn. pod prawą stopą podstawka, nad którą znajdowały się struny sopranowe. Skrzypce wyposażono w zestaw strun H310 D'Addario Helicore o średnim napięciu i nastrojono tak jak skrzypce klasyczne, tj. na 196 Hz, 294 Hz, 440 Hz i 659 Hz.

W teście modalnym instrument był bez podbródka i poduszki naramiennej. Nie był także pokryty lakierem. Choć lakierowanie może nieznacznie zmniejszać tłumienie modalne w stosunku do tłumienia modów skrzypiec niepokrytych lakierem, jak to opisano w podrozdziale 5.7.3, nie jest to czynnik silnie determinujący jakość dźwięku, ponieważ, jak wykazał Dünwald (1999), zmiany trendu tłumienia nie są wielce istotnym dyskriminatorem jakości brzmieniowej instrumentu. Do konstrukcji instrumentu użyto drewna bardzo dobrego jakościowo. Płytę wierzchnią oraz belkę basową i klocki wykonano z drewna świerkowego. Płytę spodnią oraz boczki zbudowano z drewna jaworowego.

W teście modalnym instrument umieszczono w pozycji horyzontalnej, w specjalnym uchwycie o dużej masie. Skrzypce stykały się z uchwytem krawędzią płyty spodniej w swoich czterech narożnikach, jak pokazano na rys. 5.20. Taki sposób zamocowania umożliwił swobodne drgania obu płyt, ponieważ cztery obszary, w których uchwyt stykał się z płytą spodnią, zostały wybrane w miejscach wewnątrz instrumentu, w których zamocowano klocki narożnikowe, aby zwiększyć powierzchnię klejenia obu płyt.

Przeprowadzono eksperymentalny test modalny w wersji z ustalonym punktem pobudzenia. Impulsowy sygnał pobudzający instrument kolejno w 288 punktach pomiarowych, widocznych na rys. 5.21,

Tabela 5.19. Wymiary liniowe w milimetrach skrzypiec Savarta wykorzystanych w teście modalnym

Element skrzypiec	Wymiar
Szerokość korpusu u góry	84.4
Szerokość korpusu u dołu	225.0
Długość wewnętrzna korpusu do pieńka górnego	328.5
Wysokość boczaków	34.5
Grubość krawędzi płyty wierzchniej	2.3
Grubość krawędzi płyty spodniej	2.3
Maksymalna grubość płyty wierzchniej	6.2
Maksymalna grubość płyty spodniej	5.1
Szerokość pieńka górnego	54.0
Długość pieńka dolnego	18.0
Długość pieńka górnego	18.0

Źródło: wg Duerincka i in. (2014).

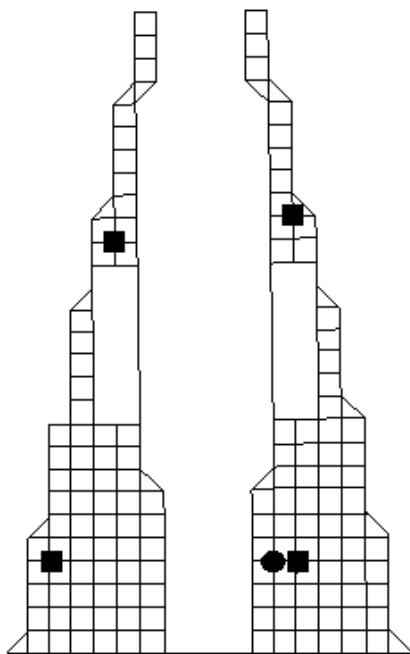


Rys. 5.20. a) sposób montowania skrzypiec trapezoidalnych (bez lakieru) w teście modalnym. Widoczna siatka pomiarowa i miejsce zamocowania akcelerometru;
 b) instrument pokryty lakierem (niebadany), bez strun, w uchwycie pomiarowym

Źródło: wg Duerincka i in. (2014).

pochodził z młotka uderowego PCB Impact Hammer 086C05. Przyspieszeniowy sygnał odpowiedzi mierzono akcelerometrem Ono Sokki NP-2910 o masie 2 g. Sygnał odpowiedzi mierzono w jednym punkcie siatki pomiarowej, oznaczonym na rys. 5.21 za pomocą czarnego kółka. Zarówno sygnał pobudzający, jak i sygnał odpowiedzi mierzono w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty, czyli w kierunku, w którym występują największe drgania. Masa akcelerometru, przy mocowanego na pszczeli воск, nie przekraczała 10% masy płyty wierzchniej i nie miała wpływu na wynik pomiarów. Pozycję akcelerometru wybrano w pomiarach wstępnych tak, aby uniknąć mocowania go nad belką basową lub w obszarach węzłowych najbardziej prominentnych modów. Rozkład punktów pomiarowych pokazano na rys. 5.21.

Opierając się na zmierzonych sygnałach pobudzenia i odpowiedzi płyty wierzchniej, wyznaczono 288 inertancji, w punktach odległych od siebie w poziomie i pionie o 1.2 cm. Obszary płyty pod strunocią-

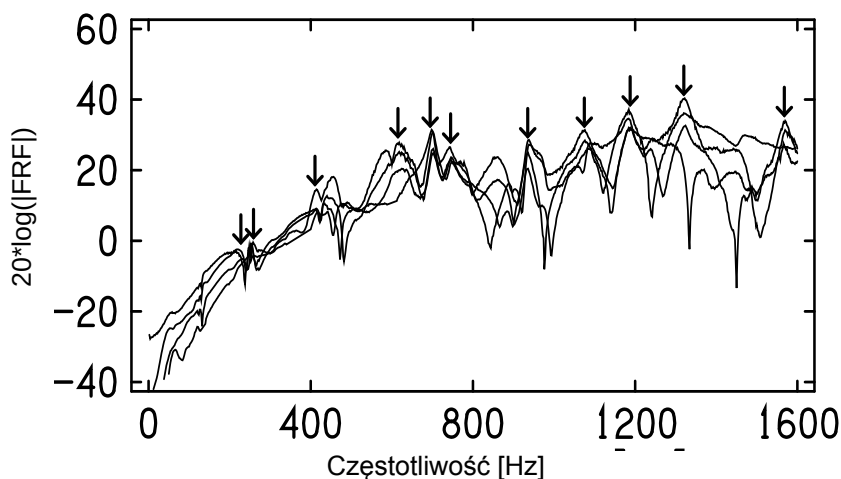


Rys. 5.21. Rozkład punktów pomiarowych na skrzypkach trapezoidalnych w teście modalnym. Przykładowe inertancje z rys. 5.22 zostały wyznaczone między punktem zamocowania akcelerometru (czarne kółko) a punktami pobudzenia (czarne kwadraty)

Źródło: Duerinck i in. (2014).

giem i strunami pominięto z powodów technicznych. Do wyznaczenia parametrów modalnych wykorzystano pakiet *STAR-Modal*®.

Funkcje transmitancji wyznaczono w paśmie częstotliwości 0–1600 Hz, z rozdzielczością częstotliwościową wynoszącą 2 Hz. Ich jakość była kontrolowana przebiegami funkcji koherencji. Ponieważ funkcje transmitancji są wyznaczone w dziedzinie częstotliwości, zastosowano dziesięć uśrednień widmowych, aby zmniejszyć wariancję szumu przypadkowego w mierzonych sygnałach (Lyons, 2000). Gdy wartości koherencji nie były bliskie jedności, pomiar powtarzano. Przykłady funkcji transmitancji przedstawiono na rys. 5.22. Z wyjątkiem pierwszego modu, którego tłumienie modalne było nieco większe od 10% tłumienia krytycznego, tłumienie wszystkich pozostałych modów było mniejsze od 10% jego wartości krytycznej.



Rys. 5.22. Przykłady zmierzonych funkcji transmitancji dla skrzypiec trapezoidalnych. Funkcje wyznaczone między pozycją akcelometru oznaczoną na rys. 5.21 czarnym kółkiem i punktami pomiaru przyspieszenia oznaczonymi czarnymi kwadratami. Strzałki wskazują częstotliwości modów opisanych w tekście

Źródło: wg Duerincka i in. (2014).

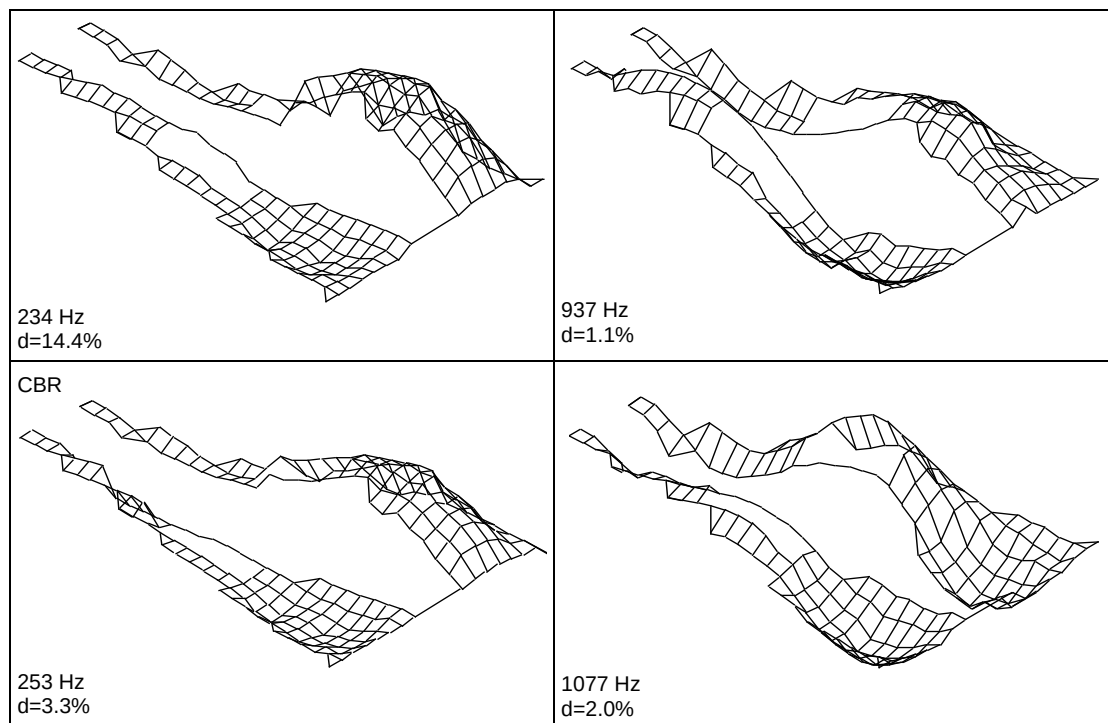
5.10.2. Rezultaty

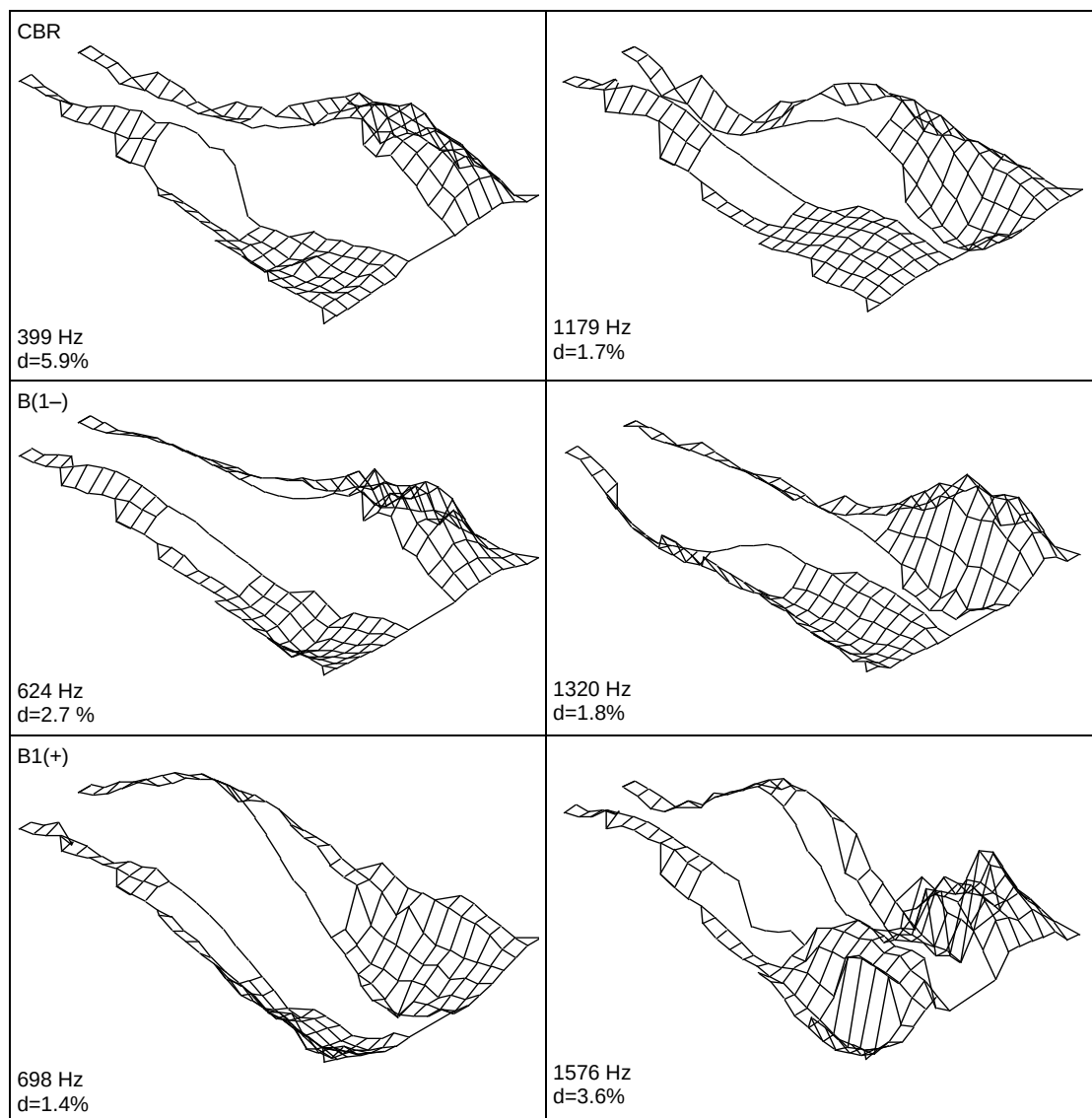
Rezultaty eksperymentalnej analizy modalnej przeprowadzonej dla skrzypiec Savarta o trapezoidalnym kształcie zebrano w tabeli 5.20. Umieszczono w niej mody najwyraźniejsze, które nie budziły trudno-

ści interpretacyjnych. Jak już napisano wcześniej, wszystkie mody, z wyjątkiem modu pierwszego o częstotliwości 234 Hz, miały tłumienie mniejsze od 10% jego wartości krytycznej, ale niezerowe. Zatem, podobnie jak w przypadku modów gitarowych, były to mody zespolone (Skrodzka i in., 2009, 2013, 2014).

W badanym zakresie częstotliwości ujawniło się dziesięć modów płyty wierzchniej. Ponieważ podczas testu modalnego struny były wytłumione kawałkiem gąbki wsuniętym między nie i podstrunnice, nie wywierały one znaczącego wpływu na drgania płyty, poza oczywistym „spinaniem” płyty, tak jak w każdym instrumencie gotowym do gry. Mod w częstotliwości 234 Hz ma dwie wyraźne linie węzłowe, jedną wzdłuż osi podłużnej, a drugą prostopadłą do niej, przechodzącą przez podstawek. Drgania o największej amplitudzie zaobserwowano w dolnej części płyty, po prawej stronie. Jest to najprawdopodobniej zniekształcona forma modu A0 – silnego źródła energii instrumentu. Ze względu na zniekształconą obwiednię modalną nie oznaczono tego modu jako A0 w tabeli 5.20.

Tabela 5.20. Parametry modalne skrzypiec trapezoidalnych





Źródło: Duerinck i in. (2014).

Para modów o częstotliwościach 253 Hz oraz 399 Hz ma bardzo podobne obwiednie. Odróżnia je nieco inne położenie linii węzłowej, prostopadłej do osi podłużnej instrumentu. Mod o częstotliwości 399 Hz, ze względu na podobieństwo częstotliwości oraz obwiedni, jest

odpowiednikiem skrzypcowego modu CBR, jak oznaczono w tabeli 5.20. Interesującą parę tworzą mody o częstotliwościach 624 Hz oraz 698 Hz. Obwiednia pierwszego z nich jest podobna do obwiedni skrzypcowego modu B(1–), a obwiednia drugiego – do obwiedni modu B(1+). Mod o częstotliwości 698 Hz, małym tłumieniem modalnym i bardzo stabilny częstotliwościowo, rys. 5.22, jest modelem o dużych amplitudach drgań, szczególnie w dolnej części płyty, która jest bardziej podatna na zginanie niż stosunkowo wąska część górna. Z powyższych względów mody skrzypiec trapezoidalnych o częstotliwościach 624 Hz i 698 Hz uznano za parę modów zginających korpusu B(1–) oraz B(1+), co zaznaczono w tabeli 5.20. Średnia częstotliwość tych modów wynosi 661 Hz i jest znacznie większa niż średnia częstotliwość skrzypcowego modu B1.

Kolejnym modelem o dużej amplitudzie jest mod o częstotliwości 937 Hz. Jego obwiednia modalna przypomina obwiednię modu o częstotliwości 234 Hz, z nieco innym przebiegiem dwóch prostopadłych linii węzłowych. Amplituda drgań tego modu jest znacznie większa od amplitudy drgań w częstotliwości 234 Hz. Zauważono również, że częstotliwość tego modu jest o dwie oktawy wyższa od częstotliwości 234 Hz. Powiązanie między omawianymi modami nie zostało jak dotychczas wyjaśnione; być może jest to rezultat dużej symetrii instrumentu. Obwiednie modalne w częstotliwościach większych od 700 Hz mają zwiększającą się liczbę linii węzłowych, jak wynika z tabeli 5.20. Modelem o dużej amplitudzie jest drganie w częstotliwości 1077 Hz.

Skrzypce trapezoidalne są znacznie bardziej symetryczne niż ich klasyczny odpowiednik. Jedynym elementem zaburzającym tę symetrię jest dusza umiejscowiona pod stopą podstawka, nad którą znajdują się struny sopranowe. Dla tak symetrycznego obiektu uzyskano obwiednie modalne bardziej symetryczne niż dla klasycznych skrzypiec (Skrodzka i in., 2009, 2013, 2014; Bissinger, 2008; Marshall, 1985).

Po przebadaniu jednego instrumentu trudno wyciągać ogólne wnioski. Jednak uzyskane wyniki wskazują, że mod o częstotliwości 698 Hz, oznaczony w tabeli 5.20 przez B(1+), może być „barometrem tonalnym” jakości dźwięku skrzypiec trapezoidalnych.

Jakość dźwięku trapezoidalnych skrzypiec Savarta oceniono w teście subiektywnym. Grupa oceniająca składała się z pracowników the Royal Conservatory of Ghent w Belgii. Barwę dźwięku oceniono jako miękką, łagodną i miłą, nieco gorszą od barwy tradycyjnych skrzypiec. Dźwięk był również mniej donośny i niezbyt bogaty w składowe har-

moniczne. Ogólnie dźwięk instrumentu trapezoidalnego oceniono jako nieznacznie podobny do dźwięku altówki. Niezbyt bogaty harmonicznie dźwięk uznano za skutek symetrycznego umiejscowienia belki basowej. Zespół oceniający zasugerował, że umiejscowienie jej konwencjonalnie, pod stopą podstawka, nad którą znajdują się struny basowe, spowodowałoby prawdopodobnie zaburzenie dość symetrycznych drgań płyty wierzchniej i wytworzenie większej liczby harmonicznych. Powoływano się na książkę Heron-Allena (1885), jak żartują lutnicy pozycję, w której jest napisane o skrzypcach wszystko. Trapezoidalne skrzypce Savarta nie stały się instrumentem popularnym. Być może jest to wpływ epoki, w której zostały stworzone, czyli romantyzmu. Ich słodka, miękka, liryczna barwa kompensowała niedostatki głośności i ubóstwo harmonicznych, tak bardzo pożądane w późniejszych epokach. Savart twierdził, że instrument trapezoidalny jest równie dobry jak tradycyjne skrzypce. W świetle rezultatów badań modalnych, subiektywnych testów odsłuchowych i współczesnych wymagań stawianych skrzypcom nie ma podstaw do podtrzymywania tej opinii.

ZAKOŃCZENIE

Eksperymentalna analiza modalna jest techniką, która umożliwia rozkład złożonego drgania obiektu na „niepodzielne” drgania składowe będące, co do istoty, drganiami układów o jednym stopniu swobody. Zastosowanie jej do badania zachowań dynamicznych złożonych układów mechano-akustycznych, jakimi są gitary i skrzypce, umożliwia głębokie wniknięcie w zagadnienia ich ruchu oraz wzajemnych powiązań między drganiami powietrza w korpusie, płyt, podstawka, szyjki z podstrunnicą i strunociągu, koniecznych do wytworzenia dźwięku. Skrzypce siedemnasto- i osiemnastowiecznych mistrzów włoskich uważane są w powszechnej opinii za najlepsze dźwiękowo. Od dawna próbowano poznać ich „sekret”, mniej lub bardziej wyimaginowany, budując „kopie tonalne” instrumentów, które zachowały się do naszych czasów. Analiza modalna, przynajmniej w pewnym stopniu, umożliwia wskazanie cech fizycznych instrumentów mistrzowskich, a także niepożądanych cech drgań. Analiza ta pozwoliła m.in. na wyodrębnienie, spośród continuum modów obserwowanych dla każdej struktury o stałych rozłożonych, modów sygnaturalnych, stosowanych dziś powszechnie do opisu drgań skrzypiec i pozostałych instrumentów skrzypcowych. Wyjaśniła rolę duszy skrzypcowej i belki basowej jako elementów celowo zaburzających symetrię drgań płyt oraz podstawka, czyli elementu przekazującego energię strun na korpus. Analiza modalna grupy instrumentów smyczkowych, jaką stanowi oktet wiolinowy, umożliwiła wyjaśnienie natury modów i powiązań międzymodalnych.

Przedstawione w monografii rezultaty badań modalnych gitar i skrzypiec oraz wnioski z nich płynące można wykorzystać do projektowania instrumentów nie tylko tradycyjnych, ale również nowoczesnych, zbudowanych z innych materiałów niż drewno rezonansowe. W poszukiwaniu nowych brzmień płyty instrumentów skrzypcowych konstruuje się je np. z lekkiego polistyrenu, wzmacniając w części centralnej włóknem węglowym. Instrumenty te projektuje się tak, aby

wykazywały zachowania dynamiczne podobne do klasycznych instrumentów wykonanych z drewna. Połączenie sztuki lutniczej z nowoczesną techniką eksperymentalną i wykorzystanie nowych materiałów jest obserwowane od kilkunastu lat.

Badania przedstawione w monografii nie wyczerpują opisu zachowań modalnych gitar, skrzypiec i pozostałych instrumentów smyczkowych. Na pogłębioną analizę szczególnie czekają duże instrumenty, takie jak wiolonczela i kontrabas. Ważnym ich elementem, mającym duży wpływ na generowany dźwięk, jest strunociąg. Wpływ jego długości, materiału, z którego jest wykonany, długości wiążadła i sposobu jego połączenia ze strunociągiem, a także długości strun na odcinku między strunociągiem i podstawkiem na zachowania modalne nie został jak dotychczas opisany wyczerpująco. Wiadomo, że drgania boczaków skrzypiec w niewielkim stopniu wpływają na dźwięk skrzypiec, choć ich drgania w talii instrumentów wywierają pewien skutek na drgania obu płyt. Nie wiadomo, czy tak jest w istocie w przypadku wysokich boczaków wiolonczel i kontrabasów. Na badania czeka również grupa historycznych instrumentów smyczkowych – bliższych lub dalszych poprzedników skrzypiec. Analiza ich drgań umożliwiłaby prześledzenie zmian w zachowaniach dynamicznych na drodze ich ewolucji w skrzypce. Eksperymentalna analiza modalna wydaje się tu obiecującym narzędziem badawczym, szczególnie w kontekście rozwoju oprogramowania umożliwiającego dopasowanie krzywej teoretycznej do danych pomiarowych oraz wizualizację drgań, a także bezkontaktowych metod akwizycji sygnału odpowiedzi.

LITERATURA

- Albrecht H.-E., Damaschke N., Borys M., Tropea C. (2003). *Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.
- Alonso-Moral J., Jansson E.V. (1980). *Eigenmodes and the function of the violin*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 34, 29–32.
- Alonso-Moral J., Jansson E.V. (1982). *Eigenmodes, input admittance, and the function of the violin*, „Acustica” 50, 329–337.
- Arnold E.B., Weinreich G. (1982). *Acoustical spectroscopy of violins*, „Journal of the Acoustical Society of America” 72, 1739–1746.
- Backhaus H. (1930). *Über die Schwingungsformen von Geigenkörpern*, „Zeitschrift für Physik” 62, 143–166.
- Barducci I., Pasquallini G. (1948). *Misure dell’ attrito interno e delle costanti elastiche del legno*, „Il Nouvo Cimento” 5(5), 416–466.
- Batahong R.Y., Dayou J., Wang S., Lee J. (2014). *Vibrational properties of sundatang soundboard*, „Archives of Acoustics” 39(2), 177–187.
- Bathe K.J. (1996). *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey.
- Beldie I.P. (2003). *About the bridge hill mystery*, „Catgut Acoustical Society Journal” 4, 9–13.
- Bessaraboff N. (1941). *Ancient European Musical Instruments*, Museum of Fine Arts, Boston.
- Bissinger G. (1995). *Some mechanical and acoustical consequences of the violin soundpost*, „Journal of the Acoustical Society of America” 97(5), 3154–3164.
- Bissinger G. (1996). *Acoustic normal modes below 4 kHz for a rigid, closed violin-shaped cavity*, „Journal of the Acoustical Society of America” 100(3), 1835–1840.
- Bissinger G. (1998). *A0 and A1 coupling, arching, rib height, and f-hole geometry dependence in the 2 degree-of-freedom network model of violin cavity modes*, „Journal of the Acoustical Society of America” 104(6), 3608–3615.
- Bissinger G. (2003a). *Modal analysis of a violin octet*, „Journal of the Acoustical Society of America” 113(4), 2105–2113.
- Bissinger G. (2003b). *Relating normal mode properties of violins to overall quality: Part II: modal averages/trends*, „Catgut Acoustical Society Journal” 4(8), 46–52.
- Bissinger G. (2003c). *Wall compliance and violin cavity modes*, „Journal of the Acoustical Society of America” 113(3), 1718–1723.
- Bissinger G. (2004a). *Contemporary generalized normal mode violin acoustics*, „Acta Acustica united with Acustica” 90, 590–599.

- Bissinger G. (2004b). *A unified materials-normal mode approach to violin acoustics*, „Acta Acustica united with Acustica” 91, 214–228.
- Bissinger G. (2006). *The violin bridge as filter*, „Journal of the Acoustical Society of America” 120(1), 482–491.
- Bissinger G. (2008). *Structural acoustics of good and bad violins*, „Journal of the Acoustical Society of America” 124(3), 1764–1773.
- Bissinger G., Gregorian A. (2003). *Relating normal mode properties of violins to overall quality: Part I: signature modes*, „Catgut Acoustical Society Journal” 4(8), 37–45.
- Bissinger G., Kieffer J. (2003). *Radiation damping, efficiency, and directivity for violin normal modes below 4 kHz*, „Acoustics Research Letters Online” 4(1), 7–12.
- Bissinger G., Olivier D. (2007). *3-D laser vibrometry on legendary old Italian violins*, „Sound and Vibration Magazine” 41(7), 10–15.
- Bissinger G., Rowe D. (2007). *Three-dimensional normal mode vibration plus acoustic analysis of two exemplary old Italian violins*, „Journal of the Acoustical Society of America” 121, 3061.
- Bissinger G., Williams E.G., Valdivia N. (2007). *Violin f-hole contribution to far-field radiation via patch near-field acoustical holography*, „Journal of the Acoustical Society of America” 121(6), 3899–3906.
- Bladier B. (1961). *Contribution à l'étude des cordes du violoncello*, „Acustica” 11(6), 373–384.
- Bladier B. (1964). *Sur les phénomènes transitoires des cordes vibrantes*, „Acustica” 14(6), 331–336.
- Bogusz E., Mroziak G., Skrodzka E. (2012). *Investigation of vibratory perception thresholds in blind and visually handicapped people in chosen areas of the palm and the wrist*, „Acta Physica Polonica A” 121(1A), A13–A18.
- Bolanowski S.J., Gescheider G.A., Verillo R.T., Checkosky C.M. (1988). *Four channels mediate the mechanical aspects of touch*, „Journal of the Acoustical Society of America” 84(5), 1680–1694.
- Boullosa R.R. (2002). *Vibration measurements in the classical guitars*, „Applied Acoustics” 62, 311–322.
- Boullosa R.R., Gomez S.R. (2014). *Acoustics of the jarana jarocho*, „Applied Acoustics” 78, 59–67.
- Brandt A. (2011). *Noise and Vibration Analysis. Signal Analysis and Experimental Procedures*, John Wiley&Sons Inc., New York, 1st edition.
- Bretos Linaza J., Santamaria C., Alonso Moral J. (1999). *Vibrational patterns and frequency responses of the free plates and box of a violin obtained by finite element analysis*, „Journal of the Acoustical Society of America” 105, 1942–1950.
- Brickner R., Ventura C.E. (2014), *Introduction to Operational Modal Analysis*, John Wiley&Sons Inc.
- Bukur V. (1992). *The applications of acoustic emission techniques in wood science and technology*, „Catgut Acoustical Society Journal” 2(1), 28–31.
- Caldersmith G. (1986). *Vibration geometry and radiation fields in acoustic guitars*, „Acoustics Australia” 14, 47–50.
- Caldersmith G. (1995). *Designing of guitar family*, „Applied Acoustics” 46, 3–17.

- Canfield G., Rossing T.D. (1995). *Modes of vibration in hammered dulcimers*, *Proceedings of International Symposium of Musical Acoustics*, Dourdan ISMA, Paris, 512–517.
- Chomette B., LeCarrou J.-L. (2015). *Operational modal analysis applied to the concert harp*, „Mechanical Systems and Signal Processing” 56–57, 81–91.
- Craig R.R., Kurdila A.J. (2006). *Fundamentals of Structural Dynamics*, John Wiley&Sons Inc., New York.
- Cremer L. (1983). *The Physics of the Violin*, Hirzel Verlag, Stuttgart.
- Dobrucki A. (2007). *Przetworniki elektroakustyczne*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Drain L.E. (1980). *The Laser Doppler Technique*, Wiley, New York, 1–241.
- Duerinck T., Skrodzka E., Linde B.B.J (2014). *Modal analysis of a trapezoidal violin built after the description of Félix Savart*, „Archives of Acoustics” 39(4), 623–628.
- Durup F, Jansson E.V. (2005). *The quest of the violin bridge-hill*, „Acta Acustica united with Acustica” 91, 206–213.
- Dünnwald H. (1991). *Deduction of objective quality parameters on old and new violins*, „Catgut Acoustical Society Journal” 1(7), 1–5.
- Echard J.P., Benoit C., Peris-Vicente J., Malecki V., Gimeno-Adelanto J.V., Vaiedelich S. (2007). *Gas chromatography/mass spectrometry characterization of historical varnishes of ancient Italian lutes and violin*, „Analytica Chimica Acta” 584, 172–180.
- Echard J. P., Cotte M., Dooryhee E., Bertrand L. (2008). *Insights into the varnishes of historical musical instruments using synchrotron micro-analytical methods*, „Applied Physics A” 92, 77–81.
- Eggers F. (1959). *Untersuchung von Korpus-Schwingungen am Violoncello*, „Acustica” 9, 453–465.
- Elejabarrieta M.J., Ezcurra A., Santamaria C. (2000). *Evolution of the vibrational behavior of a guitar soundboard along successive construction phases by means of the modal analysis technique*, „Journal of the Acoustical Society of America” 108(1), 369–378.
- Elejabarrieta M.J., Ezcurra A., Santamaria C. (2001). *Vibrational behaviour of the guitar soundboard analyzed by the finite element method*, „Acta Acustica united with Acustica” 87, 128–136.
- Elejabarrieta M.J., Ezcurra A., Santamaria C. (2002a). *Air cavity modes in the resonance box of the guitar: the effect of the sound hole*, „Journal of Sound and Vibration” 252(3), 584–590.
- Elejabarrieta M.J., Ezcurra A., Santamaria C. (2002b). *Coupled modes of the resonance box of the guitar*, „Journal of the Acoustical Society of America” 111(5), 2283–2292.
- Elie B., Gautier F., David B. (2012). *Macro parameters describing the mechanical behavior of classical guitars*, „Journal of the Acoustical Society of America” 132, 4013–4024.
- Ewins D.J. (1995). *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley&Sons Inc, New York.

- Fletcher N.H., Rossing T.D. (2010). *The Physics of Musical Instruments*, Springer Science+Business Media, Inc.
- Fleischer H., Zwicker T. (1998). *Mechanical vibrations of electric guitars*, „Acta Acustica united with Acustica” 84, 758–765.
- Fleischer H., Zwicker T. (1999). *Investigating dead spots of electric guitars*, „Acta Acustica united with Acustica” 85, 128–135.
- Fontana F., Serafin S. (2003). *Modelling Savart's trapezoidal violin using digital waveguide mesh*, Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference, SMAC2003, Stockholm, Sweden.
- Fouilhe E., Goli G., Houssay A., Stoppani G. (2009). *Preliminary study on the vibrational behaviour of tailpieces in string instruments COST IE0601*, STSM results, Hamburg.
- Fouilhe E., Goli G., Houssay A., Stoppani G. (2011). *Vibration modes of the cello tailpiece*, „Archives of Acoustics” 26(4), 713–726.
- Fouilhe E., Houssay A. (2013). *String „after-length” and the cello tailpiece: acoustics and perception*, Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference 2013, SMAC 2013, Stockholm, Sweden, 60–65.
- French M., Bissinger G. (2001a). *Testing of acoustic stringed musical instruments – an Introduction*, „Experimental Techniques” 25(1), 40–43.
- French M., Bissinger G. (2001b). *Testing of acoustic stringed musical instruments – an Introduction: Part 2. Mechanics of Stringed Instruments*, „Experimental Techniques” 25(2), 34–38.
- French M., Hosler D. (2001). *Testing of acoustic stringed musical instruments. Part 3. The mechanics of guitars*, „Experimental Techniques” 25(3), 45–48.
- Fritz C., Cross I., Moore B.C.J., Woodhouse J. (2007). *Perceptual thresholds for detecting modifications applied to the acoustical properties of a violin*, „Journal of the Acoustical Society of America” 122(6), 3640–3650.
- Fukada E. (1950). *The vibrational properties of wood I*, „Journal of the Physical Society of Japan” 5, 321–327.
- Fukada E. (1951). *The vibrational properties of wood II*, „Journal of the Physical Society of Japan” 6, 417–421.
- Ghelmeziu N., Beldie I.P. (1972). *On characteristics of resonance spruce wood*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 17, 10–16.
- Giergiel J. (2000). *Drgania mechaniczne*, Uczelniane Wyd. Naukowo-Techniczne AGH, Kraków.
- Gordziej M. (2004). „Eksperyment dotyczący kąta wstawienia szyjki w gitarze klasycznej. Analiza modalna i widmowa”, praca magisterska, Akademia Muzyczna w Poznaniu.
- Gorrostieta-Hurtado E., Podraza-Ortega J.-C., Ramos-Arreguin J.-M., Sotomayor-Olmedo A., Perez-Meneses J. (2012). *Vibration analysis in the design and construction of an acoustic guitar*, „International Journal of Physical Science” 7(13), 1986–1997.
- Gough C. (2007). *The violin: Chladni patterns, plates, shells and sounds*, „The European Physical Journal Special Topics” 145, 77–101.

- Gough C. (2015a). *Violin plate modes*, „Journal of the Acoustical Society of America” 137(1), 139–153.
- Gough C. (2015b). *A violin shell model: vibrational modes and acoustics*, „Journal of the Acoustical Society of America” 137(3), 1210–1225.
- Gough C. (2015c). *Acoustic cavity modes of a conventional and Le Gruyère violin*, „Proceedings of Meeting on Acoustics” 9 035006, 1–12.
- Gren P., Tatar K., Grandstrom J., Molin N.-E., Jansson E.V. (2006). *Laser vibrometry measurements of vibration and sound fields of a bowed violin*, „Measurement Science and Technology” 17, 635–644.
- Grzymkowski R., Kapusta A., Nowak I., Słota D. (2003). *Metody numeryczne. Zagadnienia brzegowe*, Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice.
- Haines D.W. (1979). *On musical instrument wood*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 31, 23–32.
- Harajda H., Łapa A. (2002a). *Akustyczne zagadnienia lutnictwa. Część I: Dobór drewna*, Wyd. Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego, Poznań.
- Harajda H., Łapa A. (2002b). *Akustyczne zagadnienia lutnictwa. Część II: Elementy przekąźnikowe*, Wyd. Akademii Muzycznej im. I.J. Paderewskiego, Poznań.
- Heron-Allen E. (1885), *Violin-making: A historical and Practical Guide*, Dover Publications, Dover.
- Hill T.J., Richardson B.E., Richardson S.J. (2004). *Acoustical parameters for characterization of the classic guitar*, „Acta Acustica united with Acustica” 90, 335–348.
- Hutchins C.M. (1967). *Founding a family of fiddles*, „Physics Today” 20(2), 23–37.
- Hutchins C.M., (1978). *Wood for violins*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 29, 14–18.
- Hutchins C.M. (1983). *A history of violin research*, Journal of the Acoustical Society of America 73(5), 1421–1440.
- Hutchins C.M., (1990). *A study of the cavity resonances of violins and their effects on its tonal and playing qualities*, „Journal of the Acoustical Society of America” 87(1), 392–397.
- Hutchins C.M., (1992). *A 30-year experiment in the acoustical and musical development of violin-family instruments*, „Journal of the Acoustical Society of America” 92(2), 639–650.
- Hutchins C.M., Stetson K.A., Taylor P.A. (1971). *Clarification of ‘free plate tap tones’ by hologram interferometry*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 16, 15–23.
- Jansson E.V. (1971). *A study of acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of a guitar*, „Acustica” 25, 95–100.
- Jansson E.V. (1973a). *On higher air modes in the violin*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 19, 13–15.
- Jansson E.V. (1973b). *An investigation of a violin by laser spackle interferometry and acoustical measurements*, „Acustica” 29(1), 21–28.
- Jansson E.V. (1976). *Long-time-average-spectra applied to analysis of music, part III*, „Acustica” 34, 21–28.
- Jansson E.V. (1982). *Fundamentals of the guitar tone*, „Journal of Guitar Acoustics” 6, 26–41.

- Jansson E.V. (2004). *Violin frequency response – bridge mobility and bridge distance*, „Applied Acoustics” 65, 1197–1205.
- Jansson E.V., Molin N.-E., Saldner H.O. (1994). *On eigenmodes of the violin – electronic holography and admittance measurements*, „Journal of the Acoustical Society of America” 95, 1100–1105.
- Jansson E.V., Molin N.-E., Sundin H. (1970). *Resonances of a violin body studied by hologram interferometry and acoustic methods*, „Physica Scripta” 2, 243–256.
- Kaczmarek F. (1979). *Wstęp do fizyki laserów*, PWN, Warszawa.
- Kaczmarek P.R., Rogowski T., Antończak A.J., Abramski K.M. (2004). *Laser Doppler vibrometry with acoustooptic frequency shift*, „Optica Applicata” XXXIV(3), 373–384.
- Kaliski S. (1966). *Drgania i fale*, PWN, Warszawa.
- Kamiński W. (1984). *Encyklopedia muzyczna*, PWN, Kraków.
- Knott G.A., Shin Y.S., Chargin M. (1989). *A modal analysis of the violin*, „Finite Elements in Analysis and Design” 5(3), 269–279.
- Krupska A. (2010). *Zapomniane receptury z pierwszej połowy XVIII wieku mistrza różnych sztuk Marcina Groblicza*, Wyd. Akademii Sztuk Pięknych w Warszawie, Warszawa.
- Lai J.C.S., Burgess M.A. (1990). *Radiation efficiency of acoustic guitars*, „Journal of the Acoustical Society of America” 88, 563–569.
- Lyons R.G. (2000). *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Maia N.M.M., Silva J.M.M. (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press, John Wiley and Sons, New York.
- Malecki I. (1964). *Teoria fal i układów akustycznych*, PWN, Warszawa.
- Mania P., Fabisiak E., Skrodzka E. (2015). *Differences in the modal and structural parameters of resonance and non-resonance wood of spruce (Picea abies L.)*, „Acta Physica Polonica A” 127(1), 110–113.
- Marshall K.D. (1985). *Modal analysis of a violin*, „Journal of the Acoustical Society of America” 77(2), 695–709.
- Meinel H.F. (1937a). *Über die Beziehungen zwischen Holzdicke Schwingungsform, Körperamplitude und klang eines Geigenkörpers*, „Elekt. Nachrichten-Technik” 14(4), 119–134.
- Meinel H.F. (1937b). *Über Frequenzkurven von Geigen*, „Akustičeskij Žurnal” 3, 62–71.
- Meinel H.F. (1957). *Regarding the sound quality of violins and a scientific basis for violin construction*, „Journal of the Acoustical Society of America” 29, 817–822.
- Meinel H.F. (1975). *Musikalisch-technische Probleme des Geigen-baues*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 23, 27–29.
- Minnaert M.G.J., Vlam C.C. (1937). *The vibrations of the violin bridge*, „Physica” 4(5), 361–372.
- Molin N.E., Jansson E.V. (1989). *Transient wave propagation in wooden plates for musical instruments*, „Journal of the Acoustical Society of America” 85(5), 2179–2184.

- Molin N.E., Lindgren L.-E., Jansson E.V. (1988). *Parameters of violin plates and their influence on the plate modes*, „Journal of the Acoustical Society of America” 83(1), 281–290.
- Morrison A., Rossing T.D. (2001). *Modal analysis of the Russian balalaika*, *Proceedings of ISMA2001: International Symposium on Musical Acoustic*, Perugia, Italy, 2, 421–424.
- Natke H.G. (1992). *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*, Vieweg, Berlin.
- Okuda A., Ono T. (2008). *Bracing effect in a guitar top by vibration experiment and modal analysis*, „Acoustical Science and Technology” 29(1), 103–105.
- Osiński Z. (1978). *Teoria drgań*, PWN, Warszawa.
- Paté A., Le Carrou J.-L., Fabre B. (2014). *Predicting the decay time of solid body electric guitar tones*, „Journal of the Acoustical Society of America” 135(5), 3045–3055.
- Paté A., Le Carrou J.-L., Fabre B. (2015). *Modal parameter variability in industrial electric guitar making: Manufacturing process, wood variability, and lutherie decisions*, „Applied Acoustics” 96, 118–131.
- Penttinen H., Erkut C., Pölkki J., Välimäki V., Karjalainen H. (2005). *Design and analysis of a modified kantele with increased loudness*, „Acta Acustica united with Acustica” 91, 261–268.
- Plath N. (2014). *Acoustical analysis of Mexican vihuela*, *Proc. of ISMA*, Le Mans, France, 493–497.
- Praetorius M. (1619). *Syntagma Musicum II: De Organographia*, Wolfenbittel (wydanie faksymilowe, Bärenreiter, Kassel, 1964).
- Pyrkosz M.A. (2013). „Reverse Engineering the Structural and Acoustic Behavior of a Stradivari Violin”, Dissertation, Michigan Technological University.
- Pyrkosz M., Van Karsen C. (2013). *Comparative modal tests of a violin*, „Experimental Techniques” 37, 47–62.
- Rainieri C., Fabbrocino G. (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures – An Introduction and Guide for Applications*, Springer, New York.
- Raman C.V. (1916). *Wolf-note in bowed string instruments*, „Philosophical Magazine” 32, 391.
- Raman C.V. (1918). *On the mechanical theory of the vibrations of bowed strings and of musical instruments of the violin family, with experimental verification of the results. Part I*, „The Indian Association for the Cultivation of Science Bulletin” 15, 1–158.
- Randall R.B. (1987). *Frequency Analysis*, Brüel&Kjær, Denmark.
- Reinicke W., Cremer L. (1970). *Application of holographic interferometry to the bodies of stringed instruments*, „Journal of the Acoustical Society of America” 48, 988–992.
- Richardson M.H. (1997). *Is it a mode shape, or an operating deflection shape*, „Sound & Vibration Magazine 30th Anniversary Issue”, 1–11.
- Richardson B.E., Roberts G.W., Walker G.P. (1987). *Numerical modeling of two violin plates*, „Journal of the Catgut Acoustical Society” 47, 12–16.
- Rodgers O.E. (1986). *Initial results on finite element analysis of violin backs*, „Journal of the Catgut Acoustical Society” 46, 18–23.

- Rossing T. (2010). *The Science of String Instruments*, Springer Science+Business Media, Inc.
- Rossing T.D., Eban G. (2000). *Normal modes of a radially braced guitar determined by electronic TV holography*, „Journal of the Acoustical Society of America” 106(5), 2991–2996.
- Runnemalm A., Molin N.-E. (2000). *Operating deflection shapes of the plates and standing aerial waves in a violin and guitar model*, „Acta Acustica united Acustica” 86, 883–890.
- Runnemalm A., Molin N.-E., Jansson E. (2000). *On operating deflection shapes of the violin body including in-plane motions*, „Journal of the Acoustical Society of America” 107(6), 3452–3459.
- Saldner H.O., Molin N.-E., Jansson E.V. (1996). *Vibration modes of the violin forced via the bridge and action of the soundpost*, „Journal of the Acoustical Society of America” 100(2), 1168–1177.
- Savart F. (1819). *Mémoire sur la construction des instrumens à cordes et à archets*, Tech. Rep., Paris, Deterville.
- Shaw E.A.G. (1990). *Cavity resonance in the violin: network representation and the effect of damped and undamped rib holes*, „Journal of the Acoustical Society of America” 87(1), 398–410.
- Schleske M. (1996a). *On making „tonal copies” of a violin*, „Catgut Acoustical Society Journal” 3(2), 18–28.
- Schleske M. (1996b). *Eigenmodes of vibration in the working process of a violin*, „Catgut Acoustical Society Journal” 3(1), 2–8.
- Schleske M. (2002). *Empirical tools in contemporary violin making: Part I. Analysis of design, materials, varnish and normal modes*, „Catgut Acoustical Society Journal” 4(5), 50–64.
- Sedik, Y., Hamdan, S., Jusoh, I., Hasan, M. (2010). *Acoustic properties of selected tropical wood species*, „Journal of Nondestructive Evaluation” 29, 38–42.
- Skalmierski B. (1986). *Stan naprężenia w płytach rezonansowych a jakość instrumentu, czyli tajemnica budowy skrzypiec*, PWN, Warszawa.
- Skrodzka E., Krupa A., Rosenfeld E., Linde B.B.J. (2009). *Mechanical and optical investigation of dynamic behavior of violins in modal frequencies*, „Applied Optics” 48, C165–170.
- Skrodzka E.B., Linde B.B.J., Krupa A. (2013). *Modal parameters of two violins with different varnish layers and performance subjective evaluation of their sound quality*, „Archives of Acoustics” 38 (1), 75–81.
- Skrodzka E., Linde B.B.J., Krupa A. (2014). *Effect of bass bar tension on modal parameters of violin’s top plate*, „Archives of Acoustics” 39(1), 145–149.
- Skrodzka E., Łapa A., Gordziej M. (2005). *Modal and spectral frequencies of guitars with differently angled necks*, „Archives of Acoustics” 30(4), 197–201.
- Skrodzka E., Łapa A., Linde B.B.J., Rosenfeld E. (2011). *Modal parameters of two complete guitars differing in the bracing pattern of the soundboard*, „Journal of the Acoustical Society of America” 130(4), 2186–2195.
- Stankowski J., Graja A. (1972). *Nowe oblicze optyki*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa.

- Szabatin J. (2003). *Podstawy teorii sygnałów*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Szczeniowski S. (1980). *Fizyka doświadczalna. Część I Mechanika i Akustyka*, PWN, Warszawa.
- Torres J.A., Boullosa R.R. (2009). *Influence of the bridge on the vibration of the top plate of a classic guitar*, „Applied Acoustics” 70, 1371–1377.
- Torres, J.A., de Icaza-Herrera, M., Castaño, V.M. (2014). *Guitar acoustics quality: Shift by humidity variations*, „Acta Acustica united with Acustica” 100, 537–542.
- Torres, J.A., Torres-Martínez R. (2015). *Evaluation of guitars and violins made using alternative woods through mobility measurements*, „Archives of Acoustics” 40(3), 351–358
- Tove P.A., Chu W.K. (1974). *Investigations of the elemental composition of violin finish and wood composition, by ion backscattering*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 22, 5–8.
- Tyler J. (1997). *The guitar and its performance from the fifteenth to eighteenth centuries*, „Performance Practice Review” 10(1), 60–70.
- Vogel B. (2007). *Słownik lutników działających na historycznych i obecnych ziemiach polskich oraz lutników polskich działających za granicą do 1950 roku*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Waldhar C. (2009). *A balsa violin*, „American Journal of Physics” 77(1), 30–35.
- Weinreich G., Holmes C., Mellody M. (2000). *Air-wood coupling and Swiss-cheese violin*, „Journal of the Acoustical Society of America” 108(5), 2389–2402.
- Weyna S. (2005). *Rozpływ energii akustycznych źródeł rzeczywistych*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Wiciak J., Borkowski B., Czopek D. (2013). *A system for determination of areas hazardous for blind people using wave-vibration markers – final conclusions and technical application*, „Acta Physica Polonica A” 123(6), 1101–1105.
- Woodhouse J. (2005). *On the „bridge-hill” of the violin*, „Acta Acustica united with Acustica” 91, 155–165.
- Wróblewski A.K. (2009). *Historia fizyki*, PWN, Warszawa.
- Yankowskii B.A. (1980). *Paradoxes of violin parameters*, „The Catgut Acoustical Society Newsletter” 33, 9–13.
- Yano, H., Furuta, Y., Nakagawa, H. (1997). *Materials for guitar back plates made from sustainable forest resources*, „Journal of the Acoustical Society of America” 101, 1112– 1119.
- Yu Y., Jang I.G., Kim I.K., Kwak B.M. (2010). *Nodal line optimization and its application to violin top plate design*, „Journal of Sound and Vibration” 329, 4785–4796.
- Zaveri K. (1985). *Modal Testing of Large Structures – Multiple Exciter Systems*, Brüel&Kjær, Denmark, wyd. pierwsze.
- Zhang A., Woodhouse J. (2014). *Reliability of the input admittance of bowed-string instruments measured by the hammer method*, „Journal of the Acoustical Society of America” 136(6), 3371–3381.
- Zienkiewicz O.C. (1972). *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa.
- Zoran A., Welch S., Hunt W.D. (2012). *A platform for manipulation and examination of the acoustic guitar: The Chameleon Guitar*, „Applied Acoustics” 73, 338–347.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH POJĘĆ I TERMINÓW

altówka 18-20, 180, 184, 185, 187-189, 202

analiza modalna 13-15, 25, 26, 29, 38, 48-50, 55, 58, 59, 66, 67, 71, 78-80, 87-89, 91, 93, 96, 99, 100, 109-111, 118, 120, 124, 125, 127, 138, 143-145, 148, 153, 157, 164, 167, 168, 174-176, 179, 185, 188, 192-194, 198, 203, 204

bas

- duży 179-181, 184, 187, 188, 191-193
- kontrabas 15, 180, 185, 204
- mały 180, 184, 188-190

częstość

- drgań swobodnych 31, 33, 35, 38,
- rezonansu prędkości 38, 39
- rezonansu wychylenia 37

dobroć 37, 39, 42-45, 47, 48, 50, 51

drgania

- operacyjne 90, 93, 96, 97, 110, 147, 151, 152
- swobodne nietłumione 30
- swobodne tłumione 32
- transjentowe 32
- wymuszone 37, 66, 90

funkcja transmitancji

- admitancja 39, 43, 45-48, 74, 78, 80
- biegun 74

– inertancja 41, 44-48, 74, 78, 80, 97, 115, 128, 146-149, 154, 159, 197

– przejścia 38, 48, 74, 76-78, 80, 81, 87, 88

– punktowa 76-78, 80, 81

– receptancja 39, 42, 45-48, 50-52, 54, 71, 72, 74-78, 80

– residuum 74, 75

– uśrednianie 97, 115

– wykres Arganda 47

– wykres Bodego 41

– wykres Nyquista 47, 48

gitara

– liniowość 109, 110

– mody płyty wierzchniej 118-124

– obelkowanie 91, 92, 94, 101, 106, 108, 111

– zuncho 119

interferometria holograficzna 15, 26, 28, 175

koherencja 82-84, 86, 87, 97, 115, 147, 154, 159, 198

krzywa rezonansu

– prędkości 38, 39

– wychylenia 37-39

macierz modalna

– ortogonalność 61

MAC 87, 88

mod

- częstotliwość modalna 87, 89, 90, 97, 100, 101-102, 105-106, 108-111, 117, 118, 122-124, 126, 127, 129-131, 135-143, 147-153, 155, 157, 162, 163, 169, 171-174, 176, 178-182, 186-193, 198-201
- dubletowy 189, 190
- korpusu 15, 90, 92, 101, 116, 126-129, 133, 134, 136, 162, 171, 178, 180-182, 187-191, 193, 201
- naturalny 71
- notacja Marshalla 14, 25, 97, 126-128, 133, 135, 136, 148-150, 162, 163, 169, 171, 176, 189, 193, 201
- obwiednia modu 58, 59, 62, 63, 71, 74, 75, 78, 81, 87-89, 97, 100, 101, 105, 106, 109-111, 116-118, 120, 122, 124, 127, 128, 130, 131, 136, 137, 140, 141, 147, 150-154, 161, 162, 169, 171, 174, 189, 194, 199-201
- płyty 14, 101, 105, 111, 120, 122, 126, 128, 130, 131, 133, 138-141, 143, 148, 149, 154, 155, 160-163, 170, 171, 178, 192-193, 199
- powietrzny 128
- sprzężenie modów 115, 181, 189-191
- sygnaturalny 15, 124, 134-137, 160, 169, 170, 181, 188, 189, 203
 - A0 15, 126, 127, 130, 131, 134-136, 154, 160-163, 169-171, 174, 177, 180-182, 186-192, 199
 - A1 15, 126, 127, 130, 131, 134-136, 181, 182, 186-190, 192, 193
 - B1 127, 136, 161, 169, 170, 180, 181, 186-188, 190, 191, 193, 200, 201
 - B(1-) 15, 126, 127, 129, 131, 134-136, 157, 160-163, 170, 171, 174, 180, 186-191, 193, 200, 201
 - B(1+) 15, 126, 127, 129, 131, 134-136, 160-163, 170-174, 177, 180, 186, 187, 189, 191, 193, 201

– – CBR 15, 127, 131, 134-136, 160-163, 169-171, 176, 177, 186-190, 199-201

– tłumienie modalne 35, 74, 75, 78, 87, 89, 110, 117, 136, 153, 163, 171, 172, 195

– zespolony 71, 100, 199

– zginający 15, 127-129, 134, 151, 189-191, 201

model modalny 78, 87

odpowiedź impulsowa $h(\tau)$ 81, 83

ODS, drganie operacyjne 90, 93, 97, 100, 105, 110

oktet wiolinowy

– skalowanie akustyczne 180, 181

– skalowanie ergonomiczne 192

– zasada podobieństwa 191

oscylator Duffinga 49, 50

parametr nieliniowy ε 49-52

podatność 182, 192

punkt materialny 29, 30

rezonans 38, 39, 52, 92, 115, 130, 154, 162, 171

rodzina

– Amatic 18

– Dankwartów 20

– Groblichów 21, 22

– Guarnerich 18, 19

równanie

– charakterystyczne 32, 57

– ruchu 30-36, 41, 48-50, 53, 55, 56, 62, 63, 66, 67, 70, 71

– wiekowe 57

ruch harmoniczny 33, 48, 56

ruch tłumiony

– aperiodyczny 33, 34

– aperiodyczny krytyczny 34

– podkrytyczny 33, 34

skrzypce

– belka basowa 14, 15, 24, 125, 128, 153, 157-163, 193-195, 202

– – napięcie 157-163

- dusza skrzypcowa 14, 15, 24, 93, 125, 128-131, 153-155, 157, 174, 194, 195, 201, 203
- dyszkantowe 179-181, 184, 187-189, 191
- lakier 14, 15, 145, 153, 159, 164-174, 195, 196
- „Le Gruyère” 190, 191
- mezzo 179, 180, 184, 185, 187-189
- podstawek skrzypcowy 14, 15, 25, 26, 28, 125, 129, 130, 133, 134, 153, 154, 157, 174-179, 181, 190
 - – talia podstawka 178, 179
 - – mod kołyszący 116, 133, 178, 179
- Savarta 24, 25, 193-195, 198, 201, 202
- sopranowe 180, 184, 187-190
- trapezoidalne 15, 24, 25, 193, 194, 196-199, 201, 202
- wysokość sklepienia 138, 158, 166, 181, 182, 184, 185

Stradivari Antonio 19, 24, 126, 135, 136, 138, 144, 145, 150, 151, 158

szttywność 29, 45, 49-52, 56, 91, 93, 118, 123, 140, 150, 154, 192

tarcie suche 52-54

tłumienie

- histerezyowe 69, 70
- lepkie 32, 67-70
- nieproporcjonalne 71
- proporcjonalne 67, 70, 74, 87
- strukturalne 69, 70
- wiskotyczne 32, 67, 68

Torres Jurado Antonio 93-95, 105, 106, 111, 119

ułamek tłumienia krytycznego 35

układ

- liniowy 14, 35, 48-52, 66, 74, 109-111, 149, 152, 153, 163, 171

– nieliniowy 14, 48-52, 54, 88

– o stałych rozłożonych 30

– o stałych skupionych 30

uogólniona masa modalna 61, 66, 70

uogólniona sztywność modalna 61, 70

wartość własna 60-62, 78, 141

wektor modalny

– normalizacja 59, 72

– ortogonalność wektorów modalnych 59, 60

wektor własny 60-62, 78, 141

wibrometria laserowa 13, 26-28, 91, 96, 99, 105, 110, 111, 145, 147, 151

wibrometr laserowy 14, 80, 148, 149, 175, 186

widmo

– dwustronne 84

– jednostronne 82, 84

– mocy 82, 85, 86

– skrośne 82, 85

wiolonczela

– tenorowa 180, 184, 187-190

– barytonowa 180, 184, 187, 188, 191

współczynnik

– tłumienia krytycznego 34, 110, 198

– korelacji obwiedni modalnych 87

współrzędne

– kartezjańskie 62, 63, 66-70

– modalne 63-65, 67, 70, 71

– normalne 63, 69, 70

zasada superpozycji 14, 48, 66, 74

EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS OF GUITARS AND VIOLINS

SUMMARY

The monograph deals with the experimental modal analysis of guitars and violins. This is the first book of this kind to be published in Poland. It is based on the extensive experience of the author, who has been studying the dynamic behavior of stringed musical instruments for many years.

The first chapter, entitled “The guitar and the violin – the origin and history of research”, includes a brief history of how guitars and violins evolved from earlier instruments as well as a condensed overview of the studies reported in the literature concerning the dynamic behavior of guitars and violins.

The second and third chapters present basic information about the single-degree-of-freedom system’s motion and the basics of theoretical and experimental modal analysis. One sub-chapter is devoted to non-linear vibrations. When these vibrations occur, modal analysis becomes useless because the principle of modal superposition does not apply to non-linear systems. However, violins and guitars can be regarded as linear systems under certain conditions, which is also discussed here. The second chapter introduces the concept of the transfer function which is expressed in terms of the system’s physical parameters and it also describes the types of this function. In the third chapter, the transfer function is expressed in terms of modal parameters, which were obtained in a modal experiment, thus showing that there is a close relationship between theory and practice.

The fourth chapter is devoted to the modal analysis of guitar top plates, both in a complete instrument and in isolation from the rest of the corpus. It describes the influence of the top plate bracing pattern and the mounting angle of the neck on modal parameters as well as the modal analysis of the guitar’s top plate during the successive stages of construction.

The final, i.e. fifth, chapter deals with the modal analysis of violins. It contains a description of the first modal analysis of a violin that was carried out by Marshall, the analysis of an isolated free top and back plates, and the effect of modifications such as changing the thickness of the back plate, the type of varnish used or the tension of a bass bar on modal parameters as well as the modal analysis of the bridge and of an instrument with and without the sound post. The

results of modal analysis for a violin octet and a trapezoidal violin are also included.

The chapters that deal with the results of modal experiments conducted on guitars and violins comprehensively describe and illustrate both the reported and the author's own tests. This information can be useful if the reader would like to design, perform and interpret his or her own research. Readers who are interested in the source literature can find a comprehensive list of references at the end of the monograph.