

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki

Rafał Witkowski

Algorytmy multikolorowania grafów w modelu rozproszonym

rozprawa doktorska

Promotor:

prof. dr hab. Michał Karoński

Poznań, 2010

Składam serdeczne podziękowania
panu profesorowi doktorowi habilitowanemu
Michałowi Karońskiemu za jego
nieocenioną pomoc przy pisaniu tej pracy.

Dziękuję również
panu profesorowi Janezowi Žerovnikowi
z Uniwersytetu w Ljubljanie
za owoconą, naukową współpracę
przy tworzeniu wyników z tej pracy.

Dziękuję także serdecznie mojej żonie,
bez której cierpliwości, wsparcia i pomocy
praca ta nie mogłaby powstać.

Spis treści

Wstęp	3
1. Wprowadzenie	5
1.1. Geneza problemu	5
1.2. Podstawowe definicje i oznaczenia	7
1.3. Podstawowe fakty i twierdzenia	13
2. Algorytmy multikolorowania grafów heksagonalnych	19
2.1. Model obliczeń	19
2.2. Algorytm w modelu ∞ -lokalnym	22
2.3. Algorytm w modelu 2-lokalnym	25
2.4. Algorytm w modelu 1-lokalnym	42
2.5. Algorytm w modelu 0-lokalnym	51
3. Algorytmy multikolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów	53
3.1. Liniowy algorytm multikolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów	55
3.2. Graf $S\check{S}\check{Z}$ i jego zastosowania	61
3.3. Algorytm 3-kolorowania grafu $S\check{S}\check{Z}$	66
3.4. Częściowe rozwiązanie hipotezy McDiarmida-Reeda	75
Bibliografia	80

Wstęp

Niniejsza praca traktuje o problemie multikolorowania grafów, motywacji do rozpatrywania tego zagadnienia oraz jego zastosowaniach w metodach przydzielania częstotliwości w sieciach komórkowych. Powstała na podstawie kilku prac, w których zostały przedstawione nowe algorytmy multikolorowania grafów lub lepsze oszacowania liczby multichromatycznej.

W pracy [36] przedstawiono algorytm multikolorowania grafów heksagonalnych w modelu 1-lokalnym o współczynniku aproksymacji $17/12$. Poprawił on wcześniejszy najlepszy znany współczynnik aproksymacji, który wynosił $3/2$. Był to pierwszy algorytm w tym modelu, w którym bezpośrednio wykorzystano metodę k -dobrego kolorowania grafów, dzięki czemu znacząco poprawiono multikolorowanie grafów heksagonalnych bez trójkątów.

W pracy [39] przedstawiono algorytm multikolorowania grafów heksagonalnych w modelu 1-lokalnym o współczynniku aproksymacji $7/5$. Poprawił on wcześniejszy najlepszy znany współczynnik aproksymacji, który wynosił $17/12$. W algorytmie tym jeszcze lepiej wykorzystano k -dobre kolorowanie grafów heksagonalnych bez trójkątów, do konstrukcji którego wykorzystano nowy sposób kolorowania pokrycia trójkątnego płaszczyzny.

W pracy [37] przedstawiono algorytm multikolorowania grafów heksagonalnych w modelu 2-lokalnym o współczynniku aproksymacji $4/3$, ale w dużej podklasie grafów heksagonalnych działający w modelu 1-lokalnym. W samym modelu 2-lokalnym znane były wcześniej algorytmy o tym współczynniku aproksymacji, natomiast w modelu 1-lokalnym możliwość osiągnięcia tego współczynnika w przypadku ogólnym jest problemem otwartym. Grafy, w których go osiągnięto to grafy heksagonalne bez przyległych ciężkich narożników, rozpatrywane także w innych pracach (np. [28, 32]).

W pracy [25] przedstawiono dowód twierdzenia, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7-[3]-kolorowalny, przez co jego liczba multichromatyczna jest nie większa niż $\frac{7}{6}\omega(G) + O(1)$. W dowodzie wprowadzono nowy rodzaj grafu SŠŽ i wykorzystano twierdzenie o czterech kolorach.

W pracy [38] przedstawiono liniowy algorytm znajdowania 7-[3]-kolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów. Wcześniejsze dowody tego twierdzenia były dowodami niekonstrukcyjnymi, jest to pierwszy algorytm znajdowania takiego kolorowania.

W pracy [28] przedstawiono dowód twierdzenia, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów bez przyległych narożników jest 9-[4]-kolorowalny, przez co w takich grafach prawdziwa jest hipoteza McDiarmida-Reeda, że jego liczba multichromatyczna jest nie większa niż $\frac{9}{8}\omega(G) + O(1)$. W dowodzie wykorzystano graf SŠŽ oraz algorytm jego 3-kolorowania.

1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zostanie najpierw przedstawiona geneza problemu i motywacje do zajmowania się dziedziną multikolorowania grafów heksagonalnych. Następnie zostaną wprowadzone formalnie definicje, oznaczenia oraz najprostsze fakty.

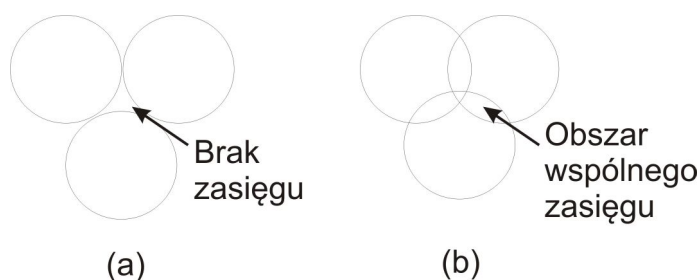
1.1. Geneza problemu

Wraz z wynalezieniem na początku ubiegłego wieku łączności radiowej pojawił się również po raz pierwszy przydział częstotliwości fali, na której komunikaty były nadawane i odbierane. Początkowo wystarczyła tylko jedna częstotliwość, na której pojedynczy nadawca i odbiorca mogli się porozumiewać. Wraz z pojawieniem się drugiego nadawcy niezbędne stało się użycie drugiej częstotliwości nadawania. Szybko stało się jasne, że nadawanie dwóch osób na tej samej częstotliwości nie jest dobrym pomysłem, gdyż odbiorca słyszy wówczas mieszaninę dwóch komunikatów. Również dwie zbyt bliskie częstotliwości nadawania są złe, gdyż występujące interferencje uniemożliwiają prawidłowy przekaz. Ostatecznie więc każdy kolejny nadawca musiał przydzielać sobie kolejne, dobrze rozróżnialne, częstotliwości. Z biegiem czasu liczba nadawców stale wzrastała, co pociągało za sobą również wzrost liczby zajętych częstotliwości. Dopóki ich liczba była względnie mała, aby zapobiegać konfliktom wystarczyło proste przydzielanie zakresów fal przez odpowiednie urzędy. Prawdziwą rewolucją w tym względzie okazała się jednak telefonia komórkowa. Wraz z rozpowszechnieniem się tej technologii praktycznie każdy człowiek na świecie stał się potencjalnym nadawcą sygnału radiowego. Niemożliwym jest, aby każdy operator takiego telefonu mógł nadawać na innej częstotliwości, stąd zaistniała potrzeba wypracowania nowych rozwiązań.

Problem ten rozwiązano w taki sposób, że na ziemi rozmieszczono sieć nadajników (stacji bazowych), które mają pewien ograniczony promień zasięgu, a które mogą komunikować się z telefonami w pewnym znanym sobie spektrum częstotliwości. Każdy operator sieci komórkowych dysponuje pewną ustaloną liczbą częstotliwości, które może udostępniać na rozmowy. Najprostszym rozwiązaniem byłoby przydzielanie częstotliwości po kolei z danego pasma, tyle ile potrzeba w danej stacji bazowej. Niestety zasięg działania każdej stacji bazowej ma kształt koła. Aby nie istniały miejsca bez zasięgu, pola te muszą na siebie zachodzić.

Problem pojawia się z rozmowami, które odbywają się w obszarze przecinania się takich kół. Gdyby dwie rozmowy w sąsiednich stacjach bazowych odbywały się na tej samej częstotliwości, a akurat zdarzyłoby się tak, że obie rozmawiające osoby znajdowałyby się w tym samym, wspólnym, nachodzącym na siebie obszarze, wówczas obie te osoby słyszałyby dwie rozmowy: swoją i tą drugą, lub doszłoby do dużych interferencji. Nawet gdyby dodać odpowiednie kodowanie tychże rozmów, niewiele to pomaga, gdyż zachodzące interferencje powodują uciążliwe zakłócenia rozmowy.

Sytuację tę ilustruje Rysunek 1.1:



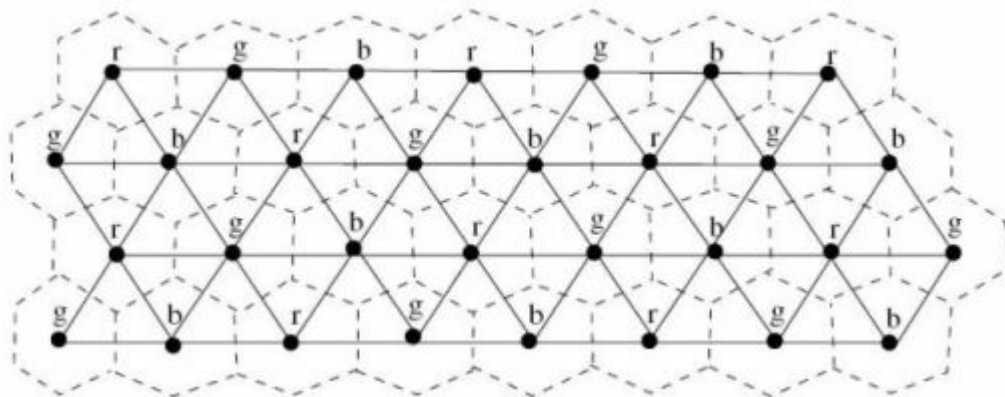
Rysunek 1.1. (a) – rozmieszczenie stacji bazowych powodujące miejsca z brakiem zasięgu, (b) – prawidłowe rozmieszczenie stacji bazowych

Gdyby dwie rozmowy odbywały się we wspólnym obszarze na Rysunku 1.1 (b) na tej samej częstotliwości, jedna w jednej stacji bazowej, a druga w drugiej, wówczas zachodziłyby interferencje. W związku z tym rozmowy prowadzone w sąsiadujących ze sobą stacjach bazowych muszą dostać różne częstotliwości.

Graf modelujący sieć komórkową powstaje w taki sposób, że wierzchołki odpowiadają stacjom bazowym, a krawędzie oznaczają, że dwa nadajniki posiadają obszar wspólnego zasięgu. Wówczas, jeśli każdej stacji należałoby przypisać jedną częstotliwość, to problem ich przydziału byłby tożsamy z problemem kolorowania grafów – każda stacja bazowa musiałaby przydzielić sobie częstotliwość inną niż jej sąsiedzi. Niestety, w jednej stacji bazowej może odbywać się wiele rozmów naraz. Zatem przydzielanych częstotliwości (kolorów) powinno być więcej niż jeden. Oznacza to, że do każdego wierzchołka należy przypisać nie jeden, lecz pewien zbiór kolorów (którego licznosc jest określona przez liczbę rozmów) w taki sposób, aby sąsiednie wierzchołki nie posiadały wspólnego koloru. Na tym właśnie polega problem multikolorowania grafów.

Warto jeszcze dodać jakie rozłożenie stacji bazowych jest najlepsze z punktu widzenia przydziału częstotliwości oraz pokrycia jak największej powierzchni. Otóż okazuje się, że optymalnym rozłożeniem stacji bazowych, aby było jak najmniej interferentnych ze sobą obszarów, a zarazem cała płaszczyzna była pokryta (wszędzie był zasięg), jest takie ich rozłożenie, aby tworzyły one pokrycie

trójkątne płaszczyzny (patrz Rysunek 1.2). Taki graf jest bardzo rzadki (mniejsze koszty stawiania nadajników) oraz stosunkowo łatwo kolorowalny, za czym idzie także łatwość multikolorowania. Podgraf indukowany takiego optymalnego pokrycia zwany jest grafem heksagonalnym, a jego szczegółowa definicja znajduje się w kolejnym rozdziale. Co bardzo ważne, graf ten jest trójdzielny (patrz Rysunek 1.2). Niestety nie da się stworzyć dobrego grafu dwudzielnego tak, aby zapewnić wszystkie wspomniane wcześniej warunki.



Rysunek 1.2. Optymalne, prawidłowe rozmieszczenie nadajników w sieci komórkowej

1.2. Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1. *Kolorowaniem* grafu G nazywamy funkcję Ψ , która dla zbioru kolorów C , każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien kolor z tego zbioru ($\Psi : V(G) \rightarrow C$) w taki sposób, aby żadne dwa różne i przyległe wierzchołki nie otrzymały tego samego koloru.

Uwaga 1.2. Równoważną definicją kolorowania grafu G jest podział zbioru $V(G)$ na rodzinę k zbiorów niezależnych $\{V_1(G), \dots, V_k(G)\}$.

Definicja 1.3. Najmniejszą liczbę kolorów (czyli najmniejszą moc zbioru C), która jest potrzebna do właściwego pokolorowania grafu G zgodnie z Definicją 1.1 nazywamy *liczbą chromatyczną* i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Graf G dla którego $\chi(G) \leq k$ nazywamy k -kolorowalnym lub k -dzielny.

Definicja 1.4. *Grafem z ważeniem* nazywamy graf $G_d := (V, E, d)$, w którym $d : V \rightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi pewną liczbę naturalną nazywaną *wagą wierzchołka*.

Graf z ważeniem d oznaczamy przez G_d (choć najczęściej po prostu G , a to, że jest

ważony będzie wynikać z kontekstu), natomiast wagę wierzchołka v oznaczamy przez $d(v)$.

Definicja 1.5. *Multikolorowaniem* grafu ważonego $G = (V, E, d)$ (zwanym także *kolorowaniem ważonym*, bądź *w-kolorowaniem*) nazywamy funkcję Ψ , która dla pewnego zbioru kolorów C , każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien podzbiór tego zbioru ($\Psi : V(G) \rightarrow 2^C$) w taki sposób, aby zachowane były następujące warunki:

- (i) $\forall_{v \in V(G)} |\Psi(v)| = d(v)$, czyli do każdego wierzchołka v przypisywanych jest $d(v)$ różnych kolorów,
- (ii) $\forall_{\{u,v\} \in E(G)} \Psi(u) \cap \Psi(v) = \emptyset$, czyli dwóm sąsiednim wierzchołkom przypisywane są rozłączne zbiory kolorów.

Definicja 1.6. Najmniejszą liczbę kolorów (czyli najmniejszą moc zbioru C), która jest potrzebna do właściwego pokolorowania grafu zgodnie z Definicją 1.5 nazywamy *liczbą multichromatyczną* i oznaczamy przez $\chi_m(G)$.

Uwaga 1.7. Problem multikolorowania grafów można przetransponować na problem klasycznego kolorowania grafów. Multikolorowanie grafu ważonego G_d jest tym samym, co zwykle kolorowanie grafu G powstałego z G_d przez zastąpienie każdego wierzchołka $v \in V(G_d)$ kliką K_v o rozmiarze $d(v)$ oraz utworzenie krawędzi pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami klik K_v i K_u wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki v i u były połączone krawędzią w G_d .

Definicja 1.8. Przez *wagę klik* rozumiemy sumę wag wszystkich wierzchołków należących do danej klik w grafie ważonym G_d .

Definicja 1.9. *Ważoną liczbą klikową* grafu G nazywamy największą wagę klik spośród wszystkich klik w grafie G i oznaczamy przez $\omega(G)$.

Problem multikolorowania grafów może być badany w kilku możliwych kontekstach, które wynikają z różnych rodzajów zastosowania tego modelu.

Oprócz wspomnianego wcześniej przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych innym zastosowaniem jest przydzielanie zadań procesorom, które muszą korzystać ze wspólnych zasobów. W problemie tym trzeba odwzorować sytuację, w której procesor w celu uzyskania wyniku musi wykonywać obliczenia przez pewien określony czas, ale nie może wykonywać ich w tym samym czasie co inny procesor, z którym mają pewien wspólny zasób krytyczny. Można to przedstawić przy pomocy grafu z ważeniem, w którym wierzchołki reprezentują procesory, dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeśli odpowiadające im procesory chcą korzystać z tego samego zasobu, a wagą wierzchołków jest czas, jaki każdy procesor potrzebuje do wykonania swoich obliczeń. Parametrem optymalizacyjnym jest zminimalizowanie liczby kolorów, czyli skrócenie czasu wykonania wszystkich zadań.

W problemie przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych trzeba stworzyć model matematyczny sytuacji, w której z jednym nadajnikiem chce połączyć się kilku użytkowników sieci. Każdemu z nich należy przydzielić odpowiednią częstotliwość, na której będzie prowadził rozmowę, ale zarazem pilnować, aby sąsiedni nadajnik nie przydzielił komuś innemu tej samej częstotliwości, gdyż wtedy w miejscu, gdzie owe nadajniki nadają wspólnie, rozmowy nachodziłyby na siebie (patrz Rozdział 1.1). Opisaną tak sytuację można przedstawić przy pomocy grafu z ważeniem, w którym wierzchołki reprezentują nadajniki, dwa wierzchołki są połączone krawędzią jeśli obszar nadawania odpowiadających im nadajników pokrywa się, a wagą wierzchołków jest liczba rozmów w danym nadajniku. Najważniejszym przypadkiem grafu reprezentującego taką sieć jest graf heksagonalny. Bardzo dobrze odzwierciedla on sytuację, którą uzyskujemy w przypadku stacji bazowych sieci komórkowych.

Korzystając z notacji podanej w pracy [19] można wprowadzić pojęcie grafu heksagonalnego, czyli modelu matematycznego sieci komórkowej.

Definicja 1.10. *Pokryciem trójkątnym* nazywamy nieskończony graf zanurzony w $\mathbb{R}^2$, który zdefiniowany jest w następujący sposób: zbiorem wierzchołków tego grafu są punkty na płaszczyźnie, których współrzędne są liniowymi kombinacjami $x\vec{p} + y\vec{q}$ (dla każdych $x, y \in \mathbb{Z}$) wektorów $\vec{p} = (1, 0)$, $\vec{q} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Dwa wierzchołki łączy krawędź, jeśli ich odległość euklidesowa na płaszczyźnie wynosi dokładnie 1.

Każdy wierzchołek pokrycia trójkątnego można utożsamić z parą liczb całkowitych (x, y) , które wyznaczają kombinację liniową wektorów p i q tworzącą ten wierzchołek.

W pokryciu trójkątnym każdy wierzchołek (x, y) ma dokładnie sześciu sąsiadów:

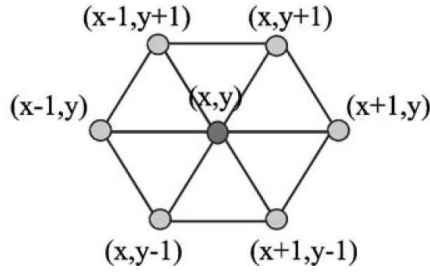
$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1)$$

Sąsiadów tych nazywamy odpowiednio: *prawym*, *lewym*, *prawym-górnym*, *lewym-dolnym*, *prawym-dolnym* i *lewym-górnym* (patrz Rysunek 1.3).

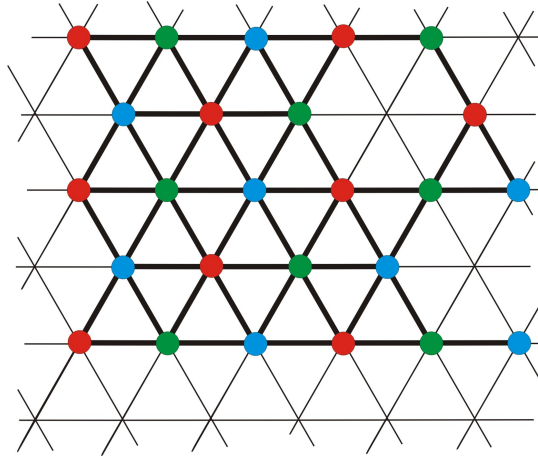
Definicja 1.11. *Grafem heksagonalnym* nazywamy dowolny graf będący indukowanym wierzchołkowo podgrafem pokrycia trójkątnego.

Przykład grafu heksagonalnego przedstawiono na Rysunku 1.4.

Graf heksagonalny jest modelem matematycznym optymalnej (idealnej) sieci komórkowej. Rozmieszczając nadajniki w taki sposób, aby przy jak najmniejszej ich liczbie pokryć jak największą powierzchnię, robi się to właśnie w taki sposób, jak zostało to przedstawione na Rysunku 1.2. Każdy nadajnik ma pewien zasięg, który jest kołem o promieniu r . Na rysunku linią przerywaną zostały ograniczone obszary, które są najbliższej danego nadajnika. Nadajniki w rzeczywistości



Rysunek 1.3. Wierzchołek w pokryciu trójkątnym.



Rysunek 1.4. Przykład grafu heksagonalnego na siatce pokrycia trójkątnego płaszczyzny z 3-kolorowaniem.

nie mają zasięgu o kształcie sześciokąta, stąd krawędzie znajdują się tam, gdzie odpowiednie koła będące ich zasięgami się pokrywają.

Obserwacja 1.12. Każdy graf heksagonalny można pokolorować klasycznie przy pomocy trzech kolorów. Kolor wierzchołka v w tym 3-kolorowaniu oznaczamy przez $bc(v)$ i nazywamy *kolorem bazowym*. Dla uproszczenia w dalszej części pracy będzie mowa o kolorach bazowych czerwonym (R), niebieskim (B) i zielonym (G) (patrz Rysunek 1.4).

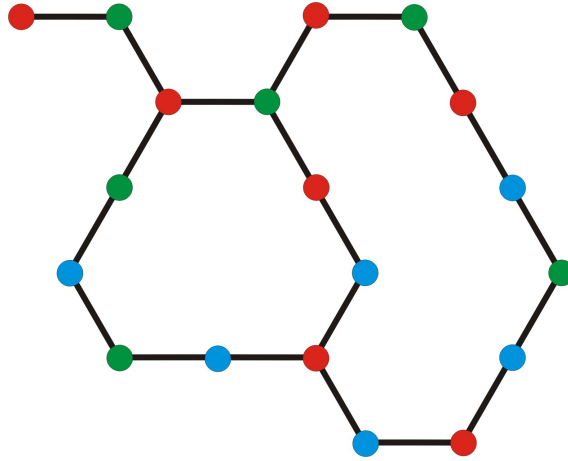
Co więcej, kolor wierzchołka wynika bezpośrednio z jego współrzędnych na pokryciu trójkątnym w następujący sposób:

$$bc(v) = \begin{cases} R & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 0 \\ G & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 1 \\ B & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 2 \end{cases},$$

Bardzo ważną klasą grafów, z punktu widzenia tworzenia algorytmów do przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych, jest klasa grafów heksagonalnych bez trójkątów.

Definicja 1.13. *Grafem heksagonalnym bez trójkątów* nazywamy taki indukowany podgraf pokrycia trójkątnego płaszczyzny, który nie zawiera klik K_3 (trójkąta).

Przykład grafu heksagonalnego bez trójkątów przedstawiono na Rysunku 1.5.

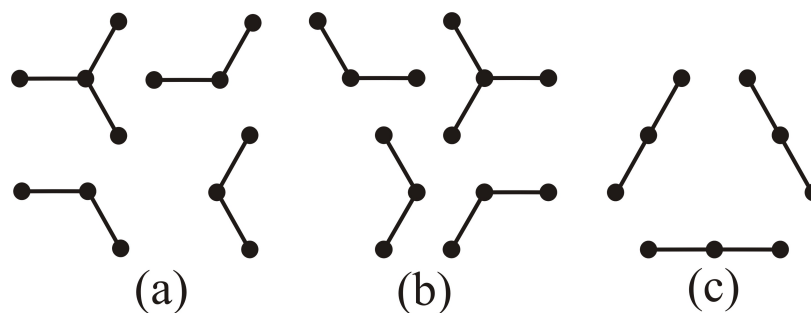


Rysunek 1.5. Przykład grafu heksagonalnego bez trójkątów z odpowiadającym mu 3-kolorowaniem

Graf heksagonalny bez trójkątów ma bardzo dobrze określoną strukturę. Z tego powodu problemy dla grafów heksagonalnych na różne sposoby stara się sprowadzić do problemów w tej węższej klasie grafów. W szczególności wierzchołki grafów heksagonalnych bez trójkątów można sklasyfikować na kilka różnych sposobów.

Definicja 1.14. *Narożnikiem* w grafie heksagonalnym bez trójkątów G nazywamy wierzchołek, który ma w G co najmniej dwóch sąsiadów takich, że krawędzie do nich poprowadzone tworzą kąt o mierze $2\pi/3$. Pozostałe wierzchołki grafu nie są narożnikami – mają mniej niż dwóch sąsiadów, albo dokładnie dwóch sąsiadów takich, że krawędzie do nich poprowadzone tworzą kąt o mierze π (patrz Rysunek 1.6).

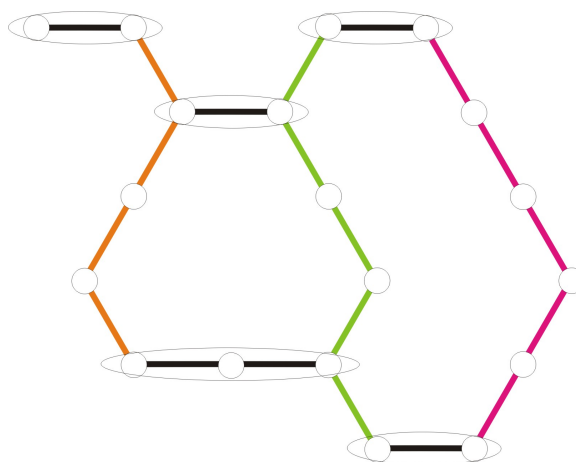
Definicja 1.15. *Narożnik* w grafie heksagonalnym bez trójkątów G nazywamy *lewym*, jeśli ma w G prawego-górnego lub prawego-dolnego sąsiada. W przeciwnym przypadku narożnik nazywamy *prawym* (patrz Rysunek 1.6).



Rysunek 1.6. Wszystkie możliwości wystąpienia: (a) – lewych narożników, (b) – prawych narożników, (c) – wierzchołków o stopniu 2, które nie są narożnikami.

Definicja 1.16. *Pionową ścieżkę* w grafie heksagonalnym bez trójkątów G nazywamy spójną składową grafu indukowanego krawędziowo przez krawędzie, które w geometrycznej interpretacji pokrycia trójkątnego nie są równoległe do poziomej osi OX (patrz Rysunek 1.7).

Definicja 1.17. *Mostem* w grafie heksagonalnym bez trójkątów G nazywamy spójną składową grafu indukowanego krawędziowo przez krawędzie, które w geometrycznej interpretacji pokrycia trójkątnego są równoległe do poziomej osi OX (patrz Rysunek 1.7).



Rysunek 1.7. Graf heksagonalny bez trójkątów z podziałem na pionowe ścieżki i mosty.

Obserwacja 1.18. Każda krawędź grafu heksagonalnego bez trójkątów należy do dokładnie jednej pionowej ścieżki lub jednego mostu. W grafie heksagonalnym bez trójkątów nie ma krawędzi, które nie należałyby do pewnej pionowej ścieżki lub mostu.

Definicja 1.19. Mówimy, że ścieżka pionowa P_1 znajduje się *na lewo* od ścieżki pionowej P_2 , jeśli są one połączone mostem M takim, że $v = M \cap P_1$ jest prawym narożnikiem, natomiast $u = M \cap P_2$ jest lewym narożnikiem. Mówimy wówczas również, że ścieżka P_2 znajduje się *na prawo* od ścieżki P_1 .

Uwaga 1.20. Na podstawie Definicji 1.19 w grafie heksagonalnym można wprowadzić relację porządku. Definicję wprowadzonej relacji można rozszerzyć mówiąc, że ścieżka pionowa P_1 jest na lewo od P_n jeśli istnieją ścieżki $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ takie, że dla każdej pary $\{P_i, P_{i+1}\}$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ zachodzą warunki określone w Definicji 1.19. Taka relacja jest relacją porządku ścieżek w grafie heksagonalnym bez trójkątów.

Obserwacja 1.21. W grafie heksagonalnym bez trójkątów G ścieżka pionowa P_1 nie może być w stosunku do ścieżki pionowej P_2 ścieżką leżącą jednocześnie po lewej jak i po prawej stronie. Gdyby tak było, ścieżki P_1 i P_2 musiałyby się przeciąć, a to jest niemożliwe, gdyż wówczas w G musiałby istnieć trójkąt.

Obserwacja 1.22. W każdym grafie heksagonalnym bez trójkątów znajduje się przynajmniej jedna ścieżka pionowa, która nie posiada żadnej ścieżki leżącej na prawo (lub lewo) od siebie. Takie ścieżki nazywamy *najbardziej lewymi* (lub *najbardziej prawymi*).

1.3. Podstawowe fakty i twierdzenia

W zagadnieniu multikolorowania grafów występują dwa problemy. Pierwszy z nich to znalezienie dla dowolnego grafu liczby multichromatycznej. Drugim jest znalezienie odpowiadającej tej liczbie funkcji Ψ , która określa przypisanie kolorów do wierzchołków. Ze względu na praktyczne, informatyczne aspekty tego problemu, większość prac na ten temat dotyczy algorytmów znajdujących multikolorowania. Podobnie jak w przypadku klasycznego kolorowania, także ten problem jest NP-trudny, więc główny nacisk położony jest na znajdowanie jak najlepszych algorytmów przybliżających optymalne rozwiązanie.

Z definicji multikolorowania (1.5) oraz ważonej liczby klikowej (1.9) można dokonać następującej obserwacji.

Obserwacja 1.23. Dla każdego ważonego grafu G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \geq \omega(G).$$

Dowód. Nierówność jest prawdziwa dla każdego grafu, gdyż w każdej klicie do multikolorowania trzeba użyć co najmniej tylu kolorów ile wynosi suma wag w tej klicie. $\square$

Jeśli chodzi o oszacowanie górne, nie istnieje równie trywialna, dobrze szacująca zależność.

Obserwacja 1.24. Niech G będzie ważonym grafem k -kolorowalnym w zwykłym sensie. Wówczas

$$\chi_m(G) \leq k \cdot \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Dowód. Niech $\{V_1(G), \dots, V_k(G)\}$ będzie rozbiem zbioru $V(G)$ na k zbiorów niezależnych, danych przez kolorowanie grafu. Niech $m := \max\{d(v) : v \in V(G)\}$. Wówczas każdemu wierzchołkowi ze zbioru V_i można przypisać kolory ze zbioru $M_i := \{(i-1)m+1, \dots, im\}$. Ponieważ V_i jest zbiorem niezależnym, zatem nie występuje żaden konflikt wewnątrz V_i . Ze względu na definicję m każdy wierzchołek może wybrać tyle kolorów ze zbioru M_i ile wynosi jego waga. Ponieważ moc zbioru $|M_i| = m$, a takich zbiorów jest k , więc wszystkich kolorów zarezerwowanych do multikolorowania jest

$$km = k \cdot \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

□

Powyższe oszacowanie można poprawić zauważając, że w dowodzie nie trzeba w każdym zbiorze niezależnym brać zbioru kolorów o mocy takiej jak największa waga w grafie, a jedynie zbiór o mocy takiej, jak największa waga wierzchołka w tym zbiorze.

Wniosek 1.25

Niech G będzie ważonym grafem k -kolorowalnym w zwykłym sensie, takim, że $\{V_1(G), \dots, V_k(G)\}$ będzie rozbiem zbioru $V(G)$ na k rozłącznych zbiorów niezależnych danych przez to kolorowanie. Wówczas

$$\chi_m(G) \leq \sum_{i=1}^k \max\{d(v) : v \in V_i(G)\}.$$

Mając dany zupełnie dowolny graf często nie jest znana jego liczba chromatyczna ani tym bardziej podział na zbiory niezależne (ich wyznaczenie jest również problemem trudnym). Znane jest natomiast Twierdzenie Brooksa ([1]), które pozwala dobrze oszacować liczbę chromatyczną.

Fakt 1.26 (Brooks, 1941)

Dla każdego grafu prostego G zachodzi nierówność

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Przy pomocy tego twierdzenia i poprzedniego oszacowania można powiedzieć nieco więcej o liczbie multichromatycznej.

Wniosek 1.27

Dla każdego ważonego grafu G zachodzą następujące nierówności

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq (\Delta(G) + 1) \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Nic więcej nie wiadomo na temat liczby multichromatycznej dowolnego grafu G . Dokładne wyznaczenie liczby multichromatycznej udało się do tej pory tylko w bardzo nielicznych i bardzo prostych klasach grafów. W pracy [21] przedstawiono algorytm optymalnego multikolorowania cykli parzystych, który można również zmodyfikować na algorytm dokładnego multikolorowania grafów dwudzielnych.

Twierdzenie 1.28 (Narayanan, Shende, 2000)

Dla każdego ważonego grafu dwudzielnego G zachodzi równość

$$\chi_m(G) = \omega(G).$$

Dowód. Niech $V = V_1 \cup V_2$ będzie dwupodziałem wierzchołków grafu G . W celu pokolorowania tego grafu można skorzystać z prostego algorytmu zachłannego. Do każdego wierzchołka $v \in V_1$ można przypisać kolory ze zbioru $\{1, \dots, d(v)\}$, natomiast do każdego wierzchołka $u \in V_2$ kolory $\{\omega(G) - d(u) + 1, \dots, \omega(G)\}$. Żadne sąsiadujące ze sobą wierzchołki nie mają wówczas tego samego koloru, ponieważ gdyby tak było, to dla pewnej krawędzi $\{u, v\} \in E$ zachodziłoby $d(v) \geq \omega(G) - d(u) + 1$, a to oznacza $d(v) + d(u) > \omega(G)$, sprzeczność. W grafie dwudzielnym krawędzie są jedynymi możliwymi klikami, zatem multikolorowanie otrzymane w ten sposób jest poprawne, a liczba użytych kolorów wynosi $\omega(G)$. $\square$

Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla szczególnej klasy grafów jakimi są grafy doskonałe (patrz [3]).

W pracy [21] przedstawiono również algorytm wyznaczania multikolorowania cykli nieparzystych.

Twierdzenie 1.29 (Narayanan, Shende, 2000)

Dla każdego ważonego cyklu C_k , $k \geq 3$ z funkcją wagi d zachodzi równość

$$\chi_m(C_k) = \begin{cases} \omega(C_k) & \text{dla } k = 2m \\ \max \left\{ \omega(C_k), \left\lceil \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k d(u_i) \right\rceil \right\} & \text{dla } k = 2m + 1 \end{cases}$$

gdzie $u_1, u_2, \dots, u_k$ są kolejnymi wierzchołkami cyklu C_k .

Oprócz wspomnianych klas grafów dla pozostałych nie są znane dokładne wartości liczby multichromatycznej. Można dla nich znaleźć jedynie mniej lub

bardziej dokładne oszacowania. W pracy [15] przedstawiono twierdzenie, które pozwala oszacować liczbę multichromatyczną dla dowolnego grafu planarnego.

Twierdzenie 1.30 (Kchikech, Togni, 2006)

Dla każdego ważonego grafu planarnego G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \left\lceil \frac{11}{6} \omega(G) \right\rceil.$$

Ponieważ każdy graf heksagonalny G jest grafem planarnym, stąd również dla niego prawdziwe jest to oszacowanie.

W ogólności wyznaczanie klasycznego kolorowania jest problemem prostszym niż obliczanie multikolorowania grafów. Oczywiście oba problemy są NP-trudne, nie mniej jednak dla tego pierwszego znane są bardziej dokładne i szybsze algorytmy (patrz [15, 16, 20]). Stąd też bardzo ważnymi oszacowaniami na liczbę multichromatyczną są te bezpośrednio wynikające ze znajomości liczby chromatycznej (w praktyce również z jej oszacowań). Jeśli dany jest graf, którego liczba chromatyczna jest znana (w szczególności wiadomo, że graf heksagonalny jest trójdzielny, a kolorowanie to można w bardzo łatwy sposób wyznaczyć), wówczas można przy jej pomocy szacować liczbę multichromatyczną.

Twierdzenie 1.31 (Kchikech, Togni, 2006)

Dla każdego ważonego grafu G , który jest k -kolorowalny i nie posiada izolowanych wierzchołków, zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \frac{k}{2} \omega_e(G),$$

gdzie

$$\omega_e(G) = \max\{d(u) + d(v) : \{u, v\} \in E(G)\}$$

Dodatkowym atutem powyższego twierdzenia jest to, że wartością użytą do szacowania oprócz k jest wartość $\omega_e(G)$, która z praktycznego punktu widzenia jest łatwiejsza do wyliczenia niż ważona liczba klikowa. Ponieważ każdy graf heksagonalny G jest 3-kolorowalny, również dla niego prawdziwe jest to oszacowanie.

Najlepsze znane górne oszacowanie na liczbę multichromatyczną grafów heksagonalnych przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.32 (McDiarmid, Reed, 1999)

Dla każdego ważonego grafu heksagonalnego G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \frac{4}{3} \omega(G).$$

Dowód tego twierdzenia zostanie przedstawiony później (Twierdzenie 2.6), gdyż jest nim zarazem algorytm przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych. Twierdzenie to zostało po raz pierwszy udowodnione w pracy [19] przez McDiarmida i Reeda, którzy byli pionierami w analizie problemu multikolorowania grafów heksagonalnych. Pomimo wielu prób nikomu nie udało się poprawić tego wyniku. W kolejnych pracach (np. [12, 21, 30, 34]) pojawiały się jedynie algorytmy, które na różne sposoby i w różnych modelach wyrównywały to oszacowanie, ale wciąż pozostaje otwarte pytanie, czy można je poprawić. W swoich rozważaniach McDiarmid i Reed postawili następującą hipotezę.

Hipoteza 1.33 (McDiarmid, Reed, 1999)

Dla każdego ważonego grafu heksagonalnego G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \frac{9}{8}\omega(G).$$

Rozwiązanie tej hipotezy jest w tej chwili najważniejszym problemem otwartym w zagadnieniu przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych.

Z powodu wagi zagadnienia multikolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów, doczekały się one również szeregu algorytmów szacujących w różny sposób i w różnych modelach ich liczbę multichromatyczną (np. [26, 31, 40]). Najlepsze w tej chwili znane oszacowanie liczby multichromatycznej zostanie udowodnione później, jako jeden z moich wyników.

Twierdzenie 1.34 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Dla każdego ważonego grafu heksagonalnego bez trójkątów G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \frac{7}{6}\omega(G) + O(1).$$

Kolejną ważną hipotezą jest postawione przez McDiarmida i Reeda pytanie, czy wyniku tego nie da się poprawić.

Hipoteza 1.35 (McDiarmid, Reed, 1999)

Dla każdego ważonego grafu heksagonalnego bez trójkątów G zachodzi nierówność

$$\chi_m(G) \leq \frac{9}{8}\omega(G).$$

Hipoteza ta jest związana z Hipotezą 1.33, ale wydaje się prostsza, więc większość prac zmierza do rozwiązania właśnie tego słabszego problemu otwartego. W dalszej części pracy zostaną opisane różne podejścia do tego zagadnienia oraz jego częściowe rozwiązanie w Rozdziale 3.4.

Warto zauważyć, że w ogólnym przypadku współczynnik $9/8$ jest niemożliwy do poprawienia przez żaden algorytm.

Fakt 1.36 (McDiarmid, Reed, 1999)

Każdy algorytm multikolorowania ważonego grafu heksagonalnego G musi użyć co najmniej $\frac{9}{8}\omega(G)$ kolorów.

Dowód. Ponieważ graf heksagonalny może zawierać nieparzyste cykle jako swoje indukowane podgrafy, z Twierdzenia 1.29 wiadomo, że $\omega(G)$ nie zawsze jest dobrym ograniczeniem na maksymalną liczbę kolorów potrzebnych do multikolorowania takiego grafu. Rozpatrzmy np. cykl C_9 długości 9, w którym każdy wierzchołek ma wagę równą k ($k \geq 2$). Ponieważ dla takiego grafu $\omega(C_9) = 2k$ z Twierdzenia 1.29 wynika, że

$$\chi_m(G) = \left\lceil \frac{9k}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{8}2k \right\rceil \leq \left\lceil \frac{9}{8}\omega(G) \right\rceil.$$

Cykl długości 9 został wybrany dlatego, że jest to najmniejszy cykl o nieparzystej długości, większy od 3, który może być zawarty w grafie heksagonalnym jako podgraf indukowany. Powyższa nierówność wraz z faktem, że C_9 jest najmniejszym nieparzystym cyklem niebędącym kliką, który może istnieć jako podgraf indukowany w grafie heksagonalnym, kończy dowód. $\square$

2. Algorytmy multikolorowania grafów heksagonalnych

W rozdziale tym zaprezentowane zostaną najlepsze znane algorytmy przydzielania częstotliwości w sieciach komórkowych. Na początku przedstawione zostaną możliwe modele obliczeń, dla których konstruuje się takie algorytmy. Następnie, w każdym modelu z osobna, zostaną przedstawione te z nich, które najlepiej przybliżają liczbę multichromatyczną względem ważonej liczby klikowej. Każdy z kolejnych modeli będzie coraz lepszy z punktu widzenia praktycznych zastosowań w rzeczywistych sieciach komórkowych, ale przez to coraz gorszy z punktu widzenia współczynnika aproksymacji. Oprócz pierwszego algorytmu, wszystkie pozostałe są mojego autorstwa.

Na początku tego rozdziału warto wspomnieć twierdzenie udowodnione przez McDiarmida i Reeda w pracy [19], które mówi o stopniu trudności tego zagadnienia.

Twierdzenie 2.1 (McDiarmid, Reed, 1999)

Dla ważonego grafu heksagonalnego G rozstrzygnięcie, czy $\chi_m(G) = \omega(G)$ jest problemem NP-zupełnym.

2.1. Model obliczeń

W tym rozdziale wprowadzony zostanie rzeczywisty model obliczeń (wg pracy [12]), który jest używany podczas przydzielania częstotliwości w prawdziwych sieciach komórkowych. Zostanie również wykazane, że jest on równoważny z opisywanymi wcześniej intuicjami.

W sieciach komórkowych nie występuje statyczna sytuacja, w której liczba rozmów jest znana w każdej stacji bazowej i można dokonywać pewnych długich obliczeń w celu wyznaczenia multikolorowania. W rzeczywistości sieć ciągle się zmienia. Matematycznie można to opisać w taki sposób, że sieć komórkowa (nazywamy ją *online*) jest pewnym ciągiem ważonych grafów heksagonalnych $\{G_t = (V, E, d_t) : t \geq 0\}$, w których funkcje d_t są zmieniającymi się liczbami rozmów wykonywanych w poszczególnych stacjach bazowych (wierzchołkach tego grafu). W takim przypadku trzeba wyznaczyć właściwe multikolorowanie grafu

w każdej jednostce czasu t , a algorytm powinien przypisać kolory do grafu G_t zanim przejdzie do kolorowania grafu G_{t+1} . Oczywiście w chwili t trzeba wyznaczyć kolorowanie nie znając grafu G_{t+1} . Można też założyć, że raz przydzielona częstotliwość jednej rozmowie nie powinna się zmienić na inną, dopóki rozmowa ta się nie zakończy. Nie znając struktury, mając dany zupełnie dowolny graf, problem multikolorowania jest bardzo trudny i w zasadzie nie ma prawie żadnych wyników w tej dziedzinie. Interesujące są jednak tylko grafy heksagonalne, których struktura jest bardzo dobrze określona. Ze względu na definicję grafów heksagonalnych można również założyć, że kolorowanie należy uzyskać jedynie na pewnym skończonym wypukłym podgrafie pokrycia trójkątnego, w którym wierzchołki, które nie występują w grafie heksagonalnym mają wagę równą zeru. Wówczas w kolejnych jednostkach czasu zmienia się jedynie funkcja wagi, a struktura grafu pozostaje niezmienną. W pracy [10] udowodniono, że w przypadku, gdy nie można zmieniać częstotliwości przeprowadzanej rozmowy, liczba użytych kolorów musi być zawsze trzy razy większa niż ważona liczba klikowa (algorytm, który to zapewnia zostanie przedstawiony też w Rozdziale 2.5).

Dla większości zastosowań praktycznych algorytmy przydziału częstotliwości muszą być rozproszone, tak aby można je było uruchomić osobno w każdej stacji bazowej, a dzięki któremu każda z nich wiedziałaby na jakich częstotliwościach w danej chwili może porozumiewać się ze swoimi rozmówcami. Innymi słowy można założyć, że w każdej stacji bazowej znajduje się serwer, który potrafi wykonywać obliczenia niezależnie od pozostałych stacji bazowych, mając tylko pewne cząstkowe informacje o liczbie przeprowadzanych rozmów w danej chwili. Graf rozmów w wersji online można poindeksować kolejnymi jednostkami czasu $t \geq 0$, tak, że owe rozproszone algorytmy są synchroniczne, tzn. działają zgodnie z taktem zegara wyznaczającym kolejne jednostki czasu t . W każdej kolejnej jednostce czasu każda stacja bazowa v zna liczbę rozmów $d_t(v)$, którym musi przypisać pewne częstotliwości tak, aby sąsiednie stacje bazowe nie przypisały sobie tych samych częstotliwości. W modelu online można również założyć, że w każdej jednostce czasu znane jest przypisanie (multikolorowanie) z poprzedniej jednostki czasu, a zatem należy jedynie dodać, lub usunąć pewne częstotliwości z puli dotychczas używanych. Np. jeśli $d_t(v) < d_{t-1}(v)$ wówczas za wejście algorytmu w czasie t można przyjąć liczbę $d_{t-1}(v) - d_t(v)$, czyli liczbę o ile mniej potrzeba częstotliwości względem poprzedniej jednostki czasu. Korzystając z tej informacji oraz z informacji o zmianach w swoim sąsiedztwie stacja bazowa v musi swoim rozmówcom przydzielić odpowiednie częstotliwości. Ważne jest jednak, co wynika z powyższego opisu, aby w jednej jednostce czasu złożoność dokonywanych obliczeń była stała (niezależna od wielkości grafu), a liczba komunikatów przesyłanych pomiędzy stacjami bazowymi była możliwie jak najmniejsza – wszystko musi się zdążyć wykonać pomiędzy jednym, a drugim taktem zegara.

Powstaje pytanie, jakie informacje może potrzebować wierzchołek (stacja bazowa) do prawidłowego wyznaczenia swoich kolorów (częstotliwości)? Jak widać z powyższych rozważań, każda globalna wiedza o aktualnym stanie sieci jest zabroniona, gdyż nie można jej uzyskać w czasie stałym. Jedyne co można uzyskać, to wiedzę o stanie grafu z pewnego najbliższego sąsiedztwa.

Definicja 2.2. Algorytm rozproszony nazywamy *k-lokalnym* jeśli obliczenia wykonywane w dowolnym wierzchołku v korzystają jedynie z informacji o wadze wierzchołka v oraz wagach wierzchołków w odległości nie większej niż k od v .

W opisywanym modelu warto też zauważyć, że istnieje pewien stan początkowy $t = 0$. W tej jednostce czasu, czyli zanim dojdzie do pierwszej rozmowy w sieci, można wyznaczyć w grafie pewne dane, które później w każdej jednostce czasu mogą być wykorzystywane podczas wykonywania obliczeń. Przykładem takiej danej może być 3-kolorowanie grafu heksagonalnego wynikające z 3-kolorowania pokrycia trójkątnego, do którego wyznaczenia niezbędna jest wiedza na temat całej sieci, ale które jest niezmiennie w czasie. Inną wiedzą, z której można korzystać, są współrzędne wierzchołka na płaszczyźnie (w rzeczywistości 3-kolorowanie wynika ze współrzędnych, więc położenie stacji bazowej to jedyna wiedza naprawdę wyznaczana przed rozpoczęciem przydziału częstotliwości).

Kolejną ważną rzeczą jest wspomniany wcześniej problem zmian częstotliwości pomiędzy jednostkami czasu, czyli w rzeczywistości zmiany częstotliwości rozmowy już trwającej. Algorytm nazwiemy *algorytmem bez przekolorowywania* jeśli zabronione są zmiany częstotliwości rozmów odbywających się w kolejnych jednostkach czasu w tej samej stacji bazowej (nie może to dotyczyć rozmów, które zmieniają stację bazową, np. rozmowa toczona w pociągu może w trakcie trwania kilkakrotnie zmienić częstotliwość, co będzie spowodowane łączeniem się z różnymi stacjami bazowymi). Jednakże bieżące rozwiązania technologiczne pozwalają na dość swobodną zmianę częstotliwości rozmowy, w związku z tym powstają algorytmy bez tego założenia, które nazywamy algorytmami *przekolorującymi*.

Wprowadźmy definicję wielkości, która będzie mierzyła jakość algorytmów multikolorowania.

Definicja 2.3. Niech A będzie algorytmem, który działa na pewnym ciągu N grafów G_t ($t = 0, \dots, N$) reprezentujących sieć komórkową. Niech $S(A_t)$ oznacza liczbę kolorów użytych przez A do multikolorowania sieci w kroku t . Niech $S_N(A) = \max_t \{S(A_t)\}$, a $\chi_N(G) = \max_t \{\chi_m(G_t)\}$. Algorytm A nazwiemy *α -przybliżającym* jeśli dla pewnej stałej b niezależnej od N zachodzi nierówność

$$S_N(A) \leq \alpha \chi_N(G) + b.$$

Innymi słowy algorytm jest α -przybliżający, jeśli z dokładnością do pewnej stałej używa α razy więcej kolorów niż zrobiłby to algorytm optymalny.

W algorytmach przedstawionych w dalszej części pracy używać będziemy nieco mocniejszego warunku, który implikuje ten z definicji algorytmu α -przybliżającego, a mianowicie

$$S(A_t) \leq \alpha \chi_m(G_t) + b, \forall t \geq 0.$$

W następnych rozdziałach przedstawione zostaną algorytmy, które w opisanym wcześniej modelu online k -lokalnym działają z pewnym przybliżeniem. Niestety obliczenia w takim modelu są dość skomplikowane i dlatego wprowadzone zostanie jeszcze jedna definicja.

Definicja 2.4. Algorytm nazywamy *statycznym*, jeśli potrafi w pewnym k -lokalnym modelu obliczeń wyznaczyć multikolorowanie grafu w jednej, określonej jednostce czasu t .

Innymi słowy algorytm ten może korzystać jedynie z wiedzy na temat wag wierzchołków w chwili t w odległości nie większej niż k oraz predefiniowanych danych dotyczących sieci (np. współrzędnych).

W rzeczywistości konstruowane są algorytmy statyczne, jednak dzięki poniższemu lematowi (z pracy [12]) zarazem udowodniane jest istnienie algorytmów przybliżających multikolorowanie w modelu online k -lokalnym.

Lemat 2.5 (Janssen, Krizanc, 1999)

Niech A będzie k -lokalnym statycznym algorytmem, który potrafi wyznaczyć multikolorowanie ze współczynnikiem aproksymacji α . Algorytm A można zamienić na algorytm online k -lokalny α -przybliżający multikolorowanie.

Dowód. W przypadku online każdy wierzchołek uruchamia k -lokalny statyczny algorytm niezależnie w każdej jednostce czasu. Jeśli kolory użyte przez wierzchołek są takie same jak kolory użyte w poprzedniej jednostce czasu, wówczas nie ma potrzeby jego przekolorowania. Jeśli natomiast nowe kolory nie zgadzają się z tymi poprzednimi, wówczas algorytm musi je tak przekolorować, aby te używane wcześniej pozostały nadal przypisane do odpowiednich wierzchołków. Ponieważ liczba kolorów użyta przez algorytm statyczny w dowolnym kroku jest co najwyżej α razy gorsza od optymalnej liczby kolorów, to algorytm online jest α -przybliżający. $\square$

W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną najlepsze znane algorytmy dla poszczególnych modeli k -lokalnych.

2.2. Algorytm w modelu ∞ -lokalnym

W rozdziale tym przedstawiony zostanie algorytm działający w czasie wielomianowym, który na podstawie globalnej wiedzy o całym grafie potrafi wyznaczyć

jego multikolorowanie ze współczynnikiem aproksymacji $4/3$. Pierwszy taki algorytm został przedstawiony przez McDiarmida i Reeda w pracy [19]. W pracach [20] i [21] pojawiły się również inne algorytmy z tym samym współczynnikiem aproksymacji, które są z pewnych względów lepsze, jednak tamte idee będą później wykorzystywane również w innych dowodach, natomiast praca McDiarmida i Reeda była pierwszą próbą znalezienia takiego algorytmu i od razu udało się im uzyskać wynik do dziś przez nikogo nie poprawiony.

W dalszej części pracy będziemy zakładać bez straty ogólności, że graf G jest grafem spójnym. Gdyby tak nie było, każdy algorytm kolorowania grafu (w szczególności ten omawiany poniżej) można uruchomić niezależnie na każdej składowej spójności.

Twierdzenie 2.6 (McDiarmid, Reed, 1999)

Istnieje algorytm działający w czasie wielomianowym, który dla dowolnego ważonego grafu heksagonalnego G potrafi znaleźć jego multikolorowanie, które używa co najwyżej $\frac{4\omega(G)+1}{3}$ kolorów.

Do dowodu powyższego twierdzenia niezbędny będzie lemat pomocniczy.

Lemat 2.7 (McDiarmid, Reed, 1999)

Niech G będzie ważonym grafem dwudzielnym na n wierzchołkach z ważeniem d . Niech $V = A \cup B$ będzie dwupodziałem zbioru wierzchołków tego grafu. Właściwe multikolorowanie istnieje i można je wyznaczyć przypisując każdemu wierzchołkowi $a \in A$ kolory $\{1, \dots, d(a)\}$, a wierzchołkom $b \in B$ kolory $\{\omega(G) - d(b) + 1, \dots, \omega(G)\}$. Przy pomocy $O(n \log n)$ operacji można opisać to multikolorowanie korzystając z co najwyżej n jednokolorowych zbiorów niezależnych.

Dowód. Oczywiście na podstawie faktów przedstawionych w Rozdziale 1.3 wiadomo, że opisane w treści lematu multikolorowanie będzie właściwe oraz optymalne. Aby opisać to multikolorowanie przy pomocy zbiorów niezależnych, niech

$$K := \{d(v) : v \in A\} \cup \{\omega(G) - d(v) : v \in B\} \cup \{0, \omega(G)\}.$$

Elementy tego zbioru można uporządkować w kolejności rosnącej w ciąg $x_0, x_1, \dots, x_k$. Zauważmy, że $k \leq n$. Dla każdego $j = 1, \dots, k$ niech

$$S_j := \{v \in A : d(v) \geq x_j\} \cup \{v \in B : d(v) \geq \omega(G) - x_{j-1}\},$$

$$m_j := x_j - x_{j-1}.$$

Każdy zbiór S_j jest niezależny, gdyż $x_j + \omega(G) - x_{j-1} > \omega(G)$. Rozpatrzmy rodzinę takich zbiorów, w której każdy zbiór S_j powtarza się m_j razy. Jeśli

$v \in A$ i $d(v) = x_j$, wtedy v należy do zbiorów $S_1, \dots, S_j$, więc v znajduje się w $\sum_{i=1}^j m_i = x_j - x_0 = d(v)$ zbiorach. Jeśli $v \in B$ i $d(v) = \omega(G) - x_j$ wtedy v należy do zbiorów $S_{j+1}, \dots, S_k$, więc v znajduje się w $\sum_{i=j+1}^k m_i = x_k - x_j = d(v)$ zbiorach. Czyli rodzina, w której znajdują się zbiory S_j , każdy w liczbie m_j , jest optymalnym multikolorowaniem grafu G , a dodatkowo takim samym jakie można dostać kolorując go algorytmem opisanym w Twierdzeniu 1.28. $\square$

Dowód twierdzenia 2.6. Niech dane będzie kolorowanie bazowe grafu G cyframi 1, 2 i 3. Można je obliczyć przy pomocy funkcji $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ takiej, że dla każdego wierzchołka $v = (x, y)$ grafu heksagonalnego $f(v) = (x + 2y) \bmod 3$ (kolorowanie to odpowiada 3-kolorowaniu opisanemu w Obserwacji 1.12). Niech $k = \lfloor \frac{\omega(G)+1}{3} \rfloor$. Niech n będzie liczbą wierzchołków w grafie G . Algorytm działa w dwóch etapach, a w każdym z nich używa rozłącznych zbiorów kolorów.

W pierwszej fazie użytych zostanie $3k$ kolorów, które oznaczone są przy pomocy par liczb (i, j) , gdzie $i = 1, 2, 3$, a $j = 1, \dots, k$. Dla każdego wierzchołka v można wyznaczyć wartość m_v , która jest największą liczbą $d(x)$ spośród wag wszystkich sąsiadów x wierzchołka v w grafie G , dla których $f(x) = (f(v) + 1) \bmod 3$ (czyli są to istniejące wierzchołki spośród sąsiadów prawego, lewego-górnego oraz lewego-dolnego). Jeśli v nie ma żadnego takiego sąsiada przyjmuje się, że $m_v = 0$. Niech teraz $r_v = \min\{d(v) - k, k - m_v\}$. Do wierzchołka v można przypisać kolory $\{(f(v), 1), \dots, (f(v), \min\{k, d(v)\})\}$ a także, o ile $r_v > 0$, dodatkowe r_v kolorów $\{(f(v) + 1, k - r_v + 1), \dots, (f(v) + 1, k)\}$ (co nie będzie stało w sprzeczności z przypisaniem kolorów do żadnego z sąsiadów wierzchołka v). Kolory użyte do tej pory można podzielić na $2n$ zbiorów niezależnych (jak w Lemacie 2.7).

Niech $U \subseteq V$ będzie zbiorem wierzchołków $v \in G$, które nie zostały całkowicie pokolorowane w pierwszym etapie. Wiadomo, że $v \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(v) > \max\{k, 2k - m_v\}$, a liczba kolorów, którą potrzebuje ten wierzchołek do całkowitego pokolorowania, wynosi $d'(v) = d(v) - \max\{k, 2k - m_v\}$. Niech U będzie odpowiednim podgrafem indukowanym na G . W drugiej fazie algorytmu użyte zostaną nowe kolory i dokolorowane zostaną wierzchołki w grafie U .

Zauważmy, że dla każdego wierzchołka $v \in U$ zachodzi nierówność

$$d'(v) \leq d(v) + m_v - 2k \leq \omega(G) - 2k,$$

a dla każdej pary wierzchołków $u, v \in U$ połączonych krawędzią w U zachodzi nierówność

$$d'(u) + d'(v) \leq \omega(G) - 2k.$$

Dodatkowo widać, że graf U nie zawiera trójkątów, ponieważ $d(v) \leq k + 1$ dla każdego $v \in U$. Jak się za chwilę okaże, graf U jest acykliczny, a co za tym idzie, dwudzielny, a to oznacza, że można go pokolorować używając co najwyżej $\omega(G) - 2k$ kolorów podzielonych na co najwyżej n różnych zbiorów niezależnych.

Wtedy używając zbiorów z obu faz powstanie multikolorowanie grafu G z ważeniem d używające łącznie

$$3k + \omega(G) - 2k = \omega(G) + k \leq \frac{4\omega(G) + 1}{3}$$

kolorów i odpowiadające mu co najwyżej $3n$ różnych zbiorów niezależnych. Aby zakończyć dowód wystarczy więc pokazać, że opisywany graf U jest rzeczywiście acykliczny. Wprowadźmy relację porządku w grafie U w taki sposób, że wierzchołek u jest „przed” wierzchołkiem v jeśli u na płaszczyźnie pokrycia trójkątnego ma mniejszą pierwszą współrzędną niż wierzchołek v . Rozpatrzmy dowolny wierzchołek $v \in U$. W pokryciu trójkątnym ma on trzech sąsiadów, które poprzedza: prawego-górnego, prawego oraz prawego-dolnego. Niech będą to odpowiednio wierzchołki a, b i c . Wierzchołki a i b oraz b i c są połączone krawędzią w pokryciu trójkątnym. Zauważmy, że w U znajduje się co najwyżej jeden z tych wierzchołków. Ponieważ w U nie ma trójkątów wystarczy pokazać, że w U nie mogą znaleźć się jednocześnie wierzchołki a i c (oczywiście zakładając, że $b \notin U$). Załóżmy nie wprost, że zarówno a jak i c należą do grafu U . Niech $s = \min\{d(a), d(c)\}$, a co za tym idzie $s \geq k + 1$. Oczywiście $d(v) + s \leq \omega(G)$ gdyż zarówno a jak i c są połączone krawędzią z v . Dalej, jeśli $m_v > 0$ oraz x jest sąsiadem v , który osiąga to m_v wtedy v, x oraz jeden z wierzchołków a lub c stworzą trójkąt w G . Tak więc $d(v) + m_v + s \leq \omega(G)$, zatem

$$1 \leq d'(v) \leq d(v) + m_v - 2k \leq \omega(G) - s - 2k \leq \omega(G) - 3k - 1 \leq 0,$$

co daje sprzeczność i kończy dowód. $\square$

2.3. Algorytm w modelu 2-lokalnym

Algorytm przedstawiony w poprzednim rozdziale potrafi w czasie wielomianowym pokolorować dowolny graf heksagonalny używając co najwyżej $\lceil \frac{4}{3}\omega(G) \rceil$ kolorów. Korzysta on jednak istotnie z globalnej wiedzy o grafie. W tym rozdziale przedstawiony zostanie algorytm o tym samym współczynniku aproksymacji, ale podczas obliczeń każdy wierzchołek będzie korzystał jedynie z informacji o wierzchołkach w odległości co najwyżej 2 od siebie (model 2-lokalny). Pierwszym wynikiem w modelu 2-lokalnym był algorytm o współczynniku aproksymacji $3/2$ przedstawiony w pracy [11]. Wynik ten został poprawiony na $17/12$ w pracy [12]. W tej samej pracy aproksymacji $4/3$ został osiągnięty w modelu 4-lokalnym. W pracy [30] Petra Šparl i Janez Žerovnik podali algorytm w modelu 2-lokalnym o współczynniku aproksymacji $4/3$. Niezależnie od tego wyniku, na podstawie algorytmu w modelu ∞ -lokalnym przedstawionym w pracy [21] stworzyłem algorytm w tym modelu o tym samym współczynniku aproksymacji i opisałem go

w pracy [35]. Algorytm przedstawiony poniżej został zawarty w pracy [37] i jest kolejnym algorytmem w tym modelu o współczynniku aproksymacji $4/3$, jednakże dla bardzo dużej podklasy grafów heksagonalnych działający także w modelu 1-lokalnym (w którym najlepszym znanym współczynnikiem aproksymacji jest w tej chwili $7/5$).

Twierdzenie 2.8 (Witkowski, 2009)

Istnieje algorytm $4/3$ -przybliżający multikolorowanie ważonego grafu heksagonalnego w modelu 2-lokalnym, działający w czasie stałym.

Jak już zostało wspomniane w Rozdziale 2.1, można założyć, że algorytm dla grafu G jest uruchamiany na pewnym rozszerzeniu, które jest spójnym, wypukłym, pełnym podgrafem pokrycia trójkątnego, w którym wierzchołki nie występujące w oryginalnym grafie G mają wagę równą zeru. Dla jeszcze większego uproszczenia w dalszej części tego rozdziału założymy, że algorytm może być uruchomiony w sposób rozproszony na całym pokryciu trójkątnym, przy zachowaniu wspomnianych warunków. Niech $\tau(T)$ oznacza zbiór wszystkich trójkątów w nieskończonej siatce pokrycia trójkątnego T . Dzięki temu ważoną liczbę klikową można zdefiniować w grafie G jako

$$\omega(G) = \max\{d(u) + d(v) + d(t) : \{u, v, t\} \in \tau(T)\}.$$

Definicja 2.9. Dla każdego wierzchołka $v \in G$ funkcją bazową nazywamy wartość:

$$\kappa(v) = \max\{a(v, u, t) : \{v, u, t\} \in \tau(T)\},$$

gdzie

$$a(u, v, t) = \left\lceil \frac{d(u) + d(v) + d(t)}{3} \right\rceil,$$

jest zaokrągloną w górę średnią wagą w trójkącie $\{u, v, t\} \in \tau(T)$.

Wartość funkcji $\kappa(v)$ jest jedną trzecią wagi najcięższego trójkąta zawierającego wierzchołek v .

Z powyższej definicji natychmiast wynika zależność pomiędzy ważoną liczbą klikową a funkcją bazową.

Fakt 2.10

Dla każdego wierzchołka $v \in G$

$$\kappa(v) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil.$$

Definicja 2.11. Wierzchołek $v \in G$ nazywamy *lekkim*, jeśli $d(v) \leq k(v)$. W przeciwnym przypadku wierzchołek nazwiemy *ciężkim*. Jeśli $d(v) > 2k(v)$, to wierzchołek v nazwiemy *bardzo ciężkim*.

Definicja 2.12. Wierzchołek u nazwiemy *nieważkim sąsiadem* wierzchołka v , jeśli $d(u) \leq \max\{a(v, u, t) : \{v, u, t\} \in \tau(T)\}$

Fakt 2.13 (Witkowski, 2008)

Każdy wierzchołek u , który jest nieważkim sąsiadem pewnego wierzchołka v , jest lekkim wierzchołkiem w G .

Dowód. Jeśli dla ustalonego v , $d(u) \leq \max\{a(v, u, t) : \{v, u, t\} \in \tau(T)\}$, to również dla dowolnego v $d(u) \leq \max\{a(v, u, t) : \{v, u, t\} \in \tau(T)\}$, a co za tym idzie $d(u) \leq \kappa(u)$. $\square$

Fakt 2.14 (Witkowski, 2008)

Każdy ciężki wierzchołek $v \in G$ posiada co najmniej trzech nieważkich sąsiadów w G .

Dowód. Dla każdego trójkąta z $\tau(T)$ zawierającego ciężki wierzchołek v co najmniej jeden z jego sąsiadów jest nieważki. Gdyby tak nie było, wówczas dla u i t tworzących z v trójkąt, dla którego $a(u, v, t) = \max\{a(x, y, z) : \{x, y, z\} \in \tau(T)\}$, zachodziłyby nierówności:

$$\begin{aligned} d(u) &> a(u, v, t) \\ d(t) &> a(u, v, t) \\ d(v) &> \kappa(v) \geq a(u, v, t) \end{aligned}$$

Dodając je stronami wychodzi

$$d(u) + d(t) + d(v) > 3a(u, v, t) \geq d(u) + d(t) + d(v)$$

czyli sprzeczność. Wierzchołek v w pokryciu trójkątnym wchodzi w skład sześciu trójkątów i ma sześciu sąsiadów, spośród których każdy występuje w dokładnie dwóch trójkątach. Jeśli w każdym trójkącie co najmniej jeden sąsiad jest nieważki, to nieważkich sąsiadów musi być co najmniej trzech. $\square$

W opisywanym algorytmie użyjemy procedury z dowodu Twierdzenia 1.28, która jest algorytmem multikolorowania grafów dwudzielnych.

Algorytm 2.15 (Narayanan, Shende, 2000).

Niech $H = (V, E, d)$ będzie ważonym grafem dwudzielnym z danym dwupodziałem $V = V' \cup V''$ (każdy wierzchołek wie, w której części dwupodziału się znajduje). Optymalne multikolorowanie grafu H można uzyskać poprzez następujący algorytm rozproszony:

Krok 0 Jeśli $v \in V'$, wówczas przypisuje sobie zbiór

$$\{1, 2, \dots, d(v)\}.$$

Krok 1 Jeśli $v \in V''$, wówczas przypisuje sobie zbiór

$$\{m(v) + 1, m(v) + 2, \dots, m(v) + d(v)\},$$

gdzie $m(v) = \max\{d(u) : \{u, v\} \in E\}$.

Dowód poprawności algorytmu. Z definicji funkcji $m(v)$ łatwo zauważyć, że nie pojawi się żaden konflikt w tym multikolorowaniu. Największą liczbą użytą do określenia tego multikolorowania jest

$$\begin{aligned} & \max\{\max\{d(v) : v \in V'\}, \max\{d(v) + m(v) : v \in V''\}\} \\ &= \max\{\max\{d(v) : v \in V'\}, \max\{d(v) + \max\{d(u) : \{u, v\} \in E\} : v \in V''\}\} \\ &= \max\{\max\{d(v) : v \in V'\}, \max\{d(v) + d(u) : \{u, v\} \in E\}\} \\ &= \omega(G). \end{aligned}$$

Przekształcenia te są prawdziwe, gdyż w grafie dwudzielnym jedynymi klikami są krawędzie oraz wierzchołki izolowane. $\square$

Algorytm 2.15 działa w modelu 1-lokalnym, gdyż każdy wierzchołek v do obliczenia swojego zbioru używa tylko swojej wagi $d(v)$ oraz wartości $m(v)$, do której wyliczenia niezbędna jest jedynie wiedza o wadze najbliższych sąsiadów. Uwaga ta jest prawdziwa tylko przy założeniu, że wierzchołek wie, w której części dwupodziału się znajduje.

Do multikolorowania grafu heksagonalnego używa się kolorów ze specjalnych zbiorów znanych paletami.

Definicja 2.16. Poprzez *paletę barw* (w skrócie *paletę*) rozumiemy zbiór par $\{(c, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ dla pewnego ustalonego c .

W szczególności, jeśli $c \in \{R, G, B\}$, mówimy o *bazowej palecie barw* (palecie czerwonej, zielonej i niebieskiej). Każdy wierzchołek posiada swoją bazową paletę barw w zależności od swojego koloru w kolorowaniu bazowym (patrz Obserwacja 1.12).

W opisywanym algorytmie oprócz bazowych palet barw używana jest także *dotatkowa paleta barw* ($c = X$). Każda paleta jest w tym przypadku równej wielkości, a ich moc wynosi $\lceil \omega(G)/3 \rceil$ ($i \in \{1, \dots, \lceil \omega(G)/3 \rceil\}$). W tym szczególnym przypadku (nie zawsze jest to prawda) można utożsamić palety ze zbiorami liczb, które są używane do multikolorowania grafu G :

- czerwona paleta bazowa: $\{4i : i = 1, \dots, \lceil \omega(G)/3 \rceil\}$
- niebieska paleta bazowa: $\{4i - 1 : i = 1, \dots, \lceil \omega(G)/3 \rceil\}$
- zielona paleta bazowa: $\{4i - 2 : i = 1, \dots, \lceil \omega(G)/3 \rceil\}$
- dodatkowa paleta barw: $\{4i - 3 : i = 1, \dots, \lceil \omega(G)/3 \rceil\}$

Podczas multikolorowania grafu heksagonalnego w modelu 2-lokalnym nie jest użyty żaden kolor, który nie znajdowałby się w jednej z tych palet. Zatem wszystkich kolorów użytych do prawidłowego multikolorowania jest nie więcej niż $\frac{4}{3}\omega(G) + 4$.

Przypomnijmy, że w 2-lokalnym modelu obliczeń każdy wierzchołek zna swoje współrzędne, jak również swoją wagę oraz wagę wszystkich swoich sąsiadów w odległości 2. Przy pomocy tej wiedzy musi określić, które kolory z podanych wcześniej palet sobie przypisze.

Algorytm składa się z czterech głównych faz. W pierwszej z nich każdy wierzchołek przypisuje sobie $\kappa(v)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw. Po tym kroku pokolorowane są wszystkie wierzchołki lekkie, a pozostałe tworzą graf heksagonalny bez trójkątów. Co więcej, po technicznym usunięciu bardzo ciężkich wierzchołków, ważona liczba klikowa tego grafu nie przekracza $\lceil \omega(G)/3 \rceil$. W drugiej fazie poprzez usuwanie z pozostałego grafu określonych narożników konstruowany jest graf dwudzielny i multikolorowany przy pomocy Algorytmu 2.15 używającego kolorów z dodatkowej palety barw. Po tej fazie w grafie pozostają jedynie wierzchołki izolowane oraz pewien szczególny przypadek narożników połączonych mostem długości jeden. W kolejnej fazie usuwane są z grafu wierzchołki izolowane poprzez pożyczanie im kolorów z bazowych palet barw ich lekkich sąsiadów. Do tej pory wszystkie fazy mogą być wykonane w modelu 1-lokalnym. Jednak w ostatniej fazie należy przypisać kolory również do pozostałych narożników połączonych mostem, do czego niezbędna jest wiedza o wierzchołkach w odległości 2.

Algorytm 2.17 (Witkowski, 2009).

Krok 0 Dla każdego wierzchołka $v = (x, y) \in V$ wyznacz jego kolor bazowy

$$bc(v) = \begin{cases} R & \text{if } x + 2y \bmod 3 = 0 \\ G & \text{if } x + 2y \bmod 3 = 1 \\ B & \text{if } x + 2y \bmod 3 = 2 \end{cases},$$

oraz wartość jego funkcji bazowej

$$\kappa(v) = \max \left\{ \left\lceil \frac{d(u) + d(v) + d(t)}{3} \right\rceil : \{v, u, t\} \in \tau(T) \right\}.$$

Krok 1 Do każdego wierzchołka $v \in V$ przypisz pierwsze $\min\{\kappa(v), d(v)\}$ kolorów z jego bazowej palety barw. Utwórz nowy ważony graf heksagonalny bez trójkątów $G_1 = (V_1, E_1, d_1)$, w którym $d_1(v) = \max\{d(v) - \kappa(v), 0\}$, $V_1 \subseteq V$ jest zbiorem wierzchołków z $d_1(v) > 0$ (ciężkie wierzchołki), a $E_1 \subseteq E$ jest zbiorem wszystkich krawędzi z G , których oba końce znajdują się w V_1 (E_1 jest indukowany wierzchołkowo przez V_1).

Krok 2 Dla każdego wierzchołka $v \in V_1$, dla którego $d_1(v) > \kappa(v)$ (bardzo ciężkie wierzchołki) przypisz pierwsze $\kappa(v)$ kolorów z dodatkowej palety barw oraz

kolory nie powodujące konfliktu z bazowej palety barw jego prawego (lekkiego) sąsiada. Utwórz nowy ważony graf $G_2 = (V_2, E_2, d_2)$, w którym d_2 jest różnicą pomiędzy $d_1(v)$ a liczbą kolorów przypisanych do v w tym kroku, $V_2 \subseteq V_1$ jest zbiorem wierzchołków z $d_2(v) > 0$, a $E_2 \subseteq E_1$ jest zbiorem wszystkich krawędzi z G_1 , których oba końce znajdują się w V_2 (E_2 jest indukowany wierzchołkowo przez V_2).

Krok 3 Dla każdego wierzchołka $v \in V_2$ wyznacz wartość następującej funkcji p :

- jeśli $v = (x, y)$ jest narożnikiem:
 - jeśli $x \bmod 2 = y \bmod 2$ to $p(v) = y \bmod 2$
 - jeśli $x \bmod 2 \neq y \bmod 2$ to $p(v) = 2$
- jeśli $v = (x, y)$ nie jest narożnikiem:
 - jeśli v ma górnego-lewego lub dolnego-prawego sąsiada w G_2 to $p(v) = x \bmod 2$
 - jeśli v ma górnego-prawego lub dolnego-lewego sąsiada w G_2 to $p(v) = y \bmod 2$
 - jeśli v ma lewego lub prawego sąsiada w G_2 to $p(v) = x \bmod 2$

Krok 4 Usuń z grafu G_2 wierzchołki, dla których wartość funkcji p wynosi 2.

Dla tak powstałego grafu G'_2 zastosuj Algorytm 2.15 używając kolorów z dodatkowej palety barw i korzystając z dwupodziału wynikającego z wartości funkcji p . Utwórz nowy ważony graf $G_3 = (V_3, E_3, d_3)$, w którym $d_3 = d_2$ jest takie samo jak w G_2 , $V_3 \subseteq V_2$ jest zbiorem wierzchołków z $p(v) = 2$, a E_3 jest zbiorem wszystkich krawędzi z G_2 , których oba końce znajdują się w V_3 (E_3 jest indukowany wierzchołkowo przez V_3).

Krok 5 Do każdego wierzchołka izolowanego $v \in V_3$ przypisz wolne kolory z bazowej palety barw jego lekkich sąsiadów w T .

Krok 6 Dla każdej krawędzi izolowanej $\{v, u\} \in G_3$ (v jest lewym sąsiadem u), do wierzchołków v i u przypisz kolory z bazowej palety barw ich nieważkich sąsiadów w następujący sposób:

- do v przypisz kolory dla i z przedziału $\{\kappa(v) - d_3(v) + 1, \dots, \kappa(v)\}$,
- do u przypisz kolory dla i z przedziału $\{a(u, v, r) - d_3(v) - d_3(u) + 1, \dots, a(u, v, r) - d_3(v)\}$

gdzie r jest wspólnym nieważkim sąsiadem v i u z większą wartością funkcji wagi w wyjściowym grafie G .

Krok 7 Dla u, v, r zdefiniowanych jak w Kroku 6, niech s będzie prawym sąsiadem u , a t będzie prawym sąsiadem s . Jeśli $d(s) > d(r)$ wówczas:

- **Przypadek (7.1)** jeśli t jest lekkim albo bardzo ciężkim wierzchołkiem w G lub nie jest narożnikiem w G_2 , to podmień przypisane kolory do s używając kolorów z bazowej palety barw wierzchołka s dla i z przedziału $\{1, \dots, d(r)\} \cup \{\kappa(s) - (d(s) - d(r)) + 1, \dots, \kappa(s)\}$.

- **Przypadek (7.2)** jeśli t jest narożnikiem w G_2 i s ma dokładnie dwóch dodatkowych sąsiadów $w, w' \in G_2$ położonych w stosunku do siebie pod kątem π ($p(w) = p(w')$), to podmień wartość funkcji $p(s) = (1 + p(w)) \bmod 2$ i podmień kolory przypisane do s na takie, jakie otrzymałby ten wierzchołek podczas uruchomienia Algorytmu 2.15 w Kroku 4.
- **Przypadek (7.3)** jeśli t jest narożnikiem w G_2 i s ma dokładnie dwóch dodatkowych sąsiadów $w, w' \in G_2$ położonych w stosunku do siebie pod kątem $\pi/3$ ($p(w) \neq p(w')$), to podmień kolory przypisane do s używając kolorów z dodatkowej palety barw.
- **Przypadek (7.4)** jeśli t jest narożnikiem w G_2 i s ma więcej niż dwóch dodatkowych sąsiadów w G_2 , to podmień przypisane kolory do s używając ostatnich $d(s)$ wolnych kolorów z dodatkowej palety barw. Jeśli będzie to konieczne, odpowiednio podmień kolory przypisane sąsiadom s , którzy uczestniczyli w Kroku 4 w Algorytmie 2.15 z wartością p równą 1.

W przeciwnym przypadku kolorowanie jest już właściwe.

Dowód poprawności algorytmu.

Na samym początku przed wykonaniem jakichkolwiek kroków następuje komunikacja na odległość 1 – każdy wierzchołek wysyła swoim sąsiadom informację o swojej wadze. Kolejna komunikacja będzie niezbędna dopiero przed Krokiem 6, o ile w grafie G_3 znajdują się jakieś krawędzie. Wtedy każdy wierzchołek wysyła swoim sąsiadom informacje zebrane wcześniej, czyli każdy otrzymuje informacje o sąsiadach w odległości 2. Poza tą wiedzą każdy wierzchołek zna swoje współrzędne (x, y) w pokryciu trójkątnym T .

Krok 0 nie wymaga dowodu.

W Kroku 1 każdy ciężki wierzchołek v przypisuje sobie $\kappa(v)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw, podczas gdy każdy lekki wierzchołek u przypisuje sobie pierwsze $d(u)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw. Zatem G_1 zawiera tylko wierzchołki ciężkie w G .

Lemat 2.18

G_1 jest grafem heksagonalnym bez trójkątów.

Dowód. W każdym trójkącie z $\tau(T)$ co najmniej jeden wierzchołek jest lekki. Gdyby tak nie było, wówczas dla trójkąta $\{v, u, t\} \in \tau(T)$ składającego się z samych ciężkich wierzchołków zachodziłyby nierówności

$$d(u) > \kappa(u) \geq a(u, v, t)$$

$$d(t) > \kappa(t) \geq a(u, v, t)$$

$$d(v) > \kappa(v) \geq a(u, v, t)$$

Dodając je stronami wyszłoby

$$d(u) + d(t) + d(v) > 3a(u, v, t) \geq d(u) + d(t) + d(v),$$

czyli sprzeczność. Zatem z każdego trójkąta w $\tau(T)$ usunięty zostanie przynajmniej jeden wierzchołek, z czego wynika, że graf G_1 jest grafem heksagonalnym bez trójkątów. $\square$

Wagę każdego wierzchołka v w grafie G_1 można opisać wzorem

$$d_1(v) = d(v) - \kappa(v).$$

W Kroku 2 kolorowane są jedynie wierzchołki spełniające nierówność $d_1(v) > \kappa(v)$. Ponieważ $d_1(v) = d(v) - \kappa(v) > \kappa(v)$ zatem są to bardzo ciężkie wierzchołki w G . Jeśli wierzchołek v jest bardzo ciężki w G wówczas jest wierzchołkiem izolowanym w G_1 . W przeciwnym przypadku bowiem, dla pewnego $\{v, u, t\} \in \tau(T)$ zachodziłoby

$$\begin{aligned} d(v) + d(u) &> 2\kappa(v) + \kappa(u) \\ &\geq 3a(v, u, t) \\ &\geq d(v) + d(u) \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. Bez straty ogólności założmy, że $bc(v) = R$, a jego prawy sąsiad jest koloru niebieskiego. Niech

$$D_B(v) = \min\{\kappa(v) - d(u) : \{u, v\} \in T, bc(u) = B\},$$

będzie liczbą dostępnych kolorów z niebieskiej bazowej palety barw. Oczywiście, $D_B(v) > 0$ dla każdego bardzo ciężkiego wierzchołka $v \in G_1$. Ponieważ w Kroku 1 każdy lekki wierzchołek t użył dokładnie $d(t)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw, istnieje co najmniej $D_B(v)$ dostępnych kolorów w niebieskiej bazowej paletce barw, które wierzchołek v może sobie przypisać nie powodując konfliktów. Poza tym wierzchołek v może przypisać sobie $\kappa(v)$ kolorów z dodatkowej palety barw, także nie powodując konfliktów, gdyż nie były one wcześniej używane. Po wykonaniu tych operacji powstaje graf G_2 , dla którego zachodzi nierówność $\omega(G_2) \leq \lceil \omega(G)/3 \rceil$. Aby ją udowodnić niezbędny będzie następujący lemat.

Lemat 2.19

W grafie G_1 dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in E_1$ zachodzą nierówności

$$d_1(v) + d_1(u) \leq \kappa(v), \quad d_1(u) + d_1(v) \leq \kappa(u).$$

Dowód. Załóżmy, że v i u są ciężkimi wierzchołkami połączonymi krawędzią w G_1 oraz $d_1(v) + d_1(u) > \kappa(v)$. Wówczas dla pewnego $\{v, u, t\} \in \tau(T)$ mielibyśmy

$$\begin{aligned} d(v) + d(u) &= d_1(v) + \kappa(v) + d_1(u) + \kappa(u) \\ &> 2\kappa(v) + \kappa(u) \\ &\geq 3a(u, v, t) \\ &\geq d(u) + d(v) \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. □

Fakt 2.20

$$\omega(G_2) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil.$$

Dowód. W grafie heksagonalnym jedynymi klikami są trójkąty, krawędzie bądź wierzchołki izolowane. Ponieważ G_1 jest grafem heksagonalnym bez trójkątów (Lemat 2.18), także G_2 nie zawiera trójkątów, zatem do oszacowania ważonej liczby klikowej należy sprawdzić jedynie krawędzie i wierzchołki izolowane.

Dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in E_2$ z Lematu 2.19 oraz Faktu 2.10 wiadomo, że

$$d_2(v) + d_2(u) \leq d_1(v) + d_1(u) \leq \kappa(v) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil.$$

Dla wierzchołka izolowanego $v \in G_2$ również chcielibyśmy otrzymać nierówność $d_2(v) \leq \lceil \omega(G)/3 \rceil$. Rzeczywiście, jeśli $d_2(v) \leq \kappa(v)$, nierówność ta zachodzi na mocy Faktu 2.10. Jeśli natomiast $d_2(v) > \kappa(v)$, wówczas również $d_1(v) > \kappa(v)$, więc wierzchołek v w Kroku 2 musi przypisać sobie $\kappa(v)$ kolorów z dodatkowej palety barw oraz pożyczyć kolory z bazowej palety barw swojego prawego sąsiada. Wtedy, przy założeniu, że $bc(v) = R$, a kolor bazowy jego prawego sąsiada to niebieski wychodzi, że

$$\begin{aligned} d_2(v) &= d_1(v) - \kappa(v) - D_B(v) \\ &\leq d(v) - \kappa(v) - \kappa(v) - \kappa(v) + d(u) \\ &\leq d(v) + d(u) - 3\kappa(v) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

dla pewnego $\{v, u\} \in T$, $bc(u) = B$. Zatem, $d_2(v) \leq \lceil \omega(G)/3 \rceil$, czyli $\omega(G_2) \leq \lceil \omega(G)/3 \rceil$. □

Zauważmy, że dowodzie Lematu 2.20 zostało jednocześnie wykazane, że w G_2 nie ma bardzo ciężkich wierzchołków, gdyż zostały one całkowicie pokolorowane w Kroku 2.

W Kroku 3 każdy wierzchołek v musi zdecydować, czy jest narożnikiem w G_2 , czy też nie. W modelu 1-lokalnym (który zostaje utrzymany do Kroku 6) wierzchołek nie wie, który z jego sąsiadów jest ciężki (a więc wciąż istniejący w grafie G_2), a który lekki. Wierzchołek v może jedynie wyznaczyć sobie sąsiadów, dla których spełniona jest nierówność $d(u) \leq \max\{a(v, u, t) : \{v, u, t\} \in \tau(T)\}$. Jest to nierówność z Definicji 2.12 nieważkiego sąsiada. Jak wynika z Faktu 2.13 w ten sposób wierzchołek v może określić, którzy jego sąsiedzi na pewno nie występują w grafie G_2 . W przypadku wszystkich pozostałych sąsiadów wierzchołek v zakłada, że występują w grafie G_2 . Korzystając z tej informacji wierzchołek v może ocenić, czy jest narożnikiem, czy też nim na pewno nie jest. Na mocy Faktu 2.14 wiadomo, że wierzchołek v ma co najmniej trzech nieważkich sąsiadów. Jeśli v ma więcej niż czterech nieważkich sąsiadów, wówczas nie jest narożnikiem. Jeśli v ma czterech nieważkich sąsiadów, wówczas pozostałe dwa nie są nieważkie. Jeżeli kąt utworzony przez krawędzie łączące wierzchołek v z tymi sąsiadami, którzy nie są nieważcy, wynosi π , wówczas v nie jest narożnikiem, a w przeciwnym przypadku v jest narożnikiem. Jeśli v ma dokładnie trzech sąsiadów nieważkich, wówczas jest narożnikiem.

W Kroku 4 uruchomiony zostaje Algorytm 2.15 na grafie indukowanym wierzchołkowo na G_2 przez wierzchołki o wartości funkcji $p(v) \in \{0, 1\}$. Funkcja p na linii prostej zachowuje się jak funkcja „parzystości” wyznaczając wierzchołki „parzyste” i „nieparzyste”, natomiast w narożnikach p przyjmuje wartość różną od 2 tylko wówczas, jeśli „parzystość” we wszystkich kierunkach jest zgodna. Zatem graf będący na wejściu Algorytmu 2.15 jest dwudzielny, a dwupodział jest dany poprzez wartości funkcji p odpowiednio 0 i 1. Pojawia się natomiast inny problem – Algorytm 2.15 jest rzeczywiście 1-lokalny, gdyż korzysta jedynie z funkcji wagi najbliższych sąsiadów. W tym przypadku jednak wierzchołek v nie zna wartości funkcji d_2 swoich sąsiadów, a bez niej nie może wyznaczyć wartości funkcji $m(v)$ niezbędnej podczas Algorytmu 2.15. Aby uniknąć tego problemu można jednak zastąpić wartość $d_2(u)$ przez $d_2^v(u)$, która oznacza liczbę pozostałych do przydzielenia kolorów w wierzchołku u oczekiwaną przez wierzchołek v po Kroku 2 (nieformalnie rzecz ujmując, ile wydaje się wierzchołkowi v , że u potrzebuje jeszcze kolorów). Wówczas powstaje nowa funkcja $m'(v) = \max\{\lceil d_2^v(u) \rceil : \{u, v\} \in E_2\}$. Dokładniej

$$d_2^v(u) = d(u) - \max\{a(u, v, t) : \{u, v, t\} \in \tau(T)\}$$

Przy tej zamianie należy być jednak ostrożnym, gdyż $d_2^v(u) \geq d_2(u)$ dla dowolnej krawędzi $\{u, v\} \in E_2$. Jednakże prawdziwy jest poniższy lemat.

Lemat 2.21

Dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in E_2$ zachodzi nierówność

$$d_2(v) + d_2^v(u) \leq \kappa(v).$$

Dowód. Załóżmy, że podana w treści lematu nierówność nie jest prawdziwa. Niech

$$b(u, v) = \max\{a(u, v, t) : \{u, v, t\} \in \tau(T)\}.$$

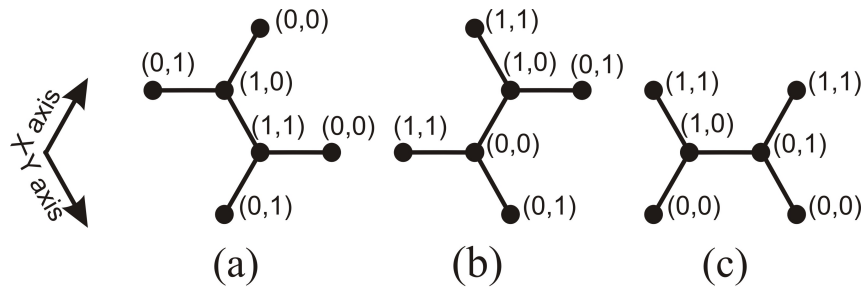
Wówczas, dla pewnego $\{t, v, u\} \in \tau(T)$ zachodziłoby

$$\begin{aligned} d(v) + d(u) &= d_2(v) + \kappa(v) + d_2^v(u) + b(u, v) \\ &> 2\kappa(v) + b(u, v) \\ &\geq 3a(u, v, t) \\ &\geq d(u) + d(v) \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. $\square$

Jak wynika z Lematu 2.21, jeśli zamiast d_2 w wierzchołkach z drugiego zbioru w dwupodziale grafu G'_2 użyta zostanie funkcja d_2^v , Algorytm 2.15 zadziała i użyje nie więcej niż $\lceil \omega(G)/3 \rceil$ kolorów (na mocy Faktu 2.10), która to liczba nie przekracza rozmiaru dodatkowej palety barw, z której algorytm może skorzystać. Wykonywana procedura nie spowoduje również konfliktów z wcześniej przypisanymi kolorami, ponieważ jedynie wierzchołki izolowane w G_1 przypisywały sobie kolory z dodatkowej palety barw, a one nie mogą być połączone krawędzią z żadnymi wierzchołkami z G_2 .

Po pełnym pokolorowaniu wierzchołków z $p(v) \in \{0, 1\}$ w Kroku 4, pozostały jedynie narożniki z G_2 o wartości funkcji $p(v) = 2$. Tworzą one nowy ważony graf G_3 . Struktura tego grafu jest bardzo specyficzna. Jeśli sąsiedzi narożnika v w G_2 byli wierzchołkami, które nie są narożnikami, wówczas v jest wierzchołkiem izolowanym w G_3 . Jeśli natomiast narożnik był połączony krawędzią z jakimś innym narożnikiem w G_2 , wówczas musiała zajść jedna z trzech sytuacji przedstawionych na Rysunku 2.1.



Rysunek 2.1. Wszystkie możliwości powstania krawędzi pomiędzy narożnikami w grafie G_2 (z podanymi w nawiasach współrzędnymi mod 2)

Zauważmy, że w przypadkach (a) i (b) na Rysunku 2.1, narożnik v z $p(v) = 2$ ma zawsze za sąsiada narożnik u dla którego $p(u) \in \{0, 1\}$. Rzeczywiście dla

$v = (x, y)$ w tych przypadkach $x \bmod 2 \neq y \bmod 2$ więc w wierzchołku u zmienia się dokładnie jedna współrzędna o dokładnie 1, a co za tym idzie $p(u) \neq 2$. Takie wierzchołki są zatem wierzchołkami izolowanymi w G_3 . Oprócz nich jedyną możliwą konfiguracją w G_3 są dwa połączone narożniki z przypadku (c) przedstawionego na Rysunku 2.1, z których powstaje pojedynczy most (patrz Definicja 1.17).

W Kroku 5 rozpatrywane są wierzchołki izolowane $v \in G_3$, dla których używane są ponownie bazowe palety barw. Wierzchołek v jest narożnikiem w G_2 , więc ma trzech nieważkich sąsiadów o tym samym kolorze bazowym. Bez straty ogólności można założyć, że $bc(v) = R$, a kolorem bazowym jego trzech nieważkich sąsiadów jest kolor niebieski. Z definicji funkcji D_B wprowadzonej przy dowodzeniu Kroku 2 wiadomo, że istnieje $D_B(v)$ wolnych kolorów z niebieskiej palety barw, które przypisane do v nie spowodują konfliktu z żadnym z sąsiadów.

Lemat 2.22

Dla każdego czerwonego wierzchołka izolowanego $v \in G_3$, który posiada trzech niebieskich nieważkich sąsiadów w T , zachodzi nierówność

$$d_3(v) \leq D_B(v).$$

Dowód. Niech $\Delta = \{u, v, t\} \in \tau(T)$ będzie trójkątem, w którym t jest zielonym, ciężkim sąsiadem v , a u jest niebieskim, nieważkim sąsiadem v . Niech $s_\Delta(t) = d(t) - a(u, v, t)$. Wówczas

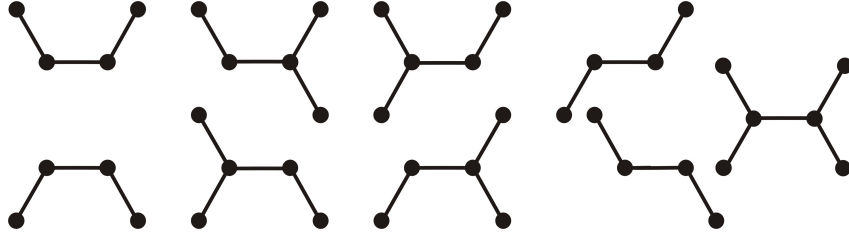
$$\begin{aligned} 0 &\geq d(v) - a(u, v, t) + d(t) - a(u, v, t) + d(u) - a(u, v, t) \\ &\geq d(v) - \kappa(v) + s_\Delta(t) + d(u) - \kappa(v) \\ &\geq d_1(v) + s_\Delta(t) - D_B(v) \\ &\geq d_2(v) + s_\Delta(t) - D_B(v) \\ &= d_3(v) + s_\Delta(t) - D_B(v) \end{aligned}$$

Ponieważ t jest ciężkim sąsiadem v , zatem $d_3(v) < D_B(v)$. □

Z Lematu 2.22 wynika, że v ma do swojej dyspozycji wystarczającą liczbę wolnych kolorów z niebieskiej bazowej palety barw i może je sobie przypisać nie powodując żadnych konfliktów.

Do tego momentu algorytm działał z powodzeniem w modelu 1-lokalnym. Pokolorowane zostały wszystkie wierzchołki za wyjątkiem przypadku, w którym dwa narożniki w grafie heksagonalnym bez trójkątów są połączone pojedynczym mostem. Aby rozwiązać ten przypadek potrzebna jest dodatkowa komunikacja i przejście do modelu 2-lokalnego, w którym algorytm rzeczywiście pokoloruje graf heksagonalny w każdym przypadku. Problem z narożnikami połączonymi pojedynczym mostem pojawia się także w przypadku wielu innych algorytmów (np. w pracach [28, 32]). W rzeczywistości w tym algorytmie ograniczenia na graf

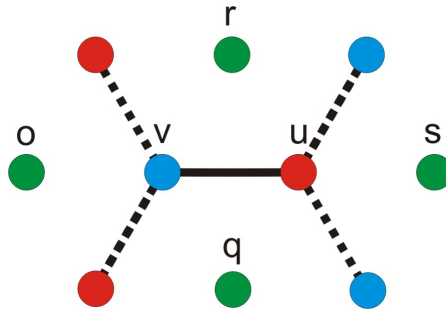
wejściowy są mniejsze, gdyż narożniki nie mogą być połączone tylko w jednej orientacji. Wszystkie zabronione konfiguracje w grafie G_2 zostały przedstawione na Rysunku 2.2.



Rysunek 2.2. Wszystkie możliwości wystąpienia narożników połączonych pojedynczym mostem.

Niestety w modelu 1-lokalnym nie można stwierdzić, czy graf zawiera jedną z tych konfiguracji, czy też nie. Aby to zrobić trzeba wykonać 2-lokalną komunikację i dopiero wówczas można ocenić, czy dalsze kroki algorytmu są potrzebne. Po tej komunikacji można w czasie stałym dokończyć multikolorowanie grafu nie zwiększając zakresu kolorów niezbędnych w algorytmie.

Jeśli krawędź $\{v, u\} \in G_3$ jest izolowana (a tylko takie przypadki mogą jeszcze zachodzić po wykonaniu Kroku 5), to $x_v \bmod 2 \neq y_v \bmod 2$, $x_u \bmod 2 \neq y_u \bmod 2$ i wierzchołki v i u muszą być umieszczone jak w przypadku (c) na Rysunku 2.1 lub jak na Rysunku 2.3. Niech o, q, r, s będą nieważkimi sąsiadami u i v rozmieszczonymi jak na Rysunku 2.3.



Rysunek 2.3. Izolowana krawędź w grafie G_3 (dwa narożniki połączone pojedynczym mostem)

Zauważmy, że wszyscy nieważcy sąsiedzi wierzchołków u i v są tego samego koloru bazowego. Przypomnijmy, że każdy podzbiór kolorów z dowolnej palety barw może być utożsamiany z pewnym podzbiorem liczb naturalnych. Na podstawie poprzednich kroków algorytmu wiadomo, że lekkie wierzchołki o, q, r, s mają przy-

pisane kolory ze swoich bazowych palet kolorów dla i zawartego w przedziałach odpowiednio $\{1, \dots, d(o)\}$, $\{1, \dots, d(q)\}$, $\{1, \dots, d(r)\}$, $\{1, \dots, d(s)\}$.

Aby udowodnić, że Krok 6 algorytmu zapewnia poprawne multikolorowanie, należy sprawdzić, czy zbiory kolorów przypisane do sąsiednich wierzchołków są rozłączne. Wierzchołki u i v z r i q nie tworzą konfliktu, gdyż

$$\begin{aligned} a(u, v, r) - d_3(u) - d_3(v) + 1 &= a(u, v, r) - d(u) + \kappa(u) - d(v) + \kappa(v) + 1 \\ &\geq 3a(u, v, r) - d(u) - d(v) + 1 \\ &\geq d(r) + 1 \\ &> d(r) \\ &\geq d(q). \end{aligned}$$

Wierzchołki v z u nie tworzą konfliktu, gdyż

$$\kappa(v) - d_2(v) + 1 > a(u, v, r) - d_2(v).$$

Niech s będzie prawym sąsiadem wierzchołka u . Dla wierzchołków u i s należy zapewnić, aby $a(u, v, r) - d_3(v) - d_3(u) + 1 > d(s)$. Załóżmy, że ta nierówność jest nieprawdziwa. Wówczas

$$\begin{aligned} d(s) &> a(u, v, r) - d_3(u) - d_3(v) \\ &= a(u, v, r) - d(u) + \kappa(u) - d(v) + \kappa(v) \\ &\geq 3a(u, v, r) - d(u) - d(v) \\ &= d(r). \end{aligned}$$

Po Kroku 6 nie ma więc konfliktów tylko jeśli $d(s) \leq d(r)$. W przeciwnym przypadku powstaną konflikty i żeby je zlikwidować należy podmienić część kolorów w pewnych wierzchołkach w Kroku 7.

W Przypadku 7.1 do wierzchołka s przypisane są ostatnie $d(s) - d(r)$ kolory z jego bazowej palety barw. Wierzchołki s i v nie tworzą konfliktu, tylko jeśli $\kappa(s) - d(s) + d(r) \geq a(u, v, r) - d_3(v)$ i $a(u, v, r) - d_3(v) - d_3(u) + 1 > d(r)$. Załóżmy, że pierwsza z tych nierówności nie zachodzi. Przypomnijmy, że $d_2(u) + d(s) \leq \kappa(s)$ i $d_2(u) \leq a(u, v, r) - d_2(v)$. Wówczas mielibyśmy

$$\begin{aligned} 0 &> \kappa(s) - d(s) + d(r) - a(u, v, r) + d_2(v) \\ &\geq \kappa(s) - d(s) - d_2(u) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. Teraz założmy, że druga z tych nierówności nie zachodzi. Wówczas mielibyśmy

$$\begin{aligned}
d(r) &> a(u, v, r) - d_3(u) - d_3(v) \\
&\geq a(u, v, r) - d(u) + \kappa(u) - d(v) + \kappa(v) \\
&\geq 3a(u, v, r) - d(u) - d(v) \\
&\geq d(r)
\end{aligned}$$

co ponownie daje sprzeczność. W związku z tym wierzchołki s i v nie stworzą konfliktu. Jeśli wierzchołek t jest lekki lub nie jest narożnikiem, wówczas na skutej tej podmiany kolorów nie powstaną żadne konflikty w innych miejscach. Także jeśli t jest bardzo ciężki nie powstaną żadne konflikty, gdyż w Kroku 2 wierzchołek t pożycał kolory od swojego prawego sąsiada, a nie od lewego.

W Przypadku 7.2 wierzchołek s ma czterech sąsiadów w G_2 : lewego, prawego (narożniki w G_2), a także dwa dodatkowe wierzchołki (oznaczymy je przez w i w') leżące w stosunku do siebie pod kątem π . Zauważmy, że jeśli $w = (x, y)$ to $w' = (x \pm 2, y \pm 2)$, więc $p(w) = p(w')$. W takim przypadku do wierzchołka s można przypisać nową wartość $p(s) = (1 + p(w)) \bmod 2$ i przypisać do s kolory z dodatkowej palety barw w taki sposób, w jaki zrobiłby to Algorytm 2.15 w Kroku 4. Nie powstaną żadne konflikty, gdyż w sąsiedztwie wierzchołka s jedynie wierzchołki w i w' przypisywały sobie kolory z dodatkowej palety barw w poprzednich krokach, ale $d(s) + d_2(w) \leq \kappa(s)$ i $d(s) + d_2(w') \leq \kappa(s)$.

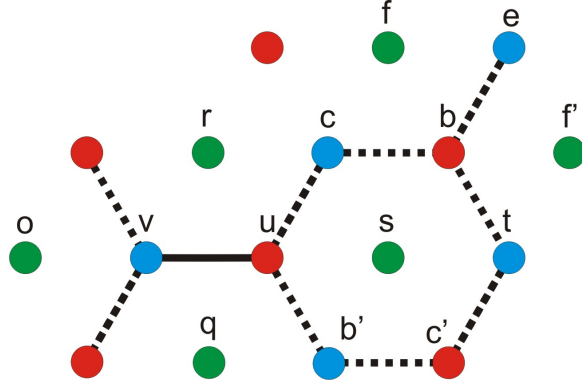
W Przypadku 7.3 wierzchołek s ma czterech sąsiadów w G_2 : lewego, prawego (narożniki w G_2), a także dwa dodatkowe wierzchołki (oznaczymy je przez w i w') leżące w stosunku do siebie pod kątem $\pi/3$. Zauważmy, że jeśli $w = (x, y)$ to $w' = (x \pm 1, y \pm 1)$, więc $p(w) \neq p(w')$. Ponieważ wierzchołki w i w' w Kroku 4 przypisały sobie $d_2(w) + d_2(w')$ kolorów z dodatkowej palety barw, to do dyspozycji jest

$$\begin{aligned}
\kappa(s) - d_2(w) - d_2(w') &= \kappa(s) - d(w) + \kappa(w) - d(w') + \kappa(w') \\
&\geq 3a(s, w, w') - d(w) - d(w') \\
&\geq d(s)
\end{aligned}$$

nie używanych kolorów z dodatkowej palety barw, które nie spowodują konfliktu i które wierzchołek s może użyć do kolorowania samego siebie. Zauważmy też, że jeśli wierzchołki w i w' są jedynymi sąsiadami s za wyjątkiem u i t , to nie mogą leżeć w stosunku do siebie pod kątem $2\pi/3$. Gdyby tak było, wówczas oba te wierzchołki byłyby sąsiadami s (albo t), ale wtedy t (albo odpowiednio s) miałby co najwyżej jednego sąsiada w G_2 i nie byłby narożnikiem – sprzeczność.

W Przypadku 7.4 wierzchołek s ma ponad czterech sąsiadów w G_2 . Niech b i c będą przyległymi do siebie sąsiadami wierzchołka s , różnymi od t i u . Założmy bez straty ogólności, że $p(c) = 0$, a $p(b) = 1$ (c znalazło się w pierwszym, a b w drugim

zbiornie w dwupodzialem podczas uruchamiania Algorytmu 2.15 w Kroku 4). Niech e bedzie trzecim sasiadem wierzchołka b o tym samym kolorze bazowym co c , a f, f' beda jego niewazkimi sasiedzami o kolorze bazowym takim samym jak wierzchołka s (patrz Rysunek 2.4).



Rysunek 2.4. Rozmieszczenie wierzchołków w Przypadku 7.4

Jeśli e jest wierzchołkiem lekkim w G lub jest narożnikiem w G_2 bądź też $d_2^b(c) \geq d_2^b(e)$ to największy kolor z dodatkowej palety barw przypisany do wierzchołków b lub c przyjmuje wartość i równą

$$l(b, c) = d_2^b(c) + d_2(b) = d(c) - \max\{a(c, b, s), a(c, b, f)\} + d(b) - \kappa(b).$$

Zatem s może przypisać sobie kolory dla i z przedziału $\{l(b, c) + 1, \dots, l(b, c) + d(s)\}$ z dodatkowej palety barw i nie powstaną w ten sposób żadne konflikty. Należy jednak sprawdzić, czy s nie przypisał sobie kolorów spoza przedziału wyznaczonego dla pojemności dodatkowej palety barw. Wiadomo, że

$$\begin{aligned} \omega(G)/3 - l(b, c) &= \omega(G)/3 - d(c) + \max\{a(c, b, s), a(c, b, f)\} - d(b) + \kappa(b) \\ &\geq 3 \max\{a(c, b, s), a(c, b, f)\} - d(c) - d(b) \\ &\geq \max\{d(s), d(f)\} \\ &\geq d(s). \end{aligned}$$

Czyli największy kolor przypisany do s jest nie większy niż $\omega(G)/3$. Jeśli e nie jest narożnikiem w G_2 i $d_2^b(c) < d_2^b(e)$ to

$$l(b, c) = d_2^b(e) + d_2(b) = d(e) - \max\{a(e, b, f), a(e, b, f')\} + d(b) - \kappa(b).$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\omega(G)/3 - l(b, c) &= \omega(G)/3 - d(e) + \max\{a(e, b, f), a(e, b, f')\} - d(b) + \kappa(b) \\ &\geq 3 \max\{a(e, b, f), a(e, b, f')\} - d(e) - d(b) \\ &\geq \max\{d(f), d(f')\}.\end{aligned}$$

Jeśli $\max\{d(f), d(f')\} \geq d(s)$ to do s można przypisać kolory dla i z przedziału $\{l(b, c) + 1, \dots, l(b, c) + d(s)\}$ z dodatkowej palety barw i nie powstaną w ten sposób żadne konflikty, a s nie pozbędzie się kolorów przypisanych sobie wcześniej z bazowej palety barw. Jeśli jednak $\max\{d(f), d(f')\} < d(s)$ to trzeba wykonać Dodatkowy Krok przekolorowujący wierzchołek b , aby uniknąć konfliktów.

Krok Dodatkowy Niech b będzie narożnikiem w G_2 oraz $p(b) = 1$.

Przypadek (i) Jeśli jego dolny-prawy (albo górny-prawy) sąsiad (t) jest narożnikiem w G_2 , jego górny-prawy (dolny-prawy) sąsiad (e) nie jest narożnikiem w G_2 , niech c oznacza lewego sąsiada b , r oznacza lewego sąsiada c , s oznacza dolnego-lewego (górnego-lewego) sąsiada b , u oznacza lewego sąsiada s , a f, f' oznacza pozostałych nieważkich sąsiadów b (patrz Rysunek 2.4). Jeśli u jest bardzo ciężkim wierzchołkiem w G , $d(r) < d(s)$, $d_2^b(c) < d_2^b(e)$ i $\max\{d(f), d(f')\} < d(s)$ to podmień ostatnie $d(s) - \max\{d(f), d(f')\}$ kolorów z dodatkowej palety barw na $\{\max\{d(f), d(f')\} + 1, \dots, d(s)\}$ kolorów z bazowej palety barw wierzchołka s .

Przypadek (ii) Jeśli jego górny-lewy (albo dolny-lewy) sąsiad (u) jest narożnikiem w G_2 , jego dolny-lewy (górnego-lewy) sąsiad (e) nie jest narożnikiem w G_2 , niech c oznacza prawego sąsiada b , v oznacza lewego sąsiada u , r oznacza górnego-lewego sąsiada u , q oznacza dolnego-lewego sąsiada u , s oznacza górnego-prawego (dolnego-prawego) sąsiada b , t oznacza prawego sąsiada s a f oznacza pozostałego nieważkiego sąsiada b (porównaj z Rysunkiem 2.4). Jeśli t jest bardzo ciężkim wierzchołkiem w G , $\max\{d(r), d(q), d(f)\} < d(s)$ i $d_2^b(c) < d_2^b(e)$ to podmień ostatnie $d(s) - \max\{d(r), d(q)\}$ kolorów z dodatkowej palety barw na $\{\max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + 1, \dots, \max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + d(s) - \max\{d(r), d(q)\}\}$ kolorów z bazowej palety barw wierzchołka s .

Warunki nakładane na wierzchołki w Dodatkowym Kroku odpowiadają sytuacji rozpatrywanej w Przypadku 7.4 (patrz Rysunek 2.4). Wynikiem tego kroku jest brak konfliktów pomiędzy s i jego sąsiadami poprzez uwolnienie największych kolorów z dodatkowej palety barw. Ostatecznie należy jeszcze pokazać, że nie pojawiły się żadne nowe konflikty z wierzchołkiem b . Jeśli b jest sąsiadem t , to przypisuje sobie $\{\max\{d(f), d(f')\} + 1, \dots, d(s)\}$ kolorów z bazowej palety barw wierzchołka s . Nie zachodzą jednak żadne konflikty ponieważ e nie jest narożnikiem, $\{\max\{d(f), d(f')\} + 1 > \max\{d(f), d(f')\}$ i naj-

mniejszy kolor użyty do pokolorowania wierzchołka t z bazowej palety barw wierzchołka s jest nie mniejszy niż $d(s) + 1$. Z drugiej strony, jeśli b jest sąsiadem u to przypisuje sobie kolory $\{\max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + 1, \dots, \max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + d(s) - \max\{d(r), d(q)\}\}$ z bazowej palety barw wierzchołka s . Także wtedy nie zachodzą jednak żadne konflikty ponieważ e nie jest narożnikiem i

$$\begin{aligned} & \max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + 1 > \\ & > \max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) - d_3(u) + 1 > d(s) > \max\{d(q), d(r)\}, \end{aligned}$$

co zostało udowodnione wcześniej. Nie przekroczymy również zakresu wielkości palety gdyż $\max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_3(v) + d(s) - \max\{d(q), d(r)\} \leq \omega(G)/3$, bowiem $\kappa(s) - d(s) + \max\{d(q), d(r)\} \geq \max\{a(u, v, r), a(u, v, q)\} - d_2(v)$, co również zostało udowodnione wcześniej.

□

W ten sposób została wykazana prawdziwość Twierdzenia 2.8.

2.4. Algorytm w modelu 1-lokalnym

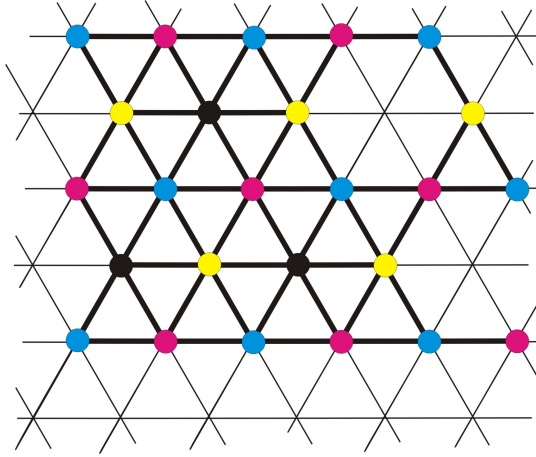
W rozdziale tym zostanie opisany algorytm działający w modelu 1-lokalnym, który potrafi pokolorować graf heksagonalny używając nie więcej niż $\frac{7}{5}\omega(G)$ kolorów. Pierwszym wynikiem w modelu 1-lokalnym był algorytm o współczynniku aproksymacji $3/2$ przedstawiony w pracy [11]. Wynik ten, pomimo iż bardzo prosty, przez długi czas nie był przez nikogo poprawiony. Dopiero w pracy [2] pokazano algorytm w modelu 1-lokalnym o współczynniku aproksymacji $13/9$ (rzeczywistym wynikiem tej pracy było multikolorowanie grafów heksagonalnych bez trójkątów używając $\frac{4}{3}\omega(G)$ kolorów w modelu 1-lokalnym). Rok później stworzyłem algorytm w tym modelu o współczynniku aproksymacji $17/12$ i opisałem w pracy [36]. Następnie wspólnie z Janezem Žerovnikiem udało nam się poprawić ten wynik i stworzyć w modelu 1-lokalnym algorytm o współczynniku aproksymacji $7/5$. Został on opisany w pracy [39].

Twierdzenie 2.23 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Istnieje algorytm $7/5$ -przybliżający multikolorowanie ważonego grafu heksagonalnego w modelu 1-lokalnym, działający w czasie stałym.

Podobnie jak przy poprzednim algorytmie, także i w tym ważne będą te same założenia wstępne o grafie. Wyjątkiem jest to, że graf posiada wiedzę o wierzchołkach w odległości 1. Również wszystkie definicje z Rozdziału 2.3 znajdą tu zastosowanie, a część dowodu algorytmu będzie się powtarzać. Będzie również potrzebnych kilka nowych pojęć i lematów.

Oprócz standardowego kolorowania bazowego grafów heksagonalnych w przedstawianym algorytmie wykorzystane zostanie również 4-kolorowanie takich grafów. Jest ono określone w taki sposób, że każda linia prosta w pokryciu trójkątnym zawiera dokładnie dwa kolory. Można tak zrobić i powstaje wówczas właściwe 4-kolorowanie grafu (patrz Rysunek 2.5). Kolory w tym kolorowaniu nazywamy *kolorami dodatkowymi* i oznaczamy przez $ec(v)$. Dla uproszczenia mówimy o dodatkowych kolorach różowym (C), błękitnym (M), żółtym (Y) i czarnym (K).



Rysunek 2.5. Przykład grafu heksagonalnego z 4-kolorowaniem dodatkowymi kolorami.

Dla tak określonego 4-kolorowania można udowodnić następujący lemat.

Lemat 2.24 (Šparl, Witkowski, Žerovnik, 2009)

W grafie heksagonalnym bez trójkątów każdy nieparzysty cykl zawiera narożniki w co najmniej trzech z czterech kolorów określonych w jego kolorowaniu dodatkowymi kolorami.

Dowód. Niech C' będzie cyklem w grafie heksagonalnym bez trójkątów, który zawiera narożniki tylko jednego koloru z kolorowania dodatkowego. Odległość na linii prostej pomiędzy wierzchołkami o tym samym kolorze dodatkowym jest zawsze parzysta. Zatem cykl C' ma parzystą długość.

Niech C'' będzie cyklem w grafie heksagonalnym bez trójkątów, który zawiera narożniki jedynie w dwóch kolorach z kolorowania dodatkowego. O ile odległość na linii prostej pomiędzy wierzchołkami o tym samym kolorze dodatkowym jest zawsze parzysta, to odległość na linii prostej pomiędzy wierzchołkami o różnym kolorze dodatkowym jest zawsze nieparzysta. Cykl C'' będzie się składał z pewnych parzystych i nieparzystych odcinków leżących na linii prostej. Niech 1 i 2 oznaczają kolory na narożnikach w cyklu C'' . Za każdym razem, kiedy w cyklu C'' znajduje się prosty odcinek od narożnika w kolorze 1 do narożnika w kolorze

2 musi istnieć również prosty odcinek od narożnika w kolorze 2 do narożnika w kolorze 1, gdyż jest to cykl. Zatem liczba nieparzystych ścieżek w cyklu C'' jest parzysta. Czyli cykl C'' jest parzystej długości.

Z tego wynika, że każdy nieparzysty cykl ma narożniki w co najmniej trzech kolorach dodatkowych. $\square$

Definicja 2.25. Kolorowanie $\Psi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ grafu G nazywamy *dobrym*, jeśli dla każdego nieparzystego cyklu C w G , dla każdego $1 \leq i \leq k$, istnieje wierzchołek $v \in C$ taki, że $\Psi(v) = i$. Graf G nazywamy *k-dobrym* jeśli takie kolorowanie G istnieje.

W pracy [36] pokazano dowód, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 5-dobry, a w pracy [26] udowodniono, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7-dobry. W dowodzie został użyty lemat, który jest również wykorzystywany przy dowodzie poprawności algorytmu.

Lemat 2.26 (Sudeep, Vishwanathan, 2005)

Rozpatrzmy 3-kolorowanie pokrycia trójkątnego określone jak w Obserwacji 1.12. Każdy nieparzysty cykl w grafie heksagonalnym bez trójkątów zawiera co najmniej jeden wierzchołek każdego koloru, który nie jest narożnikiem.

Dowód. Załóżmy bez straty ogólności, że w G istnieje nieparzysty cykl, w którym nie ma wierzchołków, które nie są narożnikami i mają kolor czerwony. Można pokazać, że taki cykl można pokolorować dwoma kolorami, co prowadzi do sprzeczności z jego nieparzystością. Aby to zrobić, można wykazać, że narożniki pokolorowane na czerwono można przekolorować na zielono lub niebiesko w taki sposób, że kolorowanie nadal pozostaje prawidłowe. W 3-kolorowaniu pokrycia trójkątnego, narożnik ma wszystkich swoich sąsiadów pokolorowanych tym samym kolorem. Czyli każdy czerwony narożnik, który ma sąsiadów w kolorze kolor niebieskim można przekolorować na zielono, a każdy który ma sąsiadów w kolorze zielonym można przekolorować na niebiesko. Te operacje dają prawidłowe 2-kolorowanie nieparzystego cyklu, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Fakt 2.27

Każdy k-dobry graf G jest multikolorowalny przy pomocy $\frac{k}{k-1}\omega(G)$ kolorów. Innymi słowy, jeśli G jest k-dobry, to

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq \left\lceil \frac{k}{k-1}\omega(G) \right\rceil + O(1).$$

Dowód. Niech $G = (V, E, d)$ będzie ważonym grafem, który jest k-dobry, i którego k-dobre kolorowanie Ψ jest dane. Z definicji k-dobroci wynika, że po usunięciu z G wierzchołków jednego z k kolorów, powstały graf nie zawiera nieparzystych cykli,

a co za tym idzie, jest grafem dwudzielnym. Niech $V_i := V \setminus \{v \in V : \Psi(v) = i\}$ będzie zbiorem wierzchołków o kolorze różnym od i w kolorowaniu Ψ , E_i zbiorem krawędzi indukowanym przez V_i , a $d_i(v) := \left\lceil \frac{d(v)}{k-1} \right\rceil$ będzie $k-1$ częścią funkcji wagi w grafie G . Graf $G_i := (V_i, E_i, d_i)$ jest grafem dwudzielnym, oraz $\omega(G_i) \leq \frac{\omega(G)}{k-1} + 2$. Dla tego grafu można zastosować Algorytm 2.15 optymalnego multikolorowania grafu dwudzielnego. Procedurę tę można uruchomić dla każdego grafu G_i dla $i = \{1, \dots, k\}$. W każdej takiej rundzie użyte zostanie $\frac{\omega(G)}{k-1} + 2$, więc po wszystkich rundach zostanie użyte $\frac{k\omega(G)}{k-1} + 2k$ kolorów. Każdy wierzchołek v bierze udział w dokładnie $k-1$ takich rundach (wszystkich, oprócz tej, w której został usunięty jako wierzchołek o kolorze i) i w każdej otrzymuje $\left\lceil \frac{d(v)}{k-1} \right\rceil$ kolorów, więc ostatecznie uzyskuje tyle kolorów ile potrzebuje nie powodując konfliktów ze swoimi sąsiadami. $\square$

Korzystając z dowodu Faktu 2.27 można stworzyć algorytm tworzenia takiego multikolorowania.

Algorytm 2.28 (Sudeep, Vishwanathan, 2005).

begin

for $i := 1$ **to** k **do**

$G_i := (V_i = V \setminus \{v \in V : \Psi(v) = i\},$

$E_i = \{\{v, u\} \in E : v, u \in V_i\},$

$d_i = \left\lceil \frac{d}{k-1} \right\rceil$);

Wyznacz dwupodział grafu G_i ;

Uruchom Algorytm 2.15 do multikolorowania grafu G_i ;

end ;

W opisywanym algorytmie 1-lokalnym wykorzystane zostaną ponownie trzy bazowe oraz jedna dodatkowa paleta barw. Tak jak w poprzednim rozdziale bazowe palety barw mają rozmiar $\omega(G)/3$, natomiast dodatkowa ma inną wielkość, która zostanie wyznaczona później.

W 1-lokalnym modelu obliczeń każdy wierzchołek zna swoje współrzędne, jak również swoją wagę oraz wagę wszystkich swoich sąsiadów. Przy pomocy tej wiedzy musi określić, które kolory z podanych wcześniej palet sobie przypisze.

Algorytm składa się z trzech głównych faz. Pierwsza z nich jest taka sama jak w Algorytmie 2.17 oraz jak we wszystkich pozostałych znanych algorytmach multikolorowania grafów heksagonalnych w dowolnym modelu ([2, 11, 12, 19, 20, 21, 29, 30, 36, 37, 39]) – każdy wierzchołek przypisuje sobie $\kappa(v)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw. Po tej fazie pokolorowane są wszystkie wierzchołki lekkie, a pozostałe tworzą graf heksagonalny bez trójkątów. Co więcej, po technicznym usunięciu bardzo ciężkich wierzchołków ważona liczba klikowa tego grafu nie przekracza $\omega(G)/3$. W kolejnej fazie kolorowane są czarne narożniki poprzez przypisanie im wolnych kolorów z bazowych palet barw ich lekkich sąsiadów.

Pozostały do pokolorowania graf jest grafem 6-dobrym i można go pokolorować używając Algorytmu 2.28.

Algorytm 2.29 (Witkowski, Žerovnik, 2009).

Krok 0 Dla każdego wierzchołka $v = (x, y) \in V$ wyznacz jego kolor bazowy

$$bc(v) = \begin{cases} R & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 0 \\ G & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 1 \\ B & \text{if } (x + 2y) \bmod 3 = 2 \end{cases},$$

oraz wartość jego funkcji bazowej

$$\kappa(v) = \max \left\{ \left\lceil \frac{d(u) + d(v) + d(t)}{3} \right\rceil : \{v, u, t\} \in \tau(T) \right\}.$$

Krok 1 Do każdego wierzchołka $v \in V$ przypisz pierwsze $\min\{\kappa(v), d(v)\}$ kolorów z jego bazowej palety barw. Utwórz nowy ważony graf heksagonalny bez trójkątów $G_1 = (V_1, E_1, d_1)$, w którym $d_1(v) = \max\{d(v) - \kappa(v), 0\}$, $V_1 \subseteq V$ jest zbiorem wierzchołków z $d_1(v) > 0$ (ciężkie wierzchołki), a $E_1 \subseteq E$ jest zbiorem wszystkich krawędzi z G , których oba końce znajdują się w V_1 (E_1 jest indukowany wierzchołkowo przez V_1).

Krok 2 Dla każdego wierzchołka $v \in V_1$, dla którego $d_1(v) > \kappa(v)$ (bardzo ciężkie wierzchołki) przypisz kolory nie powodujące konfliktu z bazowej palety barw jego sąsiadów w T . Utwórz nowy ważony graf $G_2 = (V_2, E_2, d_2)$, w którym d_2 jest różnicą pomiędzy $d_1(v)$ a liczbą kolorów przypisanych w tym kroku do v , $V_2 \subseteq V_1$ jest zbiorem wierzchołków z $d_2(v) > 0$, a $E_2 \subseteq E_1$ jest zbiorem wszystkich krawędzi z G_1 , których oba końce znajdują się w V_2 (E_2 jest indukowany wierzchołkowo przez V_2).

Krok 3 Dla każdego wierzchołka $v = (x, y) \in V$ wyznacz jego kolor dodatkowy

$$ec(v) = \begin{cases} C & \text{if } x \bmod 2 + 2 * (y \bmod 2) = 0 \\ M & \text{if } x \bmod 2 + 2 * (y \bmod 2) = 1 \\ Y & \text{if } x \bmod 2 + 2 * (y \bmod 2) = 2 \\ K & \text{if } x \bmod 2 + 2 * (y \bmod 2) = 3 \end{cases}.$$

Krok 4 Dla każdego narożnika $v \in V_2$ o kolorze dodatkowym $ec(v) = K$ przypisz wolne kolory z bazowej palety barw jego lekkich sąsiadów w T . Utwórz nowy graf $G_3 = (V_3, E_3, d_3)$, w którym $d_3(v) = d_2(v)$, $V_3 \subseteq V_2$ jest zbiorem wierzchołków z V_2 , które nie są czarnymi narożnikami, a $E_3 \subseteq E_2$ jest zbiorem wszystkich krawędzi z G_2 , których oba końce znajdują się w V_3 (E_3 jest indukowany wierzchołkowo przez V_3).

Krok 5 Wyznacz 6-dobre kolorowanie grafu G_3 – umieść wierzchołek $v \in V_3$ w dokładnie jednym z sześciu zbiorów:

- I : jeśli v nie jest narożnikiem w G_3 i ma czerwony kolor bazowy
- II : jeśli v nie jest narożnikiem w G_3 i ma zielony kolor bazowy
- III : jeśli v nie jest narożnikiem w G_3 i ma niebieski kolor bazowy
- IV : jeśli v jest różowym narożnikiem w G_3
- V : jeśli v jest błękitnym narożnikiem w G_3
- VI : jeśli v jest żółtym narożnikiem w G_3

Krok 6 Dla grafu G_3 uruchom Algorytm 2.28 przydzielając kolory z dodatkowej palety barw.

Dowód poprawności algorytmu.

Na samym początku przed wykonaniem jakichkolwiek kroków następuje komunikacja na odległość 1 – każdy wierzchołek wysyła swoim sąsiadom informację o swojej wadze. Poza tą wiedzą każdy wierzchołek zna swoje współrzędne (x, y) w pokryciu trójkątnym T .

Kroki 0, 1 i 2 są bardzo podobne lub identyczne jak w Algorytmie 2.17 i ich dowody nie zostaną tutaj powtórzone. Jedyna różnica polega na nieco innym dowodzeniu Lematu 2.20. Podczas gdy poprzednio używana była jedynie funkcja $D_B(v)$, tym razem trzeba użyć również analogicznej funkcji $D_G(v)$ – liczby wolnych kolorów z zielonej palety barw. Dokładniej

$$D_G(v) = \min\{\kappa(v) - d(u) : \{u, v\} \in T, bc(u) = G\},$$

$$D_B(v) = \min\{\kappa(v) - d(u) : \{u, v\} \in T, bc(u) = B\}.$$

Wówczas ostatnia nierówność w dowodzie Lematu 2.20 ma postać

$$\begin{aligned} d_2(v) &= d_1(v) - D_G(v) - D_B(v) \\ &\leq d(v) - \kappa(v) - \kappa(v) + d(u) - \kappa(v) + d(t) \\ &\leq 3a(v, u, t) - 3\kappa(v) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

dla pewnego $\{v, u, t\} \in \tau(T)$.

Po tych krokach graf G_2 jest grafem heksagonalnym bez trójkątów, a jego ważona liczba klikowa $\omega(G_2) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil$ (patrz Fakty 2.18 i 2.20).

Krok 3 nie wymaga dowodu.

W Kroku 4 wierzchołek musi najpierw zdecydować, czy jest narożnikiem, czy też nie. Może to uczynić na podstawie tego samego argumentu, który został użyty w dowodzie Kroku 3 Algorytmu 2.17.

W Kroku 4 wierzchołek v używa kolorów z bazowej palety barw jego lekkich sąsiadów. Jeśli wierzchołek $v \in G_2$ jest narożnikiem, to na mocy Lematu 2.14 posiada trzech nieważkich sąsiadów o tym samym kolorze bazowym. Bez straty ogólności można założyć, że $bc(v) = R$ a jego nieważcy sąsiedzi są koloru niebieskiego. Korzystając z funkcji D_B określonej w Kroku 2, mamy $D_B(v)$ wolnych kolorów z niebieskiej palety barw. Aby liczba tych kolorów była wystarczająca musi zachodzić następujący lemat.

Lemat 2.30

Dla każdego czerwonego narożnika $v \in G_2$, który posiada trzech niebieskich nieważkich sąsiadów w T , zachodzi nierówność

$$d_2(v) \leq D_B(v).$$

Dowód. Niech v będzie czerwonym narożnikiem w G_2 , który posiada trzech niebieskich nieważkich sąsiadów w T . Bez straty ogólności można założyć, że t jest zielonym wierzchołkiem, który nie jest nieważkim sąsiadem v (jeśli v jest narożnikiem, to taki t musi istnieć), a u jest niebieskim nieważkim sąsiadem v takim, że wierzchołki $\{u, v, t\} \in \tau(T)$ tworzą trójkąt. Wówczas

$$\kappa(v) + d_2(v) + a(u, v, t) + d(u) \leq d(v) + d(t) + d(u) \leq 3a(u, v, t) \leq a(u, v, t) + 2\kappa(v)$$

$$d(u) + d_2(v) \leq \kappa(v)$$

$$d_2(v) \leq \kappa(v) - d(u)$$

a pierwsza nierówność zachodzi gdyż $d_2(v) = d(v) - \kappa(v)$ oraz na podstawie Definicji 2.12 nieważkiego wierzchołka $d(t) \geq a(u, v, t)$. Ponieważ v jest narożnikiem, każdy niebieski nieważki sąsiad v musi należeć do pewnego trójkąta ze zbioru $\tau(T)$, w którym istnieje zielony sąsiad, który nie jest nieważki. W związku z tym wskazane wcześniej nierówności są prawdziwe dla każdego niebieskiego nieważkiego sąsiada v . Skoro nierówność $d_2(v) \leq \kappa(v) - d(u)$ zachodzi dla dowolnego nieważkiego sąsiada v , to zachodzi również dla wartości minimalnej, czyli $d_2(v) \leq D_B(v)$. $\square$

Zatem wierzchołek v posiada $d_2(v)$ wolnych kolorów z niebieskiej bazowej palety barw, które może użyć bez powodowania konfliktów. W kroku tym nie biorą udziału sąsiadujące ze sobą wierzchołki, gdyż dwa czarne wierzchołki nie są połączone krawędzią (kolorowanie dodatkowymi kolorami jest kolorowaniem właściwym), zatem nie spowodują między sobą konfliktów. Również z wierzchołkami pożyczającymi w Kroku 2 nie powstaną żadne konflikty, gdyż tamte były izolowane w grafie G_1 , więc nie może istnieć krawędź łącząca je z żadnym czarnym narożnikiem.

Aby wykazać prawdziwość Kroku 5 należy udowodnić następujący fakt.

Fakt 2.31 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Graf G_3 jest 6-dobry.

Dowód. 6-dobre kolorowanie grafu G_3 zostało przedstawione w opisie Kroku 5. Jak łatwo zauważyć, zbiory $\{I, II, III, IV, V, VI\}$ są niezależne (gdyż kolorowania bazowe i dodatkowe są właściwe), a każdy wierzchołek $v \in G_3$ znajduje się w dokładnie jednym z nich. Każdy nieparzysty cykl zawiera co najmniej jeden z wierzchołków w każdym kolorze, co wynika z treści Lematów 2.24 i 2.26. $\square$

Poprawność Kroku 6 została udowodniona wraz z Faktem 2.27 oraz Algorytmem 2.28. Przypomnijmy, że Algorytm 2.28 na wejściu potrzebuje pewnych predefiniowanych danych. Jedną z nich jest wyznaczone 6-dobre kolorowanie, co zostało zrobione w Kroku 5. Inne dane wynikają z potrzeb Algorytmu 2.15 i są to wartości funkcji wag sąsiadów oraz wyznaczony dwupodział grafu po usunięciu wierzchołków o jednym z sześciu dobrych kolorów. Przy założeniu 1-lokalności nie można wyznaczyć wartości funkcji wagi sąsiadów w G_3 , jednakże działa tutaj ten sam argument co w przypadku Algorytmu 2.17 i prawdziwy jest analogiczny Lemat 2.21. Do wykazania pozostaje jedynie sposób w jaki w modelu 1-lokalnym można wyznaczyć dwupodział w grafach G_i w kolejnych rundach Algorytmu 2.28.

Dla grafów powstałych po usunięciu wierzchołków z jednego ze zbiorów $\{I, II, III\}$ procedura jest taka sama. Dla ustalenia uwagi rozważmy tylko graf $G_I = (V_I, E_I)$, w którym V_I powstaje z V_3 poprzez usunięcie wszystkich wierzchołków ze zbioru I , tj. czerwonych wierzchołków nie będących narożnikami. Analizując dowód Lematu 2.26 można otrzymać następujący dwupodział:

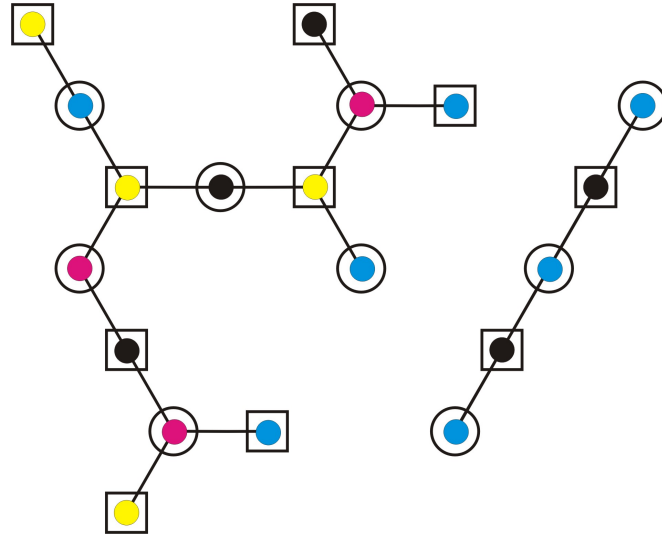
- Pierwszy zbiór: niebieskie wierzchołki i czerwone narożniki ze wszystkimi sąsiadami w G_I w kolorze zielonym
- Drugi zbiór: zielone wierzchołki i czerwone narożniki ze wszystkimi sąsiadami w G_I w kolorze niebieskim

Jest to prawidłowy dwupodział grafu G_I i może być wyznaczony w modelu 1-lokalnym.

Również dla grafów powstałych po usunięciu wierzchołków z jednego ze zbiorów $\{IV, V, VI\}$ procedura jest taka sama. Dla ustalenia uwagi rozważmy tylko graf $G_{IV} = (V_{IV}, E_{IV})$, w którym V_{IV} powstaje z V_3 poprzez usunięcie wszystkich wierzchołków ze zbioru IV , tj. różowych narożników. Przypomnijmy, że w grafie G_3 nie ma już czarnych narożników, gdyż zostały one usunięte w Kroku 4, więc w G_{IV} istnieją tylko błękitne lub żółte narożniki. Można wprowadzić następujący dwupodział:

- Pierwszy zbiór: błękitne wierzchołki i wierzchołki nie będące narożnikami o sąsiadach w kolorze żółtym lub czarnym
- Drugi zbiór: żółte wierzchołki i wierzchołki nie będące narożnikami o sąsiadach w kolorze błękitnym lub różowym

W pierwszym i drugim zbiorze wierzchołki błękitne i żółte są dobrze rozdzielone, gdyż dodatkowe kolorowanie jest kolorowaniem właściwym. Wszystkie pozostałe wierzchołki nie są narożnikami po usunięciu czarnych narożników w Kroku 4 i różowych narożników w tej rundzie (IV). Każdy wierzchołek, który nie jest narożnikiem, posiada sąsiadów tylko w jednym kolorze dodatkowym. Jeśli tym kolorem jest kolor żółty, wówczas jest automatycznie zaliczany do pierwszego zbioru dwupodziału, jeśli natomiast jest to kolor błękitny, wówczas musi trafić do zbioru drugiego. Pozostały jedynie wierzchołki, które nie są narożnikami, a które mają dodatkowy kolor czarny lub różowy oraz sąsiadów w tych kolorach. Ale zauważmy, że takie wierzchołki mogą utworzyć jedynie prostą ścieżkę w G_{IV} , na której nigdy nie znajdują się żadne narożniki. Można je więc rozdzielić w dwupodziale w dowolny sposób. Przykładowy dwupodział został przedstawiony na Rysunku 2.6.



Rysunek 2.6. Graf G_{IV} z wyznaczonym dwupodziałem

Powstały dwupodział grafów $G_I, G_{II}, G_{III}, G_{IV}, G_V, G_{VI}$ jest prawidłowy i może być wyznaczony w modelu 1-lokalnym.

W Kroku 6 nie powstają żadne konflikty z kolorami przypisanymi we wcześniejszych krokach, gdyż wykorzystywana jest dodatkowa paleta barw, która nie była dotąd używana. Zatem po zakończeniu Kroku 6 wszystkie wierzchołki zostały całkowicie pokolorowane bez powodowania konfliktów.

□

Aby zakończyć dowód Twierdzenia 2.23 należy jeszcze wyliczyć, ile kolorów wykorzystał opisany algorytm. Podczas pierwszej fazy (Kroki 1 i 2) algorytm używa nie więcej niż $\omega(G) + 2$ kolorów. Jest tak, gdyż w Kroku 1 każdy wierzchołek v

przypisał sobie co najwyżej $\kappa(v)$ kolorów ze swojej bazowej palety barw, zatem korzystając z Faktu 2.10 oraz wiedząc, że są trzy kolory bazowe, wiadomo, iż wykorzystanych kolorów było nie więcej niż

$$3 \lceil \omega(G)/3 \rceil \leq \omega(G) + 2.$$

Zarówno w Kroku 2 jak i 4 przypisywane są tylko kolory z bazowych palet barw, które nie zostały wykorzystane w Kroku 1, więc nie zwiększa się liczba kolorów użytych zarówno podczas końcowej części fazy pierwszej jak i całej fazy drugiej.

O liczbie kolorów przypisywanych w trzeciej fazie algorytmu mówi Fakt 2.27 wraz z Faktem 2.20. Niech $A(G)$ oznacza liczbę kolorów użytych przez algorytm do pokolorowania całego grafu. Mając na uwadze, że $\omega(G_3) \leq \omega(G_2) \leq \lceil \omega(G)/3 \rceil \leq \omega(G)/3 + 1$, liczba wszystkich kolorów wykorzystanych do multikolorowania grafu wynosi co najwyżej

$$\begin{aligned} A(G) &\leq \omega(G) + 2 + \left(\frac{6}{5} \omega(G_3) + 12 \right) \\ &\leq \omega(G) + 2 + \frac{6\omega(G)}{15} + \frac{6}{5} + 12 \\ &< \frac{7}{5} \omega(G) + 14. \end{aligned}$$

Zatem współczynnik aproksymacji tego algorytmu wynosi $7/5$ i w ten sposób została udowodniona prawdziwość Twierdzenia 2.23.

2.5. Algorytm w modelu 0-lokalnym

Algorytmy w modelu 0-lokalnym są bardzo specyficzne, gdyż nie można w nich wykorzystać żadnej wiedzy oprócz wagi wierzchołka, w którym jest on uruchomiony. To sprawia, że współczynnik aproksymacji jest o wiele większy, ale w zamian za to, do jego używania w sieci komórkowej nie potrzebna jest żadna komunikacja pomiędzy stacjami bazowymi. Pierwsze algorytmy 0-lokalne pojawiły się w pracach [11, 12, 20]. Następujące twierdzenie zostanie udowodnione jednak w nieco inny sposób niż w wymienionych pracach.

Twierdzenie 2.32 (Witkowski, 2005)

Istnieje rozproszony algorytm znajdujący multikolorowanie grafu heksagonalnego o współczynniku przybliżenia 3, działający w modelu 0-lokalnym w czasie stałym.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, można wprowadzić trzy palety barw, tym razem nieskończone, które można utożsamiać z liczbami naturalnymi o różnej reszcie z dzielenia przez 3.

- czerwona paleta barw: $\{3i : i \in \mathbb{N}\}$
- zielona paleta barw: $\{3i - 1 : i \in \mathbb{N}\}$
- niebieska paleta barw: $\{3i - 2 : i \in \mathbb{N}\}$

Algorytm w zasadzie składa się tylko z jednego kroku (i jednego wstępnego).

Algorytm 2.33 (Witkowski, 2005).

Krok 0 Korzystając ze współrzędnych wyznacz swój kolor bazowy.

Krok 1 Przypisz sobie pierwsze $d(v)$ kolorów ze swojej palety barw.

Dowód poprawności algorytmu.

W sposób oczywisty w tym algorytmie nie powstają żadne konflikty, a każdy wierzchołek przypisuje sobie tyle kolorów ile potrzebuje.

Liczba użytych kolorów jest w przypadku ogólnym trzykrotnie większa od ważonej liczby klikowej $\omega(G)$, gdyż w grafie mogą występować wierzchołki, których waga osiąga $\omega(G)$. Jeśli istnieją trzy takie wierzchołki o różnych kolorach bazowych, wówczas liczba użytych kolorów wynosi dokładnie $3\omega(G)$.

□

W przeciwieństwie do poprzednich, ten algorytm może działać w modelu bez przekolorowań, gdyż nie ma żadnej potrzeby zmiany częstotliwości rozmowy dopóki odbywa się ona cały czas w jednej stacji bazowej (patrz Rozdział 2.1).

W ten sposób udowodnione zostało Twierdzenie 2.32.

3. Algorytmy multikolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów

Jak wspomniano w Rozdziale 1 i wykazano w Rozdziale 2, bardzo ważnymi grafami heksagonalnymi są te z nich, które nie zawierają trójkątów. Dla tej klasy grafów powstało wiele dedykowanych algorytmów multikolorowania, a także algorytmy działające w modelach k -lokalnych (np. [2, 8, 9, 25, 26, 28, 31, 32, 33, 38, 40]). Grafy heksagonalne bez trójkątów są prostsze do kolorowania niż ogólny przypadek podgrafów triangulacji płaszczyzny, ze względu na swą bardzo dobrą strukturę opisaną w Rozdziale 1.2. Współczynniki aproksymacji algorytmów dla grafów heksagonalnych bez trójkątów są więc również lepsze niż w przypadku ogólnym. Liczba multichromatyczna dla takich grafów wynosi $\frac{7}{6}\omega(G)$ (prace [25, 26, 38]). Tyle samo wynosi współczynnik aproksymacji algorytmów dla tych grafów w modelu ∞ -lokalnym ([26, 38]). W pozostałych modelach współczynniki aproksymacji wynoszą odpowiednio: $6/5$ w modelu 6-lokalnym ([40]), $5/4$ w modelu 2-lokalnym ([31]) i $4/3$ w modelu 1-lokalnym ([2]). Najważniejszym problemem otwartym jest jednak Hipoteza 1.35 postawiona przez McDiarmida i Reeda, która mówi, że tego typu grafy można multikolorować używając jedynie $\frac{9}{8}\omega(G)$ kolorów.

Hipoteza 3.1 (McDiarmid, Reed, 1999)

Dla każdego ważonego grafu heksagonalnego bez trójkątów G zachodzą nierówności

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq \frac{9}{8}\omega(G).$$

W trakcie badania tego zagadnienia pojawiło się kilka dróg prób rozwiązania tego problemu. Pierwszą z nich jest metoda wyznaczania w grafach heksagonalnych bez trójkątów k -dobrych kolorowań (patrz Definicja 2.25). W pracy [26] zostało udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2 (Sudeep, Vishwanathan, 2005)

Każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7-dobry.

Z tego twierdzenia, na mocy Faktu 2.27, wynika natychmiast, że liczba multichromatyczna takich grafów jest nie większa niż $\frac{7}{6}\omega(G)$. Aby rozstrzygnąć Hipotezę 1.35 należałoby udowodnić następujący fakt.

Hipoteza 3.3

Każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 9-dobry.

Odminnym sposobem rozstrzygnięcia Hipotezy 1.35, którego dotyczyć będzie dalsza część pracy, jest metoda wyznaczania w grafach heksagonalnych bez trójkątów n - $[p]$ -kolorowań.

Definicja 3.4. n - $[p]$ -kolorowaniem grafu G nazywamy taką funkcję Ψ , która dla zbioru kolorów C , każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien podzbiór tego zbioru ($\Psi : V(G) \rightarrow 2^C$) w taki sposób, aby zachowane były następujące warunki:

- (i) $C = \{1, \dots, n\}$, czyli C jest pewnym zbiorem n -elementowym,
- (ii) $\forall_{v \in V(G)} |\Psi(v)| = p$, czyli do każdego wierzchołka jest przypisywanych p różnych kolorów,
- (iii) $\forall_{uv \in E(G)} \Psi(u) \cap \Psi(v) = \emptyset$, czyli dwóm sąsiednim wierzchołkom są przypisywane rozłączne zbiory kolorów.

Porównując Definicję 3.4 z Definicją 1.5 można zauważyć, że n - $[p]$ -kolorowanie to nic innego jak multikolorowanie grafu, dla którego funkcja wagi jest dla wszystkich wierzchołków równa p .

Fakt 3.5

Każdy ważony graf G , który jest n - $[p]$ -kolorowalny, jest multikolorowalny przy pomocy $\frac{n}{W(G)p} \omega(G)$ kolorów, gdzie $W(G)$ jest liczbą wierzchołków w największej klicie grafu G . Innymi słowy jeśli G jest n - $[p]$ -kolorowalny, to

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq \frac{n}{W(G)p} \omega(G) + O(1).$$

Dowód. Niech $G = (V, E, d)$ będzie ważonym grafem, który jest n - $[p]$ -kolorowalny, i którego n - $[p]$ -kolorowanie Ψ jest dane. Niech dane będzie n palet barw (patrz Definicja 2.16) $\{(c, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, dla których $c \in \{1, \dots, n\}$. Każdy wierzchołek v w n - $[p]$ -kolorowaniu otrzymał kolory $x_1, x_2, \dots, x_p$. Wierzchołek v może więc przypisywać sobie kolejne kolory z palet barw dla $c \in \{1, \dots, n\}$ po kolei, po jednym kolorze z każdej, tj. pierwszy kolor z palety barw x_1 , pierwszy z $x_2, \dots$, pierwszy z x_p , drugi z x_1 , itd. Otrzymane w ten sposób multikolorowanie będzie właściwe.

W każdym wierzchołku kolorem o największym i użytym z dowolnej palety barw będzie $\left\lceil \frac{d(v)}{p} \right\rceil$. Wszystkich palet jest n , zatem liczba wszystkich użytych kolorów wyniesie:

$$n \left\lceil \max \left\{ \frac{d(v)}{p} : v \in V \right\} \right\rceil$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\max \{d(v) : v \in V\} \geq \frac{\omega(G)}{W(G)},$$

zachodzi nierówność zawarta w tezie. $\square$

Wniosek 3.6

Jeśli graf heksagonalny bez trójkątów G jest n - $[p]$ -kolorowalny, to

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq \frac{n}{2p} \omega(G) + O(1).$$

Dowód. Wynika to z Faktu 3.5 oraz obserwacji, że graf heksagonalny bez trójkątów zawiera jako kliki jedynie wierzchołki izolowane albo krawędzie, czyli moc największej kliki jest równa 2. $\square$

Fakt 3.7

Jeśli graf G jest k -dobry to jest $2k$ - $[k - 1]$ -kolorowalny.

Dowód. Algorytm multikolorowania grafu k -dobrego działa w sposób opisany w Algorytmie 2.28. Zatem w każdej rundzie do wierzchołków można przypisać 2 kolory wynikające z dwupodziału, używając ostatecznie $2k$ kolorów, a każdy wierzchołek otrzyma $k - 1$ kolorów, gdyż bierze czynny udział w dokładnie $k - 1$ rundach otrzymując jeden kolor w każdej z nich. $\square$

W dalszej części tego rozdziału najpierw przedstawiony zostanie liniowy algorytm znajdowania 7- $[3]$ -kolorowania w dowolnym grafie heksagonalnym bez trójkątów, następnie zostanie zdefiniowany graf SŠŽ z pracy [25] i wykorzystany do pokazania, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7- $[3]$ -kolorowalny. Oryginalny dowód polega na obserwacji, że graf SŠŽ jest planarny, zatem 4-kolorowalny, natomiast kolejnym wynikiem przedstawionym w tej pracy będzie sposób wyznaczania 3-kolorowania tego grafu. Wreszcie w ostatniej części, przy pomocy zmodyfikowanego grafu SŠŽ oraz algorytmu jego 3-kolorowania udowodniona zostanie Hipoteza 1.35 dla grafów heksagonalnych bez trójkątów bez przyległych narożników (grafy te występują również w Rozdziale 2.3 oraz pracach [32, 37]).

3.1. Liniowy algorytm multikolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów

W rozdziale tym zostanie zaprezentowany algorytm 7- $[3]$ -kolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów, który może zostać wykonany w czasie liniowym $O(n)$, gdzie n to liczba wierzchołków w grafie.

Twierdzenie 3.8 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Istnieje algorytm wyznaczający 7- $[3]$ -kolorowanie dowolnego grafu heksagonalnego

bez trójkątów, działający w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków w tym grafie.

Wniosek 3.9

Istnieje algorytm $7/6$ -przybliżający multikolorowanie dowolnego grafu heksagonalnego bez trójkątów, działający w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków w tym grafie.

Algorytm opiera się o następujący lemat, z którego wynika algorytm 4 -[2]-kolorowania ścieżki o ustalonych końcach.

Lemat 3.10 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Niech P będzie dowolną ścieżką zawierającą co najmniej 2 wierzchołki. Niech $s, t \in P$ będą końcami ścieżki P , a $n(s), n(t)$ oznaczają wierzchołki sąsiadujące odpowiednio z wierzchołkami s i t na ścieżce P . Załóżmy, że z s oraz t skojarzone są pewne dwuelementowe podzbiory czteroelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, odpowiednio S i T , $S, T \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $|S| = |T| = 2$. Istnieje algorytm, który w czasie liniowym znajduje 4 -[2]-kolorowanie wierzchołków na ścieżce P bez końców $(P \setminus \{s, t\})$, takie, że w wierzchołkach s i t można wybrać po jednym elemencie ze zbioru odpowiednio S i T w taki sposób, aby nie spowodować konfliktu z kolorami przypisanymi do wierzchołków $n(s)$ i $n(t)$.

Algorytm znajdujący kolorowanie, o którym mówi Lemat 3.10 wygląda następująco.

Algorytm 3.11 (Witkowski, Žerovnik, 2009).

Krok 1 Wyznacz dwupodział ścieżki $P = P_1 \cup P_2$;

Krok 2 Wybierz dowolny element $i \in S$ i przypisz do wierzchołka s ;

Krok 3 Wybierz dowolny element $j \in T$ taki, że $j \neq i$ i przypisz do wierzchołka t ;

Krok 4 Jeśli s i t znajdują się w tym samym zbiorze w dwupodziale ścieżki P , np. $s, t \in P_1$ (ścieżka ma parzystą długość), to do wszystkich wierzchołków z $P_1 \setminus \{t, s\}$ przypisz kolory $\{i, j\}$, a do wszystkich wierzchołków z P_2 przypisz kolory $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$.

Jeśli s i t znajdują się w różnych zbiorach w dwupodziale ścieżki P , np. $s \in P_1, t \in P_2$ (ścieżka ma nieparzystą długość), to do wszystkich wierzchołków z $P_1 \setminus s$ przypisz kolory i oraz jeden z kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$, a do wierzchołków z $P_2 \setminus t$ przypisz kolory j oraz drugi z kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$.

Dowód poprawności algorytmu.

W Kroku 1 wiadomo, że ścieżka jest grafem dwudzielnym, którego dwupodział można wyznaczyć w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków.

W Krokach 2 i 3 wskazany wybór jest możliwy, gdyż zbiór T jest dwuelementowy. W Kroku 4 kolorowanie jest odpowiednio rozszerzane w taki sposób, aby nie spowodować konfliktów. Rozszerzenie to jest prawidłowe i spełnia wszystkie warunki nałożone przez treść Lematu 3.10.

Algorytm działa w czasie liniowym, ponieważ taki czas jest potrzebny do wyznaczenia dwupodziału ścieżki, rozpropagowania w grafie informacji o zbiorach S i T oraz wyborach dokonanych przez wierzchołki s i t . Wybór kolorów w przypadku drugim Kroku 4 można uściślić np. w taki sposób, aby wierzchołki z P_1 wybierały zawsze mniejszy z dostępnych kolorów, a wierzchołki z P_2 większy z dostępnych kolorów. W ten sposób uniknięta zostanie dodatkowa komunikacja w tym kroku. $\square$

Obserwacja 3.12. Lemat 3.10 jest również prawdziwy, jeśli w zbiorze S znajduje się tylko jeden element, co wynika bezpośrednio z postaci Kroku 2 Algorytmu 3.11.

Lemat 3.13 (Witkowski, Žerovnik, 2009)

Niech $P = (V, E)$ będzie dowolną ścieżką. Niech $X \in V(P)$ będzie dowolnym ustalonym podzbiorem wierzchołków ścieżki P . Wierzchołki $x \in X$ będziemy nazywać wierzchołkami organicznymi. Załóżmy, że z każdym organicznym wierzchołkiem $x \in X$ skojarzony jest pewien dwuelementowy podzbiór O_x zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, który będziemy nazywać zbiorem organicznym wierzchołka x . Istnieje algorytm, który w czasie liniowym znajduje 4-[2]-kolorowanie wierzchołków $P \setminus X$ na ścieżce P , takie, że dla każdego wierzchołka organicznego $x \in X$ można wybrać jeden element ze zbioru O_x w taki sposób, aby nie spowodować konfliktu z kolorami przypisanymi w wyznaczonym 4-[2]-kolorowaniu.

Dowód. Aby udowodnić ten lemat wystarczy odpowiednio skorzystać z Algorytmu 3.11. Wierzchołki na ścieżce można w czasie liniowym uszeregować w kolejności od jednego końca do drugiego. Używając Algorytmu 3.11 można pokolorować ścieżkę pomiędzy pierwszym w kolejności wierzchołkiem organicznym, a drugim. Używając Obserwacji 3.12 można rozszerzyć to kolorowanie na ścieżkę łączącą drugi w kolejności wierzchołek organiczny z trzecim itd. aż do ostatniego. Jeśli ścieżka P nie zaczyna się lub nie kończy wierzchołkiem organicznym, wówczas również można dobrać kolory na pozostałych wierzchołkach w taki sposób, aby nie spowodować konfliktu.

Opisana procedura działa w czasie liniowym, gdyż Algorytm 3.11 działa w czasie liniowym na każdym odcinku ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami organicznymi, a wszystkie odcinki po zsumowaniu dadzą długość ścieżki P . $\square$

W bazowym kolorowaniu grafu heksagonalnego bez trójkątów każdy narożnik v ma wszystkich swoich sąsiadów w tym samym kolorze bazowym.

Definicja 3.14. W grafie heksagonalnym bez trójkątów dla każdego narożnika v kolor bazowy, który nie jest kolorem bazowym wierzchołka v , ani kolorem bazowym sąsiadów v nazywamy *kolorem wolnym* w narożniku v .

W tym rozdziale, jak i w następnych, przez paletę barw będziemy rozumieć n -elementowy zbiór, z którego wybierane są kolory przypisywane do wierzchołków w n - $[p]$ -kolorowaniu.

Algorytm znajdowania 7- $[3]$ -kolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów składa się z dwóch głównych faz. W pierwszej każdy wierzchołek przypisuje sobie swój kolor bazowy, a prawe narożniki przypisują sobie również kolor wolny. W drugiej fazie algorytm korzysta z palety barw $\{1, 2, 3, 4\}$. Na początku dla każdej najbardziej prawej ścieżki w prawych narożnikach wybiera dowolnie podzbiory dwuelementowe tej palety barw. Następnie iteruje poczynając od najbardziej prawych ścieżek w grafie i przypisuje brakujące kolory korzystając z Algorytmu 3.11. Po przypisaniu kolorów do każdej ze ścieżek, rozszerza kolorowanie na mosty łączące się z lewymi narożnikami w tej ścieżce, narzucając w ten sposób dwuelementowy zbiór kolorów w prawych narożnikach ścieżek leżących na lewo od rozpatrywanej ścieżki.

Algorytm 3.15 (Witkowski, Žerovnik, 2009).

Krok 0 Ustal paletę barw, z których dobierane będą kolory na $\{R, G, B, 1, 2, 3, 4\}$, gdzie elementy $\{R, G, B\}$ są tożsame z kolorami w kolorowaniu bazowym grafu G .

Krok 1 Dla każdego wierzchołka $v \in V$ przypisz v jego kolor bazowy.

Krok 2 Dla każdego prawego narożnika $v \in V$ przypisz do v jego kolor wolny.

Krok 3 Dla każdego prawego narożnika $v \in V$ który nie posiada prawego sąsiada w G przypisz zbiór organiczny O_x wybierając w dowolny sposób dwa elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ (v jest odtąd wierzchołkiem organicznym).

Krok 4 Podziel graf G na pionowe ścieżki i mosty.

Krok 5 Dopóki $G \neq \emptyset$ wykonuj Krok 6.

Krok 6 Wybierz dowolną najbardziej prawą ścieżkę P i wykonaj dla niej następujące operacje:

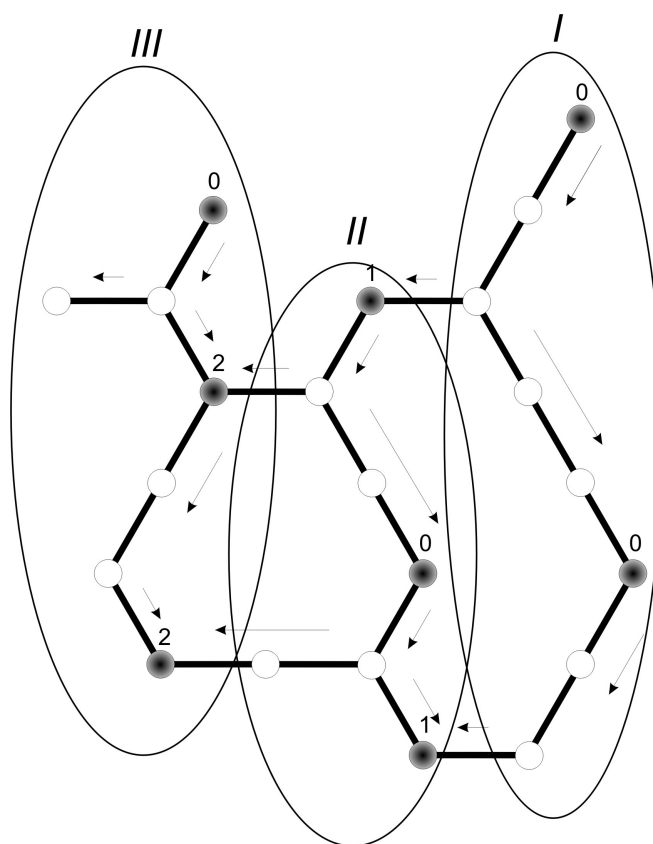
- **Krok (6.1)** Użyj Algorytmu 3.11 do przypisania wszystkim prawym, organicznym narożnikom u jednego koloru ze zbioru O_u , a pozostałym wierzchołkom na ścieżce dwóch kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.
- **Krok (6.2)** Rozszerz 4- $[2]$ -kolorowanie kolorami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ na wszystkie wierzchołki znajdujące się na mostach połączonych z P .
- **Krok (6.3)** Jeśli istnieje most, który łączy lewy narożnik v należący do ścieżki P z pewnym prawym narożnikiem u , wówczas przypisz do u zbiór organiczny O_u , w którym umieszczone zostaną kolory ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$

wymuszone przez kolorowanie tego mostu (u staje się wierzchołkiem organicznym).

- **Krok (6.4)** Usuń z grafu G wierzchołki należące do ścieżki P oraz wierzchołki mostów połączonych z P , za wyjątkiem prawych narożników w tych mostach, nie należących do P .

Dowód poprawności algorytmu.

Kolejność w jakiej wykonuje się algorytm została zobrazowana na Rysunku 3.1.



Rysunek 3.1. Algorytm znajdujący 7-[3]-kolorowanie grafu heksagonalnego bez trójkątów.

Kroki 0, 1 i 2 nie wymagają dowodu.

W Kroku 3 wybieranie kolorów jest zupełnie dowolne. Na Rysunku 3.1 wierzchołki organiczne, które powstały w tym kroku, oznaczone są cyfrą 0.

Krok 4 można wykonać w czasie liniowym poprzez proste liniowe przeszukiwanie grafu dowolną metodą przeszukiwania grafów.

W Kroku 5 będzie wykonywana iteracja po wszystkich pionowych ścieżkach w grafie G . Każda pionowa ścieżka oraz most są pokolorowane w czasie liniowo zależnym od ich wielkości, zatem cała pętla będzie miała złożoność liniowo zależną od liczby wierzchołków w całym grafie G .

W Kroku 6 ścieżka P zawsze istnieje na mocy Obserwacji 1.22. Po usunięciu dowolnych wierzchołków w grafie G w Kroku 6.4, pozostały graf jest również grafem heksagonalnym bez trójkątów, zatem także w nim istnieje najbardziej prawa ścieżka. Pionowa ścieżka spełnia wszystkie warunki Lematu 3.13, więc można dla niej w Kroku 6.1 uruchomić Algorytm 3.11. Zauważmy, że na ścieżce P każdy prawy narożnik przypisał sobie dotąd dwa kolory, swój bazowy oraz wolny, a w tym kroku jest wierzchołkiem organicznym, więc otrzyma jeszcze jeden kolor – w sumie będzie miał ich trzy, czyli tyle ile potrzebuje. Pozostałe wierzchołki na ścieżce P przypisały sobie dotąd jeden kolor, swój kolor bazowy, a w tym kroku otrzymają jeszcze dwa kolory – w sumie będą ich miały trzy, czyli tyle ile potrzebują. Rozszerzenie kolorowania na mosty w Kroku 6.2 nie stanowi żadnego problemu i jest dobrze określone. Wszystkie wierzchołki należące do mostu, oprócz prawych narożników na jego końcu, otrzymały dotąd jeden kolor, swój kolor bazowy, a w tym kroku otrzymają jeszcze dwa kolory – w sumie będą ich miały trzy, czyli tyle ile potrzebują. Prawe narożniki łączące mosty z kolejną ścieżką pionową (ponieważ most kończący się narożnikiem prowadzi do kolejnej ścieżki pionowej) są „łącznikami” pomiędzy kolorowaniem jednej, a kolejnej ścieżki pionowej. W przypadku pokolorowania mostu do końca ostatni jego wierzchołek, czyli prawy narożnik, otrzymałby dwa kolory. Jednakże prawe narożniki mają już przypisane dwa kolory, zatem potrzebują tylko jednego, mogą więc wybrać dowolny z nich. Ten wybór zostaje jednak odłożony w czasie do momentu kolorowania kolejnej ścieżki pionowej, a ograniczenie na dobór koloru sprowadza się do stworzenia wierzchołka organicznego. Na Rysunku 3.1 wierzchołki, które po pierwszym przebiegu pętli stają się organiczne zostały oznaczone cyfrą 1. Po Kroku 6.3 wszystkie wierzchołki należące do ścieżki P oraz mostów z nią połączonych, otrzymały już trzy kolory i nie muszą dalej uczestniczyć w algorytmie, dzięki czemu można je usunąć z grafu. Na Rysunku 3.1 wierzchołki otoczone elipsą I są wierzchołkami, które zostają całkowicie pokolorowane przy pierwszym przebiegu pętli. W drugim przebiegu są pokolorowane te zakreślane elipsą II , natomiast wierzchołkami organicznymi zostają te oznaczone cyfrą 2. Trzeci obieg pętli dla tego grafu jest ostatnim i pokolorowane są w nim wszystkie pozostałe wierzchołki.

□

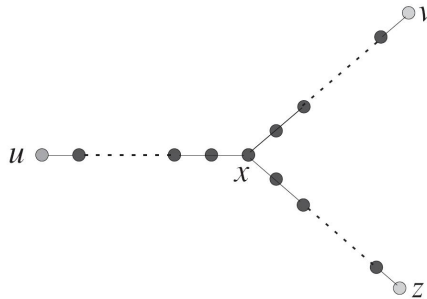
W ten sposób udowodnione zostało Twierdzenie 3.8, a na mocy Faktu 3.6, również Wniosek 3.9.

3.2. Graf SŠŽ i jego zastosowania

W poprzednim rozdziale przedstawiony został prosty algorytm znajdowania 7-[3]-kolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów, czyli na mocy Faktu 3.6 również istnienia multikolorowania używającego $\frac{7}{6}\omega(G)$ kolorów. Wcześniejsze dowody tego twierdzenia w pracach [8, 25] były o wiele bardziej skomplikowane i nie dało się na ich podstawie stworzyć konkretnego przypisania kolorów do wierzchołków. Szczególnie istotny dla dalszej części pracy jest dowód przedstawiony w pracy [25]. W rozważaniach na temat grafów heksagonalnych bez trójkątów wprowadzono tam pewien szczególny rodzaj grafu – graf SŠŽ, a następnie wykorzystano go do udowodnienia, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7-[3]-kolorowalny. Niestety dowód opiera się na tym, że graf SŠŽ jest 4-kolorowalny, gdyż jest planarny, więc nie można na jego podstawie stworzyć algorytmu wyznaczania tego 7-[3]-kolorowania. W dalszej części tego rozdziału przedstawione zostanie najpierw kilka pojęć, które są potrzebne do zdefiniowania grafu SŠŽ, definicję grafu SŠŽ, a na końcu ideę dowodu z pracy [25].

Definicja 3.16. *Trójpgwiazdą* nazywamy każdy podgraf grafu heksagonalnego bez trójkątów składający się z lewego narożnika x oraz prostych ścieżek łączących go z prawymi narożnikami lub wierzchołkami o stopniu 1 (wierzchołkami wiszącymi). Te proste ścieżki w trójpgwieździe nazywamy *ramionami*.

Przykład trójpgwiazdy znajduje się na Rysunku 3.2.



Rysunek 3.2. Trójpgwiazda

Definicja 3.17. Wierzchołki u , v i z umieszczone na końcu ramion trójpgwiazdy nazywamy *wierzchołkami kończącymi* ramion lub *wierzchołkami kończącymi* trójpgwiazdy (patrz Rysunek 3.2). Wierzchołek x , który jest lewym narożnikiem wokół którego trójpgwiazda jest zbudowana, nazywamy *środkiem* trójpgwiazdy. Jeśli jedno z ramion trójpgwiazdy ma długość 0, co ma miejsce gdy narożnik jest stopnia 2, wówczas wierzchołek środkowy jest jednocześnie jednym z wierzchołków kończących.

Obserwacja 3.18. Niech u, v i z będą wierzchołkami kończącymi trójkwiazdy, a x jej środkiem. Zauważmy, że istnieją tylko dwie możliwości na parzystość długości ścieżek $(u, \dots, x, \dots, v)$, $(u, \dots, x, \dots, z)$ i $(v, \dots, x, \dots, z)$. Jeśli wszystkie ramiona mają tę samą parzystość, wówczas wszystkie trzy ścieżki mają parzystą długość. Jeśli jedno z ramion ma inną parzystość od pozostałych, wówczas długość jednej z tych ścieżek jest parzysta, a pozostałych dwóch nieparzysta.

Definicja 3.19. Trójkwiazdę, w której wszystkie ramiona mają tę samą parzystość nazywamy *parzystą*. W przeciwnym przypadku nazywamy ją *nieparzystą*.

Korzystając z powyższych pojęć można zdefiniować graf $S\check{S}\check{Z}$.

Definicja 3.20. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem heksagonalnym bez trójkątów. *Grafem $S\check{S}\check{Z}$* nazywamy graf, w którym wierzchołki odpowiadają wierzchołkom kończącym trójkwiazd w G oraz:

- jeśli Y jest trójkwiazdą nieparzystą, wówczas krawędzią są połączone te wierzchołki kończące, które znajdują się na końcach ścieżek o nieparzystej długości (patrz Rysunek 3.3).
- jeśli Y jest trójkwiazdą parzystą, wówczas wierzchołki kończące ścieżki idącej w kierunku prawym-górnym i prawym-dolnym są ze sobą sklejone (patrz Rysunek 3.3). W takim przypadku pomiędzy wierzchołkami nie ma żadnych krawędzi.

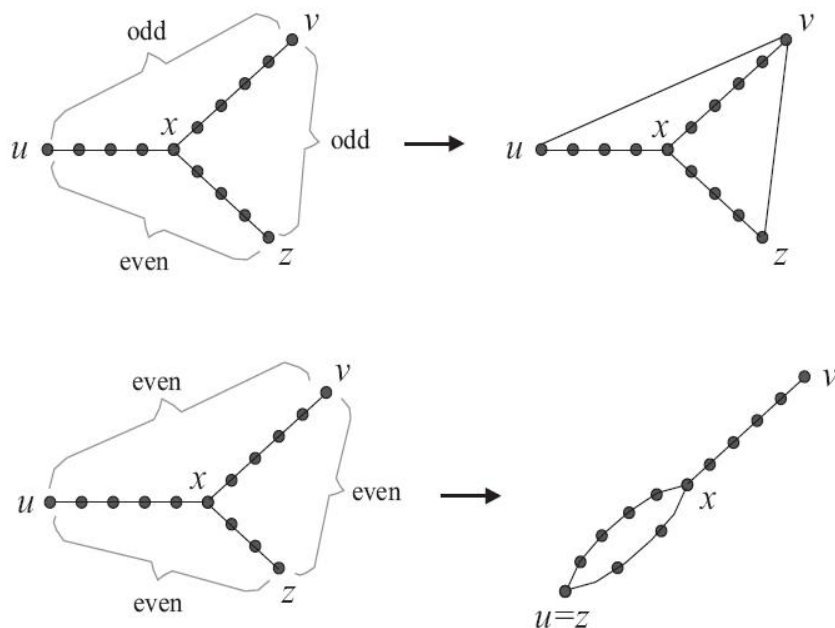
Fakt 3.21 (Sau, Šparl, Žerovnik, 2009)

Każdy graf $S\check{S}\check{Z}$ powstały z dowolnego grafu heksagonalnego bez trójkątów G , jest grafem planarnym bez pętli.

Dowód. Oryginalny graf G jako indukowany podgraf pokrycia trójkątnego płaszczyzny jest grafem planarnym. Tworzenie krawędzi oraz sklejanie wierzchołków opisane w Definicji 3.20 nie niszczy planarności. Krawędzie, które powstają w tym grafie można narysować nie przecinając żadnej innej krawędzi w grafie G (patrz Rysunek 3.3), a do wierzchołków pomiędzy wierzchołkami kończącymi trójkwiazdy nie zostaną poprowadzone żadne inne krawędzie. Z drugiej strony, także podczas połączenia wierzchołków kończących trójkwiazdy nie powstaną żadne przecięcia, gdyż nie zostaną poprowadzone krawędzie do żadnego z wierzchołków wewnętrznych w takiej trójkwieździe.

Należy jeszcze wykazać, że graf $S\check{S}\check{Z}$ nie zawiera pętli. Zauważmy, że pętla mogłaby powstać, jeśli zostałyby sklejone jakaś para wierzchołków przyległych. Ale to jest niemożliwe, gdyż sklejane są jedynie wierzchołki będące wierzchołkami kończącymi parzystej trójkwiazdy, a te nigdy nie będą ze sobą połączone krawędzią. $\square$

Na podstawie pracy [23] i Faktu 3.21 można wysnuć następujący wniosek.



Rysunek 3.3. Sposób tworzenia grafu SŠŽ.

Wniosek 3.22

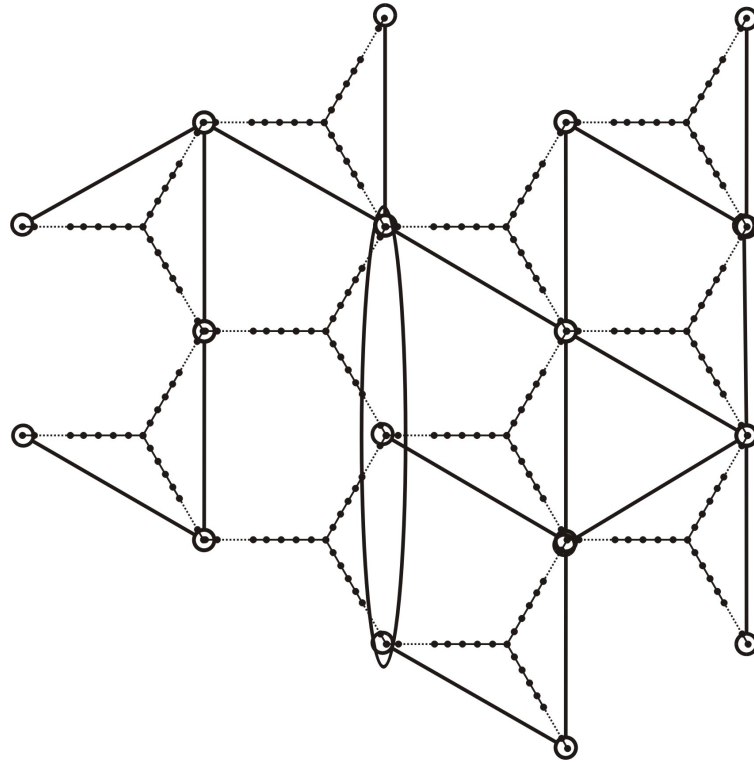
Graf SŠŽ jest 4-kolorowalny.

Graf SŠŽ został zdefiniowany po raz pierwszy w pracy [25]. Użyto go do udowodnienia 7-[3]-kolorowalności grafów heksagonalnych bez trójkątów. Poniżej przedstawiono pokrótce dowód z tamtej pracy.

W celu udowodnienia 7-[3]-kolorowalności grafów heksagonalnych bez trójkątów, przedstawiony zostanie algorytm, który pozwala wyznaczyć to kolorowanie pod warunkiem, że znany jest algorytm znajdujący 4-kolorowanie grafu planarnego bez pętli (co uniemożliwia jego wykorzystanie w praktyce do skontruowania tego kolorowania w sposób algorytmiczny). Algorytm składa się z kilku głównych faz. Początkowo każdy wierzchołek przypisuje sobie swój kolor bazowy, a wierzchołki kończące trójkwiazdy także swoje wolne kolory. Następnie tworzony jest graf SŠŽ i znajduje jego 4-kolorowanie. Na końcu to 4-kolorowanie zostaje rozszerzone na 4-[2]-kolorowanie wierzchołków wewnątrz trójkwiazdy.

Algorytm 3.23 (Sau, Šparl, Žerovnik, 2009).

Krok 0 Ustal paletę barw, z których dobierane będą kolory na $\{R, G, B, 1, 2, 3, 4\}$, gdzie elementy $\{R, G, B\}$ są tożsame z kolorami w kolorowaniu bazowym grafu G .



Rysunek 3.4. Przykład grafu SŠŽ.

- Krok 1** Dla każdego wierzchołka $v \in V$ przypisz v jego kolor bazowy.
- Krok 2** Dla każdego wierzchołka $v \in V$ będącego wierzchołkiem kończącym pewnej trójkwiazdy przypisz do v jego kolor wolny.
- Krok 3** Stwórz na podstawie grafu G graf SŠŽ i wyznacz jego 4-kolorowanie kolorami $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Krok 4** Dla każdego wierzchołka $v \in V$ będącego wierzchołkiem kończącym pewnej trójkwiazdy przypisz do v kolor, który otrzymał w 4-kolorowaniu grafu SŠŽ.
- Krok 5** Znajdź 4-[2]-kolorowanie wierzchołków wewnątrz trójkwiazdy tak, żeby nie stworzyć konfliktów z wierzchołkami kończącymi trójkwiazdy.

Dowód poprawności algorytmu.

Kroki 0 i 1 nie wymagają dowodu.

Zauważmy, że w Kroku 2 każdy wierzchołek kończący trójkwiazdy ma kolor wolny. Taki wierzchołek może być albo narożnikiem, albo wierzchołkiem stopnia 1. W obu tych przypadkach istnieje kolor bazowy, który nie został użyty ani przez niego samego, ani przez żadnego z jego sąsiadów.

Krok 3 jest prawdziwy na mocy Wniosku 3.22.

Aby udowodnić Krok 4 należy wykazać prawdziwość następującego lematu.

Lemat 3.24 (Sau, Šparl, Žerovnik, 2009)

Niech S będzie trójkwiazdą w grafie G oraz dane będzie 4-kolorowanie grafu $S\check{S}\check{Z}$ utworzonego na podstawie grafu G . Istnieje prawidłowe 4-[2]-kolorowanie wierzchołków trójkwiazdy S przy pomocy tych samych kolorów co w 4-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$ takie, że sąsiedzi wierzchołków kończących otrzymują inne kolory niż wierzchołki kończące w tym 4-kolorowaniu.

Dowód. Niech u, v, z będą wierzchołkami kończącymi trójkwiazdy S . Korzystając z faktu, że każda trójkwiazda $S = S_1 \cup S_2$ jest grafem dwudzielnym, rozpatrzmy dwa przypadki:

(i) Jeśli wszystkie ramiona trójkwiazdy mają długość tej samej parzystości, wówczas wierzchołki kończące leżą w tym samym zbiorze w dwupodziale trójkwiazdy S . Przyjmijmy bez straty ogólności, że $u, v, z \in S_1$. Ponieważ dwa spośród trzech wierzchołków kończących zostały w tym przypadku sklejone w $S\check{S}\check{Z}$, we wszystkich użyto co najwyżej dwóch kolorów c_1, c_2 ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Jeśli $c_1 \neq c_2$, wówczas wszystkim wierzchołkom ze zbioru S_1 można przypisać kolory c_1 i c_2 , natomiast wierzchołkom ze zbioru S_2 można przypisać kolory $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c_1, c_2\}$. Jeśli wszystkie wierzchołki kończące otrzymały ten sam kolor c w 4-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$, wówczas można dobrać jeszcze jeden, dowolny kolor $c' \neq c$ i przypisać wszystkim wierzchołkom ze zbioru S_1 kolory c i c' , natomiast wierzchołkom ze zbioru S_2 kolory $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c, c'\}$.

(ii) Jeśli jedno z ramion trójkwiazdy ma inną parzystość niż pozostałe, wówczas jeden z wierzchołków kończących (przypuśćmy bez straty ogólności, że jest to u) jest połączony z pozostałymi dwoma (v i z) krawędziami w $S\check{S}\check{Z}$. W takim przypadku v i z są w tym samym zbiorze w dwupodziale, innym niż u . Przypuśćmy bez straty ogólności, że $v, z \in S_1$, a $u \in S_2$. Wierzchołkom ze zbioru S_1 można wtedy przypisać kolory, które otrzymały wierzchołki v i z , a pozostałe dwa przypisać wierzchołkom z S_2 . Można tak zrobić, gdyż u jest połączony krawędzią zarówno z v jak i z , dzięki czemu otrzymał inny kolor niż tamte dwa wierzchołki. W przypadku, gdy v i z mają ten sam kolor c , można do niego dobrać dowolny kolor $c' \neq c$, ale inny niż ten przypisany do u i przypisać wszystkim wierzchołkom ze zbioru S_1 kolory c i c' , natomiast wierzchołkom ze zbioru S_2 kolory $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c, c'\}$. $\square$

Po wykonaniu Kroku 5 graf jest właściwie 7-[3]-pokolorowany. Każdy wierzchołek, który jest wierzchołkiem kończącym trójkwiazdy otrzymał 3 kolory: swój kolor bazowy, swój kolor wolny oraz kolor z 4-kolorowania grafu $S\check{S}\check{Z}$. Każdy wierzchołek wewnątrz trójkwiazdy dostał za to swój kolor bazowy oraz dwa do-

datkowe kolory. Podczas przypisywania kolorów nie został spowodowany żaden konflikt. $\square$

3.3. Algorytm 3-kolorowania grafu $S\check{S}\check{Z}$

W poprzednim rozdziale przedstawiony został wynik oraz graf $S\check{S}\check{Z}$ wprowadzony w pracy [25]. W pierwszej wersji tej pracy pojawiło się przypuszczenie, że uzyskanie 3-kolorowania grafu $S\check{S}\check{Z}$ doprowadzi do rozwiązania Hipotezy McDiarmida-Reeda 1.35 poprzez udowodnienie, że graf heksagonalny bez trójkątów jest 9-[4]-kolorowalny. W tym rozdziale przedstawiony zostanie algorytm 3-kolorowania grafu $S\check{S}\check{Z}$. Niestety przypuszczenie zawarte w pracy [25] okazało się nieprawdziwe i 3-kolorowanie grafu $S\check{S}\check{Z}$ nie prowadzi do rozstrzygnięcia Hipotezy 1.35. Niemniej dzięki przedstawionemu algorytmowi, oraz pewnej modyfikacji grafu $S\check{S}\check{Z}$ w kolejnym rozdziale zostanie przedstawiony dowód, że istnieje duża podklasa grafów heksagonalnych bez trójkątów, które można multikolorować używając $\frac{9}{8}\omega(G)$ kolorów.

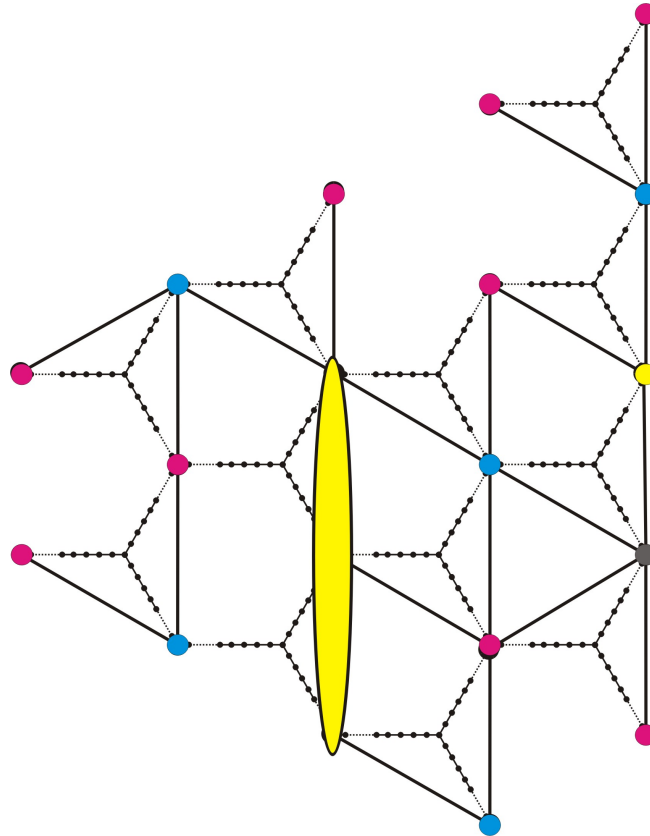
W przypadku grafu $S\check{S}\check{Z}$ zauważmy na początek, że przy pomocy prostego algorytmu zachłannego można go pokolorować czterema kolorami w czasie liniowym. To, co trzeba zrobić to odpowiednio zdefiniować kolejność wierzchołków, z której korzystać będzie algorytm przy zachłannym dobieraniu kolorów. Zauważmy, że graf $S\check{S}\check{Z}$ nie jest grafem z ograniczonym stopniem, z uwagi na sklejanie wierzchołków. Niemniej prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 3.25

Graf $S\check{S}\check{Z}$ można pokolorować algorytmem zachłannym szeregując wierzchołki najpierw w kolejności od najbardziej lewej ścieżki pionowej do najbardziej prawej, a na każdej ścieżce w kolejności od góry do dołu. Tak otrzymane kolorowanie jest 4-kolorowaniem grafu $S\check{S}\check{Z}$ i można je uzyskać w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków w grafie $S\check{S}\check{Z}$.

Dowód. Przy kolejności zdefiniowanej jak w treści faktu każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z co najwyżej trzema wierzchołkami występującymi wcześniej w tym uszeregowaniu. W najgorszym przypadku wierzchołek v , który nie jest sklejonny z innymi, może należeć do dwóch trójkwiazd, przez co v może być połączony z poprzednim wierzchołkiem kończącym na swojej ścieżce pionowej oraz dwoma innymi na lewej ścieżce pionowej. Sytuacja taka została pokazana na Rysunku 3.6.

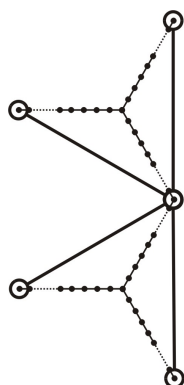
Jak wynika z Rysunku 3.6, nie istnieje żadna inna krawędź połączona z tym wierzchołkiem, która łączyłaby go z wierzchołkami występującymi wcześniej w algorytmie zachłannym. Jest to jedyny przypadek, w którym wierzchołek w grafie



Rysunek 3.5. Graf SŠŽ z 4-kolorowaniem uzyskanym przy pomocy algorytmu zachłanego.

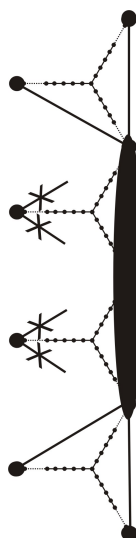
SŠŽ podczas wyboru koloru jest połączony krawędzią z trzema pokolorowanymi wcześniej sąsiadami. Wszystkie pozostałe niesklejone wierzchołki będą miały tych sąsiadów mniej niż trzech, a to zawsze umożliwia wybór wolnego koloru.

W przypadku wierzchołka sklejonego v może on mieć dowolnie duży stopień w grafie, gdyż v można stworzyć poprzez sklejenie dowolnie wielu wierzchołków kończących trójgwiazd. Jednak sklejanie następuje zawsze pomiędzy najbardziej na prawo wysuniętymi wierzchołkami kończącymi. W związku z tym sklejony wierzchołek v będzie „zawierał” jedynie wierzchołki kończące z jednej ścieżki pionowej. Dzięki temu dla wierzchołka v można jednoznacznie określić jego położenie w kolejności w algorytmie zachłannym. Krawędzie łączące wierzchołek v z wierzchołkami na lewej ścieżce mogą „powstać” jedynie poprzez wierzchołki kończące znajdujące się „na końcach” tego sklejonego wierzchołka (patrz Rysunek 3.5). Z tego wynika, że istnieją jedynie trzy krawędzie do wierzchołków występujących wcześniej w określonej w algorytmie kolejności: jedna do wierzchołka poprzed-



Rysunek 3.6. Wierzchołek z trzema sąsiadami pokolorowanymi wcześniej w algorytmie zachłannym.

niego na ścieżce pionowej, oraz dwie do wierzchołków na lewej ścieżce pionowej, analogicznie jak w przypadku wierzchołka niesklejonego (patrz Rysunek 3.7).



Rysunek 3.7. Wierzchołek skleiony z trzema sąsiadami pokolorowanymi wcześniej w algorytmie zachłannym.

Ponieważ każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z co najwyżej trzema wierzchołkami występującymi wcześniej w uszeregowaniu algorytmu zachłannego, użyte zostaną co najwyżej cztery kolory. Algorytm działa w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków w grafie G . $\square$

Wniosek 3.26

Algorytm 3.23 7-[3]-kolorowania grafów heksagonalnych bez trójkątów można wykonać w czasie liniowo zależnym od liczby wierzchołków.

Jak zostało wykazane, graf $S\check{S}\check{Z}$ można pokolorować algorytmem zachłannym przy pomocy czterech kolorów. Przy pomocy tego samego uszeregowania wierzchołków, co w algorytmie zachłannym w dowodzie Faktu 3.25, można jednak uzyskać o wiele więcej, mianowicie kolorowanie tego grafu przy pomocy zaledwie trzech kolorów.

Fakt 3.27

Każdy skończony graf $S\check{S}\check{Z}$ jest 3-kolorowalny.

Twierdzenie to zostanie udowodnione poprzez pokazanie algorytmu do znajdowania 3-kolorowania, który będzie działał w czasie kwadratowo zależnym od liczby wierzchołków w grafie G . Algorytm znajdowania 3-kolorowania jest również zachłanny i korzysta z tego samego uszeregowania wierzchołków, co algorytm dla 4-kolorowania. W przypadku gdy podczas procedury zachłannej pojawi się wierzchołek v , który ma trzech sąsiadów występujących wcześniej w uporządkowaniu (już pokolorowanych) i wszyscy trzej będą różnego koloru, wówczas wierzchołki wcześniejsze na ścieżce pionowej będą się musiały odpowiednio przekolorować i zwolnić jeden kolor dla wierzchołka v .

Algorytm 3.28.

Krok 0 Uporządkuj wierzchołki w kolejności od najbardziej lewej ścieżki do najbardziej prawej, a na każdej ścieżce w kolejności od góry do dołu

Krok 1 Po kolei dla każdego wierzchołka $v \in V$ wykonaj następujące operacje:

Krok 1.1 Jeśli wierzchołek v jest połączony z mniej niż trzema wierzchołkami pokolorowanymi, wówczas przypisz mu pierwszy dostępny kolor.

Krok 1.2 Jeśli wierzchołek v jest połączony z trzema wierzchołkami pokolorowanymi, ale co najmniej dwa z nich są pokolorowane tym samym kolorem, wówczas przypisz mu pierwszy dostępny kolor.

Krok 1.3 Jeśli wierzchołek v jest połączony z trzema wierzchołkami pokolorowanymi różnymi kolorami wówczas przypisz do v kolor jego poprzednika na ścieżce pionowej (oznaczymy go przez u) oraz wykonaj następujące operacje:

Krok 1.3.1 Jeśli wierzchołek u jest połączony z trzema wierzchołkami pokolorowanymi (w tym ze swoim następnikiem na ścieżce pionowej), ale co najmniej dwa z nich są pokolorowane tym samym kolorem, wówczas przypisz mu pierwszy dostępny kolor.

Krok 1.3.2 Jeśli wierzchołek u jest połączony z trzema wierzchołkami pokolorowanymi różnymi kolorami (w tym ze swoim następnikiem na ścieżce pionowej) wówczas przypisz do u kolor jego poprzednika na ścieżce pionowej.

Jako nowy wierzchołek u oznacz tego poprzednika na ścieżce pionowej. Idź do Kroku 1.3.1.

Dowód poprawności algorytmu.

Przypomnijmy, że w grafie $S\check{S}\check{Z}$ wierzchołki powstają z wierzchołków w grafie heksagonalnym bez trójkątów G , zatem leżą na pewnych pionowych ścieżkach w G .

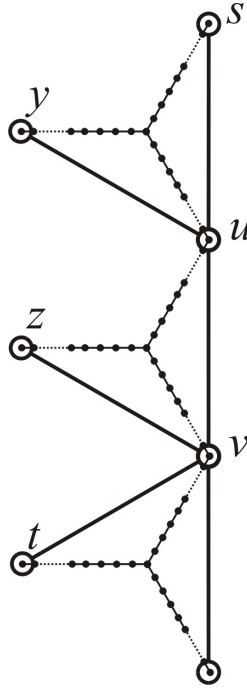
W Kroku 0 wprowadzone zostało to samo uszeregowanie wierzchołków co w Fakcie 3.25.

W Kroku 1 pętla jest wykonywana dla każdego wierzchołka zgodnie z kolejnością określoną w Kroku 0. Liczba wykonanych iteracji będzie wynosiła tyle, ile jest wierzchołków w grafie $S\check{S}\check{Z}$.

W Krokach 1.1 i 1.2 wykonywana jest standardowa procedura zachłannego kolorowania wierzchołków. Podczas wyboru koloru wierzchołek v nie może mieć więcej niż trzech pokolorowanych sąsiadów, co zostało pokazane w dowodzie Faktu 3.25. W Kroku 1.3 pojawia się wierzchołek v , który nie może przypisać sobie koloru używając standardowej zachłannej procedury. Przypomnijmy, że przy tym uszeregowaniu wierzchołków istnieje tylko jedna możliwość wystąpienia wierzchołka, który jest połączony z trzema już pokolorowanymi wierzchołkami. Niech u oznacza wierzchołek poprzedni w kolejności, czyli poprzedni na ścieżce pionowej, a z i t oznaczają pozostałe pokolorowane wierzchołki, z którymi v jest połączony krawędzią, tak jak na Rysunku 3.8.

Zgodnie z założeniem, wierzchołki u , z i t mają przypisane różne, a zarazem wszystkie dostępne kolory. W takim przypadku, zgodnie z Krokiem 1.3 do wierzchołka v przypisujemy kolor u . Po tej operacji nie powstaną żadne konflikty z wierzchołkami z i t , gdyż założyliśmy, że wszystkie one mają różne kolory.

W Krokach 1.3.1 i 1.3.2 dobrany zostaje do u kolor w taki sposób, aby nie spowodować konfliktu z innymi pokolorowanymi wierzchołkami. W Kroku 1.3.1 występuje sytuacja, w której standardowa procedura zachłanna może dobrać kolor bez spowodowania konfliktu. Jeśli natomiast u ma trzech sąsiadów pokolorowanych różnymi kolorami, wówczas procedura zachłanna nie może dobrać koloru i wykonywany jest Krok 1.3.2. Zauważmy, że w takim przypadku u nie może mieć więcej niż trzech pokolorowanych sąsiadów, włączając w to wierzchołek v . Oznaczmy te wierzchołki przez v , y i s jak na Rysunku 3.8. Pomiedzy wierzchołkami u i z nie może istnieć krawędź, gdyż wierzchołki u , v i z są wierzchołkami kończącymi pewnej nieparzystej trójkwiazdy, w związku z czym istnieją pomiędzy nimi tylko dwie krawędzie, zgodnie z Definicją 3.20 grafu $S\check{S}\check{Z}$. Te dwie krawędzie łączą wierzchołki v z u i v z z , gdyż tylko w ten sposób wierzchołek v może mieć trzech pokolorowanych sąsiadów. Jeśli wierzchołek u ma trzech sąsiadów pokolorowanych różnymi kolorami, wówczas przypisuje sobie kolor wierzchołka s .



Rysunek 3.8. Sytuacja w Kroku 1.3.

Na podstawie tego samego argumentu co przy kolorowaniu wierzchołka v , nie może powstać konflikt pomiędzy wierzchołkiem u i jego sąsiadami, natomiast wierzchołek s ma również co najwyżej trzech pokolorowanych sąsiadów, gdyż s i y nie mogą być połączone krawędzią. Można więc powtórzyć dla niego tę samą procedurę co w wierzchołku u i kontynuować takie działanie tak długo, aż pojawi się wierzchołek o mniejszej liczbie pokolorowanych sąsiadów, bądź o trzech sąsiadach, z których co najmniej dwóch będzie pokolorowanych tym samym kolorem. Pętla w Krokach 1.3, 1.3.1, 1.3.2 na pewno się zakończy gdyż graf $\text{S}\check{\text{S}}\check{\text{Z}}$ jest grafem skończonym.

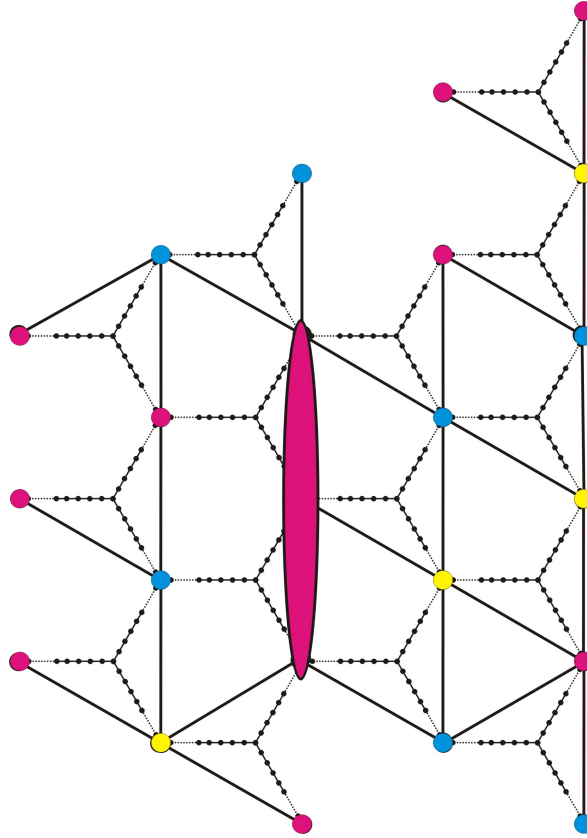
W przypadku wierzchołków sklejonych sytuacja jest analogiczna, co zostało wykazane w dowodzie Faktu 3.25.

Pętla w Kroku 1.3 wykona się w najgorszym przypadku $n/2$ razy, gdzie n jest liczbą wierzchołków w grafie $\text{S}\check{\text{S}}\check{\text{Z}}$. W połączeniu z pętlą w Kroku 1 czas działania algorytmu jest kwadratowo zależny od liczby wierzchołków w grafie G .

□

W ten sposób udowodnione zostało Twierdzenie 3.27.

Graf $\text{S}\check{\text{S}}\check{\text{Z}}$ zawiera pewną strukturę, która jest mocno wykorzystywana w dowodzie Algorytmu 3.23 korzystającego z 4-kolorowania tego grafu. Jeśli jednak



Rysunek 3.9. Grafu SŽ z 3-kolorowaniem uzyskanym przy pomocy Algorytmu 3.28.

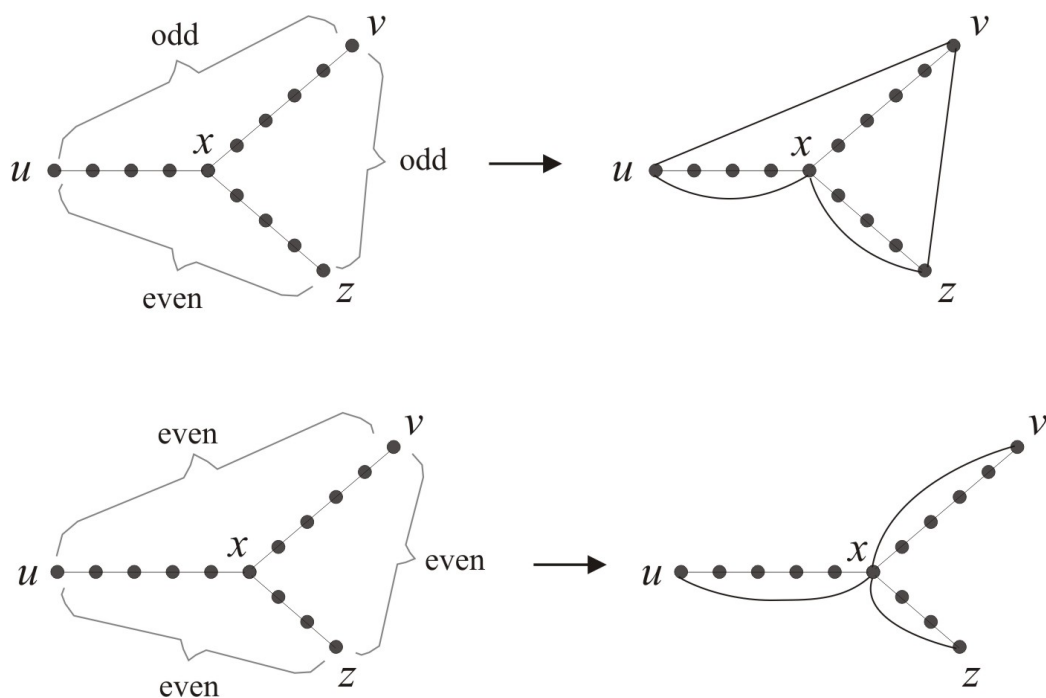
wiadomo, że graf SŽ jest 3-kolorowalny, można uprościć jego strukturę, zachowując własności potrzebne w dowodzie poprawności Algorytmów 3.23 i 3.28.

Definicja 3.29. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem heksagonalnym bez trójkątów. *Zmodyfikowanym grafem SŽ* nazywamy graf, w którym wierzchołkami będą wierzchołki kończące i wierzchołki środkowe trójkwiazd w G , a krawędzie łączą dwa wierzchołki w następujących przypadkach:

- jeśli Y jest trójkwiazdą nieparzystą, wówczas krawędź łączy wierzchołki kończące, które znajdują się na końcach ścieżek o nieparzystej długości oraz wierzchołki kończące ścieżki o parzystej długości z wierzchołkiem środkowym (patrz Rysunek 3.10).
- jeśli Y jest trójkwiazdą parzystą, wówczas krawędź łączy wszystkie wierzchołki kończące z wierzchołkiem środkowym (patrz Rysunek 3.10).

Przykład zmodyfikowanego grafu SŽ został pokazany na Rysunku 3.11.

Dla zmodyfikowanego grafu SŽ Algorytm 3.28 będzie działał analogicznie jak w przypadku grafu SŽ. Dzięki temu samemu uszeregowaniu wierzchołków



Rysunek 3.10. Sposób tworzenia zmodyfikowanego grafu SŠŽ.

algorytm zachłanny wraz z przekolorowywaniem wierzchołków wcześniejszych na ścieżce pionowej uzyska 3-kolorowanie zmodyfikowanego grafu SŠŽ.

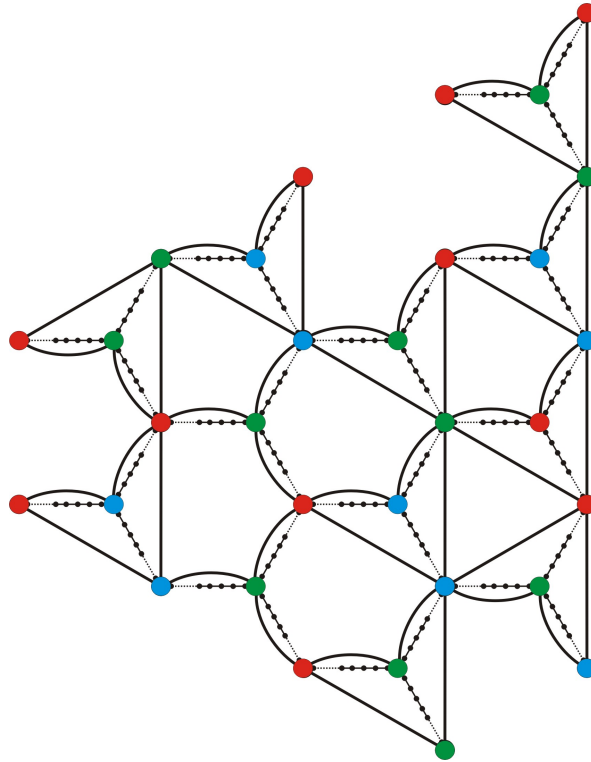
Fakt 3.30 (Šparl, Witkowski, Žerovnik, 2010)

Każdy skończony zmodyfikowany graf SŠŽ jest 3-kolorowalny.

Dowód. Twierdzenie to zostanie udowodnione na podstawie uszeregowania wierzchołków i sposobu działania Algorytmu 3.28. Trzeba zwrócić uwagę tylko na te aspekty grafu, które zmieniły się w Definicji 3.29 w stosunku do Definicji 3.20 i stwierdzić, że pomimo zmian graf jest nadal 3-kolorowalny, a dowód przebiega analogicznie jak dowód Faktu 3.27.

W przypadku trójkwiazdy nieparzystej do wierzchołków w grafie SŠŽ dodawany jest jeden wierzchołek – wierzchołek środkowy tej trójkwiazdy. Jednakże ten wierzchołek ma w zmodyfikowanym grafie SŠŽ stopień 2, więc 3-kolorowanie da się na niego rozszerzyć przy pomocy procedury zachłannej umieszczając go choćby na końcu w kolejności. Do Algorytmu 3.28 można zatem dopisać następujący krok:

Krok 2 Dla każdego wierzchołka v który jest środkiem pewnej trójkwiazdy nieparzystej w G przypisz pierwszy wolny kolor.



Rysunek 3.11. Przykład zmodyfikowanego grafu $\text{SS}\check{\text{Z}}$ z właściwym 3-kolorowaniem.

W przypadku trójkwiazdy parzystej zamiast sklejanego wierzchołków następuje połączenie wszystkich wierzchołków kończących z wierzchołkiem środkowym. W przypadku Algorytmu 3.28 oznacza to pojawienie się innego typu wierzchołków na ścieżkach pionowych. Oznaczmy wierzchołki kończące w trójkwiedzie przez u, v, x (patrz Rysunek 3.2), a wierzchołek środkowy przez x . Zauważmy, że wierzchołek środkowy x będzie miał w Kroku 1.1 algorytmu tylko dwóch pokolorowanych sąsiadów, którymi będą wierzchołki u i v , ponieważ żadna krawędź nie łączy go z wierzchołkiem, który byłby wcześniej na jego ścieżce pionowej, bądź na lewej ścieżce pionowej. Wierzchołek z w Kroku 1.1 będzie miał tylko jednego sąsiada z tej trójkwiazdy (wierzchołek x). Może on mieć też jednego pokolorowanego sąsiada na lewej ścieżce, ale łącznie pokolorowanych sąsiadów będzie nie więcej niż dwóch. Wierzchołek v natomiast ma w Kroku 1.1 co najwyżej dwóch pokolorowanych sąsiadów, gdyż nie istnieje krawędź między wierzchołkami v i u .

Zatem wszystkie nowe rodzaje wierzchołków mogą wybrać kolor do 3-kolorowania przy pomocy procedury z Algorytmu 3.28 poszerzonej o Krok 2.

□

3.4. Częściowe rozwiązanie hipotezy McDiarmida-Reeda

Jak już wielokrotnie zostało w tej pracy wspomniane, najważniejszym problemem otwartym w zagadnieniu przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych jest postawiona przez McDiarmida i Reeda Hipoteza 1.35, która mówi, że grafy heksagonalne bez trójkątów można multikolorować używając $\frac{9}{8}\omega(G)$ kolorów. Na podstawie Wniosku 3.6 z Faktu 3.5 wiadomo, że potwierdzenie tej hipotezy może wynikać z pozytywnego rozstrzygnięcia innego pytania otwartego, czy każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 9-[4]-kolorowalny. W tym rozdziale zaprezentowany zostanie dowód twierdzenia, że rzeczywiście hipoteza ta jest prawdziwa, o ile w grafie heksagonalnym bez trójkątów nie ma dwóch przyległych narożników.

Twierdzenie 3.31 (Šparl, Witkowski, Žerovnik, 2010)

Każdy skończony graf heksagonalny bez trójkątów G , który nie zawiera dwóch połączonych krawędzi narożników, jest 9-[4]-kolorowalny.

Wniosek 3.32

Dla każdego grafu heksagonalnego bez trójkątów G , który nie zawiera dwóch połączonych krawędzi narożników, zachodzą nierówności

$$\omega(G) \leq \chi_m(G) \leq \frac{9}{8}\omega(G) + O(1).$$

W celu udowodnienia Twierdzenia 3.31 skonstruowany zostanie algorytm znajdujący 9-[4]-kolorowanie dowolnego grafu heksagonalnego bez trójkątów i bez przyległych narożników.

Algorytm składa się z kilku faz. Na początku każdy wierzchołek przypisuje sobie swój kolor bazowy. Następnie wszystkie narożniki przypisują sobie swoje wolne kolory. Później utworzony zostaje zmodyfikowany graf $S\check{S}\check{Z}$ i znajdowane jest jego 3-kolorowanie. Na końcu wykonywane są trzy kroki, w których w każdym z G usuwane są wierzchołki jednego koloru w 3-kolorowaniu $S\check{S}\check{Z}$, a pozostałe dwukolorowanie rozszerzane jest na wszystkie wierzchołki grafu.

Algorytm 3.33 (Šparl, Witkowski, Žerovnik, 2010).

Krok 0 Ustal paletę barw, z których dobierane będą kolory na $\{R, G, B, 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2\}$, gdzie elementy $\{R, G, B\}$ są tożsame z kolorami w kolorowaniu bazowym grafu G .

Krok 1 Dla każdego wierzchołka $v \in V$ przypisz v jego kolor bazowy.

Krok 2 Dla każdego narożnika $v \in V$ przypisz v jego kolor wolny.

Krok 3 Stwórz na podstawie grafu G zmodyfikowany graf $S\check{S}\check{Z}$ i wyznacz jego 3-kolorowanie kolorami $\{1, 2, 3\}$.

Krok 4 Niech $G_1 = (V_1, E_1)$ będzie dwudzielnym grafem powstałym z G poprzez usunięcie z niego wszystkich wierzchołków, które w grafie $S\check{S}\check{Z}$ odpowiadają

wierzchołkom pokolorowanym kolorem 1. Znajdź dwupodział grafu G_1 i przypisz każdemu wierzchołkowi w tym grafie kolory 1_2 i 1_3 w zależności od tego, w którym zbiorze dwupodziału się znajduje.

Krok 5 Niech $G_2 = (V_2, E_2)$ będzie dwudzielnym grafem powstałym z G poprzez usunięcie z niego wszystkich wierzchołków, które w grafie SŠŽ odpowiadają wierzchołkom pokolorowanym kolorem 2. Znajdź dwupodział grafu G_2 i przypisz każdemu wierzchołkowi w tym grafie kolory 2_1 i 2_3 w zależności od tego, w którym zbiorze dwupodziału się znajduje.

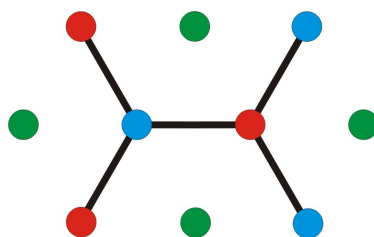
Krok 6 Niech $G_3 = (V_3, E_3)$ będzie dwudzielnym grafem powstałym z G poprzez usunięcie z niego wszystkich wierzchołków, które w grafie SŠŽ odpowiadają wierzchołkom pokolorowanym kolorem 3. Znajdź dwupodział grafu G_3 i przypisz każdemu wierzchołkowi w tym grafie kolory 3_1 i 3_2 w zależności od tego, w którym zbiorze dwupodziału się znajduje.

Dowód poprawności algorytmu.

W Kroku 0 ustalona zostaje paleta barw, spośród których wierzchołki będą dobierać kolory, tak, aby na końcu każdy z nich miał przypisane cztery elementy z tego zbioru.

Krok 1 nie wymaga dowodu.

W Kroku 2 każdy narożnik przypisuje sobie swój wolny kolor. Dwa sąsiadujące ze sobą narożniki mają ten sam wolny kolor (patrz Rysunek 3.12), jednakże o grafie G założono, że nie posiada dwóch przyległych narożników, zatem w kroku tym nie powstaną żadne konflikty.



Rysunek 3.12. Dwa połączone narożniki z kolorowaniem bazowym – konfiguracja zabroniona w grafie G .

Po tym kroku kolory $\{R, G, B\}$ nie zostaną więcej użyte. Do tego momentu wszystkie narożniki mają przypisane po dwa kolory, a pozostałe wierzchołki po jednym kolorze.

Krok 3 jest prawdziwy na mocy Faktu 3.30. Kolorowanie w tym grafie można wyznaczyć przy pomocy Algorytmu 3.28.

W Krokach 4, 5 i 6 dla grafów powstałych po usunięciu wierzchołków o jednym z kolorów $\{1, 2, 3\}$ procedura jest taka sama. Dla ustalenia uwagi udowodniona zostanie jedynie prawdziwość Kroku 4, natomiast dowody Kroków 5 i 6 będą analogiczne. Do pokazania prawdziwości tego kroku potrzebny będzie dowód następującego lematu.

Lemat 3.34 (Šparl, Witkowski, Žerovnik, 2010)

Niech $H = (V_{S\check{S}\check{Z}}, E_{S\check{S}\check{Z}})$ będzie zmodyfikowanym grafem $S\check{S}\check{Z}$, powstałym na podstawie grafu heksagonalnego bez trójkątów $G = (V, E)$. Niech dane będzie 3-kolorowanie Ψ grafu H kolorami $\{1, 2, 3\}$. Niech $G_1 = (V_1, E_1)$ będzie grafem, w którym $V_1 = \{v \in V : v \notin V_{S\check{S}\check{Z}} \text{ lub } \Psi(v) \neq 1\}$ będzie zbiorem wierzchołków, a $E_1 \subseteq E$ będzie zbiorem wszystkich krawędzi z G , których oba końce znajdują się w V_1 (E_1 jest indukowany wierzchołkowo przez V_1). Wtedy graf G_1 jest grafem dwudzielnym.

Dowód. Na mocy Definicji 3.29 w zbiorze $V_{S\check{S}\check{Z}}$ znajdują się wszystkie narożniki ze zbioru V . Dwudzielność grafu G_1 zostanie udowodniona poprzez wykazanie, że dwupodział prawych narożników grafu G , który jest dany przez kolory $\{2, 3\}$ w kolorowaniu Ψ , można rozszerzyć w każdej trójkwieździe na wszystkie jej wierzchołki.

W przypadku trójkwieźdy parzystej wszystkie trzy wierzchołki kończące nie mogą mieć różnych kolorów w 3-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$. Gdyby tak było, wówczas nie istniałby kolor dostępny dla wierzchołka środkowego tej trójkwieźdy. Jeśli wszystkie trzy wierzchołki mają ten sam kolor, to po usunięciu ich z grafu G , składowa spójności składająca się z pozostałych wierzchołków trójkwieźdy jest oczywiście grafem dwudzielnym. Jeśli natomiast wierzchołki kończące nie są usuwane z grafu G_1 i mają ten sam kolor, wówczas z racji tego, że wszystkie ścieżki pomiędzy nimi mają parzystą długość, kolorowanie to da się rozszerzyć na pozostałe wierzchołki. Gdy wierzchołki kończące w trójkwieździe parzystej są pokolorowane dwoma kolorami, to wierzchołek środkowy musi otrzymać kolor inny niż te przypisane do wierzchołków kończących, aby nie spowodować konfliktu w 3-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$. Zatem zawsze z takiej trójkwieźdy usunięty zostanie przynajmniej jeden wierzchołek. Jeśli jest to wierzchołek środkowy, to dwukolorowanie wierzchołków kończących jest łatwo rozszerzalne na wszystkie wierzchołki ramion, które są rozłącznymi ścieżkami. Jeśli natomiast jest to jeden (bądź dwa) z wierzchołków kończących, wówczas kolorowanie jest rozszerzalne, gdyż ścieżka łącząca pozostałe dwa wierzchołki kończące ma długość parzystą, a wierzchołki te muszą mieć ten sam kolor w 3-kolorowaniu. Kolorowanie to da się rozszerzyć na ramię (bądź ramiona) bez wierzchołka kończącego nie powodując konfliktu z tą ścieżką.

Przypadek trójkwieźdy nieparzystej jest nieco bardziej skomplikowany. Niech

u, v, z będą wierzchołkami kończącymi tej trójkwiazdy takimi, że wierzchołki $\{u, v\}$ i $\{v, z\}$ są połączone krawędzią w grafie $S\check{S}\check{Z}$ (ścieżki między nimi mają nieparzystą długość). Niech x będzie wierzchołkiem środkowym (w grafie $S\check{S}\check{Z}$ istnieją więc także krawędzie $\{u, x\}$ i $\{x, z\}$). Założmy najpierw, że wszystkie wspomniane wierzchołki otrzymują jedynie dwa kolory w 3-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$. Wtedy wierzchołki u i z mają ten sam kolor, oraz wierzchołki v i x mają ten sam kolor, inny niż u i z . Ponieważ u i z są połączone ścieżką parzystej długości, więc można rozszerzyć dwukolorowanie na tę ścieżkę (wierzchołek x może zmienić kolor). Jeśli to dwukolorowanie zostanie rozszerzone także na wierzchołki ramienia zakończonego wierzchołkiem v , wówczas z racji tego, że ścieżki z v do u i z v do z mają nieparzystą długość, rozszerzenie to będzie poprawne tzn. wierzchołek v nie zmieni swojego koloru. Zatem niezależnie od tego, czy jakiś wierzchołek z tej trójkwiazdy zostanie usunięty, czy też nie, można rozszerzyć dwukolorowanie z wierzchołków kończących na wszystkie wierzchołki trójkwiazdy.

Założmy teraz, że wierzchołki u, v, z, x otrzymały wszystkie trzy kolory w 3-kolorowaniu grafu $S\check{S}\check{Z}$. Jeśli w takim przypadku w grafie G_1 brakuje dwóch wierzchołków tej trójkwiazdy, oznacza to, że usunięto wierzchołki v i x albo u i z . W obu przypadkach rozszerzenie kolorowania jest oczywiste, gdyż każde ramię posiada ograniczenie na kolor tylko na jednym ze swoich końców. Jeśli usunięto tylko jeden wierzchołek z tej trójkwiazdy, wówczas jest to wierzchołek x , v , albo jeden z wierzchołków u i z (przypadki symetryczne). Jeśli jest to wierzchołek x , wówczas kolorowanie z wierzchołków kończących łatwo się rozszerza na wierzchołki ramion. Jeśli jest to wierzchołek v , to wierzchołki u i z mają ten sam kolor. Gdyby tak nie było, wówczas wierzchołek x musiałby mieć trzeci kolor, ten sam co v , a wiadomo, że v ma kolor inny niż wszystkie pozostałe wierzchołki w tej trójkwiazdzie. Jeśli u i z są tego samego koloru, to wiedząc, że są połączone ścieżką parzystej długości wiadomo, że kolorowanie da się rozszerzyć na wszystkie wierzchołki trójkwiazdy. Jeśli wreszcie usunięto z trójkwiazdy wierzchołek u (lub z), to wiadomo też, że wierzchołki x i z (lub u) mają różne kolory, gdyż są połączone krawędzią w grafie $S\check{S}\check{Z}$. Ponieważ łączy je ścieżka o nieparzystej długości, więc kolorowanie daje się łatwo rozszerzyć na wszystkie wierzchołki trójkwiazdy. $\square$

Jak zostało pokazane w dowodzie Lematu 3.34 w grafie G_1 można wyznaczyć dwupodział w czasie liniowym. Wszystkie prawe narożniki pokolorowane kolorem 2 w grafie $S\check{S}\check{Z}$ znajdują się w jednym ze zbiorów dwupodziału, a wszystkie prawe narożniki pokolorowane kolorem 3 w grafie $S\check{S}\check{Z}$ znajdują się w drugim zbiorze dwupodziału grafu G_1 . Zatem wszystkim wierzchołkom z pierwszego ze zbioru dwupodziału można przypisać kolor 1_2 , a tym z drugiego ze zbiorów dwupodziału kolor 1_3 . Oczywiście nie zostanie spowodowany w ten sposób żaden

konflikt, a kolor otrzymają wszystkie wierzchołki oprócz tych pokolorowanych kolorem 1 w grafie $S\check{S}\check{Z}$.

W Krokach 4-6 każdy narożnik jest raz usuwany z grafu G , a dwa razy zostaje mu przydzielony kolor. Wierzchołki, które nie są narożnikami, otrzymują trzy nowe kolory, po jednym w każdym kroku. Zatem każdy wierzchołek otrzymuje w sumie 4 kolory, z których wszystkie są ze zdefiniowanej na początku palety barw oraz nie występują żadne konflikty.

□

W ten sposób zostało udowodnione Twierdzenie 3.31, a na mocy Faktu 3.6 również Wniosek 3.32.

Metoda z tego dowodu wydaje się wciąż rozwojowa i być może doprowadzi do całkowitego rozwiązania Hipotezy 1.35.

Bibliografia

- [1] R. L. Brooks *On colouring the nodes of a network*, Mathematical and Physical Sciences 37 (1941) 194-197
- [2] F.Y.L. Chin, Y. Zhang, H. Zhu : *A 1-local 13/9-competitive Algorithm for Multicoloring Hexagonal Graphs*, Algorithmica 54 (2009) 557-567
- [3] R. Diestel : *Graph theory II*, Springer-Verlag (2000)
- [4] Z. Dvořák, K. Kawarabayashi, R. Thomas : *Three-coloring triangle-free planar graphs in linear time*, Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA) (2009) 1176-1182
- [5] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer : *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoretical Computer Science 1 (1976) 237-267
- [6] W.K. Hale : *Frequency assignment: theory and applications*, Proceedings of the IEEE, vol 68(12) (1980) 1497-1514
- [7] M. Halldórsson, G. Kortsarz : *Sum multicoloring of graphs*, Journal of Algorithms 37 (2000) 422-450
- [8] F. Havet : *Channel assignment and multicoloring of the induced subgraphs of the triangular lattice*, Discrete Mathematics 233 (2001) 219-231
- [9] F. Havet, J. Žerovnik : *Finding a Five Bicolouring of a Triangle-free Subgraph of the Triangular Lattice*, Discrete Mathematics 244 (2002) 103-108
- [10] J. Janssen, K. Kilakos : *Adaptive multicolouring*, Combinatorica 20 (2000) 871-902
- [11] J. Janssen, K. Kilakos, O. Marcotte : *Fixed preference frequency allocation for cellular telephone systems*, Translations on Vehicular Technology 48 (1999) 533-541
- [12] J. Janssen, D. Krizanc, L. Narayanan, S. Shende : *Distributed online frequency assignment in cellular networks*, Journal of Algorithms 36 (2000) 119-151
- [13] T.R. Jensen, B. Toft : *Graph coloring problems*, A Wiley – Interscience Publication (1994)
- [14] S. Jordan, E. Schwabe : *Worst-case performance of cellular channel assignment policies*, Wireless Networks 2 (1996) 265-275
- [15] M. Kchikech, O. Togni : *Approximation algorithms for multicoloring planar graphs and power of square and triangular meshes*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (2006) 547-562
- [16] M. Kubale : *Modele i metody kolorowania grafów*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne (2002)
- [17] F. Kuhn : *Local multicoloring algorithms*, Proceedings of the 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2009)

- [18] M. Larsen, J. Propp, D. Ullman : *The fractional chromatic number of a graph and a construction of Mycielski*, Journal Graph Theory 19 (1995) 411-416
- [19] C. McDiarmid, B. Reed : *Channel assignment and weighted coloring*, Networks 36 (2000) 114-117
- [20] L. Narayanan : *Channel assignment and graph multicoloring*, Handbook of wireless networks and mobile computing (2002) 71-94
- [21] L. Narayanan, S.M. Shende : *Static frequency assignment in cellular networks*, Algorithmica 29 (2001) 396-409
- [22] L. Narayanan, S.M. Shende : *Corrigendum to Static Frequency Assignment in Cellular Networks*, Algorithmica 32 (2002) 697
- [23] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas : *The four-color theorem*, Journal of combinatorial theory 70 (1997) 2 - 44
- [24] H.G. Sandalidis, P. Stavroulakis : *Heuristic for solving fixed-channel assignment problem*, Handbook of Wireless Networks and Mobile Computing (2002) 51 - 70
- [25] I. Sau, P. Šparl, J. Žerovnik : *$7/6$ -approximation Algorithm for Multicoloring Triangle-free Hexagonal Graphs*, wysłane do publikacji
- [26] K.S. Sudeep, S. Vishwanathan : *A technique for multicoloring triangle-free hexagonal graphs*, Discrete Mathematics 300 (2005) 256-259
- [27] P. Šparl, S. Ubeda, J. Žerovnik : *Upper bounds for the span of frequency plans in cellular networks*, International Journal of Applied Mathematics 9(2) (2002) 115-139
- [28] P. Šparl, R. Witkowski, J. Žerovnik : *$9/8$ -approximation algorithm for multicoloring a sub-class of hexagonal graphs*, w trakcie opracowania
- [29] P. Šparl, R. Witkowski, J. Žerovnik : *Proof of a 1-local $7/5$ -competitive Algorithm for Multicoloring Hexagonal Graphs*, wysłane do publikacji
- [30] P. Šparl, J. Žerovnik : *2-local $4/3$ -competitive Algorithm for Multicoloring Hexagonal Graphs*, Journal of Algorithms 55 (2005) 29-41
- [31] P. Šparl, J. Žerovnik : *2-local $5/4$ -competitive algorithm for multicoloring triangle-free hexagonal graphs*, Information Processing Letters 90 (2004) 239-246
- [32] P. Šparl, J. Žerovnik : *2-local $7/6$ -competitive algorithm for multicoloring a sub-class of hexagonal graphs*, przyjęte w International Journal of Computer Mathematics
- [33] P. Šparl, J. Žerovnik : *Homomorphisms of hexagonal graphs to odd cycles*, Discrete Mathematics 283 (2004) 273-277
- [34] R. Witkowski : *Multikolorowanie grafów*, X Międzynarodowe Warsztaty Młodych Matematyków (2007) 206-218
- [35] R. Witkowski : *Algorytmy multikolorowania grafów w zagadnieniach przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych*, praca magisterska na kierunku informatyka, Wydział Matematyki i Informatyki, UAM (2008)
- [36] R. Witkowski : *A 1-local $17/12$ -competitive Algorithm for Multicoloring Hexagonal Graphs*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5699/2009 (2009) 346-356
- [37] R. Witkowski : *A 1-local $4/3$ -competitive Algorithm for Multicoloring Subclass of Hexagonal Graphs*, wysłane do publikacji

- [38] R. Witkowski, J. Žerovnik : *A Linear Time Algorithm for $7 - [3]$ -coloring Triangle-free Hexagonal Graphs*, wysłane do publikacji
- [39] R. Witkowski, J. Žerovnik : *A 1-local $7/5$ -competitive Algorithm for Multicoloring Hexagonal Graphs*, przyjęte na konferencję ISCO 2010
- [40] J. Žerovnik : *A distributed $6/5$ -competitive algorithm for multicoloring triangle-free hexagonal graphs*, International Journal of Pure and Applied Mathematics 23 (2005) 141-156