Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Adam Nawrocki

O pewnych uogólnieniach funkcji prawie okresowych i ich zastosowaniach

Rozprawa doktorska z dziedziny nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka
napisana pod kierunkiem prof. UAM dra hab. Dariusza Bugajewskiego

Poznań 2018

Składam serdeczne podziękowania Panu prof. UAM dr hab. Dariuszowi Bugajewskiemu za okazaną życzliwość oraz wskazówki udzielone mi podczas pisania niniejszej rozprawy.

Spis treści

Wstęp

Teoria funkcji prawie okresowych została zapoczątkowana w latach 1924-1926 przez duńskiego matematyka H. Bohra. W pracach [11], [9] oraz [10] Bohr, opierając się o prace S. Bohla i E. Escalangona, zdefiniował pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowej oraz udowodnił szereg twierdzeń z nim związanych. Wprowadził on pojęcie zbioru względnie gęstego, które stało się fundamentem teorii funkcji prawie okresowych. Z tego powodu H. Bohra uważa się za twórcę teorii funkcji prawie okresowych, a same funkcje jednostajnie prawie okresowe nazywa się również funkcjami prawie okresowymi w sensie Bohra.

Pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowej było rozszerzane przez wielu matematyków, co w konsekwencji doprowadziło do powstania wielu klas funkcji prawie okresowych (zob. [1], [5], [8], [33], [46], [48], [53]). Zasadniczo pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowej uogólnia się w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich bazuje na pojęciu zbioru względnie gęstego, a punktem wyjścia tutaj są przestrzenie funkcyjne z pewnymi metrykami lub semimetrykami. W ten sposób powstały takie klasy funkcji prawie okresowych jak na przykład klasa funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa, Weyla czy Besicovitcha (zob. [1], [5], [33], [50]). Drugi kierunek uogólnień to tak zwane funkcje prawie automorficzne. Jak pokazał Bochner (zob. [7]), za pomocą zbiorów warunkowo zwartych - bez użycia pojęcia zbioru względnie gęstego - można zdefiniować funkcje jednostajnie prawie okresowe. Jest to tak zwana ciągowa definicja funkcji jednostajnie prawie okresowych. Definicja ta została uogólniona i w ten sposób powstały klasy funkcji prawie automorficznych (zob. [21], [43], [44]).

W niniejszej rozprawie badamy w szczególności równanie różniczkowe liniowe niejednorodne postaci

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad \lambda \neq 0,$$

gdzie składnik niejednorodny f jest uogólnioną funkcją prawie okresową. Dokładniej, interesuje nas zbadanie rozwiązań powyższego równania różniczkowego w przypadku, gdy f jest funkcją prawie okresową w szerszym sensie. W szczególności interesuje nas podanie warunków, które gwarantują istnienie rozwiązania prawie okresowego w klasie, do której należy składnik niejednorodny oraz podanie warunków, przy których rozważane równanie takiego rozwiązania nie posiada.

Ponieważ rozwiązanie powyższego równania zazwyczaj może być wyrażone za pomocą operacji splotu funkcji f z pewną funkcją z przestrzeni funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a na prostej, więc szczególna uwaga w niniejszej pracy poświęcona jest operatorowi splotu określonemu na przestrzeni funkcji prawie okresowych. W centrum naszego zainteresowania znajdują się dwie klasy funkcji prawie okresowych.

Pierwszą rozważaną przez nas klasą jest klasa funkcji prawie okresowych względem miary Lebesgue'a (w skrócie μ-prawie okresowych lub μ-p.o.). Klasę tę wprowadził Stiepanow równolegle z funkcjami prawie okresowymi w sensie Stiepanowa (w skrócie: S-prawie okresowymi lub S-p.o.). Jest to klasa znacznie szersza niż klasa funkcji S-prawie okresowych (zob. [48]). Badanie klasy funkcji μ-prawie okresowych związane jest z wieloma trudnościami. Podstawowa trudność wynika z faktu, iż w ogólności funkcje μ-p.o. nie muszą być lokalnie całkowalne; wiemy o nich tylko tyle, że są one mierzalne w sensie Lebesgue'a. Być może z tego powodu w literaturze (według wiedzy autora) nie badano przypadku istnienia rozwiązań równań różniczkowych w tej klasie funkcji. Gdy f jest funkcją prawie okresową w sensie Stiepanowa, to powyższe równanie różniczkowe posiada rozwiązanie S-p.o. Naszym celem jest w szczególności zbadanie interesującego przypadku, kiedy składnik niejednorodny jest funkcją μ-p.o., która nie jest S-p.o.

Drugą klasą funkcji prawie okresowych, którą zajmujemy się w niniejszej rozprawie, jest klasa funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana (w skrócie: LAP). Klasa ta została wprowadzona przez Lewitana przy okazji uogólnienia jednego z ważnych twierdzeń teorii funkcji jednostajnie prawie okresowych, związanego z szeregami Fouriera (zob. [33]). Gdy f jest ograniczoną funkcją LAP, to wówczas rozważane równanie posiada rozwiązanie LAP. Ponieważ funkcje LAP w ogólności nie są ograniczone, więc powstaje naturalna potrzeba zbadania przypadku, kiedy f jest nieograniczoną funkcją LAP.

Przekrój obu tych klas funkcji zawiera interesujące przykłady funkcji prawie okresowych, a mianowicie odwrotności uogólnionych wielomianów trygonometrycznych. Niech

$$f(x) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{k}\Big(a_n \sin(\lambda_n x) + b_n \cos(\lambda_n x)\Big)},$$

gdzie $a_n, b_n, \lambda_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, ..., k$. Zakładamy, że mianownik jest stałego znaku oraz, że wartości mianownika są dowolnie bliskie zera. Wówczas taka funkcja jest przykładem ciągłej i nieograniczonej funkcji μ-p.o. oraz LAP, która nie jest

S-p.o. (zob. dowód punktu (*iii*) Twierdzenia 4.7). Przykłady te mogą być użyteczne w kontekście badania rozwiązań rozważanego równania różniczkowego.

W niniejszej pracy udowadniamy w szczególności twierdzenia, które rozstrzygają kwestię istnienia rozwiązania powyższego równania różniczkowego, gdy f jest odwrotnością uogólnionego wielomianu trygonometrycznego. Podkreślmy jednak, że twierdzenia te mają charakter znacznie ogólniejszy, co ilustrowane jest stosownymi przykładami. W niniejszej pracy zostały podane dwa kryteria gwarantujące istnienie odpowiednio rozwiązania μ-p.o. lub LAP oraz dwa kryteria gwarantujące nieistnienie odpowiednio rozwiązania μ-p.o. lub LAP. Jednocześnie dzięki dwóm lematom, które prezentują pewien rodzaj konstrukcji funkcji μ-p.o. oraz LAP, możliwe jest konstruowanie szeregu nietrywialnych funkcji spełniających podane kryteria. Przy wynikach „negatywnych" jakościowo dotyczących funkcji μ-p.o., często będziemy podawali przykłady funkcji ciągłych, aby podkreślić, iż istota problemu nie jest związana z możliwym brakiem ciągłości czy nawet lokalnej całkowalności funkcji μ-p.o.

Kolejną kwestią jaka została podniesiona w pracy jest tak zwany model *„leaky integrate and fire"* (w skrócie: model LIF). W modelu tym rozważamy to samo równanie różniczkowe ($\lambda \leqslant 0$) co powyżej, ale w zupełnie innym kontekście. O ile w klasycznym równaniu różniczkowym liniowym interesowała nas kwestia istnienia rozwiązań, o tyle tutaj skupiliśmy się przede wszystkim na jakościowym badaniu tak zwanego *„displacement map"* Ψ. *„Displacement map"* Ψ, mówiąc nieprecyzyjnie, przyporządkowuje liczbie x wartość $\Psi(x)$, będącą różnicą pomiędzy momentem, w którym rozwiązanie przechodzące przez punkt $(x, 0)$ osiągnie wartość 1, a samym punktem x. Okazuje się bowiem, że gdy f jest funkcją S-prawie okresową, to wówczas *„displacement map"* Ψ jest funkcją jednostajnie prawie okresową. W związku z tym pojawia się naturalne pytanie o możliwość uogólnienia tego wyniku na przypadek lokalnie całkowalnych funkcji μ-p.o. Dzięki dwóm nietrywialnym przykładom udało się pokazać, że istnieją funkcje μ-p.o., nie będące funkcjami S-p.o., dla których funkcja Ψ jest μ-p.o. oraz, że nie dla każdej lokalnie całkowalnej funkcji μ-p.o. funkcja Ψ jest μ-p.o.

W modelu LIF istotną rolę odgrywa również tak zwana liczba obrotu. Dla szczególnego przypadku modelu LIF, liczba obrotu jest związana z wartością średnią funkcji. Dlatego też jeden z rozdziałów niniejszej rozprawy został w całości poświęcony wartości średniej funkcji μ-p.o.

Funkcje prawie okresowe mają liczne zastosowania. Zastosowania funkcji prawie okresowych w równaniach różniczkowych można znaleźć między innymi w następujących pracach: [14], [15], [17], [18], [20], [21], [22], [23], [34], [35], [36], [44] oraz [45]. Model LIF rozważany z nieciągłymi funkcjami prawie okresowymi posiada zastosowanie w biomatematyce, przy modelowaniu sieci elektrycznych oraz przy badaniu aktywności komórek nerwowych i sieci neuronowych (zob. [12], [19], [24],

[25], [26], [27], [28], [30], [37], [38], [47] oraz [52]). Dużo zastosowań w fizyce i chemii, ze względu na strukturę jak i na własności, posiadają tak zwane kwazikryształy. Za ich odkrycie izraelski naukowiec Dan Shechtman otrzymał w roku 2011 nagrodę Nobla w dziedzinie chemii. Przejrzysty, matematyczny, choć bardzo zaawansowany opis kwazikryształów, podany przez Y. Meyera (zob. [39]), jest oparty na teorii funkcji prawie okresowych. Funkcje prawie okresowe mają również swoje zastosowania w empirycznym wyznaczaniu cyklów gospodarczych w makroekonomii (zob. [32]). W pracy tej rozważa się nakładanie cyklów koniunkturalnych różnej długości. Podkreślmy, że wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z nakładaniem się zjawisk okresowych, potencjalnie może wystąpić zjawisko prawie okresowości.

Niniejsza rozprawa posiada następującą strukturę. Pierwszy rozdział składa się z pięciu paragrafów. W pierwszym paragrafie ustalamy konwencje i oznaczenia używane w niniejszej pracy. W drugim paragrafie zebraliśmy niezbędne informacje z teorii ułamków łańcuchowych oraz przypomnieliśmy twierdzenia Liouville'a. W trzecim paragrafie przypominamy pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowej oraz podajemy podstawowe własności takich funkcji. Następnie podajemy definicje podstawowych uogólnień funkcji jednostajnie prawie okresowych. Mianowicie, definiujemy klasę funkcji prawie automorficznych, klasę funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa, Weyla i Besicovitcha. Na zakończenie paragrafu podajemy i omawiamy twierdzenie Kroneckera. W czwartym paragrafie zajmujemy się funkcjami prawie okresowymi względem miary Lebesgue'a. Podajemy w nim ich podstawowe definicje i własności. Podajemy również lemat, dzięki któremu będziemy mogli konstruować przykłady funkcji μ-p.o. oraz przypomnimy twierdzenie pozwalające konstruować klasyczne przykłady funkcji μ-p.o. W ostatnim, piątym paragrafie przypominamy definicję funkcji LAP oraz podajemy podstawowe własności tych funkcji. Podajemy w nim również twierdzenie, dzięki któremu można konstruować klasyczne przykłady funkcji LAP. Na zakończenie tego paragrafu podajemy lemat pozwalający konstruować przykłady funkcji LAP o zadanych własnościach.

W rozdziale drugim niniejszej rozprawy zajmujemy się porównaniem klasy ciągłych funkcji prawie okresowych w sensie miary Lebesgue'a oraz klasy funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. Dzięki dwóm przykładom ustalamy, że żadna z rozważanych klas nie jest podklasą drugiej. Pierwszy przykład prezentuje jednostajnie ciągłą i ograniczoną funkcję LAP, która nie jest μ-p.o. Przykład ten stanowi jednocześnie rozwiązanie jednego z otwartych problemów dotyczących funkcji prawie automorficznych oraz funkcji jednostajnie prawie okresowych (zob. Uwaga 2.1). Kolejny przykład prezentuje ciągłą i ograniczoną funkcję μ-p.o., która nie jest LAP.

W rozdziale trzecim zajmujemy się splotem funkcji prawie okresowych z funkcją g_λ z przestrzeni funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a na prostej rzeczywistej. Rozdział ten składa się z trzech paragrafów. W pierwszym paragrafie zajmujemy się operatorem splotu zdefiniowanym na przestrzeni lokalnie całkowalnych funkcji

μ-p.o. Przypominamy w nim znany wynik dla operatora splotu na przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa (zob. [13]). Następnie przypominamy charakteryzację funkcji S-p.o. w przestrzeni funkcji μ-p.o., podaną w pracy [48]. Ponadto prezentujemy twierdzenie podające warunek dostateczny na to, aby splot funkcji μ-p.o. z funkcją g_λ był μ-p.o. Podajemy również warunki, przy których splot funkcji μ-p.o. z funkcją g_λ nie jest μ-p.o. Na zakończenie paragrafu podajemy przykład ciągłej funkcji μ-p.o., dla której nie istnieje splot z funkcją g_λ. W drugim paragrafie zajmujemy się operatorem splotu określonym na przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. Najpierw przypominamy wynik znany dla ograniczonych funkcji LAP, pochodzący z pracy [15]. Następnie dowodzimy, że splot dowolnej funkcji LAP z funkcją o zwartym nośniku jest LAP oraz podajemy warunek dostateczny na to, aby splot funkcji LAP z funkcją g_λ był LAP. Kolejne twierdzenie tego paragrafu podaje warunek dostateczny na to, aby splot funkcji LAP z funkcją g_λ nie był LAP. Na zakończenie paragrafu drugiego podajemy przykład funkcji LAP, dla której splot z funkcja g_λ nie istnieje. W trzecim paragrafie tego rozdziału zajmiemy się odwrotnościami pewnej szczególnej klasy uogólnionych wielomianów trygonometrycznych, parametryzowanych liczbami niewymiernymi. Pokażemy, iż dla niewymiernych liczb algebraicznych funkcje tej postaci można oszacować za pomocą jednomianu. Następnie, przy pomocy aparatu ułamków łańcuchowych, podajemy konstrukcję liczb niewymiernych, dla których funkcja z rozważanej przez nas rodziny funkcji nie spełnia w nieskończoności z góry zadanej asymptotyki. Fakt ten wykorzystujemy do konstrukcji liczb niewymiernych, dla których splot funkcji g_λ z funkcją z rozważanej przez nas rodziny funkcji nie istnieje.

W rozdziale czwartym podajemy zastosowania otrzymanych w poprzednich rozdziałach wyników do teorii równań różniczkowych. Na początek podajemy kilka uwag wstępnych oraz udowadniamy lemat dotyczący ogólnej postaci rozwiązania μ-p.o. i LAP równania różniczkowego liniowego. Podajemy następnie dwa twierdzenia dotyczące istnienia rozwiązań równania różniczkowego ze składnikiem niejednorodnym odpowiednio μ-p.o. oraz LAP, a następnie podajemy przykład pokazujący, że może się zdarzyć, iż splot nie istnieje, a mimo to równanie różniczkowe liniowe posiada prawie okresowe rozwiązanie w sensie Bohra. Kolejny przykład pokazuje, iż może się zdarzyć, że rozważane przez nas równanie różniczkowe liniowe posiada nieograniczone rozwiązanie μ-p.o. i LAP, które można wyrazić za pomocą splotu. Na końcu tego rozdziału rozważamy równanie różniczkowe liniowe, w którym składnik niejednorodny f jest odwrotnością uogólnionego wielomianu trygonometrycznego.

W rozdziale piątym badamy wartość średnią funkcji μ-p.o. Wyniki te okażą się przydatne w następnym rozdziale, w paragrafie dotyczącym tak zwanej liczby obrotu. Najpierw podajemy przykład ciągłej funkcji μ-p.o., dla której wartość średnia nie istnieje. Następnie podajemy warunek dostateczny na to, aby istniała wartość średnia lokalnie całkowalnej funkcji μ-p.o.

Ostatni, szósty rozdział, zawiera trzy paragrafy. W pierwszym paragrafie tego rozdziału zajmujemy się podstawowymi własnościami *„firing map”* Φ i *„displacement map”* Ψ dla modelu LIF. Badamy między innymi poprawną określoność tych funkcji oraz ich ciągłość. W kolejnym paragrafie tego rozdziału badamy własności funkcji Φ i Ψ w przypadku, gdy funkcja f występująca w rozważanym przez nas równaniu jest prawie okresowa. Szczególna uwaga będzie poświęcona badaniu własności funkcji Ψ. Prezentujemy twierdzenie dla klasy funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa. Następnie podajemy dwa przykłady, z których pierwszy pokazuje lokalnie całkowalną funkcję μ-p.o., dla której funkcja Ψ jest jednostajnie ciągła i ograniczona, lecz nie jest μ-p.o. Kolejny przykład prezentuje funkcję μ-p.o., która nie jest S^1-ograniczona, ale funkcja Ψ jest μ-p.o. W trzecim paragrafie ostatniego rozdziału zajmiemy się tak zwanym *„firing rate”* oraz liczbą obrotu z prawie okresową funkcja wejścia. Opisujemy w szczególności związek pomiędzy wartością średnią a wielkością *„firing rate”* dla szczególnego przypadku modelu LIF. Na zakończenie pokazujemy, iż w ogólnym modelu LIF może się zdarzyć, że funkcje mają takie same wartości średnie, ale odpowiednie wielkości *„firing rate”* są od siebie różne.

Metody i pojęcia wykorzystywane w niniejszej rozprawie należą do kilku teorii matematycznych takich jak analiza matematyczna, równania różniczkowe, teoria liczb, teoria miary i analiza funkcjonalna. Jednocześnie chciałbym podkreślić, że mimo, iż w literaturze można znaleźć wiele prac poświęconych teorii funkcji prawie okresowych, to jednak dość dużo zagadnień rozważanych w niniejszej rozprawie wymagało wypracowania nowych technik dowodowych.

Wszystkie twierdzenia, lematy i przykłady, które pochodzą z opublikowanych prac (włącznie z pracami autora) mają podany stosowny odnośnik. Brak takiego odnośnika oznacza, że dane twierdzenie, lemat bądź przykład jest nieopublikowanym wkładem autora niniejszej rozprawy.

Rozdział 1

Pojęcia wstępne

1.1. Konwencje i oznaczenia

W niniejszej pracy przez $\mathbb{N}$ będziemy oznaczali zbiór $\{1, 2, \ldots\}$ liczb naturalnych a przez $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Przez $\mathbb{Z}$ oznaczać będziemy liczb całkowitych, a przez $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Dla podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ przyjmujemy $\alpha X = \{\alpha x \colon x \in X\}$ oraz $\alpha + X = \{\alpha + x \colon x \in X\}$.

Przez μ oznaczać będziemy miarę Lebesgue'a na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Całki występujące w pracy są całkami Lebesgue'a. W niniejszej rozprawie rozważamy tylko funkcje o wartościach rzeczywistych.

Symbol $C(\mathbb{R})$ będzie oznaczać zbiór funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, a $BC(\mathbb{R})$ - przestrzeń ograniczonych i ciągłych funkcji z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Przestrzenie $L^0(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^p_{loc}(\mathbb{R})$, oznaczają przestrzenie klas abstrakcji wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ odpowiednio mierzalnych, całkowalnych w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ oraz lokalnie całkowalnych w sensie Lebesgue'a z potęgą p. Równość dwóch klas oznacza równość funkcji poza zbiorem miary zero. Najczęściej jednak będziemy utożsamiać funkcję z jej klasą abstrakcji. Stąd na przykład interpretacja inkluzji $C(\mathbb{R}) \subset L^0(\mathbb{R})$ nie prowadzi do nieporozumień, jeżeli utożsamimy funkcję ciągłą z jej klasą abstrakcji.

Symbolem $\|\cdot\|_\infty$ oznaczać będziemy normę supremalną dla funkcji $f \in BC(\mathbb{R})$. Dla $p \in [1, +\infty)$, oraz funkcji $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ niech symbol $\|\cdot\|_{S^p}$ oznacza

$$\|f\|_{S^p} := \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\int_u^{u+1} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Przez $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oraz (a, b) dla $a < b$, będziemy oznaczać przedziały na prostej rzeczywistej.

Dla liczby rzeczywistej x symbol $\lfloor x \rfloor$ oznaczać będzie jej część całkowitą, a symbol $\{x\}$ - jej część ułamkową.

Jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to przez f_τ dla $\tau \in \mathbb{R}$ oznaczamy funkcję $f_\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f_\tau(x) = f(x+\tau)$, dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto przez $\operatorname{supp} f$ oznaczamy nośnik funkcji f.

Symbol $:=$ oznacza równość się z definicji i będzie on używany nie tylko w definicjach.

Jeżeli $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, to sformułowanie $f(x) \ll g(x)$ na zbiorze X oznacza, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla $x \in X$ mamy

$$f(x) \leqslant Cg(x).$$

1.2. Aproksymacje diofantyczne liczb niewymiernych

W niniejszym paragrafie przypomnimy niezbędne wiadomości z teorii ułamków łańcuchowych, teorii aproksymacji oraz podamy kilka pomocniczych lematów, które będą użyteczne w dalszej części pracy.

Definicja 1.1 ([40]). Skończony ciąg liczb rzeczywistych $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n\rangle$ nazywamy *ułamkiem łańcuchowym* (lub dokładniej *skończonym ułamkiem łańcuchowym*), jeżeli liczby $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie. Liczbę n nazywamy *długością takiego ułamka*, a liczbę

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

jego *wartością*. Wartość ułamka łańcuchowego $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n\rangle$ będziemy oznaczali przez $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Liczbę

$$r_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] \qquad (k = 0, 1, ..., n),$$

będziemy nazywali *k-tym reduktem* tego *ułamka*, a liczby $a_1, \ldots, a_n$ jego *mianownikami.*

Zdefiniujemy dwa ciągi wielomianów $(P_n)_{n=-1}^{\infty}$ i $(Q_n)_{n=-1}^{\infty}$ o współczynnikach będących nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Definicja 1.2 ([40]). Niech

$$P_{-1} = 1, \qquad Q_{-1} = 0, \qquad P_0(x_0) = x_0, \qquad Q_0(x_0) = 1,$$

oraz

$$P_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}P_n(x_0, \ldots, x_n) + P_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

jak również

$$Q_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}Q_n(x_0, \ldots, x_n) + Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$.

Związki reduktów z powyżej wprowadzonymi wielomianami opisuje poniższy lemat.

Lemat 1.1 ([40]). *Jeżeli $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n\rangle$ jest skończonym ułamkiem łańcuchowym, to dla $k = 0, 1, ..., n$ zachodzi równość*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{P_k(a_0, \ldots, a_k)}{Q_k(a_0, \ldots, a_k)}.$$

W szczególności wartością ułamka łańcuchowego $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n\rangle$ jest liczba

$$\frac{P_n(a_0, \ldots, a_n)}{Q_n(a_0, \ldots, a_n)}.$$

Dla uproszczenia zapisu, gdy z kontekstu będzie wiadomo jaki ułamek łańcuchowy rozważamy, będziemy opuszczali argumenty funkcji P_n i Q_n.

Definicja 1.3 ([40]). Każdy nieskończony ciąg liczb rzeczywistych $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$ nazywać będziemy *nieskończonym ułamkiem łańcuchowym*, o ile $a_n \geqslant 1$ ($n = 1, 2, \ldots$). Podobnie jak w przypadku ułamków łańcuchowych skończonych, liczby $a_1, a_2, \ldots$ będziemy nazywali *mianownikami ułamka łańcuchowego*, a liczbę $r_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ jego *n-tym reduktem.*

Definicja 1.4 ([40]). Jeśli w ułamku łańcuchowym (skończonym lub nieskończonym) wszystkie jego mianowniki są naturalne, a a_0 jest liczbą całkowitą, to taki ułamek nazywamy *arytmetycznym ułamkiem łańcuchowym* (odpowiednio *skończonym* lub *nieskończonym*).

Lemat 1.2 ([40]). *Niech $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$ będzie nieskończonym ułamkiem łańcuchowym. Wówczas $Q_n(a_0, \ldots, a_n) \geqslant n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Bazując na powyższym lemacie możemy wprowadzić następującą definicję.

Definicja 1.5 ([40])**.** Granicę

$$\lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

nazywamy *wartością ułamka łańcuchowego* $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$ i oznaczamy ją symbolem $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Twierdzenie 1.1 ([40])**.** *(i) Każda liczba wymierna jest wartością dokładnie dwóch arytmetycznych ułamków łańcuchowych. Obydwa te ułamki są ułamkami skończonymi i mają postać* $\langle a_0; a_1, ..., a_n\rangle$ $(a_n \geqslant 2)$ *i* $\langle a_0; a_1, ..., a_n - 1, 1\rangle$.

(ii) Każda liczba rzeczywista niewymierna jest wartością dokładnie jednego arytmetycznego ułamka łańcuchowego. Jest on ułamkiem nieskończonym.

(iii) Kolejne mianowniki ułamka łańcuchowego o danej wartości α możemy wyznaczyć ze wzorów rekurencyjnych

$$\lambda_0 = \alpha, \quad \lambda_{n+1} = \frac{1}{\{\lambda_n\}}, \quad a_n = \lfloor \lambda_n \rfloor.$$

Jeśli liczba α jest wymierna to w ten sposób otrzymamy ułamek, którego ostatni mianownik jest różny od 1.

Uwaga 1.1. Z powyższego twierdzenia wynika, że wartość nieskończonego ułamka łańcuchowego arytmetycznego jest liczbą niewymierną.

Poniższy lemat podaje oszacowania pomiędzy liczbą a jej reduktami.

Lemat 1.3 ([40])**.** *Jeżeli α jest wartością nieskończonego ułamka łańcuchowego $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$, a $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$ jest jego n-tym reduktem, to*

$$\frac{1}{2Q_nQ_{n+1}} < \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Jeśli ułamek $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$ jest arytmetyczny, to ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$ jest nieskracalny.

Uwaga 1.2. Z Lematu 1.2 wiemy, że $Q_n \geqslant n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd na podstawie Lematu 1.3 wnioskujemy, że

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Tym samym dla dowolnych ułamków łańcuchowych $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle$ oraz $\langle b_0; b_1, b_2, \ldots\rangle$ jeżeli $a_i = b_i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, to

$$\Big|[a_0, a_1, a_2, ...] - [b_0, b_1, b_2, ...]\Big| \leqslant$$

$$\Big|[a_0, a_1, a_2, ...] - \frac{P_n(a_0, ..., a_n)}{Q_n(a_0, ..., a_n)}\Big| + \Big|\frac{P_n(b_0, ..., b_n)}{Q_n(b_0, ..., b_n)} - [b_0, b_1, b_2, ...]\Big| \leqslant \frac{2}{n(n+1)}.$$

Następne cztery lematy, choć nie są trudne do udowodnienia, okażą się istotne przy konstruowaniu liczb niewymiernych w Rozdziale 3.

Lemat 1.4 ([16])**.** *Niech dany będzie nieskończony ułamek łańcuchowy arytmetyczny $\langle a_0; a_1, a_2, ...\rangle$. Wówczas:*

(i) nie istnieje wskaźnik $n \in \mathbb{N}$ taki, że Q_n oraz Q_{n+1} są liczbami parzystymi;

(ii) nie istnieje wskaźnik $n \in \mathbb{N}$ taki, że P_n oraz P_{n+1} są liczbami parzystymi.

Dowód. Przypuśćmy, że Q_n i Q_{n+1} są liczbami parzystymi. Niech s będzie najmniejszym indeksem takim, że Q_s oraz Q_{s+1} są liczbami parzystymi. Oczywiście $1 \leqslant s \leqslant n$. Ponieważ mamy

$$Q_{s+1} = a_{s+1}Q_s + Q_{s-1},$$

więc

$$Q_{s-1} = Q_{s+1} - a_{s+1}Q_s.$$

Wiemy, że Q_s i Q_{s+1} są parzyste, więc również Q_{s-1} jest również liczbą parzystą, co jest sprzeczne z definicją liczby s. Dowód przypadku (ii) jest analogiczny. □

Lemat 1.5 ([16])**.** *Niech dany będzie nieskończony ułamek łańcuchowy arytmetyczny $\langle a_0; a_1, a_2, ...\rangle$. Jeżeli istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że dla $n \geqslant k$ mianowniki a_n są liczbami nieparzystymi, to w ciągu $(\frac{P_n}{Q_n})_{n=1}^{\infty}$ występuje nieskończenie wiele ułamków o liczniku i mianowniku nieparzystym.*

Dowód. Przypuśćmy, że tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $(\frac{P_n}{Q_n})_{n=1}^{\infty}$ to ułamkami o liczniku i mianowniku nieparzystym. Wówczas istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ taki, że dla wszystkich $n \geqslant N$, P_n lub Q_n jest liczbą parzystą. Niech $M = \max[N, k]$. Wówczas dla każdego $n \geqslant M$, a_n jest liczbą nieparzystą oraz P_n lub Q_n jest liczbą parzystą. Dla $n \geqslant -1$, liczby P_n oraz Q_n są względnie pierwsze. Możliwe są dwa przypadki. Załóżmy, że P_M jest liczbą parzystą. Wówczas z Lematu 1.4, P_{M+1} jest liczbą nieparzystą. Ponadto Q_M jest nieparzyste oraz Q_{M+1} jest parzyste. Ponieważ

$$Q_{M+2} = a_{M+2}Q_{M+1} + Q_M, \tag{1.1}$$

oraz

$$P_{M+2} = a_{M+2}P_{M+1} + P_M, \tag{1.2}$$

więc P_{M+2} oraz Q_{M+2} są liczbami nieparzystymi. To jednak jest sprzeczne z założeniem.

Przypuśćmy teraz, że P_M jest liczbą nieparzystą. Wówczas Q_M jest liczbą parzystą, więc Q_{M+1} jest liczbą nieparzystą oraz P_{M+1} jest liczbą parzystą. Zgodnie z (1.1) oraz (1.2), wnioskujemy, że P_{M+2} i Q_{M+2} są liczbami nieparzystymi, co jest sprzeczne z założeniem.

□

Lemat 1.6. *Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje co najwyżej jedna liczba $z \in \mathbb{Z}$ taka, że*

$$|x - 2z| < 1.$$

Lemat 1.7 ([16])**.** *Jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k, z mamy*

$$|\alpha(2k+1) - 2z + 1| < 1$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Q}$ oraz $\frac{2p-1}{2k+1}$ jest n-tym reduktem ($n \geqslant 1$) liczby α, to $p = z$.

Dowód. Ponieważ $\frac{2p-1}{2k+1}$ jest n-tym reduktem liczby α, więc z Lematu 1.3 mamy

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

i dlatego

$$|\alpha(2k+1) - (2p-1)| = |\alpha Q_n - P_n| < \frac{1}{Q_{n+1}} \leqslant 1.$$

Zgodnie z Lematem 1.6 liczba z jest wyznaczona jednoznacznie. Stąd $p = z$. □

Na zakończenie tego paragrafu przypomnimy twierdzenie udowodnione przez Liouville'a.

Twierdzenie 1.2 ([40])**.** *Jeżeli α jest niewymierną liczba algebraiczną stopnia n, to istnieje stała $c > 0$ taka, że dla każdego $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}.$$

1.3. Funkcje jednostajnie prawie okresowe i ich podstawowe uogólnienia

W paragrafie tym przypomnimy podstawowe pojęcia i fakty związane z funkcjami jednostajnie prawie okresowymi oraz podamy kilka uogólnień funkcji jednostajnie prawie okresowych.

Definicja 1.6 ([50])**.** Niepusty podzbiór $E \subset \mathbb{R}$ nazywamy *względnie gęstym*, jeżeli istnieje liczba $\omega > 0$ taka, że w każdym przedziale otwartym zawartym w $\mathbb{R}$ o długości ω, istnieje co najmniej jeden element zbioru E. Mówimy wówczas, że liczba ω jest *liczbą charakteryzującą względną gęstość zbioru E.*

Definicja 1.7 ([9])**.** Liczbę rzeczywistą τ nazywamy *ε-prawie okresem* (w skrócie: ε-p.o.) funkcji $f \in C(\mathbb{R})$, jeżeli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Oznaczamy przez $E\{\varepsilon; f\}$ zbiór wszystkich ε-p.o. funkcji $f \in C(\mathbb{R})$. Innymi słowy dla $f \in C(\mathbb{R})$ oraz $\varepsilon > 0$ określamy zbiór

$$E\{\varepsilon; f\} := \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Definicja 1.8 ([9])**.** Funkcję $f \in C(\mathbb{R})$ nazywamy *jednostajnie prawie okresową* (w skrócie: jednostajnie p.o.) lub *prawie okresową w sensie Bohra* (w skrócie: B-p.o.), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $E\{\varepsilon; f\}$ jest względnie gęsty. Przez $\widetilde{B}$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji jednostajnie prawie okresowych.

Twierdzenie 1.3 ([9])**.** *Każda funkcja jednostajnie prawie okresowa jest jednostajnie ciągła i ograniczona.*

Kolejne twierdzenie opisuje graniczne zachowanie ciągu funkcji B-p.o.

Twierdzenie 1.4 ([9])**.** *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji B-p.o. jest funkcją B-p.o.*

Klasa funkcji prawie okresowych w sensie Bohra zawiera podklasę tak zwanych funkcji granicznie okresowych. Przypomnimy teraz ich definicję.

Definicja 1.9 ([4])**.** Mówimy, że ciągła funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicznie okresowa, jeżeli jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu ciągłych funkcji okresowych.

Wobec Twierdzenia 1.4 jest jasne, że przestrzeń $\widetilde{B}$ wyposażona w normę supremalną $\|\cdot\|_\infty$ jest przestrzenią metryczną zupełną, jako domknięta podprzestrzeń zupełnej przestrzeni $BC(\mathbb{R})$.

Następująca definicja posłuży do charakteryzacji funkcji jednostajnie prawie okresowych bez użycia pojęcia zbioru względnie gęstego.

Definicja 1.10 ([50], str. 25)**.** Mówimy, że funkcja $f \in BC(\mathbb{R})$ jest *normalna*, jeżeli rodzina funkcji $\{f_h : h \in \mathbb{R}\}$ jest warunkowo zwarta w przestrzeni metrycznej $BC(\mathbb{R})$, to znaczy każdy ciąg funkcji $(f_{h_n})_{n=1}^\infty$ zawiera podciąg $(f_{h_{n_k}})_{k=1}^\infty$ zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f_0 \in BC(\mathbb{R})$.

Kolejne twierdzenie w pełni charakteryzuje funkcje jednostajnie prawie okresowe w przestrzeni $BC(\mathbb{R})$.

Twierdzenie 1.5 ([50], str. 26)**.** *Funkcja $f \in BC(\mathbb{R})$ jest B-p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona funkcją normalną.*

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że funkcje jednostajnie prawie okresowe można równoważnie zdefiniować w następujący sposób, który pochodzi od Bochnera.

Definicja 1.11 ([6])**.** Funkcję $f \in BC(\mathbb{R})$ nazywamy *jednostajnie prawie okresową*, gdy rodzina funkcji $\{f_h : h \in \mathbb{R}\}$ jest warunkowo zwarta w przestrzeni metrycznej $BC(\mathbb{R})$.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że zbiór $\widetilde{B}$ posiada strukturę algebry przemiennej z jedynką.

Twierdzenie 1.6 ([50])**.** *Suma i iloczyn funkcji B-p.o. jest funkcją B-p.o.*

Z powyższego twierdzenia wynika między innymi, że liniowe kombinacje funkcji okresowych są funkcjami jednostajnie prawie okresowymi. W szczególności *uogólnione wielomiany trygonometryczne* postaci

$$w(x) = \sum_{n=1}^{k} \Big(a_n \sin(\lambda_n x) + b_n \cos(\lambda_n x) \Big), \tag{1.3}$$

gdzie $a_n, b_n, \lambda_n, \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant n \leqslant k$, są funkcjami B-p.o.

Uwaga 1.3 ([20])**.** Równoważnie, funkcje jednostajnie prawie okresowe definiuje się jako granice jednostajnie zbieżnych ciągów uogólnionych wielomianów trygonometrycznych w przestrzeni $BC(\mathbb{R})$.

Przejdziemy teraz do kilku podstawowych uogólnień pojęcia funkcji jednostajnie prawie okresowej. Zaczniemy od przypomnienia definicji funkcji prawie automorficznej w sensie Bochnera.

Definicja 1.12 ([21], [43], [44])**.** Ciągłą funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *prawie automorficzną* w sensie Bochnera, jeżeli każdy ciąg liczb rzeczywistych $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera podciąg $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ taki, że granica punktowa

$$g(x) := \lim_{k\to\infty} f(x + h_{n_k})$$

istnieje dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} g(x - h_{n_k}) = f(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga 1.4. Z Twierdzenia 1.5 wynika, że każda funkcja jednostajnie prawie okresowa jest prawie automorficzna. Ponadto funkcje prawie automorficzne są ograniczone (zob. [43]).

Kolejnym uogólnieniem klasy funkcji prawie okresowych w sensie Bohra jest klasa funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa.

Definicja 1.13 ([50])**.** Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ nazywamy S^p-*prawie okresową* (w skrócie: S^p-p.o.) lub *prawie okresową w sensie Stiepanowa z wykładnikiem* p, gdzie $p \in [1, +\infty)$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór

$$S^pE\{\varepsilon; f\}:=\Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{u\in\mathbb{R}}\Big(\int_u^{u+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon\Big\}$$

jest względnie gęsty. Dla uproszczenia często będziemy nazywali funkcje S^1-prawie okresowe funkcjami S-*prawie okresowymi* (w skrócie: S-p.o.).

Uwaga 1.5. Jeżeli funkcja f jest S^p-prawie okresowa ($p \in [1, +\infty)$), to jest ona S^p-ograniczona to znaczy

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{u\in\mathbb{R}}\Big(\int_u^{u+1} |f(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

(zob. [50, Twierdzenie 2.1] lub [33, Twierdzenie 5.2.2]). Ponadto funkcjonał $\|\cdot\|_{S^p}$ jest normą na przestrzeni funkcji S^p-prawie okresowych (zob. [50]).

Kolejnym uogólnieniem klasy funkcji jednostajnie prawie okresowych jest klasa funkcji prawie okresowych w sensie Weyla.

Definicja 1.14 ([50])**.** Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ nazywamy W^p-*prawie okresową* (w skrócie: W^p-p.o.) lub *prawie okresową w sensie Weyla z wykładnikiem* p, gdzie $p \in [1, +\infty)$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $l > 0$ takie, że zbiór

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{u\in\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{l}\int_u^{u+l} |f(t+\tau) - f(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon\Big\}$$

jest względnie gęsty.

Jednym z najszerszych uogólnień funkcji jednostajnie prawie okresowych jest klasa funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha.

Definicja 1.15 ([4])**.** Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ nazywamy B^p-*prawie okresową* (w skrócie: B^p-p.o.) lub *prawie okresową w sensie Besicovitcha z wykładnikiem* p, gdzie $p \in [1, +\infty)$, jeżeli istnieje ciąg uogólnionych wielomianów trygonometrycznych $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{l\to+\infty}\Big(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t) - w_n(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Przez $\widetilde{S}^p, \widetilde{W}^p, \widetilde{B}^p$ oznaczmy odpowiednio zbiór funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa, Weyla i Besicovitcha.

Wówczas dla $p \geqslant 1$ mamy

$$\widetilde{B} \subset \widetilde{S}^p \subset \widetilde{W}^p \subset \widetilde{B}^p.$$

Ponadto dla $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$ mamy następujące inkluzje

$$\widetilde{S}^{p_1} \subset \widetilde{S}^{p_2}, \quad \widetilde{W}^{p_1} \subset \widetilde{W}^{p_2}, \quad \widetilde{B}^{p_1} \subset \widetilde{B}^{p_2} \quad \text{(zob. [4])}.$$

W teorii funkcji prawie okresowych ważną rolę odgrywa następujące twierdzenia Kroneckera.

Twierdzenie 1.7 (Kronecker, [33]). *Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ oraz $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas układ nierówności*

$$|\lambda_i x - \theta_i| < \delta \quad (\text{mod } 2\pi) \quad \text{gdzie } i = 1, 2, ..., n,$$

posiada rozwiązanie dla dowolnego $\delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równości

$$l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 + ... + l_n\lambda_n = 0, \quad \text{gdzie } l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{Z},$$

wynika równość

$$l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + ... + l_n\theta_n = 0 \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Uwaga 1.6. Nierówność $|x| < \delta$ (mod 2π) oznacza, że istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $-\delta < x - 2k\pi < \delta$.

Uwaga 1.7. Samo sformułowanie Twierdzenia Kroneckera nie mówi nic o zbiorze rozwiązań powyższego układu nierówności. Jednakże z dowodu tego twierdzenia wynika, że zbiór tych rozwiązań jest względnie gęsty. W szczególnym przypadku, jeżeli $\theta_i = 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to wówczas warunek

$$l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + ... + l_n\theta_n = 0 \quad (\text{mod } 2\pi)$$

jest zawsze spełniony. Stąd dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ oraz $\delta > 0$ zbiór

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R} \colon |\tau\lambda_i| < \delta \quad (\text{mod } 2\pi) \text{ dla } i = 1, 2, ..., n\Big\}$$

jest względnie gęsty.

Uwaga 1.8. Powyższy rezultat można dodatkowo wzmocnić. Uzasadnimy, że dla $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ oraz $\alpha, \delta > 0$ zbiór

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R} \colon |\tau\lambda_i| < \delta \quad (\text{mod } 2\pi) \text{ dla } i = 1, 2, ..., n\Big\} \cap \alpha\mathbb{Z}$$

jest względnie gęsty. Ustalmy zatem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ oraz $\alpha, \delta > 0$. Niech $\lambda_{n+1} = \frac{2\pi}{\alpha}$. Dobierzmy $\delta' > 0$ tak, aby

$$\delta'\Big(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|\Big) < \delta.$$

Weźmy

$$x \in \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon |\tau\lambda_i| < \delta' \pmod{2\pi} \text{ dla } i = 1, 2, ..., n+1\Big\}. \tag{1.4}$$

Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$\Big|x - \alpha k\Big| < \frac{\delta'\alpha}{2\pi}. \tag{1.5}$$

Stąd dla $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy

$$|\lambda_i \alpha k| \leqslant |\lambda_i||\alpha k - x| + |\lambda_i x| < \delta.$$

To oznacza, że

$$\alpha k \in \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon |\tau\lambda_i| < \delta \pmod{2\pi} \text{ dla } i = 1, 2, ..., n\Big\} \cap \alpha\mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Względna gęstość powyższego zbioru wynika z (1.4), (1.5) oraz (1.6).

1.4. Funkcje prawie okresowe względem miary Lebesgue'a

W tym paragrafie zbierzemy podstawowe fakty dotyczące funkcji prawie okresowych względem miary Lebesgue'a. Dla $\eta > 0$ oraz $f, g \in L^0(\mathbb{R})$ przyjmujemy

$$D(\eta; f, g) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \mu\Big(\{x \in [u, u+1] : |f(x) - g(x)| \geqslant \eta\}\Big).$$

Ponadto przyjmujemy $D(\eta; f) := D(\eta; f, 0)$.

Definicja funkcji μ-prawie okresowej bazuje na pojęciu (ε, η)- prawie okresu funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$.

Definicja 1.16 ([49])**.** Niech $f \in L^0(\mathbb{R})$. Jeżeli dla $\varepsilon, \eta > 0$ mamy $D(\eta; f_\tau, f) \leqslant \varepsilon$, to liczbę rzeczywistą τ nazywamy *(ε, η)-prawie okresem* (w skrócie: (ε, η)-p.o.) funkcji f. Przez $E\{\varepsilon, \eta; f\}$ oznaczać będziemy zbiór (ε, η)-p.o. funkcji f to znaczy

$$E\{\varepsilon, \eta; f\} := \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{u \in \mathbb{R}} \mu\Big(\{x \in [u, u+1] : |f(x+\tau) - f(x)| \geqslant \eta\}\Big) \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Przypomnimy teraz definicję funkcji prawie okresowej względem miary Lebesgue'a.

Definicja 1.17 ([49])**.** Funkcję $f \in L^0(\mathbb{R})$ nazywamy *prawie okresową względem miary Lebesgue'a μ* (w skrócie *μ-p.o.*), jeżeli dla dowolnych liczb $\varepsilon, \eta > 0$ zbiór $E\{\varepsilon, \eta; f\}$ jest względnie gęsty. Przez $\widetilde{M}$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji μ-p.o.

Funkcje prawie okresowe względem miary Lebesgue'a można zdefiniować w pewien inny równoważny sposób.

Definicja 1.18 ([1])**.** Ustalmy $d > 0$. Funkcję $f \in L^0(\mathbb{R})$ nazywamy *mierzalnie prawie okresową*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R} : \forall u \in \mathbb{R} \quad \mu\Big(\{x \in [u, u+d] : |f(x+\tau) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\Big) < \varepsilon d\Big\}$$

jest względnie gęsty.

Przypomnimy teraz pojęcie μ-ciągłości.

Definicja 1.19 ([49])**.** Mówimy, że funkcja $f \in L^0(\mathbb{R})$ jest *μ-ciągła*, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall \eta > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall h \in \mathbb{R} \qquad |h| < \delta \Rightarrow D(\eta; f, f_h) < \varepsilon.$$

Związek μ-ciągłości z funkcjami μ-prawie okresowymi opisuje poniższe

Twierdzenie 1.8 ([49])**.** *Jeśli funkcja f jest μ-p.o., to f jest μ-ciągła.*

Bezpośrednią konsekwencją μ-ciągłości funkcji μ-p.o. jest poniższy lemat.

Lemat 1.8 ([49])**.** *Niech f będzie funkcją μ-p.o. Wówczas dla dowolnych liczb $\varepsilon, \eta > 0$ istnieją liczby $\delta, \omega > 0$ takie, że dla $h \in (0, \delta]$ w każdym przedziale otwartym o długości ω istnieje (ε, η)-p.o. funkcji f będący pewną całkowitoliczbową wielokrotnością liczby h.*

Jeżeli f jest μ-prawie okresową, to wprost z definicji zbiór $E\{\varepsilon, \eta; f\}$ jest względnie gęsty. Można jednak ten rezultat wzmocnić, co pokazuje poniższy lemat.

Lemat 1.9 (por. [29])**.** *Jeżeli f jest funkcją μ-p.o., to dla dowolnych $\varepsilon, \eta, \alpha > 0$ zbiór*

$$E\{\varepsilon, \eta; f\} \cap \alpha\mathbb{Z}$$

jest względnie gęsty.

Dowód. Ustalmy dowolne $\varepsilon, \eta, \alpha > 0$. Na podstawie Lematu 1.8 dla $\frac{\varepsilon}{2}$ oraz $\frac{\eta}{2}$ istnieją liczby $\omega, \delta > 0$ takie, że dla $h \in (0, \delta]$ w każdym przedziale długości ω istnieje $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2})$-p.o. τ funkcji f będący całkowitą wielokrotnością liczby h. Przy czym możemy zażądać, aby $\omega > \alpha$. Ustalmy $0 < h \leqslant \delta$ takie, że $h = \frac{\alpha}{k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas w każdym przedziale otwartym długości ω istnieje $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2})$-p.o. τ funkcji f oraz $\tau' \in \alpha\mathbb{Z}$, takie, że $\tau = n_1 h, \tau' = n_2 h$ dla pewnych $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Ponieważ zachodzi nierówność

$$|n_1 h - n_2 h| = |\tau - \tau'| < \omega,$$

więc istnieje tylko skończona liczba wartości

$$nh = (n_1 - n_2)h. \tag{1.7}$$

Rozważając dowolne przedziały otwarte długości ω znajdziemy wszystkie liczby całkowite n postaci (1.7). Oznaczmy je przez $m_1, \dots, m_r$. Wówczas każdej liczbie m_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ odpowiada para liczb (τ_i, τ_i') taka, że τ_i jest $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2})$-prawie okresem funkcji f oraz $\tau_i' \in \alpha\mathbb{Z}$. Ustalmy zatem układ par

$$(\tau_1, \tau_1'), \quad \dots, \quad (\tau_r, \tau_r').$$

Oznaczmy

$$\omega_0 := \max_{1 \leqslant k \leqslant r} |\tau_k|.$$

Rozważmy dowolny przedział otwarty $(a, a+\omega+2\omega_0)$ o długości $\omega+2\omega_0$. W przedziale $(a + \omega_0, a + \omega_0 + \omega)$ wybierzmy $\tau \in E\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2}; f\}$ oraz $\tau' \in \alpha\mathbb{Z}$ postaci

$$\tau = n_1 h \qquad \text{oraz} \qquad \tau' = n_2 h$$

dla pewnych $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Wówczas $\tau - \tau' = m_s h$ dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant r$. Ponadto mamy

$$\tau - \tau' = m_s h = \tau_s - \tau_s'.$$

Niech

$$\tau'' := \tau - \tau_s = \tau' - \tau_s'.$$

Wówczas $\tau'' \in (a, a+\omega+2\omega_0)$ oraz τ'' jest (ε, η)-p.o. dla funkcji f, gdyż jest różnicą dwóch $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2})$-p.o. funkcji f. Ponadto z określenia τ'' mamy $\tau'' \in \alpha\mathbb{Z}$. Stąd w naszym przypadku $\tau'' \in E\{\varepsilon, \eta; f\} \cap \alpha\mathbb{Z}$. Z dowolności $a \in \mathbb{R}$ wnioskujemy, że w każdym przedziale otwartym długości $\omega + 2\omega_0$ znajdzie się element $\tau'' \in E\{\varepsilon, \eta; f\} \cap \alpha\mathbb{Z}$. Stąd zbiór $E\{\varepsilon, \eta; f\} \cap \alpha\mathbb{Z}$ jest względnie gęsty. □

Uwaga 1.9 ([48])**.** Zbiór funkcji μ-p.o. jest algebrą przemienną z jedynką.

Uwaga 1.10. Łatwo można pokazać, że każda funkcja S^p-prawie okresowa jest μ-p.o., gdyż dla $\varepsilon, \eta > 0$ mamy

$$S^p E\{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\eta; f\} \subset E\{\varepsilon, \eta; f\}.$$

Omówimy teraz naturalną topologię określoną na przestrzeni funkcji μ-p.o.

Definicja 1.20 ([49])**.** Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $f_n \in L^0(\mathbb{R})$ dla $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *D-zbieżnym* do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \eta > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad D(\eta; f_n, f) < \varepsilon.$$

Podamy teraz definicję pewnego funkcjonału na przestrzeni $L^0(\mathbb{R})$.

Definicja 1.21 ([49])**.** Dla $f \in L^0(\mathbb{R})$ definiujemy funkcjonał $|\!|\cdot|\!| : L^0(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ wzorem

$$|\!|f|\!| := \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\mathrm{d}t.$$

Uwaga 1.11. Funkcja określona wzorem $d(f,g) := |\!|f-g|\!|$, dla $f, g \in L^0(\mathbb{R})$, definiuje metrykę na zbiorze $L^0(\mathbb{R})$. Można uzasadnić, że zbieżność według tej metryki jest równoważna D-zbieżności (zob. [49]).

Następne twierdzenie dotyczy granicznego zachowania funkcji μ-p.o. w sensie D-zbieżności.

Twierdzenie 1.9 ([49])**.** *Jeżeli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni $\widetilde{M}$ jest D-zbieżny do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$, to $f \in \widetilde{M}$.*

Następujący lemat pozwala konstruować przykłady funkcji μ-p.o.

Lemat 1.10. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcji okresowych takich, że*

$$\operatorname{supp} f_n \subset \Big[2^n, 2^n+1\Big] + 2^{n+1}\mathbb{Z} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

oraz takich, że

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu\Big([u, u+1] \cap \operatorname{supp} f_n\Big) = 0.$$

Niech ponadto

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{dla } x \in [2^n, 2^n+1] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wówczas funkcja f jest dobrze określona oraz jest ona μ-p.o.

Dowód. Oznaczmy zbiory

$$A_n = 2^n + 2^{n+1}\mathbb{Z} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Istotnie, mamy $A_1 = 2 + 4\mathbb{Z}$. Niech $z = 2^k(1+2l)$, gdzie $k \geqslant 2, l \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$z = 2^k + 2^{k+1}l \in A_k.$$

Przypuśćmy, że $0 \in A_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$0 = 2^n + 2^{n+1}k \Rightarrow 0 = 2^n(1 + 2k).$$

Jest to jednak niemożliwe, gdyż prawa strona powyższej nierówności jest iloczynem dwóch liczb niezerowych. Ponadto

$$A_{n+1} \subset 2\mathbb{Z} \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_n) = 2^{n+1}\mathbb{Z} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności z powyższego wynika, że funkcja f jest dobrze określona, ponieważ zbiory

$$A_n + [0, 1] \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

są parami rozłączne. Pokażemy teraz, że f jest μ-p.o. Niech

$$g_k(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + 1] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, 1 \leqslant n \leqslant k, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Z rozłączności zbiorów $[2^n, 2^n + 1] + 2^{n+1}\mathbb{Z}$, dla $n \in \mathbb{N}$, mamy $g_k = f_1 + ... + f_k$. Zatem g_k są funkcjami μ-p.o. takimi, że

$$\operatorname{supp}(f - g_k) \subset \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp} f_n \subset [0, 1] + 2^{k+1}\mathbb{Z}.$$

Ponadto ciąg $(g_k)_{k=1}^{+\infty}$ jest D-zbieżny do funkcji f gdyż dla $\eta > 0$ mamy

$$D(\eta; f, g_k) \leqslant \sup_{n>k} \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu\Big([u, u + 1] \cap \operatorname{supp} f_n\Big).$$

$\square$

Określimy teraz pewną podklasę przestrzeni $L^0(\mathbb{R})$.

Definicja 1.22 ([49])**.** Niech $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ustalonym ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas definiujemy

$$\widetilde{\mathcal{X}}{:=}\Big\{f \in L^0(\mathbb{R}) : \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu\Big(\{x \in [u, u + 1] : \lambda_n|f(x)| \geqslant 1\}\Big) \to 0 \text{ przy } n \to \infty\Big\},$$

czyli

$$\widetilde{\mathcal{X}}{:=}\Big\{f \in L^0(\mathbb{R}) : D(1; \lambda_n f) \to 0 \text{ przy } n \to \infty\Big\}.$$

Zauważmy, że powyżej określona przestrzeń $\widetilde{\mathcal{X}}$ nie zależy od wyboru ciągu $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$.

Twierdzenie 1.10 ([49])**.** *Jeżeli f jest μ-p.o., to $f \in \widetilde{\mathcal{X}}$.*

Poniższe twierdzenie dostarcza kolejnych nietrywialnych przykładów funkcji μ-p.o.

Twierdzenie 1.11 ([49])**.** *Niech $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ będzie ograniczoną i holomorficzną funkcją na Ω, gdzie $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : -a < y < a\}$ dla pewnego ustalonego $a > 0$. Załóżmy, że funkcja $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, jest funkcją jednostajnie prawie okresową. Wówczas funkcja f zdefiniowana wzorem:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{g(x)} & \text{gdy } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } g(x) = 0, \end{cases}$$

jest μ-p.o.

Wniosek 1.1. *Niech $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie uogólnionym wielomianem trygonometrycznym postaci* (1.3)*. Wówczas funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(x)} & \text{gdy } w(x) \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } w(x) = 0, \end{cases}$$

jest μ-p.o.

Przykład 1.1 (por. [16])**.** W szczególnym przypadku, gdy uogólniony wielomian trygonometryczny w jest stałego znaku i $\inf_{x\in\mathbb{R}}|w(x)| = 0$, to odwrotność tego wielomianu jest przykładem nieograniczonej i ciągłej funkcji μ-p.o. Dla przykładu rozważmy uogólniony wielomian trygonometryczny $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$w(x) = 2 + \cos(x) + \cos(\alpha x) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Wówczas funkcja

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)}$$

jest ciągłą i nieograniczoną funkcją μ-p.o. Istotnie, zauważmy wpierw, że z niewymierności liczby α mamy $2 + \cos(x) + \cos(x\alpha) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto z Twierdzenia Kroneckera wiemy, że

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}(2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)) = 0.$$

Istotnie, ponieważ z równości

$$l_1\alpha + l_2 = 0 \quad \text{dla pewnych } l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$$

wynika, że $l_1 = l_2 = 0$. Tym samym

$$l_1\pi + l_2\pi = 0,$$

więc na mocy Twierdzenia Kroneckera wiemy, że układ nierówności

$$\begin{cases} |\alpha x - \pi| < \delta \pmod{2\pi}, \\ |x - \pi| < \delta \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

ma rozwiązanie dla dowolnego $\delta > 0$.

1.5. Funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana

W paragrafie tym zbierzemy podstawowe fakty dotyczące funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. W literaturze funkcje te nazywane są również funkcjami N-prawie okresowymi.

Jedna z wielu definicji funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana bazuje na pojęciu $[N, \varepsilon]$-prawie okresu funkcji.

Definicja 1.23 ([33])**.** Liczbę rzeczywistą τ nazywamy $[N, \varepsilon]$-*prawie okresem* funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (w skrócie : $[N, \varepsilon]$-p.o.), jeżeli $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ dla $|x| < N$.

Używając pojęcia $[N, \varepsilon]$-prawie okresu funkcji możemy zdefiniować funkcję prawie okresową w sensie Lewitana w następujący sposób.

Definicja 1.24 ([33])**.** Ciągłą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *prawie okresową w sensie Lewitana* (w skrócie: LAP), jeżeli dla dowolnych $N, \varepsilon > 0$ istnieją $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$ takie, że każda liczba τ, która spełnia nierówności $|\lambda_r \tau| < \delta$ (mod 2π) dla $r = 1, 2, ..., p$, jest $[N, \varepsilon]$-p.o. funkcji f. Oznaczmy przez $\widetilde{L}$ zbiór wszystkich funkcji LAP.

Uwaga 1.12 ([33])**.** Zbiór funkcji LAP jest algebrą przemienną z jedynką.

Uwaga 1.13 ([33], [34])**.** Każda funkcja jednostajnie prawie okresowa jest LAP.

Przypomnimy teraz podstawowe fakty dotyczące funkcji LAP, które będą użyteczne w dalszej części pracy.

Twierdzenie 1.12 (por. [15])**.** *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji LAP jest LAP.*

Dowód. Fakt ten wynika z nierówności

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant |f(x+\tau) - f_{n_0}(x+\tau)| + |f_{n_0}(x+\tau) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|,$$

gdzie n_0 jest odpowiednio wybranym wskaźnikiem. □

Twierdzenie 1.13 ([50])**.** *Jeżeli $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie prawie okresową oraz $f\colon g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to złożenie $f \circ g$ jest funkcją prawie okresową w sensie Lewitana.*

Przykład 1.2 (por. [33])**.** Jeżeli w jest wielomianem trygonometrycznym stałego znaku, to przyjmując w Twierdzeniu 1.13 $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $g = w$ wnioskujemy, że $\frac{1}{w(x)}$ jest funkcją LAP. Dlatego dla $\alpha \notin \mathbb{Q}$ funkcja

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)}$$

jest ciągłą i nieograniczoną funkcją LAP (por. Przykład 1.1).

Udowodnimy teraz użyteczny lemat, który pozwala konstruować przykłady funkcji LAP.

Lemat 1.11 ([42])**.** *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji okresowych o okresach odpowiednio $2 \cdot 3^{n+1}$ takich, że*

$$\operatorname{supp} f_n \subset \Big[3^n, 3^n + 1\Big] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z} \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Niech ponadto

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & \textit{dla } x \in [3^n, 3^n+1] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wówczas funkcja f jest dobrze określona oraz jest ona LAP.

Dowód. Funkcja f jest dobrze określona ponieważ zbiory $[3^n, 3^n + 1] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}$, dla $n \in \mathbb{N}$, są parami rozłączne. Ustalmy $N, \varepsilon > 0$. Wybierzmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $3^{n_0} \geqslant N + 1$. Zdefiniujmy

$$A_{n_0} = \Big[-3^{n_0}, 3^{n_0}\Big] + 2 \cdot 3^{n_0+1}\mathbb{Z}$$

oraz

$$B_n = \Big(3^n, 3^n + 1\Big) + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Najpierw pokażemy, że $A_{n_0} \cap B_n = \emptyset$ dla $n > n_0$. Ponieważ $2 \cdot 3^{n+1} + A_{n_0} = A_{n_0}$ oraz $2 \cdot 3^{n+1} + B_n = B_n$, dla $n > n_0$, więc wystarczy pokazać, że

$$A_{n_0} \cap B_n \cap \Big[3^n + 1 - 2 \cdot 3^{n+1}, 3^n + 1\Big] = \emptyset.$$

Mamy

$$B_n \cap \Big[3^n + 1 - 2 \cdot 3^{n+1}, 3^n + 1\Big] = \Big(3^n, 3^n + 1\Big).$$

Pokażemy, że dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n > n_0$ mamy

$$\Big(\Big[-3^{n_0}, 3^{n_0}\Big] + 2k \cdot 3^{n_0+1}\Big) \cap \Big(3^n, 3^n + 1\Big) = \emptyset. \tag{1.9}$$

Dla $n = n_0 + 1$ mamy $3^{n_0} < 3^n$ oraz $-3^{n_0} + 2 \cdot 3^{n_0+1} > 3^n + 1$. Wówczas warunek (1.9) jest spełniony.

Dla $n > n_0 + 1$ mamy

$$3^{n_0} + 2 \cdot 3^{n_0} + (2 \cdot 3^{n_0+1} + ... + 2 \cdot 3^{n-1}) = 3^n. \tag{1.10}$$

Stąd

$$3^{n_0} + (2 \cdot 3^{n_0+1} + ... + 2 \cdot 3^{n-1}) < 3^n$$

oraz dodając obustronnie do nierówności (1.10) liczbę $2 \cdot 3^{n_0+1} - 4 \cdot 3^{n_0}$ otrzymujemy

$$-3^{n_0} + 2 \cdot 3^{n_0+1} + (2 \cdot 3^{n_0+1} + ... + 2 \cdot 3^{n-1}) = 3^n + 2 \cdot 3^{n_0+1} - 4 \cdot 3^{n_0} > 3^n + 1.$$

Znaleźliśmy liczbę $s \in \mathbb{N}$ taką, że

$$3^{n_0} + 2s \cdot 3^{n_0+1} < 3^n$$

oraz

$$-3^{n_0} + 2(s+1) \cdot 3^{n_0+1} > 3^n + 1.$$

Oznacza to, że (1.9) jest spełniony i dlatego zbiory A_{n_0}, B_n są rozłączne dla $n > n_0$. Dla $n \leqslant n_0$ i $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$x \in B_n \Leftrightarrow \quad x + 2k \cdot 3^{n_0+1} \in B_n$$

Dlatego dla $|x| \leqslant N + 1$ oraz $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$f(x + 2k \cdot 3^{n_0+1}) - f(x) = 0$$

gdyż $x, x + 2k \cdot 3^{n_0+1} \in A_{n_0}$ i zgodnie z (1.8) mamy

$$x \notin B_n \quad \Rightarrow f_n(x) = 0, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \ (f_n \text{ są ciągłe}).$$

Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-N-1, N+1]$. Istnieje zatem $\delta \in (0,1)$ takie, że dla $x, y \in [-N-1, N+1]$, jeżeli $|x-y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Niech $\tau = 2k \cdot 3^{n_0+1} + h$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, |h| < \delta$. Wówczas dla $|x| \leqslant N$ mamy

$$|f(x+\tau) - f(x)| = |f(x + h + 2k \cdot 3^{n_0+1}) - f(x)| = |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pokazaliśmy, że każda liczba τ która spełnia nierówność

$$\Big|\frac{2\pi}{2 \cdot 3^{n_0+1}}\tau\Big| < \frac{2\pi\delta}{2 \cdot 3^{n_0+1}} \pmod{2\pi}$$

jest $[N, \varepsilon]$-p.o. funkcji f. Oznacza to, że f jest LAP. □

Rozdział **2**

Relacje pomiędzy wybranymi klasami funkcji prawie okresowych

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że pomiędzy rozważanymi w nim klasami funkcji prawie okresowych zachodzą następujące inkluzje

$$\widetilde{B} \subset \widetilde{S}^p \subset \widetilde{M} \quad (p \geqslant 1) \quad \text{oraz} \quad \widetilde{B} \subset \widetilde{L}.$$

W rozdziale tym porównamy klasy $\widetilde{M}$ oraz $\widetilde{L}$. Oczywiście jeżeli chcemy porównać obydwie klasy powinniśmy rozważyć klasę ciągłych funkcji μ-p.o. W rzeczywistości porównamy ze sobą te klasy przy silnych ograniczeniach na obydwie klasy. Jednocześnie podamy odpowiedź na jeden z otwartych problemów związanych z funkcjami prawie automorficznymi.

Pierwszy przykład tego rozdziału pokazuje, że istnieje jednostajnie ciągła i ograniczona funkcja LAP, która nie jest μ-p.o.

Przykład 2.1 ([42])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{dla} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big([3^n, 3^n+1] + 2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}\Big), \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z Lematu 1.11 funkcja f jest LAP. Ponadto funkcja f jest jednostajnie ciągła i ograniczona. Pokażemy, że funkcja ta nie jest μ-p.o.

Załóżmy niewprost, że f jest μ-p.o. Niech $A_n = 3^n + 2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ mamy

$$\mu\Big(\{x \in [z, z+1]\colon |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\}\Big) = \frac{2}{3}.$$

Z Lematu 1.9 zbiór

$$E\Big\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\Big\} \cap 18\mathbb{Z}$$

jest względnie gęsty.

Jeżeli $\tau \in E\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\} \cap 18\mathbb{Z}$ oraz $z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, to $\tau + z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Istotnie, przypuśćmy, że $\tau + z \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Wówczas

$$\mu\Big(\{x \in [z, z+1] \colon |f(x+\tau) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\}\Big) = \mu\Big(\{x \in [z, z+1] \colon |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\}\Big) = \frac{2}{3}.$$

Oznacza to, że $\tau \notin E\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\}$.

Ponieważ zbiór $E\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\}$ jest symetryczny, dla $\tau \in E\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\}$ oraz $z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ mamy $-\tau + z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Prowadzi to do równości

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\tau + A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{2.1}$$

Ustalmy $\tau \in 18\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Niech $\tau = 2 \cdot 3^{s+1} m$, dla pewnych $s \in \mathbb{N}, m \notin 3\mathbb{Z}$. Każdy zbiór A_n, dla $n \leqslant s$, spełnia $2 \cdot 3^{s+1} m + A_n = A_n$. Dlatego

$$\bigcup_{n=1}^{s} (\tau + A_n) = \bigcup_{n=1}^{s} A_n.$$

Zbiory $\tau + A_n$, dla $n \in \mathbb{N}$, są parami rozłączne oraz zbiory A_n, dla $n \in \mathbb{N}$, również są parami rozłączne, więc równość (2.1) jest równoważna równości

$$\bigcup_{n=s+1}^{+\infty} (\tau + A_n) = \bigcup_{n=s+1}^{+\infty} A_n$$

lub równoważna równości

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} (2m + 3^{i-1} + 2 \cdot 3^i \mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (3^{i-1} + 2 \cdot 3^i \mathbb{Z}).$$

Pokażemy, że powyższa równość prowadzi do sprzeczności.

Dla $i = 2$ oraz dowolnego $z_1 \in \mathbb{Z}$ istnieje $j \geqslant 1, z_2 \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$2m + 3 + 18z_1 = 3^{j-1} + 2 \cdot 3^j z_2.$$

Przypuśćmy, że $j > 1$. Wówczas

$$2m = -3 - 18z_1 + 3^{j-1} + 2 \cdot 3^j z_2 = 3(-1 - 6z_1 + 3^{j-2} + 2 \cdot 3^{j-1} z_2).$$

Dlatego $2m \in 3\mathbb{Z}$, lecz jest to niemożliwe, gdyż $m \notin 3\mathbb{Z}$. Dlatego dla $i = 2$ mamy $j = 1$. Wówczas

$$2m + 3 + 18z_1 = 1 + 6z_2$$

oraz $m + 1 = -9z_1 + 3z_2$. Zatem liczba m spełnia $m + 1 \in 3\mathbb{Z}$.

Ponadto dla $i = 1$ oraz dowolnego $z_1 \in \mathbb{Z}$ istnieje $j \geqslant 1, z_2 \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$2m + 1 + 6z_1 = 3^{j-1} + 2 \cdot 3^j z_2.$$

przypuśćmy, że $j > 1$. Wówczas

$$2m + 1 = -6z_1 + 3^{j-1} + 2 \cdot 3^j z_2 = 3(-2z_1 + 3^{j-2} + 2 \cdot 3^{j-1} z_2),$$

więc $2m + 1 \in 3\mathbb{Z}$. To implikuje, że $m \in 3\mathbb{Z}$, gdyż wiemy, że $m + 1 \in 3\mathbb{Z}$. Dlatego dla $i = 1$ mamy $j = 1$ oraz

$$2m + 1 + 6z_1 = 1 + 6z_2.$$

Otrzymujemy, że $m = -3z_1 + 3z_2$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $m \notin 3\mathbb{Z}$. Pokazaliśmy zatem, że dla $\tau \in 18\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mamy

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\tau + A_n) \neq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

więc $\tau \notin E\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; f\}$. Tym samym f nie jest μ-p.o.

Uwaga 2.1. Powyższy przykład jest rozwiązaniem jednego z otwartych problemów związanego z funkcjami prawie automorficznymi i jednostajnie prawie okresowymi. Należało podać w sposób jawny przykład jednostajnie ciągłej funkcji prawie automorficznej, która nie jest jednostajnie prawie okresowa. W niniejszej rozprawie nie zajmujemy się funkcjami prawie automorficznymi, lecz podkreślmy, że klasa jednostajnie ciągłych funkcji prawie automorficznych pokrywa się z klasą jednostajnie ciągłych funkcji LAP, więc problem ten można sformułować w terminach funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do pracy [2], w której Basit i Günzler postawili ten problem.

Następny przykład pokazuje ciągłą i ograniczoną funkcję μ-p.o., która nie jest prawie okresowa w sensie Lewitana.

Przykład 2.2 (por. [42])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi n x), & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{n}] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z Lematu 1.10 wynika, że funkcja f jest μ-p.o. Ponadto f jest funkcją ciągła, gdyż jest ciągła na każdym przedziale $[z, z + 1]$, dla $z \in \mathbb{Z}$. Z konstrukcji funkcji f, dla $x \in [0, 1]$ mamy $f(x) = 0$. Oznaczmy $A_n = 2^n + 2^{n+1}\mathbb{Z}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $\tau \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Z Lematu 1.10 wiemy, że $\tau \in A_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z określenia funkcji f mamy $f(\tau + \frac{1}{4n}) = 1$. Zatem

$$f\Big(\tau + \frac{1}{4n}\Big) - f\Big(\frac{1}{4n}\Big) = 1 > \frac{1}{2}$$

Stąd jeżeli $\tau \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to τ nie jest $[1, \frac{1}{2}]$-p.o. funkcji f. Z Lematu 1.11 oraz Uwagi 1.8 funkcja f nie jest LAP.

Uwaga 2.2 ([42])**.** Każda jednostajnie ciągła i ograniczona funkcja μ-p.o. jest jednostajnie prawie okresowa (zob. [49]); jest więc również LAP (Uwaga 1.13). Dlatego nie istnieje jednostajnie ciągła i ograniczona funkcji μ-p.o., która nie jest LAP.

Rozdział 3

Operator splotu

W rozdziale tym zbadamy operator splotu określony na przestrzeni funkcji prawie okresowych względem miary Lebesgue'a oraz na przestrzeni funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. Najpierw jednak przypomnimy pewien rezultat dotyczący klasy funkcji jednostajnie prawie okresowych.

Twierdzenie 3.1 ([13])**.** *Jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową w sensie Bohra oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, to splot $f * g$ określony wzorem*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t,$$

jest funkcją prawie okresową w sensie Bohra.

Dla uogólnionych funkcji prawie okresowych, w szczególności ze względu na zastosowanie w teorii równań różniczkowych, interesować nas będzie splot z funkcją $g_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\lambda < 0)$ określoną wzorem

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}, & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Uwaga 3.1. Zauważmy, że

$$(f * g_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_\lambda(x-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{\lambda(x-t)}\mathrm{d}t = e^{\lambda x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Ponadto istnienie splotu $f * g_\lambda$ (dla każdego $x \in \mathbb{R}$) funkcji lokalnie całkowalnej f z funkcją g_λ jest równoważne warunkowi

$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t < +\infty.$$

Dodajmy również, że dla funkcji lokalnie całkowalnej f, jeżeli istnieje splot $f * g_\lambda$, to jest on funkcją ciągłą, gdyż funkcja $t \mapsto f(t)e^{-\lambda t}$ jest lokalnie całkowalna.

3.1. Splot z funkcjami μ-prawie okresowymi

W niniejszym paragrafie zajmiemy się splotem funkcji μ-p.o. z lokalnie całkowalnymi funkcjami μ-p.o. Zaczniemy od przypomnienia rezultatu dla klasy funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa.

Twierdzenie 3.2 ([13]). *Jeżeli f jest funkcją prawie okresową w sensie Stiepanowa z wykładnikiem $p \geqslant 1$ oraz g jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a, to splot $f * g$ jest funkcją prawie okresową w sensie Stiepanowa z wykładnikiem p.*

Podamy teraz udowodniony przez Stiepanowa warunek na to, by funkcja μ-prawie okresowa była funkcją S-prawie okresową.

Twierdzenie 3.3 (zob. [48]). *Niech $f \in L^0(\mathbb{R})$ będzie funkcją μ-prawie okresową. Wówczas funkcja f jest S^1-prawie okresowa wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{A\subseteq[u,u+1] \\ \mu(A)\leqslant\delta}} \int_A |f(t)|\mathrm{d}t \to 0, \qquad \textit{przy } \delta \to 0^+. \tag{3.1}$$

Poniższe twierdzenie pokazuje, że splot funkcji S-p.o. z funkcją g_λ istnieje oraz jest funkcją jednostajnie prawie okresową (w szczególności μ-p.o.).

Twierdzenie 3.4 ([16]). *Jeżeli funkcja μ-p.o. f spełnia warunek* (3.1)*, to splot $f * g_\lambda$ istnieje dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz jest funkcją jednostajnie prawie okresową.*

Dowód. Najpierw udowodnimy istnienie splotu $f * g_\lambda$. Mamy

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \sum_{-n=0}^{+\infty} \int_{n-1}^n |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\sum_{-n=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \int_{n-1}^n |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty,$$

gdyż z warunku (3.1) wynika

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$$

oraz wiadomo, że szereg

$$\sum_{-n=0}^{+\infty} e^{-\lambda n}$$

jest zbieżny. Z uwagi 3.1 splot istnieje.

Pokażemy teraz, że $f * g_\lambda$ jest funkcją jednostajnie prawie okresową. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ f spełnia warunek (3.1), istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{A\subseteq[u,u+1] \\ \mu(A)\leqslant\delta}} \int_A |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sum_{-n=-1}^{+\infty} e^{-\lambda n}}.$$

Ponadto niech
$$\eta' = \frac{\varepsilon}{3\sum_{-n=-1}^{+\infty} e^{-\lambda n}} \quad \text{oraz} \quad \tau \in E\{\delta, \eta'; f\}.$$
Dla $u \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy zbiory
$$A_u = \{t \in [u, u+1] : |f(t+\tau) - f(t)| \geqslant \eta'\} \quad \text{oraz} \quad A'_u = [u, u+1] \setminus A_u.$$
Wówczas dla $x \in \mathbb{R}$ mamy
$$\begin{aligned}|(f * g_\lambda)(x+\tau) - (f * g_\lambda)(x)| &= |e^{\lambda(x+\tau)} \int_{-\infty}^{x+\tau} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t - e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| \\ &\leqslant e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} |f(t+\tau) - f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant e^{\lambda [x]} \int_{-\infty}^{[x]+1} |f(t+\tau) - f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= e^{\lambda[x]} \sum_{-n=-[x]}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} |f(t+\tau) - f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= e^{\lambda[x]} \sum_{-n=-[x]}^{+\infty} e^{-\lambda(n+1)} \int_{n}^{n+1} |f(t+\tau) - f(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$
$$e^{\lambda[x]} \sum_{-n=-[x]}^{+\infty} e^{-\lambda(n+1)}\Big(\int_{A_{n+\tau}} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{A_n} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{A'_n} |f(t+\tau) - f(t)|\mathrm{d}t\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Oznacza to, że $E\{\delta, \eta'; f\} \subset E\{\varepsilon; f * g_\lambda\}$. Oczywiście jeżeli splot istnieje, to jest on funkcją ciągłą (Uwaga 3.1). Stąd $f * g_\lambda$ jest jednostajnie prawie okresowy. $\square$

Podamy teraz przykład nietrywialnej funkcji μ-prawie okresowej, która spełnia warunek (3.1).

Przykład 3.1. Zdefiniujmy ciąg funkcji $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ określony wzorem
$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{n^2}] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z Lematu 1.10 funkcja f jest μ-p.o. Pokażemy teraz, że f spełnia warunek (3.1). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy n_0 tak, aby $\frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon$. Niech $\delta = \frac{1}{n_0^2}$. Oznaczmy $A_n = 2^n + 2^{n+1}\mathbb{Z}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $u \in \mathbb{R}$ oraz zbiór $A \subset [u, u+1]$ taki, że $\mu(A) \leqslant \delta$. Istnieje wówczas co najwyżej jedna liczba $z \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ taka, że $[u, u+1] \cap [z, z+1] \neq \emptyset$. Ponadto z Lematu 1.10 wiemy, że $\operatorname{supp} f \subset [0,1] + 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Przypuśćmy, że $[u, u+1] \cap [z, z+1] \neq \emptyset$ dla pewnego $z \in A_n$. Gdy $n \leqslant n_0$ to mamy
$$\int_A f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{[z,z+\delta])} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{[z,z+\delta]} n\mathrm{d}t = \delta n \leqslant \delta n_0 = \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

Gdy $n > n_0$ to mamy

$$\int_A f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{[z,z+\delta])} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[z,z+\frac{1}{n^2}]} n\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

Jeżeli $[u, u+1] \cap [z, z+1] = \emptyset$ dla każdego $z \in A_n$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to wówczas mamy

$$\int_A f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

W obu przypadkach

$$\int_A f(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

Dlatego warunek (3.1) jest spełniony oraz $f * g_\lambda$ jest funkcją jednostajnie prawie okresową.

Uwaga 3.2. Zauważmy, że z Twierdzenia 3.2 wynika, że splot $f * g_\lambda$ funkcji S-p.o. z funkcją g_λ jest funkcją S-p.o. Twierdzenie 3.4 wzmacnia zatem ten rezultat.

Poniższy przykład pokazuje, iż w ogólności splot funkcji S-p.o. z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a nie musi być funkcją jednostajnie prawie okresową.

Przykład 3.2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}, & \text{dla } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{dla } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Niech ponadto

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{dla } x \in [-1, 0), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Oczywiście f jest lokalnie całkowalną funkcją okresową. Warunek (3.1) wynika z absolutnej ciągłości całki. Ponadto $g \in L^1(\mathbb{R})$. Splot $f * g$ nie jest funkcją jednostajnie prawie okresową, gdyż dla $h \in (0, 1)$ mamy

$$(f * g)(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(h-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(h-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{h}^{h+1} f(t)g(h-t)\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\int_h^1 f(t)g(h-t)\mathrm{d}t = \int_h^1 \frac{1}{\sqrt{t(t-h)}}\mathrm{d}t \geqslant \int_h^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln h.$$

Stąd splot nie jest funkcją ograniczoną. Nie jest zatem również funkcją jednostajnie prawie okresową (zob. Twierdzenie 1.3). Jednakże z Twierdzenia 3.2, splot jest S-p.o.

Następujący przykład pokazuje, że istnienie splotu funkcji μ-prawie okresowej z funkcją $g \in L^1(\mathbb{R})$ nie musi implikować, że splot ten jest funkcją μ-prawie okresową.

Przykład 3.3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{n}] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wobec Lematu 1.10, f jest funkcją μ-p.o. Niech $g = \chi_{[0,1]}$ będzie funkcją charakterystyczną przedziału $[0,1]$. Wówczas splot $f * g$ istnieje dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, jednakże, nie jest μ-p.o. Istotnie, dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x-t)\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Oznaczmy $A_n = 2^n + 2^{n+1}\mathbb{Z}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $z \in A_n$ mamy

$$\int_z^{z+\frac{1}{2n}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{2}. \tag{3.2}$$

Dla $x \in [z + \frac{1}{2}, z+1]$ mamy

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_z^{z+\frac{1}{2n}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{2}.$$

Skąd dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}} \mu(\{x \in [z, z+1] : (f * g)(x) \geqslant \frac{n}{2}\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zatem $f * g \notin \widetilde{\mathcal{X}}$. Tym samym na podstawie Twierdzenia 1.10 splot $f * g$ nie jest μ-p.o.

Poniższe twierdzenia podaje warunek dostateczny na to by splot funkcji μ-prawie okresowej z funkcją g_λ nie był funkcją μ-prawie okresową.

Twierdzenie 3.5 ([16])**.** *Niech f będzie nieujemną funkcją lokalnie całkowalną. Jeżeli splot $f * g_\lambda$ istnieje oraz*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} f(t)\mathrm{d}t = +\infty, \tag{3.3}$$

to nie jest on funkcją μ-p.o.

Dowód. Ponieważ funkcja f spełnia warunek (3.3), więc istnieje ciąg $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ taki, że

$$\int_{u_n}^{u_n+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant n.$$

Dla $x \in [0,1]$ mamy

$$(f * g)(u_n + 1 + x) = e^{\lambda(u_n+1+x)} \int_{-\infty}^{u_n+1+x} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant e^{\lambda(u_n+2)} \int_{-\infty}^{u_n+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant$$

$$e^{\lambda(u_n+2)}\int_{u_n}^{u_n+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant e^{\lambda(u_n+2-u_n)}\int_{u_n}^{u_n+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant e^{2\lambda}n.$$

Wówczas dla $N>0$ mamy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\mu(\{x\in[u,u+1]:(f*g_\lambda)(x)\geqslant N\})=1\nrightarrow 0,\quad \text{przy}\quad N\to+\infty.$$

Tym samym $f*g_\lambda\notin\widetilde{\mathcal{X}}$, więc na podstawie Twierdzenia 1.10 splot ten nie jest funkcją a μ-p.o. $\square$

Uwaga 3.3. Jak pokaże Przykład 4.2 z następnego rozdziału, Twierdzenia 3.5 nie można uogólnić na przypadek lokalnie całkowalnej funkcji f spełniającej warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+1}|f(t)|\mathrm{d}t=+\infty.$$

Z kolei poniższy przykład pokazuje, że istnieją funkcje μ-prawie okresowe spełniające warunki Twierdzenia 3.5.

Przykład 3.4. Rozważmy funkcję f z Przykładu 3.3. Udowodnimy, że splot $f*g_\lambda$ istnieje. Dla $z\in A_n$ mamy

$$\int_z^{z+1} f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\leqslant e^{-\lambda(z+1)}\int_z^{z+\frac{1}{n}} n^2\mathrm{d}t=ne^{-\lambda(z+1)}$$

Oszacujemy teraz z góry całkę

$$\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Nośnik każdej funkcji f_n dla $n\in\mathbb{N}$ jest zawarty w zbiorze

$$[2^n,2^n+1]+2^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Interesują nas wartości funkcji f_n dla $x\leqslant 0$. Niech $z_k=2^n-2^{n+1}k$ dla $k\in\mathbb{N}$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{z_k}^{z_k+1} f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$n\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\lambda(z_k+1)}=ne^{-\lambda}e^{-\lambda 2^n}\sum_{k=1}^{+\infty}e^{k\lambda 2^{n+1}}=$$

$$ne^{-\lambda}e^{-\lambda 2^n}\frac{e^{\lambda 2^{n+1}}}{1-e^{\lambda 2^{n+1}}}\leqslant\frac{ne^{-\lambda}e^{\lambda 2^n}}{1-e^{4\lambda}}.$$

Z Twierdzenia Beppo-Levi'ego mamy

$$\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{4\lambda}}\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{\lambda 2^n}<+\infty.$$

Dlatego splot $f*g_\lambda$ istnieje dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Warunek (3.3) wynika z (3.2). Tym samym splot $f*g$ nie jest μ-p.o.

Kolejny przykład pokazuje ciągłą funkcję μ-prawie okresową dla której splot z funkcją g_λ nie istnieje.

Przykład 3.5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} n^2 e^{-\lambda 2^n} |\sin(2\pi n x)| & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{n}] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Z Lematu 1.10 f jest μ-p.o. Ponadto f jest funkcją ciągłą. Zatem f jest ciągłą funkcją μ-p.o. dla której mamy

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{-2^n}^{-2^n+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\int_{-2^n}^{-2^n+1} f_n(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant e^{-\lambda(-2^n+1)} \int_{-2^n}^{-2^n+1} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2ne^{-\lambda}}{\pi},$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Dlatego splot $f * g_\lambda$ nie istnieje.

3.2. Splot z funkcjami LAP

W paragrafie tym zbadamy splot funkcji LAP z funkcjami całkowalnymi w sensie Lebesgue'a. Najpierw przypomnimy pewien wynik dotyczący ograniczonych funkcji LAP.

Twierdzenie 3.6 ([15])**.** *Niech f będzie ograniczoną funkcją LAP oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Wówczas splot $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

jest ograniczoną funkcją LAP.

Dla dowolnej funkcji LAP prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 3.7 ([42])**.** *Niech f będzie funkcją prawie okresową w sensie Lewitana oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niech będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a o zwartym nośniku. Wówczas $f * g$ istnieje i jest funkcją LAP.*

Dowód. Oczywiście dla każdego $x \in \mathbb{R}$ splot istnieje, ponieważ g ma zwarty nośnik a f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\mathrm{d}t = 0$, to konkluzja twierdzenia jest oczywista. Załóżmy, że $\eta := \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\mathrm{d}t > 0$. Niech ponadto $\operatorname{supp} g \subset [-M, M]$, dla pewnego $M > 0$. Ustalmy $\varepsilon, N > 0$. Pokażemy następującą implikację: jeżeli dla pewnych $\tau \in \mathbb{R}$ mamy

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\eta} \quad \text{dla } |x| < M + N,$$

to

$$|(f * g)(x + \tau) - (f * g)(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } |x| < N.$$

Istotnie, mamy

$$|(f * g)(x + \tau) - (f * g)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \tau - t) - f(x - t)||g(t)|\mathrm{d}t =$$

$$\int_{-M}^{M} |f(x + \tau - t) - f(x - t)||g(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{\eta} \int_{-M}^{M} |g(t)|\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ciągłość splotu wynika z powyższej implikacji. Ponadto ponieważ f jest LAP, więc istnieją liczby $\lambda_1, ..., \lambda_n$ oraz $\delta > 0$ takie, że każda liczba spełniająca nierówności $|\tau\lambda_i| < \delta \pmod{2\pi}$ dla $i = 1, 2, ..., n$, jest $[(M + N), \frac{\varepsilon}{\eta}]$-p.o. funkcji f. Pokazaliśmy, że każdy $[(M + N), \frac{\varepsilon}{\eta}]$-p.o. funkcji f jest $[N, \varepsilon]$-p.o. splotu $f * g$. □

Poniższe twierdzenie podaje warunek dostateczny na to by splot funkcji LAP z funkcją g_λ był funkcją LAP.

Twierdzenie 3.8 ([42])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją prawie okresową w sensie Lewitana spełniającą warunek*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty. \tag{3.4}$$

Wówczas splot $f * g_\lambda$ istnieje dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz jest ograniczony i prawie okresowy w sensie Lewitana.

Dowód. Splot $f * g_\lambda$ istnieje dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, gdyż

$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-n+1} |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda(-n+1)} \int_{-n}^{-n+1} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \sup_{u \in \mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda(n-1)} < +\infty.$$

Ponadto jest ograniczony gdyż mamy

$$|(f * g_\lambda)(x)| = |e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| = |e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x-n}^{x-n+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| \leqslant$$

$$e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda(x-n+1)} \int_{x-n}^{x-n+1} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \sup_{u \in \mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda(n-1)} < +\infty.$$

Zdefiniujmy ciąg funkcji $(g_n)_{n=1}^{+\infty}$ wzorem $g_n(x) = g_\lambda \chi_{[0,n]}$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\chi_{[0,n]}$ oznacza funkcję charakterystyczną przedziału $[0, n]$. Z Twierdzenia 3.7 wiemy, że splot $f * g_n$ jest LAP dla $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że ciąg $(f * g_n)_{n=1}^{+\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do $f * g_\lambda$.

Ponieważ
$$f * g_n(x) = e^{\lambda x} \int_{x-n}^{x} f(t) e^{-\lambda t} \mathrm{d}t,$$
więc
$$|(f * g_\lambda)(x) - (f * g_n)(x)| = |e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-\lambda t} \mathrm{d}t - e^{\lambda x} \int_{x-n}^{x} f(t) e^{-\lambda t} \mathrm{d}t| \leqslant$$
$$e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x-n} |f(t)| e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = e^{\lambda x} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x-n-k}^{x-n-k+1} |f(t)| e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \leqslant$$
$$e^{\lambda x} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda(x-n-k+1)} \int_{x-n-k}^{x-n-k+1} |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant \sup_{u \in \mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} |f(t)| \mathrm{d}t \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda(n+k-1)} \to 0$$
przy $n \to +\infty$, jednostajnie względem wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Z Twierdzenia 1.12, splot $f * g$ jest LAP.

□

Kolejny przykład pokazuje funkcję, która nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu oraz spełnia warunek (3.4).

Przykład 3.6 ([42])**.** Niech
$$f(x) = \begin{cases} n \sin(2\pi n x) & \text{dla } x \in [3^n, 3^n + \frac{1}{n}] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Wówczas f nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu. Z Lematu 1.11 wiemy, że f jest LAP. Funkcja f spełnia warunek (3.4), gdyż dla $z \in \mathbb{Z}$ mamy
$$\int_{z}^{z+\frac{1}{n}} n |\sin(2\pi n x)| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$
Z Twierdzenia 3.8 wiemy, że splot $f * g_\lambda$ jest ograniczony i jest LAP.

Kolejne twierdzenie podaje warunki, przy których splot z funkcją g_λ nie jest LAP.

Twierdzenie 3.9 ([42])**.** *Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną lokalnie całkowalną funkcją spełniającą warunek*
$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} f(t) \mathrm{d}t = +\infty. \tag{3.5}$$
Wówczas jeżeli splot $f * g_\lambda$ istnieje, to jest on nieograniczony i nie jest LAP.

Dowód. Z (3.5) wiemy, że dla każdego $\alpha > 0$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(t)\mathrm{d}t = +\infty. \tag{3.6}$$

Zauważmy, że

$$(f * g_\lambda)(\tau) - (f * g_\lambda)(0) = e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\tau} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Załóżmy, że $f * g_\lambda$ jest LAP. Istnieją wówczas liczby $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takie, że dla każdej liczby τ spełniającej układ nierówności $|\lambda_i\tau| < \delta \pmod{2\pi}$ dla $i = 1, 2, ..., n$ oraz $|x| < 1$ mamy

$$|(f * g_\lambda)(x + \tau) - (f * g_\lambda)(x)| < 1.$$

W szczególności dla $x = 0$ otrzymujemy

$$\Big| e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\tau} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \Big| < 1. \tag{3.7}$$

Niech $\omega > 0$ opisuje względną gęstość zbioru

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R} \colon |\lambda_i\tau| < \delta \text{ dla } i = 1, 2, ..., n\Big\} \quad \text{(zob. Uwaga 1.7).}$$

Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ istnieje $[1, 1]$-prawie okres $\tau_k \in \Big((k + 1)\omega, (k + 2)\omega\Big)$. Dlatego

$$e^{\lambda\tau_k} \int_{-\infty}^{\tau_k} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant e^{\lambda\tau_k} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant$$

$$e^{\lambda\tau_k - \lambda k\omega} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} f(t)\mathrm{d}t \geqslant e^{2\lambda\omega} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} f(t)\mathrm{d}t.$$

To jednak prowadzi do sprzeczności, ponieważ jednocześnie warunki (3.6) oraz (3.7) są spełnione. Z ostatniej nierówności oraz z (3.6) wnioskujemy, że splot $f * g_\lambda$ jest nieograniczony. □

Uwaga 3.4. Jak pokaże Przykład 4.2 z następnego rozdziału, Twierdzenia 3.9 nie można uogólnić na przypadek lokalnie całkowalnej funkcji f spełniającej warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = +\infty.$$

Następujący przykład pokazuje, że istnieją funkcje LAP, które spełniają warunek Twierdzenia 3.9.

Przykład 3.7 ([42])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} n|\sin(2\pi x)| & \text{dla } x \in [3^n, 3^n + 1] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z Lematu 1.11 wynika, że funkcja f jest LAP. Ponadto splot $f*g_\lambda$ istnieje, ponieważ mamy

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{z_{k,n}}^{z_{k,n}+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda(z_{k,n}+1)}\int_{z_{k,n}}^{z_{k,n}+1} f(t)\mathrm{d}t =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2n}{\pi}e^{-\lambda(3^n-2k\cdot 3^{n+1}+1)} < +\infty, \quad \text{(zob. Uwaga 3.1)}$$

gdzie $z_{k,n} = 3^n - 2k\cdot 3^{n+1}$, dla $k, n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$\int_{3^n}^{3^n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2n}{\pi} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Z Twierdzenia 3.9 wnioskujemy, że splot $f*g_\lambda$ nie jest LAP.

Wniosek 3.1 ([42]). *Z Twierdzenia 3.8 oraz Twierdzenia 3.9 wynika, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją LAP taką, że splot $f*g_\lambda$ istnieje, to splot ten jest LAP wtedy i tylko wtedy, gdy f spełnia warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_{u}^{u+1} f(t)\mathrm{d}t < +\infty.$$

Wniosek 3.2 ([42]). *Z Wniosku 3.1, Uwagi 1.12 oraz liniowości splotu wynika, że jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ograniczona z dołu (lub z góry) i taka, że $f*g_\lambda$ istnieje, to splot $f*g_\lambda$ jest LAP wtedy i tylko wtedy, gdy f spełnia warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty.$$

Wniosek 3.3 ([42]). *Z Twierdzenia 3.8 oraz Twierdzenia 3.9 wynika, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją LAP taką, że splot $f*g_\lambda$ istnieje, to splot $f*g_\lambda$ jest LAP wtedy i tylko wtedy, gdy $f*g_\lambda$ jest ograniczony.*

Wniosek 3.4 ([42]). *Z Wniosku 3.3, Uwagi 1.12 oraz liniowości splotu wynika, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ograniczoną z dołu (lub z góry) funkcją LAP taką, że $f*g_\lambda$ istnieje, to splot ten jest LAP wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Następujący przykład pokazuje funkcję LAP, dla której splot z funkcją g_λ nie istnieje.

Przykład 3.8 ([42]). Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2\lambda 3^{n+1}}|\sin(2\pi x)| & \text{dla } x \in [3^n, 3^n+1] + 2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z Lematu 1.11 wiemy, że f jest LAP. Ponadto mamy

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{z_n}^{z_n+1} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \geqslant e^{-\lambda z_n} \int_{z_n}^{z_n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}e^{-\lambda 3^n},$$

gdzie $z_n = 3^n - 2 \cdot 3^{n+1}$. Dlatego

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = +\infty.$$

Oznacza to, że splot $f * g_\lambda$ nie istnieje (zob. Uwaga 3.1).

3.3. Asymptotyczne zachowanie pewnych funkcji prawie okresowych

W paragrafie tym zbadamy asymptotyczne zachowanie ciągłych i nieograniczonych funkcji μ-p.o. (oraz LAP) określonych wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Zaczniemy od zbadania przypadku niewymiernych liczb algebraicznych. Tym samym obejmiemy przypadek klasycznej funkcji μ-p.o. i LAP, to jest przypadek, gdy $\alpha = \sqrt{2}$. Uzyskane wyniki zastosujemy do badania istnienia splotu funkcji tej postaci z funkcjami g_λ. Podamy również sposób konstrukcji liczb niewymiernych, dla których splot funkcji postaci (3.8) z funkcją g_λ nie istnieje.

Poniższe twierdzenie opisuje asymptotyczne zachowanie funkcji postaci (3.8) z niewymierną liczbą algebraiczną α.

Twierdzenie 3.10 (por. [41])**.** *Jeżeli α jest niewymierną liczbą algebraiczną stopnia n, to dla $x > \frac{1}{2}\pi$ mamy*

$$\frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)} \ll x^{2(n-1)}.$$

Dowód. Dla $x > \frac{1}{2}\pi$ niech

$$P(x) := \left\lfloor \frac{x\alpha}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \qquad \text{oraz} \qquad Q(x) := \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Niech ponadto $d(x) := \max\{d_1(x), d_2(x)\}$, gdzie

$$d_1(x) := \Big|\alpha x - P(x)\pi\Big| \qquad \text{oraz} \qquad d_2(x) := \Big|x - Q(x)\pi\Big|.$$

Łatwo można pokazać, że liczby $P(x), Q(x)$ są całkowite. Ponadto $Q(x) \geqslant 1$ oraz $0 < d(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Wówczas

$$\begin{aligned}|\alpha Q(x)\pi - P(x)\pi| &\leqslant |\alpha Q(x)\pi - \alpha x| + |\alpha x - P(x)\pi| \\ &= |\alpha| d_2(x) + d_1(x) \ll d(x),\end{aligned}$$

które implikuje, że

$$\left|\alpha - \frac{P(x)}{Q(x)}\right| \ll \frac{d(x)}{Q(x)}.$$

Ponadto ponieważ α jest liczbą algebraiczną stopnia n, więc z Twierdzenia Liouville'a wiemy, że

$$\frac{1}{Q(x)^n} \ll \left|\alpha - \frac{P(x)}{Q(x)}\right|.$$

Wówczas

$$\frac{1}{d(x)} \ll \Big(Q(x)\Big)^{n-1}. \tag{3.9}$$

Z drugiej strony ponieważ $Q(x) \geqslant 1$ oraz $0 \leqslant d_2(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, wnioskujemy, że

$$\frac{1}{2} Q(x) \leqslant Q(x) - \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{\pi}$$

i dlatego mamy

$$Q(x) \ll x. \tag{3.10}$$

Ponadto

$$1 + \cos(y + k\pi) \geqslant 1 - \cos(|y|) \qquad \text{dla } y \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], k \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$1 - \cos(y) \geqslant \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} \qquad \text{dla } y \in \mathbb{R}.$$

Z definicji d_1 oraz d_2, mamy

$$\begin{aligned}2 + \cos(x) + \cos(\alpha x) &\geqslant 1 - \cos(d_2(x)) + 1 - \cos(d_1(x)) \\ &\geqslant 1 - \cos(d(x)) \geqslant \frac{(d(x))^2}{2} - \frac{(d(x))^4}{24} \gg d(x)^2.\end{aligned}$$

Tym samym z (3.9), (3.10) oraz powyższych nierówności otrzymujemy

$$\frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)} \ll \frac{1}{d(x)^2} \ll \Big(Q(x)\Big)^{2(n-1)} \ll x^{2(n-1)} \quad \text{dla } x > \frac{1}{2}\pi. \qquad \square$$

Poniższe twierdzenie pokazuje sposób konstrukcji liczb niewymiernych α takich, że funkcja postaci (3.8), mówiąc nieprecyzyjnie, nie spełnia w nieskończoności z góry zadanej asymptotyki.

Twierdzenie 3.11 ([16])**.** *Dla dowolnej funkcji* $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *i każdego* $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ *istnieje* α *takie, że*

$$|a - \alpha| < \varepsilon \quad \textit{oraz} \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{2 + \cos x + \cos(\alpha x)} = +\infty.$$

Dowód. Ustalmy funkcję $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon > 0$. Możemy założyć, że $a \notin \mathbb{Q}$ ponieważ zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$. Skonstruujemy liczbę α spełniającą powyższe warunki. Liczba α będzie wartością nieskończonego ułamka łańcuchowego arytmetycznego

$$\langle a_0, a_1, ...\rangle.$$

Na podstawie Uwagi 1.1 liczba α będzie liczbą niewymierną. Z reprezentacji liczby a jako wartość nieskończonego ułamka łańcuchowego $a = [b_0; b_1, ...]$ wybieramy s początkowych wyrazów ciągu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, aby $\frac{2}{s(s+1)} < \varepsilon$. Niech $a_n = b_n$ dla $0 \leqslant n \leqslant s$. Następnie mając n $(n \geqslant s)$ początkowych wyrazów ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, jako a_{n+1} wybieramy dowolną nieparzystą liczbę spełniającą nierówności

$$a_{n+1} > \frac{1}{Q_n}(\pi\sqrt{\frac{n}{2g(Q_n\pi)}} - Q_{n-1}).$$

Możemy to zrobić, ponieważ wartości Q_n, Q_{n-1} są już zdefiniowane, gdyż znamy n początkowych wyrazów reprezentujących liczbę α. Na podstawie Uwagi 1.2 wiemy, że $|\alpha - a| < \varepsilon$.

Niech $x_m = \pi + 2m\pi$ dla $m \in \mathbb{N}$. Oznaczmy

$$d(x) = \left|x - 2\pi\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor - \pi\right| \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $\cos(x) = -\cos(d(x))$. Stąd

$$\frac{g(x_m)}{2 + \cos(x_m) + \cos(\alpha x_m)} = \frac{g(x_m)}{1 + \cos(\alpha x_m)} = \frac{g(x_m)}{1 - \cos(d(\alpha x_m))}.$$

Następująca nierówność jest spełniona na przedziale $(0, \pi]$

$$\frac{2}{x^2} \leqslant \frac{1}{1 - \cos x}.$$

Wówczas ponieważ $0 < d(\alpha x_m) \leqslant \pi$, więc

$$\frac{2g(x_m)}{[d(\alpha x_m)]^2} \leqslant \frac{g(x_m)}{1 - \cos(d(\alpha x_m))}.$$

Ponieważ począwszy od indeksu s wszystkie mianowniki a_n są nieparzyste, więc z Lematu 1.5 w ciągu reduktów $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ istnieje nieskończenie wiele ułamków o nieparzystym liczniku i mianowniku. Niech $(r_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ będzie podciągiem ciągu $(r_n)_{n=1}^{\infty}$

takim, że $Q_{n_1} > 1$ oraz P_{n_k}, Q_{n_k} są liczbami nieparzystymi. Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $m_k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\pi Q_{n_k} = x_{m_k}. \tag{3.11}$$

Warunek (3.11) jest spełniony ponieważ ciąg $(\frac{x_m}{\pi})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem wszystkich liczb nieparzystych większych 1. Ponadto ciągi $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ są ściśle rosnącymi ciągami liczb całkowitych. Mamy

$$d(\alpha x_{m_k}) = |\alpha Q_{n_k}\pi - (2l_k - 1)\pi| < \pi,$$

dla pewnego $l_k \in \mathbb{Z}$. Ponieważ z Lematu 1.3

$$\Big|\alpha - \frac{P_{n_k}}{Q_{n_k}}\Big| < \frac{1}{Q_{n_k}Q_{n_k+1}},$$

więc

$$\Big|\alpha Q_{n_k}\pi - P_{n_k}\pi\Big| < \frac{\pi}{Q_{n_k+1}} \leqslant \pi.$$

Stąd ponieważ P_{n_k} są nieparzyste oraz l_k jest wyznaczony jednoznacznie, więc z Lematu 1.7 $2l_k - 1 = P_{n_k}$. Ponieważ

$$a_{n_k+1} > \frac{1}{Q_{n_k}}\Big(\pi\sqrt{\frac{n_k}{2g(Q_{n_k}\pi)}} - Q_{n_k-1}\Big),$$

więc

$$a_{n_k+1}Q_{n_k} + Q_{n_k-1} > \pi\sqrt{\frac{n_k}{2g(Q_{n_k}\pi)}},$$

$$Q_{n_k+1}^2 > \pi^2\frac{n_k}{2g(Q_{n_k}\pi)},$$

$$2g(x_{m_k})\Big(\frac{Q_{n_k+1}}{\pi}\Big)^2 > n_k.$$

Tym samym mamy

$$n_k < 2g(x_{m_k})\Big(\frac{Q_{n_k+1}}{\pi}\Big)^2 \leqslant \frac{2g(x_{m_k})}{[d(\alpha x_{m_k})]^2} \leqslant$$

$$\frac{g(x_{m_k})}{1 - \cos(d(\alpha x_{m_k}))} = \frac{g(x_{m_k})}{2 + \cos(x_{m_k}) + \cos(\alpha x_{m_k})}.$$

Z powyższego otrzymujemy, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(x_{m_k})}{2 + \cos(x_{m_k}) + \cos(\alpha x_{m_k})} = +\infty.$$

□

Zastosujemy teraz Twierdzenie 3.10 oraz Twierdzenie 3.11 do badania istnienia splotu funkcji postaci (3.8) z funkcjami g_λ.

Uwaga 3.5. Z Twierdzenia 3.10 wynika istnienie splotu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)},$$

gdzie α jest niewymierną liczbą algebraiczną stopnia n, z funkcjami g_λ. Istotnie, ze względu na symetrię funkcji f mamy

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)e^{\lambda t}\mathrm{d}t + C\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} t^{2(n-1)}e^{\lambda t}\mathrm{d}t < +\infty,$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Poniższa uwaga okaże się bardzo użyteczna w dalszych rozważaniach.

Uwaga 3.6. Niech w będzie uogólnionym wielomianem trygonometrycznym (zob. wzór (1.3)), który nie jest funkcją stałą. Z Twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wiemy, że istnieje stała $L > 0$ taka, że dla $x \in \mathbb{R}, h > 0$ mamy

$$|w(x+h)| \leqslant |w(x)| + Lh.$$

Ponieważ funkcja w ma analityczne rozszerzenie na całą płaszczyznę i nie jest to funkcja stała, więc ma co najwyżej przeliczalnie wiele zer na płaszczyźnie. Tym samym dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$ wartość $\frac{1}{w(x)}$ jest dobrze określona. Stąd przyjmując

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(x)}, & \text{gdy } w(x) \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } w(x) = 0, \end{cases}$$

dla $u \in \mathbb{R}$ możemy napisać

$$\int_{u}^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} |f(u+t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_{0}^{1} \frac{1}{|w(u)| + Lt}\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

Poniższy wniosek pokazuje sposób konstrukcji liczb niewymiernych α, dla których splot funkcji postaci (3.8) z funkcją g_λ nie istnieje.

Wniosek 3.5. *Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takie, że*

$$|a - \alpha| < \varepsilon \quad \textit{oraz} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\lambda t}}{2 + \cos t + \cos(\alpha t)}\mathrm{d}t = +\infty.$$

Innymi słowy, zbiór

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\colon \frac{1}{2 + \cos(\cdot) + \cos(\alpha\cdot)} * g_\lambda \ \textit{nie istnieje}\right\}$$

jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Uzasadnienie. Ustalmy $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Niech

$$g(x) = \frac{L}{e^{e^{-\lambda x}} - 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $L = |a| + 1 + \varepsilon$. Z Twierdzenia 3.11 istnieje α takie, że $|\alpha - a| < \varepsilon$ oraz ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} - x_n \geqslant 1$, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\frac{g(x_n)}{w(x_n)} \geqslant 1,$$

gdzie $w(x) = 2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)$. Wówczas z parzystości funkcji w otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\lambda t}}{w(t)} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{\lambda t}}{w(t)} \mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_n+1} \frac{e^{\lambda t}}{w(t)} \mathrm{d}t = +\infty,$$

gdyż z nierówności (3.12) mamy

$$\int_{x_n}^{x_n+1} \frac{e^{\lambda t}}{w(t)} \mathrm{d}t \geqslant e^{\lambda(x_n+1)} \int_{x_n}^{x_n+1} \frac{1}{w(t)} \mathrm{d}t \geqslant e^{\lambda(x_n+1)} \int_{0}^{1} \frac{1}{w(x_n) + Lt} \mathrm{d}t =$$

$$\frac{e^{\lambda(x_n+1)}}{L} \ln(1 + \frac{L}{w(x_n)}) \geqslant \frac{e^{\lambda(x_n+1)}}{L} \ln(1 + \frac{L}{g(x_n)}) = \frac{e^{\lambda}}{L},$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Rozdział **4**

Prawie okresowe rozwiązania równania różniczkowego liniowego

W rozdziale tym szukamy rozwiązań μ-p.o. oraz LAP równania różniczkowego liniowego postaci

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad \lambda \neq 0, \tag{4.1}$$

w którym f jest funkcją μ-p.o. lub LAP. W szczególności zbadamy przypadek, gdy f jest odwrotnością uogólnionego wielomianu trygonometrycznego.

Uwaga 4.1. Możemy założyć, że $\lambda < 0$, gdyż przypadek, gdy $\lambda > 0$ może być sprowadzony do przypadku gdy $\lambda < 0$ w następujący sposób: jeżeli y_1 jest rozwiązaniem równania (4.1), to $y_2(x) := -y_1(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, jest rozwiązaniem równania

$$y'(x) = -\lambda y(x) + \widetilde{f}(x),$$

gdzie $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Uzasadnimy najpierw, że naturalnym kandydatem na rozwiązanie powyższego równania jest poniższa funkcja

$$y(x) = e^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = (f * g_\lambda)(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

(zob. Uwaga 3.1).

Uwaga 4.2. Łatwo można ustalić, że jeżeli funkcja (4.2) jest dobrze określona, to jest rozwiązaniem równania (4.1).

Uwaga 4.3 (por. [42])**.** Równanie (4.1), gdzie $\lambda < 0$, posiada co najwyżej jedno rozwiązanie μ-p.o. lub LAP . Istotnie, załóżmy, że równanie to posiada dwa różne rozwiązania μ-p.o. lub LAP. Wówczas ich różnica jest również funkcją μ-p.o. lub LAP. Ponieważ wszystkie rozwiązania równania (4.1) są postaci

$$y(x) = ce^{\lambda x} + e^{\lambda x} \int_{0}^{x} f(t)e^{-\lambda t} \mathrm{d}t,$$

więc biorąc różnice tych dwóch rozwiązań wnioskujemy, że dla pewnej stałej $c \neq 0$ funkcja $g(x) = ce^{\lambda x}$ jest μ-p.o. lub LAP. To jednak nie jest możliwe, gdyż dla $x, \tau \in \mathbb{R}$ mamy

$$|g(x+\tau) - g(x)| = |c||e^{\lambda\tau} - 1|e^{\lambda x}.$$

Tym samym, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $M > 0$, istnieje $\tau_0 \in \mathbb{R}$ takie, że dla $\tau \leqslant \tau_0$ mamy $|g(x+\tau) - g(x)| \geqslant M$.

Lemat 4.1 (por. [16], zob. [42])**.** *Rozważmy równanie* (4.1)*, gdzie* $\lambda < 0$ *oraz* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$*. Jeżeli* y_0 *jest rozwiązaniem LAP lub* μ*-p.o. równania* (4.1)*, to wówczas*

$$y_0(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{\lambda x} \int_{t_n}^{x} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ *oraz dla pewnego ciągu* $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ *takiego, że* $t_n \to -\infty$*, przy* $n \to +\infty$*.*

Dowód. Ponieważ wszystkie rozwiązania powyższego równania są postaci

$$y(x) = ce^{\lambda x} + e^{\lambda x} \int_0^x f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t,$$

więc istnieje $c_0 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$y_0(x) = c_0 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \int_0^x f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Załóżmy, że y_0 jest rozwiązaniem μ-p.o. Wówczas istnieje ciąg $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ złożony z $(1,1)$-prawie okresów funkcji f takich, że $\tau_n \to -\infty$, przy $n \to +\infty$ oraz istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in [0,1]$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz spełniona jest nierówność

$$|c_0 e^{\lambda x_n} e^{\lambda\tau_n} + e^{\lambda(x_n+\tau_n)} \int_0^{x_n+\tau_n} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t - c_0 e^{\lambda x_n} - e^{\lambda x_n} \int_0^{x_n} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| < 1.$$

Dlatego

$$|c_0 e^{\lambda\tau_n} + e^{\lambda\tau_n} \int_0^{x_n+\tau_n} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| < e^{-\lambda} + |c_0| + |\int_0^1 f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| \leqslant M$$

dla pewnej stałej $M > 0$. Tym samym

$$|c_0 + \int_0^{x_n+\tau_n} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| < Me^{-\lambda\tau_n} \to 0 \quad \text{przy} \quad n \to +\infty,$$

i dlatego

$$c_0 = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n+\tau_n}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Jeżeli y_0 jest rozwiązaniem LAP, to biorąc jako $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ ciąg złożony z $[1,1]$-prawie okresów funkcji f takich, że $\tau_n \to -\infty$, przy $n \to +\infty$ (zob. Uwaga 1.7) oraz przyjmując $x_n = 0$, dla $n \in \mathbb{N}$, spełnione są również powyższe nierówności. Tym samym

$$c_0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\tau_n}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

□

Uwaga 4.4 (por. [42])**.** Jeżeli równanie (4.1) posiada rozwiązanie μ-p.o. lub LAP oraz splot $f * g_\lambda$ istnieje, to z Uwagi 3.1 oraz Lematu 4.1 wynika, że rozwiązanie to pokrywa się z $f * g_\lambda$.

Uwaga 4.5 (por. [42])**.** Jeżeli splot $f * g_\lambda$ istnieje i nie jest μ-p.o. (odpowiednio LAP), to wówczas z Uwagi 3.1 oraz Lematu 4.1 wynika, że równanie (4.1) nie posiada rozwiązań μ-p.o. (odpowiednio LAP).

Uwaga 4.6 (por. [42])**.** Jeżeli $\lambda < 0$ oraz funkcja f jest ograniczona z dołu lub z góry oraz splot $f * g_\lambda$ nie istnieje, to z Uwagi 3.1 oraz Lematu 4.1 wynika, że równanie (4.1) nie posiada rozwiązań μ-p.o. oraz LAP. Istotnie dla funkcji ograniczonej z dołu lub z góry istnienie skończonej granicy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_n}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

dla pewnego ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $t_n \to -\infty$, przy $n \to +\infty$, jest równoważne warunkowi

$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t < +\infty.$$

Nasze rozważania z poprzedniego rozdziału na temat splotu prowadzą do następujących wyników, dotyczących rozwiązań równania (4.1).

Twierdzenie 4.1 ([16])**.** *Jeżeli f jest funkcją μ-p.o. spełniającą warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\ \sup_{\substack{A\subseteq[u,u+1]\\ \mu(A)\leqslant\delta}}\int_A |f(t)|\mathrm{d}t \to 0, \qquad \textit{przy } \delta\to 0^+,$$

to równanie różniczkowe (4.1) *posiada jednostajnie prawie okresowe rozwiązanie.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.4 wynika, że wobec przyjętego założenia splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest funkcją jednostajnie prawie okresową. Zgodnie z Uwagą 4.2 splot $f * g_\lambda$ jest rozwiązaniem równania (4.1). □

Twierdzenie 4.2 ([16])**.** *Jeżeli f jest ograniczoną z dołu (lub z góry) lokalnie całkowalną funkcją μ-p.o. spełniającą warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = +\infty,$$

to wówczas równanie różniczkowe (4.1) *nie posiada rozwiązań μ-p.o.*

Dowód. Jeżeli istnieje splot $f * g_\lambda$, to z liniowości splotu oraz Twierdzenia 3.5 wynika, że splot ten nie jest μ-p.o. Wówczas zgodnie z Uwagą 4.5 równanie (4.1) nie posiada rozwiązań μ-p.o. Jeżeli natomiast splot nie istnieje, to zgodnie z Uwagą 4.6 równanie (4.1) również nie posiada rozwiązań μ-p.o. □

Twierdzenie 4.3 ([42])**.** *Jeżeli f jest funkcją LAP spełniająca warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty,$$

to wówczas równanie różniczkowe (4.1) *posiada rozwiązanie LAP.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.8 splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest funkcją LAP. Zgodnie z Uwagą 4.2 jest to rozwiązanie równania (4.1). □

Twierdzenie 4.4 ([42])**.** *Jeżeli f jest ograniczoną z dołu (lub z góry) funkcją LAP spełniającą warunek*

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = +\infty,$$

to wówczas równanie różniczkowe (4.1) *nie posiada rozwiązań LAP.*

Dowód. Jeżeli istnieje splot $f * g_\lambda$, to z liniowości splotu oraz Twierdzenia 3.9 splot ten nie jest LAP. Wobec Uwagi 4.5 równanie (4.1) nie posiada rozwiązań LAP. Jeżeli natomiast splot nie istnieje, to na mocy Uwagi 4.6 równanie (4.1) również nie posiada rozwiązań LAP. □

Uwaga 4.7 ([42])**.** Wprost ze sformułowania Twierdzenia 4.3 oraz Twierdzenia 4.4 wynika, że dla ograniczonych z dołu (lub z góry) funkcji LAP równanie różniczkowe (4.1) posiada rozwiązanie LAP, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty.$$

Uzasadnimy teraz jeszcze jedną tego typu charakteryzację. Mianowicie: jeżeli f jest ograniczoną z dołu (lub ograniczoną z góry) funkcją LAP, to równanie różniczkowe (4.1) posiada rozwiązanie LAP wtedy i tylko wtedy, gdy posiada rozwiązanie ograniczone.

Załóżmy zatem, że równanie (4.1) posiada rozwiązanie LAP. Splot funkcji f z funkcją g_λ musi istnieć na podstawie Uwagi 4.6. Stąd, wobec Uwagi 4.4 splot jest równy temu rozwiązaniu LAP. Z Wniosku 3.4 wiemy, że splot ten jest ograniczony.

Założmy teraz, że równanie posiada ograniczone rozwiązanie. Z postaci wszystkich rozwiązań równania (4.1) (zob. Uwaga 4.3) wiemy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|c + \int_0^x f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t| \leqslant Me^{-\lambda x}.$$

Tym samym

$$c = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

To oznacza, że istnieje skończona całka $\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, gdyż f jest funkcją ograniczoną z dołu (lub z góry). Tym samym na podstawie Uwagi 3.1 splot $f * g_\lambda$ istnieje i pokrywa się z ograniczonym rozwiązaniem. Na podstawie Wniosku 3.4 splot ten jest LAP i jest to rozwiązanie równania (4.1).

Kolejny przykład pokazuje funkcję μ-p.o. oraz LAP spełniającą warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+1}|f(t)|\mathrm{d}t=+\infty,$$

dla której splot $f*g_\lambda$ nie istnieje, ale równanie różniczkowe (4.1) posiada jednostajnie prawie okresowe rozwiązanie (w szczególności rozwiązanie μ-p.o. i LAP).

Przykład 4.1 (por. [42]). Niech $a_n=n\cdot e^{2\cdot 3^{n+1}}, b_n=n\cdot 3^{2\cdot 3^{n+1}}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Niech ponadto

$$g(x)=\begin{cases}a_n\sin(2\pi b_n x) & \text{dla } x\in[3^n,3^n+\frac{1}{n}]+2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

oraz

$$G(x)=\begin{cases}\frac{a_n}{2\pi b_n}\Big(1-\cos(2\pi b_n x)\Big) & \text{dla } x\in[3^n,3^n+\frac{1}{n}]+2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Funkcje g i G są granicami D-zbieżnego ciągu funkcji okresowych, są więc μ-p.o. (porównaj technikę dowodową zastosowaną w dowodzie Lematu 1.10). Z Lematu 1.11, wiemy, że funkcje g oraz G są LAP.

Ponadto

$$0\leqslant G(x)\leqslant\frac{a_n}{\pi b_n}\quad\text{dla } x\in\left[3^n,3^n+\frac{1}{n}\right]+2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}.$$

Ponieważ zbiory $[3^n,3^n+\frac{1}{n}]+2\cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}$, dla $n\in\mathbb{N}$, są parami rozłączne (zob. Lemat 1.11) funkcja G jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji. Oznacza to, że G jest funkcją jednostajnie prawie okresową (zob. Twierdzenie 1.4). Mamy $G'(x)=g(x)$ dla $x\in\mathbb{R}$. Niech $f=G+g$. Wówczas f jest μ-p.o. oraz LAP (Uwaga 1.9 oraz 1.6). Natychmiastowo z definicji funkcji f mamy $G'=-G+f$, więc funkcja G jest rozwiązaniem równania

$$y'(x)=-y(x)+f(x).$$

Ponadto

$$\int_{z_n}^{z_n+1}|g(t)|\mathrm{d}t=\frac{2a_n}{n\pi},$$

gdzie $z_n=3^n-2\cdot 3^{n+1}, n\in\mathbb{N}$. Splot $G*g_\lambda$ istnieje, ponieważ G jest ograniczona. Podobne rozumowanie jak w Przykładzie 3.8 (dla $\lambda=-1$) pozwala ustalić, że $|g|*g_\lambda$ nie istnieje. Z Uwagi 3.1, splot $g*g_\lambda$ również nie istnieje. Dlatego splot $f*g_\lambda=G*g_\lambda+g*g_\lambda$ nie istnieje.

Lokalnie całkowalne funkcje μ-prawie okresowe możemy podzielić na cztery przypadki.

Twierdzenie 4.5 (por. [16])**.** *Załóżmy, że $\lambda < 0$ oraz f jest lokalnie całkowalną funkcją μ-p.o. Wówczas zachodzi jedna z następujących możliwości:*

(i) *splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest jedynym rozwiązaniem μ-p.o. równania* (4.1)*;*

(ii) *splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest rozwiązaniem równania* (4.1)*, ale równanie* (4.1) *nie posiada rozwiązań μ-p.o.;*

(iii) *splot $f * g_\lambda$ nie istnieje oraz równanie* (4.1) *nie posiada rozwiązań μ-p.o.;*

(iv) *splot $f * g_\lambda$ nie istnieje ale równanie* (4.1) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie μ-p.o.*

Dowód. Przypadek (*i*) wynika z Twierdzenia 3.4, Uwagi 4.2 oraz Uwagi 4.3. W rzeczywistości, z założeń Twierdzenia 3.4 wiemy, że funkcja (4.2) jest jednostajnie prawie okresowym rozwiązaniem równania (4.1). Przypadek (*ii*) wynika z Twierdzenia 3.5, Przykładu 3.4 oraz Uwagi 4.5. Przypadek (*iii*) wynika z Przykładu 3.5 oraz Uwagi 4.6. Ostatni przypadek wynika z Przykładu 4.1 oraz Uwagi 4.3. □

Podobnie dla funkcji LAP prawdziwe jest analogiczne twierdzenie.

Twierdzenie 4.6 ([42])**.** *Załóżmy, że $\lambda < 0$ oraz f jest funkcją LAP. Wówczas zachodzi jedna z następujących możliwości:*

(i) *splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest jedynym rozwiązaniem LAP równania* (4.1)*;*

(ii) *splot $f * g_\lambda$ istnieje i jest rozwiązaniem równania* (4.1)*, ale równanie* (4.1) *nie posiada rozwiązań LAP;*

(iii) *splot $f * g_\lambda$ nie istnieje oraz równanie* (4.1) *nie posiada rozwiązań LAP;*

(iv) *splot $f * g_\lambda$ nie istnieje, ale równanie* (4.1) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie LAP.*

Dowód. Przypadek (*i*) wynika z Twierdzenia 3.8, Uwagi 4.2 oraz Uwagi 4.3. Przypadek (*ii*) wynika z Twierdzenia 3.9, Przykładu 3.7 oraz Uwagi 4.5. Przypadek (*iii*) wynika z Przykładu 3.8 oraz Uwagi 4.6, podczas gdy przypadek (*iv*) wynika z Przykładu 4.1 oraz Uwagi 4.3. □

Ostatni przykład tego rozdziału pokazuje funkcję f, która jest μ-p.o. oraz LAP, dla której równanie (4.1) posiada nieograniczone rozwiązanie μ-p.o. i LAP dane przez splot. Dodajmy, że funkcja ta spełnia warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = +\infty.$$

Przykład 4.2 (por. [42]). Niech

$$g(x) = \begin{cases} n^2 \sin(2\pi n x) & \text{dla } x \in [3^n, 3^n + \frac{1}{n}] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

oraz

$$G(x) = \begin{cases} \frac{n}{2\pi}\Big(1 - \cos(2\pi n x)\Big) & \text{dla } x \in [3^n, 3^n + \frac{1}{n}] + 2 \cdot 3^{n+1}\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Funkcje g i G są granicami D-zbieżnego ciągu funkcji okresowych, są więc μ-p.o. (porównaj technikę dowodową z Lemacie 1.10). Z Lematu 1.11 wiemy, że funkcje g oraz G są LAP. Ponadto mamy $G'(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Niech $f = -\lambda G + g$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$). Wówczas f jest LAP (Uwaga 1.12) oraz $G' = \lambda G + f$. Tym samym G jest rozwiązaniem równania

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x).$$

Funkcja G nie jest ograniczona gdyż dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$G(3^n + \frac{1}{2n}) = \frac{n}{\pi}.$$

Ponadto

$$\int_{z_{k,n}}^{z_{k,n}+1} |g(t)| \mathrm{d}t = \frac{2n}{\pi} \quad \text{oraz} \quad \int_{z_{k,n}}^{z_{k,n}+1} |G(t)| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi},$$

gdzie $z_{k,n} = 3^n - 2k \cdot 3^{n+1}$, dla $k, n \in \mathbb{N}$. Podobne argumenty jak w przykładzie 3.7 pokazują, że sploty $|g| * g_\lambda$ oraz $|G| * g_\lambda$ istnieją. Stąd z Uwagi 3.1, sploty $g * g_\lambda$ i $G * g_\lambda$ istnieją oraz splot $f * g_\lambda = -\lambda G * g_\lambda + g * g_\lambda$ również istnieje. Zauważmy jeszcze, że na mocy Uwagi 4.4 wiemy, że $G = f * g_\lambda$.

Na koniec tego paragrafu omówimy przypadek, gdy f jest odwrotnością uogólnionego wielomianu trygonometrycznego.

Twierdzenie 4.7. *Niech*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(x)} & \text{gdy } w(x) \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } w(x) = 0, \end{cases}$$

gdzie w jest uogólnionym wielomianem trygonometrycznym różnym od funkcji stałej. Wówczas

(i) jeżeli istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ taki, że $w(x_0) = 0$, to funkcja f nie jest lokalnie całkowalna i wobec tego równanie różniczkowe (4.1) *nie jest dobrze określone;*

(ii) jeżeli $\inf_{x\in\mathbb{R}} |w(x)| > 0$*, to* f *jest funkcją jednostajnie prawie okresową oraz równanie* (4.1)*, posiada jednostajnie prawie okresowe rozwiązanie;*

(iii) jeżeli dla $x \in \mathbb{R}$ *mamy* $|w(x)| > 0$ *oraz* $\inf_{x\in\mathbb{R}} |w(x)| = 0$*, to wówczas* f *jest funkcją LAP i* μ*-p.o., która nie jest* S*-p.o.; jednocześnie równanie*(4.1) *nie posiada rozwiązań LAP i* μ*-p.o.*

Dowód. Przypomnijmy raz jeszcze, że zgodnie z Uwagą 3.6 istnieje stała L taka, że dla $u \in \mathbb{R}$ mamy

$$\int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{1}{|w(u)| + Lt}\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

(*i*) Z nierówności (4.3) wynika, że jeżeli istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ taki, że $w(x_0) = 0$, to funkcja f nie jest lokalnie całkowalna.

(*ii*) Niech $c = \inf_{x\in\mathbb{R}} |w(x)|$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$E\{\varepsilon c^2; w\} \subset E\{\varepsilon; f\},$$

gdyż

$$\Big|\frac{1}{w(x+\tau)} - \frac{1}{w(x)}\Big| = \frac{|w(x+\tau) - w(x)|}{|w(x+\tau)w(x)|} \leqslant \frac{|w(x+\tau) - w(x)|}{c^2}.$$

Ponieważ w jest funkcją prawie okresową w sensie Bohra, stąd f jest również funkcją prawie okresową w sensie Bohra. Z Twierdzenia 3.1 wiemy, że równanie (4.1) posiada rozwiązanie p.o. w sensie Bohra.

(*iii*) Ponieważ $\inf_{x\in\mathbb{R}} |w(x)| = 0$, więc z nierówności (4.3) otrzymujemy natychmiast, że

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(t)|\mathrm{d}t = +\infty.$$

Na podstawie Uwagi 1.5 f nie jest S-p.o. Funkcja w jest stałego znaku, więc na mocy Twierdzenia 4.2 oraz Twierdzenia 4.4 równanie różniczkowe (4.1) nie posiada rozwiązań LAP i μ-p.o.

$\square$

Wniosek 4.1. *Dla* $\lambda < 0$ *oraz* $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *równanie różniczkowe*

$$y'(x) = \lambda y(x) + \frac{1}{2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)}$$

nie posiada rozwiązania μ*-p.o. i LAP.*

Uzasadnienie. Z Przykładu 1.1 wiemy, że $2 + \cos(x) + \cos(\alpha x) > 0$, dla $x \in \mathbb{R}$, oraz

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} (2 + \cos(x) + \cos(\alpha x)) = 0.$$

Wystarczy teraz zastosować punkt (*iii*) Twierdzenia 4.7. $\square$

Rozdział **5**

Wartość średnia funkcji μ-prawie okresowych

Celem niniejszego rozdziału jest zbadanie wartości średniej dla funkcji μ-prawie okresowych. Informacje te okażą się przydatne w następnym rozdziale. Zaczniemy od przypomnienia definicji wartości średniej funkcji.

Definicja 5.1. Niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Granicę

$$\mathcal{M}\{f\} := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

(jeżeli istnieje) nazywamy *wartością średnią* funkcji f.

Uwaga 5.1. Jeżeli f jest funkcją S^p-prawie okresową ($1 \leqslant p < +\infty$), to wówczas istnieje skończona wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$ (zob. np: [54, Twierdzenie 1, str. 85] lub [4, Twierdzenie na str. 12 i Wniosek 1 na str. 93]).

Ponieważ klasa funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa jest podklasą funkcji μ-prawie okresowych, więc powstaje naturalne pytanie o istnienie wartości średniej funkcji μ-p.o. W ogólności funkcje μ-p.o. nie są lokalnie całkowalne, stąd całki $\int_0^T f(x)dx$, dla $T > 0$, nie zawsze są dobrze określone. Wobec tego naturalne jest ograniczenie się do przypadku lokalnie całkowalnych funkcji μ-p.o. Poniższy przykład pokazuje, że nawet dla ciągłych funkcji μ-p.o. wartość średnia nie musi istnieć.

Przykład 5.1 (por. [29])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} n\cdot 2^{2^n}|\sin(2\pi n x)| & \text{dla } x \in \left[2^{2^n}, 2^{2^n}+\frac{1}{n}\right] + 4^{2^n}\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wobec Lematu 1.10 funkcja f jest μ-p.o., gdyż mamy $2^{2^n} + 4^{2^n}\mathbb{Z} \subset 2^{2^n} + 2^{2^n+1}\mathbb{Z}$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1}{2^{2^n}} \int_0^{2^{2^n}} f_n(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2^{2^n}+1} \int_0^{2^{2^n}+1} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^{2^n}}{2^{2^n}+1}.$$

Z drugiej strony funkcja f_n jest 4^{2^n}- okresowa, więc dla $T \geqslant 4^{2^n}$ mamy

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\left\lfloor \frac{T}{4^{2^n}} \right\rfloor \cdot 4^{2^n}} \int_0^{\left(\left\lfloor \frac{T}{4^{2^n}} \right\rfloor + 1\right) \cdot 4^{2^n}} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\left\lfloor \frac{T}{4^{2^n}} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{T}{4^{2^n}} \right\rfloor} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^{2^n}}{4^{2^n}} \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{2^{2^n}}.$$

Jeżeli $1 \leqslant k \leqslant n-1$, to $2^{2^n} \geqslant 4^{2^k}$. Wówczas

$$\frac{1}{2^{2^n}} \int_0^{2^{2^n}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2^n}} \int_0^{2^{2^n}} f_k(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{2^{2^k}} \leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{4}{3\pi}, \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Ponadto dla $n \in \mathbb{N}$ mamy również

$$\frac{1}{2^{2^n}+1} \int_0^{2^{2^n}+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2^{2^n}+1} \int_0^{2^{2^n}+1} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^{2^n}}{2^{2^n}+1} \geqslant \frac{8}{5\pi}.$$

Tym samym wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$ nie istnieje.

Zauważmy, że funkcja f z powyższego przykładu nie jest S^1- ograniczona. Kolejny przykład pokazuje, że wartość średnia funkcji μ-p.o. może istnieć nawet, gdy funkcja nie jest S^1-ograniczona (w szczególności nie jest S-prawie okresowa).

Przykład 5.2 (por. [29])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} n^2 & \text{dla } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{n}] + 2^{n+1}\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Na mocy Lematu 1.10 f jest μ-p.o. Zauważmy, że ponieważ

$$\int_{2^n}^{2^n+1} f(t)\mathrm{d}t = n,$$

więc funkcja f nie jest S^1-ograniczona, a wobec tego nie jest ona S^1-p.o. (zob. Uwaga 1.5). Pokażemy teraz, że

$$\mathcal{M}\{f\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Najpierw zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja f_n jest 2^{n+1}-okresowa i dlatego

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{2^{n+1}} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{2^{n+1}}$$

(zob. [54, Uwaga, str. 88]). Ponadto dla $T > 0$ mamy

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{2^n}.$$

Istotnie, jeżeli $0 < T \leqslant 2^n$, to

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t = 0 \leqslant \frac{n}{2^n}.$$

Jeżeli $2^n < T < 2^{n+1}$, to

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2^n}\int_0^{2^{n+1}} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{2^n};$$

Jeżeli natomiast $T \geqslant 2^{n+1}$, to

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2^{n+1}\left\lfloor\frac{T}{2^{n+1}}\right\rfloor}\int_0^{2^{n+1}\left(\left\lfloor\frac{T}{2^{n+1}}\right\rfloor+1\right)} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\left\lfloor\frac{T}{2^{n+1}}\right\rfloor+1}{\left\lfloor\frac{T}{2^{n+1}}\right\rfloor}\frac{n}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n}{2^n}.$$

Dla danego $\varepsilon > 0$ niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^n} < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

oraz wybierzmy $T_0 > 0$ takie, że dla $T \geqslant T_0$ mamy

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{k}\frac{n}{2^{n+1}}\right| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Wówczas dla $T \geqslant T_0$ mamy

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\right| &= \left|\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{k}\frac{n}{2^{n+1}}\right| + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

(zauważmy, że możemy zamienić kolejność sumowania i całkowania ponieważ na każdym przedziale $[0, T]$ tylko skończenie wiele funkcji f_n nie znika. To pokazuje, że

$$\mathcal{M}\{f\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}.$$

Uwaga 5.2. Zgodnie z Uwagą 1.10 każda funkcja S^p-prawie okresowa jest μ-prawie okresowa. Ponadto ograniczona funkcja μ-prawie okresowa jest S^p-prawie okresowa dla wszystkich $p \in [1, +\infty)$ (zob. [49, Twierdzenie 7] lub [50, Twierdzenie 4.11]).

Podamy teraz warunek wystarczający na istnienie wartości średniej dla funkcji μ-prawie okresowej W tym celu najpierw zdefiniujemy pojęcie N-obcięcia funkcji.

Definicja 5.2 ([51]). Dla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $N > 0$ definiujemy *N-obcięcie* f^N funkcji f wzorem

$$f^N(x) = \begin{cases} N & \text{gdy } N < f(x), \\ f(x) & \text{gdy } -N \leqslant f(x) \leqslant N, \\ -N & \text{gdy } -N < f(x). \end{cases}$$

Następujące twierdzenie podaje warunek dostateczny na istnienie wartości średniej funkcji μ-prawie okresowej.

Twierdzenie 5.1 ([29]). *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ będzie nieujemną funkcją (prawie wszędzie) μ-prawie okresową. Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $T_0 > 0$ oraz $N_0 > 0$ takie, że*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t) - f^{N_0}(t)\Big)\mathrm{d}t < \varepsilon \qquad \text{dla } T \geqslant T_0,$$

to wówczas istnieje skończona wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$ oraz ponadto

$$\mathcal{M}\{f\} = \lim_{N\to+\infty} \mathcal{M}\{f^N\}.$$

Dowód. Jeżeli f jest μ-prawie okresowa, to wówczas obcięcie funkcji f^N jest μ-prawie okresowe dla $N > 0$ (zob. [49, dowód Twierdzenia 9] oraz [51, str. 172]). Ponieważ obcięcie to jest również funkcją ograniczoną, to w szczególności jest również S^p-prawie okresowe $p \in [1, +\infty)$ (zob. Uwaga 5.2). W szczególności wartość średnia $\mathcal{M}\{f^N\}$ istnieje i jest skończona. Ponieważ zakładaliśmy, że funkcja f jest prawie wszędzie nieujemna, więc odwzorowanie $N \mapsto \mathcal{M}\{f^N\}$ jest niemalejące oraz granica

$$\lim_{N\to+\infty} \mathcal{M}\{f^N\}$$

istnieje (na ten moment nie wykluczamy, że wynosi ona $+\infty$).

Zgodnie z założeniem twierdzenia dla $\varepsilon = 1$ oraz $N \geqslant N_0$ mamy

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big(f^N(t) - f^{N_0}(t)\Big)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t) - f^{N_0}(t)\Big)\mathrm{d}t < 1, \qquad \text{dla } T \geqslant T_0.$$

Dlatego z wcześniejszych uwag wnioskujemy, że granica

$$m := \lim_{N\to+\infty} \mathcal{M}\{f^N\}$$

istnieje i jest skończona.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{M}\{f\} = m$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $N_1 > 0$ takie, że $0 \leqslant m - \mathcal{M}\{f^N\} < \frac{1}{3}\varepsilon$ dla $N \geqslant N_1$. Ponadto z założenia istnieją $T_1, N_2 > 0$ takie, że

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t) - f^N(t)\Big)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t) - f^{N_2}(t)\Big)\mathrm{d}t < \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{dla } T \geqslant T_1 \text{ oraz } N \geqslant N_2.$$

Niech $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Wówczas ponieważ funkcja f^{N_3} jest S-prawie okresowa (zob. Uwaga 5), to wówczas wartość średnia $\mathcal{M}\{f^{N_3}\}$ istnieje i jest skończona. Stąd istnieje $T_2 > 0$ takie, że

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f^{N_3}(t) \mathrm{d}t - \mathcal{M}\{f^{N_3}\} \right| < \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{dla } T \geqslant T_2.$$

Stąd dla $T \geqslant \max(T_1, T_2)$ mamy

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \mathrm{d}t - m \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \big(f(t) - f^{N_3}(t)\big) \mathrm{d}t + \left| \frac{1}{T} \int_0^T f^{N_3}(t) \mathrm{d}t - \mathcal{M}\{f^{N_3}\} \right| + m - \mathcal{M}\{f^{N_3}\} < \varepsilon,$$

co pokazuje, że $\mathcal{M}\{f\} = m$ i kończy dowód. □

Uwaga 5.3 ([29])**.** Zauważmy, że dla lokalnie całkowalnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeżeli istnieje wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$, to dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) \mathrm{d}t = \mathcal{M}\{f\}. \tag{5.1}$$

Jest rzeczą znaną, że dla funkcji prawie okresowych w sensie Bohra czy Stiepanowa (przy $p \in [1, +\infty)$), granica (5.1) istnieje jednostajnie względem wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ (zob. [33, Twierdzenie 1.3.2 oraz Twierdzenie 5.6.2] lub [50, Twierdzenie 1.9 oraz Twierdzenie 2.16]). Analogiczny rezultat nie jest jednak prawdziwy dla funkcji μ-prawie okresowych. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć funkcję f z Przykładu 5.2. Istotnie, dla $T > 0$ mamy

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) \mathrm{d}t = +\infty.$$

Dla funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa prawdziwy jest następujący wynik.

Twierdzenie 5.2 (zob. [37, Lemat 3.7])**.** *Niech f będzie funkcją S-p.o., która jest prawie wszędzie nieujemna. Wówczas $\mathcal{M}\{f\} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$.*

Odpowiednikiem powyższego twierdzenia dla funkcji μ-prawie okresowych jest następujące

Twierdzenie 5.3 ([29])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie lokalnie całkowalną funkcją μ-p.o. która jest prawie wszędzie nieujemna. Wówczas $\mathcal{M}\{f\} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Dowód w jedną stronę jest oczywisty. Załóżmy, że $\mathcal{M}\{f\} = 0$ oraz przypuśćmy, że f nie znika prawie wszędzie. Istnieje wówczas punkt $u \in \mathbb{R}$, oraz $\varepsilon, \eta > 0$ oraz zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a $A \subseteq [u, u+1]$ taki, że $\mu(A) = \varepsilon$ oraz $f(x) \geqslant \eta$ dla p.w. $x \in A$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy $\tau_n \in (2(n-1)\omega - u, 2(n-1)\omega - u + \omega) \cap E\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2}; f\}$, gdzie ω jest liczbą charakteryzującą względną gęstość zbioru $E\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2}; f\}$ (oczywiście możemy założyć, że $\omega > 1$). Wówczas

$$\mu\Big(\Big\{x \in [u, u+1] : |f(x+\tau_n) - f(x)| < \tfrac{\eta}{2}\Big\}\Big) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$\mu\Big(\Big\{x \in A : f(x+\tau_n) \geqslant \tfrac{\eta}{2}\Big\}\Big) \geqslant \mu\Big(\Big\{x \in A : |f(x+\tau_n) - f(x)| < \tfrac{\eta}{2}\Big\}\Big) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tak więc mamy

$$\int_{2(n-1)\omega}^{2n\omega} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon\eta}{4} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

i stąd

$$\frac{1}{2n\omega}\int_0^{2n\omega} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon\eta}{8\omega} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli zatem istnieje wartość średnia, to jest ona większa od zera. □

Uwaga 5.4 ([29])**.** Jedną z różnic pomiędzy nieujemną funkcją μ-p.o. a nieujemną funkcją S^p-p.o. jest następująca: dla funkcji S^p-p.o. f mamy $\mathcal{M}\{f\} = 0$ lub $\mathcal{M}\{f\} > 0$, natomiast dla funkcji μ-p.o. zaprzeczenie warunku $\mathcal{M}\{f\} = 0$ nie implikuje, że $\mathcal{M}\{f\} > 0$, gdyż wartość średnia nie musi istnieć.

Uwaga 5.5 ([29])**.** Zauważmy, że wartość średnia $\mathcal{M}$ jest ciągłym funkcjonałem na przestrzeni $\widetilde{B}$ oraz $\widetilde{S}^p$, gdzie $p \in [1, +\infty)$. Oznacza to, że $\mathcal{M}\{f_n\} \to \mathcal{M}\{f\}$, jeżeli $f_n \to f$ względem normy w rozważanej przestrzeni. Jest to konsekwencją następujących nierówności

$$|\mathcal{M}\{f-g\}| \leqslant \mathcal{M}\{|f-g|\} \leqslant \|f-g\|_\infty \quad \text{dla } f, g \in \widetilde{B}$$

oraz

$$|\mathcal{M}\{f-g\}| \leqslant \mathcal{M}\{|f-g|\} \leqslant \|f-g\|_{S_1^p} \quad \text{dla } f, g \in \widetilde{S}^p.$$

Podamy teraz przykład ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji μ-prawie okresowych, który jest D-zbieżny do funkcji f oraz taki, że $\mathcal{M}\{f_n\} \not\to \mathcal{M}\{f\}$, pomimo iż $\mathcal{M}\{f\}$ istnieje i jest skończona.

Przykład 5.3 ([29])**.** Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}) + \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wówczas funkcje f_n są lokalnie całkowalnymi funkcjami okresowymi. Łatwo można pokazać, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest D-zbieżny do funkcji zerowej f. Ponadto $\mathcal{M}\{f_n\} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{M}\{f\} = 0$.

Rozdział **6**

Model LIF

W niniejszym rozdziale zajmiemy się tak zwanym modelem *„leaky integrate-and-fire”* (w skrócie: LIF). Jest to model zadany przez równanie różniczkowe

$$y'(x) = -\sigma y(x) + f(x) \qquad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

oraz warunek

$$y(s) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to s^+} y(x) = 0, \tag{6.2}$$

gdzie $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ oraz $\sigma \geqslant 0$. Warunek (6.2) należy rozumieć w ten sposób, że po osiągnięciu przez rozwiązanie y wartości progowej 1 następuje resetowanie rozwiązania do wartości 0, po czym rozwiązanie ewoluuje dalej zgodnie z równaniem (6.1) aż do momentu, gdy po raz kolejny osiągnie wartość 1 i tak dalej. Szczególny przypadek modelu LIF gdy $\sigma = 0$ nazywany jest modelem *„perfect integrator”* (w skrócie: PI). Ze względu na zastosowanie tego modelu skupimy się na własnościach określonych dla niego odwzorowań Φ i Ψ.

6.1. Funkcja *„firing map”* Φ oraz funkcja *„displacement map”* Ψ dla modelu LIF

W paragrafie tym przypomnimy definicję dwóch ważnych dla modelu LIF funkcji oraz podamy ich podstawowe własności. Pierwszą z nich jest funkcja zwana *„firing map”*, którą oznaczamy symbolem Φ.

Definicja 6.1 ([29])**.** Niech $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Funkcję Φ zwaną *„firing map”* dla zagadnienia (6.1)–(6.2) definiujemy następująco

$$\Phi(x) := \inf\left\{ x_* > x : \mathrm{e}^{\sigma x} \leqslant \int_x^{x_*} \big(f(t) - \sigma\big) \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}t \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 6.1 ([29])**.** Zauważmy, że oznaczając przez $y(\cdot; x, 0)$ rozwiązanie równania (6.1) przechodzące przez punkt $(x, 0)$, wartość *„firing map”* Φ w punkcie x może być zdefiniowana następująco: $\Phi(x) = \inf\{x_* > x : y(x_*; x, 0) \geqslant 1\}$. Zatem *„firing map”* Φ przyporządkowuje punktowi $x \in \mathbb{R}$ moment, w którym rozwiązanie równania (6.1) przechodzące przez $(x, 0)$ osiągnie wartość progową równą 1.

Przykład 6.1 ([29])**.** Niech $\sigma = 1$ oraz rozważmy zagadnienie (6.1)–(6.2) z lokalnie całkowalną funkcją wejścia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2 daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [0,1) + 2\mathbb{Z}, \\ 1 & \text{dla } x \in [1,2) + 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że *„firing map”* Φ odpowiadające temu modelowi dane jest wzorem

$$\Phi(x) = \begin{cases} \ln(2e^x) & \text{dla } x \in [2k, 2k+1-\ln 2],\ k \in \mathbb{Z}, \\ \ln(2e^x + e^{2k+2} - e^{2k+1}) & \text{dla } x \in (2k+1-\ln 2, 2k+1),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \ln(e^x + e^{2k+2}) & \text{dla } x \in [2k+1, 2k+2),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Aby definicja *„firing map”* Φ miała sens, rozważany w niej zbiór musi być niepusty. Może się zdarzyć, że *„firing map”* Φ nie jest zdefiniowane w pewnych punktach $x \in \mathbb{R}$, to znaczy zbiór rozważany w definicji *„firing map”* Φ jest zbiorem pustym. Przytoczymy teraz wynik z pracy [38] podający warunek konieczny i dostateczny na to, aby *„firing map”* Φ było poprawnie zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.1 ([38, Lemat 2.2])**.** *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Wówczas „firing map” Φ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\limsup_{x\to+\infty} \int_0^x \Big(f(t) - \sigma\Big) \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}t = +\infty. \tag{6.3}$$

Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 6.1, zauważmy, że jeżeli wartość $\Phi(x)$ jest zdefiniowana dla pewnego $x \in \mathbb{R}$, to spełnione jest następujące równanie

$$\mathrm{e}^{\sigma x} = \int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma\Big) \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}t. \tag{6.4}$$

Dowód Twierdzenia 6.1. Załóżmy, że warunek (6.3) jest spełniony i ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\limsup_{x\to+\infty} \int_{x_0}^x \Big(f(t) - \sigma\Big) \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}t = +\infty,$$

i stąd istnieje $x_* > x_0$ takie, że $\int_{x_0}^{x_*} \Big(f(t) - \sigma\Big) \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{\sigma x_0}$. W konsekwencji wartość $\Phi(x_0)$ jest zdefiniowana.

Załóżmy teraz, że „*firing map*” $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dobrze określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. W szczególności z (6.4), dla $x = 0$ oraz każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_0^{\Phi^n(0)} \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Phi^{i-1}(0)}^{\Phi^i(0)} \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\sigma\Phi^{i-1}(0)} \geqslant n;$$

gdzie Φ^n oznacza n-ą iterację „*firing map*” Φ oraz przyjmujemy z definicji, że $\Phi^0(0) = 0$. Ponadto zauważmy, że rosnący ciąg $\Big(\Phi^n(0)\Big)_{n=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, ponieważ w przeciwnym razie mielibyśmy $n \leqslant \int_0^a |f(t) - \sigma|\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t < +\infty$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnego $a \in (0, +\infty)$, które nie zależy od n, co w konsekwencji przeczy lokalnej całkowalności funkcji f. Dlatego $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(0) = +\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\Phi^n(0)} \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t = +\infty$, co należało wykazać. □

Uwaga 6.2 ([29])**.** Zauważmy, ze dowód powyższego twierdzenia pokazuje, że jeżeli $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, to wówczas „*firing map*” Φ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) jest dobrze określone na $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ wszystkie iteracje $\Phi^n(x)$ są dobrze zdefiniowane.

Z Twierdzenia 6.1 wyciągamy następujący wniosek, który dla modelu PI był ustalony wcześniej w pracy [37].

Wniosek 6.1 ([29])**.** *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ oraz przypuśćmy, że wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$ istnieje (dopuszczamy wartość $+\infty$). Jeżeli $\mathcal{M}\{f\} > \sigma$, to wówczas „firing map” Φ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Dla uproszczenia oznaczmy

$$\mathcal{N}(x) = \int_0^x \Big(f(t) - \sigma\Big)e^{\sigma t}\mathrm{d}t \qquad \text{dla } x \geqslant 0.$$

Łatwo można pokazać, że

$$\mathcal{N}(x) = e^{\sigma x}\int_0^x \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{d}t - \sigma\int_0^x \left(\int_0^t \Big(f(w) - \sigma\Big)dw\right)e^{\sigma t}\mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

Istotnie, wystarczy zmienić kolejność całkowania w drugiej całce prawej strony powyższego równania (6.5). Pokażemy teraz, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \geqslant n$ takie, że $\mathcal{N}(x_n) > n$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje pewne n takie, że

$$e^{\sigma x}\int_0^x \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{d}t \leqslant n + \sigma\int_0^x \left(\int_0^t \Big(f(w) - \sigma\Big)dw\right)e^{\sigma t}\mathrm{d}t \qquad \text{dla wszystkich } x \geqslant n. \tag{6.6}$$

Niech $g(x) := e^{\sigma x}\int_0^x \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{d}t$. Wówczas (6.6) można równoważnie napisać jako

$$g(x) \leqslant n + \sigma\int_0^n g(t)\mathrm{d}t + \sigma\int_n^t g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{dla wszystkich } x \geqslant n.$$

Stosując nierówność Gronwall'a (zob. na przykład [3, Wniosek 1.4]) wnioskujemy, że

$$g(x) \leqslant \left(n + \sigma \int_0^n g(t)\mathrm{d}t\right) e^{\sigma(x-n)} \qquad \text{dla } x \geqslant n.$$

Dlatego

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Big(f(t)-\sigma\Big)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}e^{-\sigma n}\left(n + \sigma \int_0^n \left(\int_0^t \Big(f(w)-\sigma\Big)dw\right)e^{\sigma t}\mathrm{d}t\right) \qquad \text{dla } x \geqslant n. \tag{6.7}$$

Przechodząc do granicy w (6.7) przy $x \to +\infty$ otrzymujemy $\mathcal{M}\{f\} - \sigma \leqslant 0$. To jednak doprowadziło do sprzeczności.

Wobec tego dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \geqslant n$ takie, że $\mathcal{N}(x_n) > n$ i dlatego

$$\limsup_{x\to+\infty} \int_0^x \Big(f(t)-\sigma\Big)e^{\sigma t}\mathrm{d}t = +\infty.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy powołać się na Twierdzenie 6.1. □

Uwaga 6.3 ([29])**.** Zauważmy, że *„firing map"* Φ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) może nie być zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ pomimo, że funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ jest taka, że $f - \sigma > 0$ dla p.w. liczb rzeczywistych. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \sigma + e^{-(\sigma+1)x}$. Wówczas dla $x > 0$ mamy

$$\int_0^x \Big(f(t)-\sigma\Big)e^{\sigma t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-x} < 1.$$

Ponadto dodajmy, że jeżeli funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ jest taka, że $f(x) - \sigma \geqslant 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$ oraz wartość $\Phi(x_0)$ jest zdefiniowana dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$, wówczas *„firing map"* Φ jest zdefiniowane dla każdego $x \leqslant x_0$.

Dla funkcji f takiej, że różnica $f - \sigma$ jest ujemna na pewnym zbiorze o dodatniej mierze Lebesgue'a powyższa własność nie jest już prawdziwa. Istotnie, rozważmy model PI ($\sigma = 0$) z funkcją wejścia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy $\Phi(2\pi) = 3\pi$ oraz $\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} f(t)\mathrm{d}t < 1$ dla każdego $x > \frac{\pi}{2}$, co pokazuje, że $\Phi(\frac{\pi}{2})$ nie jest dobrze określone.

W dalszej części pracy będziemy potrzebowali następującego lematu dotyczącego monotoniczności odwzorowania *„firing map"* Φ (dla modelu PI podobny wynik był ustalony w [37]).

Lemat 6.1 ([29])**.** *Załóżmy, że $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ jest takie, że $f(x) - \sigma > 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$ oraz załóżmy, że $\Phi(x_0)$ jest zdefiniowane dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$, gdzie Φ jest odwzorowaniem „*firing map*" dla zagadnienia* (6.1)–(6.2)*. Wówczas $\Phi(s)$ jest dobrze określone dla wszystkich $s < x_0$ oraz $\Phi(s) < \Phi(x_0)$.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że z Uwagi 6.3 $\Phi(s)$ jest zdefiniowane dla $s < x_0$.

Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że $\Phi(x_0) \leqslant \Phi(s)$. Wówczas

$$\int_{x_0}^{\Phi(x_0)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-x_0)} \mathrm{d}t = \int_{s}^{\Phi(s)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-s)} \mathrm{d}t,$$

oraz

$$0 \leqslant \int_{\Phi(x_0)}^{\Phi(s)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-s)} \mathrm{d}t =$$

$$\int_{x_0}^{\Phi(x_0)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-x_0)} \mathrm{d}t - \int_{s}^{\Phi(x_0)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-s)} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant - \int_{s}^{x_0} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-s)} \mathrm{d}t < 0.$$

Otrzymana sprzeczność oznacza, że musi zachodzić $\Phi(x_0) > \Phi(s)$. $\square$

Uwaga 6.4 ([29])**.** Podobny rezultat do Lematu 6.1 jest prawdziwy, gdy $f(x) - \sigma \geqslant 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$. Wówczas jednak silna nierówność $\Phi(s) < \Phi(x_0)$ musi zostać zastąpiona nierównością słabą $\Phi(s) \leqslant \Phi(x_0)$.

Przypomnimy teraz definicję funkcji Ψ zwanej *„displacement map"* dla zagadnienia (6.1)–(6.2)

Definicja 6.2 ([29])**.** Niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ oraz niech Φ będzie *„firing map"* dla zagadnienia (6.1)–(6.2). *„Displacement map"* Ψ definiujemy jako
$\Psi(x) := \Phi(x) - x$.

Oczywiście *„displacement map"* Ψ jest zdefiniowana tylko w punktach, dla których zdefiniowane jest *„firing map"* Φ. Wówczas $\Psi(x) \geqslant 0$, gdyż $\Phi(x) \geqslant x$ zachodzi z definicji. Wartość $\Psi(x)$ jest zatem różnicą pomiędzy momentem, w którym rozwiązanie przechodzące przez punkt $(x, 0)$ osiąga wartość 1 a samym punktem x.

Kolejny rezultat podaje warunki dostateczne na to, aby *„displacement map"* Ψ (zatem również *„firing map"* Φ) było jednostajnie ciągłe.

Twierdzenie 6.2 ([29])**.** *Niech $\varsigma > 0$ oraz załóżmy, że $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ spełnia następujące warunki:*

(i) $\sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\delta} f(t) \mathrm{d}t \to 0$ *przy* $\delta \to 0^+$*;*

(ii) $f(x) - \sigma \geqslant \varsigma$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}$.

Wówczas „displacement map" $\Psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) *jest jednostajnie ciągłe i ograniczone. Ponadto* $\inf_{x \in \mathbb{R}} \Psi(x) > 0$.

Dowód. Najpierw, zauważmy, że zgodnie z założeniem (ii) oraz Twierdzeniem 6.1 *„firing map”* Φ oraz *„displacement map”* Ψ są dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Ograniczoność *„displacement map”* Ψ wynika z następujących nierówności

$$e^{\sigma x} = \int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma t} \mathrm{d}t \geqslant \varsigma e^{\sigma x} \Big(\Phi(x) - x\Big) = \varsigma e^{\sigma x} \Psi(x),$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Pokażemy teraz, że Ψ jest jednostajnie ciągłe. Na początku zauważmy, ze zgodnie z założeniem (i), dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ całka $\int_x^{x+\frac{1}{\varsigma}} f(t)\mathrm{d}t$ może być oszacowana z góry przez stałą niezależną od x. Istotnie, istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\delta_0} f(t)\mathrm{d}t \leqslant 1,$$

i dlatego jeżeli $k \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą taką, że $\frac{1}{\varsigma} \leqslant k\delta_0$, to

$$\int_x^{x+\frac{1}{\varsigma}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x+i\delta_0}^{x+(i+1)\delta_0} f(t)\mathrm{d}t \leqslant k \cdot \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\delta_0} f(t)\mathrm{d}t \leqslant k,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Dla danego $\varepsilon > 0$ wybierzmy $\delta > 0$ takie, że

$$\frac{1}{\varsigma} e^{\sigma\delta} \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\delta} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{\varsigma}(e^{\sigma\delta} - 1)k \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Weźmy dowolny punkt $x, \tau \in \mathbb{R}$ takie, że $|x - \tau| \leqslant \delta$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \leqslant \tau$. Wówczas $\Phi(x) \leqslant \Phi(\tau)$ oraz

$$\int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-x)} \mathrm{d}t = \int_\tau^{\Phi(\tau)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-\tau)} \mathrm{d}t.$$

Tym samym

$$\int_{\Phi(x)}^{\Phi(\tau)} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-\tau)} \mathrm{d}t = \int_x^{\tau} \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma(t-\tau)} \mathrm{d}t + \int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma\Big)\Big(e^{\sigma(t-x)} - e^{\sigma(t-\tau)}\Big) \mathrm{d}t.$$

Oszacujemy każdą z powyższych całek osobno. Dla uproszczenie oznaczmy je (zaczynając od lewej strony) I_1, I_2 oraz I_3. Wówczas

$$I_1 \geqslant \varsigma e^{\sigma(\Phi(x) - \tau)} \Big(\Phi(\tau) - \Phi(x)\Big)$$

oraz

$$I_2 \leqslant \int_x^{\tau} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\delta} f(t)\mathrm{d}t.$$

Dla całki I_3 mamy

$$I_3 = \int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t)-\sigma\Big)\Big(e^{\sigma(t-x)} - e^{\sigma(t-\tau)}\Big)\mathrm{d}t \leqslant \Big(e^{\sigma(\Phi(x)-x)} - e^{\sigma(\Phi(x)-\tau)}\Big) \cdot \int_x^{\Phi(x)} f(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \Big(e^{\sigma(\Phi(x)-x)} - e^{\sigma(\Phi(x)-\tau)}\Big)k,$$

gdyż $0 \leqslant \Phi(x) - x \leqslant \frac{1}{\varsigma}$. Ponieważ $\Phi(x) - \tau \geqslant x - \tau \geqslant -\delta$, więc biorąc pod uwagę powyższe oszacowania otrzymujemy

$$\Phi(\tau) - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\varsigma} e^{\sigma\delta} \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+\delta} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\varsigma}(e^{\sigma\delta} - 1)k \leqslant \varepsilon.$$

To pokazało, że *„firing map”* Φ jest jednostajnie ciągłe. Wówczas oczywiście *„displacement map”* Ψ jest również jednostajnie ciągłe.

Pokażemy teraz, że $\inf_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x) > 0$. Zauważmy, że

$$1 = \int_x^{x+\Psi(x)} (f(t)-\sigma)e^{\sigma(t-x)}\mathrm{d}t \leqslant e^{\sigma\Psi(x)} \int_x^{x+\Psi(x)} (f(t)-\sigma)\mathrm{d}t \leqslant e^{\frac{\sigma}{\varsigma}} \int_x^{x+\Psi(x)} f(t)\mathrm{d}t,$$

i dlatego

$$0 < e^{-\frac{\sigma}{\varsigma}} \leqslant \int_x^{x+\Psi(x)} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto z założenia (i), istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{\sigma}{\varsigma}}.$$

Jeżeli $\inf_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x) = 0$, to musiałoby istnieć x_0 takie, że $\Psi(x_0) \leqslant \delta$. Mielibyśmy wówczas

$$0 < e^{-\frac{\sigma}{\varsigma}} \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\Psi(x_0)} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{\sigma}{\varsigma}},$$

co prowadzi jednak do sprzeczności. To pokazuje, że $\inf_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x) > 0$. □

Dodajmy, że ciągłość *„firing map”* Φ dla modelu PI oraz LIF z lokalnie całkowalnym wymuszeniem była badana na przykład w pracach [37] oraz [38], odpowiednio. W szczególności w artykule [38] udowodniony był następujący rezultat (tutaj dodaliśmy potrzebne założenie, że *„firing map”* Φ jest dobrze zdefiniowane)

Twierdzenie 6.3 ([38, Lemat 2.11 (b)])**.** *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ oraz przypuśćmy, że „firing map” Φ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) jest zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli $f(x) - \sigma > 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$, to wówczas „firing map” Φ jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}$.*

Uwaga 6.5 ([29])**.** Zauważmy, że w Twierdzeniu 6.3 założenie $f(x) - \sigma > 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$ nie może być zastąpione (nawet jeżeli funkcja f jest okresowa) przez słabszy warunek: $f(x) - \sigma > 0$ dla x z pewnego zbioru dodatniej miary Lebesgue'a. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć model PI z lokalnie całkowalną funkcją 2-okresową $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] + 2\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas $\Phi(0) = 1$, ale $\lim_{x\to 0^+} \Phi(x) = 2$ (zob. również Przykład 6.1).

6.2. Model LIF z prawie okresową funkcją wejścia

W paragrafie tym badamy własności *„firing map”* Φ oraz *„displacement map”* Ψ dla modelu LIF z μ- prawie okresowymi funkcjami wejścia. Przypomnimy wpierw wyniki dla klasy funkcji prawie okresowych w sensie Stiepanowa oraz rozważymy dwa przykłady funkcji μ-p.o. W pierwszym przykładzie *„displacement map”* Ψ nie jest funkcją μ-p.o., pomimo, iż jest jednostajnie ciągłe i ograniczone. W drugim przykładzie wskazujemy funkcję μ-p.o., która nie jest S^1-ograniczona, ale odpowiadające jej *„displacement map”* Ψ jest μ-p.o.

Najpierw rozważymy kwestię poprawnego określenia *„firing map”* Φ z μ-prawie okresową funkcją wejścia.

Twierdzenie 6.4 ([29])**.** *Załóżmy, że $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ jest μ-p.o. oraz taka, że $f(x)-\sigma \geqslant 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$. Wówczas „firing map” Φ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $\mu(A) > 0$ oraz $f(x) - \sigma > 0$ dla p.w. $x \in A$.*

Dowód. Konieczność jest oczywista. Dla dowodu dostateczności zauważmy, że z założeń wynika, że istnieją $u \in \mathbb{R}, \varepsilon, \eta > 0$ oraz zbiór $B \subseteq A \cap [u, u+1]$ taki, że $\mu(B) = \varepsilon$, dla którego mamy $f(x)-\sigma \geqslant \eta$ dla p.w. $x \in B$. Analogiczne rozumowanie jak w Twierdzeniu 5.3 prowadzi do nierówności

$$\int_0^{2n\omega} \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon\eta}{4} n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie liczba ω opisuje względną gęstość zbioru $E\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2}; f - \sigma\}$. Mamy zatem

$$\limsup_{x\to+\infty} \int_0^t \Big(f(t) - \sigma\Big) e^{\sigma t}\mathrm{d}t \geqslant \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2n\omega} \Big(f(t) - \sigma\Big)\mathrm{d}t = +\infty.$$

Z Twierdzenia 6.1, wnioskujemy, że *„firing map”* Φ jest dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uwaga 6.6 ([29])**.** Zauważmy, że Twierdzenie 6.4 rozszerza Twierdzenie 3 z [37] na przypadek modelu LIF oraz μ-prawie okresowe wymuszenia, ponieważ dla S-prawie okresowych funkcji takich, że $f - \sigma \geqslant 0$ p.w. na $\mathbb{R}$, istnienie zbioru A o wymaganej własności jest równoważne warunkowi: $\mathcal{M}\{f\} > \sigma$.

Ponadto dodajmy, że Twierdzenie 6.4 nie wynika z Wniosku 6.1, ponieważ dla μ-prawie okresowych funkcji wartość średnia nie musi istnieć (zob. Przykład 5.1).

Przypomnimy teraz wynik dotyczący okresowej funkcji wejścia. Idea tego rezultatu pochodzi z pracy J. P. Keener, F. C. Hoppensteadt i J. Rinzel (zob. [30]), chociaż nie ma tam precyzyjnego sformułowania tego wyniku.

Twierdzenie 6.5 ([30])**.** *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ będzie funkcją ω-okresową (gdzie $\omega > 0$) oraz przypuśćmy, że „firing map" Φ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest dobrze określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wówczas $\Phi(x+\omega) = \Phi(x) + \omega$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz „displacement map" Ψ jest ω-okresowe.*

Wobec tego okresowa funkcja wejścia w modelu LIF daje okresowe *„displacement map"* Ψ. Naturalnym jest więc pytanie, czy dla prawie okresowej funkcji wejścia f otrzymamy prawie okresowe *„displacement map"* Ψ.

Dla granicznie okresowej funkcji wejścia prawdziwe jest poniższe

Twierdzenie 6.6 ([29])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją granicznie okresową. Ponadto przypuśćmy, że istnieje $\varsigma > 0$ takie, że $f(x) - \sigma > \varsigma$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas „displacement map" Ψ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest granicznie prawie okresowe.*

Dowód. Ponieważ f jest granicznie okresowa, więc istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ okresowych funkcji ciągłych jednostajnie zbieżny do funkcji f na $\mathbb{R}$. Oczywiście możemy założyć, że $f_n(x) - \sigma > \frac{1}{2}\varsigma$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Z Twierdzenia 6.1 wiemy, że Φ oraz Φ_n (oraz Ψ i Ψ_n), dla zagadnienia (6.1)–(6.2) z funkcją wejścia f oraz f_n, odpowiednio, są dobrze zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, zgodnie z Twierdzeniem 6.2 (lub Twierdzeniem 6.3) oraz Twierdzeniem 6.5, wnioskujemy, że Ψ_n są ciągłymi funkcjami okresowymi.

Zauważmy ponadto, że wystarczy pokazać, że *„displacement map"* Ψ jest granicą jednostajną na $\mathbb{R}$ ciągu $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$, gdyż $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\Psi(x) - \Psi_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi(x) - \Phi_n(x)|$.

Dla $\varepsilon > 0$ wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varsigma^2\varepsilon$ dla wszystkich $n \geqslant N$. Niech $n \geqslant N$ oraz ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $\Phi_n(x) > \Phi(x)$. Wówczas mamy

$$\int_{\Phi(x)}^{\Phi_n(x)} \big(f_n(t) - \sigma\big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{\Phi(x)} \big(f(t) - f_n(t)\big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\varsigma^2\varepsilon\mathrm{e}^{\sigma\Phi(x)}(\Phi(x) - x) \leqslant \frac{1}{2}\varsigma\varepsilon\mathrm{e}^{\sigma\Phi(x)};$$

ostatnia nierówność w powyższych nierównościach wynika z faktu, że $\Phi(x) - x \leqslant \frac{1}{\varsigma}$ dla $x \in \mathbb{R}$ (zob. dowód Twierdzenia 6.2). Jednocześnie

$$\int_{\Phi(x)}^{\Phi_n(x)} \big(f_n(t) - \sigma\big)\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\varsigma\mathrm{e}^{\sigma\Phi(x)}|\Phi_n(x) - \Phi(x)|.$$

Dlatego $|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Gdy $\Phi(x) > \Phi_n(x)$, otrzymujemy tę samą konkluzję. W rezultacie *„firing map”* Φ jest jednostajną granicą ciągu $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$. To kończy dowód. $\square$

Dla funkcji S-prawie okresowej mamy następujące

Twierdzenie 6.7 ([29]). *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją S-prawie okresową. Ponadto przypuśćmy, że istnieje $\varsigma > 0$ takie, że $f(x) - \sigma > \varsigma$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$. Wówczas „displacement map” Ψ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest jednostajnie prawie okresowe.*

Dowód. Oczywiście *„firing map”* Φ oraz *„displacement map”* Ψ są dobrze określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Ponadto Φ oraz Ψ są ciągłe na mocy Twierdzenia 6.3.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\varsigma < 1$. Dla $\varepsilon > 0$ niech $\tau \in S^1E\{\frac{\varsigma^2\varepsilon}{2}; f\}$. Wówczas $\|f_\tau - f\|_{S^1_1} \leqslant \frac{\varsigma^2\varepsilon}{2}$. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz przypuśćmy, że $\min\{\Phi(x), \Phi(x+\tau) - \tau\} = \Phi(x)$. Z definicji *„firing map”* można łatwo wyprowadzić następujące nierówności

$$\left|\int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t+\tau) - f(t)\Big)\mathrm{e}^{\sigma(t+\tau)}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\Phi(x)}^{\Phi(x+\tau)-\tau} \Big(f(t+\tau) - \sigma\Big)\mathrm{e}^{\sigma(t+\tau)}\mathrm{d}t\right|. \tag{6.8}$$

Ponieważ $\tau \in S^1E\{\frac{\varsigma^2\varepsilon}{2}; f\}$, proste obliczenia pokazują, że

$$\left|\int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t+\tau) - f(t)\Big)\mathrm{e}^{\sigma(t+\tau)}\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{e}^{\sigma(\Phi(x)+\tau)}\frac{k\varsigma^2\varepsilon}{2}, \tag{6.9}$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą naturalną, taką, że $\Phi(x) \leqslant t + k$. Ponadto, ponieważ, $f(t) - \sigma > \varsigma$ dla p.w. $t \in \mathbb{R}$, wnioskujemy, że

$$\int_{\Phi(x)}^{\Phi(x+\tau)-\tau} \Big(f(t+\tau) - \sigma\Big)\mathrm{e}^{\sigma(t+\tau)}\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{\sigma(\Phi(x)+\tau)}\varsigma\Big(\Phi(x+\tau) - \tau - \Phi(x)\Big). \tag{6.10}$$

Zauważmy, że $\Phi(t) - t \leqslant \frac{1}{\varsigma}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, i dlatego $k \leqslant \frac{1}{\varsigma} + 1$. Stąd z (6.8)–(6.10) oraz powyższej obserwacji otrzymujemy

$$\Phi(x+\tau) - \tau - \Phi(x) \leqslant \frac{k\varsigma\varepsilon}{2} \leqslant \frac{(\frac{1}{\varsigma}+1)\varsigma\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Przypadek, gdy $\min\{\Phi(x), \Phi(x+\tau) - \tau\} = \Phi(x+\tau) - \tau$ prowadzi do podobnej konkluzji $\Phi(x) - \Phi(x+\tau) + \tau \leqslant \varepsilon$. Tym samym $|\Phi(x+\tau) - \Phi(x) - \tau| \leqslant \varepsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, co oznacza, że zbiór $E\{\varepsilon; \Psi\}$ jest względnie gęsty ponieważ zawiera względnie gęsty zbiór $S^1E\{\frac{\varsigma^2\varepsilon}{2}; f\}$. To z kolei pokazuje, że *„displacement map”* Ψ jest jednostajnie prawie okresowe. $\square$

Ponieważ funkcje jednostajnie prawie okresowe są jednostajnie ciągłe, więc mamy następujący

Wniosek 6.2 ([29]). *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją S-prawie okresową. Ponadto przypuśćmy, że istnieje $\varsigma > 0$ takie, że $f(x) - \sigma > \varsigma$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$. Wówczas „firing map” Φ oraz „displacement map” Ψ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *są jednostajnie ciągłe.*

Uwaga 6.7 ([29]). Wniosek 6.2 jest również konsekwencją Twierdzenia 6.2, gdyż można pokazać, że każda prawie wszędzie nieujemna funkcja S-prawie okresowa spełnia warunek (i) Twierdzenia 6.2 (więcej szczegółów związanych z tą kwestią można znaleźć w pracach [16, 48]; zob. również Twierdzenie 3.3).

Rozważymy teraz model LIF z funkcjami μ-prawie okresowymi. Pierwszy z poniższych przykładów pokazuje funkcję μ-prawie okresową, dla której *„displacement map”* Ψ jest jednostajnie ciągłe i ograniczone, lecz nie jest μ-prawie okresowe (w szczególności nie jest jednostajnie prawie okresowe). W przykładzie tym wykorzystamy następujący

Lemat 6.2. *Niech*

$$\chi_n = \chi_{[0,1]+2^{n+1}\mathbb{Z}} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas dla $\delta > 0$ mamy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} \chi_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \begin{cases} \delta & \text{dla } \delta \in [0,1], \\ \frac{1}{2^{n+1}}\delta + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & \text{dla } \delta \in [1,+\infty). \end{cases}$$

Dowód. Łatwo można ustalić, że dla $\delta > 0$ mamy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} \chi_n(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\int_0^{\delta} \chi_n(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} k + \delta - k\cdot 2^{n+1} & \text{dla } \delta \in [k\cdot 2^{n+1}, k\cdot 2^{n+1}+1], k \in \mathbb{Z}, \\ k+1 & \text{dla } \delta \in [k\cdot 2^{n+1}+1, (k+1)\cdot 2^{n+1}], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Stąd już łatwo można sprawdzić, że dla $\delta > 0$ mamy

$$\int_0^{\delta} \chi_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\delta + 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

□

Kolejny przykład pokazuje funkcję μ-prawie okresową, dla której *„displacement map”* Ψ pomimo, iż jest jednostajnie ciagłe i ograniczone, nie jest μ-prawie okresowe.

Przykład 6.2 (por. [29]). Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n x) & \text{dla } x \in [2^n, 2^n+1] + 2^{n+1}\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdzie

$$\chi_n = \chi_{[0,1]+2^{n+1}\mathbb{Z}} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{supp}\Big(2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n x)\Big) \cap [0,1] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1}\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2\cdot 4^n}\Big]$$

Z okresowości funkcji $2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n x)$ otrzymujemy, że dla $z \in \mathbb{Z}$

$$\mu(\{x \in [z, z+1] : 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n x) \neq 0\}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu\Big(\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2\cdot 4^n}\Big]\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Stąd na podstawie Lematu 1.10 otrzymujemy, że $f-1$ jest funkcją μ-p.o. Wobec tego sama funkcja f jest również μ-p.o.

Korzystając z Lematu 6.2 mamy dla $\delta > 0$

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t)\mathrm{d}t \leqslant \begin{cases} 2^{n+1}\delta & \text{dla } \delta \in [0, \frac{1}{2\cdot 4^n}], \\ \delta + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 4^n} & \text{dla } \delta \in [\frac{1}{2\cdot 4^n}, +\infty). \end{cases}$$

Pokażemy, że

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t)\mathrm{d}t = 0 \tag{6.11}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy n_0 tak, by $\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon$. Niech $\delta \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^{n_0}}$. Wówczas dla $n \leqslant n_0$ mamy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t)\mathrm{d}t \leqslant 2^{n+1}\delta \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon.$$

Dla $n_0 < n$ mamy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^{n_0}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 4^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon,$$

gdyż ciąg $(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 4^n})_{n=1}^{\infty}$ jest malejący.

Teraz pokażemy, że *„displacement map"* Ψ dla modelu PI z funkcją wejścia f jest jednostajnie ciągłe i ograniczone. Na koniec zastosujemy Twierdzenie 6.2. Ponieważ warunek (ii) Twierdzenia 6.2 jest spełniony dla $\varsigma = 1$, wystarczy pokazać, że f spełnia założenie (i). Uzasadnimy teraz, że

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} f(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{6.12}$$

Dla $0 < \delta < 1$ przedział $[u, u+\delta]$ ma część wspólną z co najwyżej jednym z przedziałów postaci $[2^n, 2^n+1] + 2^{n+1}k$, dla $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Wynika to z faktu, że zbiór lewych końców przedziałów tej postaci to zbiór $2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (zob. Lemat 1.10). W związku z tym, dla każdego $u \in \mathbb{R}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\int_u^{u+\delta} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_u^{u+\delta} (1 + 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t))\mathrm{d}t.$$

(gdy zbiór $[u, u+\delta]$ nie ma części wspólnej z przedziałami postaci $[2^n, 2^n+1]+2^{n+1}k$, dla $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, to liczbę n można wybrać dowolnie). Na podstawie (6.11) mamy własność (6.12).

To z kolei oznacza, że funkcja f spełnia warunek (i) Twierdzenia 6.2, i dlatego *„displacement map”* Ψ dla modelu PI z funkcją wejścia f jest ograniczone i jednostajnie ciągłe.

Na koniec pokażemy, że *„displacement map”* Ψ nie jest μ-prawie okresowe. Zauważmy, że

$$\int_z^{z+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{dla } z \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Istotnie, mamy

$$\Big[0, \frac{1}{2}\Big] \cap \operatorname{supp}\Big(2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n x)\Big) = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2\cdot 4^n}\Big].$$

Dlatego dla $z \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mamy

$$\int_z^{z+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \int_z^{z+\frac{1}{2}} \Big(1 + 2^{n+1}\chi_n(2\cdot 4^n t)\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{2^{n+1}}{2\cdot 4^n} = 1$$

Ponadto, zauważmy, że $\Phi(x) = 1 + x$ dla $x \in [-\frac{1}{4}, 0]$. Dla $x \in [z - \frac{1}{4}, z]$, gdy $z \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mamy $\Phi(x) - x \leqslant \frac{3}{4}$. Istotnie

$$\int_t^{z+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_z^{z+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Stąd $\Phi(x) \leqslant z + \frac{1}{2}$, co pokazuje, że $\Phi(x) - x \leqslant \frac{3}{4}$ dla każdego x w rozważanym przez nas przedziale.

Gdyby *„displacement map”* Ψ było μ-prawie okresowe, to dla niezerowego $\tau \in E\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}; \Psi\} \cap 2\mathbb{Z}$ (istnienie takiej liczby wynika z Lematu 1.9), zachodziłoby

$$\mu\Big(\Big\{x \in [-1, 0] : |\Psi(x) - \Psi(x+\tau)| \geqslant \tfrac{1}{4}\Big\}\Big) \leqslant \frac{1}{8}.$$

Z drugiej strony ponieważ $\tau \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, więc mamy

$$[-\tfrac{1}{4}, 0] \subseteq \Big\{x \in [-1, 0] : |\Psi(x) - \Psi(x+\tau)| \geqslant \tfrac{1}{4}\Big\},$$

skąd

$$\mu\Big(\Big\{x \in [-1, 0] : |\Psi(x) - \Psi(x+\tau)| \geqslant \tfrac{1}{4}\Big\}\Big) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że *„displacement map”* Ψ nie jest μ-prawie okresowe.

Można postawić sobie pytanie, czy dla funkcji μ-prawie okresowych lokalnie całkowalnych, które nie są S-prawie okresowe *„displacement map”* nie jest μ-prawie okresowe. Kolejny przykład pokazuje funkcję μ-p.o., która nie jest S^p-prawie okresowa, ale posiada S^p-prawie okresowe *„displacement map”* Ψ.

Przykład 6.3 ([29])**.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} 2 + (n+1)^2, & \text{gdy } x \in [s_n + 1 - \frac{1}{n+1}, s_n + 1] + 2^n\mathbb{Z}, \\ 2, & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdzie $s_n = \frac{1}{3}[(-2)^{n-1} - 1]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Oznaczmy $A_n = s_n + 2^n\mathbb{Z}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$A_n \cap A_m = \emptyset \text{ dla } n \neq m \qquad \text{oraz} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}. \tag{6.13}$$

Podobną techniką dowodową jak w Lemacie 1.10 można pokazać, że $f-2$ (zatem również f) jest funkcją μ-p.o. jako granica D-zbieżnego ciągu funkcji okresowych.

Łatwo zauważyć, że funkcja f nie jest S^1-ograniczona i dlatego nie jest S-prawie okresowa (zob. Uwaga 1.5).

Pokażemy teraz, że „*displacement map*" Ψ odpowiadające modelowi PI z μ-prawie okresową funkcją wejścia f, która jest oczywiście dobrze określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i mierzalna w sensie Lebesgue'a, jest również μ-prawie okresowe. Pokażemy, że dla $m \in \{2, 3, \ldots\}$ mamy

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}} \mu\Big(\Big\{x \in [z, z+1] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \geqslant \tfrac{2}{m+1}\Big\}\Big) \leqslant \frac{2}{m+1}, \tag{6.14}$$

dla wszystkich $w \in \mathbb{Z}$. Tym samym dla $u \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mu\Big(\Big\{x \in [u, u+1] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \geqslant \tfrac{2}{m+1}\Big\}\Big) \leqslant$$
$$\mu\Big(\Big\{x \in [\lfloor u \rfloor, \lfloor u \rfloor + 1] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \geqslant \tfrac{2}{m+1}\Big\}\Big) +$$
$$\mu\Big(\Big\{x \in [\lfloor u \rfloor + 1, \lfloor u \rfloor + 2] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \geqslant \tfrac{2}{m+1}\Big\}\Big) \leqslant \frac{4}{m+1}.$$

Oznacza to, że $2^m\mathbb{Z} \subseteq E\{\frac{4}{m+1}, \frac{2}{m+1}; \Psi\}$. W szczególności oznacza to, że dla każdych $\varepsilon, \eta > 0$ zbiór $E\{\varepsilon, \eta; \Psi\}$ jest względnie gęsty.

Zauważmy, że w celu udowodnienia (6.14) z ustalonym $m \geqslant 2$ oraz $w \in \mathbb{Z}$, wystarczy pokazać, że

$$\begin{aligned} &\text{dla } z \in \mathbb{Z} \text{ mamy } |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \leqslant \frac{1}{m+1}, \\ &\text{gdy } x \in [z, z + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{m+1}] \cup [z + \tfrac{1}{2}, z + 1 - \tfrac{1}{m+1}), \end{aligned} \tag{6.15}$$

gdyż wówczas

$$\mu\Big(\Big\{x \in [z, z+1] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| \geqslant \tfrac{2}{m+1}\Big\}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mu\Big(\Big\{x \in [z, z+1] : |\Psi(x + 2^m w) - \Psi(x)| > \tfrac{1}{m+1}\Big\}\Big) \leqslant \frac{2}{m+1}.$$

Ustalmy zatem $m \in \{2, 3, \ldots\}$ oraz $w \in \mathbb{Z}$ oraz weźmy dowolne $z \in \mathbb{Z}$. Z (6.13) istnieje dokładnie jedna liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że liczba całkowita z należy do A_n.

Przypadek 1 Przypuśćmy, że $n \leqslant m$. Wówczas ponieważ $2^n | 2^m$, wnioskujemy, że $f(x + 2^m w) = f(x)$ dla każdego $x \in [z, z + \frac{3}{2}]$. Ponadto ze względu na

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{dla } k \in \mathbb{Z}, \tag{6.16}$$

mamy $\Phi(x) \leqslant \Phi(z+1) \leqslant z + \frac{3}{2}$ dla każdych $x \in [z, z+1]$. Stąd

$$\int_{x+2^m w}^{\Phi(x)+2^m w} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{\Phi(x)} f(t + 2^m w)\mathrm{d}t = \int_x^{\Phi(x)} f(t)\mathrm{d}t = 1 \quad \text{dla } x \in [z, z+1],$$

co dowodzi, że $\Phi(x + 2^m w) = \Phi(x) + 2^m w$ dla $x \in [z, z+1]$. To z kolei oznacza, że warunek w (6.15) jest spełniony, gdy $z \in A_n$ dla $n \leqslant m$.

Przypadek 2 Przypuśćmy, że $n > m$. Najpierw zauważmy, że $\Phi(x) = x + \frac{1}{2}$ dla $x \in [z, z + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}]$, ponieważ na przedziale $[z, z + 1 - \frac{1}{n+1})$ funkcja f jest tożsamościowo równa 2. Ponadto $\Phi(x) \in [z + 1 - \frac{1}{n+1}, z + 1]$ dla $x \in [z + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, z + 1 - \frac{1}{n+1})$, co wynika z następujących oszacowań

$$\int_x^{z+1-\frac{1}{n+1}-\gamma} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{z+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}}^{z+1-\frac{1}{n+1}-\gamma} f(t)\mathrm{d}t = 1 - 2\gamma < 1 \qquad \text{dla każdych } \gamma \in (0, \tfrac{1}{2})$$

oraz

$$\int_x^{z+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{z+1-\frac{1}{n+1}}^{z+1} f(t)\mathrm{d}t = n + 1 + \tfrac{2}{n+1} > 1. \tag{6.17}$$

Łatwe obliczenia pokazują, że $z + 2^m w \notin \bigcup_{i=1}^m A_i$ oraz istnieje liczba naturalna $j > m$ taka, że $z + 2^m w \in A_j$. Dlatego z powyższego rozumowania otrzymujemy, że

$$\Phi(x + 2^m w) = x + 2^m w + \frac{1}{2} \qquad \text{dla } x \in [z, z + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{j+1}]$$

oraz

$$\Phi(x + 2^m w) - 2^m w \in [z + 1 - \tfrac{1}{j+1}, z + 1] \qquad \text{dla } x \in [z + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{j+1}, z + 1 - \tfrac{1}{j+1}).$$

Podsumowując dla $x \in [z, z + \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}]$ mamy $\Phi(x + 2^m w) - 2^m w - \Phi(x) = 0$ oraz ponadto dla $x \in [z + \frac{1}{2}, z + 1 - \frac{1}{m+1})$ mamy $|\Phi(x + 2^m w) - 2^m w - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{m+1}$. Dowodzi to, że w rozważanym przypadku warunek (6.15) jest spełniony.

Tym samym *„displacement map"* Ψ jest μ-prawie okresowe. Ponadto ponieważ Ψ jest ograniczone (zob. dowód Twierdzenia 6.2), więc z Uwagi 5.2, wiemy, że Ψ jest S^p-prawie okresowe dla wszystkich $p \in [1, +\infty)$.

Na koniec pokażemy, że *„displacement map"* Ψ nie jest jednostajnie ciągłe i stąd nie może być jednostajnie prawie okresowe. Jeżeli $z \in A_n$, to wówczas $\Phi(z + 1 - \frac{1}{n+1}) \leqslant z + 1$ oraz $\Phi(z+1) = z + \frac{3}{2}$ (zob. (6.16) oraz (6.17)), i dlatego

$$|\Phi(z + 1 - \tfrac{1}{n+1}) - \Phi(z+1)| \geqslant \frac{1}{2},$$

co oznacza, że Ψ nie jest jednostajnie ciągłe.

Uwaga 6.8 ([29])**.** Charakteryzacja lokalnie całkowalnych funkcji μ-prawie okresowych funkcji wejścia dla modelu LIF (6.1)–(6.2), dla którego otrzymujemy μ-prawie okresowe *„displacement map”* (lub S^p-prawie okresowe) jest otwartym problemem.

Na zakończenie tej sekcji poruszymy kwestię ciągłości odwzorowania przyporządkowującego funkcji S-prawie okresowej f odwzorowanie *„displacement map”* Ψ dla zagadnienia (6.1)–(6.2).

Oznaczmy przez

$$C = \left\{ f \in \widetilde{S}^1 : \text{istnieje } a_f > 0 \text{ taka, że } f(x) - \sigma > a_f \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{R} \right\},$$

i zauważmy, że C jest zbiorem wypukłym. Oczywiście C jest przestrzenią metryczną z metryką indukowaną przez normę $\|\cdot\|_{S^1}$.

Twierdzenie 6.8 ([29])**.** *Odwzorowanie $T\colon C \to \widetilde{B}$, które funkcji S-prawie okresowej $f \in C$ przyporządkowuje „displacement map” Ψ dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *jest ciągłe.*

Dowód. Z Twierdzenia 6.7 wynika, że T jest dobrze zdefiniowane. Mając $\varepsilon \in (0,1)$ oraz $f \in C$ niech $\delta = \varepsilon a_f \left(\left[\frac{1}{a_f} \right] + 2 \right)^{-1} e^{-\sigma \left(1 + \frac{1}{a_f} \right)}$. Przypuśćmy, że $\widehat{f}$ jest funkcją z C taką, że $\left\| f - \widehat{f} \right\|_{S_1^1} \leqslant \delta$. Jeżeli punkt $t \in \mathbb{R}$ jest ustalony, to z definicji mamy

$$\int_x^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma \Big) \mathrm{e}^{\sigma t} \, \mathrm{d}t = \int_x^{\widehat{\Phi}(x)} \Big(\widehat{f}(t) - \sigma \Big) \mathrm{e}^{\sigma t} \, \mathrm{d}t \tag{6.18}$$

(zob. formułę (6.4)); tutaj $\widehat{\Phi}$ oznacza *„firing map”* odpowiadające modelowi LIF z funkcją wejścia $\widehat{f}$.

Przypuśćmy, że $\Phi(x) \geqslant \widehat{\Phi}(x)$. Wówczas ponieważ $\widehat{\Phi}(x) - x \leqslant \Phi(x) - x \leqslant \frac{1}{a_f}$ (zob. pierwszą część dowodu Twierdzenia 6.2), z (6.18) wynika, że

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Phi}(x)}^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma \Big) \mathrm{e}^{\sigma t} \, \mathrm{d}t &= \int_x^{\widehat{\Phi}(x)} \Big(\widehat{f}(t) - f(t) \Big) \mathrm{e}^{\sigma t} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^{\sigma \widehat{\Phi}(x)} \int_x^{x + [\frac{1}{a_f}] + 1} |\widehat{f}(t) - f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{\sigma \widehat{\Phi}(x)} \Big(\Big[\tfrac{1}{a_f} \Big] + 1 \Big) \delta. \end{aligned}$$

Jednocześnie

$$\int_{\widehat{\Phi}(x)}^{\Phi(x)} \Big(f(t) - \sigma \Big) \mathrm{e}^{\sigma t} \, \mathrm{d}t \geqslant a_f \mathrm{e}^{\sigma \widehat{\Phi}(x)} \Big(\Phi(x) - \widehat{\Phi}(x) \Big).$$

A zatem $\Phi(x) - \widehat{\Phi}(x) \leqslant \frac{1}{a_f} \left(\left[\frac{1}{a_f} \right] + 2 \right) \delta \leqslant \varepsilon$.

Załóżmy teraz, że $\widehat{\Phi}(x) \geqslant \Phi(x)$. Wówczas

$$\int_x^{\Phi(x)+\varepsilon} \Big(\widehat{f}(t) - \sigma \Big) e^{\sigma t} \mathrm{d}t =$$

$$
\begin{aligned}
&\int_x^{\Phi(x)+\varepsilon}\Big(\widehat{f}(t)-f(t)\Big)e^{\sigma t}\mathrm{d}t + e^{\sigma x} + \int_{\Phi(x)}^{\Phi(x)+\varepsilon}\Big(f(t)-\sigma\Big)e^{\sigma t}\mathrm{d}t \geqslant \\
&-\int_x^{\Phi(x)+1}|\widehat{f}(t)-f(t)|e^{\sigma t}\mathrm{d}t + e^{\sigma x} + a_f\varepsilon e^{\sigma\Phi(x)} \geqslant \\
&-e^{\sigma(\Phi(x)+1)}\int_x^{\Phi(x)+1}|\widehat{f}(t)-f(t)|\mathrm{d}t + e^{\sigma x} + a_f\varepsilon e^{\sigma\Phi(x)} \geqslant \\
&-e^{\sigma(x+1+\frac{1}{a_f})}\int_x^{x+[\frac{1}{a_f}]+2}|\widehat{f}(t)-f(t)|\mathrm{d}t + e^{\sigma x} + a_f\varepsilon e^{\sigma x} \geqslant \\
&e^{\sigma x}\Big(1 + a_f\varepsilon - \Big(\Big[\tfrac{1}{a_f}\Big]+2\Big)e^{\sigma(1+\frac{1}{a_f})}\delta\Big) = e^{\sigma x},
\end{aligned}
$$

co pokazuje, że $\widehat{\Phi}(x) \leqslant \Phi(x) + \varepsilon$.

Podsumowując pokazaliśmy, że dla danego $x \in \mathbb{R}$ mamy $|\Phi(x) - \widehat{\Phi}(x)| \leqslant \varepsilon$. Ponadto, zauważmy, że wybór δ nie zależy od punktu x. Stąd wnioskujemy, że $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi(x) - \widehat{\Phi}(x)| \leqslant \varepsilon$. Aby zakończyć dowód zauważmy, że $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi(x) - \widehat{\Phi}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\Psi(x) - \widehat{\Psi}(x)|$, gdzie Ψ oraz $\widehat{\Psi}$ oznaczają *„displacement map”* Φ oraz *„displacement map”* $\widehat{\Phi}$ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) z funkcją wejścia f i $\widehat{f}$ odpowiednio. □

6.3. *„Firing rate”* oraz liczba obrotu

W paragrafie tym zbierzemy podstawowe fakty dotyczące wielkości zwanej *„firing rate”* dla modelu LIF. Zaczniemy od następującej definicji

Definicja 6.3 ([29])**.** Niech $x \in \mathbb{R}$. Granicę

$$\mathrm{Fr}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\Phi^n(x)}$$

(pod warunkiem, że istnieje) nazywamy *„firing rate”* dla zagadnienia (6.1)–(6.2), gdzie $\Phi^n(x)$ oznacza n-tą iterację *„firing map”* Φ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) w punkcie x.

Uwaga 6.9 ([29])**.** W powyższej definicji wielkości $\mathrm{Fr}(x)$ zakładamy, że wszystkie iteracje $\Phi^n(x)$ są dobrze określone. W szczególności oznacza to, że *„firing map”* Φ musi być zdefiniowane dla $x \in \mathbb{R}$ (zob. Uwaga 6.2).

Przypomnimy twierdzenie o istnieniu wielkości *„firing rate”* dla modelu PI.

Twierdzenie 6.9 (zob. [37, Twierdzenia 3.2] oraz [12, Twierdzenie 4])**.** *Załóżmy, że $\sigma = 0$ oraz $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ jest takie, że „firing map” Φ jest zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli $\mathcal{M}\{f\}$ istnieje, to wówczas dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ wielkość* $\mathrm{Fr}(x)$ *również istnieje i ponadto* $\mathrm{Fr}(x) = \mathcal{M}\{f\} \in [0, +\infty]$ *dla $x \in \mathbb{R}$.*

Dla modelu PI oraz dla nieujemnej funkcji istnienie wielkości $\mathrm{Fr}(x)$ implikuje istnienie również wartości średniej, co jest treścią poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 6.10 ([29]). *Niech $\sigma = 0$ oraz niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ będzie funkcją nieujemną dla p.w. $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli dla pewnego $s \in \mathbb{R}$ „firing rate" $\mathrm{Fr}(s)$ istnieje (tutaj dopuszczamy również przypadek $\mathrm{Fr}(s) = +\infty$), to wówczas istnieje wartość średnia $\mathcal{M}\{f\}$ i ponadto $\mathcal{M}\{f\} = \mathrm{Fr}(s)$.*

Dowód. Zauważmy, że $(\Phi^n(s))_{n=1}^{\infty}$ jest rosnącym ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(s) = +\infty$ (zob. dowód Twierdzenia 6.1). W szczególności $\mathrm{Fr}(s) \geqslant 0$.

Przypuśćmy, że liczba $\mathrm{Fr}(s)$ jest skończona. Mając $\varepsilon > 0$ niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ mamy

$$0 < \Phi^n(s), \qquad \left|\mathrm{Fr}(s) - \frac{n}{\Phi^n(s)}\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \frac{n}{\Phi^n(s)} - \frac{n}{\Phi^{n+1}(s)} \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \frac{1}{\Phi^n(s)} \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Wówczas dla $T \geqslant \Phi^{n_0}(s)$ mamy

$$\left|\mathrm{Fr}(s) - \frac{1}{T}\int_s^T f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon. \tag{6.19}$$

Istotnie, ponieważ ciąg $(\Phi^n(s))_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący oraz $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(s) = +\infty$, dla $T \geqslant \Phi^{n_0}(s)$ istnieje $n \geqslant n_0$ takie, że $\Phi^n(s) \leqslant T \leqslant \Phi^{n+1}(s)$, oraz

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Fr}(s) - \frac{1}{T}\int_s^T f(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\mathrm{Fr}(s) - \frac{n}{\Phi^n(s)}\right| + \left|\frac{n}{\Phi^n(s)} - \frac{1}{T}\int_s^T f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \left|\frac{n}{\Phi^n(s)} - \frac{1}{T}\int_s^{\Phi^n(s)} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_{\Phi^n(s)}^T f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \left|\frac{n}{\Phi^n(s)} - \frac{k}{T}\right| + \frac{1}{\Phi^n(s)}\int_{\Phi^n(s)}^{\Phi^{n+1}(s)} f(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{n}{\Phi^n(s)} - \frac{n}{\Phi^{n+1}(s)} + \frac{1}{\Phi^n(s)} \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

To dowodzi (6.19) oraz pokazuje, że $\mathcal{M}\{f\} = \mathrm{Fr}(s)$.

Załóżmy teraz, że $\mathrm{Fr}(s) = +\infty$. Mając $N > 0$, istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\Phi^{n_0}(s) > 0$ oraz

$$\frac{n}{\Phi^{n+1}(s)} \geqslant N \quad \text{dla } n \geqslant n_0.$$

Wówczas dla $T \geqslant \Phi^{n_0}(s)$ mamy

$$\frac{1}{T}\int_s^T f(t)\mathrm{d}t \geqslant N.$$

Istotnie, dla każdego $T \geqslant \Phi^{n_0}(s)$ istnieje $n \geqslant n_0$ takie, że $\Phi^n(s) \leqslant T \leqslant \Phi^{n+1}(s)$. Wówczas

$$\frac{1}{T}\int_s^T f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\Phi^{n+1}(s)}\int_s^{\Phi^n(s)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{\Phi^{n+1}(s)} \geqslant N.$$

To dowodzi, że $\mathcal{M}\{f\} = +\infty$. □

Poniższy wniosek wynika z Twierdzenia 6.9 oraz Twierdzenia 6.10.

Wniosek 6.3 ([29]). *Niech* $\sigma = 0$ *oraz niech* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *będzie nieujemną funkcją dla p.w.* $x \in \mathbb{R}$. *Jeżeli dla pewnego* $s \in \mathbb{R}$ *„firing rate"* $\mathrm{Fr}(s)$ *istnieje, to wówczas wartość średnia* $\mathcal{M}\{f\}$ *oraz liczby* $\mathrm{Fr}(x)$, *dla* $x \in \mathbb{R}$, *istnieją i ponadto* $\mathrm{Fr}(x) = \mathcal{M}\{f\} \in [0, +\infty]$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Kolejny fakt stwierdza, iż wielkość *„firing rate"* $\mathrm{Fr}(x)$ nie zależy od wyboru punktu.

Twierdzenie 6.11 (zob. [12, Twierdzenie 1]). *Niech* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *będzie takie, że* $f(x) - \sigma \geqslant 0$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}$. *Jeżeli „firing rate"* $\mathrm{Fr}(x)$ *dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *istnieje dla pewnego* $x \in \mathbb{R}$, *to wówczas istnieje dla każdego* $s \in \mathbb{R}$ *oraz* $\mathrm{Fr}(s) = \mathrm{Fr}(x)$.

Będziemy teraz chcieli otrzymać rezultat podobny do Twierdzenia 6.9 dla modelu LIF. Aby to otrzymać, przypomnijmy kilka faktów z teorii liczby obrotu.

Definicja 6.4 ([29]). Liczba obrotu w punkcie $x \in \mathbb{R}$ dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako średnie graniczne przemieszczenie

$$\varrho(f, x) := \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - x}{n},$$

pod warunkiem, że granica ta istnieje.

Definicja 6.5 ([29]). Punktowa liczba obrotu funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako

$$\varrho_p(f) := \{\varrho(f, x) : x \in \mathbb{R} \text{ dla których } \varrho(f, x) \text{ istnieje}\}.$$

Twierdzenie 6.12 (zob. [31, Twierdzenie 1 oraz Twierdzenie 2]). *Przypuśćmy, że nierosnąca funkcja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest postaci* $f(x) = x + g(x)$, *gdzie* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest jednostajnie prawie okresowa oraz* $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x) > 0$. *Wówczas* $\varrho_p(f) = \{r\}$ *dla pewnego* $r \in \mathbb{R}$.

Głównym rezultatem znanym dla funkcji prawie okresowych jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.13 ([29]). *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* S*-prawie okresową oraz załóżmy, że istnieje* $\varsigma > 0$ *takie, że* $f(x) - \sigma > \varsigma$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}$. *Wówczas dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *„firing rate" dla zagadnienia* (6.1)–(6.2) *z funkcją wejścia* f *istnieje, oraz ponadto* $\mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}(0) \in (0, +\infty)$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ponieważ f jest S-prawie okresowa oraz $f(x) - \sigma > \varsigma > 0$ p.w. na $\mathbb{R}$, więc *„displacement map”* Ψ odpowiadające modelowi LIF z funkcją wejścia f jest jednostajnie prawie okresowe (zob. Twierdzenie 6.7). Ponadto z Lematu 6.1 oraz Twierdzenia 6.2 (zob. również Uwagę 6.7), *„firing map”* Φ spełnia założenia Twierdzenia 6.12. Istnieje zatem liczba $r \in \mathbb{R}$ taka, że $\varrho_p(\Phi) = \{r\}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^n(x) - x}{n} = r \qquad \text{dla pewnego } x \in \mathbb{R}.$$

Pokażemy teraz, że $r > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\Phi^n(x) - x = \sum_{i=1}^{n} \Big(\Phi^i(x) - \Phi^{i-1}(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Psi\Big(\Phi^{i-1}(x)\Big) \geqslant n \cdot \psi,$$

gdzie $\psi := \inf_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x) > 0$ oraz $\Phi^0(x) := x$, i dlatego $r \geqslant \psi > 0$. To pokazuje, że *„firing rate”* $\mathrm{Fr}(x)$, które jest odwrotnością liczby obrotu $\varrho(\Phi, x)$ istnieje i jest dodatnie. Na zakończenie dowodu wystarczy zastosować Twierdzenie 6.11. □

Uwaga 6.10 ([29])**.** Zauważmy, że jeżeli $\Psi(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$ dla pewnych $0 < a < b$, to $\mathrm{Fr}(x) \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$, o ile $\mathrm{Fr}(x)$ istnieje.

W przypadku modelu PI (gdy $\sigma = 0$) wartość $\mathrm{Fr}(x)$ jest równa wartości średniej funkcji wejścia f. Analogiczny rezultat nie jest jednak prawdziwy dla modelu LIF. Ostatni przykład pokazuje dwie funkcje S-prawie okresowe mające taką samą wartość średnią, ale mające różne wartości $\mathrm{Fr}(x)$.

Przykład 6.4 ([29])**.** Rozważmy dwie lokalnie całkowalne okresowe (zatem S-prawie okresowe) funkcje $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [0, \ln 2) + \ln 3\mathbb{Z}, \\ 3 & \text{dla } x \in [\ln 2, \ln 3) + \ln 3\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = 3 - \log_3 2.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\{g\} = 3 - \log_3 2$.

Pokażemy teraz, że wartości $\mathrm{Fr}_f(x)$ oraz $\mathrm{Fr}_g(x)$ dla zagadnienia (6.1)–(6.2) z $\sigma = 1$ z funkcjami wejścia f oraz g odpowiednio, są różne dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy najpierw, że zgodnie z Twierdzeniem 6.13, wartości $\mathrm{Fr}_f(x)$ oraz $\mathrm{Fr}_g(x)$ istnieją dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{Fr}_f(x) = \mathrm{Fr}_f(0)$, $\mathrm{Fr}_g(x) = \mathrm{Fr}_g(0)$.

Oznaczmy przez Φ_f oraz Φ_g odwzorowania *„firing map”* dla zagadnienia (6.1)–(6.2) z funkcjami wejścia odpowiednio f i g. Ponieważ $\Phi_f(0) = \ln 2$, $\Phi_f^2(0) = \ln 3$ oraz $\Phi_f^2(x + \ln 3) = \Phi_f^2(x) + \ln 3$ dla $x \in \mathbb{R}$ (zob. Twierdzenie 6.5), wnioskujemy, że $\Phi_f^{2n}(0) = n \ln 3$ dla $n \in \mathbb{N}$. Tym samym $\mathrm{Fr}_f(0) = \frac{2}{\ln 3}$. Podobnie

$$\Phi_g^n(x) = x + n \ln\left(1 + \frac{1}{2 - \log_3 2}\right) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

i stąd

$$\mathrm{Fr}_g(0) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{2 - \log_3 2}\right)\right]^{-1}.$$

Na koniec wystarczy pokazać, że $\mathrm{Fr}_f(0) \neq \mathrm{Fr}_g(0)$.

Bibliografia

[1] J. Andres, A. M. Bersani i R. F. Grande, *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rend. Mat. Appl. **26** (2006), 121–188.

[2] B. Basit i H. Günzler, *Difference property for perturbations of vector-valued Levitan almost periodic functions and their analogs*, Russ. J. Math. Phys. **12**(4) (2005), 424–438.

[3] D. Bainov i P. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1992.

[4] A. S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[5] A.S. Besicovitch, *On generalized almost periodic functions*, Proc. London Math. Soc. **25** (1926), no. 2, 495–512.

[6] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48** (1962), 2039–2043.

[7] S. Bochner, *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, Math. Ann. **96** (1927), no. 1, 119–147.

[8] S. Bochner, *Properties of Fourier series of almost periodic functions*, J. London Math. Soc **21** (1926), no. 3, 131–133.

[9] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Teil Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen*, Acta Math. **45** (1925), 29–127.

[10] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, II. Teil Zusammenhang der fastperiodischen Functionen mit Funktionen von unendkich vielen Variablen; gleichmassige Approximation durch trigonometrische Summen*, Acta Math. **46** (1925), 101–214.

[11] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, III. Teil Dirichletentwicklung analytischer Functionen*, Acta Math. **47** (1926), 237–281.

[12] R. Brette, *Dynamics of one-dimensional spiking neuron model*, J. Math. Biol. **48** (2004), 38–56.

[13] G. Bruno i A. Pankov, *On convolution operators in the spaces of almost periodic functions and L^p spaces*, Z. Anal. Anwendungen **19** (2000), 359-367.

[14] D. Bugajewski i T. Diagana, *Almost automorphy of the convolution operator and applications to differential and functional differential equations*, Nonlinear Stud. **13** (2006), no. 2, 129–140.

[15] D. Bugajewski, X. Gan i P. Kasprzak, *Mappings of higher order and nonlinear equations in some spaces of almost periodic functions*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 5294–5310.

[16] D. Bugajewski i A. Nawrocki, *Some remarks on almost periodic functions in view of the Lebesgue measure with applications to linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), 809–836.

[17] D. Bugajewski i G. M. N'Guérékata, *On the topological structure of almost automorphic and assymptotically almost automorphic solutions of differential and integral equations in abstract spaces*, Nonlinear Anal. **59** (2004), no. 8, 1333-1345.

[18] T. Caraballo i D. Cheban, *Almost periodic and almost automorphic solutions of linear differential/difference equations without Favard's separation condition. I*, J. Differential Equations **246** (2009), 108–128.

[19] H. Carrillo i F. A. Ongay, *On the firing maps of a general class of forced integrate-and-fire neurons*, Math. Biosci. **172** (2001), no. 1, 33–53.

[20] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, AMS/Chelsea Publication Series, Chelsea Publishing Company, New York, 1989.

[21] T. Diagana, *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces*, Springer, New York, 2013.

[22] S. Fatajou, N.V. Minh, G. M. N'Guérékata i A. Pankov, *Stepanov-like almost automorphic solutions for nonautonomous evolution equations*, Electron. J. Differential Equations **121** (2007), 1-11.

[23] J. Favard, *Sur les equations differentielles a coefficients presque-periodiques*, Acta Math. **51** (1928), no. 1, 31–81.

[24] T. Gedeon i M. Holzer, *Phase locking in integrate-and-fire models with refractory periods and modulation*, J. Math. Biol. **49** (2004), no. 6, 577-603.

[25] W. Gerstner, W. M. Kistler, R. Naud i L. Paninski, *Neuronal Dynamics: From Single Neurons to Networks and Models of Cognition*, Cambridge University Press, 2014.

[26] A. Hodkgin i A. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol. **117** (1952), 500-544.

[27] E. M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge MA, 2007.

[28] T. Jäger, *Neuronal coding of pacemaker neurons–a random dynamical systems approach*, Commun. Pure Appl. Anal. **10** (2011), no. 3, 995–1009.

[29] P. Kasprzak, J. Signerska i A. Nawrocki, *Integrate-and-fire models with an almost periodic input function*, J. Differential Equations. (to appear).

[30] J. P. Keener, F. C. Hoppensteadt i J. Rinzel, *Integrate-and-fire models of nerve membrane response to oscillatory input*, SIAM J. Appl. Math. **41** (1981), no. 3, 503–517.

[31] J. Kwapisz, *Poincaré rotation number for maps of the real line with almost periodic displacement*, Nonlinearity **13** (2000), no. 5, 1841–1854.

[32] Ł. Lenart i M. Pipień, *Almost periodically correlated time series in business fluctuations analysis*, National Bank of Poland working paper No. 107, Warszawa, 2012.

[33] B. M. Levitan, *Pochti-periodicheskie Funkcii*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1953.

[34] B.M. Levitan i V.V. Zhikov, *Almost Periodic Functions and Differenial Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[35] B.M. Levitan i V.V. Zhikov, *Favard theory*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 2 (194), 123–171, 263.

[36] M.G. Lyubarskii, *An extension of Favard's theory to the case of a system of linear differential equations with unbounded Levitan almost periodic coefficients*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **206** (1972), 808–810.

[37] W. Marzantowicz i J. Signerska, *Firing map of an almost periodic input function*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **2** (2011), 1032–1041.

[38] W. Marzantowicz i J. Signerska, *On the interspike-intervals of periodically-driven integrate-and-fire models*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), no. 1, 456–479.

[39] Y. Meyer, *Quasicrystals, almost periodic patterns, mean-periodic functions and irregular sampling*, Afr. Diaspora J. Math. **13** (2012), 1–45.

[40] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2003.

[41] A. Nawrocki, *Diophantine approximations and almost periodic functions*, Demonstr. Math. **50** (2017), 100–104.

[42] A. Nawrocki, *On some applications of convolution to linear differential equations with Levitan almost periodic coefficients*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **50** (2017), 489–512.

[43] G. M. N'Guérékata, *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York, 2001.

[44] G. M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[45] G. M. N'Guérékata i A. Pankov, *Stepanov-like almost automorphic functions and monotone evolution equations*, Nonlinear Anal. **68** (2008), no. 9, 2658–2667.

[46] J. von Neumann, *Almost periodic functions in a group*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), no. 3, 445–492.

[47] J. Signerska-Rynkowska, *Analysis of interspike-intervals for the general class of integrate-and-fire models with periodic drive*, Math. Model. Anal. **20** (2015), no. 5, 529–551.

[48] W. Stiepanow, *Über einige Verallgemeinerungen der fast periodischen Funktionen*, Math. Ann. **95** (1926), no. 1, 473–498.

[49] S. Stoiński, *Almost periodic function in the Lebesgue measure*, Comment. Math. (Prace Mat.) **34** (1994), 189–198.

[50] S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.

[51] S. Stoiński, *On compactness of almost periodic functions in the Lebesgue measure*, Fasc. Math. **30** (1999), 171–175.

[52] P. H. E. Tiesinga, *Precision and reliability of periodically and quasiperiodically driven integrate-and-fire neurons*, Phys. Rev. E **65** (2002), 041913.

[53] H. Weyl, *Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen*, Math. Ann. **97** (1927), no. 1, 338–356.

[54] S. Zaidman, *Almost-periodic Functions in Abstract Spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 126, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melbourne, 1985.

Skorowidz symboli

Skorowidz