Kinga Kolczyńska-Przybycień

Heurystyczne metody nauczania matematyki: eksperymentalna weryfikacja autorskiego programu rozwijania zdolności i umiejętności matematycznych uczniów w wieku 13-15 lat

Promotor pracy:

prof. UAM dr hab. Michał Klichowski

Poznań, 2021.

Składam serdeczne podziękowania

Panu Prof. dr hab. Michałowi Klichowskiemu

za życzliwość, opiekę i cenne wskazówki

merytoryczne w trakcie pisania pracy

a także za poświęcony czas, wsparcie i pomoc.

Spis treści

WSTĘP

W dzisiejszym świecie trudno funkcjonować, szczególnie młodym ludziom bez znajomości podstawowych zasad logiki a w konsekwencji i matematyki, gdyż większość czynności wykonywana jest drogą elektroniczną, za pomocą komputerów i innych urządzeń cyfrowych, których obsługa w mniejszym lub większym stopniu wykorzystuje te zasady. Co więcej m.in. ze względu na ogromne użycie w całej nauce maszyn cyfrowych, większość dziedzin rozwija użycie matematycznego języka do opisu zjawisk, które bada, gdyż jest to niezwykle wygodne i użyteczne. Chociażby z tych względów nie trzeba nikogo przekonywać, jak ważne jest rozwijanie umiejętności i zdolności matematycznych uczniów na każdym etapie edukacji.

Przez 11 lat swojej pracy dydaktycznej skupiłam głównie uwagę na pracy z uczniem zdolnym i to było myślą przewodnią wszystkich moich działań. W trakcie mojej pracy zarówno w gimnazjum, jak i szkole podstawowej zajmowałam się uczeniem matematyki młodzieży w wieku 13-16 lat. Wieloletnie doświadczenie, poczynione obserwacje, przeprowadzone badania, innowacje a przede wszystkim ich konsekwencje, którymi w szczególności są osiągnięcia moich uczniów dały podstawę do napisania tej rozprawy.

Postaram się w niej pomóc zrozumieć, czym jest matematyka i jak skutecznie uczyć matematyki, by nie nauczać odtwarzania algorytmów na potrzeby schematycznych zadań egzaminacyjnych. Postaram się także odpowiedzieć na pytania, jak zaszczepiać w uczniach matematyczne pasje i jak rozwijać ich zainteresowania i motywację a także jak kształcić uczniów myślących, pomysłowych i twórczych. Postaram się również pokazać, jak kształcić kluczowe dla matematyki umiejętności: myślenia logicznego, precyzyjnego formułowania myśli i argumentowania a także posługiwania się technikami algebraicznymi i dostrzegania geometrycznych zależności.

Podjęte badania będą głosem w dyskusji na temat profilowania klas już na pewnym etapie kształcenia w szkole podstawowej. Uzyskane wyniki powinny wyjaśnić, czy praca z uczniami klas profilowanych według programu autorskiego może w optymalny sposób rozwinąć potencjał matematyczny i jakie cechy winien posiadać nauczyciel takich uczniów. Prezentowane w niej pomysły mogą również okazać się pomocne przy tworzeniu warunków edukacyjnych pozwalających wyłaniać, wspierać i rozwijać uczniów zdolnych i utalentowanych matematycznie. Można próbować zaszczepić je na własnym gruncie, adaptując je do swoich potrzeb.

W niniejszej dysertacji przedstawiono rozważania dotyczące matematyki jako nauki, teoretycznej wiedzy z zakresu edukacji matematycznej realizowanej na drugim etapie nauczania, jak również kształcenia nauczycieli matematyki. Szczególne miejsce poświęcone zostało uzdolnieniom matematycznym uczniów, jak również heurystycznym metodom nauczania matematyki i rozwiązywania zadań, które autorka tego opracowania uznaje za szczególnie wartościowe. Wyeksponowano także wybitne postacie matematyków, którzy szczególnie wyróżnili się w kształceniu uczniów zdolnych matematycznie, jak również ośrodki, które wspierają rozwój młodych zdolnych. W rozprawie zaprezentowano także wyniki badań własnych dotyczących wpływu heurystycznych metod nauczania matematyki w oparciu o autorski program na poziom zdolności i umiejętności matematycznych uczniów klas siódmych szkoły podstawowej.

Pierwszy rozdział niniejszej dysertacji wprowadza w tematykę matematyki jako nauki. Przedstawiono w nim zarówno krótką refleksję nad jej istotą, jak również zarys historii matematyki w różnych kulturach i okresach. Zdefiniowano pojęcie matematyka, ukazano współczesne nurty w filozofii matematyki a także ujęcie tej nauki jako sztuki. Celem tego rozdziału jest uświadomienie czytelnikowi na czym matematyka „polega", jak dynamicznie rozwijała się w kolejnych epokach po dzień dzisiejszy i wskazanie, jak istotna jest ta świadomość dla właściwego kształcenia matematycznego uczniów i rozwijania zdolności matematycznych.

Drugi rozdział rozprawy zawiera informacje dotyczące edukacji matematycznej klas IV-VIII oraz opis podstaw teoretycznych nauczania matematyki na tym poziomie. W dalszej kolejności określono cele oraz zadania edukacji matematycznej w odniesieniu do nauczania matematyki w klasach IV-VIII. Wiedza ta jest niezbędna dla właściwej pracy nauczyciela matematyki tego etapu edukacji, jak również dla autorów własnych programów nauczania matematyki w szkole podstawowej. Zwieńczenie rozdziału stanowią przedstawione w nim heurystyczne oraz problemowe metody nauczania matematyki oraz heurystyczne metody rozwiązywania zadań, ze szczególnym zaakcentowaniem heurystycznej koncepcji nauczania matematyki G.Polyi, które obok autorskiego programu nauczania matematyki stały się punktem wyjścia przy planowanych w ramach pracy badaniach. Stanowią więc one jeden z najistotniejszych elementów empirycznej części tejże dysertacji, gdyż są one czynnikiem eksperymentalnym wprowadzanym do edukacji matematycznej siódmoklasistów- zmienną niezależną główną badań zrealizowanych za pomocą metody eksperymentu pedagogicznego.

Trzeci rozdział dysertacji dotyczy zagadnienia uzdolnień matematycznych, których rozwijanie stanowi nadrzędny cel autorskiego programu nauczania matematyki. W rozdziale tym dokonano analizy struktury uzdolnień i zdolności matematycznych, podjęto próbę zdefiniowania tego pojęcia a także opisano, w jaki sposób takowe uzdolnienia matematyczne można zidentyfikować. W kolejnej części rozdziału zdefiniowano pojęcia: talent matematyczny oraz geniusz matematyczny a także przedstawiono czynniki warunkujące istnienie uzdolnień i odpowiedziano na pytanie, czy uzdolnienia mogą być wrodzone. Zweryfikowano tym samym powszechnie pokutujący wśród ludzi pogląd, że uzdolnienia są wrodzone, i jedni uczniowie je posiadają a inni nie.

Czwarty rozdział niniejszej rozprawy dotyczy dawnego i obecnego kształcenia matematycznego nauczycieli. Podjęto w nim próbę odpowiedzi na pytanie, dlaczego kształcenie matematyczne w Polsce przynosi niskie efekty. W kolejnej jego części ukazano, jak rozwijał się zawód nauczyciela w ciągu dziejów oraz, jak trudno było go zdobyć. Dokonano przeglądu systemu kształcenia nauczycieli w okresie międzywojennym oraz przeglądu polskiego systemu kształcenia nauczycieli po roku 1972. Porównano drogę w dążeniu do uzyskania uprawnień nauczyciela dawniej i dziś a także ukazano przykładowy egzamin nauczycielski matematyka Antoniego Hoborskiego. Przedstawiono także nauczycieli matematyki w Polsce na podstawie raportu z badania TEDS-M. Celem tego rozdziału jest ukazanie wpływu kształcenia nauczycieli matematyki na ich kompetentność wykonywania przyszłej pracy zawodowej. I nie chodzi tu wcale o to, że im trudniej jest zdobyć nauczycielowi wykształcenie, tym lepsze będzie jego przygotowanie do pracy, tylko raczej o to, aby uświadomić przyszłym kandydatom, jak ważne są pewne cechy i czynniki w tym zawodzie, tak aby przyszły kandydat mógł w sposób świadomy podjąć decyzję, czy zostać nauczycielem, czy nie.

Piąty rozdział dotyczy wspierania uczniów zdolnych matematycznie. Na jego wstępie przedstawiono początki wspierania uczniów zdolnych. W kolejnych podrozdziałach pokazano, jak wygląda: opieka nad uczniem zdolnym w wybranych krajach i regionach, a także system edukacji w Polsce oraz przedstawiono obowiązujące Ustawy Oświatowe w Polsce wraz z rozwiązaniami organizacyjnymi wspierającymi pracę z uczniem uzdolnionym matematycznie w świetle obowiązujących przepisów w Polsce. W kolejnej jego części ukazano kompleksowe działania na rzecz uczniów zdolnych, jak również możliwości szkoły dotyczące pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi, rozumienie zdolności i uzdolnień oraz strategie ich rozpoznawania. Pokazano także, jak zaplanować pracę z takimi uczniami, adekwatną do ich możliwości, jak również wskazano zalecenia w pracy ze zdolnymi i uzdolnionymi, kierunki ich kształcenia i wychowania oraz znaczenie ich rozwoju i osiągnięć dla społeczności szkolnej. Kolejna jego część dotyczy kompetencji nauczycieli do pracy z uczniami uzdolnionymi i zdolnymi, jak również ich doskonalenia zawodowego. W końcowej jego części podano przykłady polskich szkół, ośrodków a także instytucji, które w szczególny sposób dbają o rozwój uczniów zdolnych. Celem tego rozdziału jest wskazanie możliwości, jakie ma nauczyciel i szkoła w rozwijaniu ucznia zdolnego a także pokazanie konkretnych przykładów ośrodków, szkół, które w sposób szczególny o taki rozwój dbają, osiągając w tej kwestii sukcesy.

Rozdział szósty niniejszej dysertacji w całości dotyczy wybitnych nauczycieli matematyki. Na początku rozdziału zaakcentowano pożądane postawy i cechy dobrego nauczyciela. W kolejnej jego części przedstawiono przykładowe sylwetki wybitnych nauczycieli matematyki na świecie, jak i w Polsce: Andrieja Nikołajewicza Kołmogorowa, Aleksandra Dobrzyckiego, Henryka Pawłowskiego, Wojciecha Guzickiego, Edwarda Tutaja, Waldemara Pompe oraz Barłomieja Bzdęgi, którzy w szczególny sposób zasłużyli się edukacji matematycznej. Celem tego rozdziału jest pokazanie, jak w pracy przedstawionych postaci ujawniają się właśnie te pożądane cechy dobrego nauczyciela.

W następnym, siódmym rozdziale niniejszej pracy zawarto podstawy metodologiczne badań własnych a w następujących po sobie podrozdziałach przedstawione zostały najważniejsze informacje dotyczące empirycznej części pracy. Na początku rozdziału zamieszczono charakterystykę planowanych badań wraz ze wskazanymi ich celami. W dalszej kolejności przedstawiono problemy badawcze wraz z hipotezami, a także metody, techniki i narzędzia badawcze wykorzystane do prowadzenia badań, zarówno dla badań eksperymentalnych, jak również obserwacji. Następnie dokonano opisu organizacji i przebiegu zrealizowanych badań. W ostatnim podrozdziale siódmego rozdziału zamieszczono charakterystykę terenu badań i populacji generalnej badań eksperymentalnych, jak również scharakteryzowano grupy badanych uczniów. Byli nimi uczniowie dwóch klas siódmych Szkoły Podstawowej nr 67 w Poznaniu.

Kolejny, ósmy rozdział zawiera analizę wyników badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego, który obejmował uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Jego pierwszy podrozdział zawiera wyniki uzyskane przez uczniów grupy eksperymentalnej GE i kontrolnej GK w preteście. W drugim podrozdziale sprawdzono równoważność tych grup. W kolejnym zawarto wyniki uzyskane w postteście przez badanych uczniów z grupy eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK. W następnych trzech podrozdziałach zamieszczono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu nauczania na umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych zadań arytmetycznych a także zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Ostatnia część rozdziału ósmego zawiera wyniki badań dotyczące zależności między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów.

W rozdziale dziewiątym przedstawiono analizę wyników badań realizowanych metodą obserwacji w grupie eksperymentalnej GE, grupie kontrolnej GK oraz w wybranych klasach gimnazjalnych. Jego pierwszy podrozdział dotyczy obserwacji pracy uczniów grup:

eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK, drugi obserwacji pracy uczniów zdolnych grup: eksperymentalnej GE, kontrolnej GK oraz wybranych klas gimnazjalnych. W trzecim podrozdziale dokonano analizy przypadku. W końcowym, czwartym podrozdziale niniejszego rozdziału opisano obserwacje rozwoju umiejętności matematycznych uczniów grup: eksperymentalnej GE, kontrolnej GK oraz wybranych klas gimnazjalnych

W ostatnim rozdziale zawarto wyniki końcowe. W pierwszym podrozdziale dokonano weryfikacji postawionych hipotez. W kolejnych dwóch przedstawiono wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego, jak również zrealizowanych metodą obserwacji i studium przypadku. W ostatnim podrozdziale tej rozprawy przedstawiono uogólnienia i wnioski dla praktyki pedagogicznej.

W tym miejscu pragnę serdecznie podziękować wszystkim osobom, dzięki którym stała się możliwa realizacja zaplanowanych w ramach niniejszej dysertacji badań. Serdeczne podziękowanie składam także opiekunowi naukowemu Szanownemu Panu Profesorowi UAM dr hab. Michałowi Klichowskiemu jak również Pani Profesor UAM dr hab. Hannie Krauze- Sikorskiej, których cenne wskazówki oraz wszelka pomoc, okazały się być ogromnym wsparciem w tracie powstawania niniejszej rozprawy.

1. Co to jest matematyka?

1.1. Powszechne postrzeganie matematyki a jej prawdziwa istota, etymologia słowa matematyka.

Analiza problematyki ucznia zdolnego, poprzedzona zostanie krótką refleksja nad istotą matematyki. Słowa wielkiego polskiego matematyka Hugona Dionizego Steinhausa, że „Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego, jak matematyka" świadczą, że w matematyce, jako nauce główny nacisk kładziony jest na rozumienie zależności, którymi kieruje się „świat matematyki" a pośrednio otaczająca nas rzeczywistość. W świadomości ludzkiej często przeważa błędne jej postrzeganie jako zalgorytmizowanej dyscypliny nauki, w której istotę stanowi odtwórczość i schematyzm. Bardzo często jest tylko potocznie rozumiana przez pryzmat doświadczeń szkolnych, czy zastosowań w życiu jako nauka o liczbach albo o figurach. Warto przyjrzeć się już samej etymologii słowa „matematyka", czyli μαθηματική [mathēmatikē], które to pochodzi od starogreckich słów μάθημα [máthēma] oraz μάθησις [máthēsis], oznaczających naukę, uczenie się, których źródłowy czasownik μανθάνω [manthánō] oznaczał przede wszystkim „uczę się przez rozmyślanie", w odróżnieniu od uczenia się przez doświadczenie (Kostecki, 2017).

Matematyka jest to nauka, która poszukuje związków lub ich braków pomiędzy obiektami, posługując się regułami logicznego rozumowania. Zatem niezwykle ważne w nauczaniu matematyki powinno być rozwijanie tegoż logicznego rozumowania i kształtowanie wyobraźni u uczniów. Często jednak z różnych przyczyn owe kształtowanie wyobraźni i rozwijanie logicznego rozumowania paradoksalnie spadają na ostatni plan. Jeden z największych matematyków w historii Stefan Banach wypowiedział następujące słowa:
„Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty,
matematyk wybitny – analogie między faktami,
zaś matematyk genialny – analogie między analogiami." Matematyka jest nauką wyjątkową i wymaga wyjątkowego traktowania. Od tego, jak uczone będzie matematyki dzisiejsze pokolenie zależeć będzie, ile osiągnie i jak sprawdzi się ono niemal w każdej dziedzinie wiedzy w przyszłości.

Jak to w każdej nauce jedną z najważniejszych kwestii filozoficznych stanowi problem, tego czym są obiekty, które ta nauka bada oraz jak i gdzie one istnieją. Trudno byłoby odpowiedzieć na pytania: o czym mówi matematyka, czym są obiekty, które się w niej rozważa i bada lub co stanowi przestrzeń matematyki jako nauki, nie biorąc pod uwagę aspektu historycznego. Bowiem przedmiot zainteresowania matematyków cały czas zmienia się w czasie. Czym innym interesowali się matematycy starożytnej Grecji, co innego natomiast stanowi przedmiot badań współczesnych matematyków (R. Murawski, 2004). Dlatego do głębszego zrozumienia, w dalszej części przedstawiony zostanie krótka historia matematyki.

1.2. Zarys historii matematyki w różnych kulturach i okresach.

Historia matematyki stanowi nierozłączną część historii ludzkości. Człowiek bowiem od zawsze posiadał zdolność rozróżniania liczby obiektów. Zwrócić należy jednak uwagę, że aż do okresu nowoczesności, w którym nastąpiła ogólnoświatowa dominacja aparatu pojęciowego kultury zachodnioeuropejskiej, mamy do czynienia nie z jedną, lecz z różnymi historiami matematyki, gdyż do tego czasu każda kultura posiadała swój system pojęć matematycznych, w ramach którego wyrażała i rozwiązywała problemy związane z istotnymi kwestiami danej kultury. Nowożytna ogólnoświatowa ekspansja kulturowa Europejczyków doprowadziła do dominacji tej kultury nad innymi A dynamiczny rozwój europejskiej matematyki, który jej towarzyszył począwszy od XVI i XVII wieku, przyczynił się do współczesnego kształtu matematyki – dyscypliny uprawianej w ten sam sposób, tymi samymi pojęciami, metodami i symbolami, niezależnie od miejsca. Cytowany przez R.P. Kosteckiego fragment rozdziału „O znaczeniu liczb” z w „Zmierzchu Zachodu” O. Spenglera (1917):

(...) Gdyby matematyka była zwykłą nauką w rodzaju astronomii czy mineralogii, moglibyśmy zdefiniować jej przedmiot. Otóż nie istnieje żadna matematyka — istnieją tylko matematyki. To, co nazywamy historią „matematyki” — owo rzekomo progresywne urzeczywistnianie jednego i niezmiennego ideału — jest w istocie, skoro tylko usuniemy złudną warstwę powierzchniową, mnogością zamkniętych w sobie, niezależnych procesów rozwojowych, powtarzającymi się narodzinami nowych i przyswajaniem sobie, przekształcaniem oraz wyzbywaniem się obcych światów form, czysto organicznym cyklem rozkwitania, dojrzewania, więdnięcia i umierania o określonym czasie trwania. Duch antyczny stworzył swą matematykę prawie z niczego; historycznie usposobiony duch Zachodu, posiadający już wyuczoną wiedzę starożytną — zewnętrznie, nie zaś wewnętrznie — musiał zdobyć własną matematykę przez pozorne zmienienie i ulepszenie, faktycznie jednak przez zniszczenie obcego mu z gruntu systemu euklidesowego. Jedno było dziełem Pitagorasa, drugie zaś — Kartezjusza. Oba te akty są w samej głębi identyczne. Pokrewieństwo mowy form danej matematyki z mową form wielkich sztuk pokrewnych nie ulega przeto żadnej wątpliwości. Usposobienie myśliciela i artysty jest nader odmienne, ale środki wyrazu ich świadomej działalności są wewnętrznie podobne. W geometrycznej analizie i rzutowej geometrii XVII wieku objawia się ten sam uduchowiony porządek nieskończonego świata, który prawdopodobnie powołał do życia, ogarnął i przeniknął ówczesną muzykę dzięki rozwiniętej z kunsztu basu cyfrowanego harmonice — tej geometrii przestrzeni tonów — jak również spokrewnione z nią malarstwo olejne dzięki znanej tylko Zachodowi zasadzie perspektywy: tej odczutej geometrii przestrzennego obrazu świata. Od Goethego pochodzi głęboka sentencja, że matematyk jest o tyle tylko doskonały, o ile odczuwa on w sobie piękno prawdy; można tu dostrzec, jak blisko tajemnica istoty liczby przylega do tajemnicy twórczości artystycznej. Matematyka jest więc także sztuką. Ma swoje style i okresy ich dominacji. Nie powinno się omawiać rozwoju wielkich sztuk, nie spojrzawszy przy tym — a z pewnością nie będzie to daremne spojrzenie — na ówczesną matematykę. Nigdy jeszcze nie przebadano szczegółów w ramach bardzo głębokich powiązań między przemianami teorii muzyki a analizą nieskończonościową, choć estetyka mogłaby więcej się od tego nauczyć niż od wszelkiej „psychologii”. Jeszcze bardziej pouczająca byłaby historia instrumentów muzycznych, gdyby zgłębiano w jej zakresie ostateczne duchowe podstawy zamierzonej barwy i efektu dźwięku. Wzmożone bowiem aż do poziomu tęsknoty pragnienie, by wytworzyć przestrzenną nieskończoność dźwięków, zrodziło już w gotyku — w przeciwieństwie do antycznej liry i fujarki (lira, kithara, aulos, syrinx) oraz arabskiej lutni — obie dominujące rodziny instrumentów klawiszowych (organy) i smyczkowych. Organy stały się, głównie w Niemczech, opanowującym przestrzeń osobnym instrumentem o olbrzymich rozmiarach, nie znajdującym równego sobie w całej historii muzyki. Monumentalne koncerty organowe Bacha i jego epoki są jako żywo analizą ogromnego i rozległego świata tonów.” ukazuje złożoność tego problemu. Przyjrzymy się teraz matematyce rozwijanej w ramach konkretnych kultur oraz historii kilku podstawowych problemów matematycznych opisanych przez (Kostecki, 2017).

1.2.1. Okres paleolityczny

Najstarszy znany obecnie zapis świadomości matematycznej to tzw. Kość z Lebombo (znaleziona na terenie obecnego Królestwa Suazi w Afryce Południowej), którą datujemy na 35 000 lat p. n. e. Kość ta zawiera 29 ściśle ułożonych kresek, wyrażających oznaczenia kalendarzowe, używane po dzisiejszy dzień przez klany buszmenów w Namibii. Przyglądając się okresom historycznym, możemy wyróżnić kilka dużych obszarów kulturowych które wykształciły swoje odrębne i jakościowo różne matematyki. Do najważniejszych z nich zaliczyć możemy: Mezopotamię, Egipt, Mezoameryka, Peru, Indie, Chiny, Grecję, średniowieczną Arabię i Persję, oraz nowożytną Europę. Ponadto również dzieje matematyki sprzęgają się silnie z historią kultury jak i z historią pisma, które to pojawia się niezależnie w Mezopotamii ok. 3500 lat p. n. e., w Egipcie ok. 3200 lat p. n. e., prawdopodobnie w Peru ok. 3000 lat p. n. e. w Chinach ok. 2600 lat p. n. e., w Indiach ok. 2000 lat p. n. e. i w Mezoameryce ok. 900 lat p. n. e. Wynalazek pisma zdecydowanie ułatwił prowadzenie matematycznych rachunków oraz w znaczny sposób przyspieszył rozwój myśli matematycznej w ramach poszczególnych kultur.

W historii matematyki wielką rolę odegrał również przepływ wiedzy pomiędzy kulturami. I tak nowożytna europejska matematyka powstała w oparciu o problemy i techniki matematyki greckiej oraz arabskiej, które to z kolei również wyniosły ważne idee odpowiednio: ta pierwsza z Egiptu i Mezopotamii, druga natomiast wiele zawdzięcza matematyce Indii oraz starożytnej Grecji. Matematyka indyjska z kolei wniosła pewien wkład do matematyki chińskiej. I tylko matematyka kultur amerykańskich rozwijała się całkiem oddzielnie. Największy wkład do współczesnej matematyki europejskiej wniosła matematyka starożytnej Grecji, średniowiecznej Arabii i Persji oraz Indii (Kostecki, 2017).

1.2.2. Mezopotamia.

Ze względu na fakt, że najliczniejsze źródła pochodzą z wykopalisk babilońskich, matematykę obszaru starożytnej Mezopotamii zazwyczaj nazywamy babilońską. Większość wykopanych tabliczek datuje się na okres 1800-1600 p. n. e. Dotyczą one między innymi takich zagadnień jak ułamki, równania kwadratowe i sześcienne, czy obliczanie liczb naturalnych spełniających twierdzenie Pitagorasa. Na jednej z tabliczek podane zostało przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Używany przez Babilończyków system liczbowy, to taki, którego podstawą jest liczba 60 (tzw. system sześćdziesiątkowy). To właśnie np. podział okręgu na 360 (= 6*60) stopni, a w konsekwencji podział godziny na 60 minut i minuty na 60 sekund, swoje początki ma właśnie w matematyce babilońskiej. To, dlaczego Babilończycy obrali za podstawę akurat 60, być może związane jest z przybliżoną liczbą dni w roku (6*60 = 360). Pozycyjność systemu liczbowego oznacza, że zapis liczb był prowadzony w kilku kolumnach, w systemie babilońskim, każda zawierała mnożnik kolejne potęgi 60, np. 374 = 6*601 + 14*600 = 360 + 14, natomiast we współczesnym zapisie matematycznym, analogicznym do tego, jego podstawą jest 10.

Na jednej z najbardziej znanych glinianych tabliczek, nazwanej Plimpton, która pochodzi z ok. 1800 p. n. e., (a to ponad tysiąc lat przed Pitagorasem), zapisane zostały obliczenia długości boków trójkątów, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa. Zapisano ją z prawa na lewo, w pierwszej kolumnie podano kolejne numery porządkowe, kolumna natomiast zawiera słowo „liczba", kolumna trzecia z kolei zaczyna się od słowa „długość", następnie wymienione są kolejne wartości długości jednej z przyprostokątnych. W kolumnie czwartej, która zaczyna się od słowa „przekątna", zapisane są kolejne wartości długości przeciwprostokątnej, ostatnia z kolumn zawiera wartości długości drugiej przyprostokątnej, obliczone zgodnie ze wzorem pitagorejskim, z dokładnością co najmniej do czwartego miejsca po przecinku. W okresie tym nie znano zera ani rozumianego jako liczby ani jako cyfry, wskutek czego ten sam napis mógł oznaczać zarówno 11, 601, 36001, jak i 36060. Dopiero około roku 400 p. n. e. za panowania Seleucydów na klinowych tabliczkach w zapisie liczb pojawia się symbol dwóch klinów, oznaczających nieobecność cyfry w danej pozycji (Kostecki, 2017).

1.2.3. Egipt

Najstarsze ślady egipskiej matematyki związane są z kalendarzem i sięgają już około 4800 lat p. n. e. Około 4200 lat p. n. e. Egipcjanie dysponowali już 365-dniowym kalendarzem: 12 miesięcy, które składały się z 30 dni + 5 dodatkowych dni. Około 3100 lat p. n. e., kiedy to rozmaite rolnicze kultury żyjące wzdłuż brzegów Nilu zostały zjednoczone przez Menesa, korzystanie z systemu liczb naturalnych było już w Egipcie rozwinięte, czego potwierdzenie stanowi znaleziony na królewskiej buławie zapis z tego czasu, określający liczbę zdobyczy na wojnie wygranej przez faraona Narmera, który był wnukiem Menesa: 120 000 więźniów, 400 000 wołów oraz 1 422 000 gęsi. Kolejnym co do wieku egipskim znaleziskiem matematycznym jest słynny Moskiewski papirus, który datowany jest na około 1850 r. p. n. e. Zawiera on kilka rozwiązanych problemów arytmetycznych i geometrycznych i stanowi fragment większego papirusu zawierającego co najmniej 60 takich problemów.

Egipska matematyka zajmowała się przede wszystkim liczeniem i nastawiona była głównie na pomiary i rachunki geometryczne, co różniło ją od matematyki greckiej, którą cechowało abstrakcyjne podejście. Wszelkie obliczenia przeprowadzane były przez Egipcjan w kontekście konkretnych zastosowań, gdyż zainteresowani byli oni wyłącznie praktycznymi zastosowaniami matematyki. Nie było w nich miejsca na aksjomaty lub dowody, a więc również teoretyzowanie. Egipska matematyka to przede wszystkim zbiór technik rachunkowych stosowanych do konkretnych problemów, w szczególności do obliczania powierzchni oraz objętości rozmaitych figur: trójkątów, prostokątów, trapezów, prostopadłościanów czy piramid a zainteresowanie mierzeniem było związane głównie z pomiarami gruntu, gdyż częste wylewy Nilu powodowały konieczność ponownych podziałów terenu. Egipcjanie nie posiadali znaków oznaczających dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie, dlatego wszelkie operacje matematyczne opisywali słownie. Jedynym oznaczeniem dodatkowym z jakiego korzystali był system zapisu ułamków o liczniku równym jeden, polegający na umieszczeniu nad daną liczbą znaku przypominającego palące się cygaro, z wyjątkiem stosowanego odrębnie znaku oznaczający ułamek 2 /3. Egipcjanie potrafili także rozwiązywać niektóre układy dwóch równań z dwoma niewiadomymi, w tzw. Berlińskim papirusie, który datowany jest na około 1300-1200 p. n. e., widnieje zapis zadania: „Powierzchnia kwadratu 100 łokci kwadratowych jest równa powierzchni dwóch mniejszych kwadratów, gdzie powierzchnia jednego z nich jest równa ½ + ¼ drugiego. Ile wynosi długość brzegów tych dwóch nieznanych kwadratów?”, równoważnego współczesnemu układowi równań x 2 + y2 = 100 oraz x = ¾y. Z kolei na tzw. Papirusie Rhinda, który datowany jest na ok. 1650 r. p. n. e. wynika, że Egipcjanie znali także przybliżenie liczby π równe 256/81 = 3 + 1 /9 + 1 /27 + 1 /81 ≈ 3.1605, otrzymane przez przybliżenie okręgu przez ośmiokąt foremny.

Bardzo istotną rolę w sakralnych aspektach życia Egipcjan pełniły liczby i proporcje. Przykładem może być zastosowanie przez nich przy budowie piramid tzw. ciągu Fibonacciego, w którym to kolejne wyrazy powstają przez dodanie do siebie dwóch poprzednich wyrazów, przy czym dwoma początkowymi wyrazami są dwie jedynki. Wyrażone w egipskich królewskich łokciach długości ścian świątyni pogrzebowej położonej przy piramidzie Khafra, która datowana jest na około 2500 lat p. n. e. tworzą ciąg Fibbonacciego. Także budowle sakralne w starożytnym Egipcie były budowane z ogromną dokładnością. Przykładowo, w datowanej na około 2500 lat p. n. e. piramidzie Khufu, znanej współcześnie jako piramida Cheopsa sumy długości krawędzi podstawy do jej wysokości wynosiły w przybliżeniu 6.2857, co podzielone przez 2 daje 3.14285, co stanowi przybliżenie liczby π z dokładnością większą niż 0.05% i jest znacznie lepsze niż to z papirusu Rhinda. Egipcjanie nie znali również zera ani jako liczby, ani jako cyfry (Kostecki, 2017).

1.2.4. Mezoameryka.

Współczesne informacje na temat mezoamerykańskiej matematyki dotyczy głównie kultury Majów, choć z pewnością część ich wiedzy matematycznej pochodziło od Olmeków, sam system liczbowy i kalendarz Azteków był uproszczeniem systemu Majów. Ze względu na masowe spalenie większości mezoamerykańskich źródeł pisanych przez hiszpańskich księży w 1521 roku, jak również z powodu zwyczaju palenia przez Azteków rękopisów podbijanych ludów nasza wiedza na temat Majów jest dość uboga. Główne źródło wiedzy o matematyce Majów stanowi datowany na ok. 1200 r. n. e. tzw. Kodeks Dreźnieński, który między innymi zawiera obliczenia astronomiczne cykli Słońca, Księżyca i Wenus o zdumiewającej dokładności. Obliczono w nim czas obrotu Ziemi wokół Słońca jako 365.242 dni, gdzie współcześnie mierzona wartość wynosi 365.242198 dni, ponadto bardzo dokładnie obliczyli czas trwania miesiąca księżycowego. I tak np. znaleziska z Copán podają, że 149 miesięcy księżycowych trwa 4400 dni, co daje długość miesiąca księżycowego równą 29.5302 dni, znaleziska z Palenque z kolei podają, że 81 miesięcy księżycowych trwa 2392 dni, co daje średnio 29.5308 dni, gdzie współcześnie mierzona długość miesiąca księżycowego wynosi 29.53059 dni, co różni się od wyniku podanego przez Majów tylko o 0.001%.

Wcześniejszymi świadectwami matematycznej wiedzy Majów są zapisane oznaczenia kalendarzowe. posiadali oni dwa kalendarze, jeden odziedziczony po Olmekach kalendarz rytualny, tzolkin, który powstał co najmniej ok. 700 p. n. e., składający się z 13 miesięcy po 20 dni każdy oraz zwyczajny kalendarz składający się z 18 miesięcy po 20 dni oraz 5 dodatkowych, wyjątkowo niepomyślnych dni. Używany przez Majów system liczbowy był oparty na liczbie 20 i zbliżony do systemu pozycyjnego. Przed 32 r. p. n. e. odkryli oni cyfrę zero i włączyli ją do swojego systemu liczbowego. Umieli wykonywać mnożenie, ale podobnie do Egipcjan nie mieli żadnego oznaczenia na to działanie. Nie używali dzielenia oraz ułamków. Ich arytmetyka zajmowała się nie tylko wartościami liczb naturalnych, ale również ich znaczeniem symbolicznym. I tak np. liczba 3 była związana z ogniskiem domowym, 4 z czterema kierunkami świata, 400 z nieskończonością itp. (Kostecki, 2017).

1.2.5. Peru.

Niewiele posiadamy informacji odnośnie kultury Peru, w tym także kultury Inków. Wiadomo, że systemem pisma używanym w Peru było pismo węzełkowe kipu, w którym informacja przechowywana była w sposobie zawiązania węzełków, kolorze nici, ilości węzłów i ich odległości od siebie. Niestety jednak większość kipu zostało zniszczone przez hiszpańskich konkwistadorów w XVI wieku i przetrwało tylko około 600 kipu, z których najstarsze datowane są na ok. 650 n. e. Bardzo istotnym było więc odnalezienie w 2005 roku w wykopaliskach Caral kipu datowanego na ok. 3000 lat p. n. e. Jednak do dzisiejszego dnia nie udało się rozszyfrować pełnego zapisu kipu, choć wiele lat trwały intensywne badania. Najbardziej prawdopodobna hipoteza stwierdza, że kipu jest oparte przede wszystkim na dziesiątkowym systemie liczbowym, przy czym kolejne cyfry danej liczby zadane są przez liczbę węzłów na kolejnych pozycjach na danym sznurku, zaś zero określone jest przez brak węzła. Potwierdzeniem tej hipotezy jest znaleziona sekwencja kipu, na których kolejne sznurki są wynikiem dodawania poprzednich. Nadal nie jest jednak jasne, jakie inne operacje liczbowe poza dodawaniem oraz jakie inne nie-liczbowe treści są zawarte w kipu (Kostecki, 2017).

1.2.6. Indie.

W Indiach matematykę stosowano również do praktycznego liczenia i mierzenia, ale przede wszystkim traktowano ją jako narzędzie służące do obserwacji i przewidywań astronomicznych. Jej historię można podzielić na cztery okresy. Pierwszy z nich to okres starożytny, ok. XXIV – ok. III w. p. n. e., okres kultury doliny Indusu i kultury wedyjskiej. Odnalezione wykopaliska: odważniki tworzą zbiór wag o charakterze dziesiętnym (kolejno 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, i 500 jednostek) a także kilka skal do pomiaru długości, m.in. skala dziesiętna której podstawową jednostką było ok. 3.35 cm, są świadectwem dysponowania przez kulturę żyjącą w dolinie Indusu jednorodnym systemem miar i wag, natomiast dokonane pomiary odkopanych budowli pokazują, że miary te były precyzyjnie stosowane podczas konstrukcji budowli. W latach 1500-800 p. n. e. w dolinie Indusu powstaje nowa kultura, której centralnym dziełem są Wedy, czyli teksty o charakterze religijnym, zapisane wedyjskim sanskrytem. Z którymi to związany jest dalszy rozwój matematyki w Indiach. Sulbasutry, czyli przypisy do Wed, zawierały praktyczne obliczenia matematyczne potrzebne do konstrukcji ołtarzy. I tak, znajdują się w nich między innymi określenia wartości liczby π równe 25/8, 900/289 i 1156/361.Przy okazji obliczeń astronomicznych natomiast wartość liczby π podana jest jako 339/108. Pojawiają się tam również wszystkie cztery operacje arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, jak również termin ganita, który oznaczał „naukę o liczeniu” oraz system notacji liczb przy pomocy odpowiedników cyfr od 1 do 9.

Prawdopodobnie indyjski system liczbowy rozwinął się pod wpływem chińskich pałeczek do liczenia, które układano w systemie dziesiętnym oraz pod wpływem pozycyjnego systemu Mezopotamii. Tak jak w późnym Babilonie, tak również w późnej starożytności Indii, zaczęto zostawiać puste miejsce przy zapisie liczb zawierających zero. W pismach wedyjskich mamy także do czynienia z konkretnymi obliczeniami, które mogą wskazywać, że w kulturze wedyjskiej znano również twierdzenie Pitagorasa. W pracach astronomicznych zwanych siddhantami, pod koniec okresu wedyjskiego, w matematyce indyjskiej pojawiła się po raz pierwszy idea funkcji trygonometrycznych. Drugim z okresów, to okres wczesnego średniowiecza, przypadający na ok. 300 p. n. e. – ok. 400 n. e. Jest to czas matematyki dżinistów i okres pre-klasyczny, który cechował się upadkiem religii braministycznej i rozwojem dżinizmu oraz buddyzmu. Szczególnie istotne miejsce w rozwoju matematyki hinduskiej w tym okresie ma dżinizm. Jedną z podstawowych umiejętności kapłanów dżinizmu, wymaganą z przyczyn religijnych była znajomość sankhyany, tzn. nauki o liczbach składającej się z arytmetyki i astronomii.Bardzo ważną religijną rolę w dżinizmie odgrywały wielkie liczby, np. rozważano okresy czasu shirsa prahelika składające się z 756 * 1011 * 8400000028 dni. lub określono liczbę ludzi żyjących kiedykolwiek na świecie jako równą 296. Wszystkie te liczby klasyfikowano jako numerowalne, nienumerowalne i nieskończone. W pracach dżinistów widoczne jest rozróżnianie przez nich pięciu różnych rodzajów nieskończoności: nieskończoność w jednym i dwóch kierunkach, nieskończoność powierzchni, nieskończoność wszędzie i nieskończoność cykliczna, co wiąże się bezpośrednio z dżinistycznymi koncepcjami religijnymi i kosmologicznymi. Rozwinęli oni również działania na ułamkach a jako prawdopodobnie pierwsi na świecie odkryli równania czwartego stopnia. Jednak ich prace nie są jedynymi śladami matematyki tej epoki.

Bardzo istotnym znaleziskiem matematycznym z okresu wczesnego indyjskiego średniowiecza jest tzw. manuskrypt z Bakhshali, datowany na ok. 200 p. n. e. – ok. 200 n. e., zawierający między innymi obliczenia równań liniowych z pięcioma niewiadomymi, metody przybliżonego obliczania pierwiastków kwadratowych z dowolnych liczb dodatnich oraz liczby ujemne. Pojawia się w nim po raz pierwszy zero, zapisywane jako kropka a w późniejszych tekstach oznaczane już jako owal. Z pewnością również w 1 wieku n. e. w Indiach był już dobrze rozwinięty system zapisu przy pomocy liczb od 1 do 9 będący bezpośrednim protoplastą obecnego zapisu liczbowego.

Kolejny, to okres klasyczny, tzw. środkowe średniowiecze, datowany na ok. ok. 400 n. e. – ok. 1200 n. e. Prace matematyków okresu klasycznego i poruszane w nich problemy w większości wypadków pozostawały w związku z astronomią. Pierwszym znanym matematykiem tego okresu był Aryabhata (476-550). Dokonał on w poetyckim astronomicznym traktacie Aryabhatiya podsumowania całej wiedzy dżinistycznej matematyki i tak jak w większości całej indyjskiej matematyki wszystkich epok nie występują w tej pracy dowody, ani nawet sama idea dowodu matematycznego a tematami poruszanymi w tym dziele były przede wszystkim: arytmetyka, trygonometria oraz zagadnienia związane z pierwiastkowaniem i równaniami kwadratowymi. Podał także rozwiązanie równania $ax - by = c$ oraz wartość $\pi = 3.1416$, zaznaczając, że wartość ta jest tylko przybliżeniem. Aryabhata zaproponował również, że dzienny obrót niebios wynika z obrotu Ziemi wokół swej osi. Aryabhatiya stała się punktem odniesienia wielu hinduskich prac matematycznych przez następne tysiąc lat.

Drugim wielkim indyjskim matematykiem by Brahmagupta (598-670) Był on autorem następujących dzieł: Brahmasphutasiddhanta oraz Khandakhayaka, które wywarły wielki wpływ na późniejszą matematykę Indii i Arabii, a w pewnym stopniu również Chin. Brahmagupta posiadł zrozumienie systemu liczbowego, działań na ułamkach oraz na liczbach ujemnych większe niż ktokolwiek przed nim. Wprowadził on także nowe techniki mnożenia i operacje z użyciem zera. Prawdopodobnie był pierwszym, który próbował dzielić przez zero, próbując dowieść, że $n/0 = \infty$. Podał nowe metody liczenia pierwiastków kwadratowych i rozwiązywania równań kwadratowych, a także wzór na pole czworokąta wpisanego w okrąg. Tematyka tych dzieł wywarła wpływ na bujny rozwój matematyki w tych kierunkach. I tak na przykład około roku 850 Mahavira napisał tekst Ganitasar Sangraha. Jest to pierwsze dzieło opisujące arytmetykę w formie zbliżonej do tej, jakiej używamy dzisiaj. Jest również jedynym matematykiem indyjskim, który wspomina o elipsie.

Za największego hinduskiego matematyka uznawany jest Bhăskara Aćarja, żyjący w latach 1114-1185, autor poetyckiego dzieła Siddhantaśiromani, będącego kompendium wiedzy matematycznej, astronomicznej i astrologicznej, składającego się z kilku części. Część tego dzieła poświęcona była arytmetyce i nazywała się Lilawati a część algebrze i nazywała się Bidźaganita. W pierwszej z części korzysta się z definiowania pojęć matematycznych, opisane są także własności zera, systematyczne reguły arytmetyczne oraz ciągi arytmetyczne i geometryczne. Znajduje się tam także oszacowanie liczby $\pi \approx 3{,}141666$. Bhăskara Aćarja rozwiązał także równanie 61x2 = y2 + 1, otrzymując spektakularny wynik x = 226 153 980, y = 1 766 319 049. Następnym z okresów, zwany późnym średniowieczem jest okres islamski, datowany na 1200 n.e.- 1596 n.e. Najbardziej znaną postacią hinduskiej matematyki z tego okresu jest Madhawa, żyjący w latach 1340-1425. Znany jest on przede wszystkim z tego, że wymyślił rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg, które w Europie zostało ponownie odkryte w XVIII wieku i zwane jest dzisiaj szeregiem Taylora. Podał on także rozwinięcie liczby π w nieskończony szereg, poprawnej aż do 13 miejsca po przecinku. Finalnym sukcesem tego okresu było dzieło Yuktibhasa Jyestadevy (1500-1575), w którym pojawia się indyjska wersja rachunku różniczkowo-całkowego, ponad sto lat przed Newtonem i Leibnizem kipu (Kostecki, 2017).

1.2.7. Chiny.

Początki historii chińskiej matematyki przypadają na ok. 1400 lat p. n. e. Odkryto bowiem wiele pochodzących z tego okresu żółwiowych skorup oraz kości osłów pokrytych pismem, tzw. Jiaguwen. Służyły one do zapisywania przepowiedni i rytuałów. Pismo to zawierało dobrze rozwinięty system liczbowy, zbliżony do dziesiętnego, jednak ze względu na fakt, że nie była obecna w nim cyfra zero, nie jest on prawdziwym systemem dziesiętnym.W Chinach około IV wieku p. n. e. do powszechnego użycia weszły pałeczki do liczenia, oparte na zbliżonym do dziesiętnego zapisie, wtedy również pojawiała się idea cyfry zero, pod postacią pustego pola. Bardzo długo pałeczki chińskie służyły jako narzędzie rachunkowe. Dopiero w późniejszym okresie były wypierane przez wynalezione przez Chińczyków liczydła. W Chinach, w odróżnieniu od Grecji czy Europy nowożytnej nieobecne było aksjomatyczne i abstrakcyjne rozwijanie matematyki. Chińskie podejście do matematyki było bowiem bardzo zwięzłe i praktyczne a chińska matematyka związana była przede wszystkim z kwestiami kalendarza, handlu, pomiaru ziemi, własności, architektury, podatków oraz astronomii. Warto podkreślić, że już około 400 lat p. n. e. uczono się w Chinach na pamięć tabliczki mnożenia 9 x 9. W chińskiej matematyce ważną rolę odgrywały rozmaite zagadki i łamigłówki oraz kwadraty magiczne.

Z około III w. p. n. e. pochodzi szczególny przypadek słynnego chińskiego problemu reszty: „Mamy pewną liczbę rzeczy, ale nie wiemy, ile dokładnie. Jeśli policzymy je po trzy, pozostaną dwie. Jeśli policzymy je po pięć, pozostaną trzy. Jeśli policzymy je po siedem, pozostaną dwie. Ile rzeczy mamy?”.Spalenie wszystkich książek w Chinach z rozkazu cesarza Shin Huang Ti w 213 r. p. n. e. spowodowało wielką lukę w naszej wiedzy o chińskiej matematyce tego czasu. Najstarszym posiadanym przez nas chińskim tekstem matematycznym jest więc, znaleziona niedaleko Jiangling, zapisana na paskach z bambusa Suàn shù shū („Książka o liczeniu”) pochodząca z około 180 r. p. n. e. Zawiera ona między innymi przybliżone metody obliczania ułamków, pierwiastków kwadratowych, oraz pól prostych figur i korzysta się w niej z założenia, że $\pi = 3$. Zhoubi suanjing to najstarszy kompletny tekst, który pochodzi z okresu między 100 r. p. n. e. a 100 r. n. e. i zawiera tzw. zasadę Gougu, czyli twierdzenie Pitagorasa a także obliczenia z ułamkami o wspólnych mianownikach. Natomiast najsłynniejszą chińską matematyczną książką wszechczasów jest Jiǔ zhāng suàn shù, co w tłumaczeniu oznacza „Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej”. Dzieło to powstało pomiędzy 200 r. p. n. e. a 100 r. p. n. e. i stanowi kompendium ówczesnej wiedzy matematycznej. Zdominowało ono chińską matematykę aż do okresu kontaktu z zachodnią matematyką około 1600 r. n. e. W dziewięciu rozdziałach zawartych zostało 246 zadań z odpowiedziami, lecz bez podanego sposobu rozwiązywania. W książce tej poruszone są także takie zagadnienia jak proporcje, ułamki, liczby ujemne, dokładne i przybliżone obliczanie objętości i powierzchni różnych figur, m. in. prostokąta, trójkąta, trapezu, koła, fragmentów koła i kuli przy założeniu, że $\pi = 3$, metody rozwiązywania równań kwadratowych oraz układów wielu równań liniowych, a także pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia, gdzie w Europie pierwiastki trzeciego stopnia pojawiły się dopiero w XVI wieku, czyli około 1600 lat później.

Kolejną bardzo ważną postacią dla matematyki chińskiej był Zu Chongzi, który prowadził dokładne obserwacje astronomiczne w celu wprowadzenia nowego kalendarza, poprawił te obliczenia podając wartość $3.1415926 < \pi < 3.1415927$, jednocześnie rekomendował używanie liczb 355/113 lub 22/7 w rachunkach o mniejszej dokładności. Xiahou Yang żyjący w V wieku n. e. wprowadził zapis liczb w systemie dziesiętnym korzystając z dodatnich i ujemnych potęg dziesiątki. Z kolei młodszy od niego o 30 lat Zhang Quijian podał przykłady sumowania ciągu liczbowego.

Wskutek działalności buddyjskich misjonarzy oraz ożywienia wymiany handlowej, od połowy wieku VI n. e. w Chinach, pojawiają się tłumaczenia tekstów indyjskich, np. prac Brahmagupty. Pojawia się również podział kąta na 360 stopni oraz tablica wartości sinusa kątów od 0 do 90 stopni. Okres 700- 1300 n. e. był czasem względnej stagnacji w chińskiej matematyce. W tym czasie, jednym z nielicznych, ważnych wydarzeń matematycznych w było wprowadzenie w XI w. przez Jia Xiana trójkąta Pascala, dokonane pięćset lat przed Pascalem oraz powiązane z nim metody liczenia pierwiastków dowolnego stopnia przy pomocy liczydła.Szczytowym okresem rozwoju chińskiej matematyki był XIII wiek, czyli okres podboju Chin przez Czyngis-chana, w którym to czasie mamy do czynienia z co najmniej ośmioma ważnymi autorami oraz z przeszło piętnastoma ważnymi tekstami matematycznymi. I tak prawdopodobnie najsłynniejszą postacią z tego okresu był żyjący w latach 1202-1261, Qin Jiushao, autor książki Shushu jiuzhang, czyli tzw. „Traktatu matematycznego w dziewięciu częściach”. W dziele tym zajmował się on kalendarzem, chińskim problemem reszty, obliczaniem pól figur, badaniem trójkątów prostokątnych i dużą liczbą matematycznych, często wysoce skomplikowanych, problemów życia praktycznego, np. problemem „pomiaru okrągłego fortu z odległości”, który wymagał rozwiązania równania dziesiątego stopnia, inny zaś problem tzw. „naprawa fortu i ustawianie podatków” ma podane

180 możliwych rozwiązań. W tym samym wieku tworzyli także Li Chi, który badał wpisywanie i opisywanie okręgu na trójkącie, Guo Shoujing, który badał interpolację wyższych rzędów, Yang Hui, który opisał mnożenie, dzielenie, pierwiastkowanie, równania kwadratowe, ciągi, obliczenia powierzchni różnych figur, a także badał magiczne kwadraty aż do rozmiarów 10 x 10, oraz Zhu Shijiei, który używał cyfry zero. Początek wieku XIV przynosi chińskiej matematyce okres stopniowego upadku, aż do okolic roku 1600, kiedy to zaczyna się ona intensywnie zmieniać pod silnymi wpływami matematyki zachodniej (Kostecki, 2017).

1.2.8. Grecja.

Około 540 roku powstała wśród pitagorejczyków sentencja, według której liczba stanowiła istotę wszystkich zmysłowo uchwytnych rzeczy i pozostała ona najcenniejszą tezą matematyki starożytnej a wraz z nią zdefiniowano liczbę jako miarę. Mierzenie w tym sensie oznaczało mierzenie czegoś bliskiego i cielesnego. Cała antyczna matematyka jest w ostatniej instancji stereometrią. I tak dla Euklidesa, który ostatecznie ją usystematyzował w III wieku p. n. e., trójkąt jest z najgłębszą koniecznością powierzchnią graniczną jakiegoś ciała, nigdy zaś systemem trzech przecinających się linii prostych lub zgrupowaniem trzech punktów w trójwymiarowej przestrzeni. Linię określa on jako „długość bez szerokości”.Liczba antyczna nie była myślowym wyobrażeniem przestrzennych relacji, lecz uchwytnych dla cielesnego oka odgraniczonych jednostek. Starożytność przecież znała tylko liczby „naturalne”, rozumiane jako liczby dodatnie, całkowite, które wśród wielu abstrakcyjnych rodzajów liczb matematyki zachodniej, systemów liczb zespolonych, hiperzespolonych, niearchimedesowych itp. odgrywały dość nieznaczną rolę. Dlatego wyobrażenie liczb niewymiernych pozostało nieosiągalne dla greckiego umysłu. Euklides mówił, że niewspółmierne odcinki „mają się do siebie nie tak, jak liczby”. W wyobrażeniu np. stosunku boku kwadratu do przekątnej liczba antyczna, która była „zmysłową granicą, zamkniętą wielkością” natknęła się nagle na całkiem inny rodzaj liczby, który była obca i niepokojąca dla antycznego poczucia świata, jakby się było przez to bliskim odkrycia jakiejś niebezpiecznej tajemnicy własnego istnienia.

Matematyka grecka powstała pod dużymi wpływami matematyki egipskiej i babilońskiej, ale praktycznie od początku nabrała swojego wyjątkowego kształtu. Jej charakterystycznymi cechami było: rozumienie liczby jako wielkości geometrycznej oraz idea formalnego dowodu w oparciu o zasady logiki, którą rozumiano, jako czyste, abstrakcyjne myślenie. Matematycy greccy intensywnie rozwijali geometrię figur płaskich a w późniejszym okresie również stereometrię. Do trzech wielkich zagadnień greckiej matematyki starożytnej zaliczamy: konstrukcje trysekcji kąta, czyli podziału kąta na trzy równe części, kwadratury koła, czyli zbudowaniu kwadratu o polu równym polu zadanego koła oraz zagadnienie podwojenia sześcianu. W starożytności rozwiązany został tylko ten ostatni z wymienionych problemów. Do jednych z najważniejszych dzieł greckiej matematyki zaliczamy geometrię krzywych stożkowych, która rozwinęła się zwłaszcza w okresie hellenistycznym a także oryginalną metodę wyczerpywania, dzięki której Grecy mogli obliczać pola bardziej skomplikowanych figur geometrycznych. W ich systemie liczbowym oznaczano liczby przy pomocy liter alfabetu. Żeby więc odróżnić liczby od napisów pisano nad liczbami poziome kreski, natomiast cyfrę tysięcy pisano dużą literą, lub poprzedzano kreską u dołu, natomiast liczby większe od 9999 zapisywano pisząc pod nimi μ. System ten więc umożliwiał zapisanie liczb nie większych niż sto milionów.

Właściwa historia matematyki greckiej rozpoczyna się wraz z Talesem i Pitagorasem, którzy twórczo zaadaptowali i przekształcili wiedzę egipskiej i babilońskiej matematyki. Pierwszy z wyżej wymienionych- Tales, żyjący w latach ok. 624 – ok. 546) pochodził z Miletu. Prawdopodobnie podróżował on w związku ze sprawami handlowymi do Egiptu, gdzie zapoznał się z geometrią egipską oraz na Bliski Wschód, gdzie zapoznał się z astronomią babilońską. Przypisywane mu jest sformułowanie pięciu twierdzeń Euklidesa, które stosował do rozwiązywania praktycznych problemów, takich jak obliczanie wysokości piramid oraz odległości statków od brzegu. Nie formułował on dowodów swoich twierdzeń, lecz pokazywał, że w wielu przypadkach dane twierdzenie jest prawdziwe, co zapoczątkowało rozwój greckiej nauki, zarówno przyrodniczej, jak i matematycznej, początkowo w ramach tzw. szkoły milezyjskiej, do której należeli między innymi Anaksymander i Anaksymenes. Najsławniejsze jego dokonanie jest jednak związane z astronomią. Tales bowiem przewidział poprawnie pełne zaćmienie Słońca w 585 r. p. n. e. Niestety nie wiadomo jednak, w jaki sposób udało mu się to zrobić. Nie ma jednak wątpliwości co do tego, że posiadał głęboką wiedzę matematyczną i astronomiczną.Drugi z wymienionych uczonych- Pitagoras żył w latach ok. 582 – ok. 507. Swoją wiedzę zdobył również dzięki podróżom a podróżował między innymi do Egiptu, gdzie uczył się matematyki, geometrii i astronomii od egipskich kapłanów. Po powrocie do Grecji założył on hermetyczną sektę pitagorejczyków, którzy zajmowali się w takim samym stopniu liczbami co mistyką. Pitagorejczycy wierzyli, że wszystko w świecie pozostaje w bezpośrednim związku z matematyk. Byli również przekonani, że matematyczny opis przy pomocy cykli, harmonii i proporcji umożliwia pełne wyrażenie świata. To właśnie również od Pitagorasa wywodzi się charakterystyczne dla starożytnej kultury greckiej, rozumienie liczby jako proporcji pomiędzy obiektami geometrycznymi. Tak jak dzieł Talesa nie posiadamy raczej dlatego, że nie przetrwały, tak Pitagoras z kolei po prostu nic nie napisał, gdyż cała wiedza pitagorejczyków była przekazywana drogą ustną, a jej upowszechnienie nastąpiło dopiero wraz z rozpadem ich wspólnoty, czyli około 450 r. p. n. e. Nie potrafimy także określić, ile wiedzy pitagorejskiej było dziełem samego Pitagorasa, a ile było dziełem jego uczniów, gdyż pitagorejczycy wszystkie swoje odkrycia przypisywali mistrzowi. Oprócz autorstwa twierdzenia Pitagorasa przypisuje mu się również rozpoznanie, że gwiazda wieczorna i gwiazda poranna jest tą samą planetą -Wenus. Pitagorejczycy odkryli liczby niewymierne, lecz ze względu na swój światopogląd nie traktowali ich jako liczby.

V w. p. n. e. przynosi greckiej matematyce bujny rozkwit. Matematyka stała się jednym z podstawowych zajęć greckich elit intelektualnych o czym świadczy np. fakt, że Platon zakładając Akademię ok. 387 r. p. n. e. umieścił na jej wejściu napis „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii”. Euklidesa żyjący ok. 365 – ok. 300, był jednym z pierwszych nauczycieli słynnej Szkoły Aleksandryjskiej i pierwszym greckim geometrą, który wykładał geometrię w dojrzałej postaci. Był autorem wielu prac syntetyzujących całe dziedziny wiedzy, między innymi z geometrii, optyki, astronomii oraz muzyki.Do historii jednak przeszedł przede wszystkim jako autor dzieła Stoicheia geometrias, czyli „Elementy geometrii”, w którym podał systematyczny wykład całości ówczesnej wiedzy matematycznej a jego sposób przestawienia w tym dziele jest wybitnie aksjomatyczny i dedukcyjny. Elementy Euklidesa wywarły ogromny wpływ na późniejszą matematykę europejską, gdyż dzieło to stanowiło kanon nauczania geometrii w Europie przez następne 2000 lat. Sam sposób wykładu Euklidesa opiera się na metodach logiki Arystotelesa.Jednym z największych greckich matematyków był Archimedes, żyjący w latach ok. 287 – ok. 212.

Oprócz odkrycia prawa Archimedesa, z którego niewątpliwie jest najbardziej znany dokonał jeszcze wielu innych, bardziej znaczących odkryć. Studiował on w Aleksandrii, gdzie nawiązał kontakty z uczniami Euklidesa, z którymi przez całe życie prowadził korespondencję. Opanował on w sposób mistrzowski umiejętność obliczania pól i objętości rozmaitych, często bardzo skomplikowanych figur geometrycznych, posługując się metodą wyczerpywania. Metodę tą rozwinął twórczo a polegała ona w zastosowaniu do obliczania pola koła na policzeniu pól powierzchni dwóch wielokątów foremnych, jednego wpisanego na kole, a drugiego opisanego na nim. Stosując tę metodę w przypadku 96-kąta foremnego, Archimedes przybliżył dokładniej liczbę π, gdzie Grecy zazwyczaj używali mniej dokładnej wartości π, a także wykazał w swojej słynnej pracy O kuli i walcu, że stosunek objętości kuli do objętości opisanego na niej walca wynosi 2:3. Ten ostatni fakt uznawał on za swoje największe odkrycie. Poza geometrią Archimedes zajmował się również wielkimi liczbami. I tak w dziele Psammites, czyli „O liczeniu ziaren piasku" obliczył, ile piasku zmieści się w całym wszechświecie. Utworzył on do tego celu nowy system liczbowy, który za podstawę bierze największą liczbę nazywalną w starożytnej grece – myriadę. Archimedes posiadał jeszcze wiele zasług. I tak np. Plutarch opisał, jak dzięki zaprojektowanym przez niego wysuwanym ramionom (żurawiom) obrońcy byli w stanie zatapiać statki na morzu, zaś dzięki katapultom zarzucali wojska lądowe głazami i ołowiem. Zaprojektował on także układ luster, który umożliwiał skupianie promieni słonecznych na wrogich okrętach, a w konsekwencji wywoływanie pożaru lub oślepianie. Kiedy w roku 212 p. n. e. Rzymianie zdobyli Syrakuzy, Archimedes był tak pochłonięty rozważaniem jakiegoś problemu, rysując w tym czasie koła na piasku, że nie zauważył zdobycia miasta. Stosując metodę wyczerpywania przybliżył dokładniej wartość pierwiastka z 3 i stwierdził, że liczba ta zawiera się pomiędzy 265/153 (≈ 1.732) oraz 1351/780 (≈ 1.73205), gdzie obecnie wiemy, że ta przybliżona wartość pierwiastka z 3 wynosi 1.7320508076, więc wynik Archimedesa był bardzo dokładny.Po śmierci Archimedesa rozpoczął się okres powolnego upadku greckiej matematyki. A pragmatyczni Rzymianie nie byli zainteresowani abstrakcyjnymi spekulacjami Greków, mimo że korzystali z ich technicznych osiągnięć.

Okres hellenistyczny i rzymski, to czas, w którym na uwagę zasługują przede wszystkim astronomowie: Hipparch, żyjący w latach 190-120 p. n. e. i Ptolemeusz, żyjący w latach 90-168 n. e. mający spory dorobek astronomiczny, zarówno jeśli chodzi o pomiary, jak i o teorię. Szczególnie ważne było stworzenie przez Hipparcha i późniejsze rozwinięcie przez Ptolemeusza, tablicy cięciw okręgu, które są równoważne tablicy funkcji trygonometrycznej sinus. Dlatego też Hipparcha i Ptolemeusza uznaje się za prekursorów trygonometrii, podobnie jak Archimedesa uważa się za prekursora rachunku różniczkowego i całkowego. Ptolemeusz otrzymał taką samą, jak 300 lat wcześniej Aryabhata w Indiach wartość liczby π = 3.1416. Ostatnim ważnym greckim matematykiem III w. n. e. był Diofantos, którego dzieło Arithmētika stanowiło podsumowanie dokonań matematycznych szkoły neopitagorejskiej, rozwijającej się od I w. n. e. Dzieło Diofantosa w odróżnieniu od reszty matematyki greckiej nie było geometryczne, lecz arytmetyczno-algebraiczne. Traktował on ułamki tak samo, jak inne liczby, wprowadzał liczby ujemne, rozwiązywał równania trzeciego stopnia oraz wprowadzał zapis symboliczny równań. Z powodu tych dokonań często nazywany jest „ojcem algebry". Można uznać go nie tyle za ostatniego wybitnego matematyka śródziemnomorskiej starożytności, co za pierwszego wybitnego matematyka powstającej dopiero nowej formacji kulturowej. W roku 529 po wydaniu przez cesarza Justaniana I kodeksu praw zawierającego paragraf „O złoczyńcach, matematykach i tym podobnych osobnikach", który głosił między innymi, że „potępienia godna sztuka matematyczna jest zakazana przede wszystkim" zlikwidowano platońską Akademię a do problemów studiowanych przez Greków powrócono w Europie dopiero w późnym średniowieczu oraz w czasach Renesansu. Klasyczne greckie problemy kwadratury koła wraz z metodami wyczerpywania rozważano dopiero w renesansowej Europie i doprowadziły one między innymi do stworzenia rachunku różniczkowego i całkowego a dopiero w XIX wieku Pierre Wantzel i Ferdinand Lindemann udowodnili, że nie da się skonstruować trysekcji kąta ani kwadratury koła. Wiele wieków zajęła również dyskusja nad aksjomatami Elementów Euklidesa i dopiero w wieku XIX Nikołaj Łobaczewski i János Bolyai wykazali, że V aksjomat jest niezależny od pozostałych poprzez konstrukcję geometrii niespełniającej tego warunku (Kostecki, 2017).

1.2.9. Arabia i Persja

Jednym z najważniejszych przedstawicieli perskiej matematyki był Arystarch z Samos, żyjący w latach 288-277. Należał on do kręgu astronomów aleksandryjskich, powiązanych niewątpliwie z chaldejsko-perskimi szkołami. Tam także naszkicował heliocentryczny system świata, został jednak przez Starożytność przyjęty z pełną obojętnością i szybko zapomniany. Z kolei narodziny i rozwój arabskiej matematyki zbiegają się w czasie ze „złotym wiekiem" islamskiego imperium pod panowaniem dynastii Abbasydów, którzy przejęli władzę w roku 750, przenosząc jednocześnie stolicę z Damaszku do Bagdadu. Najistotniejszą rolę w arabskiej matematyce odegrały dokonane w tym czasie tłumaczenia w geometrii: Elementów Euklidesa, w trygonometrii: Āryabhatīyi Aryabhaty oraz w arytmetyce: Brahmasphutasiddhanty Brahmagupty. Trochę później natomiast przetłumaczono także inne dzieła Euklidesa, Archimedesa, Ptolemeusza, Diofantosa czy innych autorów grackich, czy indyjskich a na ich bazie bardzo szybko rozwinęła się oryginalna arabska myśl matematyczna, która mimo tego, że korzystała z dokonań poprzedników, to posiadała unikalny charakter.

Za najsłynniejszego matematyka arabskiego uznawany jest Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, żyjący w katach ok. 780-850. Zwano go również alChuwarizmim. Był on nie tylko matematykiem, ale i astronomem, astrologiem a także geografem. Stał się prekursorem kilku dyscyplin matematycznych oraz wpłynął na współczesną myśl matematyczną najmocniej ze wszystkich średniowiecznych matematyków. Jego najważniejszym dziełem był al-Kitāb al-Maqala fī Hīsāb al-Jabr waal-Muqābala, co tłumaczymy jako „Kompendium o liczeniu przez uzupełnienie i wyrównywanie". Podał w nim systematyczny wykład ogólnych metod rozwiązywania wszystkich możliwych równań kwadratowych. Bardzo często tekst ten przyjmowany jest za pierwsze dzieło o algebrze, najbardziej charakterystycznej dziedzinie arabskiej matematyki i jednej z najważniejszych dziedzin współczesnej matematyki i stało się podstawą zastosowania arytmetyki do geometrii w oparciu o metody algebraiczne. Dokonał on w nim twórczej syntezy wiedzy greckiej i indyjskiej, wprowadzając nowe algebraiczne podejście. Rozwinął również działania w indyjskim systemie dziesiętnym, korzystając z zera, ułamków i innych procedur arytmetycznych a także zastosował je do problemów algebraicznych, arytmetycznych i geometrycznych a rozwinięta przez niego algebra umożliwiała traktowanie liczb całkowitych, ujemnych, ułamków i liczb niewymiernych w ten sam sposób, czyli jako pewnych obiektów podlegających przekształceniom. Późniejsze łacińskie tłumaczenie jego dzieła stało się źródłem nazwy „algebra" a imię autora źródłem nazwy „algorytm", oznaczającej skończony i uporządkowany zbiór dobrze określonych działań koniecznych do wykonania danego zadania. Al-Chuwarizmi napisał też wiele innych książek oraz podał szczegółową tablicę funkcji sinus i geometryczne przedstawienie cięć krzywych stożkowych. Uczestniczył także w pomiarach obwodu Ziemi i prowadził oryginalne badania związane z zegarami i astrolabium.

Od końca wieku VIII aż do początku XV wieku żyło i tworzyło wielu arabskich i perskich matematyków, rozwijających idee algebraiczne, arytmetyczne, geometryczne i trygonometryczne. Jednym z największych był Abū ʻAlī al-Hasan ibn al-Hajtam, żyjący w latach 965-1039, zwany Alhazenem. Był on urodzonym w Persji matematykiem, fizykiem i astronomem, który uznawany jest za „ojca optyki". W matematyce zajmował się przede wszystkim teorią liczb. Był on pierwszym, który próbował sklasyfikować wszystkie parzyste liczby a także pierwszym, który podał twierdzenie, że „jeśli p jest liczbą pierwszą, to 1+(p–1)! Jest podzielne przez p.", które w Europie zostało odkryte ponownie dopiero 750 lat później przez Johna Wilsona. Kolejną bardzo znaczącą postacią dla perskiej matematyki tego czasu był Abu Bakr al-Karadżi, żyjący w latach 953-1029. W swoim słynnym traktacie rozwinął idee algebraiczne i całkowicie uwolnił algebrę od operacji geometrycznych i zastąpił je przez znane dziś działania algebraiczne. Odkrył on również wzór, który dziś zwany jest twierdzeniem o dwumianie. Zapoczątkował on także szkołę algebraików która działała i tworzyła przez kilka następnych stuleci. Kolejnym perskim matematykiem o znaczących zasługach, żyjącym w latach 1048- 1131 był Omar Chajjám którego pełne imię brzmiało Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Omar ibn Ibrahim Al-Nisaburi Khayyāmi. Oprócz tego, że był matematykiem, był również poetą, filozofem i astronomem. Dzieło o nazwie „Rozprawę o zademonstrowaniu zagadnień z algebry", które napisał stanowiło komentarz do Elementów, w którym, studiując przecięcia krzywych stożkowych, podał on geometryczne rozwiązanie równań trzeciego stopnia, co jest jednym z najbardziej oryginalnych odkryć w matematyce islamskiej. Był również autorem znaczącej pracy na temat V postulatu Euklidesa o równoległości prostych, zastępując V postulat różnymi innymi twierdzeniami. Ostatni z wymienionych, perski matematyk Ghiyath al-Kashi, żyjący w latach 1380-1429, znany również jako Gijasedin Dżamszid ben Mas'ud ben Mahmud al-Kaszi Kaszani, przyczynił się w istotny sposób do rozwoju ułamków dziesiętnych. W głównym swoim dziele al-Kasziego Miftahul hisabi, tłumaczonym jako „Klucz do arytmetyki" przedstawił on rozwinięcia dziesiętne liczb algebraicznych (takich jak np. $\sqrt{2}$) oraz liczb rzeczywistych, w tym również liczby π. Z kolei w traktacie o okręgu al-Kaszi policzył π z dokładnością do szesnastego miejsca po przecinku, podając $\pi = 3.1415926535897932$. Wyprzedził on rozwój matematyki europejskiej, zarówno jeśli chodzi o arytmetykę, jak i obliczenia rozwinięć dziesiętnych o około dwieście lat. Rozwinął także metodę obliczania pierwiastków n-tego stopnia, podał tablicę wartości funkcji sinus, dokładną do około 8 miejsc po przecinku. Wiek XV przyniósł stagnację i upadek arabsko-perskiej matematyki (Kostecki, 2017).

1.2.10. Matematyka europejska.

W Europie wraz ze zmierzchem starożytności wiedza matematyczna Greków została zatracona. Korzystano z operacji dodawania, odejmowania, dzielenia i mnożenia, ale zapisywano je słownie i znano już tylko elementarną geometrię. Dopiero właściwa historia matematyki europejskiej rozpoczyna się wraz z obszernymi łacińskimi tłumaczeniami dzieł arabskich w XII i XIII wieku. W tym samym czasie również przełożono na łacinę szereg greckich i hebrajskich rękopisów matematycznych. I tak np. w roku 1202 Leonard z Pizy, zwany Fibbonaccim wydał księgę Liber Abaci. Fibbonacci spędził dużą część młodości w północnej Afryce, gdzie uczył się arabskiego i studiował arabską matematykę. W dziele tym wprowadza obliczenia wykonywane na liczbach hinduskich używanych wówczas przez Arabów. Tekst zawiera między innymi opis mnożenia w słupku, działania na ułamkach, chińskie twierdzenie o resztach oraz zagadnienia związane z liczbami doskonałymi. Dzieło to jest uznawane za pierwsze istotne europejskie dzieło matematyczne.

Potrzebne było kilka wieków, aby europejska matematyka znowu zaczęła się rozwijać. I tak, przykładowo, znaki „+" oraz „– „pojawiły się w matematyce europejskiej dopiero pod koniec XV wieku i zaczerpnięte zostały z notacji stosowanej przez kupców. W Europie przez długi czas liczby ujemne traktowano jako fikcyjne, czy też fałszywe a systematycznego ustalenia symboliki i notacji w algebrze dokonano dopiero pod koniec XVI wieku. W XVI wieku przełożono i wydano dzieła Archimedesa. Spowodowały one silny ferment intelektualny, opozycyjny wobec dotychczasowej dominacji dzieł Arystotelesa i scholastyków. Klimat intelektualny renesansu powodował wielkie zainteresowanie myślą starożytnej Grecji, wskutek czego europejska matematyka zaczęła się rozwijać na dwoistej bazie wpływów zarówno arabskiej arytmetyki i algebry oraz greckiej geometrii. Pierwsze znaczące matematyczne dokonania nowożytnych Europejczyków datuje się na renesansowe Włochy wieku XV i XVI, gdzie pod koniec wieku XV Scipione del Ferro znalazł ogólne rozwiązanie równania trzeciego stopnia a swoją tajemnicę wyjawił on dopiero na łożu śmierci swoim uczniom: Hannibalowi della Nave oraz Antonio Mario Fiorowi. Ten ostatni korzystając z metody del Ferro wygrał kilka turniejów matematycznych, przegrywając jednak w roku 1535 z Niccolò Fontaną, matematycznym samoukiem, który dokonał między innymi pierwszych włoskich tłumaczeń Euklidesa i Archimedesa. Turniej pomiędzy Fiorem a Tartaglią trwał 50 dni a czterdziestego drugiego dnia Tartaglia dokonał tego samego odkrycia co Scipione del Ferro i wygrał konkurs. Za jakiś czas Gerolamo Cardano wyprosił u Tartaglii sekret jego metody pod przysięgą, że nie zdradzi tej tajemnicy. Kiedy jednak w roku 1543 Cardano wraz ze swoim uczniem Lodovico Ferrarim odwiedził Hannibala della Nave i dowiedział się o pierwszeństwie Scipione del Ferry opublikował zarówno metodę del Ferry – Tartaglii, jak i odkrytą przez Ferrariego w 1540 roku metodę rozwiązania równań czwartego stopnia. Dzieło Gerolamo Cardana Ars Magna wydane w roku 1545 spowodowało ogromny żal Tartaglii, który oskarżył Cardano o plagiat i wyzwał Cardana w 1548 roku na turniej. Ten nie pojawił się na nim, tylko przysłał Ferrariego. Ostatecznie Tartaglia przegrał ten turniej, zaś metoda, którą niezależnie odkryli del Ferro i Fontana/Tartaglia nazywana jest dziś metodą Cardana.

Początek nowożytnej matematyki europejskiej rozpoczął się w wieku XVII, w którym to nagle i silnie wyłonił się odrębny charakter europejskiej matematyki. W tym czasie powstała geometria analityczna, którą stworzył René Descartes, żyjący w latach 1596-1650 oraz Pierre de Fermat, rachunek różniczkowo-całkowy, stworzony przez Isaaka Newtona i Gottfrieda Wilhema Leibniza a także rachunek prawdopodobieństwa, który stworzyli Pierre de Fermat oraz Blaise Pascal. We wszystkich pracach tych autorów idee geometryczne starożytnej Grecji ścierały się z ideami arytmetycznymi i algebraicznymi Arabów i pomimo braku ustalonego języka, który został sformułowany dopiero w wieku XVIII, wszystkie te trzy teorie stały się podstawą współczesnej matematyki. W tym samym wieku również John Napier wymyślił logarytmy rozpatrywane później przez Henry'ego Briggsa. Za jedno z najważniejszych matematycznych dzieł tego wieku uznajemy z pewnością Methodus fluxionum et serierum infinitarum oraz De quadratura curvarum Newtona. Wykładał on w nich metodę flusji, czyli własną wersję rachunku różniczkowo-całkowego. Z kolei w traktacie La géométrie Descartesa przedstawił on swoją geometrię analityczną. Dopiero kolejny wiek, który cechuje bujny rozwój mechaniki teoretycznej wywodzącej się z geometrii analitycznej, rachunku różniczkowo-całkowego, oraz mechaniki Newtona, przyniósł ostatecznie uformowanie się kształtu europejskiej matematyki, która przede wszystkim opierała się na pojęciu funkcji. Do najsłynniejszych twórców mechaniki teoretycznej zaliczamy Leonharda Eulera, żyjącego w latach 1707-1783, Josepha Louisa Lagrange'a, oraz Pierre-Simon Laplace'a. Jednak za największego matematyka XVIII wieku i jednego z największych matematyków w historii ludzkości uznany został z pewnością Leonhard Euler, który dokonał nie tylko wielu odkryć, lecz również stworzył nowe działy matematyki, t.j. rachunek wariacyjny, geometrię różniczkową. Wprowadził także charakterystyczne dla matematyki europejskiej pojęcie funkcji oraz ustandaryzował wiele matematycznych określeń. To właśnie on wprowadził oznaczenie *i* dla pierwiastka z liczby –1, oraz oznaczenie *e* dla badanej przez Bernoulliego, Leibniza i Napiera liczby 2.7182...Wiek XIX cechował się dużym wzrostem abstrakcyjności matematyki, połączonym z jednoczesnym powstawaniem nowych dziedzin matematycznych. I tak np. Évariste Galois, zmarły w wieku 21 lat oraz Niels Henrik Abel, zmarły w wieku 26 lat, dzięki swoim badaniom rozwiązania równań stopnia wyższego niż czwarty doprowadzili do powstania i rozwoju teorii grup oraz teorii równań algebraicznych. Z kolei Augustin Louis Cauchy, Karl Weierstrass wraz z Carlem Friedrichem Gaussem stworzyli podstawy teorii granicy funkcji oraz sami podstawy teorii funkcji analitycznych, czyli różniczkowalnych funkcji na zmiennych zespolonych. Osiągnięć w geometrii dokonali Nikołaj Łobaczewski oraz niezależnie János Bolyai, którzy to wykazali, że V aksjomat Euklidesa jest niezależny od pozostałych i że istnieją geometrie nie spełniające tego warunku, czego konsekwencją było sformułowanie przez Bernharda Riemanna nowej teorii geometrycznej, którą dziś nazywamy geometrią Riemanna, znacznie ogólniejszej od geometrii Euklidesowej. Dzięki temu właśnie nowożytna matematyka europejska przekroczyła swoje korzenie również w geometrii, ponieważ geometria riemannowska opierała się na teorii funkcji i geometrii różniczkowej, czyli dziedzinach bardzo odległych od euklidesowego studiowania wymiernych proporcji między odcinkami. Pół wieku później Geometria Riemanna stała się podstawą matematyczną ogólnej teorii względności Einsteina.

Powszechnie uważa się, że najwybitniejszym matematykiem XIX wieku był Carl Friedrich Gausss, żyjący w latach 1777-1855- geniusz matematyczny, zwany „księciem matematyki", który dokonał wielkiej ilości odkryć, między innymi z takich dziedzin jak: teoria liczb, analiza, geometria różniczkowa, ale również w badaniach magnetyzmu, w geodezji, oraz w optyce. Swoje wielkie dzieło Disquisitiones Arithmeticae napisał mając zaledwie 21 lat i poświęcił je teorii liczb, scalając dokonania Fermata, Eulera, Lagrange'a i Legendre'a oraz dodając wiele oryginalnych twierdzeń i obserwacji. W tym samym roku udowodnił także podstawowe twierdzenie algebry, wykazując, że równanie algebraiczne stopnia n ma n rozwiązań zespolonych. Georg Cantor pod koniec XIX wieku stworzył teorię mnogości. Odkrył, że zbiory mogą posiadać nieskończoności różnego rodzaju i czym innym jest nieskończoność, która pojawia się u liczb naturalnych a czym innym jest np. nieskończoność liczb rzeczywistych. Badania te zapoczątkowały rozważania dotyczące nieskończonej liczby różnych nieskończoności.

W wieku XX matematyka stała się już dziedziną bardzo rozległą. Czas ten przyniósł z jednej strony rozwój metod analitycznych oraz z drugiej algebraicznych. W pierwszej połowie XX wieku widać silną tendencję do sprowadzenia podstaw matematyki do logiki i operacji gramatycznych na znakach, nad czym pracowali między innymi Bertrand Russell oraz David Hilbert. Pracom tym jednak ostateczny kres położyły twierdzenia Kurta Gödla. W XX wieku powstała dziedzina matematyki, zwana topologią, która od razu zyskała ogromne znaczenie. Rozważa ona bowiem takie własności przestrzeni, które nie zmieniają się przy ich wyginaniu i rozciąganiu. Druga połowa wieku XX przyniosła bardzo silny rozwój abstrakcyjnej algebry, łączącej się zarówno z badaniem problemów geometrycznych jako geometria algebraiczna, jak i topologicznych - topologia algebraiczna. Bardzo istotną rolę w obu tych dziedzinach pełniła teoria kategorii, badająca ogólne przekształcenia między obiektami zachowujące strukturę tych obiektów. Można powiedzieć w dużej ogólności, że cechą charakterystyczną wieku XX był wzrost abstrakcyjności badanych zagadnień matematycznych, odkrywanie wielu powiązań pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy matematycznej. Był to również czas odrywania się nowych dyscyplin i specjalizacji badań. Czas, w którym powstały nowe dziedziny, badające ogólne struktury, w ramach których mogą istnieć obiekty matematyczne, np. teoria grup. Pośród wielkich matematyków dwudziestego wieku z pewnością należy wymienić dwie postacie: genialnego indyjskiego samouka- Srinivāsę Aiyangāra Rāmānujana, oraz Alexandre'a Grothendiecka, który w latach sześćdziesiątych zrewolucjonizował między innymi topologię algebraiczną i geometrię algebraiczną (Kostecki, 2017).

Z powodu specjalizacji badań, jak również z powodu odkrywania nowych dziedzin, które wiążą ze sobą zagadnienia już istniejące liczba jej działów wciąż rośnie, dlatego trudno powiedzieć, jak dalej potoczy się historia matematyki. Na pewno w jej przemianie odegra rolę wiele czynników.

1.3. Co to jest matematyka?

Mimo, że trudno obecnie określić przedmiot matematyki, gdyż nie są to już tylko liczby i kształty, lecz także przestrzenie, zbiory, funkcje, odwzorowania itp. to możemy we wszystkich jej działach postrzegać ją jako pewną charakterystyczną metodę podejścia do stawiania i rozwiązywania zagadnień, czyli po prostu pewien określony sposób myślenia. W dużym uproszczeniu można więc określić ją jako naukę, która uczy logicznego uporządkowanego myślenia i precyzyjnego formułowania myśli. Porządkuje ona nasz sposób myślenia, gdyż przede wszystkim uczy rozumowania opartego na ścisłych regułach logiki oraz wyobraźni. Dzięki matematyce umiemy nie tylko wyobrazić sobie różne rzeczy, których nie widzimy, ale także umiemy wywnioskować, jakie mają własności, do czego się przydają. Potrafimy także wyciągnąć wniosek, co nastąpi.

1.3.1. Czym jest odkrycie w matematyce?

O ile w naukach eksperymentalnych takich jak: biologia, chemia, fizyka odkrycie jakiejkolwiek zależności jest prawie niemożliwe, gdyż wymaga specjalistycznego sprzętu do wykonania odpowiednich badań zarówno do zauważenia tej zależności, jak i potwierdzenia o tyle w matematyce sprawa wygląda inaczej. Matematyka nie jest bowiem nauką eksperymentalna i eksperyment w czystej matematyce nie ma żadnej wartości dowodowej, czyli o niczym nie świadczy. Może jedynie pomagać w celu zauważenia pewnej zależności. Odkryciem matematycznym jest bowiem znalezienie pewnej zależności wraz z dowodem jej zachodzenia. Bardzo młodzi ludzie mogą więc dokonać odkryć matematycznych częściej niż w innych naukach, gdyż nie ogranicza ich dostęp do różnego rodzaju sprzętu o czym świadczą przykłady z historii tej nauki tj. nastoletni Gauss, nastoletni Pascal, nastoletni Galois dokonywali odkryć istotnych, bądź przełomowych dla swojej epoki. Nie znaczy to, że odkrywanie nowych rzeczy w matematyce jest prostsze niż w innych naukach, chodzi tylko o to, że człowieka nie ograniczają czynniki zewnętrzne a jedynie jego umysł. Dlatego też ważne jest dawanie uczniom różnego rodzaju problemów do rozwiązania i rozwijanie indywidulanego sposobu myślenia. Trzeba bowiem wiedzieć, że każde odkrycie nie jest częścią żadnego schematu, który jest już znany, dlatego wymaga on indywidualnego pomysłu. Dlatego też chcąc wyrobić u uczniów tę zdolność należy uczyć myślenia niestandardowego. Oczywiście należy się liczyć z tym, że mimo naszych starań i wielu lat pracy nie spotkamy nigdy ucznia, który stanie się odkrywcą. Nie znaczy to jednak, że mamy zaniechać tych prób, gdyż tak czy owak nauka nieschematycznego myślenia opłaci się uczniom, chociażby w lepszym zrozumieniu pewnych zależności z otaczającego nas świata, zarówno matematycznej, jak i nie matematycznej.

1.3.2. Filozoficzna refleksja nad matematyką.

Warto wspomnieć jeszcze o współczesnych nurtach w filozofii matematyki, do których należą między innymi: logicyzm, intuicjonizm i formalizm, a które ukształtowały się na przełomie XIX i XX wieku i nawiązywały najczęściej do koncepcji takich myślicieli jak Platon, Arystoteles, Leibniz czy Kant. Ich pojawienie się miało z jednej strony związek z intensywnym rozwojem logiki matematycznej i teorii mnogości, a z drugiej, z tzw. drugim kryzysem podstaw matematyki. Pierwszym takim kryzysem bowiem było wykrycie w starożytnej Grecji wielkości niewspółmiernych. Doprowadziło to w konsekwencji do zmiany pojęcia liczby a miał on związek z wykryciem na gruncie teorii mnogości Cantora pewnych antynomii, czyli par zdań wzajemnie sprzecznych, w których każde zdanie wynika z drugiego, co dziś nazywa się antynomiami logicznymi. Ich genezą było intuicyjne, nie do końca precyzyjne i jasne pojęcie zbioru, które zaproponował Cantor w swej teorii mnogości a próby pozbycia się sprzeczności wynikłych z antynomii teoriomnogościowych i zbudowania mocnych fundamentów dla całej matematyki stały się bodźcem do różnych poszukiwań na płaszczyźnie filozoficznej. Ich efektem stało było powstanie: **Logicyzmu**, czyli takiego kierunku w filozofii matematyki, który całą matematykę sprowadzalna do logiki, uznając tym samym, że to matematyka jest częścią logiki. Za jego twórcę uważa się G. Frege, żyjącego w latach 1848-1925 a za głównego przedstawiciela B. Russella. Logicyści nawiązywali m.in. do myśli Platona, Arystotelesa, Euklidesa, Leibniza; **Intuicjonizmu,** jednego z konstruktywistycznych kierunków w filozofii matematyki, który ukształtował się na początku XX wieku, za sprawą holenderskiego matematyka L. E. J. Brouwer, żyjącego w latach 1898-1980. Wyrósł on z krytyki podstaw współczesnej matematyki dotyczącej dwóch zasadniczych kwestii pojawiających się w całej historii tej dziedziny: pojęcia nieskończoności oraz związków między tym co dyskretne, a tym co ciągłe. Koncepcję tę rozwijali dalej A. Heyting, żyjący w latach 1898-1980 i Anne Sierp Troelestra ur. w 1939 r. Przedstawiciele tego kierunku nie zgadzali się z koncepcją teorii mnogości Cantora i jego teorią nieskończoności.

Źródeł tego kierunku należy szukać już również u Arystotelesa i Euklidesa, gdyż intuicjoniści za swych poprzedników uważali tych myślicieli, którzy sądzili, że matematyka jest wyposażoną w określoną treść nauką, a umysł ludzki bezpośrednio ujmuje przedmioty matematyczne i formułuje o nich syntetyczne sądy a priori. Dlatego też chętnie powoływali się na Kanta; **Formalizmu**, którego twórcą był niemiecki matematyk D. Hilbert, żyjący w latach 1862-1943, według którego dotychczasowe, zwłaszcza proponowane przez intuicjonistów, próby ugruntowania matematyki, były niezadowalające i prowadziły raczej do zubożenia matematyki i odrzucenia wielu jej kierunków dotyczących w szczególności nieskończoności. Sformułował on program badań nazwany właśnie formalizmem, którego celem było ugruntowanie i usprawiedliwienie matematyki. Przedstawiciele tego nurtu korzystali z wyników logicystów, m.in. Russella i Whiteheada. Nawiązywali także do myśli Kanta, podobnie jak Brouer Intuicjoniści odwoływali się do Kantowskiej teorii czasu i przestrzeni jako form zmysłowej naoczności, Hilbert natomiast wykorzystywał również koncepcję idei rozumu, wyłożonej przez Kanta w dialektyce transcendentalnej (Jabłecka, 2021). Filozoficzna refleksja nad matematyką uświadamia nam, jak wiele problemów stawianych przez filozofię matematyki pozostaje jeszcze nierozstrzygniętych. Już samo ugruntowanie matematyki na solidnym i pierwotnym wobec niej fundamencie, wydaje się być przedsięwzięciem niebagatelnym. Rysuje ona bowiem wiele perspektyw jednocześnie, z których można spojrzeć na matematykę i ją opisywać. Pokazuje także złożoność oraz bogactwo tej nauki.

Jak zauważa (Murawski, 1995) uprawianie matematyki bez ogólnej znajomości filozofii powoduje pewnego rodzaju jej zubożenie, które G. Fregem wyraża następującymi słowami: „Filozof, który zupełnie nie zna geometrii, jest tylko półfilozofem, a matematyk, któremu brak żyłki filozoficznej, jest tylko półmatematykiem." (Murawski, 1995). Jeszcze inną kwestię stanowi pytanie, jak działa matematyka. Niestety nie wiemy, czy dokonuje ona odkryć w abstrakcyjnym świecie, do którego nie mamy dostępu, czy też to wszystko jest naszym wymysłem. Nie zdołali nam bowiem wyjaśnić ani platończycy, ani nominaliści, w jaki sposób uczymy się matematyki. Platończycy uważali bowiem, że dokonujemy odkryć dotyczących świata abstrakcyjnych pojęć. Nominaliści z kolei twierdzili, że taki świat nie istnieje i że to my wszystko wymyślamy. Mimo, że oba te kierunki filozoficzne próbowały wytłumaczyć, co się dzieje, gdy się matematyką zajmujemy, to wciąż nie wiadomo, kto ma rację.

1.3.3. Matematyka jako sztuka.

Na zakończenie rozważań dotyczących matematyki warto ze względu na różne interpretacje co do jej natury spojrzeć na nią również, jak na sztukę. Bowiem jeżeli uznać by, że matematyk tworzy byty matematyczne, to sytuacja jest podobna do tej, z jaką mamy do czynienia w sztuce, jeśli z kolei odkrywa on byty matematyczne, to sytuacja jest podobna do tej, z jaką mamy do czynienia w naukach przyrodniczych (Orlikowski, 2008),. I tak też O. Splenger (1917) ją traktuje:

„Matematyka jest więc także sztuką. Ma swoje style i okresy ich dominacji. Nie powinno się omawiać rozwoju wielkich sztuk, nie spojrzawszy przy tym — a z pewnością nie będzie to daremne spojrzenie — na ówczesną matematykę. Nigdy jeszcze nie przebadano szczegółów w ramach bardzo głębokich powiązań między przemianami teorii muzyki a analizą nieskończonościową, choć estetyka mogłaby więcej się od tego nauczyć niż od wszelkiej „psychologii". Jeszcze bardziej pouczająca byłaby historia instrumentów muzycznych, gdyby zgłębiano w jej zakresie ostateczne duchowe podstawy zamierzonej barwy i efektu dźwięku. Wzmożone bowiem aż do poziomu tęsknoty pragnienie, by wytworzyć przestrzenną nieskończoność dźwięków, zrodziło już w gotyku — w przeciwieństwie do antycznej liry i fujarki (lira, kithara, aulos, syrinx) oraz arabskiej lutni — obie dominujące rodziny instrumentów klawiszowych (organy) i smyczkowych. Organy stały się, głównie w Niemczech, opanowującym przestrzeń osobnym instrumentem o olbrzymich rozmiarach, nie znajdującym równego sobie w całej historii muzyki. Monumentalne koncerty organowe Bacha i jego epoki są jako żywo analizą ogromnego i rozległego świata tonów." Istotnym dla tych rozważań jest twierdzenie o nierozstrzygalności Kurta Gödla, według którego w każdej teorii mogą istnieć takie zdania, których nie da się udowodnić, ani obalić za pomocą metod należących do tej teorii. Dlatego też wiedzę możemy uściślać, ale zawsze będzie dawać możliwość różnych interpretacji, nie da się jej też zautomatyzować i nie da zakończyć (C. Orlikowski, 2008).

PODSUMOWANIE:

Matematyka jest to rozległa i dość niejednorodna dziedzina wiedzy, dlatego też nie istnieje zadowalające krótkie określenie matematyki. Do zrozumienia tego, jak również istoty matematyki prowadzi wiedza z zakresu jej historii i filozofii. Niezwykle ważną jej cechą jest to, że w przeciwieństwie do wielu innych nauk, wszystkie jej twierdzenia muszą być sformułowane całkowicie precyzyjnie i logicznie udowodnione, a rezultaty nie zależą od poglądów czy też obserwacji. Matematyka rozwijała się w ciągu tysiącleci, rozszerzała swój zakres, wzbogacała problematykę, doskonaliła formę i pogłębiała treści a jej rozwój nie zawsze był spokojny i systematyczny. Bywały okresy szybkiego wzrostu, po których następowały wielowiekowe przestoje, a po nich znów gwałtowne zmiany w kierunku jej rozwoju. Czasami idee, które prowadziły do szybkiego rozkwitu, niosły w sobie równocześnie zarodki stagnacji, hamując dalszy postęp. Czasem również całe rozdziały tej nauki szły w zapomnienie. Dobry nauczyciel matematyki winien więc taką wiedzę posiadać. Jeśli sam będzie odpowiednio matematykę rozumiał, to skutecznie i dobrze nauczy jej swoich uczniów.

2. Nauczanie matematyki realizowane na drugim etapie edukacyjnym.

2.1. Podstawy teoretyczne nauczania matematyki

Uczenie się matematyki stanowi jeden z obowiązkowych elementów kształcenia ogólnego, realizowanego w Polsce na wszystkich obligatoryjnych etapach edukacji. Uczenie się jest nieustającym procesem, własnością ludzkiego życia, która wyraża się w przyjmowaniu i przetwarzaniu informacji, które następnie są utrwalane i magazynowane w umyśle lub w jego wytworach po to, by w dalszej kolejności zostać wykorzystane do wywoływania strukturalnych i funkcjonalnych zmian w życiu jednostek, grup społecznych i społeczeństw (Kojs, 2014). Uczenie się może być także rozumiane jako zorganizowana aktywność, która obejmuje przejmowanie i asymilowanie informacji otrzymywanych z różnych źródeł, bezpośrednie wykorzystywanie tych informacji dla rozwiązywania zadań standardowych oraz samodzielnego zdobywania informacji, a także tworzenie subiektywnie nowych dla osoby uczącej się elementów wiedzy (Krygowska, 1977). W rozważaniach nad tematyką nauczania i uczenia się matematyki warto mieć na uwadze ogólne prawidłowości efektywnego i sprawnego procesu uczenia się. Każda z nich ma bowiem bezpośrednie przełożenie na proces uczenia się matematyki. A są nimi:

- „proces uczenia się (…) musi zachodzić w samym uczniu,

- uczenie się powinno ułatwiać kierowanie rozwojem własnej indywidualności, uczenie się jest procesem indywidualnym, gdyż każdy uczy się inaczej, we właściwy dla siebie sposób,

- uczący się powinien znać zasady, metody i techniki warunkujące skuteczny przebieg uczenia się,

- drogą do opanowania umiejętności i ukształtowania nawyku uczenia się jest udział w różnorodnych formach aktywności, za sprawą których uczniowie nabywają użytecznych doświadczeń,

- uczenie się wymaga od jednostki dużej aktywności, wytrwałości, samodzielności i pewności siebie,

- uczniowie uczą się najlepiej, gdy pobudza się ich chęć do uczenia się oraz gdy są świadomi celu swojej pracy,

- proces uczenia się wymaga należytego planowania, odpowiedniej organizacji i kontroli wykonania,

- uczenie się powinno być radosną, satysfakcjonującą działalnością, która pozwoli dziecku zaznać smak sukcesu.” (Dawid, 2010, s.51-52).

Ponieważ przedmiotem nauczania matematyki są pojęcia określające wielorakie stosunki ilościowe i przestrzenne wyrażone za pomocą symboli matematycznych a operowanie symbolami i pojęciami matematycznymi ze zrozumieniem wymaga umiejętności abstrahowania i uogólniania (Cydzik, 1990,), to proces uczenia się może być realizowany za sprawą uczenia się pamięciowego, uczenia się przez naśladownictwo, poprzez uczenie się w trakcie działania i poprzez próby i błędy, a także za sprawą uczenia się przez rozwiązywanie problemów i przez zrozumienie (Jankowski, 1975). Bardzo istotnym elementem podczas nauczania podstawowych pojęć jest pomaganie dziecku w stopniowym przechodzeniu od myślenia konkretnego do myślenia symbolicznego i abstrakcyjnego (Adamek, 2000).

Znaczenie edukacji matematycznej podkreślane jest w aktualnie obowiązującym prawie międzynarodowym. Parlament Europejski wyróżnił osiem kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie. Wśród nich znalazła się między innymi kategoria obejmująca kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii (Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej, 29.07.2020). Według ich definicji kompetencje matematyczne to „zdolność rozwijania i wykorzystywania myślenia i postrzegania matematycznego do rozwiązywania problemów w codziennych sytuacjach. Istotne są zarówno proces i działanie, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele). „(ibidem). Rozumienie matematyki oznacza znajomość sensu operacji matematycznych, wyrażającą się zdolnością dostrzegania związków między wielkościami oraz konsekwencji określonych przekształceń tych związków (Sitarska-Niemierko, 2004).

Wśród wielu sposobów myślenia o nauczaniu matematyki wyróżniamy dwa podejścia: instruktywne i konstruktywne. W pierwszym z nich przyjmuje się założenie, że uczenie się jest procesem biernego zapamiętywania z góry podanych, gotowych instrukcji. I to podejście zdaniem S. Turnaua może powodować powstanie szkodliwych dla ucznia „pseudokompetencji matematycznych" (Turnau, 1995, s.134-137), gdyż uczenie się matematyki sprowadzone jedynie do biernego odtwarzania uprzednio zapamiętanych schematów postępowania niesie za sobą niebezpieczeństwo bezrefleksyjnego ich stosowania przez uczniów (Tyl, 2006). I w takim właśnie przypadku uczniowie, którzy rozwiązują prawie wyłącznie zadania o charakterze zamkniętym, utwierdzają się w przekonaniu, że uczenie się polega głównie na pamięciowym przyswajaniu z góry ustalonego, kompletnego systemu wiedzy, w którym nie ma już miejsca na wyobraźnię, intuicję czy eksperymentowanie (Kapica, 2013). Nie ma więc wątpliwości, że taki sposób nauczania jest bardzo szkodliwym dla uczniów na każdym etapie edukacji. W konstruktywistycznym ujęciu edukacji matematycznej zakłada się natomiast, że dziecko/uczeń aktywnie badając środowiska za pomocą własnych doświadczeń, konstruuje swoją wiedzę o otaczającym go świecie. W takim ujęciu edukacja matematyczna prowadzi do zmian wyrażonych w uczeniu się poprzez rozumienie pojęć, konstruowanie sytuacji problemowych i formułowanie zadań o charakterze otwartym, poprzez które prowokowana zostaje aktywność uczniów (Nowak-Łojewska, 2015).

Konstruktywistyczne ujęcie edukacji matematycznej posiada ściśle określone cele, które podkreślają wszystkie niezbędne elementy nauczania i uczenia się matematyki, jakie powinny być realizowane w toku szkolnej edukacji. Należą do nich: wspomaganie rozwoju umysłowego dziecka, w szczególności tworzenia się w jego umyśle odpowiednich schematów poznawczych i rozwijania myślenia operacyjnego, zebranie przez dziecko doświadczeń niezbędnych do ukształtowania się odpowiednich pojęć matematycznych, stymulowanie rozumowań matematycznych, samodzielności myślenia i krytycyzmu, a także rozwijanie umiejętności matematyzowania łatwych zagadnień zaczerpniętych z otaczającej dziecko rzeczywistości i stosowania nabytej wiedzy w konkretnych sytuacjach (Semadeni, 2016). Niezaprzeczalnie można więc stwierdzić, że nauczanie matematyki wedle założeń konstruktywizmu sprzyja rozwijaniu umiejętności uczniów, przez umożliwienie im samodzielnego konstruowania wiedzy na bazie własnych przeżyć i osobistych doświadczeń, dlatego też ten kierunek myślenia o procesie nauczania i uczenia się matematyki wydaje się być najbardziej słusznym. Bowiem poprzez zwiększenie aktywności i samodzielności uczniów rozwija się u nich umiejętność krytycznego i logicznego myślenia.

2.2. Cele edukacyjne nauczania matematyki w klasach IV-VIII szkoły podstawowej

Cele edukacji stanowią świadomie założone skutki, które społeczeństwo pragnie osiągnąć poprzez funkcjonowanie systemu oświaty i które są zależne od charakteru każdego społeczeństwa i jego systemu oświaty (Okoń, 2017). Powinny więc być sformułowane w taki sposób, by w jak największym stopniu odpowiadały na potrzeby współczesnego świata. Cele edukacyjne formułowane są w odniesieniu do każdej z realizowanych w jej zakresie poszczególnych edukacji. W związku z podjętą w niniejszej rozprawie tematyką, swoją uwagę poświęcę celom edukacji matematycznej. Wykorzystywane są one zarówno na poziomie akademickim przez wykładowców przygotowujących przyszłych nauczycieli przedmiotu matematyka, jak i przez czynnych zawodowo nauczycieli obligatoryjnie zobowiązanych do ich realizacji Stanowią także podstawę działań podejmowanych zarówno przez teoretyków, jak i badaczy opracowujących teoretyczne aspekty edukacji matematycznej, czy rozwiązania metodyczne.

Według Z. Krygowskiej (1977) nauczanie matematyki powinno spełniać kilka postulatów. Należą do nich:

- intelektualizowanie postawy ucznia poprzez dostosowanie aktywności matematycznej do jego poziomu,

- pomaganie uczniowi w przyswojeniu przez niego aparatu pojęciowego, elementów języka i metod rozumowania koniecznych do rozwiązywania problemów życia codziennego

- nauczanie matematyki ma za zadanie rozwijać intuicję matematyczną uczniów,

- powinno pomagać uczniowi w przyswojeniu technik uczenia się matematyki tak, by przyczyniać się bezpośrednio do przyswojenia ogólnej techniki uczenia się.,

- powinno także zapewnić uczniowi opanowanie elementarnej wiedzy i sprawności matematycznych w takim zakresie i na takim poziomie, by miał on możliwość dalszego kształcenia się.

(Wojciechowska, 1994, s.117-118) wśród celów o charakterze dydaktycznym wyróżniła:

- „wstępne ukształtowanie rozumienia pojęć matematycznych określonych programem,

- opanowanie umiejętności matematycznych określonych programem,

- opisywanie konkretnych sytuacji za pomocą słów, schematów obrazowych i symboli matematycznych,

- przygotowanie do zdobycia umiejętności czytania i rozumienia tekstów matematycznych,

- rozwijanie wyobraźni geometrycznej,

- umiejętność schematyzacji i wstępnej matematyzacji konkretnych sytuacji,

- rozwijanie umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi w życiu,

- rozwijanie aktywności twórczej,

- rozwijanie samodzielnego, logicznego myślenia,

- rozwijanie ogólnych zdolności poznawczych.” (Ibidem, s.118).

Zaprezentowane powyżej ujęcia celów nauczania matematyki mają charakter teoretyczny. Zapoznają się z nimi przyszli nauczyciele, z kolei czynni zawodowo nauczyciele utrwalają je podczas szkoleń czy kursów. Rzeczywistość edukacyjna na tych ostatnich wymusza dodatkowo, by w swej pracy realizowali cele zapisane w Podstawie programowej kształcenia ogólnego. W trakcie pisania niniejszej rozprawy obowiązywała Podstawa programowa kształcenia ogólnego wprowadzona na mocy Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14.02.2017 roku. W Podstawie tej, na drugim etapie edukacyjnym cele kształcenia zostały podzielone i wymienione w następujący sposób:

I. Sprawności rachunkowa.

1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.

2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.

2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.

3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.

2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.

2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.

3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki (Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14.02.2017, 29.07.2020). Podstawa ta w dalszej swej części zawiera niezbędne do zrealizowania przez nauczycieli matematyki treści nauczania w klasach od IV do VIII wraz z wymaganiami szczegółowymi. W końcowej jej części zawarte zostały warunki i przykładowe sposoby realizacji. I tak zgodnie z sugestiami w niej zawartymi w klasach IV–VI, kiedy nauka matematyki odbywa się przede wszystkim na konkretnych

obiektach, należy zadbać o pracę na przykładach i zrezygnować z wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych. Zwraca się w tym miejscu uwagę na fakt, iż pomocne dla ucznia na tym etapie edukacyjnym są eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii. Jak również zaleca się by w klasach IV–VI, by być szczególnie ostrożnym przy wymaganiu od ucznia ścisłości języka matematycznego. Ponadto zwraca się również uwagę na dbanie o precyzję wypowiedzi, przy jednoczesnym unikaniu sytuacji, w której uczeń zostaje uznany za nieuzdolnionego matematycznie, gdy nie potrafi wyrazić poprawnego rozwiązania w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela. Umiejętność posługiwania się takimi pojęciami matematycznymi jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna na tym etapie edukacyjnym jest istotniejsza niż zapamiętanie formalnej definicji. Podkreśla się, iż najistotniejsze jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych. Ze względu na fakt, że obliczenia pamięciowe, w tym szacowanie wyników, bardzo przydają się w życiu codziennym, ważna staje się na tym etapie umiejętność samodzielnego wykonywanie obliczeń, zarówno pamięciowych jak i pisemnych. Ponadto daje ona uczniom o wiele lepsze wyobrażenie o liczbach i ich wielkościach, niż prowadzenie rachunków za pomocą sprzętu elektronicznego.

Podkreśla się również, że myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, co nie musi oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi więc na różną szybkość rozwoju myślenia uczniów klas VII i VIII, a także, częściowo klasy VI, Podstawa ta daje możliwość rozważenia wprowadzenia nauczania matematyki w grupach międzyoddziałowych na różnych poziomach, podobnie jak to jest praktykowane w nauczaniu języków obcych nowożytnych. Grupy te realizowałyby wówczas różne partie materiału w tempie dostosowanym do swoich możliwości, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej a uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, proponowałoby się zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulowany został ich rozwój. Dużą wagę Podstawa ta przypisuje zadaniom na dowodzenie stanowiącym ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien rozumieć istotę dowodzenia i już na tym etapie edukacyjnym powinien wykonywać proste zadania na dowodzenie Sugestie dotyczące wprowadzenia do rachunku prawdopodobieństwa są takie, by poprzedzić je zadaniami, w których uczniowie wykonują doświadczenia, na przykład wielokrotne rzuty kostką. Z kolei wskazania dotyczące zadań ze statystyki są takie, aby znaczna część zadań dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła. (ibidem)

Powyższe cele zapisane w podstawie programowej są uszczegóławiane jak również poszerzane w programach nauczania, zawsze jednak to one muszą stanowić podstawowy wyznacznik większości działań dydaktycznych podejmowanych w trakcie zajęć. Dlatego też warto podkreślić wagę programu nauczania, którego doboru możemy dokonać, lub samodzielnie taki program napisać, by w jak najlepszym stopniu zrealizować zawarte w nim cele. Większość dostępnych programów nauczaniu świetnie sprawdza się w kształceniu przeciętnych i słabych uczniów, nie stanowiąc jednocześnie dobrej podstawy kształcenia uczniów zdolnych. Wiele spośród nich nie stanowi także dobrej podstawy do rozwijania wśród uczniów takich cech jak: otwartości myślenia matematycznego, logicznego myślenia, precyzyjnego formułowania myśli a także pozbawia możliwości zrozumienia pewnych pojęć czy zagadnień z powodu braków innych, niezbędnych do zrozumienia tego ostatniego, a czasem nawet prawdziwego zrozumienia istoty samej nauki. Dla przykładu, skoro istotną wagę Podstawa przywiązuje do dowodzenia, to ja osobiście nie wyobrażam sobie wprowadzić tego pojęcia bez oparcia o elementy logiki czy dydaktyki matematyki. Ten i wiele innych przykładów a przede wszystkim potrzeba dobrego kształcenia uczniów uzdolnionych matematycznie skłoniła mnie do napisania własnego programu autorskiego, według którego nauczałam (Aneks nr 1do niniejszej pracy). Bardzo ważny jest także dobór metod pracy. Oczywiście wszystkie cele da się zrealizować metodami podającymi, jednak efektywność nauczania matematyki będzie wówczas niska. Celem nauczania matematyki powinien być trening nieschematycznego myślenia oraz kształtowanie twórczej, zachęcającej do aktywności podczas rozwiązywania problemów postawy (Reclik, 2015). Istotną rolę odgrywa formowanie poszukującej postawy intelektualnej, pobudzanie chęci do samodzielnego myślenia, stosowanie technik heurystycznych, rozwijanie umiejętności logicznego i krytycznego myślenia oraz logicznego argumentowania (Klus-Stańska, M. Nowicka, 2005). I ten cel powinien być realizowany już od najwcześniejszych lat. Preferowane przeze mnie metody pracy, sprzyjające jego realizacji zostały opisane w dalszej części tej dysertacji.

2.3. Myślenie matematyczne

Matematyka uczy nas takich sposobów myślenia, dzięki którym umiemy przeprowadzać rozumowania przez analogię i przez rozpatrzenie wszystkich przypadków a także potrafimy stwierdzić, czy rzeczywiście przeanalizowaliśmy wszystkie możliwości. Umiemy w swoich rozumowaniach opierać się na podobnych rozumowaniach wykonanych w przeszłości lub oderwać się od sposobu rozumowania typowego dla danej sytuacji i poszukać czegoś innego. Potrafimy również przyjrzeć się wykonanym obliczeniom i dostrzec w wynikach jakąś prawidłowość, której wcześniej nie dostrzegaliśmy i która może okazać się tym kluczowym, brakującym krokiem na drodze do rozwiązania. Ponadto takie sposoby myślenia przydatne są w każdej sytuacji a matematyka uczy nas ich najlepiej (Guzicki, 2013). Myślenie matematyczne jest przede wszystkim abstrakcyjne i polega na operowaniu abstrakcyjnymi pojęciami przy pomocy których dokonuje się wyrażania konkretnych problemów. Dlatego możemy rozwiązywać te problemy w oderwaniu od nieistotnych szczegółów i tym samym możemy upraszczać realne sytuacje do takich, które dają się rozwiązać. Poza tym podejściem bardzo ważną cechą myślenia matematycznego jest podejście dedukcyjne, czyli taki rodzaj wnioskowania, w ramach którego możemy wyprowadzać wyłącznie takie wnioski, które są wynikiem zastosowania ustalonych reguł do zbioru określonych aksjomatów i definicji. Jest ono istotnie odmienne od stosowanego w naukach przyrodniczych podejścia indukcyjnego, w ramach którego wyprowadza się wnioski ogólne ze szczególnych przypadków lub intuicyjnych przesłanek, które umożliwia formułowanie hipotez, przyrodniczych lub humanistycznych, które uogólniają to co wiemy na obszar tego co nie wiemy za cenę stopnia pewności otrzymanych wniosków. Wyniki takiego rozumowania nie są pewne, lecz jedynie prawdopodobne. Jeśli stosujemy rozumowanie dedukcyjne, to mamy zagwarantowaną absolutną pewność otrzymanych wniosków. Ale nie jest to pewność absolutna, jednie pewność w ramach abstrakcyjnego modelu, pod warunkiem, że definicje i aksjomaty przyjęte za przesłanki wnioskowania dedukcyjnego są spełnione. Tłumaczenie konkretnych realiów jakiejkolwiek badanej sytuacji na abstrakcyjny język modelu zawsze wiąże się z pewnego rodzaju idealizacją, dlatego też stosowanie rozumowania dedukcyjnego nie zapewnia pewności tego, że jego wyniki będą praktycznie stosowalne, ale daje teoretyczną pewność, na poziomie wyidealizowanych struktur i modeli. Żadne z podejść: dedukcyjne i indukcyjne nie jest ani lepsze ani bardziej prawdziwe, jednak to pierwsze jest bardziej precyzyjne i jednoznaczne, gdyż z określonych przesłanek: aksjomatów, definicji i reguł wnioskowania wynika zawsze ten sam wniosek, podczas gdy w podejściu indukcyjnym tego typu zasada nie musi być spełniona. Wybór któregokolwiek z tych podejść uzależniony jest od celu, który sobie stawiamy. I tak zazwyczaj przy konstruowaniu pewnych modeli teoretycznych ich podstawowe założenia i pojęcia formułuje się na drodze indukcyjnej, wnioski natomiast wyprowadza się już metodą dedukcyjną. Matematyka dzięki abstrakcyjności i dedukcyjności może występować pod postacią symbolicznego języka, w ramach którego można stawiać i formułować rozmaite zagadnienia. a zapis symboliczny umożliwia, właśnie dzięki metodzie dedukcyjnej analizowanie problemów przez przekształcenia pewnych symboli zgodnie z jednoznacznie określonymi regułami. Wkładając więc określone treści w jakiś matematyczny model danej sytuacji, z pewnością dojdziemy do zawsze takich samych wniosków, które z kolei możemy znów przełożyć na konkretne treści badanego zagadnienia, na czym polega właśnie istota matematycznego modelowania dowolnych procesów, w których wykorzystujemy matematykę jako uniwersalne narzędzie symbolicznego, abstrakcyjnego i dedukcyjnego modelowania zjawisk. Metody matematyczne można stosować w praktycznie każdej dziedzinie, w której mamy do czynienia z wielkościami, strukturą, przestrzenią, czy jakąś zmianą. Ogólne działy współczesnej matematyki, które zajmują się tymi pojęciami to odpowiednio: arytmetyka, algebra, geometria oraz analiza. Ze względu na fakt, że matematyka jest otwartą dyscypliną wiedzy i twórczości a w jej ramach powstają coraz to nowe pojęcia, teorie i techniki, umożliwiające bogate modelowanie rozmaitych zjawisk, dlatego powyższy podział jest przybliżony i niepełny, gdyż w rzeczywistości istnieje bardzo dużo obszarów matematyki, albo pośrednich pomiędzy powyższymi, albo zupełnie z nimi niewspółmiernych, dlatego też warto mieć na uwadze matematykę jako narzędzie, język i sposób modelowania konkretnych problemów w każdej sytuacji praktycznej (Kostecki, 2017).

Myślenie pełni istotną rolę w życiu człowieka i ma znaczący udział w procesie nauczania i uczenia się. Jak podkreślają (Philipp i in., 2019) efektywne nauczanie matematyki wymaga, by praktykujący nauczyciele skupiali się jednocześnie na matematyce i na sposobach rozumowania matematycznego dzieci, ale to podwójne skupienie jest ważne także w przygotowaniu przyszłych nauczycieli matematyki. Rolę rozumienia myślenia matematycznego uczniów i odróżnianie typów myślenia podkreślają także (Stockero, i in., 2017) i wskazują te umiejętności jako kluczowe elementy efektywnego nauczania matematyki. Wskazanym jest więc, by przyszli nauczyciele matematyki jako studenci mieli możliwość wglądu do prac pisemnych uczniów, przykładowo nagrań z lekcji, na których słychać wypowiedzi uczniów czy kontaktu na żywo z uczniami. Ważną rolę pełni zarówno myślenie konwergencyjne i myślenie dywergencyjne. To pierwsze (zbieżne, konwencjonalne) stanowi operację umysłową, polegającą na generowaniu nowej informacji (słów, idei, skojarzeń, rozwiązania problemu, gotowych wytworów, itp.) na podstawie informacji już posiadanych w sytuacji, gdy istnieje możliwość jednego właściwego rozwiązania. Tego typu myślenie gwarantuje skuteczność uczenia się reproduktywnego, czy przyswajania algorytmów działań. (Plich, 2005). Wykorzystywane jest ono głównie do rozwiązywania zadań o charakterze zamkniętym, ogranicza aktywność umysłową do wykonywania sztywno określonego wzoru, który prowadzi do prawidłowego rozwiązania zadania (Gębuś, Pierzchała, 2016). Podczas uczenia się matematyki myślenie to będzie wykorzystywane w przypadku rozwiązywania zadań standardowych czy algorytmicznych. Myślenie dywergencyjne z kolei (rozbieżne) to operacja umysłowa, która polega na generowaniu wielu nowych informacji (słów, idei, skojarzeń, rozwiązań problemu, gotowych wytworów, itp.) w oparciu o informacje już posiadane w sytuacji, gdy istnieje możliwość wielu rozwiązań problemu. Myślenie typu dywergencyjnego charakteryzuje się płynnością, giętkością oraz oryginalnością (Plich, 2005). Ten typ myślenia jest wykorzystywany do rozwiązywania zadań wiążących się z koniecznością poszukiwania rozwiązania, w sytuacji, gdzie nie ma wypracowanego schematu postępowania, który można zastosować podczas ich rozwiązywania. (Gębuś, A. Pierzchała, 2016). Jest ono więc konieczne do rozwiązywania zadań otwartych oraz zadań o charakterze problemowym.

Pojęcie myślenia matematycznego definiowane jest jako umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych, to jedna z głównych umiejętności, jaką powinien zdobyć uczeń w toku kształcenia ogólnego w szkole podstawowej. Stanowi ono dynamiczny proces, dzięki któremu jesteśmy zdolni do radzenia sobie z coraz bardziej złożonymi ideami, za jego pomocą rozszerza się nasze rozumienie (Raszka, 2013) a także jest środkiem służącym do poznania świata zewnętrznego, ze strony ilościowej za pomocą liczby oraz ze strony formy za pomocą wyobrażeń przestrzennych, charakteryzuje się zatem myśleniem analitycznym i geometrycznym (Neapolitański, 1958). Określane jest ono także jako zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych, które z jednej strony polegają na rozwiązywaniu zadań i innych problemów matematycznych, z drugiej zaś strony na poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości (Klus-Stańska, A. Kalinowska, 2004).

W procesie efektywnego rozwijania pojęć matematycznych istotną rolę pełni docenienie roli dziecięcych doświadczeń, a także umożliwienie uczniom przejęcia inicjatywy oraz organizowanie sytuacji dydaktycznych w taki sposób, by nie ograniczać ich aktywności i kreatywności, co podkreśla S. Semerádová (Semerádová, 2015) .Zatem bardzo istotna jest więc samodzielność uczniów w zakresie doboru optymalnych metod postępowania podczas rozwiązywania matematycznych zadań, jak i w zakresie samodzielnego tworzenia własnych pomysłów czy strategii działania. Oprócz tego, że myślenie matematyczne warunkowane jest aktywnością własną ucznia, jednym z jego wyznaczników stanowi sprawność. W jego odniesieniu sprawność ta polega na posługiwaniu się wygodnym, symbolicznym językiem, znajomości praw i reguł rozumowania, powodujących lepsze rozumienie i opanowanie definicji, twierdzeń i dowodów matematycznych oraz dostrzeganiu różnic między strukturą logiczną języka naturalnego i języka matematycznego. To właśnie kształcenie problemowe przynosi najlepsze efekty w rozwijaniu myślenia matematycznego uczniów. Podnosi ono bowiem aktywność myślową uczniów a także stymuluje ich do wypracowywania własnych strategii rozwiązywania problemów (Nowak-Łojewska, 2015), dlatego w trakcie nauczania matematyki należy zezwolić uczniom na podejmowanie przez nich samodzielnych działań, dotyczących zarówno sposobów myślenia, czyli wytwarzania własnych pomysłów na rozwiązanie poszczególnych problemów i zadań, jak i postępowania w trakcie ich rozwiązywania. Jak podkreśla (Boaler, 2015) stosowanie praktyk pedagogicznych i wychowawczych kładących nacisk na zapamiętywanie faktów matematycznych jest przyczyną zniechęcenia uczniów do tego przedmiotu. Sednem matematyki bowiem jest rozumowanie – zastanawianie się, dlaczego „coś" ma sens. Wskazuje również potrzebę zaprzestania dostrzegania matematyki jako liczenia oraz potrzebę spędzania przez nauczyciela większej ilości czasu na krytycznych stronach matematyki: rozwiązywaniu problemów i rozumowaniu.

Jeden z rodzajów myślenia, uznanym za kompetencje przyszłości stanowi myślenie krytyczne. Istnieje wiele definicji tego pojęcia, w uproszczeniu możemy uznać je za zdolność do racjonalnego i jasnego myślenia i w praktyce oznacza po prostu tyle, że nie wierzymy we wszystko co przeczytamy czy usłyszymy a dokonujemy analizy sytuacji, zadajemy sobie pytania zanim wyrobimy jakieś zdanie, potrafimy odróżnić fakty od ocen, nie kierujemy się emocjami a rozumem, myślimy logicznie, nie podejmując decyzje bierzemy pod uwagę różne opcje. Myślenie krytyczne pod tą nazwą zostało zainspirowane przez filozofa pragmatycznego Johna Deweya i poparte przez filozofa analitycznego Maxa Blacka (Ennis, R.H., 2015). Bardzo ważne jest, aby uczniowie na różnych poziomach edukacji nauczyli się myśleć krytycznie, gdyż umiejętność krytycznego myślenia jest jednym z wymogów procesu edukacyjnego. Jak podkreśla (Su i in., 2016) nauczyciel, który kładzie nacisk na rozumowanie i logikę na lekcjach matematyki daje swoim uczniom możliwość ćwiczenia krytycznego myślenia. Uczniowie mogą rozwijać tę umiejętność, kiedy stawiają czoła problemom matematycznym, rozważają wówczas możliwe rozwiązania, oceniają i uzasadniają swoje racje, co pozwala im stać się krytycznymi myślicielami. Ten typ myślenia i rozumowania pozwala uczniom zastanowić się nad tym, jak wykorzystają posiadane umiejętności matematyczne (tzn. jakiego doboru metody dokonają). Uczniowie uczą się bowiem: jakie strategie rozwiązywania problemów wybierać, wyciągać logiczne wnioski, redagować rozwiązania oraz wskazywać, jak te rozwiązania mogą być zastosowane do bardziej zaawansowanych problemów matematycznych. W artykule autorzy wskazują na konieczność stosowania krytycznego myślenia i podają przykład, jak krytyczne myślenie pomaga uczniom lepiej zrozumieć pojęcia związane z liczbami. Podkreślają również, że ten rodzaj rozumowania ma istotny wpływ na osiągnięcie sukcesu w podejmowaniu decyzji i wszelkich wyborów życiowych. Również (Maulidiya, Nurlaelah, 2019) zauważa, że jednym z modeli uczenia się, który zwiększa zdolność krytycznego myślenia i aktywnie angażuje uczniów, jest uczenie się oparte na problemach. Autorzy przeprowadzili eksperymentalne badania, których celem było zbadanie zdolności uczniów do krytycznego myślenia oraz ich aktywności. Na podstawie wyników badań i analizy danych autorzy doszli do wniosku, że uczenie się oparte na problemach może znacznie zwiększyć zdolność krytycznego myślenia uczniów.

2.4. Metody problemowe

Spośród wszystkich typów zadań matematycznych to zadania problemowe uznaję za najbardziej kształcące. Dydaktycy matematyki najczęściej nie definiują pojęcia problemu matematycznego, jak to czynią z innymi rodzajami zadań matematycznych. Za problem matematyczny możemy uznać pytanie dotyczące matematyki, na które albo nie jesteśmy w stanie natychmiast odpowiedzieć, albo nie pomaga nam w tym bezpośrednie zastosowanie znanych schematów. Koncepcja nauczania problemowego związana jest z nauczaniem realistycznym i czynnościowym, gdyż poza umiejętnością abstrakcyjnego myślenia potrzebne są także odwołania do doświadczeń i wyobrażeń w celu rozwiązania danego problemu.

Metody problemowe to metody samodzielnego przyswajania wiedzy, oparte na twórczej aktywności poznawczej i polegające na rozwiązywaniu problemów.
Umożliwiają przekształcenie wiedzy biernej w wiedzę czynną i sprzyjają zdobywaniu nowych wiadomości oraz wykorzystywaniu ich w praktyce. Stosowanie owych metod mobilizuje uczniów do analizy sytuacji, których od razu nie potrafią zrozumieć, wytłumaczyć czy rozwiązać a analiza takiej sytuacji wymaga wyodrębnienia danych, które są znane jak i tych, które są nieznane, co pozwala na wyszukiwanie informacji niezbędnych do wyjaśnienia zaistniałej sytuacji lub znalezienia sposobów umożliwiających rozwiązanie problemów z nią związanych (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021).

Do omawianej grupy metod stosowanych z powodzeniem w nauczaniu matematyki zaliczamy: klasyczną metodę problemową, wykład problemowy, wykład konwersatoryjny i dyskusję dydaktyczną (Łoś, Reszka, 2009). Wykład problemowy jest to metoda, która służy do postawienia, weryfikacji oraz rozwiązania problemu i stosowana jest w celu rozszerzenia aktywności uczniów w trakcie zapoznawania ich z nowymi wiadomościami. Polega ona na nawiązaniu kontaktu z uczniami, wzbudzaniu ich procesu myślowego, jak również sterowaniu nim. Nauczyciel, który prowadzi taki rodzaj wykładu, prowadzi przed słuchającymi dialog sam ze sobą, który nazywany jest dialogiem wewnętrznym. Z kolei wykład konwersatoryjny pozwala w dużym stopniu aktywizować uczniów i polega na przeplataniu fragmentów wykładu nauczyciela z wypowiedziami uczniów lub z wykonywaniem przez nich odpowiednich zadań teoretycznych albo praktycznych. Prowadzący zajęcia tą metodą co pewien czas przerywając swój monolog zadaje słuchaczom pytania, rozmawia z nimi, poleca im wykonanie jakiejś czynności bądź rozwiązanie jakiegoś zadania, żeby po uzyskaniu określonych rezultatów tego zabiegu móc kontynuować wykład. Z kolei zakończenie takiego wykładu konwersatoryjnego powinno być tak skonstruowane, by zawierało z jednej strony krótką syntezę omawianych na zajęciach treści, z drugiej zaś zmuszało uczniów do pewnych samodzielnych przemyśleń po zajęciach (Ibidem). Jak podkreśla (Căprioară, 2015) rozwiązywanie problemów stanowi najskuteczniejszą koncepcję nauczania matematyki w kontekście rozumienia pojęć matematycznych, kształcenia operacyjnej i podstawowej wiedzy matematycznej oraz zapewnienia trwałego i skutecznego uczenia się tego przedmiotu. Szczegółowego przeglądu literatury dotyczącej nauczania problemowego wraz z historią i wieloma przykładami dokonali autorzy książki (Liljedahl i in., 2016) *Problem Solving in Mathematics Education,* którzy podkreślają, iż nauczyciele matematyki na lekcjach powinni zwracać większą uwagę na stawianie uczniom problemów. Również (Mustaffa i in., 2016) podkreślają, że matematyka jest przedmiotem, który odnosi się do świata rzeczywistego i ma zastosowanie w różnych dziedzinach, dlatego też nauczanie i uczenie się matematyki wymaga ćwiczeń i praktyki. Bez nich bowiem uczniowie stają się tylko biernymi odbiorcami, którzy nie są w stanie myśleć matematycznie. Autorzy wskazują, że to właśnie nauczanie oparte na problemach jest podejściem skoncentrowanym na uczniu, będącym w stanie stymulować myślenie uczniów. Podobnie (Toraman i in., 2020) wskazują, jak bardzo ważny w nauczaniu matematyki jest proces rozwiązywania problemów. Wyniki przeprowadzonych przez autorów badań wykazały, że wraz ze wzrostem poziomu umiejętności rozwiązywania problemów wzrosły uczniowskie osiągnięcia z matematyki. W swej publikacji podkreślają również silną zależność pomiędzy myśleniem refleksyjnym a rozwojem umiejętności rozwiązywania problemów matematycznych oraz osiąganiem sukcesów matematycznych. Rozwiązywanie problemów i podejście badawcze także (Robinson, 2015) uważa za kluczowe w nauce matematyki dla uczniów na każdym poziomie edukacji. Należy jednak być świadomym, że stosowanie metod problemowych stanowi nie lada wyzwanie dla nauczyciela, gdyż wymaga zarówno odpowiedniej wiedzy merytorycznej, jak również wprawy. Dobry przykład, który to potwierdza stanowi opis i analiza trudności przyszłych nauczycieli matematyki szkół podstawowych- studentów Universitas Muhammadiyah Malang (UMM) w rozwiązywaniu problemów matematycznych oraz wyniki badania, które pokazały, że owi studenci doświadczali trudności we wszystkich etapach rozwiązywania zadań, które definiuje Polya a ich umiejętność rozwiązywania problemów matematycznych była niska (Yayuk, Husamah, 2020).

2.4.1. Heurystyczne metody nauczania matematyki

Przez pojęcie metody może być rozumiany pewien system określonego postępowania, sposób wykonania czynu złożonego, polegający na określonym doborze i układzie działań składowych, a przy tym uplanowiony i nadający się do wielokrotnego stosowania (Okoń, 1995) W praktyce szkolnej wyróżniamy dwa główne modele nauczania i uczenia się. Pierwszy z nich stanowi model tradycyjny (encyklopedyczny), który polega głównie na przyswajaniu wiedzy, a jego podstawą jest koncepcja psychologii behawioralnej a celem nauczania w takim ujęciu jest wyposażenie uczniów w wiedzę przez nauczyciela głównie za pomocą podających metod kształcenia (Kubiczek, 2005) Drugi to model nowoczesny (generatywny), którego istotą jest wytwarzanie i pobudzanie aktywności własnej uczniów a celem nauczania jest w nim wszechstronny rozwój uczniów oraz wyposażenie ich w umiejętności kluczowe. Sama wiedza natomiast jest traktowana tutaj jako środek do celu, a nie jako cel sam w sobie (Ibidem).

Heurystyka (gr. heurisko – znajduję) w ogólnym znaczeniu z jednej strony oznacza umiejętność dochodzenia do nowych prawd naukowych poprzez formułowanie nowych pomysłów rozwiązywania różnych zagadnień, z drugiej zaś strony jest pewną dyrektywą postępowania przy rozwiązywaniu nowych zagadnień. (Okoń, 1995). Nazywana jest także ars inveniendi i stanowi gałąź wiedzy zaliczaną do logiki, filozofii oraz psychologii, która często podawana jest tylko w ogólnych zarysach, rzadko zaś jest przedstawiana w sposób szczegółowy a za jej cel uważa się badanie metod i reguł dokonywania odkryć. W związku z powyższym heurystyczny oznaczać więc będzie „służący do odkrycia" (Polya, 2009) E. Nęcka rozumie heurystykę w dwojaki sposób, z jednej strony nazywa heurystyką interdyscyplinarną dziedzinę wiedzy i umiejętności praktycznych związanych z twórczym rozwiązywaniem zadań, z drugiej zaś strony rozumie ją jako metodę myślenia różną od algorytmu (Nęcka, 1994). Pamiętać, należy jednak, że rozumowanie typu heurystycznego nie rozwija się samoistnie w trakcie rozwoju procesu myślenia, dlatego też uczniowie muszą się go nauczyć. Heurystyczny sposób rozumowania stanowi pewien zbiór rad i wskazówek, odnoszących się zarówno do tego, jak przygotować się do podjęcia danego zadania, jak również zawierającym podpowiedzi na temat tego co i jak czynić oraz czego nie czynić w trakcie jego rozwiązywania a także pozwala na ocenianie stanu rzeczy oraz na decydowanie o kierunku, rodzaju, liczbie czy jakości dalszych kroków (Wojnowska, 2007).

Heurystyczne metody nauczania mają swoje korzenie już w starożytności a za podwaliny współczesnych heurystycznych metod rozwiązywania zadań uznaje się klasyczne metody, takie jak dialog sokratejski oraz metodę Kartezjusza. Zakładają one, iż istotą nauczania jest kierowanie myśleniem i działaniem uczniów za pomocą pytań dydaktycznych, stawianych im przez nauczyciela a odpowiedzi uczniów w konsekwencji umożliwiają im stopniowe odkrywanie, poszukiwanie i poszerzanie wiedzy oraz kształcenie sprawności i umiejętności. Dochodzenie do wiedzy, w tym również rozwiązywanie zadań, odbywa się tu drogą rozumowania (dociekania) i angażuje następujące procesy myślowe:

- „przypominanie (kto?, co?, gdzie?, kiedy?, podaj definicję),
- zrozumienie (opisz, porównaj, skontrastuj, wytłumacz, przedstaw w inny sposób),
- analizowanie (dlaczego?, znajdź przyczynę lub uzasadnienie, dokończ rozumowanie, wyciągnij wnioski, podaj przykłady świadczące o…, sformułuj konkluzje),

- syntezowanie (odpowiedz na postawione główne pytanie, sformułuj przewidywanie, zaproponuj, zaplanuj, rozwiń),

-ewaluacja (osądź, oceń, zdecyduj, oszacuj, wyraź własną opinię), „(Plich, 2003, s.168) . Podejście przedstawione powyżej nawiązuje w swojej istocie do sokratejskiej metody zadawania pytań, podczas której następuje stopniowe naprowadzanie uczniów na właściwe tory rozumowania. Nauczyciel nie wyręcza swoich podopiecznych w myśleniu, tylko zadawane przez niego pytania mają na celu pomoc w odkryciu wiedzy, czy też sposobu rozwiania zadania a nie podania rozwiązania w gotowej postaci.

Cechą charakterystyczną metod heurystycznych jest zawodność, ponieważ ich zastosowanie nie daje gwarancji rozwiązania problemu. Nie są one również w pełni określone, gdyż nie podają ściśle określonych operacji myślowych, które będą niezbędne do rozwiązania problemu (Galant, 1987). Jednak zawodność metod heurystycznych powinna być postrzegana jako ich ogromna zaleta, gdyż poznawcze lub praktyczne skutki popełnianych przez uczniów błędów pozwalają im na dokładniejsze przeanalizowanie i poznanie stosowanych przez nich procedur, tym samym powodując zwiększenie wysiłku intelektualnego, który owocować może głębszymi i trwalszymi efektami edukacyjnymi (Klus -Stańska, 2004). A samodzielne odkrycie wiedzy, czy samodzielne rozwiązanie przez ucznia matematycznego zadania, dokonane za pomocą stosowanych przez niego metod heurystycznych stanowi niezwykle cenny element matematycznego kształcenia, gdyż przynosi o wiele lepsze efekty niż rozwiązywanie zadań metodami algorytmicznymi.

Posługiwanie się metodami heurystycznymi podczas zajęć matematyki jest bardzo wartościowe ze względu na możliwość rozwijania samodzielności myślenia uczniów. I tak np. w swej publikacji (Nokhatbayeva ,2020) uzasadnia tezę, że heurystyczne metody nauczania matematyki są jednymi z najważniejszych metod nauczania matematyki. Posiadają one bowiem większą wartość kształcącą niż metody podające, ograniczające się do przekazywania uczniom wiedzy w postaci gotowej do przyswojenia (Milerski, Śliwerski ,2000).Wśród wielu zalet heurystycznego sposobu nauczania wskazać można również ćwiczenie zdolności uczniów do samodzielnego myślenia, rozwijanie ich inicjatywy, osiąganie zupełnego zrozumienia przyswajanego materiału przez uczniów, łatwość zapamiętywania, jako opartego na zdolności rozumowania, a nie na pamięci, co przekłada się z kolei bezpośrednio na trwałość zdobytej wiedzy (Neapolitański, 1958). Również (Apostol, 2017) podkreśla, że w dzisiejszych czasach metoda heurystyczna jest jedną z najważniejszych metod nauczania, która może być wykorzystana w nauczaniu i uczeniu się rozwiązywania problemów matematycznych. W swojej pracy (Tambunan, 2018) podaje wyniki badań, które ukazują, jak bardzo istotny wpływ na zdolności matematyczne uczniów w zakresie myślenia wysoce abstrakcyjnego ma stosowanie strategii heurystycznych a z kolei stosowanie strategii częściowo heurystycznych w dużym stopniu wpływa na zdolności uczniów do: rozumienia pojęć, kreatywności, komunikacji matematycznej, rozwiązywanie problemów oraz rozumowania.

W swym artykule (Eisenmann i in., 2015) przedstawiają wyniki badań przeprowadzonych w trzech klasach matematycznych w czeskich szkołach z udziałem 62 uczniów w wieku 12-18 lat. Uczniowie ci przez szesnaście miesięcy byli nakierowani na stosowanie wybranych strategii heurystycznych w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Autorzy przeprowadzili dwuwymiarową klasyfikację stosowania strategii heurystycznych, opierając się zarówno na pracach Pólyi, jak i Schoenfelda. Stworzyli w tym celu narzędzie, które pozwalało na opisanie zdolności ucznia do rozwiązywania problemów, składające się z czterech komponentów: inteligencji, rozumienia tekstu, kreatywności i umiejętności wykorzystania posiadanej wiedzy. W wyniku przeprowadzonych badań okazało się, że uczniowie stali się bardziej kreatywni oraz nastawili się bardziej pozytywnie do rozwiązywania problemów, gdyż zauważono, że rozwiązania zadań, w których zastosowano strategię heurystyczną były najbardziej efektywne. Z kolei nauczyciele biorący udział w badaniu pozostali dalej przy stylu nauczania opartym na dociekaniu a także zaczęli akceptować niestandardowe podejścia ucznia do rozwiązywania problemów.

Oddziaływania dydaktyczne na lekcjach matematyki powinny być dostosowane do potrzeb i możliwości każdego ucznia, gdyż zasada indywidualizacji ma ogromne znaczenie w procesie nauczania i uczenia się matematyki. Nauczyciel powinien więc stosować podczas zajęć matematycznych takie metody, które sprzyjają indywidualizacji pracy uczniów. Indywidualizacja w nauczaniu polega na uwzględnieniu w systemie dydaktyczno-wychowawczym różnic występujących w rozwoju poszczególnych uczniów oraz na dostosowaniu do tych różnic treści, metod i organizacji działań pedagogicznych nauczyciela (Okoń, 1959). Do takich wartościowych metod należą właśnie metody problemowe, a wśród nich heurystyczne metody, dzięki którym możliwa staje się indywidualizacja pracy uczniów. Metody te akcentują samodzielność uczniów w procesie dochodzenia do wiedzy, dzięki czemu m.in. rozwijają proces myślenia matematycznego.

2.4.2. Heurystyczne metody rozwiązywania zadań

Proces heurystycznego rozwiązywania zadań złożony jest z trzech podstawowych faz. I tak pierwszą z nich stanowi tzw. faza obserwowania, polegająca na analizie zadania, wyróżnianiu jego składników oraz powiązywaniu ich z posiadaną już wiedzą, czy ze znanymi sposobami działania. Druga z kolei polega na poszukiwaniu rozwiązania i bywa ona nazywana fazą odgadywania. Polega na syntezie rozwiązania poprzez zestawienie wytworzonych planów rozwiązania oraz prób ich realizacji. Zawiera ona także analizę osiągniętych postępów i popełnionych błędów oraz dążenie do uzyskania nowych środków i modyfikacji sposobu działania. Końcową fazę stanowi faza oceny rozwiązania, nazywana bywa fazą sprawdzania. Ma ona na celu ostateczną weryfikację otrzymanego wyniku (Góralski, 1980). Ponieważ fazy rozwiązywania zadań zgodne z procedurą heurystyczną są niemal identyczne, co w przypadku ogólnych faz rozwiązywania zadań czy problemów można odnieść wrażenie, że same metody są więc podobne. Niemniej jednak wyróżnikiem jest tu sposób działania, uwzględniający heurystyczne dyrektywy oraz wskazówki postępowania. A. Góralski wskazuje siedem podstawowych wyróżników metod heurystycznych spośród innych metod kształcenia. Zalicza do nich:

- stosunkowo rozległy obszar zainteresowań (z racji swojej ogólności metody te nadają się nadają się do rozwiązywania niemalże każdego typu zadań, nie ma tu nawet ograniczeń związanych z przedmiotem problemu),

- fakt stwarzania uwarunkowań sprzyjających powiązaniu zadania z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy i ze znanymi sposobami działania (postępowanie heurystyczne zachęca do korzystania z posiadanej już wiedzy i z posiadanych umiejętności, które stanowią bazę wyjściową do wytworzenia nowego sposobu rozwiązania zadania),

- korzystają one z możliwości odwoływania się do doświadczenia osoby je rozwiązującej, jako do źródła faktów wiążących się z zadaniem,

- staranie się o racjonalizację prób rozwiązywania, wyrażając się zestawieniem planów działania, analizą przyczyn i uwarunkowań osiągniętego postępu i popełnionych błędów oraz uczeniem się w toku rozwiązywania problemu (istotne jest tu stosowanie analogii i indukcji jako podstawowych form rozumowania),

- wyraźnie oddzielenie poszukiwania od oceny rozwiązania, odmienność zalecanych postaw i sposobów działania rozwiązującego,

- trudność przewidywania efektywności zastosowanych rozwiązań (Ibidem).

W wyniku stosowania metod heurystycznych można zaobserwować u uczniów szereg korzystnych procesów związanych z rozwiązywaniem matematycznych zadań, do których zaliczyć możemy między innymi konieczność uruchamiania strategii twórczego myślenia, konieczność posiadania zdolności do tworzenia hipotez oraz ich ciągłej weryfikacji, poszukiwanie niezawodnego dotąd sposobu działania, włączanie mniej racjonalnych czynników umysłowych, przy jednoczesnym poddawaniu ich ciągłej kontroli, a także radzenie sobie z niezidentyfikowaną lub słabo zidentyfikowaną sytuacją matematyczną i możliwością ich przenoszenia na zadania nie problemowe (Nowak-Łojewska, 2015)

Wymienione powyżej właściwości postępowania i myślenia uczniów w trakcie rozwiązywania zadań zdają się być wystarczającymi argumentami, które mogą zachęcić nauczyciela do stosowania w swojej pracy z uczniami heurystycznych metod nauczania podczas nauczania matematycznej. Uczenie się rozumiane jako samodzielne zdobywanie wiedzy przez ucznia jest naturalnym elementem procesu kształcenia, tymczasem w rzeczywistości edukacyjnej nadal często lekceważy się potencjał rozwojowy dzieci, w tym także posiadane przez nich wrodzone predyspozycje do działań o charakterze twórczym (Kapica, 2013). Taki stan rzeczy dotyczy w dużej mierze uczenia się matematyki, dlatego zwiększanie samodzielności uczniów w procesie uczenia się oraz stwarzanie im okazji do rozwijania aktywnej postawy jest szczególnie istotne na zajęciach matematyki. Zasadnym jest także wykorzystywanie metod nauczania, dzięki którym możliwe staje się optymalne rozwijanie potencjału tkwiącego w uczniach i właśnie do tego znakomicie nadają się metody heurystyczne, których walory, w szczególności w rozwoju uczniów uzdolnionych matematycznie wskazane zostały w niniejszej rozprawie i stanowią obok autorskiego programu nauczania główną oś niniejszej dysertacji.

2.4.3 Wybrane koncepcje efektywnego nauczania matematyki- ponadczasowość koncepcji George Polyi

Skuteczne nauczanie matematyki zależne jest od wielu czynników, między innymi od właściwego przygotowania merytorycznego nauczyciela, jego cech osobowości, metod i form pracy z uczniem, dlatego też należy być świadomym, że nie istnieje gotowa recepta na skuteczne rozwijanie myślenia uczniów, tym bardziej na osiągnięcie sukcesu w edukacji matematycznej. Za skuteczne nauczanie matematyki ja uważam takie nauczanie tego przedmiotu, które prowadzi uczniów do zrozumienia pojęć i twierdzeń matematycznych oraz umiejętnego stosowania ich do rozwiązywania konkretnych zagadnień. Powinno więc ono mieć na celu to, aby uczniowie potrafili dostrzegać w otaczającym ich świecie, że pewne sytuacje i zjawiska można opisać w języku matematyki. A sama matematyka nie jest zbiorem skomplikowanych i pustych formuł, lecz nauką, która powinna stać się narzędziem do upraszczania lub wręcz dawania możliwości rozwiązywania tych problemów (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a).

Ostatnie lata przyniosły wiele koncepcji efektywnego nauczania a wyniki badań dają podstawy naukowe do zastosowania tych zasad w pracy zawodowej nauczyciela. Dokonując krótkiego przeglądu współczesnych koncepcji efektywnego nauczania jedną z koncepcji wartą uwagi stanowi zestaw strategii nauczania zaprezentowanych przez profesora Toma Corcorana z Teachers College Uniwersytetu Columbia w wygłoszonym w dniu 17 listopada 2014 roku wykładzie dla dyrektorów warszawskich szkół, współpracujących z Centrum Edukacji Obywatelskiej w programie Szkoła Ucząca się. Zapoznał on uczestników z kilkoma praktykami, które systematycznie stosowane, przy niewielkim nakładzie finansowym w znaczny sposób zwiększają motywację uczniów i intensywność ich pracy a co za tym idzie przynoszą skuteczne efekty nauczania. Są to m.in. planowanie lekcji i zadań edukacyjnych, opracowywanie zadań o odpowiednich wymaganiach poznawczych, współpraca uczniów, umiejętne zadawanie pytań, stymulowanie dyskusji zorientowanej na ucznia, polecanie uczniom częstego zapisywania własnych pomysłów i regularne odwoływanie się do nich przez nauczyciela (Szwed, 2018). Carol Dweck (2014) z kolei promuje postawę nastawioną na rozwój. Według niego rozwój i praca umożliwiają zmiany poziomu inteligencji a głównym czynnikiem decydującym o osiągnięciu mistrzostwa nie są wrodzone zdolności a celowe zaangażowanie. Osiągnięcia i umiejętności są bowiem rezultatem zaangażowania i pracy. Wskazuje również istotę postawy nauczyciela, który to powinien zdobywać wiedzę wraz ze swoimi uczniami. Koncepcja ta nie dotyka dydaktyki ogólnej i szczegółowej. John Hattie (2015) w oparciu o swoje wieloletnie badania dowodzi również, że nauczyciele są jednym z najważniejszych czynników wpływających na uczenie się. Nauczyciele, którzy odnoszą sukcesy koncentrują się na kształtowaniu sposobu myślenia i wnioskowania skoncentrowanego na rozwiązywaniu problemów. Kładą nacisk na przekazywanie nowych zagadnień i nowych sposobów ich rozumienia a następnie monitorują postępy uczniów. Tacy nauczyciele skupiają się również na zapewnieniu we właściwym czasie odpowiedniej informacji zwrotnej, by w ten sposób pomagać uczniom osiągać korzyści z lekcji, jak również odnośnie swojej siły oddziaływania. Takie podejścia do roli nauczyciela, jakie prezentują koncepcje Dwecka i Hattiego odstają od założeń dydaktyki, która to raczej koncentruje się na czynnościach nauczyciela, niż na jego postawach czy osobowości.

Kwintesencje wymienionych powyżej koncepcji stanowi pomysł Jo Boaler (2016), autorki *Mathematical Mindsets.* Według niej każdy uczeń może opanować matematyczną wiedzę na najwyższym dla siebie poziomie. Uważa ona bowiem, że rozwój matematyczny jest możliwy i zależny w dużej mierze od nastawienia ucznia. Popełniane błędy w tym procesie uznaje za bardzo znaczące, gdyż stymulują one rozwój skłaniając do twórczej refleksji. Za ważną uznaje także pozytywną reakcję nauczyciela, która sprzyja powstawaniu nowych połączeń nerwowych. Bardzo ważne dla badaczki są pytania a nauczyciel powinien wspierać ucznia w ich zadawaniu. Matematyka dotyczy poszukiwania powiązań a podejmowane przez nauczyciela działania powinny przybliżać ucznia do rozumienia pojęć. Podczas lekcji uczniowie mają się uczyć a nie wykazywać a samo nauczenie się matematyki wymaga czasu i wysiłku. Najważniejsza jest pełnia zrozumienia, nie zaś szybkość rozwiązywania zadań. Nauczyciel powinien także doceniać ucznia i pokazywać ważność jego rozumowania.

Wymienione i krótko opisane cechy zawarte we współczesnych koncepcjach efektywnego nauczania powinny odgrywać istotną rolę w nauczaniu matematyki i nie powinno się ich pomijać, gdyż w znaczny sposób mogą one wpłynąć na poprawę jakości kształcenia tego przedmiotu na każdym z etapów edukacji, niemniej jednak, uważam, że bez pozostałych kompetencji zawodowych nadal nie osiągniemy zamierzonej skuteczności w nauczaniu tegoż przedmiotu a w.w. teorie nie odnoszą się w ogóle do dydaktyki matematyki. Ja za podstawowe kompetencje zawodowe uznaję kompetencje merytoryczne nauczyciela przedmiotu, kompetencje dydaktyczne, czyli znajomość dydaktyki matematyki, jak również właściwy dobór metod, form i strategii pracy oraz kompetencje psychologiczne (pewne cechy również osobowości) (Przybyła i in.,2020) i uważam, że tylko posiadanie ich wszystkich razem może przynieść efektywne nauczanie tego przedmiotu. Dlatego dydaktykę matematyki i jej praktyczne zastosowania uznaję za bardzo istotne. I tak żeby praca z uczniami stała się bardziej interesująca i dawała nauczycielowi satysfakcję a także przynosiła lepsze efekty warto wprowadzać do swojego warsztatu pracy różne innowacyjne rozwiązania dydaktyczne, zarówno w zakresie sposobów i warunków realizacji procesu dydaktycznego, jak również metod, form pracy czy strategii nauczania. W świetle obowiązujących przepisów wprowadzenie działalności innowacyjnej w szkołach nie jest trudne i nie jest związane już z żadną dodatkową pracą biurokratyczną, bowiem od 2016 roku zniesiono konieczność zgłaszania innowacji pedagogicznej kuratorowi oświaty i organowi prowadzącemu. Zniesiono również wymagania formalne warunkujące rozpoczęcie działalności innowacyjnej i aktualnie to szkoła decyduje, jakie innowacje będą podejmowane, realizowane i dokumentowane (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a). Do innowacyjnych sposobów i warunków realizacji procesu dydaktycznego w zakresie nauczania przedmiotu matematyka zaliczyć można wiele wartych uwagi praktyk, np. rezygnację z pracy z podręcznikiem, na rzecz autorskich materiałów, tworzenie własnych programów nauczania (nauczyciel może napisać własny program, może modyfikować już istniejący, może wybrać gotowy, z dopuszczonych do użytku programów autorskich) i tzw. klas autorskich, rezygnację z tradycyjnych ocen, zaopatrywanie szkół w niezbędny sprzęt multimedialny, umożliwiający uczniom naukę wspomaganą wybranymi programami komputerowymi, nawiązywanie trwałej współpracy z Uczelniami, lub ośrodkami naukowymi (partnerskie umowy, gwarantujące systematyczne prowadzenie przez pracowników naukowych zajęć dla uczniów danej szkoły), czy też podnoszenie poziomu kompetencji kadry nauczycielskiej w zakresie danej innowacyjnej metody, formy, czy strategii nauczania i wiele innych (Ibidem). W trakcie pracy zawodowej poza zrealizowanymi innowacjami: napisanymi programami autorskimi, które poszerzały treści podstawy programowej m.in. o elementy logiki i teorii mnogości, elementy teorii liczb, geometrii a których bardzo istotną część stanowiła historia matematyki, gdyż każdemu wprowadzanemu zagadnieniu towarzyszyły elementy historii z nim związanej (uważam bowiem, że nauka matematyki, bez znajomości choć fragmentów jej historii i wiedzy ogólnej o tej nauce, staje się dla uczniów nauką oderwaną od rzeczywistości i nieciekawą) oraz prowadzonymi klasami autorskimi wielokrotnie podczas zajęć stosowałam innowacyjne metody nauczania. M.in. lekcję odwróconą, metodę projektów, jak również wykorzystywałam wielokrotnie programy komputerowe wspomagające nauczanie tego przedmiotu takie jak Excel, czy GeoGebra, ponadto nauczając matematyki wielokrotnie korzystałam z własnych, przygotowanych materiałów, tj. np. autorskiego Skryptu nauczania matematyki dla uczniów zdolnych, (który stanowi załącznik do niniejszej rozprawy) czy własnych kart pracy, co nie znaczy, że nie używam także podręcznika.

Inny nowatorski pomysł, wcielony w życie przez jedną ze szkół, w której pracowałam stanowi jednoczesne równoległe nauczanie matematyki w danej klasie przez dwóch nauczycieli tego przedmiotu. Uważam go za bardzo wartościowy, gdyż daje on uczniom możliwość spojrzenia na pewne zagadnienia z różnych perspektyw, poznania różnych „narzędzi" pozwalających rozwiązać zadania, jak również często innego toku rozumowania bądź pomysłów prezentowanych przez obu tych nauczycieli. Ponadto uczniowie nie przyzwyczajają się do pewnych, stałych nawyków, prezentowanych podczas rozwiązań zadań, przez jednego nauczyciela, przez co są bardziej otwarci na różne podejścia, jak również akceptują wśród siebie różne sposoby przedstawiania rozwiązań zadań.

Każdej prowadzonej przeze mnie lekcji matematyki towarzyszyła miła atmosfera, lecz bardzo intensywna praca a dobierane zadania były zawsze na wysokim poziomie. Ponadto uczniowie klas autorskich mieli wielokrotnie możliwość udziału w zajęciach prowadzonych przez pracowników naukowych. Podsumowując, strategie efektywnego nauczania matematyki powinny być oparte na nowoczesnych koncepcjach nauczania, wykorzystywać różne metody nauczania wspierane narzędziami TIK a prowadzonym lekcjom powinna zawsze towarzyszyć dobra atmosfera i motywowanie uczniów do nauki.

Przedstawię teraz pomysł pewnego światowej sławy matematyka, pochodzenia węgierskiego -George Polya, który uważam za ponadczasowy. W publikacjach ukazuje on swoje wieloletnie doświadczenie w rozwiązywaniu matematycznych zadań, a robi to w taki sposób, że niemal każde zadanie staje się łatwe do rozwiązania. Sam nie jest dydaktykiem, jednak przez to, że wie, jak rozwiązuje się zadania, nie czyni z tego żadnej filozofii, tylko opowiada, naturalnie i zrozumiale dla każdego, czy to nauczyciela, czy ucznia. *Odkrycie matematyczne* George Polya powstało już w 1962 roku, ale jego praktyczny przekaz i zachęcający opis mogą do dziś stanowić niezwykłą inspirację dla nauczycieli, którzy poszukują sposobów na wzmocnienie efektywności nauczania matematyki. Według niego bowiem nauczanie jest sztuką a szczególnie nauczanie matematyki.

Ogromną wagę rozwiązywania problemów matematycznych jako skutecznego sposobu rozwijania umiejętności XXI wieku i zapewniania uczniom międzyprzedmiotowych umiejętności podkreśla (Szabo i in., 2020). Autorzy publikacji przedstawiają konkretne przykłady dowodzące, że heurystykę Pólyi można wykorzystać w szerszym kontekście, że daje ona uczniom możliwość zdobycia nowoczesnych umiejętności potrzebnych do odniesienia sukcesu zawodowego. Włączając w proces uczenia się i ćwicząc określone metody rozwiązywania problemów matematycznych, uczniowie mogli nauczyć się sposobu myślenia, po to, by skutecznie podchodzić do problemów i rozwiązywać je w szerszym kontekście życiowym. Wyniki tego artykułu dostarczają nauczycielom matematyki i edukatorom metod, modeli uczenia się i strategii rozwijania umiejętności XXI wieku u uczniów na wszystkich poziomach nauczania podczas zajęć.

Podbudowę koncepcji efektywnego nauczania matematyki według Polyi stanowią przedstawione przez niego efektywne metody uczenia się. I tak wyróżnia on trzy główne metody uczenia się: aktywne uczenie, najwłaściwsza motywacja i następstwo faz. Uważa bowiem, że uczenie powinno być aktywne, prowokujące pracę umysłu a za najlepszy sposób nauczenia się czegokolwiek uznaje odkrycie tego samemu. Podkreśla także rolę pobudzania ucznia różnymi bodźcami do nauki, w szczególności poprzez zainteresowanie przedstawianym materiałem. Uważa bowiem, że uczenie będzie efektywne wtedy, gdy uczeń będzie zainteresowany przyswajanym materiałem i będzie czerpał zadowolenie z powodu swojej aktywności. Uczenie ma rozpoczynać się od działania i przyswajania, prowadzić dalej ku słowom i pojęciom a kończyć na pożądanym sposobie myślenia (Szwed, 2018).

Matematyki nie da się ani nauczać, ani nauczyć bez rozwiązywania zadań, gdyż rozwiązywanie zadań kształtuje u uczniów umiejętność posługiwania się metodami matematycznymi w nowych sytuacjach a także pozwala na opanowanie podstawowych pojęć matematycznych (Kawiak, 2018). Ponadto rozwiązywaniu zadań w całej podstawowej edukacji matematycznej poświęca się znacznie więcej czasu, niż wprowadzaniu potrzebnej teorii, dlatego też ich właściwy dobór jest dla mnie bardzo istotny. Polya (1975) również swą szczególną uwagę poświęca rozwiązywaniu zadań. Wyróżnia on trzy fazy rozwiązywania przez ucznia zadań: faza badania, formalizacji i przyswajania. Pierwsza faza rozwijana jest na najbardziej intuicyjnym poziomie, druga z kolei prowadzi do wyższego, bardziej pojęciowego poziomu, dzięki wprowadzaniu terminów, definicji i twierdzeń, z kolei faza przyswajania jest próbą dostrzeżenia w zadaniu tego, co najważniejsze (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a). W szkole na lekcjach matematyki powinno się więc przedstawiać zadania o bogatym kontekście, mogące dać zaczątek dalszym badaniom a także dających możliwość poznania, na czym polega praca naukowa. Właściwy dobór zadań dla uczniów o rozmaitych możliwościach uważam za kluczowy w dążeniu do skutecznego nauczania tego przedmiotu. (Major i in., 2016) wskazują, iż praca nad odpowiednio dobranymi zadaniami powinna rozwijać intuicje matematyczne i twórcze myślenie, jak również prowokować do stawiania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi, zachęcać do kreatywności a także inspirować do podejmowania poszukiwań, prowadzenia badań czy eksperymentowania, jak również nawet stawiania hipotez i ich weryfikowania (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a). Spośród wszystkich typów zadań matematycznych to zadania problemowe uznaję za najbardziej kształcące. Dydaktycy matematyki najczęściej nie definiują pojęcia problemu matematycznego, jak to czynią z innymi rodzajami zadań matematycznych. Za problem matematyczny możemy uznać pytanie dotyczące matematyki, na które albo nie jesteśmy w stanie natychmiast odpowiedzieć, albo nie pomaga nam w tym bezpośrednie zastosowanie znanych schematów (Ibidem).

Wracając do cennych rad Polyi, które przytacza (Szwed, 2018) na szczególną uwagę zasługuje jeszcze kilka z nich. Jest to m.in. stopień poznania swojego przedmiotu przez nauczyciela. Według Polyi przedmiot, który wykłada nauczyciel powinien być obiektem jego zainteresowania, bowiem bez pasji i zaangażowania nauczyciel nie pozna swojego przedmiotu. Nauczyciel powinien również wiedzieć, że najlepszym sposobem na nauczenie się czegokolwiek jest odkrycie tego samemu. Podkreśla również znaczenie kontaktu i relacji nauczyciela z uczniami a także kwestie przekazywania uczącym nie tylko wiadomości, ale także umiejętności, postaw myślowych, czy też pewnych nawyków pracy dydaktycznej, ponieważ, jak twierdził na całość wiedzy składają się wiadomości i umiejętności. Umiejętności rozumiane są tu jako zbiór użytecznych nawyków myślowych i zdolność do pracy metodycznej. Za fundamentalną postawę umysłową Polya uznaje zdolność odgadywania a nauczanie uczniów rozumnego i ukształtowanego zgadywania opartego na rozsądnym zastosowaniu indukcji i analogii stanowi dla nauczyciela matematyki nie lada wyzwanie. Podkreśla również, że ze względu na charakter matematyki, jako nauki rozumowania wiarygodnego i dedukcyjnego nauczyciel może u uczniów kształtować umiejętność dowodzenia. Ponadto to właśnie jego rolą powinno być dokładne wytłumaczenie uczniom, jak rozwiązywać podstawowe typy zadań, pokazując przy tym pouczające aspekty tego rozwiązania. Polya ostrzega też przed wyręczaniem uczniów w rozwiązywaniu zadań oraz podkreśla, że praktyką nauczycielską absolutnie nie do przyjęcia jest narzucanie uczniom swojego zdania (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a).

Warto zaakcentować również wskazany przez (Szwed, 2018) sposób rozumienia poziomów matematycznej wiedzy uczniowskiej, którą Polya opisuje za pomocą pięciu poziomów. Pierwszy z nich nazywany przez niego poziomem mechanicznego opanowania reguły rozumiany jest jako pamięciowe opanowanie przez ucznia reguły, którą jest on w stanie poprawnie zastosować. Drugi poziom, nazywany poziomem indukcyjnego opanowania reguły, czyli wypróbowania przez ucznia reguły w pewnych prostych przypadkach, w których przekonuje się, że zastosowanie jej daje poprawny wynik. Trzeci Polya nazywa poziomem racjonalnego opanowania reguły, czyli zrozumienia dowodu reguły. Czwarty natomiast to poziom intuicyjnego opanowania reguły, czyli zrozumienia jasno i wyraziści, reguły, mając pewność, że jest prawdziwa. Piąty, ostatni nazywa poziomem wiedzy dobrze utrwalonej, dobrze powiązanej i zorganizowanej (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a). Warto ukazać jeszcze na zakończenie omawianej koncepcji (Ibidem), jak ważna dla

Polyi jest rola nauczyciela, którego w żaden sposób nie da się ani wyręczyć, ani zastąpić. Takie właśnie podejście do roli nauczyciela pokazuje większość współczesnych koncepcji nauczania, o których wspominałam w tym podrozdziale, ponadto w swej koncepcji daje on pewną otwartość pisząc, że „każdy dobry nauczyciel jest różny od innego dobrego nauczyciela" (Polya, 1975). Dlatego też wśród ogromu współczesnych koncepcji nauczania warto brać pod uwagę cenne rady Polyi, zachowując przy tym swój własny nauczycielski styl (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021a).

PODSUMOWANIE:

Uczenie się matematyki stanowi jeden z obowiązkowych elementów kształcenia ogólnego, realizowanego w Polsce na wszystkich obligatoryjnych etapach edukacji, dlatego też bardzo istotne na każdym z tych etapów jest odpowiednie podejście nauczyciela matematyki do nauczania i odpowiedni dobór metod nauczania. Wśród wielu sposobów myślenia o nauczaniu matematyki to właśnie nauczanie wedle założeń konstruktywizmu sprzyja rozwijaniu umiejętności uczniów, umożliwiając im samodzielne konstruowanie wiedzy na bazie własnych przeżyć i osobistych doświadczeń, które w konsekwencji rozwija u nich umiejętność krytycznego i logicznego myślenia. Za najbardziej wartościowe metody nauczania matematyki i rozwiązywania zadań autorka rozprawy uznaje metody problemowe, a wśród nich heurystyczne metody, które to akcentują samodzielność uczniów w procesie dochodzenia do wiedzy, dzięki czemu m.in. rozwijają proces myślenia matematycznego. Szczególną uwagę w tej części poświęcono heurystycznej koncepcji nauczania matematyki G. Polyi oraz nauczaniu problemowemu. Metody te stanowią również jeden z najistotniejszych elementów empirycznej części tejże dysertacji.

3. Wokół uzdolnień matematycznych.

3.1. Analiza struktury uzdolnień i zdolności matematycznych w literaturze przedmiotu.

Ze względu na odmienny i specyficzny charakter matematyki, wyróżniający ją spośród innych nauk, również definiowanie takich pojęć jak: zdolności, uzdolnienia, talent czy geniusz matematyczny stanowi nierozstrzygnięty problem wśród badających. Matematyka, stawiająca wymagania abstrakcyjnego i dedukcyjnego myślenia, mająca formalny charakter tworzy pewną barierę, którą tylko nieliczni przekraczają. Warto również zauważyć, że większość psychologicznych badań dotyczących wyżej wymienionych pojęć odnosi się do szkolnych uzdolnień matematycznych uczniów (Dąbek 1984; Krupa 1986, 1987; Kotlarski 1995; Gawda 1996), którzy ucząc się matematyki poznają tylko szkolną wiedzę, stanowiącą pewne wybrane elementy różnych dziedzin tej nauki. Odpowiedzi na pytanie, dlaczego poznawanie tej wiedzy szkolnej jest dla jednych proste, zagadnienia są zrozumiałe a innym spędzają sen z powiek pomoże nam dokonać przegląd wyników badań dotyczących analizy struktury uzdolnień matematycznych. Mianem uzdolnień matematycznych określamy specyficzne własności percepcji, myślenia i pamięci przejawiające się na materiale liczb i symboli. Dokonując przeglądu literatury przedmiotu i analizując historię badań dotyczących uzdolnień matematycznych zauważalne są dwie grupy definicji określających to pojęcie.

Pierwsza z nich to grupa definicji strukturalnych, czyli takich, które skoncentrowane są na elementach składowych uzdolnień matematycznych i wynikającej z nich strukturze uzdolnień. Za przykład może posłużyć tu definicja Krutieckiego (1971). Pisze on, że uzdolnienia matematyczne charakteryzuje uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i oznaczeń matematycznych oraz matematyczny typ myślenia. Druga z nich to grupa definicji funkcjonalnych, czyli takich, które zwracają uwagę na funkcjonalny charakter uzdolnień. Zakładają one, że każde uzdolnienie, niezależnie od elementów, które ją tworzą jest uzdolnieniem do czegoś. Rican (1964- za: Kość 1982) uzdolnienia matematyczne definiuje jako dyspozycje, które stanowią warunek pomyślnego uczenia się i uzyskiwania osiągnięć w matematyce. Kość (1982) uważa, że uzdolnienia matematyczne pozwalają na opanowanie specyficznego systemu symboli matematycznych i sprawne operowanie nimi, w szczególności w procesie rozwiązywania problemów matematycznych. W celu uzupełnienia kontekstu definicji warto wspomnieć jeszcze o rodzajach uzdolnień matematycznych. Mianowicie wyróżnia się (Krutiecki, 1968, za: Gawda 1996) uzdolnienia produktywne -heurystyczne, pozwalające na formułowanie oryginalnych praw, czy znajdowanie nowych rozwiązań problemów matematycznych (uzdolnienia matematyczne w tym ujęciu nabierają charakteru uzdolnień twórczych) oraz uzdolnienia nieproduktywne- algorytmiczne, związane z opanowaniem znanych schematów rozwiązań.

Analizując literaturę warto również zwrócić uwagę na definicje rosyjskich psychologów. I tak B. Tiepłow (1951) wyróżnia dwa pojęcia: zdolności i uzdolnienie. To pierwsze określa w następujący sposób: „zdolnościami nazywamy poszczególne właściwości psychiczne, będące warunkiem pomyślnego wykonania jakiejś jednej lub kilku działalności". Szereg różnych zdolności to z kolei składowe uzdolnienia, które B. Tiepłow (1951) określa tak: „To swoiste zespolenie zdolności, które zapewnia człowiekowi wykonanie jakiejkolwiek działalności, nazywamy uzdolnieniem do danej działalności. Wysoki stopień uzdolnienia nazywamy talentem”. Zbigniew Pietrasiński (1976) z kolei definiuje zdolności w następujący sposób: „Zdolnościami nazywamy takie różnice indywidualne, które sprawiają, że przy jednakowej motywacji i uprzednim przygotowaniu poszczególni ludzie osiągają w porównywalnych warunkach zewnętrznych niejednakowe rezultaty w uczeniu się i działaniu”. Zdolności są więc rozumiane jako potencjalna szansa, która aktualnie nie występuję, ale można ją nabyć, biegłość w wykonywaniu jakiejś czynności lub możliwość do wykonywania jakiejś czynności, czy też właściwości indywidualne człowieka, zapewniające mu powodzenie w jakimś działaniu. Uzdolnienia z kolei jako zdolności kierunkowe, które warunkują ponadprzeciętny poziom wykonywania jakiejś działalności.

3.2. Próba definicji uzdolnień matematycznych.

Analiza literatury i własne obserwacje pozwalają na stworzenie następującej definicji uzdolnienia matematycznego: „Jest to rozbudowana struktura mentalna składająca się z szeregu uzdolnień wzajemnie ze sobą powiązanych, takich jak:

– zdolność do pamiętania i rozumienia wzorów, twierdzeń oraz dowodów,
– umiejętność odkrywania stosunków oraz zależności,
– umiejętność wykorzystania zdobytej wiedzy w trakcie rozwiązywania zadań,
– zdolność do wyciągania wniosków (Ebby i Smutny, 1998; Pankiewicz, 2007; Szmidt, 2018).”

Uzdolnione matematycznie są więc na pewno te dzieci, które potrafią radzić sobie z nowymi pojęciami i widzą zależności pomiędzy nimi. Z obserwacji własnych dokonanych w pracy w szkole podczas lekcji wprowadzających nowe pojęcia czy twierdzenia wynika, że tylko nieliczna grupa uczniów potrafi rozwiązywać zadania bez uprzednio rozwiązanych podobnych zadań. Tę nieliczną grupę cechuje zrozumienie zagadnienia. Niektórzy z nich dostrzegają nawet zależności pomiędzy pojęciami, które świadczy o jeszcze głębszym zrozumieniu a co za tym idzie talencie matematycznym. Większość uczniów dopiero po rozwiązaniu kilku przykładowych zadań potrafi rozwiązać kolejne, odtwarzając pewien schemat postępowania. Część z tych osób potrzebuje więcej czasu, by zrozumieć nowe pojęcia, większość jednak pozostaje na etapie odtwórczym a opanowanie algorytmów utożsamia ze zrozumieniem.

3.3. Identyfikacja uzdolnień matematycznych

Diagnoza to pojęcie wywodzące się z języka greckiego i oznaczające rozpoznanie, rozróżnienie obiektu, zdarzenia czy sytuacji w celu zdobycia określonych informacji umożliwiających podjęcie odpowiednich działań (Okoń, 1984). Podobnie, jak badane problemy również diagnoza może mieć dwojaki wymiar albo poznawczy, albo decyzyjny, przy czym ten drugi ma wyraźny związek z działalnością praktyczną (Lepalczyk, Badura, 1987) i w obu wypadkach może być realizowana z zastosowaniem narzędzi nieformalnych (niewystandaryzowanych, stworzonych do własnego użytku) lub formalnych, wystandaryzowanych (kwestionariuszy, testów, arkuszy obserwacji) (Niemierko, 2007). Wielu badaczy podkreśla, że diagnoza pedagogiczna powinna mieć wymiar pozytywny, co oznacza, że oprócz genezy, przejawów, przyczyny czy charakteru danego zjawiska należy również dążyć do poznania i zrozumienia możliwości, warunków sprzyjających rozwojowi, jak również mocnych stron osoby, które stanowić mają wskazanie do poprawy warunków rozwojowych (Tyszkowa, 1987) .

B. Dyrda (2014) w diagnozie ucznia zdolnego wyróżnia dwa podejścia: psychologiczne i pedagogiczne, z których pierwsze z nich koncentruje się na rozpoznawaniu tych aspektów funkcjonowania uczniów, które są możliwe do zdiagnozowania za pomocą specjalistycznych narzędzi czy testów psychologiczno-pedagogicznych, badających głównie poziom intelektualny oraz uzdolnienia specjalne, jak również sferę osobowościową.
Taka diagnoza przeprowadzana jest głównie poza szkołą, w poradniach psychologiczno-pedagogicznych. Należy jednak w celu pełniejszego poznania dziecka
opierać się na danych pochodzących jeszcze z innego rodzaju pomiaru. Dlatego też właściwa procedura identyfikacji zdolności uwzględnia podejście pedagogiczne, którego głównym elementem jest obserwacja osiągnięć szkolnych ucznia.
Literatura przedmiotu proponuje jeszcze inny podział metod diagnostycznych: na ilościowe i jakościowe, gdzie w pierwszej ocenia się ucznia w oparciu o mierzalne wskaźniki, które pozwalają porównać go z resztą grupy, w drugiej zaś w drugiej metodzie poszukuje się głównie odpowiedzi na pytanie, dlaczego.

Do metod w podejściu ilościowym można zaliczyć testy, kwestionariusze, sprawdziany i konkursy i olimpiady, z kolei celem metody jakościowej jest weryfikacja hipotez o źródłach zachowania i próba uchwycenia danych trudno mierzalnych i niedostępnych dla
narzędzi ilościowych i w tym celu stosuje się obserwację, wywiad lub analizę portfolio (Guzik-Tkacz,2011). Dzięki normalizacji testy i kwestionariusze umożliwiają porównywanie wyników dzieci, pomagają również postawić trafną diagnozę w oparciu o zweryfikowaną teorię. Dobre narzędzia dają powtarzalne i obiektywne wyniki, pomagają diagnozować poziom uzdolnień, z kolei oceny szkolne są głównie miarą zdolności
do uczenia się i umiejętności akademickich. Wyniki w konkursach natomiast w dużym stopniu zależą od sposobu przygotowania ucznia, poziomu samego konkursu jak również czynników związanych z oceniającymi wykonanie ucznia ekspertami (Guzik-Tkacz, 2011)
Podstawowym narzędziem diagnostycznym nauczyciela jest obserwacja, która pozwala ona interpretację spostrzeżeń dotyczących funkcjonowania ucznia a praktyka obserwacji zwiększa wrażliwość nauczyciela na sygnały płynące od ucznia.

Guziuk-Tkacz wyodrębnia obserwację o charakterze swobodnym mającą postać notatek czy zapisu audio lub wideo, oraz standaryzowaną, mającą postać arkuszy, dzienników itp.
Innym sposobem diagnozy dokonywanej przez nauczyciela może być wywiad z uczniem lub Rodzicem, który pozwala poznać postawy, opinie, uczucia ucznia i stanowi wysoce wartościową metodę weryfikacji hipotez o funkcjonowaniu dziecka.
S. Kawula (1996) podkreśla, że diagnoza pedagogiczna powinna również uwzględniać kontekst środowiskowy, ukazując oddziaływania i wzajemne relacje dotyczące rodziny, środowiska rówieśniczego, szkoły oraz grup, do których uczeń przynależy i doprowadzić do wskazania najkorzystniejszych metod i środków służących rozwojowi ucznia oraz sposobów radzenia sobie z ograniczeniami.

Sposób diagnozy osób zdolnych związany jest z ustaleniem kryteriów zdolności w oparciu o wybrany model teoretyczny zdolności a ze względu na wielość takich koncepcji nie jest możliwe ustalenie jednoznacznych kryteriów oraz w jednakowym stopniu akceptowalnych. Co więcej również, istotne jest, by sam proces diagnozy wiązał się z konkretnym planem dotyczącym nauczania lub pracy z uczniem czy uczniami zdolnymi (Siekańska, 2004).
I tak T. Giza (2006) wyróżnia następujące etapy związane z diagnozą zdolności: wybór jasnej i realistycznej definicji zdolności, ustalenie celu diagnozy, czyli wskazania, czemu te działania diagnostyczne mają służyć i jakie kroki względem wyłonionej grupy uczniów zdolnych będą podjęte, czy też, jak liczna ma być to grupa. Należy mieć jednak świadomość identyfikując uczniów zdolnych, że proces ten powinien odbywać się wielowymiarowo. I tak

A. Janowski (2002, 2007) wymienia następujące czynniki, na które powinno się zwraca uwagę podczas diagnozowania uczniów:

- szczerość, mająca wpływ na to, czy uczniowie będą chcieli dzielić się wiedzą o sobie;
- okazywanie zrozumienia jako gotowość do wzięcia pod uwagę punktu widzenia uczniów;
- uwzględnienie szkolnego dystansu uczniów w stosunku do nauczyciela;
- autorytet nauczyciela, mający związek z zaufaniem do niego i szczerym zainteresowaniem sprawami uczniów;
- umożliwienie przepływu informacji – pozwolenie na to, by mówili uczniowi, by zadawali pytania, czy wyrażali sądy;
- zorientowanie się, co kto widzi – czasem uczniowie tę samą sytuację odbierają i definiują odmiennie niż nauczyciel;
- przeciwdziałanie wybiórczości kontaktów, które ograniczają się tylko do rozmów nauczyciela tylko z najbardziej aktywnymi czy śmiałymi uczniami;
- rozumienie kontaktów niewerbalnych przejawiające się jako czułość na odczucia, nastroje uczniowskie;
- zaufanie;
- empatia.

Brytyjski Departament Edukacji i Nauki w 1975 roku ponowił próby ustalenia listy cech, którymi powinien odznaczać się uczeń zdolny i sporządził taką, w której za zdolnych uznaje uczniów, którzy: mają wysoką zdolność rozumowania, abstrahowania i uogólniania faktów; ujawniają znaczną ciekawość intelektualną; szybko i chętnie się uczą; mają szerokie zainteresowania, są zdolni do koncentracji i wytrwali w rozwiązywaniu problemów. Posługują się bogatszym niż rówieśnicy słownictwem; są zdolni do samodzielnej i efektywnej pracy; potrafią wcześniej niż inni opanować umiejętność czytania i potrafią z niej korzystać; wnikliwie obserwują; wykazują inicjatywę i oryginalność w pracy umysłowej oraz wykazują wysoką sprawność umysłową i szybką reakcję na nowe pomysły; szybko uczą się na pamięć; interesują ich problemy natury i świata , mają niezwykłą wyobraźnię; z łatwością stosują się do skomplikowanych instrukcji; szybko czytają; mają różne i liczne hobby i rozlegle zainteresowania czytelnicze; korzystają często z bibliotek; na ogół są lepsi od innych w matematyce a w szczególności w rozwiązywaniu zadań.

Trzeba jednak pamiętać, że nie wszystkie wymienione właściwości występują u każdego potencjalnie zdolnego ucznia, mogą wystąpić tylko niektóre z nich.

Zarówno badania naukowe, jak i praktyki szkolna wskazuje, że spośród dwóch najczęściej stosowanych kryteriów do oceny poziomu uzdolnień (Sękowski, 1998) – psychologicznego i psychopedagogicznego , natomiast we wskazywaniu osób uzdolnionych matematycznie dominujące jest kryterium psychopedagogiczne, które na podstawie oceny szkolnej z matematyki oraz udziału i osiągnięć w olimpiadach i konkursach matematycznych pozwala na klasyfikację uczniów pod względem poziomu zdolności matematycznych (Białecki, 1978).

Możliwe jest też stosowanie w ocenie zdolności szkolnych testów osiągnięć matematycznych lub też specjalnie skonstruowanych testów uzdolnień matematycznych (Kotlarski, 1990) lub posłużyć się wieloetapowymi procedurami ze wspólnym wykorzystaniem zarówno ocen szkolnych, osiągnięć w olimpiadach i konkursach przedmiotowych, jak i wyników testów inteligencji ogólnej czy twórczości, nominacji nauczycieli, oryginalnych rozwiązań zadań matematycznych czy też autooceny własnych uzdolnień (Siekańska, 2004).

Warto zwrócić uwagę na wskazane przez Janowicz (1985), Wronę (2004) oraz Makowską (2010) następujące oznaki zdolności matematycznych:

– wysoką aktywność poznawczą mającą związek z zadawaniem pytań dotyczących świata matematyki,

– zaangażowanie w proces uczenia się przedmiotu,

– czytanie nadprogramowej literatury popularnonaukowej,

– rozwiązania danego zadania różnymi sposobami,
– umiejętność krytycznego spojrzenia na własne rozwiązania,
– twórcze wykorzystywanie wiedzy i umiejętności matematycznych do rozwiązywania sytuacji problemowych z życia codziennego
– umiejętność uogólniania i szybkiego łączenia wiedzy z różnych dziedzin matematyki podczas rozwiązywania zadań.

Wykaz ten można uzupełnić podawanymi przez Cz. Nosala (1990) cechami procesów percepcji i transformacji danych matematycznych, wskazującymi na występujące u jednostki zdolności, do których autor zalicza takie cechy jak: stopień zrozumienia i operatywności języka matematycznego, przejawiający się przyswajanie symboli matematycznych i reguł składni języka matematycznego, bowiem brak rozumienia i operowania matematycznym językiem uniemożliwia głębokie poznanie matematycznych struktur; wizualizacja rozumiana jako przetwarzanie wyrażeń matematycznych w obrazy umysłowe, penetracja poznawcza własnych procesów odbioru i przetwarzania informacji umożliwiająca wykrywanie błędów matematycznego myślenia; procesy metapoznania, związane z poznawczą samokontrolą, właściwym kategoryzowaniem problemów i doborem adekwatnych dlań heurystyk; łatwość dokonania wglądu przejawiająca się nagłym odkrywaniem rozwiązania problemu matematycznego. L. Wrona (2004) również zwraca uwagę na kilka dających się zaobserwować symptomów uzdolnień w zakresie matematyki, takich jak: wysoka aktywność poznawcza (przejawiająca się jako formułowanie problemów, poszukiwanie nietypowych sposobów rozwiązań, czy zadawanie pytań) , swobodne posługiwanie się różnymi sposobami rozwiązywania zadań i samokontrola własnego myślenia matematycznego (przejawiająca się jako umiejętność znalezienia własnych błędów i samodzielna korekta), łatwość dokonywania wglądu bez konieczności posługiwania się istniejącymi algorytmami rozwiązania oraz silna, nieustanna motywacja do matematycznej aktywności. Katarzyny Makowska (2010) do najbardziej widocznych symptomów wyróżniających uczniów uzdolnionych matematycznie, na które nauczyciel powinien zwrócić uwagę zalicza zainteresowanie zjawiskami zachodzącymi w przyrodzie oraz naturalną potrzebę zadawania pytań, wysoką motywację do pracy i duże zaangażowanie na lekcji, poszukiwanie różnych, niezalgorytmizowanych sposobów rozwiązywania jednego zadania, podawanie własnych pomysłów na rozwiązania zadania, zdolności dostrzegania błędów w rozumowaniu oraz umiejętność ich korygowania, jak również twórcze wykorzystanie wiedzy i umiejętności matematycznych w rozwiązywaniu problemów. Z kolei Józef Hawlicki (1971) wymienia następujące kryteria do określenia uzdolnień wybitnych uczniów: łatwość uczenia się matematyki, inteligencja ogólna, pilność oraz wyraźny talent do matematyki, natomiast (Pilecki, Rutkowska i Wrona, 2004) wskazują jeszcze bardziej rozbudowany zestaw symptomów, które wskazują na ponadprzeciętne uzdolnienia matematyczne. Należą do nich wysoka aktywność poznawcza, czytanie nadprogramowej literatury, wysoka motywacja, łatwość konstruowania własnych indywidualnych sposobów rozwiązywania zadań, jak również łatwość posługiwania się w trakcie rozwiązywania zadań różnymi sposobami i samokontrola własnego myślenia matematycznego wyrażająca się umiejętnością dostrzegania błędów i ich samodzielnym poprawianiu. Iwona Fechner-Sędzicka (2013) do źródeł identyfikacji zdolności zalicza: testy osiągnięć szkolnych, grupowe i indywidualne testy inteligencji, nominacje rodziców, nauczycieli, ekspertów, rówieśników, jak również osiągnięcia w konkursach i olimpiadach, czy oryginalne wytwory.

3.5. Talent matematyczny.

O zdolnościach i uzdolnieniach możemy mówić w odniesieniu do niemal wszystkich uczniów, o talencie natomiast jedynie w odniesieniu do wybitnych zdolności spotykanych u niewielu z nich. Talent to specyficzny zbiór cech indywidualnych prowadzący do mistrzostwa w jakiejś dziedzinie. Różni się więc od zdolności tym, że jest zdolnością nadzwyczajną, rzadko występującą a także zdolnością twórczą. Osoby utalentowane dokonują wybitnych osiągnięciach w konkretnej dziedzinie. Zasadniczo więc pojęcie to odnosi się do ludzi, którzy posiadają jakiś dorobek twórczy. Za przykład talentów matematycznych może nam posłużyć młodzież osiągająca sukcesy w Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, Olimpiadzie Matematycznej, czy konkursach na uczniowskie prace twórcze z matematyki. W swojej pracy zawodowej spotkałam się z ogromną liczbą osób uzdolnionych matematycznie, napotkałam także utalentowanych uczniów. Wielu z nich do tej pory osiąga sukcesy w matematyce lub kształci się w najlepszych ośrodkach rozwijając swoją pasję do matematyki. Analizy własnych doświadczeń i wniosków płynących z tych doświadczenia dokonam w dalszej części tej rozprawy.

3.4. Geniusz matematyczny.

Ostatnim z pojęć, ściśle związanym z uzdolnieniami jest pojęcie geniuszu. Odnosi się ono do człowieka, którego dzieło okazało się być przełomowe dla dalszego rozwoju cywilizacyjnego. Za przykład matematycznych geniuszy posłużyć nam mogą reprezentanci lwowskiej szkoły matematycznej m.in. Stefan Banach, czy Hugo Steinhaus, którzy to dokonali przełomowych odkryć w dziedzinie analizy funkcjonalnej. Tadeusz Krzyżewski (1999) wspomina: „Prof. Stefan Banach (1892-1945), prawdziwy geniusz matematyczny, opracował zasadnicze pojęcia i twierdzenia analizy funkcjonalnej, a terminy takie, jak przestrzeń Banacha znane są każdemu matematykowi w świecie. Wypracowane przez Banacha metody oraz odkrycia jego najbliższych współpracowników - Stanisława Mazura, Władysława Orlicza i Juliana Schaudera, wywarły istotny wpływ na każdą niemal gałąź współczesnej matematyki, a także fizyki teoretycznej. Banach, nie mający ukończonych studiów wyższych, odkryty został dla nauki przez prof. Steinhausa… W roku 1920 Banach złożył pracę doktorską, a dwa lata później został mianowany profesorem uniwersytetu. W ciągu swej 18-letniej kariery naukowej opublikował 58 prac o podstawowym znaczeniu. Indywidualność Banacha wyrażała się również w swoistych metodach poszukiwań twórczych i przyjacielskiej współpracy. Lubił pracować w gronie przyjaciół-matematyków w kawiarnianej atmosferze, przy czym gwar i muzyka nie przeszkadzały mu w koncentracji myśli. Przesiadywał godzinami w słynnej kawiarni Szkockiej, zapisując blat stolika dowodami twierdzeń…” Profesor Roman Duda (2019), rektor Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 1995-1999 wspomina Hugo Steinhausa tak: „Mój pierwszy z nim kontakt to były wykłady. Lubił wykładać, robił to świetnie i można się było od niego dużo nauczyć… W 1911 roku, po uzyskaniu tytuły doktora nauk do 1915 roku podróżował po Europie, zajmował się matematyką i poznawał ówczesne sławy matematyczne… Niedługo po wojnie, pod koniec 1945 roku przyjął zaproszenie do pracy we Wrocławiu. Został organizatorem i pierwszym dziekanem Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii oraz kierownikiem Katedry Zastosowań Matematyki… Interesował się różnymi dziedzinami życia i możliwościami wykorzystania w nich matematyki. Między innymi wymyślił siatkę do pomiarów długości linii krzywych, którą wykorzystano do czytania map. Miał duży wkład w rozwój medycyny, m.in. przyczynił się do skutecznego ustalania ojcostwa (wykorzystując rachunek prawdopodobieństwa). Jego sposoby użycia obliczeń i maszyn matematycznych w diagnozach lekarskich wyprzedziły czasy, w których żył prof. Steinhaus.” Z kolei profesor

Józef Łukaszewicz (2019), rektor Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 1981-1982, uczeń i współpracownik profesora Steinhausa wspomina go tak: „Matematyka, którą reprezentuje prof. Steinhaus pozwala głębiej spojrzeć na pewne prawdy, zasady, mechanizmy, które przebiegają w organizmie pacjenta, pozwalają oceniać – do tego służą metody statystyczne – skuteczność terapii i pozwalają stosować elektronikę. Dzięki jego pracom udało się zastosować matematykę dodatkowo m.in. w badaniach wydajności pracy, kontroli produkcji artykułów przemysłowych, w badaniach nad właściwym rozmieszczeniem szybów wiertniczych i sposobach automatyzacji pracy oraz przy konstruowaniu mostów wiszących.”

3.6. Czy uzdolnienia mogą być wrodzone?

Po ogólnych rozważaniach terminologicznych warto przyjrzeć się nieco bliżej czynnikom warunkującym istnienie uzdolnień i odpowiedzieć na pytanie, czy uzdolnienia mogą być wrodzone a tym samym zweryfikować powszechnie pokutujący wśród ludzi (szczególnie wśród nauczycieli) pogląd, że uzdolnienia są wrodzone i że jedni uczniowie je posiadają a inni nie. Pogląd , że niektórzy uczniowie urodzili się już z gotowymi zdolnościami i przy małych staraniach ze strony nauczyciela, zawsze wszystko umieją a inni natomiast rodzą się niezdolni, i ci mimo dużego wysiłku ze strony nauczycieli umieją bardzo mało prowadzi do pesymizmu pedagogicznego i wypacza kierunek pracy a także demotywuje nauczycieli. Józef Hawlicki (1971) objaśnia, że nie ma wrodzonych zdolności ani ogólnych uzdolnień a jedyne co istnieje, to zadatki będące organicznymi i dziedzicznie utrwalonymi przesłankami rozwoju zdolności człowieka. „Są one materialnymi elementami struktury ludzkiego organizmu i kryją w sobie coś potencjalnego, pewne możliwości i wieloznaczności. Do zadatków organicznych należą głównie: budowa i właściwości funkcjonalne analizatorów, stopień pobudliwości zakończeń nerwowych w receptorach, połączenia komórek nerwowych wewnątrz analizatorów i analizatorami, a także typ układu nerwowego, o którym decyduje ruchliwość procesów nerwowych, ich siła i wzajemny stosunek. Różnice zadatków u ludzi polegają wiec na właściwościach ich aparatu nerwowo- mózgowego i na jego właściwościach funkcjonalnych”. Owe zadatki są więc jedynie materialnym podłożem przyszłych zdolności. To w jakim tempie, jakim kierunku będą się rozwijały, czy osiągną wyższy, czy niższy poziom zależy od warunków, w jakich odbywa się rozwój ucznia, przede wszystkim od jego własnej działalności a także od pedagogicznych oddziaływań ze strony dorosłych, w szczególności nauczycieli. M. Żebrowska (1966) stawia sprawę jasno, twierdząc, że istnieją wrodzone i odziedziczone zadatki organiczne, stanowiące podłoże kształtowania się cech specyficznych dla rozwoju ludzkiego a także indywidualnych psychicznych cech człowieka. Stwierdza także, że same dyspozycje i zdolności psychiczne człowieka nie są wrodzone a rozwój psychiczny nie polega na samorzutnym ich ujawnieniu się w danym czasie a na stopniowym kształtowaniu się różnych procesów i trwałych właściwości psychicznych w toku działalności samego dziecka w określonych warunkach oraz wychowawczemu odziaływaniu osób dorosłych.

Warto podkreślić, że o możliwościach rozwoju uzdolnień nie decyduje również środowisko i pochodzenie. Coraz wyższy poziom wykształcenia wszystkich ludzi przyczynia się do tego, że różnice między wsią i miastem zacierają się. Tysiące faktów obalają twierdzenie, że to dzieci inteligentów są z natury zdolniejsze niż dzieci pracowników fizycznych. Wiemy bowiem, że z takich warstw wywodzi się wielu utalentowanych twórców różnych dziedzin, m.in. należy do nich wybitny geniusz matematyczny Stefan Banach.

Zatem każdy kto swoje dydaktyczne niepowodzenia usprawiedliwia brakiem wrodzonych uzdolnień uczniów zdejmuje z siebie odpowiedzialność za wyniki niewłaściwej pracy. Warto podkreślić, że już bardzo dawno J.Wł. Dawid (1911) zauważył, że: „Ażeby zdolności kształcić, trzeba znać ich naturę, umieć je u danego osobnika rozpoznać, ustalić, co jest w nich zależne od sił wrodzonych, a co daje się przez wpływy zewnętrzne wyrobić i jakie to w szczególności mają być te wpływy kształcące, czyli jakimi środkami i w jakich warunkach można daną zdolność kształcić. W ciągu kształcenia wiedzieć chcemy, jak daleko posunęliśmy się, jakie rezultaty wydały stosowane przez metody kształcenia.”
Należy więc starać się w maksymalnym stopniu rozwijać u uczniów zarówno kierunkowe zdolności jak i ogólną inteligencję.

PODSUMOWANIE:

Uczniowie zdolni są wielką szansą nie tylko dla szkół, w których się uczą, ale da samej nauki, bowiem ich potencjał odpowiednio rozpoznany i wykorzystany może w znaczący sposób przyczynić się do rozwoju zdolności. Dlatego bardzo istotną rolę w kształtowaniu dalszych ich losów pełni nauczyciel, który powinien umieć zauważać uczniów uzdolnionych a następnie odpowiednio ich kształcić. Z kolei, żeby móc dostrzegać uczniowski potencjał powinien sam dokładnie rozumieć na czym zdolności matematyczne polegają. Bardzo ważne jest więc zerwanie ze stereotypem utożsamiania zdolności matematycznych z precyzyjnym, szybkim liczeniem i uznawania ich za wrodzone.

4. Kształcenie matematyczne nauczycieli dawniej i dziś.

4.1. Dlaczego kształcenie matematyczne w Polsce przynosi niskie efekty?

Pozytywne efekty uzyskiwane w nauczaniu matematyki to pochodna wielu czynników, ale najważniejszym i kluczowym dla nauczyciela jest odpowiednie przygotowanie merytoryczne, a co za tym idzie odpowiednie wykształcenie. Nauczyciel, który sam nie rozumie materiału nie jest w stanie nauczyć matematyki innych. Wszystkie inne czynniki, nie mniej ważne takie jak zaangażowanie, odpowiednie postawy dydaktyczne są możliwe do „opanowania" na ścieżce zawodowej nauczyciela, kiedy to z każdym kolejnym rokiem nabiera wprawy w różnych obszarach swojej działalności. Dlatego na pierwszym miejscu należy stawiać zdobywanie wiedzy merytorycznej, czyli opanowanie różnych niezbędnych zagadnień teorii matematyki.

Matematyka jest ciągle przedmiotem budzącym negatywny stosunek do niej, ponadto wyniki egzaminów ósmoklasistów z matematyki, wyniki matur z matematyki a także małe zaangażowanie szkół w kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie skłaniają do refleksji nad istotą problemu. Pierwszą i najważniejszą przyczyną jest nieodpowiednie nauczanie, które z kolei jest konsekwencją przede wszystkim słabej wiedzy merytorycznej nauczycieli matematyki. Zanim skoncentrujemy się nad trudnościami, które występują w procesie nauczania matematyki i dotyczą czasów nam współczesnych przyjrzymy się sylwetce nauczyciela, głównie w Europie, warunkom pracy, realizacji zadań dydaktyczno-wychowawczych a przede wszystkim warunkom, które musiały spełniać osoby, by móc nauczać, jak również jak przebiegał proces kształcenia przyszłej kadry pedagogicznej w poszczególnych epokach. Ponieważ rozwój człowieka domaga się wsparcia ze strony środowiska, podobnie jest i ze zdobywaniem wiedzy. Bez wsparcia ze strony swojego nauczyciela człowiek niewiele może dokonać. Nauczycielowi zawdzięczamy inspirację do twórczego myślenia i działania a jego wiara w nasze możliwości czy życzliwość dodają sił do pokonywania wszelkich trudności.

4.2. Rozwój zawodu nauczyciela w ciągu dziejów a trudność jego zdobycia.

Zawód nauczycielski to jeden z najstarszych zawodów na świecie. Nauczanie bowiem i wychowanie towarzyszy człowiekowi już od czasów pierwotnych wspólnot. Pierwszy w dziejach świata nauczyciel rozpoczął swoją pracę około 2200 lat p.n.e. (Mazur, 2015). W czasach starożytnych nauczyciel był przekazicielem wiedzy i charakteryzował się tym, że był dla swoich uczniów mistrzem. Zawód ten darzony był wielkim szacunkiem, który wynikał przede wszystkim z posiadanej przez nauczycieli rozleglej i głębokiej wiedzy. I tak np. w Chinach nauczyciela w czasach starożytnych traktowano jako urzędnika państwowego, którego powoływał cesarz. Najważniejszym kryterium bycia nauczycielem była wówczas wiedza. Największym szacunkiem darzono tych nauczycieli, którzy zdali niezwykle trudny trzystopniowy egzamin państwowy. Egzamin ten sprawdzał wiedze i umiejętność jej zastosowania. Pomyślne ich zdanie zapewniało nauczycielowi otrzymanie najlepszych posad państwowych. O tym, jak trudny był to egzamin świadczy fakt, że zdawała go jedna osoba na pięćdziesiąt (Mazur, 2015).

Konfucjusz (filozof, teoretyk polityczny żyjący w latach 551-479 p.n.e) uważał, że dobry nauczyciel powinien z pasją oddawać się swojej pracy oraz posiadać rozległa i głęboką wiedzę. Także w starożytnym Egipcie wiedza była niezwykle ważna ze względu na możliwość awansu społecznego (Mazur, 2015). W szkołach judaistycznych również stawiano nauczycielowi wysokie wymagania, który obok znajomości Biblii i Talumdu musiał charakteryzować się wysokim poziomem moralnym i dojrzałością umysłową (Mazur, 2015). Zdaniem Sokratesa (469-399 p.n.e.) nauczyciel powinien być wzorem mądrości, szlachetności i bezinteresowności. Jego opinie w znacznym stopniu przyczyniły się do podniesienia rangi tego zawodu oraz określenia ideału nauczyciela. W Atenach w V wieku p.n.e. odnajdujemy początki tworzenia się grupy zawodowej nauczycieli, którzy utrzymywali się głównie z nauczania. Znaczenie nauczyciela zależało głównie od jego wiedzy przedmiotowej (Mazur, 2015). Społeczeństwo greckie oczekiwało od nauczycieli mądrości wyrażającej się w dążeniu do prawdy, dobra i piękna. Z czasem praca nauczyciela była poddana rygorystycznej kontroli społecznej. Do nauczania w szkole publicznej poszukiwano nauczycieli na zasadzie konkursu a spośród kandydatów zgłoszonych na zgromadzenie ludowe wybierano tych, którzy zrobili najlepsze wrażenie. Pomijano kwalifikacje do wykonywania tego zawodu. Utworzono urząd pedonoma, który to sprawował nadzór nad nauczycielami szkół publicznych Wyróżniający się nauczyciele otrzymywali nagrody, ci który zaniedbywali obowiązki płacili grzywnę. Na koniec roku szkolnego był przeprowadzany publiczny egzamin, który weryfikował zdolności i pracowitość. Wynik tego egzaminu wpływał decydująco na dalsze zatrudnienie oraz wysokość pensji (Mazur, 2015). Status społeczny nauczycieli nauczania elementarnego z kolei był niski, a zarobki mizerne a społeczeństwo odnosiło się do nich jak do ludzi wykolejonych. Większym szacunkiem cieszyli się nauczyciele tzw. nauk wyższych – filozofii i retoryki (Mazur, 2015).

W początkach starożytności nie tworzono szkoły jako instytucji edukacyjnej a nauczanie polegało na tym, że wokół mistrza zbierali się uczniowie, którym ten przekazywał pełne wykształcenie. Nauka trwała od trzech do czterech lat a praca nauczycieli była wynagradzana (Mazur, 2015). Po raz pierwszy status zawodowy nauczyciela jako pracownika „samorządowego" ustalono w starożytnym Rzymie a z kolei Cesarz Juliusz Cezar (100-44) przyznał wszystkim nauczycielom pochodzenia obcego w Rzymie prawa obywatelskie i wyborcze (Mazur, 2015). Cesarz Marek Aureliusz (121-180) wprowadził zarządzenie o obsadzaniu stanowisk nauczycielskich w szkołach średnich i retorycznych na podstawie egzaminu konkursowego, polegającego na tym, że kandydaci mieli przedstawić swoje uzdolnienia przed zespołem najznakomitszych obywateli miasta, najczęściej w formie wykładu na podany im temat (Mazur, 2015).

Jeden z najwybitniejszych przedstawicieli rzymskiej torii wymowy Marek Fabiusz Kwintylian (35-95) stawiał bardzo wysokie wymagania nauczycielom. Uważał, że nauczyciel powinien być dobrze przygotowanym pod względem naukowym i metodycznym. Miał to być człowiek przede wszystkim wszechstronnie wykształcony i rozumny o dodatkowych cechach charakteru sprzyjających temu zawodowi. Zauważył także, że cechą dobrego nauczyciela jest umiejętność zniżania się do pojęć dzieci i ich tempa pracy a język nauczyciela powinien być jasny i zrozumiały. Jego zdaniem:" Nadętość i nienaturalność mowy są znakiem słabości umysłu; im gorszy nauczyciel, tym mniej jest zrozumiały dla uczniów". Był także krytycznie ustosunkowany wobec nieodpowiedzialnych nauczycieli. Jego zdaniem nauczyciele, którzy nie dopełniając przypisanych im obowiązków i powinności uważają siebie za uczonych, przynoszą ogromną szkodę społeczną i swym nieuctwem i despotyzmem czynią ogromne straty w charakterach uczniów (Mazur, 2015).

W średniowiecznych czasach oświata szkolna podporządkowana była Kościołowi a jej głównym celem było wychowywanie do przestrzegania nauk i cnót chrześcijańskich. W średniowieczu także znaczenia nabiera zawodowe wykształcenie nauczycieli. Odbywało się ono na uniwersytetach a do uprawiania zawodu nauczyciela upoważniało posiadanie stopnia magistra (nadawany był absolwentom wydziałów humanistycznych) lub doktora (uzyskiwany po ukończeniu studiów z zakresu prawa, medycyny lub teologii). Najistotniejsze było to, by nauczyciel znał przedmiot, którego miał nauczać (Mazur, 2015).

Wykształcenie nauczycieli w Polsce w XIII i XIV w. i w pierwszej połowie XV stulecia, było dość niskie. Bardzo często więc synody zajmowały się podniesieniem na wyższy poziom duchowieństwa i pracy nauczycielskiej. Dopiero w XV w. nastąpiły znaczne zmiany dzięki działalności naukowej i wychowawczej Akademii Krakowskiej. W tym czasie przyjęła się także zasada, że nauczyciel szkoły wyżej zorganizowanej powinien posiadać co najmniej stopień magistra lub bakałarza. Nauczyciele bez stopni naukowych mogli z kolei w tym czasie uczyć jedynie w szkole wiejskiej (Mazur, 2015). W okresie średniowiecza nauczycielami w znacznej mierze byli duchowni a szkoły podlegały władzy Kościoła. Mimo, że wykształcił się nowy typ nauczyciela troszczący się przede wszystkim o wychowanie religijne młodego pokolenia warto zauważyć, że niezmienny pozostaje fakt starannego doboru według surowych kryteriów, adeptów do wykonywania zawodu nauczyciela (Mazur, 2015).

W okresie odrodzenia Europa zaczęła dojrzewać do zmiany systemu szkolnictwa i edukacji. Wykształcenie i kultura w tym czasie zyskała ogromne znaczenie. Nastąpiła zasadnicza zmiana w podejściu do dziecka i młodego chłopca. Od nauczyciela żąda się, by był dla ucznia przyjacielem i życzliwym przewodnikiem a wymaga się z kolei znajomości psychiki ucznia, jego indywidualności, potrzeb itp. Przed nauczycielem stawia się również wymóg, by swoim postępowaniem dawał przykład wychowankowi. Przyjrzyjmy się bliżej wymaganiom i oczekiwaniom stawianym kandydatom na nauczycieli w tych czasach i kwestiami z tym związanymi (Mazur, 2015). Synod piotrkowski z 1510 roku zalecał, by nauczyciele posiadali ukończone studia wyższe a także zdawali dodatkowo egzamin. Przed nauczycielami stawiano bardzo wysokie wymagania a model idealnego nauczyciela przedstawiał go jako mądrego, szlachetnego, roztropnego, odpowiedzialnego o nienagannej moralności. Ze względu na fakt, że uczniowie we wczesnym okresie rozwoju mają skłonność do naśladowania dorosłych zwracano uwagę na odpowiedni dobór nauczycieli i wychowawców. Duże znaczenie przypisywano także w tym czasie konferencjom nauczycieli organizowanym w celu wymiany doświadczeń pedagogicznych, oceny uczniów oraz omówieniu ich postępów w nauce (Mazur, 2015).

W dziedzinie praktyki szkolnej istotną rolę w tym czasie odegrał Jan Amos Komeński (1592-1670), twórca najwybitniejszej koncepcji pedagogicznej nowożytności- teorii wychowania przez całe życie. Jego zdaniem wychowawcami powinni być najgodniejsi wyboru spośród wielu. Zwracał uwagę na kształcenie nauczycieli i przygotowanie ich do pracy w szkole pod względem teoretycznym, jak i praktycznym (Mazur, 2015). Polski przedstawiciel odrodzenia Andrzej Frycz Modrzewski (1503-1572) uznawał szkołę za fundament funkcjonowania państwa a zawód nauczyciela uważał za jeden z najważniejszych i domagał się szacunku dla pracy nauczycieli (Mazur, 2015). W epoce odrodzenia istotne znaczenie dla rozwoju polskiej myśli pedagogicznej miała osoba Szymona Marycjusza z Pilzna (1516- 1574), autora pierwszego w Polsce traktatu „O szkołach, czyli akademiach ksiąg dwoje", stanowiącego krytykę polskiego szkolnictwa. Ubolewał także nad poniżaniem stanu nauczycielskiego. Doceniał ogromną rolę edukacji w państwie i społeczeństwie. Twierdził, że potęga, bezpieczeństwo i rozwój państwa zależy w znacznej mierze od poziomo umysłowego społeczeństwa. Przed nauczycielami z kolei stawiał wysokie wymagania (Mazur, 2015). Okres oświecenia to czas upowszechniania się wiedzy. Uważano, że edukacja może zmienić człowieka i korzystnie wpłynąć na rozwój całej ludzkości, dlatego też wiedzę starano się przekazywać w sposób, jak najbardziej zrozumiały. Od nauczyciela oczekiwano uświadamiania w zakresie wiedzy, ale także tego, by jego słowa były przekazem rzeczowym czegoś przydatnego w konkretnej życiowej rzeczywistości. Te czasy przyniosły więc zapotrzebowanie na nauczyciela wszechstronnie wykształconego, odrzucono nauczyciela z przypadku, co w znacznej mierze przyczyniło się do instytucjonalnego kształcenia a także przygotowania pedagogicznego nauczycieli. Działania Komisji Edukacji Narodowej przyczyniły się do kształtowania zawodu nauczycielskiego jako zawodu świeckiego a ustawy Komisji Edukacji Narodowej można uznać za pierwszą w dziejach polskiej oświaty kartę praw i obowiązków nauczyciela, troszczącą się o jego rangę i uznanie społeczne (Mazur, 2015). W Austrii w tym czasie za fundament reformy szkolnictwa uznawano odpowiednio przygotowanych nauczycieli w kwestii dbałości o postawę wychowawczą, metod pracy i kompetencji zawodowych. Drogą do nabycia takich kompetencji było ukończenie szkoły właściwej. Z kolei aktywni zawodowo nauczyciele mieli odbyć odpowiedni kurs, zakończony egzaminem (Mazur, 2015).

Pedagog i reformator szkolnictwa Jan Ignacy von Felbiger (1724–1788) wymagał od nauczycieli umiejętności właściwego zadawania pytań. Celem nabycia tej umiejętności było pobudzenie uczniów do samodzielnego myślenia. Tłumaczenie, wyjaśnianie czy dowodzenie nauczanych treści miało służyć ich zrozumieniu. Reformator ten postulował również, by pedagog posiadał kompetencje w zakresie wiedzy przedmiotowej, gruntowej a także posiadał wszechstronną znajomość przekazywanych treści oraz umiejętność wykładania ich w sposób uporządkowany, lekki i przekonywujący (Mazur, 2015). Próbę podniesienia stanu oświaty w Polsce podjął w tym czasie Stanisław Konarski (1700-1773), który wykazywał ogromną troskę o odpowiednie wykształcenie przyszłych nauczycieli. W ciągu ośmiu lat młodzi pijarzy przygotowywali się do przyszłej pracy pedagogicznej a ich przygotowanie można podzielić na trzy etapy. Pierwszy z nich polegał na dokładnym poznaniu wszystkich przedmiotów nauczania, drugi natomiast na pogłębianiu zdobytej wiedzy poprzez lektury, w trzecim zapoznawano się z podręcznikami i studiami najbardziej postępowych pedagogów i myślicieli (Mazur, 2015). Konarski troszczył się o wykształcenie nauczycieli a także o zapewnienie im jak najlepszych warunków do wykonywania zawodu. Opracował on pierwszą w Polsce pragmatykę zawodu nauczycielskiego na podstawie dokonanej analizy studiów nauczycieli, ich pracy w szkole, zasad przenoszenia do innych placówek, metod ustalania ocen i obowiązków nauczycieli. Od nauczyciela wymagał ogromnego zaangażowania w pracy, wiedzy znacznie wykraczającej poza treści nauczanego przedmiotu a także przygotowywania się do lekcji, refleksji i samokształcenia. Konarski uważał, że „dobry nauczyciel powinien ze szkoły wychodzić zmęczony jak atleta z areny lub rolnik z pola. Pracowitość, żwawość, śmiałość i ożywienie w działaniu, mówieniu i nauczaniu – oto najważniejsze warunki powodzenia" (Mazur, 2015).

Dla kandydatów do pracy nauczycielskiej studia odbywały się w wileńskiej i krakowskiej Szkole Głównej. Dobierano kandydatów bardzo staranie, wybierano spośród najlepszych uczniów, be względu na pochodzenie społeczne. Po pomyślnym zdaniu egzaminu, kandydaci przyjmowani zostawali na rok próbny. Od wyników w nauce i zachowania zależało, czy kandydat mógł starać się o przyjęcie na stałe. Po ukończeniu czteroletnich studiów, nauczyciel ze stopniem doktora rozpoczynał pracę w szkole średniej w danych okręgu na okres 6 lat (Mazur, 2015). Troszczono się również o dobre przygotowanie nauczycieli do szkół parafialnych. Otwierano dla nich seminaria nauczycielskie. Zwracano uwagę na wiele czynników m.in. stan wiedzy, umiejętności dydaktyczne, umiejętność pobudzenia zainteresowań uczniów. Czteroletnie studia obejmowały zarówno kształcenie teoretyczne, jak i praktykę pedagogiczną (Mazur, 2015).

XIX wiek to czas, w którym pojawiły się nowe potrzeby edukacyjne, wraz z nimi także nowe formy organizacji i programu szkół. Ukształtował się w tym czasie nowy wizerunek nauczyciela, który w swej pracy miał się kierować powinnościami rozumowymi, do których za najważniejsze zaliczano szerzenie bezwzględnej prawdy. Wzrosła także pozycja społeczna nauczycieli, dzięki temu, że stali się urzędnikami państwowymi. Nie wolno im także było zajmować się inną pracą zarobkową, gdyż obawiano się, że może ona obniżyć godność ich urzędu. Szkoła natomiast stała się powszechnie dostępna dla wszystkich grup społecznych (Mazur, 2015). Na terenie Szwajcarii i Prus zaczęły powstawać seminaria nauczycielskie, których zadaniem było wyposażyć przyszłych nauczycieli szkół elementarnych w niezbędną wiedzę. Były to trzyletnie studia, których pierwsze dwa lata dawały wykształcenie ogólne, natomiast trzeci rok przygotowanie pedagogiczne (Mazur, 2015). XIX wiek przyniósł również zmiany dotyczące kształcenia nauczycieli szkół średnich (gimnazjów), na których to spadł obowiązek kształcenia się na uniwersytetach. W 1812 roku oficjalnie wprowadzono egzamin dojrzałości jako dowód ukończenia gimnazjum i przepustka do kształcenia się na uniwersytetach (Mazur, 2015). Ważnym inicjatorem edukacyjnych zmian był w tym czasie Wilhelm von Humboldt (1767-1835). Był on w 1810 r. autorem egzaminu, który uprawniał do nauczania w szkole średniej, co przyczyniło się do podniesienia stopnia przygotowania i prestiżu nauczycieli gimnazjum a także co za tym idzie do reformy systemu kształcenia nauczycieli (Mazur, 2015). XIX wiek przyniósł w Niemczech zmiany także dla szkół elementarnych, które to odzyskały swoją poprzednią pozycję, jako szkoły ogólnokształcące i stały się podbudową szkoły średniej. Podniesiony został również poziom wykształcenia nauczycieli szkół wiejskich Wydłużono naukę w seminariach do czterech lat a nauczyciele, zorganizowani w różnych stowarzyszeniach, mieli istotny wpływ na kierunek rozwoju szkolnictwa. Zwracano uwagę na rolę i cele związków nauczycielskich, które to miały pielęgnować etykę zawodową, podnosić zapał do pracy zawodowej, zachęcać do stałego podnoszenia kwalifikacji zawodowych i systematycznej lektury nowości wydawniczych (Mazur, 2015).

Ponieważ rozwijające się w Polsce szkolnictwo wymagało wykwalifikowanej kadry nauczycielskiej, a tej było bardzo mało, Izba Edukacyjna wprowadziła obowiązek egzaminacyjny. I tak kandydat na nauczyciela musiał wykazać się umiejętnością płynnego i poprawnego czytania, pisania oraz znajomością rachunków, posiadać wiedzę z zakresu jakiegoś rzemiosła, czy prowadzić gospodarstwo wiejskie. Izba Edukacyjna godziła się na jego pracę w szkole do chwili zgłoszenia się kandydata z ukończonym seminarium nauczycielskim. W drugiej połowie XIX wieku na najwyższym poziomie stały seminaria nauczycielskie w Galicji. Seminaria nauczycielskie miały charakter średnich szkół zawodowych, na których to kandydaci na nauczycieli zapoznawali się z przedmiotami szkoły elementarnej i metodyką ich nauczania, poznawali pedagogikę i psychologię, uprawiali gimnastykę, grę na instrumencie a także uczyli się rysunku oraz zajęć praktycznych. Ponieważ kandydatami do seminariów nauczycielskich byli najczęściej absolwenci szkół elementarnych (ludowych), to po ukończeniu seminarium wracali do tych szkół bez większego doświadczenia życiowego i wykształcenia. Powodowało to niską rangę społeczną zawodu nauczyciela ludowego, wytworzył się także spory dystans pomiędzy nauczycielstwem ludowym a nauczycielstwem gimnazjów (Mazur, 2015). W polskiej myśli pedagogicznej XIX wieku powstał postulat, żeby polscy nauczyciele wzięli na siebie część odpowiedzialności za przyszłość narodu, stawiano więc przed nauczycielem ogromne wymagania i oczekiwania. Uważano, że nauczyciel powinien posiadać wiedzę naukową; znajdować własne szczęście w pracy dla innych, dążyć do osobistego doskonalenia się, posiadać szerokie horyzonty umysłowe (Mazur, 2015). XX wiek to czas dynamicznego rozwoju edukacji na każdym szczeblu szkolnictwa. To czas ogromnej różnorodności teorii oraz praktycznych rozwiązań w zakresie pedagogiki szkolnej. W każdym cywilizowanym kraju powstają w tym czasie jednolite ustroje szkolne (Mazur, 2015).

Czasy współczesne wniosły nowe spojrzenie na zawód nauczyciela, za sprawą psychologii, poszerzono znacznie zakres wiedzy empirycznej o nauczycielu, jego osobowości, talencie itp. a nowe wychowanie z kolei żądało od nauczyciela: indywidualnego podejścia do uczniów, uwzględniania ich zainteresowań i zdolności, a także pielęgnowania samodzielności i aktywności uczniowskiej, czy wspomagania wychowanków w uzyskiwaniu jednostkowego sukcesu. W przygotowaniu zawodowym nauczycieli zwracano uwagę na ideę wielostronności kształcenia a w procesie nauczania podkreślano, iż nauczyciel powinien korzystać z różnych rodzajów aktywności oraz form organizacyjnych (Mazur, 2015). Podstawą teoretyczną nowego ruchu pedagogicznego w ty czasie był pajdocentryzm, według którego, dziecko stanowi centralny punkt wszelkiej działalności pedagogicznej. Najważniejsze więc w myśl tej zasady, to wyzwolenie indywidualnych zdolności dziecka (Mazur, 2015). Za bardzo istotne w tym czasie uznawano relacje między uczniem a nauczycielem a do cech dobrego nauczyciela zaliczano: optymizm, wyrozumiałość, zdolność do głębokich przeżyć emocjonalnych, wrażliwość i taktowność jako wstępne warunki empatii wobec innych. Uważano, że pedagogiczne kształcenie nauczycieli powinno obejmować „kulturę psychologiczną" a prace socjologów powinny pomagać nauczycielom w lepszym usytuowaniu się w procesie pedagogicznym. Wskazywano również potrzebę angażowania nauczycieli w rozważania w ramach programu kształcenia, których celem miało być lepsze ujmowanie sensu praktyki pedagogicznej, czy wychodzenie poza rutynę Uważano także, że w kształceniu każdego nauczyciela konieczne jest głębokie uwrażliwienie na nauki humanistyczne. Służą one bowiem poznaniu sposobów kierowania grupą klasową i zrozumieniu wychowanka (Mazur, 2015).

Paweł Piotrowicz Błoński (1884-1941), rosyjski pedagog i psycholog, który w swych publikacjach dużo miejsca poświęcał nauczycielom, wielokrotnie podkreślał potrzebę ich kształcenia i dokształcania. Uważał, że misją nauczycieli jest kształcenie ludzi, którzy to, zbudują nowe społeczeństwo. Za najistotniejsze uznawał to, by nauczyciele kochali dzieci i byli z nimi w bliskim kontakcie, a także wiedzieli, jak należy je uczyć i wychowywać. Według niego nauczyciel powinien doskonale znać swój przedmiot i posiadać umiejętność zainteresowania nim uczniów, powinien znać metody i techniki nauczania, a także posiadać zdolność wdrażania uczniów do myślenia. Uważał także, że nauczyciel powinien mieć swój wkład w kształtowanie uczniowskich przekonań i rozwój zasad moralnych i świadomości estetycznej. Kierował on Akademią Wychowania Socjalnego, w której jako rektor kładł nacisk na wdrażanie nauczycieli do pracy poprzez zaangażowanie w pracę wytwórczą. Studenci, już od pierwszego roku studiów, zapoznawali się z fabrykami, warsztatami, muzeami itp. i jednocześnie rozpoczynali kursy praktyczne w różnych gałęziach przemysłu. Studenci podejmowali pracę w halach fabrycznych, laboratoriach i na roli. Uczelnia stwarzała warunki niezbędne do przygotowania do zawodu nauczyciela. W trakcie studiów duży nacisk kładziono na wykształcenie artystyczne, jak również do praktyk nauczycielskich (Mazur, 2015).

4.3. Przegląd systemu kształcenia nauczycieli w okresie międzywojennym.

W Polsce w okresie międzywojennym wypracowano koncepcję kształcenia przyszłych nauczycieli szkół średnich na poziomie uniwersyteckim. Studia pedagogiczne odbywały się na uniwersytetach: Jagiellońskim, Warszawskim i Poznańskim. Pierwsze lata po odzyskaniu niepodległości to czas, kiedy szkolnictwo borykało się z wielkimi problemami kadrowymi. Nie dość, że brakowało dostatecznej liczby nauczycieli, to ich przygotowanie ogólne i zawodowe nie odpowiadało stawianym wymaganiom (Hörner, Szymański, 2005; także Stankiewicz, 2002). Dekret z 7 lutego 1919 r. o kształceniu nauczycieli szkół powszechnych ustanowił seminaria nauczycielskie obowiązkowymi zakładami kształcenia nauczycieli. Były to zakłady pięcioletnie, w których realizowano program nauczania na poziomie średnich szkół ogólnokształcących oraz przygotowywania praktycznego do zawodu. Przyjmowano do nich kandydatów po ukończeniu siedmioletniej szkoły powszechnej (DzUMWRiOP 1919, nr 2, poz. 3.). Trzy pierwsze lata uczniowie zdobywali wykształcenie ogólne, kolejne dwa lata były przeznaczone na przedmioty pedagogiczne. Praktyki pedagogiczne natomiast odbywały się w szkołach ćwiczeń, które powstawały przy seminariach. Absolwenci seminarium nabywali prawo do objęcia stanowiska nauczyciela tymczasowego w szkole powszechnej a po dwuch latach pracy zdawali drugi egzamin, który polegał na przeprowadzeniu lekcji a także weryfikacji znajomości ustawodawstwa szkolnego, organizacji szkolnictwa, jednego przedmiotu pedagogicznego oraz ogólnokształcącego. Jeśli nauczyciel zdał pomyślnie taki egzamin, to nabywał uprawnienia nauczycielskie na stałe (Hörner, Szymański, 2005; także Stankiewicz, 2002).

Program seminarium określił sylwetkę przyszłego nauczyciela, który to miał być aktywny, a także miał charakteryzować się samodzielnym myśleniem, umiejętnością rozwiązywania problemów. Miał czynnie angażować się w pracę zawodową i działalność społeczną, czuć potrzebę doskonalenia zawodowego i samokształcenia (Doroszewski, 2002). Ponieważ seminaria nauczycielskie nie były w stanie zaspokoić ogromnych potrzeb szkolnictwa powszechnego, dlatego Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego organizowało Państwowe Kursy Nauczycielskie, które w 1920 roku przekształcono w Wyższe Kursy Nauczycielskie. Były to albo roczne kursy pedagogiczne (dla absolwentów pełnych szkół średnich ogólnokształcących) albo dwuletnie (dla młodzieży z ukończoną co najmniej szóstą klasą szkoły średniej). Ich celem było podniesienie zawodowego wykształcenia nauczycieli. Słuchacze poznawali podstawy wiedzy pedagogicznej, zapoznawali się także z nowymi metodami pracy oraz pogłębiali wiadomości z zakresu wykładanego przedmiotu (Stankiewicz, 2002).

Ponieważ uniwersytety były niedostępne dla absolwentów seminariów nauczycielskich, dlatego z myślą o nich uruchomiono nowy typ uczelni – instytuty: Państwowy Instytut Pedagogiczny w Warszawie (1919-1925), Państwowy Instytut Nauczycielski w Warszawie (1921-1926, ponownie od 1930), Instytut Pedagogiczny w Katowicach, Wydział Pedagogiczny Wolnej Wszechnicy Polskiej w Warszawie, Instytut Pedagogiczny ZNP w Warszawie (od 1932) (R.Stankiewicz, 2002, s.42-43) a także Instytut Pedagogiczny w Lublinie przy KUL (od 1920), Instytut Nauczycielski TNSW w Łodzi (od 1921) (Możdżeń, 2000). Absolwenci tych instytucji po 2-5 latach pracy w szkole publicznej zobowiązani byli do zdania egzaminu praktycznego a pozytywny wynik egzaminu był niezbędny do stabilizacji nauczyciela (Możdżeń, 2000). Z początkiem roku szkolnego 1937/38 w wyniku reformy jędrzejewiczowskiej z 11 marca 1932 roku, wprowadzono zmiany w kształceniu nauczycieli. Zlikwidowano seminaria nauczycielskie, a w ich miejsce powstały trzyletnie licea pedagogiczne, do których przyjmowano kandydatów z ukończonym gimnazjum. Drugą z form kształcenia nauczycieli szkół powszechnych było dwu lub trzyletnie pedagogium oparte na pełnym wykształceniu średnim (Stankiewicz,2002).

Program pedagogium uwzględniał specjalizację w wybranej grupie przedmiotów: humanistycznych, matematycznofizycznych, geograficzno-biologicznych a kandydaci byli przygotowywani do nauczania dwóch przedmiotów w siedmioklasowej szkole powszechnej. Program studiów wyróżniał cztery grupy przedmiotów kształcenia: przedmioty pedagogiczne i nauki pomocnicze, metodykę przedmiotów i praktykę pedagogiczną, przedmioty artystyczno-techniczne, przedmiot naukowy (Hörner, Szymański, 2005). Na mocy Ustawy z 26 września 1922 r. (DzUMWRiOP 1922, nr 90, poz. 828) nauczycielem mogła być wyłącznie osoba, która zdała egzamin państwowy na pedagoga szkół średnich. Egzamin ten składał się z dwóch części – praktycznej i teoretycznej (zarówno w formie pisemnej i ustnej). Po pomyślnie zdanym egzaminie kandydaci otrzymywali dyplom nauczyciela szkoły średniej. Na stanowisku pozostali jedynie ci, którzy zdali egzamin. (Wierzchowska-Konera, 1981). Niewykwalifikowani nauczyciele w wyniku reformy szkolnictwa albo przechodzili do szkół powszechnych, albo przechodzili w „stan spoczynku". Okoliczności te prowadziły do większej mobilizacji nauczycieli do starania się o dyplom (Wierzchowska-Konera, 1981, s.124). Okres międzywojenny to czas dokonań istotnego przełomu w kształceniu nauczycieli, to czas, w którym Druga Rzeczypospolita stworzyła państwowy system edukacji nauczycieli. Studia na Uniwersytetach przygotowywały nauczycieli szkół średnich do zawodu, natomiast nauczycieli szkół powszechnych kształcono w seminariach a później także w liceach pedagogicznych i pedagogiach (Hörner, Szymański, 2005). Po II wojnie światowej nauczycieli szkół podstawowych kształcono w czteroletnich, a od 1957 roku pięcioletnich liceach pedagogicznych. Licea te funkcjonowały do 1970 roku (Hörner, Szymański, 2005; Wąsowicz, 1976; Ratuś, 1974; Wojtyński, 1969; Chmielewski, 2002; Jarowiecki, Nowecki, 1983; Stankiewicz, 2002). W 1954 roku powstało studium nauczycielskie, stanowiące drugi typ zakładu kształcenia nauczycieli szkół podstawowych. Po 1965 roku z kolei zakłady te były likwidowane a w ich miejsce powstawały Wyższe Szkoły Nauczycielskie. Pierwsze z nich powstały w 1968 roku a w latach 1973-1974 przekształcono je w wyższe szkoły pedagogiczne lub filie uniwersytetów i od tego czasu kształcenie nauczycieli nastąpiło na wyższym poziomie: na uniwersytetach i w wyższych szkołach pedagogicznych (Stankiewicz, 2002).

4.4. Przegląd polskiego systemu kształcenia nauczycieli po roku 1972 r.

System, który pragnę teraz przedstawić, to kształcenie nauczycieli w Polsce po 1972 roku. Obejmę analizą instytucje obecnie i dawniej przygotowujące do zawodu nauczyciela, ich ofertę programową, pewne wybrane zagadnienia dotyczące przebiegu nauki, weryfikację kompetencji nauczycieli. Celem mojej analizy jest pokazanie różnych aspektów funkcjonowania systemu a także określenie przyczyn występowania tych negatywnych. Pod koniec lat sześćdziesiątych zapisana została w Karcie praw i obowiązków nauczycieli koncepcja kształcenia ogółu nauczycieli na poziomie wyższym (Ustawa z dnia 27 kwietnia 1972 r. Karta praw i obowiązków nauczyciela, DzU 1972, nr 16, poz. 115.). W 1968 r. powołano pierwsze wyższe szkoły nauczycielskie, w których przyjęto zasadę dwustopniowości w kształceniu nauczycieli. W wyższych szkołach nauczycielskich kształcono kadry dla szkolnictwa podstawowego a dalsze dwuletnie studia magisterskie miały uprawniać do pracy w szkolnictwie średnim (Krawcewicz, 1974). Wyższe szkoły nauczycielskie były to uczelnie I stopnia, które wyrosły z tradycji SN-ów. Nie posiadały akademickich korzeni i czasami cechowały się stosunkowo niskim poziomem kształcenia, dlatego na początku lat siedemdziesiątych przekształcone zostały w wyższe szkoły pedagogiczne. Wiele takich placówek powstało od podstaw. Niektóre wyższe szkoły pedagogiczne dały początek nowym uniwersytetom (Gdańsk, Katowice, Szczecin) a inne zostały włączone do uniwersytetów już funkcjonujących (Warszawa, Łódź). W latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia niemal każde większe miasto posiadało wyższą szkołę pedagogiczną. Państwowe wyższe szkoły tego typu na początku XXI wieku zyskały status akademii. Dziś w Polsce działa sześć publicznych i kilka niepublicznych pedagogicznych szkół wyższych (MNiS). Dziś kwalifikacje nauczycielskie można uzyskać albo studiując na kierunku pedagogika w wybranej specjalności albo na innym kierunku, uczestnicząc dodatkowo w zajęciach z przygotowania pedagogicznego. Studia nauczycielskie) odbyć można w uczelni niemal każdego typu, oprócz uczelni pedagogicznych oferują je także uniwersytety, szkoły ekonomiczne, artystyczne, rolnicze, a nawet politechnika czy szkoły medyczne.

Zdecydowana większość polskich nauczycieli w poszczególnych zaborach (przełom wieku XIX i XX) rekrutowała się ze środowiska chłopskiego i inteligencji (Komarzyniec, 2002) odnośnie współczesnych nauczycieli nie mamy pełnej wiedzy w tym względzie. Na podstawie raportu M. Gręda (2009) stwierdzającego, że rodzice ponad połowy nauczycieli matematyki pracujących w szkołach różnych szczebli mają wykształcenie podstawowe lub zasadnicze zawodowe a zaledwie około 15% rodziców tej grupy nauczycieli legitymuje się dyplomem studiów wyższych można wnioskować, że to nie tradycje rodzinne były inspiracją do podejmowania przez te osoby studiów matematycznych. Bardzo trudno jest ocenić, z jakiego środowiska pochodzi statystyczny polski nauczyciel a także jakie czynniki miały wpływ na podjęcie decyzji odnośnie wyboru zawodu. Nietrudno natomiast stwierdzić, że obecnie rekrutacja do zawodu nauczyciela przebiega zupełnie inaczej niż dawniej. Często ma charakter spontaniczny, nieprzemyślany. W bardzo wielu przypadkach oparta jest na zasadzie selekcji negatywnej. Warto zastanowić się czy stosowana obecnie procedura przyjmowania kandydatów na studia pedagogiczne może być utożsamiona z rekrutacją do zawodu nauczyciela. Jeżeli tak. to, skoro podstawowym kryterium owej rekrutacji jest zaledwie pomyślnie zdana matura z wybranych przedmiotów, to trzeba dojść do niepokojącego wniosku. Jeżeli z kolei odpowiedź jest przecząca, to nasuwa się kolejne pytanie, na czym ona polega?

Ponieważ nauczycielstwo to aktywność publiczna a nauczyciel oprócz przygotowania merytorycznego i wiedzy z przedmiotu, którego pragnie nauczać powinien posiadać wiele kompetencji w sferze intelektualnej, społecznej, moralnej itp. „Uprawnienia nauczycielskie może zdobywać każdy student, nie bierze się pod uwagę predyspozycji psychicznych, kompetencji. Brak selekcji do zawodu nauczycielskiego. A przecież zawód nauczyciela jest zbliżony do zawodu lekarza. Student medycyny od pierwszego roku zdobywa wiedzę nie tylko teoretyczną, lecz również praktyczną. Jego miejsce jest przy łóżku chorego. Nauczyciel zdobywa wykształcenie zawodowe z dala od szkoły, ucznia i problemów wychowawczo- - dydaktycznych" (Włoch, Andrzejak, Kacprzak, Pająk, 2005, s.223). Dla przykładu: „(…) w Niemczech nauczyciel to zawód zaufania publicznego. Po roku pracy w szkole czy przedszkolu trzeba zdać egzamin komisyjny. O pracę wcale nie tak łatwo. Niektórzy dojeżdżają do szkoły nawet 60 kilometrów. W USA zanim ktoś dostanie się na studia nauczycielskie, musi odbyć półroczny wolontariat i przedłożyć opinię opiekuna. W Polsce, przykro to stwierdzić, ale od kiedy zniesiono egzaminy na studia, nauczycielem może być każdy" (Igielska, 2010, s.24-27). System rekrutacji kandydatów do tak wymagającego zawodu powinien więc zawierać stosowne testy czy sprawdziany, które pozwoliłyby społeczeństwu a także samemu zainteresowanemu, uzyskać informację o warunkach i predyspozycjach do jego uprawiania, zanim uzyska on dokument uprawniający do jego wykonywania.

4.5. Droga w dążeniu do uzyskania uprawnień nauczyciela matematyki dawniej.

Wyższe szkoły pedagogiczne za główne zadanie stawiały sobie kształcenie nauczycieli i z roku na rok co raz lepiej spełniały swoją powinność. Ponieważ odpowiednie wykształcenie rzeczowe dla nauczyciela matematyki uznawano za szczególnie ważne, wiadomości użytecznych dostarczano podczas realizacji następujących przedmiotów: algebra wyższa, geometria analityczna, geometria wykreślna, logika matematyczna i metodologia matematyki, analiza matematyczna, teoria mnogości, topologia, kształcenie nauczycieli, arytmetyka teoretyczna, teoria liczb, podstawy geometrii, matematyka elementarna z wyższego stanowiska, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, algebra abstrakcyjna, nomogramy i metody numeryczne oraz historia matematyki. Wszystkie wchodziły w skład planu studiów, który przewidywał także dwa wykłady specjalne o tematyce zaproponowanej przez wykładowcę i zatwierdzonej przez Radę Wydziału. Za bezspornie konieczne uznawano zapoznanie się z materiałem naukowym, który miał stanowić punkt wyjścia i oparcia dla wielu różnych opracowań dydaktycznych w zakresie przekraczającym aktualne wymagania programowe. To zapoznanie uznawano za konieczne także ze względu na to, że tematyka kółek uczniowskich wykracza poza ramy programowe. Wyższe szkoły pedagogiczne dążyły do tego, by przedmioty stopniowo unowocześniać a także wzajemnie wiązać wspólnymi ideami. Uczelnię taką opuszczał człowiek mający świadomość jedności matematyki i jej metod, od których matematyka szkolna nie jest oderwana. Nie tylko jednak suma odpowiednio dobranych wiadomości matematycznych jest potrzebna kandydatom na nauczycieli. Wielkie znaczenie przywiązywano do sposobu ujęcia i sposobu przedstawienia studentom wiadomości rzeczowych. Zwracano ich uwagę na powiązania między podawanymi im na wykładach wiadomościami a matematyką szkolną, a także naukowe naświetlenie szkolnych zagadnień matematycznych. Starania te przyczyniły się w poważnym stopniu do należytego przygotowania rzeczowego przyszłych nauczycieli matematyki (Leśniak, 1957).

W wyższych szkołach pedagogicznych celem nauczania logiki matematycznej było nie tylko zapoznanie studentów z pojęciami i twierdzeniami logiki matematycznej, które to są podstawą dla studiowania i nauczania matematyki, ale między innymi także wykształcenie umiejętności ich stosowania, poprawnego formułowania definicji i twierdzeń, wprowadzania nowych symboli i posługiwania się nimi, a także wykształcenie umiejętności analizowania pod względem logicznym materiału szkolnego oraz dostrzegania w nim trudności logicznych. (Leśniak, 1957). Podobnie, w arytmetyce teoretycznej, oprócz czysto arytmetycznej teorii liczb wymiernych, podawano studentom również taką teorię, z której po odpowiednim opracowaniu dydaktycznym otrzymuje się szkolne ujęcie nauki o ułamkach. Ponieważ wykładowcami w wyższych szkołach pedagogicznych byli przeważnie byli nauczyciele matematyki szkół średnich, więc w łatwy sposób łączyli teorię z praktyką szkolną. Wartym zaznaczenia jest również fakt, że w tematyce prac magisterskich znajdowały się problemy, które wymagały od studentów wyższych szkół pedagogicznych wiązania nauki z nauczaniem szkolnym. Dostrzegano ogromne walory kształcące matematyki stosowanej. Uważano, że przyczynia się ona do zwiększenia zainteresowania matematyką. Przez odpowiedni dobór zadań i ćwiczeń przygotowywano studentów w tym zakresie. (Leśniak, 1957).

Oprócz kształcenia rzeczowego w wyższych szkołach pedagogicznych kształcono studentów w pedagogice, psychologii, metodyce nauczania a także podczas praktyk w szkołach. Student musiał wiedzieć, w jaki sposób można stworzyć najkorzystniejsze okoliczności, przy których w umysłach uczniów myśl matematyczna powstaje i należycie się rozwija a także w jaki sposób można osiągnąć u młodzieży szkolnej pożądany zasób wiadomości matematycznych i umiejętność ich zastosowań. Wyższe szkoły pedagogiczne doceniały ogromne znaczenie wykształcenia metodycznego przyszłych nauczycieli matematyki. Dowodem tego może być fakt powstania katedr matematyki, które dzięki dysponowaniu wystarczającą ilością godzin wykładowych i ćwiczeniowych należycie spełniała obowiązki kształcenia metodycznego swoich wychowanków. Podczas wykładów i ćwiczeń z metodyki nauczania matematyki zapoznawano studentów z ogólnymi zagadnieniami metodycznymi omawiano także prawie cały materiał szkolny i zaznajamiano ich z nowoczesną literaturą metodyczną oraz przygotowywano do samodzielnej i twórczej pracy nad rozwiązywaniem zagadnień z zakresu metodyki matematyki. Katedry metodyki nauczania matematyki oprócz czynności dydaktycznych prowadziły twórczą działalność naukową, a także wykonywały pewne czynności usługowe np. opracowywanie czy ocenianie programów matematyki dla szkół, doskonalenie czynnych nauczycieli szkół średnich, czy organizowanie w szkołach eksperymentów dotyczących modernizacji nauczania. Plan studiów w wyższych szkołach pedagogicznych przewidywał dla studentów dwie kilkutygodniowe praktyki, które na ogół odbywał student u dwóch różnych nauczycieli. Kształceniem kandydatów na nauczycieli zajmowały się także uniwersytety, ale przed nimi stało wiele zadań: m.in. kształcenie przyszłych pracowników naukowych oraz pracowników potrzebnych do różnych zawodów. Dlatego ograniczenie zadań uniwersytetów tylko do kształcenia przyszłych nauczycieli, czy też postawienie uniwersytetom jako głównego zadania kształcenia kandydatów na nauczycieli było rzeczą niemożliwą i dlatego trudno było w uniwersytetach wytworzyć korzystny klimat dla kształcenia nauczycieli. Również lista obowiązujących przedmiotów matematycznych pozostawiała wiele do życzenia, gdyż zawierała wiele działów matematycznych ważnych dla nauczycieli, ale mniej ważnych dla przyszłych pracowników naukowych i odwrotnie.

4.6. Egzamin nauczycielski na przykładzie egzaminu matematyka Antoniego Hoborskiego

Dawne egzaminy nauczycielskie były bardzo trudne. Po ukończeniu studiów matematyki (i zdaniu egzaminów tak zwanych rygorozów) można było albo poświęcić się pracy nauczycielskiej albo naukowej. Droga do szkolnictwa prowadziła przez egzamin składany (tak się wtedy mówiło) przed „C.K. Komisją Egzaminacyjną Krakowską dla Kandydatów na nauczycieli w Gimnazjach i Szkołach Realnych" Jeśli z kolei myślano o pracy naukowej-egzaminem doktorskim, nie było wówczas stopnia magistra. Za przykład, który uzmysłowi trudność i złożoność tego egzaminu posłuży nam sylwetka wybitnego matematyka Antoniego

Hoborskiego i jego egzamin nauczycielski (Gołąb-Mayer, 2014, s.49). Antoni Hoborski, pierwszy rektor Akademii Górniczej w Krakowie, jak podaje Wikipedia urodzony 1 kwietnia 1879 r. w Tarnowie, zmarł 9 lutego 1940 r. w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen. W 1901 r. ukończył matematykę na UJ, w 1908 r. uzyskał doktorat na UJ. Studia uzupełniające przeszedł w Paryżu i Getyndze, w 1912 r. habilitował się na UJ. W 1919 r. powołany na członka Komitetu Organizacyjnego Akademii Górniczej i mianowany profesorem w Katedrze Matematyki. W 1922 r. otrzymał tytuł prof. zw. UJ. Pozostał w Katedrze Matematyki AG aż do wybuchu drugiej wojny światowej. Był pierwszym urzędującym rektorem AG i tworzył mocne fundamenty, na których oparto rozwój AG. Był wybitnym dydaktykiem. Został członkiem honorowym Stowarzyszenia Studentów AG – SSAG. Jest także autorem kilkunastu prac, z których część jest pierwszymi w literaturze światowej podręcznikami akademickimi. Był również członkiem-założycielem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Antoni Maria Emilian Hoborski należał do pokolenia matematyków i fizyków, które dokonało wielkiego przełomu w nauce, zwłaszcza w fizyce. Uczęszczał do gimnazjum (szkoły kończącej się maturą, która dawała wstęp na wyższe studia) a następnie podjął studia na UJ. Będąc studentem, został prezesem Kółka Matematyków i Fizyków i bardzo przyczynił się do rozkwitu ich działalności. Wraz z innymi studentami organizował wykłady, na które zapraszano profesorów. Sami również takie wygłaszali. Bardzo istotnym jest fakt spisywania przez nich wykładów profesorów, wydawania skryptów a także założenia biblioteki Kółka.

Zapisy z Zeszytów Naukowych Akademii Górniczo-Hutniczej, Matematyka–Fizyka–Chemia, nr 935/1984 pozwalają przyjrzeć się bliżej egzaminowi nauczycielskiemu Antoniego Hoborskiego a także temu, jak był przygotowany do zawodu nauczyciela matematyki (Gołąb-Mayer, 2014, s.52). Hoborski, aby otworzyć sobie drogę do zawodu nauczyciela matematyki i fizyki, przedłużył studia o rok, uczęszczał w tym czasie na wykłady z termodynamiki teoretycznej oraz uczestniczył w praktycznym kursie dla nauczycieli w gimnazjum św. Anny w Krakowie. Dnia 28 maja 1902 roku otrzymał absolutorium a następnie w trzy tygodnie złożył do komisji podanie o dopuszczenie go do egzaminu nauczycielskiego zarówno z matematyki, jak i fizyki. Decyzją komisji zwolniony został z napisania rozprawy z pedagogiki. Po otrzymaniu tematów rozpraw z matematyki i fizyki miał sześć miesięcy na ich przygotowanie. Żądano także pisemnego oświadczenia, że w wykonaniu pracy nie posługiwano się żadnymi innymi dziełami niż te, które wymieniono w źródłach. Profesor Kazimierz Żorawski podał Hoborskiemu następujący temat: „Wyłożyć metody Neumanna i Robina całkowania równania Laplace’a dla powierzchni wypukłych, poprzedzając ten wykład ścisłym uzasadnieniem tych własności potencjałów warstw podwójnych, na których opierają się rzeczone metody”. Z kolei fizyk, profesor August Witkowski polecił „Wyłożyć teorie ruchu światła w ośrodkach pochłaniających”. Zadane tematy świadczą o tym, że uniwersytet był bliski bieżącej myśli naukowej. Hoborski wymagane wypracowania oddał z dwumiesięcznym opóźnieniem. Rozwiązanie matematyczne liczyło 171 stron, praca z fizyki z kolei liczyła 61 stron i składała się z dwóch części. W pierwszej z nich omówione zostało rozchodzenie się światła w ciałach izotropowych, a w drugiej w kryształach. Traktat Hoborskiego obejmował znane wówczas teorie naukowe dotyczące omawianego zagadnienia a jego podstawą była obszerna literatura niemiecka (Kundt, Drude, Winkelmann). W przypadku obu prac: matematycznej i fizycznej podkreślano sumienność autora, obie zostały pozytywnie zrecenzowane i pozytywnie ocenione i otworzyły drogę do ustnych egzaminów zamkniętych, które trwały aż po 8 godzin (Gołąb-Mayer, 2014). Egzaminatorem z matematyki był profesor Zaremba, od którego Hoborski dostał dwie pary tematów. Zadania były bardzo czasochłonne i pomimo, że nie dokończył zadań drugiej pary profesor Zaremba uznał rozwiązania za wystarczające.

Tematy z fizyki podane przez profesora Witkowskiego były z kolei dość łatwe. I tak były to:
1. „Znaleźć ruch złożony z dwóch ruchów kolistych, jednostajnych, odbywających się w tej samej płaszczyźnie, mających te same okresy i amplitudy”.

2) „Opisać jakąkolwiek metodę mierzenia oporu elektrycznego w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych". Wypracowania Hoborskiego zostały pozytywnie ocenione przez Profesora Witkowskiego, który podkreślił również, że kandydat był bardzo dobrze przygotowany do przedmiotu. Po obu tych egzaminach pisemnych Hoborski przystąpił do serii egzaminów ustnych, podczas których odpowiadał na 6 pytań zadanych przez dwóch egzaminatorów z matematyki i fizyki. Ponieważ w szkolnictwie galicyjskim obowiązywały także dwa języki: krajowy i niemiecki, więc Hoborski musiał zdać jeszcze te dwa języki. Dobre podstawy zyskał Hoborski już w tarnowskim gimnazjum, na studiach uczęszczał na wykłady słynnego profesora Tarnowskiego. Egzaminatorem był badacz poezji Mickiewicza i Słowackiego, profesor Tretiak. Podczas egzaminu referował główne ogniska oświaty w Polsce, omawiał także Dziady Mickiewicza, Kordiana Słowackiego, Kazanie Sejmowe Skargi oraz utwory Orzeszkowej. Egzamin z niemieckiego również został oceniony bardzo dobrze. Po zdaniu wszystkich tych egzaminów Hoborski uzyskał dyplom, który uprawniał do nauczania w gimnazjach i szkołach realnych a w 1904 roku został mianowany rzeczywistym nauczycielem matematyki i fizyki w gimnazjum w Brzeżanach. Następnie przeniesiony do Nowego Sącza, gdzie w 1907 roku objął posadę w V Gimnazjum w Krakowie, wtedy też nadano Hoborskiemu tytuł profesora gimnazjalnego (Gołąb-Mayer, 2014, s.53).

Antoni Hoborski bardzo poważnie traktował nauczycielskie obowiązki zarówno jako nauczyciel gimnazjalny, czy później jako profesor Akademii Górniczej. Dla utalentowanych uczniów szkół średnich prowadził kółko matematyczne i wydawał dla nich (ręcznie pisane) pisemko z zadaniami i problemami a dla studentów wydawał skrypty. Hoborski, który nie posiadał własnych dzieci był dla swoich uczniów nie tylko nauczycielem przedmiotu, był mistrzem, przewodnikiem i wielkim autorytetem (Gołąb-Mayer, 2014).

Jak wskazuje powyższy przykład nauczycielem w tych czasach nie mógł zostać każdy, ponadto było znacznie trudniej dostać się na studia a także trudniej je ukończyć. Dla przykładu z 2340 kandydatów do pięciu uczelni krakowskich (Uniwersytet Jagielloński, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Wyższa Szkoła Rolnicza, Politechnika i Akademia Górniczo-Hutnicza) w latach 1955, 1956 i 1957 pomyślnie zdało egzamin wstępny tylko 1147 osób, a rok pierwszy w terminie normalnym zaliczyło 555 studentów (Leśniak, 1957).

4.7. Droga w dążeniu do uzyskania uprawnień nauczyciela matematyki dziś i kilka refleksji.

Mimo, że zawodem nauczycieli od lat interesują się pedagodzy, filozofowie, psycholodzy czy socjolodzy, to jednak problematyka ich roli, funkcji, czy zadań w edukacji pozostaje nadal otwarta, aktualna i ważna. Mimo upływu czasu od zlikwidowania kształcenia nauczycieli na poziomie szkoły średniej a następnie na tzw. drugim stopniu kształcenia na szczeblu wyższym czy uniwersyteckim, nie mamy nadal w teorii dobrze opracowanego i jednolitego obrazu kształcenia nauczycieli ani pod względem strukturalnym ani funkcjonalnym. Nadal również nie posiadamy rejestru cech psychodydaktycznych, które miałaby stanowić podstawę oceny osobowości kandydatów na studia pedagogiczne i które pomagałaby w dokonaniu wstępnej selekcji do zawodu nauczycielskiego. Obecnie w Polsce uprawnienia pedagogiczne do nauczania matematyki można zdobyć na uniwersytetach, politechnikach, akademiach czy w państwowych wyższych szkołach zawodowych, studiując dziennie, zaocznie, kończąc studia podyplomowe a także studiując przez Internet. Studenci matematyki specjalizacji nauczycielskiej wybierają często ten profil tylko dlatego, że jest najłatwiejszy do ukończenia a wyniki studentów tej specjalizacji są na ogół znacznie słabsze niż studentów innych kierunków.

Ponadto, aby obecnie dostać się na studia matematyczne wystarczy nawet matura z matematyki zdana w sesji poprawkowej.
Przez kilka ostatnich lat w pracy zawodowej na swoich lekcjach gościłam zarówno pojedynczych studentów, jak również całe grupy studenckie i muszę z wielkim żalem stwierdzić, że tylko kilkoro napotkanych na tej drodze osób było odpowiednio przygotowanych do pracy w tym zawodzie (praktykantów przyjmuję od 6 lat). Błędy rzeczowe i merytoryczne, które popełniali studenci podczas rozwiązywania zadań świadczyły o braku przygotowania do lekcji i nierozumieniu przekazywanych treści. Warto podkreślić, że zadania dotyczące zagadnień podstawy programowej dawnego gimnazjum, czy obecnej szkoły podstawowej z matematyki nie należą do trudnych. Studenci definiowali pojęcia w błędny sposób, czasem również zdarzały się nieścisłości lub braki w definiowanych obiektach. Studenci otrzymywali temat wcześniej, mieli czas na przygotowanie się do prowadzonej lekcji a mimo tego popełniali błędy podczas rozwiązywania zadań. Zdarzyło się nawet w historii mojej pracy zawodowej, że pewien student podczas zliczania kwoty, którą odkładał bohater zadania zsumował wszystkie wartości, które wyrażone były w różnych jednostkach i w ten sposób otrzymał wynik końcowy. A także miała miejsce sytuacja, podczas odbywania praktyk, że tylko hospitacje lekcji prowadzonych przeze mnie były podstawą do ich zaliczenia, a wykładnikiem oceny miały być sporządzone przez studenta notatki. Same warunki zaliczenia takiej praktyki były i są dla mnie niezrozumiałe i skłaniają do refleksji, lecz przy tej okazji chciałam zwrócić uwagę na zupełnie inną kwestię. Student. o którym mowa obserwował lekcje w jednej z klas autorskich. Tematami realizowanymi podczas tych lekcji były m.in. liczby pierwsze oraz wyznaczanie liczb pierwszych z danego zakresu za pomocą metody Sita Eratostenesa, równania diofantyczne a także algorytm Euklidesa. W sporządzonych przez studenta notatkach roiło się od błędów, w dodatku notatki były bardzo nieczytelne, na moją prośbę, by zostały odczytane tematy okazało się, że twórcą sita był Euklides a twórcą algorytmu wyznaczania największego wspólnego dzielnika-Eratostenes, ponadto nazwiska obu osób zapisano małymi literami. Należy dodatkowo uświadomić sobie, że do tych zagadnień podczas studiowania na kierunku matematyka studenci już nie powrócą. Braki ze szkoły średniej towarzyszyć im będą do zakończenia studiów (chyba, że nadrobią we własnym zakresie). Przeteoretyzowany program studiów, który zawiera wiele przedmiotów zaawansowanej matematyki teoretycznej warto by zastąpić przedmiotami lepiej przygotowującymi przyszłych nauczycieli. Z perspektywy lat i własnych doświadczeń zauważam, że znaczny brak kontaktu z matematyką szkolną podczas studiów spowodował po ich ukończeniu utratę biegłości w rozwiązywaniu szkolnych zadań a kilka semestrów zajęć matematyki szkolnej, czy praktyk nie była w stanie tego zrównoważyć, co więcej przedmioty i zajęcia te nie dały żadnego przygotowania w pewnych obszarach, np. pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie. Koncentrowały się na praktykowaniu tradycyjnych zadań szkolnych, zadań, które przygotowywały uczniów do egzaminów: na zakończenie szkoły podstawowej czy maturalnego, czyli takich, z którymi siłą rzeczy każdy student musiał sam mieć do czynienia w szkole. Jeśli sam nie próbował sił w konkursach, czy nie uczestniczył w zajęciach koła matematycznego żadnego doświadczenia w tej kwestii nie był już w stanie nabyć w czasie studiów, dlatego tak mało nauczycieli matematyki w szkołach angażuje się w pracę z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Wypowiedziane przez F.A.W. Diesterwega przed 170 laty słowa: „Szkoła jest tyle warta, ile wart jest nauczyciel" (Korzeniowska, 2001) nie straciły na swej aktualności. Nasuwają się jednak pytanie, kto tę szkołę ma ulepszać? Czy debiutanci w tym zawodzie, którzy są słabo przygotowani do tego zawodu przez system kształcenia nauczycieli, czy może rodzice, względnie urzędnicy Ministerstwa?
Jeśli chcemy budować społeczeństwo oparte na wiedzy i w ramach tego reformować system edukacji narodowej musimy posiadać bardzo dobrze przygotowanych nauczycieli w zakresie zarówno nauczanego przedmiotu, jak i pełnych umiejętności kształcenia, którzy będą posiadać szeroką wiedzę ogólną i pedagogiczną (Wierzbicki, 2000). Tym czasem nadal nie udaje się rozstrzygnąć dylematu: jak kształcić nauczycieli. Czy lepiej zaczynać od

przygotowania do roli w tym zawodzie, a następnie przysposabiać w przedmiocie nauczania, czy stosować kolejność odwrotną? Nie otrzymujemy jednoznacznej odpowiedzi, jak ich obecnie przygotowywać a przecież zmiany w edukacji wymagają trafnego i uniwersalnego określenia zadań systemu kształcenia nauczycieli.

Przebudowa edukacji nie jest możliwa bez zmian dotychczasowego systemu kształcenia nauczycieli. Nie może być tak, żeby około 670 jednostek kształcących nauczycieli w polskich uczelniach, bądź wydziałach istniejących przy innych niehumanistycznych uczelniach (Wiłkomirska, 2005), w szczególności prywatnych, przy zróżnicowanych programach nauczania, przy ciągłym braku specjalistycznych kadr naukowych, warsztatu praktycznego, prowadziło w taki sposób edukację przyszłych nauczycieli. Każdego roku uczelnie te opuszcza duża grupa „wykwalifikowanych nauczycieli", która znacząco przewyższa zapotrzebowanie systemu oświaty na nowych nauczycieli. Każda z tych blisko 670 jednostek naukowych promuje corocznie, w zależności od liczby studentów a także własnych możliwości uczelni, od kilkunastu do kilku tysięcy nauczycieli. W sytuacji niedofinansowania kształcenia na uczelniach wyższych, czy braku zagrożenia deficytem nauczycieli, jest to stan nieracjonalny i niczym nieuzasadniony (Wiłkomirska, 2005). Społeczeństwu powinien zostać przedstawiony rzeczywisty obrazu kształcenia nauczycieli i na tym tle, obrazu nauczyciela i jego zawodu powinien zostać zaproponowany nowy, drożny system. Warto przy tym skorzystać z dobrych doświadczeń naszych unijnych partnerów. Taka zmiana systemu kształcenia i doskonalenia nauczycieli nie powinna mieć charakteru statycznego a powinna podlegać ewolucyjnym długofalowym zmianom, które są nieodłączną cechą edukacji i zmian w strukturze społeczeństwa. Takie dokonujące się zmiany w systemie kształcenia i doskonalenia nauczycieli powinniśmy widzieć nie tylko w kontekście „toczącej się reformy", ale także z dłuższej perspektywy czasu z pozycji nauk o edukacji, które powinny być ponad opcjami politycznymi, w aspekcie wielopłaszczyznowych uwarunkowań społeczno - ekonomicznych oraz wymagań społeczeństwa wiedzy (Wierzbicki ,2005).

Podsumowując, system kształcenia nauczycieli w Polsce ma wiele niedoskonałości, do których należą między innymi: zasady rekrutacji do zawodu oparte wyłącznie na fakcie zdania egzaminu dojrzałości, brak szkół średnich o profilu pedagogicznym a także przeteoretyzowanie programów studiów nauczycielskich czy też innych form kształcenia oferujących przygotowanie pedagogiczne oraz niewystarczająca ilość i jakość praktyk pedagogicznych. Jednym z ważnych elementów w podniesieniu kompetencji nauczycieli jest zapewnienie przez uczelnie wyższe wprowadzenia do programów kształcenia przyszłych nauczycieli modułów dotyczących pracy z uczniem zdolnym.

4.8. Weryfikacja kompetencji nauczycielskich i rozwój zawodowy czynnych nauczycieli.

Przyjrzyjmy się bliżej weryfikacji kompetencji nauczycielskich w Polsce a także rozwojowi zawodowemu czynnych nauczycieli. I ten niestety posiada wiele niedoskonałości. Jak wiadomo, jakość pracy nauczyciela oceniana i weryfikowana jest tak naprawdę każdego dnia przez podopiecznych i środowisko. Jednak formalnym wyznacznikiem posiadanych przez polskiego nauczyciela kwalifikacji, a także związanych z nimi kompetencji jest stopień awansu zawodowego. W artykule 9a (rozdział 3a) przewidziane są cztery stopnie awansu: nauczyciel stażysta, kontraktowy, mianowany i dyplomowany (Karta Nauczyciela, ustawa z dnia 26 stycznia 1982 r., DzU 2006, nr 97, poz. 674, z późn. zm. 29). Tam także zawarto

szczegółowe warunki oraz procedury osiągania poszczególnych stopni awansu zawodowego. Najliczniejszą grupą wszystkich uczących (41,6%) są nauczyciele dyplomowani, mniej liczną (30,8%) mianowani, z kolei nauczyciele kontraktowi stanowią 19,7% ogółu natomiast stażyści 5% a najmniej liczną grupa nauczycieli są nauczyciele bez stopnia awansu, bo stanowią zaledwie 2,9% (Igielska, 2009). Przebieg procedury awansu w dużej mierze zależy od postawy samego nauczyciela, jego opiekuna, dyrekcji szkoły, otoczenia i środowiska, zarzuca mu się jednak nadmierny formalizm. Koncentruje się on bowiem nie na rozwoju, a raczej na gromadzeniu jego świadectw. Co najważniejsze nie odnotowuje się korelacji między posiadanym stopniem zawodowym a skutecznością kształcenia (Kautz, 2011).
Ideę awansu zawodowego, w uproszczeniu, można sprowadzić do rozwoju kompetencji merytorycznych, metodycznych i wychowawczych nauczycieli osiąganego poprzez aktywne ich uczestnictwo w życiu szkoły, środowiska lokalnego a także udział w kursach, szkoleniach bądź studiach. Wszystkie świadectwa potwierdzające w. w. działania gromadzone są przez nauczycieli a następnie na ich podstawie przygotowane zostaje sprawozdanie lub w przypadku awansu na stopień nauczyciela dyplomowanego, oprócz sprawozdania także teczka, które następnie przedkłada nauczyciel stosownej komisji do oceny. Ich zawartość w połączeniu z wynikiem rozmowy odbytej z komisją (egzaminu) jest podstawowym kryterium awansu. Procedura ta budzi u wielu nauczycieli a także osób spoza tego środowiska wiele kontrowersji, wielokrotnie głośno akcentowanych. Z doświadczenia własnego mogę stwierdzić, że większość podejmowanych przez nauczycieli dodatkowych działań miało charakter nieprzemyślany a przesłanką do podjętych kroków była tylko potrzeba spełnienia jednego z warunków koniecznych do uzyskania kolejnego stopnia awansu zawodowego. Nauczyciele angażowali się wielokrotnie w działania, które nie odpowiadały ani ich kompetencjom ani zainteresowaniom, tylko po to, by wpisać je do sprawozdania a po zakończeniu całej ścieżki zawodowej nigdy do nich nie wracali. Nietrudno zaobserwować, jak mało działań podejmowanych jest w grupie nauczycieli dyplomowanych. Większość tego, co dzieje się poza nauczaniem w szkołach realizowane jest przez nauczycieli będących na ścieżce zdobywania awansu zawodowego. Niepokojący jest także fakt, że większość form doskonalenia zawodowego wybieranych jest przez nauczycieli losowo, tylko po to, by dołożyć kolejne zaświadczenie z odbytego kursu do swojej teczki. Co więcej, zauważalnym wśród nauczycieli dyplomowanych jest brak dążenia do dalszego samorozwoju i niechęć do udziału w jakichkolwiek formach doskonalenia zawodowego. Także egzamin w żaden sposób nie weryfikuje kompetencji czynnych zawodowo nauczycieli. Powołując się na wypowiedzi autorytetów z dziedziny oświaty możemy stwierdzić, że cały awans zawodowy nauczycieli ani nie weryfikuje ich kompetencji ani przydatności do zawodu. Składa się na to kilka powodów (Karta Nauczyciela, art. 6, art. 75, art. 76 ustawy z 26 stycznia 1982 r., DzU 2006, nr 97, poz. 674 z późn. zm.):
1. Kolejne stopnie awansu uzyskać można stosunkowo łatwo o czym świadczy fakt, że ponad 70% nauczycieli w polskich szkołach ma najwyższy bądź poprzedzający stopień zawodowy.

2. Karta Nauczyciela umożliwia także wielokrotne powtarzanie procedury awansu na kolejny stopień.

3. Karta Nauczyciela przewiduje możliwość wymierzania kar dyscyplinarnych (do zwolnienia z pracy włącznie), ale przepisy te stosowane są tylko sporadycznie i nie z powodu braku kompetencji pedagogicznych.

Innym stosowanym w szkolnictwie sposobem oceny kompetencji nauczycieli i ich weryfikacji są hospitacje lub obserwacje zajęć dydaktycznych, prowadzone w ramach nadzoru pedagogicznego a ich przebieg normowany jest Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 grudnia 2006 r. w sprawie szczegółowych zasad sprawowania nadzoru pedagogicznego, wykazu stanowisk wymagających kwalifikacji pedagogicznych, kwalifikacji niezbędnych do sprawowania nadzoru pedagogicznego, a także kwalifikacji osób, którym można zlecać prowadzenie badań i opracowywanie ekspertyz, DzU, nr 235, poz. 1703.

Inną forma nadzoru, do której uprawniony jest dyrektor szkoły to ocena nauczyciela. Dyrektor może także w tej kwestii zasięgać opinii samorządu uczniowskiego. Taka ocena może być przeprowadzona z inicjatywy dyrektora szkoły lub na wniosek: nauczyciela, organu sprawującego nadzór pedagogiczny, organu prowadzącego szkołę, rady szkoły lub rady rodziców. Polscy nauczyciele, mimo że są zachęcani do awansu zawodowego i podlegają systematycznej ocenie, to w powszechnej opinii nie są to wystarczające i skuteczne mechanizmy ich rozwoju a także weryfikacji ich kompetencji, w konsekwencji czego w polskich szkołach uczą głównie nauczyciele mianowani i dyplomowani, którzy niestety nie zawsze utożsamiani są z pracą dydaktyczną i wychowawczą wysokiej jakości. Ponadto dochodzi jeszcze fakt słabej motywacji finansowej oraz frustracja społeczną recepcją swej pracy. Z kolei nauczycieli o niskich kompetencjach trudno zmotywować lub pobudzić do większego wysiłku, również bardzo trudno wobec obowiązujących przepisów i form weryfikacji kompetencji odsunąć takowych od nauczania (Kautz, 2011). Wszystkie te zasygnalizowane braki systemu kształcenia nauczycieli: mało skuteczne metody weryfikacji nauczycieli czynnych zawodowo, czy awans zawodowy w niewielkim stopniu związany z rozwojem kompetencji wychowawczych i dydaktycznych nauczycieli nie powinny nam jednak przesłaniać faktu, że w tym zawodzie pracuje ponad 600 tysięcy osób, z których zdecydowana większość co najmniej dobrze wypełnia swoje obowiązki (Kautz, 2011). Mimo wielu niesprzyjających czynników, takich jak dość niski prestiż tego zawodu w społeczeństwie, niskie wynagrodzenie, przymus ciągłego podnoszenia kwalifikacji czy też narastające problemy wychowawcze, biorąc pod uwagę całe środowisko nauczycielskie, możemy stwierdzić, że jest ono w całkiem niezłej kondycji. Konieczna jest jednak ciągła analiza działania systemu, w którym kształcą się kandydaci do tego zawodu oraz jego ewaluacja ze szczególnym naciskiem kładzionym na kształcenie nauczycieli przedmiotów ścisłych, zwłaszcza tych, których zdobyte wykształcenie będzie uprawniało do nauczania tylko w szkole podstawowej.

4.9. Nauczyciele matematyki w Polsce na podstawie raportu z badania TEDS-M

Poprzez opracowany, przez Mariusza Grzędę raport z badań TEDS-M, czyli badania polskich nauczycieli matematyki , które zostało przeprowadzone przez Instytut Filozofii i Socjologii PAN w ramach międzynarodowego projektu Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) realizowanego w 17 krajach przez międzynarodową organizację International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) przedstawiona została szeroko rozumiana sytuacja zawodowa nauczycieli matematyki uczących w szkołach podstawowych i gimnazjach . Badanie to w Polsce zostało sfinansowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej a kierownikiem i głównym koordynatorem projektu był dr Michał Sitek. Terenową realizację tego badania przeprowadzono w listopadzie 2008 roku.

4.9.1. Sposób nabycia uprawnień zawodowych na podstawie raportu z badania TEDS-M

Większość z badanych osób (62%) trafiła do zawodu nauczyciela matematyki ukończywszy wyższe studia matematyczne o specjalności nauczycielskiej. 27% nabyła uprawnienia nauczycielskie poprzez ukończenie studiów podyplomowych przygotowujących do nauczania matematyki a jedynie niewielka liczba badanych osób deklarowała, że uzupełniała swoje uprawnienia w trakcie studiów matematycznych, zaliczając dodatkowo wybierany blok przedmiotów pedagogicznych (5%) lub po studiach matematycznych kończąc kurs pedagogiczny (3%). Badani, w celu uzyskania uprawnień do wykonywania zawodu nauczyciela byli słuchaczami różnego rodzaju studiów, które podejmowali w różnej kolejności, Największa część nauczycieli ukończyła jedynie magisterskie studia dzienne (24%), podobnie liczą grupę stanowiły osoby, które w pierwszej kolejności studiowały dziennie na poziomie magisterskim a następnie zaocznie na studiach podyplomowych z kolei osoby rozpoczynające od dziennych studiów magisterskich a następnie kończące dwa kierunki studiów podyplomowych stanowiły 8%.

4.9.2. Opinie na temat matematyki.

Istotne różnice zauważalne były pomiędzy udzielonymi odpowiedziami w przypadku stwierdzenia mówiącego, że natura matematyki to uczenie się, zapamiętywanie i stosowanie pewnych procedur przez nauczycieli z gimnazjów i ze szkół podstawowych. I tak nauczyciele uczący w szkołach podstawowych byli bardziej skłonni podzielać tę opinię niż nauczyciele z gimnazjów, również nauczyciele starsi częściej niż młodsi uważali, że aby rozwiązać zadanie matematyczne trzeba znać prawidłową procedurę.

4.9.3. Opinie na temat zdolności matematycznych.

Kwestia opinii na temat zdolności matematycznych zbadana została za pomocą serii pytań, które składały się z siedmiu stwierdzeń dotyczących natury zdolności matematycznych u ludzi. Największy odsetek odpowiedzi aprobujących (około trzy czwarte lub więcej) uzyskały stwierdzenia mówiące o tym, że zdolności matematyczne mają charakter wrodzony, natomiast w przypadku pozostałych stwierdzeń większość stanowiły odpowiedzi negujące opinie w nich zawarte. Stwierdzeniem, które zostało odrzucone w największym stopniu okazała się opinia stwierdzająca, że starsi uczniowie potrafią rozumować abstrakcyjnie, a stosowanie modeli konkretnych i pomocy wizualnych stają się dla nich mniej potrzebne. Stwierdzeniem niemal równie często odrzucanym jest opinia wedle której, częściej uzdolnieni matematycznie są chłopcy. Z udzielonych odpowiedzi na przytoczone stwierdzenia wynika, że nauczyciele matematyki na ogół uważają, że zdolności matematyczne są wrodzone, jednocześnie zaprzeczają także opiniom, według których pewne cechy szczególnie sprzyjają lepszemu rozumieniu matematyki. Badani nauczyciele zaprzeczali także stwierdzeniom, że wrodzone zdolności są dużo ważniejsze niż wysiłek i praca włożony w rozumienie matematyki. W przypadku tych opinii nie występowały istotne różnice pomiędzy nauczycielami uczącymi w gimnazjach i w szkołach podstawowych, również większość z badanych stwierdzeń była w sposób istotny skorelowana pozytywnie z wiekiem i stażem pracy nauczycieli.

PODSUMOWANIE:

Głównym problemem niskiej jakości kształcenia matematycznego uczniów jest nieodpowiednie przygotowanie nauczycieli do pracy w zawodzie. Przez nieodpowiednie przygotowanie rozumiem to, że albo nauczyciele matematyki są źle przygotowani merytorycznie, albo to, że nauczycielami zostają ludzie, którzy nimi być nie powinni. Dlatego ważne w kształceniu nauczyciela jest to, aby przyszli kandydaci umieli w sposób wiarygodny ocenić sami własne predyspozycje do tego zawodu.

5. Wspieranie uczniów zdolnych matematycznie

5.1. Wspieranie uczniów zdolnych- początki.

Zainteresowanie problematyką zdolności w sferze naukowej i praktycznej sięga początku XX wieku, kiedy to prowadzono badania nad inteligencją i uwarunkowaniami środowiskowymi rozwoju zdolności intelektualnych w psychologii amerykańskiej, europejskiej czy radzieckiej, jak również wprowadzono wiele rozwiązań pedagogicznych w poszczególnych krajach. Tworzono definicje i programy dla uczniów zdolnych w Stanach Zjednoczonych, powstały szkoły i klasy dla uczniów uzdolnionych artystycznie lub naukowo a także uporządkowano działania, dotyczące konkursów i olimpiad przedmiotowych, grupowania uczniów zdolnych na zajęciach specjalistycznych czy fundowania stypendiów. Pierwsze wskazówki, które uwzględniały umożliwienie dziecku rozwoju jego zdolności, jak zauważa B. Dyrda (2011b) znalazły swoje odzwierciedlenie w Deklaracji Praw Dziecka, czyli dokumencie przyjętym przez Zgromadzenie Ogólne Organizacji Narodów Zjednoczonych w roku 1959, ale początki intensywnych działań na rzecz pracy z uczniem zdolnym w krajach europejskich można śledzić od lat 70, ich nasilenie natomiast, od początku lat 90. XX wieku (por. Dyrda, 2012). Tendencje te można dostrzec w oficjalnych dokumentach: Konwencja o Prawach Dziecka z roku 1989 (Dyrda, 2011b), w rekomendacjach Parlamentu Europejskiego, w rozwiązaniach prawnych, deklaracjach i rozwiązaniach praktycznych w obrębie poszczególnych państw europejskich. Od lat 70. XX wieku odejmowane były próby współdziałania różnych krajów i środowisk na rzecz uczniów zdolnych i tak np. od tego czasu działać zaczęła Światowa Rada ds. Szczególnie Uzdolnionych i Utalentowanych Dzieci (World Council for Gifted and Talented Children) współpracująca z organizacjami z całego świata (Dyrda, 2012). W latach 90. XX wieku utworzona została w Europie sieć współpracy dotyczącej wspierania uczniów zdolnych, rozpoczęto organizacje konferencji i Europejskich Szczytów Kulturalnych (Mönks, 2012).

Od wielu lat również w zaleceniach i rekomendacjach Parlamentu Europejskiego zwraca się uwagę na konieczność opieki nad uczniami zdolnymi, traktowanymi jako bogactwo każdego kraju. I tak np. w Rekomendacji Parlamentu 1248 (Recommendation 1248…) zalecało się tworzenie w poszczególnych krajach odpowiedniej edukacji dla uczniów zdolnych, takiej, by mogli rozwijać w pełni swoje możliwości, uznając ich za osoby o specjalnych potrzebach edukacyjnych. W dokumencie tym wskazana została także potrzeba doskonalenia metod identyfikacji zdolności, kształcenia nauczycieli, włączania do pracy ze zdolnymi różnych środowisk, czyli stworzenia warunków do takiego kształcenia zdolnych osób, by w optymalny sposób wykorzystać ich potencjał (Limont, Cieślikowska, 2004). Bardzo istotnym elementem europejskiej polityki w kwestii rozwoju pedagogiki zdolności była przyjęta przez kraje Unii Europejskiej Strategia Lizbońska. Był to plan działań krajów Unii Europejskiej na lata 2000–2010, który zakładał, że Europa w krótkim czasie miała się stać regionem o wysokim potencjale a także szybkiej dynamice rozwoju gospodarczego. Dlatego też priorytetem stał się rozwój nauki i badań naukowych, innowacyjność itp. Mimo, że nie udało się zrealizować postawionych w ramach Strategii celów, to dokument ten przez wiele lat ukierunkowywał różne lokalne działania i był inspiracją wielu działań. W wielu dokumentach oświatowych pojawiały się nawiązania do celów Strategii Lizbońskiej. Przykładem może być spotkanie ekspertów związanych z edukacją uczniów zdolnych w Nijmegen w roku 2002, na którym to sformułowano postulat odnoszący się do uznania edukacji zdolnych jako priorytetu w działaniach Unii Europejskiej (Limont, 2004).

Mimo, iż w poszczególnych krajach występują różne podejścia do definiowania uczniów zdolnych czy wypracowanych metod pracy z nimi (por. Sękowski, 1997), to jednak zauważa się, że w większości tematyka zdolności znajduje swoje odzwierciedlenie w określonych działaniach państwa czy instytucji. I tak np. według danych opublikowane w *Raporcie Eurydice*, analizującym sposoby sprawowania opieki nad uczniami zdolnymi w krajach europejskich, dotyczącym roku szkolnego 2005/2006 „większość aktualnie istniejących specjalnych rozwiązań edukacyjnych dla dzieci i młodzieży zdolnej stanowi część systemu szkolnego i jest stosowana w jego ramach", rozwiązania pozaszkolne natomiast współistnieją z nimi (Dyrda,2008 s. 13). Najbardziej powszechnie stosowanymi sposobami pracy z uczniami zdolnymi są m.in. różnicowanie zajęć w klasie, zajęcia na wyższym poziomie, indywidualizacja programu nauczania, zajęcia pozaszkolne, indywidulane toki nauczania. Stosuje się także inne, uzupełniające rozwiązania, takie jak: tworzenie ośrodków dla uczniów, ich rodziców i nauczycieli oraz sieci wsparcia (tamże). W dokumentach prawnych większości europejskich krajów funkcjonuje określenie zdolny lub utalentowany. Są także kraje, które określają takich uczniów w sposób opisowy i najczęściej w ich charakterystyce kładzie się nacisk na predyspozycje intelektualne, akademickie, także psychomotoryczne, artystyczne, rzadziej społeczne czy emocjonalne. Jedynymi krajami, które nie stosują żadnych określeń w stosunku do zdolnych uczniów są kraje skandynawskie.

Najczęściej stosowanymi wskaźnikami zdolności są: wyniki sprawdzianów uzdolnień lub potencjalnych zdolności, mierzalne wyniki i osiągnięcia, w nauce, sporcie lub dziedzinach artystycznych, co oznacza, że konieczne są wyraźne, ponadprzeciętne osiągnięcia, by uczeń był objęty specjalnymi rozwiązaniami edukacyjnymi. W wielu krajach, takich jak Irlandia, Francja, Hiszpania, Portugalia, Czechy, Słowacja, uczeń zdolny również traktowany jest jako uczeń o specjalnych potrzebach edukacyjnych, natomiast przygotowanie nauczycieli do pracy z uczniami zdolnymi najczęściej odbywa się w formie oddzielnych przedmiotów, lub wątków dotyczących specjalnych potrzeb edukacyjnych natomiast rzadziej w postaci modułów dotyczących omawianego tematu. W niektórych państwach jednak nauczanie w tym zakresie pedagogów jest opcjonalne. I tak np. możliwe jest doskonalenie nauczycieli poprzez dostęp do różnych kursów. studiów podyplomowych, organizowanych przez uczelnie lub inne lokalne organizacje. Czechy np. współpracują w tym zakresie z międzynarodową organizacją European Council for High Ability (ECHA). W żadnym z krajów szkolenia w tym zakresie nie są obowiązkowe, ale w wielu istnieją instytucje państwowe czy prywatne, wspierające ucznia zdolnego, jego rodziny i nauczycieli (Dyrda, 2008).

W państwach europejskich istnieją dwa podejścia do opieki nad uczniem zdolnym. Jedno z nich funkcjonuje w krajach skandynawskich, w których to każdy uczeń jest indywidulanie traktowany i istotna jest tam dbałość o jego rozwój i w których nie istnieje oddzielna definicja ucznia zdolnego. Taki model opieki zwany jest integracyjnym. Jego zwolennicy podkreślają możliwość pełnego i harmonijnego rozwoju dziecka wśród zróżnicowanej pod względem uzdolnień grupy rówieśników, jednak dostrzegają także fakt, że takie grupy nie dają możliwości maksymalnego rozwoju uczniom zdolnym, zaniżając ich osiągnięcia (Limont, 2004) a ponadto narażają ich na trudności społeczne i emocjonalne (Limont, Cieślikowska, 2004). Drugi model z kolei ma charakter selektywny i w modelu tym istnieją definicje określające, kto jest zdolny a wskaźniki zdolności oparte są głównie na wynikach w nauce i osiągnięciach lub testach uzdolnień. W krajach, w których dominuje ten model jest wiele szkół profilowanych i specjalistycznych i dąży się do tego, by uczniów umieszczać w grupach jednorodnych. I właśnie do tego modelu najbardziej zbliża się Polska, Łotwa czy Czechy (*Wspieranie rozwoju uczniów zdolnych…*, 2008). Główną zaletą takiego kształcenia są możliwość maksymalizowania rozwoju i osiągnięć w grupie osób o podobnych możliwościach intelektualnych oraz uzdolnieniach kierunkowych (Limont, Cieślikowska, 2004). Jednocześnie jednak zarzuca się, że kraje stosujące ten model pogłębiają różnice społeczne związane ze statusem materialnym lub miejscem pochodzenia. Wybór sposobu kształcenia wzbudza kontrowersje. I tak izolacja uczniów zdolnych od normalnego trybu kształcenia, kształcenie typu elitarnego, budzi sprzeciw osób skłaniających się ku wyrównywaniu szans edukacyjnych uczniów z bardziej zaniedbanych terenów, uznaje się bowiem, że obecność zdolnych uczniów w klasie mobilizuje słabszych i pobudza do większego wysiłku a także pozwala na zmierzenie się z lepszymi od siebie. Ci ostatni z kolei mogą stać się wzorcem do naśladowania i pomocą dla słabszych uczniów. Może to również stać się dla nich cennym doświadczeniem socjalizacyjnym. Zwolennicy selekcji z kolei wskazują na fakt, że uczniowie zdolni w takich zwykłych klasach szkolnych tracą szanse na rozwój swoich rzeczywistych możliwości, nie mają również „z kim się ścigać”. Jeśli są najlepsi w klasie tracą motywację do tego, by starać się bardziej (por. Limont, Cieślikowska, 2004).

Większość krajów łączy integrację i wybrane rozwiązania selekcyjne, szczególnie poza zajęciami szkolnymi. W wielu państwach również uczeń zdolny traktowany jest jako ten, który ma specjalne potrzeby edukacyjne i wymaga specjalnych rozwiązań w zakresie kształcenia (Dyrda, 2008). W zależności od kraju, stosowane są więc różnorodne rozwiązania w pracy z uczniem zdolnym. W niektórych z nich działają instytucje wspomagające nauczycieli, przygotowujące ich do pracy ze zdolnymi. Instytucje te opiniują programy a także realizują zadania dla uczniów zdolnych i wspierają ich rodziców. Również różnorodny jest sposób finansowania tych działań: część kosztów ponosi państwo, część landy a część osoby prywatne. Wiele takich instytucji zajmujących się zdolnymi realizuje projekty, różne programy oraz badania naukowe dotyczące różnych aspektów funkcjonowania uczniów zdolnych. Do takich działań na rzecz uczniów zdolnych włączają się również uczelnie. Zapraszają one uczniów do siebie na zajęcia, prowadzą badania naukowe, czy realizują projekty. Występujące w krajach europejskich instytucje, których celem jest wspieranie rozwoju uzdolnionych uczniów oraz ich nauczycieli są zarówno państwowe, jak i prywatne.

5.2. Opieka nad uczniem zdolnym w wybranych krajach i regionach

W Wielkiej Brytanii traktuje się uczniów zdolnych jako uczniów o specjalnych potrzebach edukacyjnych i prawnie zapewnia się im edukację na wysokim poziomie w każdej szkole, także dostęp do zajęć dodatkowych, wsparcie psychologiczne i pedagogiczne. Szkoły współpracują ze sobą. Istnieje nawet sieć placówek specjalistycznych, których celem jest wspieranie rozwoju uczniów zdolnych (Dyrda, 2011b). Także obowiązujące akty prawne zwracają uwagę na potrzeby uczniów zdolnych, również na wsparcie pedagogiczne i psychologiczne, tworzenie dodatkowych zajęć a także aktywizowanie współpracy pomiędzy szkołami, zajmującymi się ich edukacją (Dyrda, 2011a). Dokonuje się rozpoznawania zdolności uczniów, najczęściej poprzez diagnozy nauczycieli, na podstawie nominacji oraz osiągnięć ucznia (Dyrda, 2011b). Nauczyciele posiadają także dostęp do opracowanego modelu identyfikacji zdolności, który zakłada pozyskiwanie informacji z różnych źródeł, m.in. są to: „obserwacja nauczyciela, sprawdziany wiadomości i umiejętności, dotychczasowe osiągnięcia ucznia, pomiar kreatywności, aktywność pozaszkolna, testy inteligencji, informacje od rodziców, wyniki końcowe z danej klasy, informacje od rówieśników, informacje od samego ucznia” (tamże, s. 8). Coraz częściej również wskazuje się na konieczność dostrzegania potencjału, a nie koncentrowania się na osiągnięciach oraz na tym, by dostrzegać zdolności wśród dzieci z różnych środowisk (tamże).

W szkołach podstawowych uczniowie uczą się w klasach, które skupiają dzieci o zróżnicowanych zdolnościach a dopiero na poziomie szkoły średniej następuje grupowanie. Jednocześnie bardzo istotna jest indywidualizacja w podejściu do rozwoju uczniów, dlatego stosowane są metody przyspieszenia, wcześniejszego rozpoczęcia edukacji, czy też umożliwienie uczenia się wybranych przedmiotów na wyższym poziomie. Tworzone są również warunki do samodzielnej nauki lub nauki poza szkołą. Dostrzegalne są także poszukiwania metod pracy z uczniami zdolnymi wykraczające poza indywidualne programy, np. *Day a Week School*, w ramach którego dzieci w wieku przedszkolnym, raz w tygodniu, przez cały dzień mogą zajmować się określoną dziedziną wiedzy (np. matematyką, filozofią). Innym przykładem rozwiązania jest angażowanie młodzieży w działania na rzecz społeczności lokalnej (Dyrda, 2011b).

W Wielkiej Brytanii funkcjonują także specjalne programy, skierowane na rozwój uczniów zdolnych, takie jak *National Challenge* , którego celem jest poprawa jakości kształcenia zdolnych uczniów, szczególnie: trafne rozpoznanie potencjału uczniów również tych, którzy sprawiają trudności; współpraca szkół, kształce-nie kadry, wspieranie zespołów zajmujących się uczniami zdolnymi, czy *Learner Academy* , czyli program wykorzystujący nowoczesne technologie informacyjne, umożliwiający dostęp do potrzebnych informacji, materiałów edukacyjnych. Zainteresowanym osobom stwarza też możliwość publikowania swoich prac. W ramach tego programu istnieje również współpraca międzynarodowa dotycząca pracy z uczniami zdolnymi, polegająca na wymianie doświadczeń i wzajemnym wsparciu w przypadku problemów (tamże). W Anglii funkcjonują także regionalne centra dla uczniów zdolnych tzw. *Excellence Hubs*, mające za zadanie opiekę nad zdolnymi i zaspokajanie ich potrzeb edukacyjnych a także ośrodki badawcze skierowane na zdolnych uczniów oraz realizowane w ramach wyższych uczelni projekty badawcze (tamże).

Irlandia z kolei jest krajem, w którym intensywne działania na rzecz uczniów zdolnych są podejmowane od lat 90. XX wieku. W roku 1992 Dublin City University zapoczątkował i wdrożył plan działań, mający na celu rozpoznawanie i rozwijanie zdolnych uczniów. Do podejmowanych działań należały m.in.: rozpoznawanie uczniów bardzo zdolnych, kierowanie ich na programy letnie lub zajęcia w soboty, zorganizowanie centrum dla zdolnej młodzieży Irish Centre for Talented Youth (CTYI), aktywizacja szkół w całej Irlandii w celu identyfikacji wysokich zdolności uczniów i zachęcenia ich do udziału w programie przeznaczonym dla zdolnych, jak również promocja i docenianie osiągnięć. Poszukiwanie i rozpoznawanie zdolnych sprzyjało ich przyszłej aktywności w zakresie udziału w zajęciach pozalekcyjnych oraz dynamizowało karierę akademicką i zawodową. W Irlandii podejmowane są także działania na rzecz zwiększenia kwalifikacji nauczycieli uczniów zdolnych, jak również zwiększenia poziomu wiedzy i dostępu do informacji ich rodziców.

Kolejnym z wybranych krajów jest Finlandia, która budzi ogromne zainteresowanie badaczy ze względu na sukcesy edukacyjne uczniów. Według PISA (*Programme for International Student Assessment*) zajmują wysokie pozycje (Dyrda, 2011a). Dostrzega się ponadto wiele powiązań pomiędzy poziomem finlandzkiej edukacji a rozwojem gospodarczym i innowacyjności państwa (Czerniak, 2013). W kraju tym obowiązuje integracyjny model kształcenia. Nie przewiduje się specjalnego traktowania uczniów zdolnych, ale szkoły zachęcane są do tego, by indywidualizować tok kształcenia a także umożliwiać uczęszczanie na specjalne zajęcia, podczas których można rozwijać zainteresowania i zdolności (Dyrda, 2011a). B. Dyrda zauważa: „W Finlandii w systemie oświaty szczególnego znaczenia nabiera kategoria specjalnych potrzeb edukacyjnych. Każdy z uczniów ma prawo do uzyskania pomocy edukacyjnej w razie zaistnienia takiej potrzeby" (tamże, s. 34). Podkreśla się i realizuje równe szanse edukacyjne uczniów, zapewniając uczniom wsparcie nauczycieli w nauce lub w razie problemów społecznych. Twórcy raportu PISA zauważają, że Finlandia jest jedynym, obok Korei Płd. krajem, w którym występuje niewielka różnica wyników pomiędzy najlepszymi a najsłabszymi uczniami (zamykająca się w gra-nicach 5%) (za: Czerniak, 2013). Bardzo istotne są tam również takie aspekty, jak: przygotowanie i wynagradzanie nauczycieli oraz związany z zawodem prestiż. Istotna jest tam również atmosfera w szkole oraz wypracowanie dobrych relacji pomiędzy nauczycielami i uczniami, które to sprzyjają poczuciu bezpieczeństwa, samodzielności i minimalizują obawę przed popełnianiem błędów (Czerniak, 2013). Znaczący jest także sposób identyfikacji, wynikiem, którego są między innymi takie działania jak: wcześniejsze rozpoczęcie szkoły przez dziecko czy dobór aktywizujących i usamodzielniających metod nauki (Mönks, Pflüger, 2005a), jak również możliwość przejścia do klasy wyższej, wówczas, gdy realizowany program jest zbyt łatwy (Dyrda, 2011a). Ważny jest również sposób oceniania uczniów. Jest on zindywidualizowany, dotyczący po-stępów jednostki, a nie oparty na wystandaryzowanych testach, co pozwala na zmniejszenie poczucia konieczności rywalizowania, zarówno pomiędzy uczniami, jak i szkołami oraz na skupieniu się na rozwijaniu działań twórczych a także umiejętności społecznych (Czerniak, 2013).Bardzo istotnym elementem edukacji w Finlandii jest jej decentralizacja, czyli przesunięcie decyzji dotyczących doboru treści na gminy, zgodnie z ogólnymi wytycznymi ramowymi dla szkół (Dziedziewicz, Gajda, 2011). Sprzyja ona dopasowaniu kształcenia do lokalnych potrzeb i specyfiki środowiska.

W Norwegii z kolei przyjęty jest model edukacji integracyjnej, który uznaje wyjątkowość wszystkich uczniów i konieczność indywidualizacji kształcenia adekwatnie do ich potrzeb. Nie definiuje się tam pojęcia ucznia zdolnego i kładzie duży nacisk na wyrównywanie szans wszystkich podopiecznych (Dyrda, 2008) a szczególną uwagę poświęca się edukacji i rozwijaniu talentów sportowych, inne rodzaje uzdolnień są raczej ignorowane (Zaglowek, 2011). Brak wyraźnych działań skierowanych na uczniów zdolnych spotkał się z krytyką. H. Zaglowek (2013) zauważa, że być może przyczyną, dla której nie realizuje się edukacji skierowanej na uczniów zdolnych w tym kraju, jest brak doświadczenia, narzędzi i przygotowania samych nauczycieli w omawianym zakresie. Powstały nawet stowarzyszenia rodziców dzieci uzdolnionych, które stawiały sobie za cel walkę o prawa ich dzieci i stworzenie warunków do polemiki o ich potrzebach. Tematyka ta również ujawnia się w zainteresowaniach badaczy czy praktyków edukacyjnych.

Kolejnym z omawianych krajów są Niemcy, gdzie w ostatnich latach powstało wiele rozwiązań ustawodawczych, w tym takie, które definiują pojęcie ucznia zdolnego. Identyfikacja zdolności opiera się tam głównie na określeniu poziomu inteligencji (Dyrda, 2008), bierze się również pod uwagę opinię psychologa, rodziców i nauczycieli. Tacy uczniowie mogą kształcić się w zwykłej szkole lub w szkole dla uczniów zdolnych (Dyrda, 2011b). Do najlepszych z nich zaliczyć należy szkołę Sankt Afra oraz szkoły dla zdolnych oparte na koncepcji zdolności K. Hellera (Dyrda, 2013). Nauczyciele mogą uzyskać wsparcie w zakresie pedagogiki zdolności w ośrodkach uniwersyteckich, które prowadzą badania naukowe w tym zakresie i umożliwiają zdolnym uczniom dostęp do kursów rozwijających ich predyspozycje (Dyrda, 2011b).

Na Słowacji tematyka uczniów zdolnych podejmowana była od lat 60. XX wieku, co ujawniło się w realizacji rozszerzonego nauczania, klasach profilowanych, organizowaniu konkursów a działania opierały się głównie na intuicji i doświadczeniu nauczycieli. Nadal aktywności te są obecne w praktyce edukacyjnej i procentują międzynarodowymi osiągnięciami uczniów w różnych dziedzinach (Laznibatová, 2005). Na szczególną uwagę zasługują tworzone tam od 1993 r. klasy eksperymentalne, które powstały jako efekt wcześniejszych analiz teoretycznych i badań ośrodka badawczego Ministerstwa Szkolnictwa. Model wychowania i kształcenia wypracowany na Słowacji jest wynikiem refleksyjnego podejścia do pedagogiki zdolności i związanych z nią wyzwań a w modelu tym najważniejsze są takie elementy, jak: identyfikacja i wybór uzdolnień, wprowadzanie innowacyjnych treści i metod kształcenia, sposób oceniania, współpraca z rodzicami, podejście do uczniów, aspekty wychowawcze pracy ze zdolnymi (tamże). Za główne zalety wprowadzania tego modelu uznano przyspieszony rozwój intelektu objętych opieką uczniów, zapewniania im różnych doświadczeń i bodźców, możliwość funkcjonowania w pozytywnym, motywującym środowisku, aktywizowanie rodziców (tamże).

Kolejnym z omawianych krajów będą Węgry, które są przykładem państw, w których to problematyka pracy z uczniami zdolnymi stała się priorytetowa w działaniach edukacyjnych. Do najważniejszych przejawów zainteresowania tymi uczniami należy zaliczyć: tworzenie aktów prawnych, zapewniających opiekę nad uczniem zdolnym w kraju, tworzenie programów strategicznych, uwzględniających opiekę nad uczniem zdolnym (np. „Krajowy program wspierania uzdolnień”), tworzenie zaplecza finansowego dla wsparcia pracy z uczniami zdolnymi (np. Krajowy Fundusz na Rzecz Wspierania Uzdolnień) i tworzenie projektów, mających na celu wypracowanie i wdrożenie rozwiązań w pracy z uczniem zdolnym (Geniusz, Talent Bridges). Program Geniusz wdrożony był w latach 2009–2013 i współfinansowany przez UE a w jego ramach: stworzono w całym kraju sieć punktów rozwoju talentów, określono także w jakich warunkach ma się odbywać wsparcie rozwoju uzdolnień uczniów. Wdrożono także lokalne programy edukacyjne skierowane na uczniów zdolnych, publikowano i rozpowszechniano pomoce książkowe dla nauczycieli i rodziców, prowadzono szkolenia dla nauczycieli i in. Program ten zaktywizował nauczycieli i uczniów uzdolnionych w różnych dziedzinach (Fuszek, 2012). W ramach innego, dwuletniego programu Talent Bridges powstał krajowy system rejestrowania i śledzenia rozwoju talentów, a także opracowano program wsparcia dla uczniów zdolnych w trudnej sytuacji oraz o specjalnych potrzebach edukacyjnych. Skupiono się w nim przede wszystkim na rozwijaniu wybitnych talentów i umiejętności, wsparciu metod i form wzbogacania wiedzy, tworzeniu grup rówieśniczych, współpracy pomiędzy środowiskami uczniów zdolnych. Powstał także „Rynek talentów”, który umożliwił kontakty pomiędzy uczniami osiągającymi sukcesy a instytucjami i placówkami, które tych uczniów wspierały. Ponadto działaniami objął: szkolenia specjalistów do pracy z uczniami zdolnymi, uruchomienie kampanii informacyjnej oraz włączenie się w dialog na temat zdolności na forum krajów Unii Europejskiej. Istotne osiągnięcie Węgier stanowi utworzone w roku 2012 Europejskie Centrum Talentów w Budapeszcie, nastawione nie tylko na społeczność i cele lokalne, lecz także na współpracę międzynarodową (Fuszek, 2012).

Kolejny rozpatrywany przeze mnie kraj, w którym również widoczna jest szczególna troska o uczniów zdolnych, to Ukraina, gdzie od początku lat 90. XX wieku powstawały i wdrażane były programy wspierania uzdolnień, akty prawne które kwestie te regulowały, oraz koncepcje naukowe i badawcze. Na szczególną uwagę zasługują inicjatywy takie, jak program „Uzdolnienia twórcze” czy „Dzieci Ukrainy”. Działania te przyczyniły się do powstawania placówek edukacyjnych ukierunkowanych na kształcenie zdolnej młodzieży, ponadto powstało też czasopismo „Dziecko uzdolnione”, w którym publikują naukowcy i pedagodzy z różnych krajów (Boczarowa, 2011). Praca z młodzieżą uzdolnioną była tam zaplanowana i wdrażana poprzez przyjęcie narodowych programów: *Programu pracy z młodzieżą uzdolnioną w latach 2001–2005* oraz *Państwowego programu pracy z młodzieżą uzdolnioną w latach 2006–2010*. Zakładały one realizację takich zadań, jak np. prowadzenie i analizę badań nad uczniami zdolnymi, wprowadzanie nowoczesnych metod rozpoznawania potencjału i pracy z uczniami zdolnymi, tworzenie i wspieranie sieci szkół i placówek zajmujących się tą tematyką, czy organizacja kół zainteresowań, olimpiad i konkursów oraz szkół letnich i obozów, a także seminariów metodycznych, konferencji i kursów dla nauczycieli, także opracowywanie i publikowanie programów, podręczników, materiałów pomocniczych dla nauczycieli, promowanie uczniów zdolnych i inicjatyw podejmowanych na ich rzecz, poszukiwanie środków finansowych na stypendia i promowanie nauczycieli uczniów zdolnych i in. Istotną rolą realizowanych programów było również podniesienie pozycji społecznej zdolnych uczniów i ich nauczycieli. Znaczące było również powstanie Instytutu Dziecka Uzdolnionego, mającego na celu podejmowanie współpracy międzynarodowej oraz udzielanie wsparcia metodycznego i merytorycznego pedagogów ukraińskich (tamże).

W Rosji również od kilkudziesięciu lat poświęca się uwagę kształceniu uczniów zdolnych. Jak podaje D.M. Zhilin (2011) o zdolnych uczniach mówi się w kontekście ich inteligencji oraz możliwości i motywacji do uczenia się. Tworzono tam więc wyspecjalizowane szkoły dla uczniów zdolnych, w których realizowano programy trudniejsze i przyspieszone a pierwszą tego typu szkołą była placówka w Moskwie, stworzona w roku 1957 przez W. Owczinnikowa. Następnie szkoły tego typu zaczęły powstawać w większych miastach. Nieco później tworzono szkoły przy uniwersytetach, które grupowały uczniów zdolnych z całego kraju a w szkołach tych uczyli wykładowcy akademiccy. Od lat 90. tworzono szkoły eksperymentalne, alternatywne, autorskie, również takie, do których nabór był prowadzony między innymi na podstawie rozmów, sposobu rozwiązywania zadań czy testów psychologicznych. W niektórych rosyjskich szkołach stosowane są nawet nieformalne kryteria przyjęcia, kierujące się głównie przekonaniem, czy konkretny młody człowiek może być skutecznie uczony. Często też w takich szkołach uczą nauczyciele-pasjonaci, naukowcy, również pedagodzy o dużej wiedzy psychologicznej, co umożliwia stawianie uczniom wysokich wymagań oraz stosowanie nietypowych metod pracy (tamże) a szczególną opieką objęci są uczniowie o uzdolnieniach w zakresie nauk ścisłych oraz artystycznych. Rozpoznawanie uzdolnień z kolei jest procesem powszechnym i wiąże się z rejestracją ucznia w instytucjach wspierających jego rozwój (Dyrda, 2012). Istotną zasługą były także działania Akademii Nauk Pedagogicznych, przy której to otwarto Centrum Uzdolnień Twórczych, będące inicjatorem szkół dla dzieci zdolnych (Boczarowa, 2011) oraz organizacji GLUON, która od wielu lat zajmuje się upowszechnianiem wiedzy na temat uczniów zdolnych, a także organizacją konferencji dla naukowców i dydaktyków zdolności oraz konkursów dla uzdolnionej młodzieży. Ważna jest również narodowa inicjatywa, zapoczątkowana w roku 2009 „Nasza Nowa Szkoła", skierowana na wspieranie uczniów zdolnych oraz ich nauczycieli, zarówno pod względem psychologicznym, moralnym, jak i finansowym. Do najważniejszych celów tego programu możemy zaliczyć (Nikolaev, Chugunov, 2012): wprowadzenie nowych standardów edukacyjnych, rozwój systemu wsparcia uczniów zdolnych, rozwój systemu wsparcia moralnego i finansowego dla nauczycieli uczniów zdolnych, wzrost kompetencji nauczycieli, poprawa infrastruktury szkół, czy wzrost autonomii szkół. W ramach jego realizacji natomiast założono budowę rozległego systemu identyfikacji i wspierania zdolności uczniów a uczniowie starszych etapów edukacyjnych otrzymali możliwość uczenia się, wykorzystując metody *di-stance learning* a także nie w pełnym wymiarze godzin. Umożliwiało im to dostęp do specjalistycznej edukacji, niezależnie od miejsca zamieszkania. Wykorzystywano także różne formy kształcenia uczniów, m.in. w szkołach letnich i zimowych, konferencjach, seminariach itp. Wspierano także nauczycieli uczniów zdolnych, np. poprzez przyznawane tytuły Nauczyciela Roku, czy finansowe gratyfikacje za osiągnięcia i pracę.

W Stanach Zjednoczonych badania nad zdolnościami i inteligencją sięga już początków XX wieku, jednak szczególną uwagę skierowano na uczniów zdolnych w latach 70. XX wieku. W tym czasie powołano komisję, której zadaniem była analiza istniejących działań w zakresie kształcenia zdolnych a w opracowanym pod kierunkiem S. Marlanda raporcie pojawiła się definicja, która stała się podstawą do stworzenia konkretnych ram programów edukacyjnych skierowanych na uczniów zdolnych. Zwracała ona uwagę zarówno na potencjał, jak i osiągnięcia uczniów w ramach zdolności ogólnych oraz specyficznych, a także wskazywała na procentowy udział dzieci zdolnych w populacji (Eby, Smutny, 1998). Na podstawie wdrażanych zaleceń wynikających z Raportu Marlanda powstało wiele projektów wspierających uczniów zdolnych, zróżnicowanych pod względem liczby obejmowanych programem uczniów, procedur identyfikacji oraz sposobów rozwijania zdolności i uzdolnień (tamże). Jednym z zaleceń tego raportu było także udoskonalanie programów, tak, by treści, metody i formy organizacyjne były adekwatne do potrzeb uczniów, związanych ze wsparciem rozwoju ich czynności poznawczych (Szumski, 1995). Kolejne diagnozy wykazywał, że potrzeby uczniów zdolnych nadal nie są w szkołach uwzględniane w wystarczającym stopniu (Dyrda, 2012). Niektórzy badacze uważają, że mimo tego, że w Stanach Zjednoczonych widoczne jest od wielu lat zainteresowanie i troska o uczniów zdolnych, to jednak nadal główną strategią w postępowaniu z uczniami zdolnymi jest po prostu nie robienie niczego, które to wynika z przekonania, że takie dzieci poradzą sobie same i są już wystarczająco wyróżnione, dlatego też należy większą uwagą obdarzać dzieci z trudnościami. Zdarzają się nawet opinie, że traktowanie dzieci zdolnych jako należących do grupy o specjalnych potrzebach edukacyjnych jest „niemoralne, czy też społecznie niepoprawne lub niesprawiedliwe" (Smith, 2009, s. 277) i służy zwiększaniu nierówności społecznych a także kształceniu elitarnemu. W systemowych działaniach na rzecz zdolnych przeszkadzają także czynniki takie jak: dominujący egalitaryzm społeczny, etos rywalizacji czy podział na stany, które samodzielnie decydują o polityce oświatowej (Gallagher, za: Szumski, 1995). Dlatego też w USA nie ma jednorodnego systemu wsparcia uczniów zdolnych a konkretne rozwiązania zależą od stanu, przyjętych tam założeń. Udział w kształceniu zdolnych natomiast uzależniony jest od dobrowolności, czyli decyzji rodziców o potrzebie specjalnego kształcenia ich zdolnego dziecka (Dyrda, 2012). Według D. Smith (2009) osoby wybitnie zdolne, o dużym talencie są widoczne w społeczeństwie w kontekście ich osiągnięć i wkładu w życie społeczne, ale droga dojścia do obecnej pozycji jest w głównej mierze uzależniona od statusu społecznego i materialnego oraz możliwości kształcenia jednostki.

Wielokulturowość oraz zróżnicowanie społeczne w USA, wynikające między innymi z przynależności do określonej mniejszości narodowej, wymuszają rozwiązania edukacyjne skierowane na dzieci zdolne, które mają trudności kulturowe czy asymilacyjne lub związane z rodziną pochodzenia. Istotnym problemem udziału w programach dla uzdolnionych uczniów jest bariera związana z pochodzeniem społecznym, w aspekcie materialnym i rasowym (Rotherham, 2013), dlatego też edukacja zdolnych nie może opierać się jedynie na dziecku. Musi także obejmować jego rodzinę. Ważne jest przekonanie rodziców, jak wielkie jest znaczenie rozwijania dziecięcych uzdolnień (Eby, Smutny, 1998). Przykładem działań jest np. nauczanie według rozszerzonych programów dla uczniów wybitnie uzdolnionych oraz funkcjonowanie, obok obowiązkowych przedmiotów szkolnych, przedmiotów fakultatywnych. Ich lista może obejmować nawet kilkadziesiąt pozycji. System ten wymaga jednak dużej elastyczności w organizacji edukacji (Piotrowski, 1998). Jednocześnie trudność stanowi trafna diagnoza dzieci zdolnych. Zwraca się więc uwagę na mankamenty realizowanych programów rozpoznawania i rozwijania uzdolnień dzieci i młodzieży a głównym wskaźnikiem wysokich uzdolnień akademickich są nadal wyniki testów. Czynnikiem, który decyduje o zakwalifikowaniu lub nie do programu rozszerzonego kształcenia, jest liczba miejsc, a nie posiadane przez ucznia uzdolnienia. Coraz częściej również pojawiają się głosy, że uzdolnienia akademickie nie są „jedynym miernikiem potencjału ludzkiego" (Rotherham, 2013). Chociaż testy inteligencji nadal są popularną formą diagnozowania zdolności dzieci w USA, to odchodzi się od nich w stronę koncepcji bardziej wielowymiarowych, np. inteligencji wielorakich H. Gardnera czy koncepcji wzbogacanego programu nauczania J. Renzullego, które w mniejszym stopniu wykluczają w wynikach pochodzenie społeczne i kulturowe oraz niepełnosprawności (Smith, 2009). Znaczenie dla wyników diagnozy ma także wiek dziecka oraz stosowane testy. I tak zbyt wczesne poddanie dziecka diagnozie może nie wykryć niektórych zdolności, zbyt późne z kolei może utrudnić optymalny ich rozwój a test z kolei może zmierzyć tylko niewielki fragment możliwości i kompetencji człowieka, dlatego nie może być w pełni wiarygodnym źródłem wiedzy o dziecku.Ciekawym zjawiskiem związanym z testowymi rozwiązaniami identyfikacji akademickich zdolności uczniów jest „efekt sufitu" – *ceiling effect* (tamże), mający związek z faktem, że uczniowie o wysokim potencjale rozwiązują takie same testy, jak ich rówieśnicy, przez co nie mają szansy pokazania, jakie są ich rzeczywiste możliwości. Testy więc muszą być dostosowane do ich potencjału, czyli musi być przesunięta ich górna granica (stąd sufit), co ma związek z udostępnieniem dzieciom testów przeznaczonych dla wyższych kategorii wiekowych. Centra rozwijania talentów działające przy ośrodkach akademickich wychodzą naprzeciw takim potrzebom. I tak na przykład rozwiązaniem są programy wyszukiwania talentów działające przy uniwersytetach. Jednym z nich jest Northwestern University's Midwest Academic Talent Search, czyli program wyszukiwania w szkołach uczniów o zdolnościach akademickich, bazujący na wynikach testów osiągnięć.Młodszym uczniom udostępniana jest możliwość rozwiązywania testów na wyższym poziomie a wyniki testów pozwalają na łączenie uczniów o podobnym poziomie możliwości i zdolności akademickich. Uczniom oferowane są zajęcia weekendowe, programy wakacyjne realizowane w grupach osób o podobnych możliwościach i pasjach. Uczniowie mogą uczestniczyć w zajęciach online, pozwalających im na przyspieszenie nauki i realizację postawionych celów edukacyjnych a także program ten uwzględnia konieczność objęcia uczniów zdolnych odmiennym programem edukacyjnym niż uczniów mniej zdolnych Najwybitniejsi uczniowie objęci są opieką stypendialną wsparcie finansowe otrzymują także innowacje skierowane na utalentowaną młodzież.

Innym z kolei jest Johns Hopkins University Center for Talented Youth, które działa przy Uniwersytecie Johna Hopkinsa centrum a jego głównym celem jest wyszukiwanie uczniów o wysokich uzdolnieniach akademickich. Stwarza ono możliwość rozwiązywania testów matematycznych i językowych przeznaczonych dla wyższych kategorii wiekowych a także organizuje letnie kursy, wspólne zajęcia dla rodziców i uczniów itp. Ze względu na fakt, że w Stanach Zjednoczonych nie ma jednego, dominującego systemu kształcenia uczniów zdolnych, dlatego poszczególne szkoły i ośrodki tworzą własne programy i wytyczne, by ich wspierać (Beugnon, 2012). I tak między innymi szkoły dzielone są na oddziały wg dziedzin i programów: nauki humanistyczne, nauki ścisłe, literatura i język, matematyka, języki obce oraz integracyjne edukacji specjalnej, edukacji specjalnej dla osób niepełnosprawnych, edukacji specjalnej dla uczniów zdolnych, wychowania fizycznego, artystyczne, przygotowania do kariery zawodowej. Kształcenie zdolnych możliwe jest natomiast albo w ramach zajęć wielokierunkowych, realizowanych tylko dla uczniów zdolnych, oraz poprzez rozszerzenie programu i realizację przedmiotów z poziomu akademickiego lub przygotowującego do międzynarodowej matury. Zdarza się również grupowanie uczniów zdolnych w klasach mieszanych, praca z mentorem czy tworzenie przez szkoły indywidualnych innowacji.

5.3. System edukacji w Polsce.

Od 2006 roku w Polsce za edukację odpowiedzialne są dwie osobne instytucje: Ministerstwo Edukacji Narodowej (MEN) oraz Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (MNiSW). To pierwsze odpowiedzialne jest za cały system edukacji ogólnej, również za

kształcenie w szkołach zawodowych, ale z wykluczeniem szkolnictwa wyższego, które podlega MNiSzW. Nad realizacją specjalistycznych modułów kształcenia sprawują odpowiednio nadzór:
w szkołach artystycznych - Ministerstwo Kultury i Dziedzictwa Narodowego (MKiDN),
w szkołach sportowych – Ministerstwo Sportu, natomiast za kształcenie w zakładach poprawczych i karnych odpowiada Ministerstwo Sprawiedliwości
(National system overview on education systems in Europe, 2011). W ramach edukacji szkolnej obowiązkowe kształcenie dotyczy dzieci i młodzież od 6 do 15 roku życia. Odpowiedzialność za organizację tego kształcenia ponoszą władze gminy.
Do nieobowiązkowej szkoły ponadgimnazjalnej uczęszcza większość młodzieży wieku od 15 do 19 lub 20 lat. Na tym etapie organizacją kształcenia zajmują się władze powiatu. Autonomiczne wyższe uczelnie z kolei oferują głównie jedno, dwu lub trzy stopniowe programy kształcenia. W Polsce istnieje także system szkolnictwa specjalistycznego, który przeznaczony dla dzieci i młodzieży uzdolnionej artystycznie i sportowo. Umożliwia on szczególnie uzdolnionym dzieciom i młodzieży zindywidualizowane kształcenie muzyczne, plastyczne czy baletowe. Organem prowadzącym dla szkół artystycznych jest Ministerstwo Kultury i Dziedzictwa Narodowego a także Centrum Edukacji Artystycznej. Podział ten w naturalny sposób wymusił fakt dopuszczenia wczesnego, profesjonalnego kształtowania wybranych uzdolnień, czy to artystycznych, czy sportowych przy jednoczesnym ograniczeniu, a czasem wręcz uniemożliwieniu rozwijania innych uzdolnień kierunkowych. Wczesne ich rozpoznanie czy diagnoza wysokiego poziomu zdolności ogólnych rzadko bowiem stanowi podstawę do stosowania specjalnych form i metod kształcenia wobec uczniów uzdolnionych, szczególnie na wczesnych etapach edukacji.
W szkołach ogólnych powszechne jest ograniczanie opieki nad uczniami zdolnymi do wysyłania ich na zajęcia dodatkowe lub zachęcanie do udziału w konkursach i olimpiadach. W celu przeciwdziałania bierności szkół w odniesieniu do rozwijania potencjału dzieci powstał pomysł tworzenia w szkołach podstawowych „klas dla zdolnych", który to jednak spotykał się z krytyką społeczną a głównym argumentem negatywnych ocen były przesłanki związane z wyrównywaniem szans społecznych dzieci i młodzieży, szczególnie poprzez dostęp do kształcenia.

Tendencję tę obrazują losy prowadzonej przez 10 lat eksperymentalnej klasy o rozszerzonym programie matematyki w Szkole Podstawowej na ul. Bobrzej we Wrocławiu, do której to nabór odbywał się na podstawie wyników testów MENSY. Uczniowie tych klas osiągnęli bardzo wysokie wyniki nauczania, mieli także wiele osiągnięć szkolnych i pozaszkolnych, nie tylko z matematyki, lecz również z dziedzin artystycznych i sportowych .Mimo bardzo dobrych opinii o przedsięwzięciu, klasy te zostały zamknięte w roku 2007 przez kuratorium a w uzasadnieniu podano, że niedopuszczalna jest taka segregacja uczniów ani profilowanie klas w szkole podstawowej, ponieważ ten poziom edukacji ma za cel wyrównywanie szans społecznych i uczenie relacji społecznych (por. Czajkowska, 2007; Dragan, 2010). Równość w dostępie do wykształcenia, stanowiąca priorytet polityki edukacyjnej w Polsce, ukierunkowała uwagę decydentów głównie na pochodzenie społeczne, wykształcenie rodziców czy ich prestiż zawodowy i ekonomiczny (Kołaczek, 2002). Pojawiały się opinie o istniejącym w kraju problemie negatywnej selekcji do klas i szkół. I tak według H. Sowińskiej zróżnicowanie karier edukacyjnych wynika nie tylko z niskiego poziomu startu dziecka – niskiego statusu materialnego i społecznego rodziców, ale także na skutek selekcji prowadzonej w szkołach publicznych czy samego faktu wyboru szkół niepublicznych oraz na wyższych etapach edukacyjnych również profilowania szkół (Sowińska, 2004). Badacze częściej skupiali się na zasobach rodziny, jej statusie społecznym i materialnym, miejscu zamieszkania, pomijając jednocześnie faktyczne możliwości intelektualne lub kierunkowe dziecka. P. Bourdieu wskazywał na trudności osób pochodzących z określonej klasy społecznej w procesach edukacyjnych. Zauważył, że jedynie niewielka liczba osób potrafi przezwyciężyć trudności wynikające z ich pochodzenia społecznego; większość skazana jest na powielanie wzorców rodziny. Dlatego też osoby z niższych klas, które się wybiły nazywa „cudem”. Autor uważa, że osoby pochodzące z rodzin klas wyższych od razu wyposażane w takie umiejętności, które umożliwią im satysfakcjonującą karierę edukacyjną i w dalszych latach – pozycję związaną z dostępem do władzy. Takie osoby nazywa „dziedzicami”, gdyż dziedziczą one od swojej rodziny nie tylko majątek, lecz także kapitał społeczny i kulturowy, określający sukces i władzę jako coś naturalnego w ich życiu (Bourdieu, Passeron, 2006).Widoczne jest również, że nawet równy dostęp do edukacji rzadko prowadzi do analogicznych osiągnięć, bowiem te zależne są nie tylko od sytuacji, w których człowiek się znajduje , lecz także od jego zasobów intelektualnych, motywacji i wyborów (por. Kołaczek, 2002; Bourdieu, Passeron, 2006). Dlatego też w tym kontekście posiadanie zasobów intelektualnych może być traktowane jako niesprawiedliwość a luka w edukacji zdolnych staje się niejako przeciwstawieniem się koncepcji dziedziczenia bogactwa materialnego, jak i umysłowego (Piotrowski, 2003).

Mimo, że część dzieci zdolnych doskonale sobie radzi bez dodatkowego wsparcia, bez specjalnej opieki, jednak dla wielu jest to niemożliwe, np. z powodu pochodzenia społecznego, trudności kulturowych, problemów rodzinnych. Zdarza się nawet, że uczniowie o wybitnych możliwościach intelektualnych nie kończą szkoły (Smith, 2009).

W rozważaniach dotyczących kształcenia uczniów zdolnych nie można pominąć wątku sprawiedliwości społecznej opartej na prawie „każdego człowieka do zaspokojenia jego potrzeb i rozwoju zdolności psychospołecznych na miarę jego potrzeb” (Piotrowski, 2003, s. 355). Mając na względzie fakt, że jednym z deklarowanych celów edukacji jest wszechstronny, ale także optymalny rozwój dziecka, adekwatnie do jego możliwości, konieczne jest wzięcie pod uwagę różnic pomiędzy jednostkami. Należy więc uwzględnić „ciągłe konfrontowanie osiągnięć ucznia z jego możliwościami oraz trafne dobieranie środków” (Włodarski, 1998b, s. 323). Myślenie o zdolnym wpisuje się więc tutaj w takie modele edukacji, w których zauważa się konieczność naturalnego formowanie elit i doceniania możliwości i starań, takie modele, w których to skupia się na predyspozycjach, rozumianych jako zdolności, pracowitość, motywacja oraz zasoby rodzinne, które pozwalają jednostce na osiągnięcie najwyższego poziomu i na oddzieleniu procesu ich kształcenia od edukacji osób przeciętnych. Istotne jest tu ustalenie i pomoc w optymalnym doborze ścieżki i kariery edukacyjnej w zależności od możliwości i wyników i w tym kontekście wyrównywanie szans edukacyjnych oznacza, że system selekcji i oceniania jest doskonalony, by każdemu zagwarantować dostęp do jak najlepszej edukacji, jednak na miarę predyspozycji. Służą temu egzaminy zewnętrzne i kształtowanie postaw społecznych, które podkreślają znaczenie elit dla wspólnego dobra i dla funkcjonowania państwa. Zauważa się także niebezpieczeństwa takiego systemu, które z jednej strony dotyczą emigracji dobrze przygotowanych i najlepszych oraz oderwanie się ich od ideałów na rzecz realizacji własnych, egoistycznych celów (Kwieciński, 2007). Nadal jednak specjalne kształcenie uczniów zdolnych kojarzone jest raczej z przywilejami, które zdaniem wielu młodzi ludzie otrzymują bezzasadnie (Piotrowski, 1998).

Zauważalne jest stałe ścieranie się dwóch koncepcji edukacji, zarówno elitarnej, jak i egalitarnej. K.Kotlarski (1995) pisze: „raz zmierza się do ukształtowania w miarę jednolitych celów, a także programów kształcenia. Zgodnie z tym uczniowie zdolni, tak samo jak przeciętni, chodzą do tych samych szkół i klas, poddawani są tym samym metodom oddziaływania i poznają przedmioty szkolne według tych samych programów. Innym razem uważa się, że zasada elitaryzmu dopuszcza uznanie bardzo dużego zróżnicowania ludzi. Konsekwencją jest między innymi tworzenie różnego typu szkół i programów”. Jednocześnie „nie respektuje się w pełni żadnej ze skrajnych tendencji” (tamże, s. 90). W konsekwencji szkoły a także tworzone w nich programy, skupiają się na uczniach przeciętnych (Kupisiewicz, 2010;

Mönks, 2004), choć duży odsetek uczniów mógłby uczyć się więcej i szybciej. Jednak argumenty dotyczące równości szans w zdobywaniu wykształcenia nie przekonują tych rodziców, którzy mają możliwości i pragną zapewnić własnym dzieciom optymalne dla nich i lepsze niż w powszechnej edukacji warunki kształcenia. Wielu spośród takich rodziców decyduje się na ponoszenie dodatkowych kosztów finansowych i organizacyjnych, w celu realizacji swoich i często także dziecka wyższych aspiracji edukacyjnych. Zapotrzebowanie na młodsze klasy, które skupiają zdolne dzieci zaspokajane jest przez szkoły niepubliczne, które to stwarzają uczniom o ponadprzeciętnych możliwościach korzystniejsze warunki nauki, np. w mniej licznych klasach, ciekawsze programy kształcenia, różnorodność zajęć pozalekcyjnych czy większą indywidualizację itp. Mimo, iż wielu rodziców przesadnie podchodzi do urzeczywistniania potencjału swoich dzieci, np. zapisując je już nawet w okresie niemowlęcym do wybranego przedszkola czy szkoły (por. Łaszczyk, 2008a), to niezmiennym pozostaje fakt, że uczniowie zdolni pochodzący z rodzin o wyższym statusie mają większe szanse na wykorzystanie swojego kapitału społecznego i zaspokojenie potrzeb poznawczych oraz realizację ścieżki edukacyjnej adekwatnej do swoich możliwości. A w związku z tym, że wykształcenie jest podstawowym wyznacznikiem statusu społecznego, to jest ono coraz bardziej doceniane. Zależna od zasobów rodziny selekcja na wcześniejszych etapach edukacyjnych, pogłębia się na wyższych a jakość edukacji w poszczególnych szkołach jest ustalana na podstawie rankingów osiągnięć. Często jednak bez analizy procesu, w jaki sposób osiągnięcia te są realizowane. Natomiast uczniowie o wybitnych zdolnościach akademickich swoją ścieżkę edukacyjną tak ustalają, by w takich rankingowych szkołach uczyć się. Niestety jednak bez wsparcia z zewnątrz, nawet wybitnie uzdolnieni uczniowie, którzy pochodzą z rodzin o niższych możliwościach finansowych i organizacyjnych, często muszą rezygnować ze swoich aspiracji. Funkcjonujące w Polsce modele selekcji, umożliwiają tworzenie szkół dla uczniów uzdolnionych artystycznie i sportowo i jest to naturalne w Polsce, że kształci się uczniów o tych typach uzdolnień, dlatego też istnieją szkoły muzyczne, plastyczne, sportowe czy baletowe, przyjmujące dzieci w wieku wczesnoszkolnym. Ponadto modele te pozwalają na ujawnianie się szkół, zbierających uczniów zdolnych, czyli takich, w których nauka uzależniona jest od posiadanych osiągnięć czy wyników egzaminu wstępnego. Z czasem okres selekcji przesunął się na niższe etapy edukacyjne i dotyczy głównie szkół niepublicznych. Natomiast w związku z tym, że szkoły publiczne obowiązuje rejonizacja, to w praktyce w wielu placówkach następuje wstępna selekcja dzieci i tworzone są „lepsze" i „gorsze" klasy, do których dostęp uwarunkowany jest czasem pozycją społeczną rodziców. Modele te pozwoliły również na profilowanie szkół podstawowych (dawnej gimnazjum), znane są bowiem szkoły, które lepiej kształcą w zakresie nauk ścisłych lub uznawane są za te o profilu humanistycznym a w pierwszej kolejności przyjmowani są tam uczniowie z wysokimi wynikami w nauce oraz osiągnięciami w konkursach z danej dziedziny. Ponadto pozwoliły one także na profilowanie klas w szkole, przy jednoczesnym nieformalnym uznaniu określonych profili za „klasy dla zdolnych". Takie tworzenie oddzielnych, wyselekcjonowanych grup zakłada, że uczniowie do nich uczęszczający rozwijają się szybciej niż rówieśnicy lub przejawiają talent w określonej dziedzinie.

Argumentem przemawiającym za selekcyjnymi formami kształcenia, jest możliwość niwelowania dużych rozbieżności w zakresie zdolności lub uzdolnień pomiędzy uczniami, które tym samym ułatwiają pracę z grupą, tworząc ją bardziej jednorodną (Włodarski, 1998b). Natomiast w klasach, w których uczniowie zdolni zmuszeni są stać się opiekunami uczniów słabszych, pozbawia się ich tym samym możliwości rywalizacji (Piotrowski, 1998). Pozostawienie dzieci w klasie o charakterze ogólnym powoduje, że nudzą się one i nie czują przed sobą wyzwań a tempo nauczania jest dla nich zbyt wolne, treści z kolei nie są ciekawe i nie ma możliwości rozwijania zainteresowań (Gallagher, Harradine, Coleman, 1997).

Uczenie w grupach niejednorodnych powoduje, że na nauczycieli spada konieczność wykonania większej pracy związanej z doborem najtrafniejszych metod, form, środków i treści nauczania (Włodarski, 1998b). Nauczyciel, który dostrzega możliwości uczenia się dziecka nieprzeciętnego, musi zacząć zadawać sobie pytania o to, czy w szkole jest takich dzieci więcej, czy potrafi je rozpoznać, czy w jaki sposób należy się nimi zająć, jak to zrobić? Trudności bowiem pojawiają się wtedy, gdy trzeba jednocześnie pracować z innymi uczniami, których jest w szkole większość (Painter, 1993).

W praktyce w klasach niejednorodnych tylko sporadycznie indywidualizuje się metody, formy i treści przeznaczone dla uczniów uzdolnionych ze względu na brak czasu nauczyciela oraz niewielkie jego kompetencje w tym zakresie. Jak uważa E. Piotrowski (1998), opieka nad uczniem zdolnym powinna mieć charakter obligatoryjny dla nauczyciela, by odpowiednio dobierał treści i metody kształcenia, w odniesieniu do uczniów z kolei, powinna mieć charakter fakultatywny, by pozostawić im możliwość wyboru i stworzyć warunki rozwoju zainteresowań i zdolności. Wskazuje się, że zaletą klas niewyselekcjonowanych jest konieczność funkcjonowania wśród osób o zróżnicowanych możliwościach, co jest w większym stopniu zbieżne z przekrojem społecznym osób dorosłych. Z kolei podkreśla się też, że tworzenie klas, w których następuje selekcja uczniów, budzi wątpliwości w zakresie kryteriów tej selekcji oraz presji rodziców, dążących do tego, by ich dzieci realizowały ambitniejszy program, czyli były zakwalifikowane do grupy uczniów zdolniejszych (Włodarski, 1998b). Presja ta zaś często związana jest z pozycją społeczną rodziców oraz ich edukacyjnymi aspiracjami i nie zawsze ma ona uzasadnienie w faktycznych możliwościach dziecka.

Kolejnym, poruszanym w dyskusji na temat selekcji uczniów, aspektem jest zwrócenie uwagi na to, że uczniowie wyselekcjonowanych klas mają tendencje do postrzegania siebie jako lepszych, jako pewnej elity, która nie chce współdziałać z uczniami z innych, mniej atrakcyjnych klas, co wpływa negatywnie na atmosferę szkoły (tamże), przy tym podkreśla się, że sama obecność uczniów zdolnych w klasie niejednorodnej wpływa ma pozytywny wpływ na jej pozostałych członków (Piotrowski, 1998).

Potwierdzeniem tych spostrzeżeń są badania T. Gizy (2009), które ukazują, jaki obraz szkoły mają sami uczniowie zdolni. Dostrzegają oni między innymi podział na klasy lepsze i gorsze. Lepsze, czyli te, których uczniowie lepiej się uczą i zachowują oraz, chociaż rzadziej, te o lepszym statusie społecznym i materialnym rodziny i również te, w których uczą „lepsi" nauczyciele.

Każda szkolna społeczność bowiem ma swoich zdolnych uczniów, którzy stanowią jej chlubę a uczniowie, którzy mają osiągnięcia, są promowani na różne sposoby. Na wyższych poziomach edukacyjnych przynależność do „renomowanych" szkół, lub znalezienie się w „lepszej" klasie, ma już związek z osiągnięciami szkolnymi, udokumentowanym na świadectwie poprzez wysokie oceny, które to może stwarzać warunki korzystne dla uczniów „skutecznych" oraz narzuca uczniom i nauczycielom konieczność realizacji strategii kształcenia nastawionej nie na rozwój osoby, lecz na uzyskiwanie wysokich ocen, które nie zawsze odzwierciedlają faktyczny potencjał ucznia (Łaszczyk, 2008a).

Szkoły znacznie częściej oceniane są za „eliminowanie niepowodzeń dydaktycznych uczniów niż za odpowiednią opiekę dydaktyczno-wychowawczą nad rozwojem uczniów zdolnych" (Piotrowski, 1998), dlatego też częściej w pierwszej kolejności zaspokaja się potrzeby uczniów z trudnościami i to właśnie ich otacza się opieką a nierzadko przez to dla uczniów zdolnych nie wystarcza już ani czasu ani zaangażowania nauczycieli, powielając przekonanie o tym, że uczeń zdolny sam sobie poradzi a co więcej, uczeń zdolny częściej jest utożsamiany z „prymusem", czy też uczniem „skutecznym" (por. Turska, 2006), co oznacza, że uczniowie uzdolnieni, którzy zostali nietrafnie zidentyfikowani jako przeciętni, nie mają w szkole możliwości adekwatnych do ich potrzeb rozwoju.

5.4. Ustawy Oświatowe w Polsce

W ostatnich latach można zaobserwować w Polsce wzrastające zainteresowanie problemami zdolności, które to spowodowane jest zarówno zmianami w strukturze systemu oświaty a także wpływem polityki prowadzona przez Unię Europejską, której celem jest stworzenie wspólnych podstaw i struktur edukacyjnych w Europie. Konstytucja Polski zapewnia równy dostęp do kształcenia osób o różnych potrzebach edukacyjnych (Limont, 2012). W artykule 1 obowiązującej aktualnie ustawy z dnia 14 grudnia 2016 roku Prawo Oświatowe znajduje się zapis, że system oświaty zapewnia opiekę nad uczniami szczególnie uzdolnionymi poprzez umożliwianie realizowania indywidualnych programów nauczania oraz ukończenia szkoły każdego typu w skróconym czasie. Uczeń zdolny ma specjalne potrzeby, które powinny być rozpoznane i uwzględnione w toku kształcenia i wychowania. W Polsce przysługuje takim osobom indywidualny tok nauki w zakresie jednego, kilku lub wszystkich obowiązkowych zajęć edukacyjnych, który pozwala na wcześniejsze ukończenie szkoły. I tak w Artykule 115 Ustawy widnieje zapis:
„1. Na wniosek lub za zgodą rodziców albo pełnoletniego ucznia dyrektor szkoły, po zasięgnięciu opinii rady pedagogicznej i publicznej poradni psychologiczno-pedagogicznej, w tym poradni specjalistycznej, może zezwolić uczniowi na indywidualny program lub tok nauki oraz wyznaczyć nauczyciela - opiekuna. Odmowa udzielenia zezwolenia następuje w drodze decyzji administracyjnej.

2. Na wniosek lub za zgodą rodziców albo pełnoletniego ucznia dyrektor szkoły artystycznej realizującej wyłącznie kształcenie artystyczne, po zasięgnięciu opinii rady pedagogicznej, może zezwolić uczniowi na indywidualny program lub tok nauki realizowany pod opieką nauczyciela przedmiotu głównego tego ucznia. Odmowa udzielenia zezwolenia następuje w drodze decyzji administracyjnej.

3. Uczeń realizujący indywidualny tok nauki jest klasyfikowany na podstawie egzaminów klasyfikacyjnych. Egzaminy klasyfikacyjne są przeprowadzane zgodnie z przepisami art. 44l ustawy o systemie oświaty i przepisami wydanymi na podstawie art. 44zb ustawy o systemie oświaty, a w przypadku zajęć edukacyjnych artystycznych realizowanych w szkole artystycznej - zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 44zq ustawy o systemie oświaty.

4. Minister właściwy do spraw oświaty i wychowania określi, w drodze rozporządzenia, warunki i tryb udzielania zezwoleń, o których mowa w ust. 1, oraz organizację indywidualnego programu lub toku nauki, uwzględniając umożliwienie uczniom szczególnie uzdolnionym rozwoju ich uzdolnień oraz ukończenie szkoły w skróconym czasie.

5. Minister właściwy do spraw kultury i ochrony dziedzictwa narodowego określi, w drodze rozporządzenia, warunki i tryb udzielania zezwoleń, o których mowa w ust. 2, oraz organizację indywidualnego programu lub toku nauki, uwzględniając umożliwienie uczniom szczególnie uzdolnionym rozwoju ich uzdolnień oraz ukończenie szkoły w skróconym czasie.” Zgodnie z aktualnie obowiązującymi procedurami, identyfikowanie zdolności powinno odbywać się z wykorzystaniem zarówno kryterium psychologicznego jak i psychopedagogicznego. To pierwsze opiera się na badaniu poziomu inteligencji i zdolności specyficznych a także cech charakteru i osobowości, z kolei kryterium psychopedagogiczne odwołuje się do osiągnięć ucznia.

W Polsce potrzeby uczniów zdolnych zabezpieczane są poprzez systemy stypendialne, olimpiady, turnieje, konkursy, działalność Towarzystwa Szkół Twórczych, Krajowego

Funduszu na Rzecz Dzieci, działalność edukacyjną placówek oświatowo-wychowawczych (Ministerstwo Edukacji o uczniu zdolnym, 1999).

5.5. Rozwiązania organizacyjne wspierające pracę z uczniem uzdolnionym matematycznie w świetle obowiązujących przepisów w Polsce.

Mimo, że dopiero od kilku lat tematyka ucznia zdolnego znajduje się w centrum rozważań naukowców, środowisk szkolnych, czy urzędów i instytucji, to jednak tradycja pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionym sięga w Polsce znacznie odleglejszych czasów. Przed 1989 rokiem opieka nad uczniami zdolnym koncentrowała się głównie na pracy nauczycieli-pasjonatów. Wsparcie zapewniały im działania, takie jak np. organizowanie zajęć pozalekcyjnych oraz udział uczniów w konkursach i olimpiadach, dający młodym ludziom możliwość dostanie się do prestiżowych szkół średnich lub na studia. Z kolei nauczyciele, którzy opiekowali się kołem zainteresowań lub ci, których uczniowie osiągali sukcesy w olimpiadach, otrzymywali dodatkowe wynagrodzenie lub nagrody pieniężne (Dragan, 2010). W tym czasie problematyka zdolności podejmowana przez polskich badaczy dotyczyła teoretycznych rozważań m.in. komponentów zdolności i uzdolnień kierunkowych, jak również praktycznych wskazań związanych z kształceniem i opieką nad uczniem zdolnym. Uczeń zdolny w literaturze polskiej od wielu lat uznawany jest za ucznia o specjalnych potrzebach edukacyjnych.

W naszym kraju podejmowane były systematyczne działania związane z kształceniem pedagogów twórczości i pedagogów zdolności w ramach studiów dziennych i podyplomowych a po roku 1989, z powodu zmian polityczno-społecznych, wzrosło jeszcze bardziej zainteresowaniem uczniem zdolnym. Wzrastały więc aspiracje edukacyjne młodzieży oraz rodziców a studia wyższe stały się bardziej dostępne. Szkoły zaczęły otwierać się na innowacje pedagogiczne, które wielokrotnie za główny cel wyznaczały sobie pobudzanie kreatywności uczniów czy rozwijanie ich pasji i zdolności, co znalazło swoje odzwierciedlenie w powoływanych strukturach administracyjnych czy aktach prawnych. Pojawiły się również działania na rzecz integracji różnych środowisk zainteresowanych pracą z uczniami zdolnymi a także lokalne inicjatywy pracy z uczniem zdolnym, np. poradnie psychologiczno-pedagogiczne podejmowały się identyfikacji zdolności i realizacji programów skierowanych na rozwój kompetencji czy zdolności.

Również autorzy publikacji kierowali swoją uwagę na aktywizujące metody kształcenia, mogące być wykorzystywane w pracy z uczniem zdolnym.

W roku 1998 powołany przy Ministerstwie Edukacji Narodowej Wydział Szans Edukacyjnych i Wspierania Uzdolnień (obecnie: Departament Zwiększania Szans Edukacyjnych) , który to zajmuje się między innymi pomocą psychologiczną i pedagogiczną w szkołach, indywidualnym programem oraz tokiem nauki, udzielaniem wsparcia i promowaniem uczniów zdolnych, udzielaniem stypendiów, działalnością innowacyjną i eksperymentalną w szkołach, konkursami, turniejami i olimpiadami, wspieraniem dzieci i młodzieży, których udziałem są deficyty lub dysharmonia rozwojowa.

Zaczęto również zwracać uwagę na ważność poszukiwania środków finansowania: udzielanej pomocy uczniom zdolnym, motywowania nauczycieli czy stypendiów dla uczniów. Istotnym kierunkiem stało się w tym względzie zaktywizowanie instytucji pozarządowych, także fundacji i stowarzyszeń oraz medialne wzmocnienie pozycji uczniów zdolnych, które miało służyć zmianie nastawienia opinii społecznej (Książek, 1999). Pojawiły się także nowe uregulowania prawne, uwzględniające wybrane aspekty pracy z uczniem zdolnym, takie jak m.in.:

1.Dotyczące opieki nad uczniem uzdolnionym, w tym realizacja indywidualnych programów nauczania oraz skończenie etapu edukacji w skróconym czasie, organizowanie zajęć pozalekcyjnych i wolnego czasu – Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty.

2. Dotyczące warunków i możliwości organizacji indywidualnego programu lub toku nauki – Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 19 grudnia 2001 r.

3. Dotyczące organizacji i sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad – Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 29 stycznia 2002 r.

4. Dotyczące tworzenia i organizacja klas i szkół sportowych – Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 30 lipca 2002 r.

5. Dotyczące określenia zasad udzielania pomocy psychologiczno-pedagogicznej zgodnie z możliwościami i indywidualnymi potrzebami ucznia oraz wspieranie uczniów wybitnie uzdolnionych – Rozporządzenie Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 7 stycznia 2003 r.

6. Dotyczące określenia warunków wcześniejszego przyjmowania dzieci do klas pierwszych szkoły podstawowej oraz przyjmowania do klas pierwszych szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych laureatów konkursów – Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 20 lutego 2004 r.

7. Dotyczące określenia warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych, a także dookreślenia sposobów oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów, w tym klasyfikacji do klasy programowo wyższej w ciągu roku szkolnego – Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 7 września 2004 r.

8. Dotyczące kreślenia warunków i trybu przyznawania i wypłacania stypendium ministra za osiągnięcia w nauce lub wybitne osiągnięcia sportowe – Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 10 listopada 2004 r

Uczeń zdolny postrzegany był już nie tylko w kontekście jego indywidualnego rozwoju, lecz także zasobów kraju, o które należy się troszczyć. Dążenia Polski do włączenia w struktury Unii Europejskiej, które zakończyły się w 2004 r. sukcesem, ukierunkowały strategie rozwoju kraju na zbieżne z wytycznymi Parlamentu Europejskiego.

Przyjęta w Unii Europejskiej strategia na lata 2000–2010, nazywana Strategią Lizbońską, wyznaczyła także kierunki działań edukacyjnych w Polsce.
Uruchomiony został również , w ramach środków finansowych Unii Europejskiej, spójny z wytycznymi Strategii Lizbońskiej program operacyjny Kapitał Ludzki, realizowany w latach 2007–2013, którego zadania koncentrowały się m.in. na rozwijaniu posiadanych w kraju zasobów ludzkich, takich jak m.in. podniesienie poziomu wykształcenia społeczeństwa, stanowiące warunek przyspieszenia rozwoju społecznego i gospodarczego, zmiany w postrzeganiu znaczenia kapitału ludzkiego dotyczące rozwoju technologicznego czy wzrostu zapotrzebowania na specjalistów (por. Bauman, 2006).Czynniki te wpłynęły na postrzeganie potencjału jednostki nie tylko w odniesieniu do jej rozwoju osobistego, lecz szansy dla regionu i państwa oraz dobra społecznego a odpowiedzią na te przemiany były pojawiające się w dokumentach europejskich i polskich zapisy wraz z zawartymi w nich postulatami, które stały się przyczyną do poszukiwania bardziej uniwersalnych metod i form pracy z uczniami uzdolnionymi.

Opublikowany w 2007 roku raport NIK (Informacje o wynikach kontroli*,* 2007) dotyczący opieki nad uczniami zdolnymi w Polsce potwierdził krytyczne opinie badaczy i stał się skutkiem spostrzeżenia, że uczniowie w coraz mniejszym stopniu korzystają z indywidualnych programów i toków nauki. Kontrola wypadła negatywnie i stwierdzono braki uwzględnienia problematyki uczniów uzdolnionych w planach, analizach i ocenach systemu oświaty a co za tym idzie, braki odgórnych działań systemowych dotyczących pracy z uczniem zdolnym. Ponadto stwierdzono także, że przyznanym stypendiom ministra nie towarzyszą pisemne uzasadnianie a w szkołach nie powołuje się komisji stypendialnych. Wykazane zostały również wyraźne dysproporcje pomiędzy województwami w liczbie składanych wniosków o stypendia i braki uwzględnienia problematyki uczniów zdolnych w dokumentacjach szkolnych, tematyce szkoleń nauczycieli a opieka nad uczniami zdolnymi prowadzona jest w szkołach w sposób marginalny. Ponadto ukazano brak zainteresowania pracą z uczniami zdolnymi zarówno ze strony dyrektorów, jak i rad pedagogicznych oraz brak działań służących rozpoznawaniu uzdolnień uczniów, którego jedynym wskaźnikiem są oceny semestralne i roczne. Wykazano także, że nauczyciele nie są przygotowani do rozpoznawania i wspierania uczniów zdolnych.

Kontrola ta zaprocentowała działaniami, które doprowadziły do zwiększenia ilości zapisów prawnych regulujących opiekę nad uczniami uzdolnionymi, choć już od 2005 roku pojawiły się nowe zapisy prawne. Do najważniejszych z nich zaliczyć możemy:

1. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 14 czerwca 2005 r. dotyczące przyznawania stypendiów Prezesa Rady Ministrów oraz Ministra Do Spraw Oświaty i Wychowania.
2. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. dotyczące sposobu oceniania i promowania uczniów oraz prowadzenia egzaminów zewnętrznych, uwzględniający udział i osiągnięcia uczniów w olimpiadach przedmiotowych oraz określający warunki zwolnienia z egzaminu maturalnego.
3. Rozporządzenie Ministra Edukacja Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. określające podstawę programową wychowania przedszkolnego i kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, uwzględniające indywidualne potrzeby uczniów zdolnych i uzdolnionych.
4. Rozporządzenie Ministra Kultury i Dziedzictwa Narodowego z dnia 25 marca 2010 r. regulujące sprawy dotyczące indywidualnego toku lub programu nauki w szkołach artystycznych.
5. Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 17 listopada 2010 r. uwzględniające specjalne potrzeby edukacyjne uczniów uzdolnionych, dotyczące także ich rozpoznania i warunków ich rozwijania. Określone zostały także zasady udzielania pomocy i organizacji pomocy psychologiczno-pedagogicznej w publicznych przedszkolach, szkołach i placówkach
6. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 17 listopada 2010 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych, dotyczące rozszerzenia kompetencji szkoły w zakresie pomocy uczniom o specjalnych potrzebach edukacyjnych, w tym indywidualizacja kształcenia.
7. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 12 maja 2011 r. dotyczące określenia rodzajów i zasad działania placówek publicznych, w tym określenia warunków i odpłatności za udział dzieci i młodzieży w zajęciach rozwijających ich zainteresowania i uzdolnienia realizowanych w ramach różnych instytucji publicznych.
8. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 7 lutego 2012 r., dotyczące stworzenia ramowych planów nauczania w szkołach publicznych, w tym ustalenia zasad realizacji dodatkowych zajęć edukacyjnych rozwijających zainteresowania i uzdolnienia uczniów.
9. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 lutego 2013 r., dotyczące określenia zasad działania publicznych poradni psychologiczno-pedagogicznych, w tym udzielania wsparcia nauczycielom w zakresie rozwoju zainteresowań i uzdolnień dzieci.
10. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2013 r., dotyczące ustalenia zasad udzielania i organizacji pomocy psychologiczno-pedagogicznej, w tym rozpoznawania zdolności uczniów oraz organizacji zajęć dodatkowych rozwijających uzdolnienia.

11. Ustawa z dnia 20 lutego 2015 r. dotycząca zmiany systemu oświaty, wprowadzająca dookreślenie, iż zajęcia rozwijające zainteresowania i uzdolnienia uczniów należą do podstawowych form działalności wychowawczo-dydaktycznej szkoły.

Istotnym aktem prawnym, który znacząco wpłynął na sytuację uczniów zdolnych w Polsce, było uznanie posiadania przez nich specjalnych potrzeb edukacyjnych, które to z kolei wymusiły zastosowanie odpowiednich metod i form pracy z nimi a jednocześnie z przyjętym zapisem o specjalnych potrzebach edukacyjnych uczniów zdolnych uruchomiony został projekt realizowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej. Wraz z nim rozpoczęto realizację zadania, którego celem stało się podniesienie jakości kształcenia i unowocześnienia całego systemu edukacji a jednym z zadań, przewidzianych na lata 2010–2013, było podniesienie efektywności pracy z uczniami o specjalnych potrzebach edukacyjnych. W ramach realizacji tego projektu założono, że powstanie spójny system pracy z takimi uczniami, który to miał angażować nie tylko nauczycieli, lecz także pedagogów szkolnych oraz psychologów z poradni psychologiczno-pedagogicznych. Najistotniejszym celem stało się podniesienie kompetencji kadry pedagogicznej w obszarze pracy z uczniami o specjalnych potrzebach edukacyjnych. Skoncentrowano się na zwiększeniu oddziaływań wychowawczych oraz podwyższeniu poziomu kształcenia. W ramach zrealizowanego w latach 2010–2011 projektu wspólnie z naukowcami z Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej stworzono m.in. model pracy z uczniem o specjalnych potrzebach edukacyjnych. Przeprowadzono także cykl szkoleń dla nauczycieli – liderów zmian (Trochmiak, 2010).

W placówkach oświatowych powstały zespoły, które zajmowały się różnego rodzaju specjalnymi potrzebami edukacyjnymi a ich głównym zadaniem było sprawowanie opieki nad uczniami o specjalnych potrzebach edukacyjnych a także ocena stopnia realizacji wyznaczonych celów i zadań. Zaczęto przypisywać istotną wagę obserwacjom i działaniom nauczycieli oraz ich współpracy z poradniami psychologiczno-pedagogicznymi. Wprowadzone zostały także rozwiązania formalne, takie jak m.in. Karty Indywidualnych Potrzeb Ucznia, zawierające wskazania dotyczące planu pracy i zalecenia, jak z uczniem pracować na lekcjach czy poza nimi. Zespoły spotykały się i analizowały trafność i skuteczność podjętych działań a dzięki wprowadzeniu procedury systematycznego dokumentowania osiąganych postępów, możliwe było monitorowanie ich rozwoju. W pracy z uczniami uzdolnionymi natomiast za kluczowe uznano trafne rozpoznanie potrzeb i podjęcie indywidualnych działań, które to miały umożliwić rozwój zainteresowań i uzdolnień. Istotne było także zaplanowanie działań tzw. Plan Działań Wspierających, które to uwzględniało indywidualne potrzeby i możliwości ucznia i dotyczyło realizacji programu dla klasy programowo wyższej lub skorzystanie z procedury indywidualnego programu lub toku nauki. Konieczne stało się jednoczesne zadbanie o rozwój emocjonalny, społeczny i fizyczny dziecka oraz kształcenie jego umiejętności metapoznawczych (Jabłonowska, Łukasiewicz-Wieleba, 2010). W ramach opisanego projektu opracowano także materiały dla nauczycieli. Były to m.in.:

„Jak organizować edukację uczniów o ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi", czyli przewodnik z krótką charakterystykę uczniów zdolnych oraz pracy z nimi, wytyczne dotyczące polecanych metod i form pracy z uczniami zdolnymi. Sformułowano w nim wytyczne dotyczące interpretacji podstawy programowej w kontekście pracy z uczniami wybitnie uzdolnionymi.

„Podniesienie efektywności kształcenia uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi", czyli materiały szkoleniowe zawierające w pierwszej części cykl artykułów pedagogów, specjalistów z zakresu specjalnych potrzeb edukacyjnych. Druga ich część z kolei zawierała materiały odnoszące się do opracowanego modelu, ukierunkowane na pracę z uczniami o konkretnych specjalnych potrzebach edukacyjnych.

Była to pierwsza istotna próba wdrożenia planowego i dość ujednoliconego systemu wspierania uczniów uzdolnionych w całym kraju, w tym również stworzenia teoretycznego modelu, możliwego do wykorzystania w warunkach szkolnych.

„Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym" to kolejny projekt o zasięgu krajowym, który w centrum uwagi umieścił ucznia zdolnego. Zrealizowany został w latach 2010–2014 przez Ministerstwo Edukacji Narodowej oraz Ośrodek Rozwoju Edukacji (ORE) a głównym jego celem było ulepszenie sposobów pracy z uczniami zdolnymi a także opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z nimi.
Cel ten zrealizowano poprzez analizę wcześniejszych działań dotyczących wspierania uczniów zdolnych, poprzez stworzenie propozycji zmian prawnych, organizacyjnych, merytorycznych i finansowych. W tym zakresie uwzględniono także olimpiady, konkursy i turnieje. W realizację tego projektu zaangażowane zostały różne środowiska powiązane z edukacją uczniów zdolnych: naukowe, szkolne, administracyjne oraz wiele organizacji pozarządowych. Do najbardziej znaczących działań podjętych w ramach tego programu możemy zaliczyć: analizę i upowszechnianie „dobrych praktyk" w pracy z uczniem zdolnym, realizowanych w Polsce i poza granicami, opracowanie propozycji zmian prawnych umożliwiających wprowadzenie systemowego wsparcia uczniów zdolnych, stworzenie ram służących ulepszeniu i realizacji olimpiad przedmiotowych, opublikowanie raportów i poradników dla osób zajmujących się pracą z uczniami zdolnymi, organizacja konferencji, spotkań metodycznych dotyczących pracy z uczniami zdolnymi a także stworzenie sieci szkół „Odkrywców talentów" szczególnie promujących uzdolnionych uczniów.
Zwiększono także wrażliwość społeczną na potrzeby uczniów zdolnych poprzez szereg działań promocyjnych i informacyjnych. Dzięki temu projektowi znacznie wzrósł poziom wiedzy na temat sytuacji uczniów zdolnych w Polsce i poza jej granicami. Poskutkował także wypracowaniem w wielu szkołach procedur dotyczących identyfikacji oraz wspierania uczniów zdolnych, a także zwiększeniem integracji środowisk, które tą tematyką się zajmują.
Z inicjatywy Ministerstwa Edukacji Narodowej zrealizowanych zostało również wiele rocznych projektów wspierających innowacyjne działania szkół. I tak np. w 2009 roku zrealizowano projekt „Rok Kreatywności i innowacji", rok szkolny 2010/2011 ogłoszono z kolei „Rokiem odkrywania talentów", w 2012 zrealizowano projekt „Szkoła z pasją". W Polsce oprócz powyższych istnieje również wiele instytucji, uczelni wyższych, Centrum Nauki, młodzieżowych domów kultury, czy innych ośrodków, które oferują uczniom wzbogacone programy z różnych obszarów aktywności. Również część Ośrodków Doskonalenia Nauczycieli realizuje projekty związane z edukacją uczniów zdolnych. Należą do nich na przykład projekty DIAMENT (Małopolska) zDolny Slazak (Śląsk), WARS i SAWA (Warszawa) lub Mazowieckie Talenty (Mazowsze) i inne, które to związane są z konkretnymi województwami albo miastami. Do bardzo znaczących projektów obejmujących swoim zasięgiem całą Polskę zaliczyć możemy GiLA – szkołę przeznaczoną dla uczniów uzdolnionych akademicko, czy POSA -szkołę dla uczniów uzdolnionych artystycznie (Limont, 2012).

PODSUMOWANIE:

Edukacja uznawana jest za jedno z podstawowych praw każdego człowieka. Kraje opracowują więc najbardziej właściwą politykę edukacyjną w odniesieniu do potrzeb wszystkich uczniów, mając na uwadze zarówno wyrównywanie szans edukacyjnych jak i umożliwienie pełnego rozwoju ich potencjału. Większość z aktualnie istniejących specjalnych rozwiązań edukacyjnych dla uczniów zdolnych stanowi część systemu szkolnego. Niemal wszystkie kraje stosują rozwiązania zarówno w obrębie szkoły, jak również i poza nią. Nawet jeśli w którymś z krajów nie przyjęto terminu określającego dzieci i młodzież zdolną, to i tak dostrzega się tam politykę edukacyjną ukierunkowaną na rozwijanie potencjału wszystkich uczniów a brak określonej infrastruktury dla tych uczniów nie oznacza wcale, że nie dostrzega się ich potrzeb edukacyjnych. Również w Polsce kształcenie uczniów zdolnych stało się jednym z priorytetów polityki oświatowej państwa i istnieje wiele możliwości organizacyjnych niosących wsparcie w rozwijaniu potencjału.

6. Kompleksowe działania na rzecz uczniów zdolnych.

6.1. Możliwości szkoły dotyczące pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi

Podczas analizy drogi wdrażania programu skierowanego na pracę z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi, istotne są wszelkie aspekty dotyczące konkretnego systemu szkolnego, w którym taki program ma funkcjonować. Warto więc już na samym początku zadać sobie pytania (Tokarz, 2004,) dotyczące ucznia, mianowicie z jakim uczniem będziemy mieli do czynienia, zdolnym czy twórczym. W jakim wieku, o jakiej motywacji?
A także pytania o klasę, przede wszystkim, w jakiej klasie ten uczeń się znajduje?
Warto także zastanowić się nad postawą nauczyciela wobec swojej pracy, szkoły, uczniów w ogóle, uczniów zdolnych a także odnośnie preferencje wobec uczniów.
A także nad kadrą pedagogiczną, przede wszystkim, jakie postawy przeważają w grupie nauczycieli, jakie są ich postawy wobec nowych rozwiązań, czy wobec dodatkowych zadań?
Warto także zastanowić się nad samą szkołą w jakich warunkach zewnętrznych funkcjonuje i jakie są jej preferencje osiągnięć uczniowskich, styl nauki.
Istotne jest także to, jak rodzice postrzegają uzdolnienia dzieci i jakie mają postawy wobec szkoły i nauki, cechy osobowości a także jakie mają warunki wspierania i czy mają motywację do wspierania swoich dzieci. Ponadto warto również zastanowić się nad samą polityka oświatową i zadać sobie pytanie, jakie są postawy urzędników odpowiedzialnych za kształcenie. Podczas szukania odpowiedzi na wiele z powyższych pytań i przy tworzeniu charakterystyki zasobów szkoły uwzględnić należy samych uczniów, będących zarówno jednostkami, jak i częścią większych grup a także rodziców, nauczycieli i całą radę pedagogiczną, środowisko lokalne, inne szkoły, poradnie psychologiczno-pedagogiczne i inne.

Ponadto także inne aspekty mają znaczenie dla efektów realizacyjnych programu wspierania uczniów zdolnych i uzdolnionych, takie jak posiadane zaplecze materialne szkoły, programy i podręczniki szkolne używane w szkole; wyposażenie sali multimedialnej, czy zaplecze techniczne szkoły oraz dostęp do nowoczesnych narzędzi technologii informacyjnej. Istotna także jest liczba uczniów, klas, nauczycieli czy pracowni, liczebność klas. Elementy te bowiem wpływają na możliwości w zakresie np. prowadzenia zajęć dodatkowych.
Należy również wziąć pod uwagę możliwości związane z finansowaniem dodatkowych zadań nauczycieli oraz dotowania aktywności realizowanych przez uczniów, jak również umiejętności menadżerskie dyrektora szkoły, w szczególności motywowania czy tworzenia komfortowych warunków pracy oraz znajdowania źródeł finansowania.
I w końcu kompetencje merytoryczne, organizacyjne i psychologiczne lidera zespołu, który zajmuje się pracą z uczniami zdolnymi.

6.2. Rozumienie zdolności i uzdolnień, opracowanie strategii ich rozpoznawania

Można wyróżnić, w odniesieniu do uczniów zdolnych dwa podejścia, z których pierwsze ma charakter elitarny, według którego uznaje się, że osób wybitnie zdolnych jest niewiele, dlatego i prawdopodobieństwo ich spotkania jest niewielkie. Taki pogląd można dostrzec także wśród pedagogów, gdyż niektórzy nauczyciele wyrażają przekonanie, że spotkanie wybitnie uzdolnionego dziecka jest w ich środowisku mało prawdopodobne a ich to zjawisko nie dotyczy i nie muszą przejmować się edukacją takich uczniów (por. Painter, 1993).

Drugie, to podejście egalitarne oparte na przekonaniu, że właściwie każde dziecko ma jakieś uzdolnienia, dlatego rolą nauczyciela staje się ich wykrycie, a następne rozwijanie rozpoznanego potencjału. Ta optymistyczna perspektywa dotyczy najczęściej posiadanych przez dziecko uzdolnień kierunkowych a ich nasilenie nie musi być wybitne, lecz w jakimś stopniu stanowić mocną stronę takiego ucznia. W praktyce jednak nauczyciele, którzy chcą pracować z uczniami zdolnymi lub uzdolnionymi, mają problem już na etapie identyfikacji z ustaleniem trafnej ich definicji. Wiele spośród koncepcji, jak i istniejących definicji pedagogicznych i psychologicznych, kładzie akcent na odmienne cechy lub zachowania uczniów, które powinny świadczyć o ich wysokich zdolnościach. I tak np. J. Renzulli i S.M. Reis (2000) proponują odróżnienie zdolności szkolnych odnoszących się głównie do uczenia się, rozwiązywania testów, zdolności twórczych i produktywnych. Uczniowie posiadający zdolności szkolne lepiej radzą sobie w szkole, lepiej rozumieją szkolny system i zależy im na ocenach i osiągnięciach szkolnych. Tacy uczniowie, co więcej są lubiani i doceniani przez nauczycieli (Mönks, 2004).

Zdolności twórcze i produktywne z kolei dotyczą umiejętności dostrzegania i rozwiązywania problemów a posiada je uczniowie mający wyższy poziom samodzielności i automotywacji, w nauce znaczenie ma dla nich własne zainteresowanie i rozwój. Tacy uczniowie niestety w mniejszym stopniu są cenieni przez nauczycieli, gdyż mogą oni albo przeszkadzać na lekcji, albo burzyć autorytet nauczyciela (tamże).
Uczniowie zdolni ponadto są określani jako ci, którzy mają szerokie zainteresowania, cechują się pracowitością, potrafią się koncentrować, posiadają motywację do zajmowania się wybranymi przedmiotami, cechują się wytrwałością, zaangażowaniem, pewną bezkompromisowością, dobrą koncentracją uwagi, wielością zainteresowań, wnikliwością, dociekaniem, wczesnymi osiągnięciami i silnymi zainteresowaniami poznawczymi i in. (por. np. Gondzik, 1976; Borzym, 1979; Piotrowski, 2003; Włodarski, 1998b). Jak zauważa Z. Włodarski (1998b) wśród cech, które różnicują uczniów, znajdują się zarówno te, które są dość stałe, jak inteligencja, uzdolnienia kierunkowe, ale także i takie, które mogą się zmieniać w czasie dość często, np. zainteresowania, aspiracje, nastawienia, motywacje.

Definiowanie zdolności i uzdolnień w połączeniu z tworzeniem programu opieki nad uczniami dotyczy także określenia, jaki odsetek populacji szkoły powinno objąć się dodatkowym programem kształcenia. I tak wielu badaczy twierdzi, że za zdolnych należy uznać od 1–3% populacji a podstawą oceny zdolności powinny być testy inteligencji i Obecnie istotne są zmiany w rozumieniu i dostrzeganiu zdolności a tendencja rozumienia zdolności jedynie przez pryzmat ilorazu inteligencji i osiągnięć, zastąpiona zostaje myśleniem o mocnych stronach, predyspozycjach czy uzdolnieniach kierunkowych. Z kolei kwestia identyfikacji zdolności jest problemem wzbudzającym dyskusje.
Najistotniejszym faktem, co do którego panuje zupełna zgodność wśród badaczy i praktyków, jest to, że nie można opierać identyfikacji zdolności jedynie na ilorazie inteligencji i że należy odróżniać osoby inteligentne od osób zdolnych. Również powszechnie stosowane kryteria osiągnięć szkolnych i pozaszkolnych oraz wyniki testów są także często krytykowane i uznane za niewystarczające (Piotrowski, 2003). G. Szumski (1995) podkreśla, że tradycyjne metody identyfikacji zdolnych, stosowały uniwersalne narzędzia (np. testy inteligencji) i służyły dopasowaniu uczniów do już istniejących form kształcenia (np. szkół dla zdolnych), ale nie pozwalały na adekwatny dla dziecka dobór treści czy metod pracy, gdyż dziecko było dopasowywane do już funkcjonującego modelu kształcenia. Dynamiczne metody identyfikacji mają bowiem związek z procesem uczenia się a także są indywidualne dla każdego dziecka. Pozwalają zatem stworzyć jego bogatą charakterystykę i są na bieżąco aktualizowane, dzięki czemu uzyskane informacje mogą być wykorzystywane w kształceniu. Takie dynamiczne metody identyfikacji zapobiegają selekcji negatywnej. Ukazują one bowiem zdolnych z perspektywy pewnej kategorii zdolności, a nie jako indywidualności. Dynamiczne procesy identyfikacji uznane są za trudne do realizacji w praktyce, gdyż wiążą się z wysokimi kosztami, a także problemami organizacyjnymi oraz kadrowymi. Za przykład

takiego dynamicznego modelu identyfikacji uczniów zdolnych może posłużyć model spiralny opracowany przez G. Clarke'a (1983), zakładający wykorzystanie w identyfikacji określonego programu skierowanego dla uczniów zdolnych w obrębie, którego treści realizowane są zgodnie z zasadą stopniowania trudności a rolą nauczyciela jest stała obserwacja zachowań i postępów uczniów oraz sporządzanie i aktualizowanie charakterystyki dotyczącej zainteresowań i możliwości każdego uczestnika zajęć. Traktowanie identyfikacji uczniów zdolnych jako integralnej części ich kształcenia wydaje się zasadne. Zmienia ono bowiem spojrzenie na sam proces kształcenia a także wymaga od opracowujących program i prowadzących zajęcia: gotowości do zmian, empatii, wrażliwości czy elastyczności w podejściu do każdego ucznia.

Z badania F. Mönksa i R. Pflüger (2005b) z kolei wynika, że rozpoznanie zdolności ucznia opiera się w dominującej części na ocenach, w mniejszym zaś stopniu na obserwacji oraz analizie osiągnięć pozaszkolnych, chociaż nie zawsze występuje przecież związek pomiędzy ocenami a osiągnięciami uczniów. Zjawisko to bowiem może mieć związek z faktem, że nauczyciele mają swoją wizję „idealnego ucznia" a wśród jego cech są takie, jak zainteresowanie lekcjami, przygotowanie się do lekcji i odrabianie prac domowych, solidność w pracy na lekcjach oraz szybkość w wykonywaniu prac. Cechy te są zbieżne z charakterystyką wielu uczniów zdolnych, ponadto jednak w opiniach nauczycieli „idealny uczeń" jest czysty, zdrowy, ładnie ubrany, uprzejmy i posłuszny (Becker, za: Meighan, 1993). Dla wielu także uczeń zdolny jest utożsamiany, choć nie w pełni świadomie, z uczniem skutecznym. A przecież, jak zauważa D. Turska (2006) ani uczeń zdolny nie musi być uczeniem skutecznym ani uczeń skuteczny – uczniem zdolnym.
Można więc uznać, podążając za myślą K.A. Hellera (za: Szumski, 1995, s. 66), że stosowanie pomiarów psychologicznych lub pedagogicznych generuje w czasie selekcji dwa rodzaje błędów. Mianowicie uczniowie zdolni mogą zostać uznani za mało zdolnych, uczniowie niezdolni z kolei mogą zostać włączeni do grupy uczniów zdolnych, przy czym „minimalizacja jednego prowadzi do maksymalizacji drugiego". Zaleca się, dlatego stosowanie w czasie selekcji różnorodnych form identyfikacji w celu zminimalizowania występujących błędów diagnostycznych (Szumski, 1995, s. 66).

Przywołując jeszcze sytuację uczniów uzdolnionych kierunkowo, którzy często nie mają wysokich osiągnięć szkolnych, ale zainteresowania i wysoką motywację dotyczącą jedynie wybranych dziedzin, warto podkreślić, jak szczególnie trudno jest się odnaleźć w środowisku szkolnym tym uczniom, których uzdolnienia nie mają związku z przedmiotami szkolnymi. Tacy uzdolnieni kierunkowo uczniowie mają mniejsze szanse na realizowanie satysfakcjonującej i rozwijającej kariery edukacyjnej, gdyż szkoła często nie jest zainteresowana lub nie posiada zasobów do tego, by kierować rozwojem ich specyficznych uzdolnień. Zdarza się także, że uczniowie zdolni lub uzdolnieni są traktowani jako grupy mniejszościowe (Piotrowski, 2003), które to odbiegają od normy, a więc są też mniej pożądane społecznie. A to budzi niechęć, zarówno rówieśników, jak i nauczycieli (tamże). Zatem analizując ten zakres planowania kompleksowej pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi, należy podkreślić, że najistotniejszym w tym względzie jest wybór lub dookreślenie definicji ucznia zdolnego lub uzdolnionego; jak również podjęcie decyzji, jaka grupa uczniów będzie objęta rozpoznaniem a w dalszej części programu objęta opieką. Istotna jest również świadomość, po co identyfikacja ma być przeprowadzona. Czy tylko po to, by stworzyć „bazę danych uczniów zdolnych", czy też ma to być sposób na to, jak z konkretnymi, zidentyfikowanymi uczniami pracować. Podkreśla się również, by nie dokonywać „etykietowania" uczniów, czyli identyfikować ich z zachowaniem dyskrecji (*Recommenddation 1248*; Limont, Cieślikowska, 2004).
Poprawna diagnoza jest kluczowa dla indywidualizowania pracy z uczniem, opracowywania dla niego zadań domowych, opracowywania zadań na zajęcia (dla ucznia indywidualnie lub dla grupy uczniów o podobnym potencjale) (por. Hajnicz, 2010). Dlatego właśnie konieczne

jest zrozumienie, że dostrzeżenie potencjału dziecka nakłada na nauczycieli obowiązki związane z troską o jego rozwój i istotne jest w tym kontekście stwierdzenie, że w deklaracjach nauczycielskich często pojawia się przekonanie, że rozpoznawanie zdolności służy głównie udzieleniu wsparcia uczniom zdolnym, poprzez oferowanie im własnych kompetencji i czasu, pomoc, prowadzenie zajęć dodatkowych, przygotowanie do konkursów i in. (Łukasiewicz-Wieleba, 2013).

Pierwsze rozpoznanie zdolności najczęściej odbywa się nieformalnie albo w szkole, albo w domu a jego wynikiem może być podjęcie aktywności służących rozwijaniu uzdolnień dziecka (Jabłonowska, Łukasiewicz-Wieleba, 2010). Planując jednak kompleksowe działania skierowane na uczniów zdolnych i uzdolnionych, uwzględnić należy wprowadzenie wczesnego i systematycznego procesu rozpoznawania zdolności i uzdolnień, które to powinny uwzględniać metody i narzędzia oraz kadrę, która będzie umiała je zastosować i zinterpretować. Warto także pamiętać, że jest to proces czasochłonny i wymaga on rozumienia różnych czynników zakłócających trafną identyfikację, dlatego skuteczna i trafna diagnoza wymaga zaangażowania, poświęcenia czasu i pracy oraz posiadania warsztatu badawczego i teoretycznego (por. Mönks, Pflüger, 2005b). A ponieważ ujawnianie się predyspozycji u uczniów jest procesem dynamicznym, stąd należy w tej pracy uwzględnić psychologa, który to rozumie zależności związane z rozwojem dziecka. T. Giza (2009) zauważa, że „umasowienie” zdolności, czyli taka sytuacja, kiedy większa liczba dzieci jest rozpoznawana jako zdolne, sprzyja aktywizacji innych osób zainteresowanych rozwojem uczniów, bowiem zmieniają się reakcje i działania rodziców, wzrasta także ich zainteresowanie stymulowaniem rozwoju dziecka. Ponadto także w takich szkołach częściej promuje się uczniów twórczych, którzy są doceniani przez nauczycieli. Tam również popierane są nietypowe formy wsparcia uczniów zdolnych.

6.3. Zaplanowanie pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi adekwatnie do ich możliwości i ograniczeń

Ponieważ w szkołach dominujące są takie metody i formy pracy, które głównie przeznaczone są dla uczniów przeciętnych (por. Cieślikowska, 2005) a program szkolny jest często niedopasowany do możliwości intelektualnych uczniów zdolnych, dlatego zdarza się, że uczniowie bardzo inteligentni osiągają niższe wyniki niż uczniowie mniej inteligentni, ale bardziej pracowici. Nieadekwatne wymagania obniżają u uczniów zdolnych motywację do nauki a w konsekwencji ich wyniki są zaniżone (por. Włodarski, Hankała, 2004; Dyrda, 2007, Limont, 2004). Praca z dzieckiem zdolnym polegać powinna przede wszystkim na opracowaniu dla niego dodatkowych, interesujących zadań. Niestety jednak błędne rozumienie przez nauczycieli idei poszerzania treści kształcenia, ogranicza się jedynie do przekazywania dziecku dodatkowych zadań na takim samym poziomie trudności, jak dotychczas, co zniechęca dziecko do wysiłku. Z kolei nuda, która towarzyszy rozwiązywaniu zbyt prostych zadań powoduje, że dziecko stara się uniknąć jej, tym bardziej jeżeli ma rozwiązać takich zadań jeszcze więcej (por. Painer, 1993). Wówczas zamiast zabawy i satysfakcji dziecko otrzymuje karę za bycie zdolnym. Zdarza się także, szczególnie wtedy, gdy proces rozpoczął się wcześniej, że nauczyciel nie chce dziecka obciążać trudniejszymi zadaniami, gdyż uważa, że nie jest ono w stanie im sprostać, co w konsekwencji utrwala przekonanie o przeciętych uzdolnieniach dziecka. Taki uczeń jest oceniany przeciętnie i nie wykazuje zainteresowania podwyższaniem tych ocen, ponadto nudzi się przy wykonywaniu zadań, które są poniżej jego możliwości, uznając szkołę za nie wartą wysiłku i nie oferującą mu niczego interesującego (Painter, 1993).

Jeżeli prezentowane w szkole treści i metody są nudne, wówczas uczniowie przyjmują postawę krytyczną, co z kolei prowadzi do konfliktów (Piotrowski, 2003).
Uczniowie w procesie szkolnym przekonują się, że w szkole nie są wcale pożądane postawy dociekające, krytyczne, odkrywcze, ale najistotniejsze jest podporządkowanie się autorytetom i odtwarzanie wiedzy z pamięci oraz udzielanie jedynej poprawnej odpowiedzi na postawione pytania (Postman, Weingartner, za: Meighan, 1993). W polskich szkołach dominuje następujący system zadawania pytań przez nauczyciela: nauczyciel zadaje pytanie, uczeń odpowiada, po czym nauczyciel komentuje. Zadawane przez nauczycieli pytania mają najczęściej charakter zamknięty, związany z odtwarzaniem pamięciowym a od uczniów najczęściej wymaga się krótkiej, czasem jednowyrazowej odpowiedzi. Sami uczniowie z kolei nie mają wielu okazji do tego, by pytania zadawać. Pytanie jest przywilejem nauczycieli. Wszystko to może powodować zniechęcenie ucznia do zadawania pytań lub ignorowanie ich. Uczniowie najczęściej pytają o kwestie organizacyjne; pytania poznawcze są zadawane sporadycznie i nie zawsze nauczyciel na nie odpowiada. Z tych przyczyn właśnie utrwala się w szkole mit o wszechwiedzącym nauczycielu, który dysponuje wiedzą i decyduje, jak i kiedy ją udostępniać uczniom a jednocześnie obawia się pytań uczniów, które mogłyby obnażyć jego niewiedzę (Szumna, 2009). Uczniowie zdolni tymczasem uczą się w sposób odmienny niż przeciętni, organizując wiedzę we własne systemy, lepiej dla nich zrozumiałe, bardziej logiczne i ulegające częstej modyfikacji pod wpływem nabywania nowej wiedzy a ponadto mają wysoki poziom własnej aktywności badawczej i zachowań twórczych, przez co w procesie nauki i w efektywności uczenia się znaczenia nabierają takie elementy jak: zainteresowania, nastawienie, styl poznawczy, poglądy i postawy aspiracje, motywacje (Włodarski, Hankła, 2004). Dlatego aktywizowanie poznawcze uczniów nie może opierać się jedynie na przekazywaniu wiedzy przez nauczyciela, polegać powinno natomiast przede wszystkim na pogłębianiu ciekawości świata, dążeniu do samodzielnego zdobywania wiedzy i umiejętności jej uaktualniania, ze względu na dezaktualizację wiedzy i rozwój nauki. Kluczowe więc w takim kontekście staje się także krytyczne przetwarzanie informacji, pozwalające na budowanie wiedzy spójnej, logicznej, lecz także otwartej, uwzględniającej związki pomiędzy różnymi aspektami i czynnikami (Włodarski, 1998a).
Warto ponadto podkreślić, że nauczyciele mają wyższe zdanie o swoich kompetencjach do pracy z uczniami zdolnymi niż ich podopieczni. Oceniają się także pozytywniej, wskazując na stosowanie specjalnych programów i indywidualizując podejście do zdolnych, uczniowie w tym względzie są natomiast dużo bardziej krytyczni (Porzucek-Miśkiewicz, 2013).

6.3.1. Zalecenia w pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi

Mimo, że istnieje wiele form pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi, to nie ma wśród nich rozwiązań, które będą odpowiednie dla wszystkich (Włodarski, 1998b). „Przekonanie, że istnieje jedna najlepsza teoria naukowa, którą da się po prostu zaaplikować, zapewniając sukces edukacyjny, jest naiwne, a nawet zagrażające, bo zniewala nauczyciela, pozbawiając go poczucia odpowiedzialności za własną pracę" a „dobrych rozwiązań jest zapewne tyle, ile indywidualnych potrzeb dzieci" (Michalak, 2011, s. 167). Literatura przedmiotu jako najbardziej powszechnie stosowane w odniesieniu do uczniów zdolnych proponuje przyspieszenie tempa nauki, rozszerzenie i wzbogacenie treści nauczania, różnicowanie poziomów nauczania, tworzenie warunków do nauczania twórczego (Lewowicki, 1986). Strategie, które z kolei w odniesieniu do uczniów zdolnych zaleca E. Piotrowski (1998), to: szybszy rozwój, wcześniejsze rozpoczęcie nauki, większy zasób wiedzy, szybsza realizacja materiału przypisanego do określonej klasy, wiedza o wyższym poziomie, lepiej rozwijanie myślenia twórczego. Znaczące zalecenie stanowi także indywidualizacja kształcenia, choć niestety, jak uważa T. Lewandowska-Kidoń (2009, s. 99), „to często puste hasła w szkołach o przeładowanych programach, gdzie dominuje encyklopedyzacja wiedzy, nadmierne wymagania, nastawienie na ucznia średniego”. J. Laznibatová z kolei jako główne zalecenia w pracy z uczniami zdolnymi uznaje (2005): indywidualizowanie, zgodnie z potrzebami poszczególnych uczniów i zróżnicowanie podejście w klasach, uwzględniające podział na grupy, które będą realizowały zadania zgodnie ze swoimi możliwościami. Kolejne z zaleceń to unikanie przez nauczycieli działań mechanicznych, a tym samym pozwalanie uczniom na odkrywanie, podejmowanie zadań twórczych i problemów. Kolejnym zalecenie stanowi wykorzystywanie metod problemowych, heurystycznych, indukcyjnych, eksperymentów itp. Inne z kolei to unikanie konieczności zapamiętywania mechanicznego na rzecz zapamiętywania poprzez działania, rozwiązywanie zdań itp, jak również docenianie i umożliwianie uczniom dialogu i uznawanie ich argumentów, oraz pozwalanie na sprawdzenie własnych pomysłów; Z istotne uznaje także: umożliwianie prezentowania pomysłów i ich obrony; rozwijanie różnych sposobów myślenia, np. myślenia krytycznego, logicznego, twórczego; zwracanie uwagi i docenianie treści a nie formy; czyli pozwolenie uczniom na pewną swobodę w zakresie wyboru formy dotyczącej wykonywanych zadań (np. pozwolić na pisanie ołówkiem, notowania w jednym zeszycie itp.). Ponadto wymienia także: wspieranie samodzielność i aktywizowanie uczniów; pogłębianie, poszerzanie, wzbogacanie prezentowanych treści; umożliwianie realizacji projektów, referatów, prezentacji itp. i tworzenie zajęć ciekawych, inspirujących, gdyż czynności nudne, rutynowe należy odpowiednio umotywować, by zwiększyć wysiłek uczniów w ich wykonywaniu. Jako sprawdzone formy pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi uznaje się profilowanie klas czy szkół oraz inne formy grupowania uczniów o zbliżonym poziomie zdolności lub uzdolnień. W takim rozwiązaniu zwraca się uwagę na fakt, że nauczyciele pracujący wyłącznie ze zdolnymi uczniami inaczej rozkładają treści a także stosują inne metody pracy a fakt, że nie muszą skupiać się na przekazywaniu podstawowej wiedzy, umożliwia im stosowanie aktywizujących i usamodzielniających metod nauczania (por. Eby, Smutny, 1998).

Popularną formą rozwijania zdolności są również olimpiady i konkursy, kółka zainteresowań czy zajęcia pozaszkolne i pozalekcyjne. Sporadycznie stosowane są także zajęcia fakultatywne i specjalne programy, prelekcje naukowe, sesje naukowe i kursy wakacyjne (Giza, 2005). Zajęcia dodatkowe ukierunkowane na rozwój zainteresowań, zdolności lub przygotowujące do konkursów przedmiotowych również należą do powszechnych form pracy z uczniami zdolnymi. Aby jednak takie zajęcia dodatkowe rozwijały zdolności, muszą mieć odpowiedni charakter, nie wyrównawczy, lecz rozwijający np. myślenie twórcze (Piotrowski, 1998). Ponadto również zajęcia pozalekcyjne, zewnętrzne, z jednej strony umożliwiają uczniom zdolnym i uzdolnionym na nawiązanie kontaktów z osobami podobnymi sobie, jednocześnie pozostając w klasie dzieci o zróżnicowanym poziomie uzdolnień. Z drugiej zaś strony udział w nich może wpływać negatywnie na odbiór zwykłych lekcji, które stają się dla nich nużące (Eby, Smutny, 1998). Dla wspomagania pracy z uczniami uzdolnionymi i zdolnymi istotne jest także organizowane dla uczniów np. szkół letnich, obozów i warsztatów (Piotrowski, 2003). W szkołach stosowany jest również indywidualny tok nauki, umożliwiający odejście od systemu klasowo-lekcyjnego oraz tradycyjnych form oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów z jednego lub kilku przedmiotów a jego realizacja pozwala na naukę samodzielną lub w innych klasach. Indywidualne programy nauki z kolei tworzone są jako modyfikacja istniejących programów lub jako program kształcenia tak, by zapewniał realizację konkretnych potrzeb edukacyjnych ucznia (por. Muzioł, 2005). A jeśli jest trafnie dobrany lub stworzony staje się wówczas motorem rozwoju dziecka. Jest „ilustracją osobistej filozofii nauczyciela”, jest mocno zakorzeniony w potrzebach uczniów i możliwościach szkoły (Michalak, 2011, s. 124). Fakt, że matematycznie uzdolnieni i utalentowani uczniowie różnią się od siebie pod względem potrzeb i wymagań i konieczne jest opracowanie i stosowanie odpowiednio dla nich przygotowanych programów podkreśla (Deringöl, Davasligil, 2020). Autorzy publikacji przygotowali specjalne programy wsparcia uczniów zdolnych i utalentowanych matematycznie i poddali badaniu eksperymentalnemu 24 uczniów z Turcji. Wyniki badań pozwoliły stwierdzić istotny wpływ owych programów na rozwój uzdolnień matematycznych uczniów grupy eksperymentalnej, w której wprowadzono czynnik eksperymentalny, przy jednoczesnym zachowaniu początkowego poziomu zdolności w grupie kontrolnej, która pracowała według jednego „uniwersalnego" programu. Także (Lee i in., 2020) podkreślają wagę zapewnienia uczniom zdolnym i utalentowanym skutecznych programów edukacyjnych oraz różnych strategii lub modeli edukacji, w tym także programów przyspieszonych, czy grupowania takich uczniów. Zalecane jest także w celu pełnego rozwoju uczniowskich zdolności w normalnym systemie szkolnym, uelastycznienie programów kształcenia i wykorzystywanie metody projektu (*Recommenddation 1248*; Limont, Cieślikowska, 2004). Wiele działań pedagogicznych skierowanych na uczniów zdolnych i uzdolnionych ma na celu zachęcanie do samouctwa, samodzielności, do poszukiwania mistrzów i doskonalenia warsztatu (por. Góralski, 1996, 2003).

6.3.2. Kierunki kształcenia i wychowania zdolnych i uzdolnionych

W kształceniu uczniów zdolnych ważna jest nie tylko nauka, lecz także wychowanie i rozwój osobowości (Laznibatová, 2005), dlatego istotnym zagadnieniem w kształceniu zdolności jest taki rozwój młodego człowieka, żeby ukształtowana została mądra osoba, ale także ktoś, kto potrafi prawidłowo ocenić siebie i swoją sytuację, lecz z uwzględnieniem punktu widzenia innych osób. Bowiem ktoś, kto zauważa ograniczenia w sobie i w świecie i potrafi planować, wyznaczać cele. A. Sękowski (2005, s. 169) zauważa, że „Mądrość jest swoistą integracją możliwości intelektualnych, emocjonalnych i społecznych". Na to, jaki obraz siebie tworzy uczeń, również w odniesieniu do przekonania o posiadaniu lub nieposiadaniu zdolności, mają wpływ właśnie nauczyciele, w szczególności sposób prowadzenia przez nich lekcji (Kotlarski, 1995). Uczeń bowiem powinien poznawać nie tylko swoje ograniczenia, związane z uczeniem się, ale także swoje mocne strony oraz czynniki sprzyjające efektywności jego nauki a procesy metapoznawcze, związane z kształtowaniem się w uczniu samoświadomości i tożsamości, powinny być wspierane (Pufal-Struzik, 2009). Warto zauważyć, że udziałem uczniów zdolnych bardzo często (O'Reilly, *Understanding Gifted…*) jest perfekcjonizm i oczekiwanie doskonałości w ich dokonaniach a także unikanie ryzyka i oceny. To ostatnie ze względu na fakt, że potrafią dostrzegać więcej, w negatywach a słabe wyniki ich nie zadowalają, dlatego też może pojawić się tendencja do unikania lub niepodejmowania zadań. Często także wśród takich uczniów pojawia się wysoki poziom samokrytyki, wiodący do rozczarowania sobą, gniewu, czy nawet depresji lub kompleksów. Rozczarowania swoimi osiągnięciami są nieuniknione wśród uczniów zdolnych ze względu na poziom oczekiwań wobec nich i ich ograniczonych jednak możliwości, dlatego też bardzo ważne jest w tym zakresie stawianie realistycznych celów. Te cechy wpływają negatywnie na obiektywny obraz siebie u młodego człowieka, blokując jego dążenia do realizacji celów edukacyjnych i samorozwojowych. Dlatego też w tym kontekście edukacja powinna koncentrować się wokół podmiotowości człowieka, który jest zdolny do samorefleksji, odpowiedzialny, gotowy do rozwiązywania problemów i żyjący w świecie wartości, dokonujący wyborów i ponoszący za nieodpowiedzialność. „Uczenie się i korzystanie z różnych źródeł wiedzy dla rozwoju siebie i swojego «projektu życia», rozumienie zmian współczesnego świata i umiejętność kierowania sobą są podstawą adaptacji twórczej" (Bałachowicz, 2009, s. 26). Ponadto uczeń zdolny w szkolnych warunkach powinien mieć szansę wyboru własnej drogi samorealizacji, czemu sprzyjać mogą czynniki związane z jego wysoką samoświadomością, a szkoła z kolei winna organizować życie uczniów tak, by mieli oni okazję do poznawania siebie i kształtowania swojej refleksyjności (Pufal-Struzik, 2009). Dla tej właśnie grupy uczniów nabiera znaczenia fakt dokonania odpowiednich życiowych wyborów a mając wiele możliwości, często nie wiedzą, która droga jest dla nich odpowiednia. T. Giza pisze, że „człowiek staje się świadom ponoszenia konsekwencji za uruchomiony program swojego rozwoju" (Giza, 2008, s. 56). W tym oto kontekście ważne staje się nie tylko to, na co jednostka się zdecyduje, lecz także to, z czego musi zrezygnować (tamże).

Ze względu na dominującą w życiu refleksyjność, która to wyznacza kierunki samorozwoju, jak również ze względu na różnorodność kultury i wzorców, stawia się przed edukacją zadania związane z rozwijaniem aktywnych postaw młodych ludzi względem świata i umiejętności budowania relacji z innymi opartej na podmiotowości człowieka a młody człowiek wchodząc w życie, nie otrzymuje przecież gotowych wzorców postępowania, gdyż sami rodzice czy szkoła ich nie posiadają (Bałachowicz, 2009). Wsparcie uczniów zdolnych i uzdolnionych nie może więc ograniczać się jedynie do rozwoju ich predyspozycji, konieczne jest holistyczne spojrzenie na młodego człowieka, dobór metod i form pracy rozwijających jego mocne strony, jak również niwelowanie braków i trudności. Istotne jest także kształtowanie poczucia wartości i postawy twórczej i wdrażanie do bycia aktywnym. Zmiany zachodzące w świecie powodują, że „rzeczywistość odbiega od wcześniej ukształtowanych oczekiwań, a umiejętności, które wcześniej ceniono i rozwijano, tracą na wartości. Zmiany te nieuchronnie oznaczają, że część z tych, którzy nie są wystarczająco elastyczni i gotowi przystosować się do nowo powstających standardów, nie poradzi sobie sprawnie z nowymi wyzwaniami i wywieraną przez nie presją" (Bauman, 2012, s. 53).
Dlatego właśnie szkoła musi stać się miejscem przygotowującym nie tylko do wyboru zawodu, ale także do kształcenia się przez całe życie, do ciągłej aktywności edukacyjnej (Rusak, 2007).

6.3.3. Znaczenie rozwoju i osiągnięć uczniów zdolnych dla społeczności szkolnej

Szkoła postrzegana może być jako miejsce intersujące dla uczniów, wspierające ich rozwój, o korzystnej atmosferze i pozwalające na pogłębianie zainteresowań i doskonalenie zdolności, zaś nauczyciele jako osoby kompetentne i życzliwe, umożliwiające uczniom odnoszenie sukcesów (Guzy-Steinke, 2007; Giza, 2005), lub też zupełnie przeciwnie, jako miejsce kształtujące niepowodzenia swoich wychowanków (Olubiński, 2001). To, jak środowisko szkolne traktuje osiągnięcia uczniów zdolnych i uzdolnionych, ma znaczenie dla ich rozwoju. I tak ukryte komentarze, postawy wobec uczniów, niejawna krytyka zdolności mogą nieść przesłanie, które albo umacnia, albo osłabia przekonanie uczniów o znaczeniu ich potencjału. Szkoła jest miejscem, w którym stale dokonuje się oceny innych osób, nauczyciele oceniają uczniów, ale sami także oceniani są przez uczniów, ich rodziców, czy innych pedagogów. Jednak nie wszystkie one wywierają wpływ na efekty ocen formalnych. Nauczyciele oceniając uczniów, w swoim zdaniu stosują trzy aspekty ich szkolnego funkcjonowania: uczenie się, przystosowanie do warunków szkoły, jak również charakter (Meighan, 1993). Sposób oceniania, który kształtuje osiągnięcia szkolne uczniów, przyczynia się do przekonania o wadze poszczególnych składników ich szkolnego funkcjonowania. I tak dominacja w ocenie tego, jak ktoś się uczy, nagradzanie wysokiej średniej i sukcesów szkolnych, ukazują pierwszoplanowe znaczenie „bycia skutecznym". Część placówek docenia sukcesy uczniów, które wykraczają poza osiągnięcia szkolne, np.

osiągnięte tytuły laureatów konkursów i olimpiad. Najczęściej jednak dotyczą one przedmiotów szkolnych. Tylko sporadycznie bowiem uwzględniane są osiągnięcia z innych dziedzin i uznawane są za raczej mało ważne, czy nie mające znaczenia dla nauki szkolnej.

Uwzględnianie w ocenie formalnej np. postaw ucznia, jego nastawienia, motywacji, postawy twórczej czy niestandardowego myślenia itp. stanowi przekaz wsparcia dla uczniów poszukujących, kreatywnych, którzy nie są nastawieni na zdobywanie wysokich ocen szkolnych, ale na samorozwój i sam proces badawczy. Niestety jednak tylko w niewielu placówkach uwzględnia się te aspekty funkcjonowania uczniów. Do formalnych wyróżnień uczniów, którzy osiągają sukcesy, oprócz ocen szkolnych i nagród za wysokie osiągnięcia w nauce, stosuje się także stypendia szkolne lub pozaszkolne. Z kolei w odniesieniu do laureatów olimpiad i konkursów przedmiotowych najważniejszą formą wyróżnienia jest dla nich możliwość bycia przyjętym do wybranej przez szkoły wyższego szczebla.
Innymi stosowanymi formami docenienia osiągnięć uczniów jest przyznawanie im dyplomów, medali, pucharów, wyróżnienia na forum szkoły lub klasy, publikacje w lokalnych gazetach. Część szkół organizuje także dni talentów, podczas których uczniowie mogą pochwalić się swoimi nietypowymi zainteresowaniami i umiejętnościami. Niektóre szkoły także upowszechniają osiągnięcia swoich uczniów w różnych sieciach szkół. Zarówno dla uczniów, jak i ich rodziców wymienione formy docenienia są znaczące i motywują do dalszych wysiłków.

6.3.4. Kompetencje nauczycieli do pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi

O jakości pracy szkoły nie decyduje ani jej wyposażenie, ani organizacja kształcenia, lecz ludzie, którzy tworzą społeczność szkolną (Łaszczyk, 2008b). Ponieważ kompetencje nauczycieli matematyki odnośnie nauczania przedmiotu pozostawiają wiele do życzenia, tak w kwestii kształcenia uczniów zdolnych i uzdolnionych matematycznie jest jeszcze gorzej. A przecież nauczyciele są, obok ucznia i programu kształcenia, najważniejszym komponentem niezbędnym do zapewnienia efektywności w pracy z uczniami zdolnymi (Renzulli, za: Cieślikowska, 2008). I to właśnie oni mogą przyczynić się do zmian w szkole, a nawet zmian społecznych (Kohl, za: Giroux, Witkowski, 2010). Rola nauczycieli w kształtowaniu młodego pokolenia jest bardzo znacząca, chociaż nie zawsze pozytywna. Nauczyciel to osoba, przed którą stawia się wysokie wymagania i ma ona być autorytetem społecznym. Ponadto jest oceniany przez uczniów i ich rodziców. A tej ocenie podlegają jego kompetencje społeczne i zawodowe, jak również zaangażowanie, gotowość do pełnienia dodatkowych funkcji, do dużego obycia kulturalnego, umiejętności specjalnych (Chodubski, 2002). Podkreśla się również fakt, że to właśnie od nauczyciela w dużej mierze zależy, w jaki sposób możliwości ucznia będą wykorzystane w szkole. Niestety pomoc i specjalne wsparcie uczniów zdolnych i uzdolnionych nie dla wszystkich pedagogów jest kwestią oczywistą, i niektórzy wyrażają przekonanie, że uczniowie zdolni poradzą sobie sami (por. Dyrda, 2009). Ponieważ zwykła praca nauczyciela pochłania wiele jego zaangażowania i wysiłku, dlatego też trudno mu szukać jeszcze nowych pomysłów indywidualizujących pracę z uczniami zdolnymi i przysparzających tym samym dodatkowych zadań (Nakoneczna, 1993) a brak chęci i czasem nawet przekonania o słuszności własnych działań sprzyjają zanikowi etosu pracy nauczyciela; co wyraża się w braku przygotowania do zajęć, czy tworzeniu pozorów pracy (Kwieciński, 2007). M. Braun i M. Mach (2014) podkreślają, że praca z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi nie może odbywać się na tych samych zasadach co z uczniami przeciętymi czy tymi, którzy mają trudności w nauce, gdyż u ucznia słabego wiemy, jaki jest cel i jaki będzie efekt; a u ucznia zdolnego tego nie wiemy.

Ponadto również praca z uczniami zdolnymi wymaga wysokich kompetencji pedagogicznych i merytorycznych i mówi się nawet o tym, że tylko zdolny nauczyciel może być dobrym opiekunem ucznia zdolnego (Dyrda, 2009), powinien także posiadać takie cechy jak jego podopieczni, w tym w szczególności zaangażowanie (Cieślikowska, 2008). Wielu spośród nauczycieli nie posiada niestety ani wystarczających kompetencje ani także gotowości psychicznej do pracy ze zdolnymi, których to wymagania przekraczają bariery edukacji klasowo-lekcyjnej. Nie każdy więc nauczyciel może być nauczycielem uczniów zdolnych (Limont, 2005). Zdolny uczeń może intelektualnie przewyższyć nauczyciela, może posiadać nawet wiedzę z programu studiów wyższych. Taki uczeń chętnie docieka i drąży problemy, nie godzi się także na ogólnikowe odpowiedzi, dlatego praca z nim wymaga opracowania dodatkowych materiałów i poświęcenia czasu, poszukiwania ciekawych i istotnych treści, jak również zastosowania niestandardowych metod i form pracy. Często więc praca z uczniem zdolnym wymaga zmiany warsztatu pracy nauczyciela, do czego często nie przygotowują studia. Uczeń zdolny czy uzdolniony może posiadać niską motywację do pracy i nie radzić sobie z osiągnięciami, czy życiem społecznym, lub emocjami, wówczas konieczne są u nauczyciela wysokie kompetencje interpersonalne, komunikacyjne, czy wychowawcze, a przede wszystkim szczere zaangażowanie, w którym troska o człowieka, weźmie górę nad troską o rozwój talentu. Wskazane jest więc stosowanie nieautorytarnego podejście do uczniów i tworzenie bezpiecznej, pozytywnej atmosfery, zachęcanie wychowanków do stawiania realnych celów oraz pozwalanie im na ocenę własnych możliwości i trudności. Konieczna jest także akceptacja uczniów. Wszystko to powinno odbywać się w duchu współpracy i szacunku do siebie i innych, a nie rywalizacji (Laznibatová, 2005).

Rolą nauczyciela jest zainteresowanie uczniów tematem, ustalanie wspólnie z nimi interesujących zadań do wykonania jak również wgląd w proces ich realizacji, a także pomoc, stawianie lub zachęcanie do formułowania problemów a także do ich rozwiązania.
Bardzo ważne przy tym powyższym jest to, by uczeń obdarzał nauczyciela zaufaniem, by chciał zgłaszać mu swoje problemy poznawcze, gdyż brak zaufania może prowadzić do ukrywania potrzeb poznawczych, w obawie przed negatywnymi konsekwencjami (Włodarski, 1998a). Nauczyciel ucznia zdolnego powinien być „specjalistą w reprezentowanej przez siebie dziedzinie, ale także osobą uzdolnioną twórczo i poznawczo, posiadającą wiedzę z pedagogiki i psychologii twórczości i zdolności" (Limont, 2004, s. 14). Powinien być to również człowiek, który pasjonuje się swoim przedmiotem i jest świetnym dydaktykiem oraz psychologiem, potrafi zrozumieć ucznia i jego problemy (Limont, Cieślikowska, 2004) a ponadto posiadający wiedzę pedagogiczną i umiejętność tworzenia programów dla zdolnych (Limont, 2005). Powinien być to człowiek zorientowany na ucznia, twórczy, rozumiejący i jednocześnie wymagający, posiadający intuicję, żeby móc trafnie ocenić dziecko i jego potencjał a relacje nauczyciela z uczniem nie powinny ograniczać się do typowych interakcji w klasie, lecz powinny być oparte na autorytecie oraz mistrzostwie, gdyż opiekunowie zdolnych stają się ich mentorami, dzielą się pasją (Cieślikowska, 2005; Dyrda, 2009). Wówczas uczeń chce się z nim identyfikować (Kotlarski, 1995) i podążać za ich wskazówkami. Nauczyciel powinien z uczniem współdziałać, być empatyczny, uznawać swój zawód za powołanie (Limont, 2005), gdyż nauczyciele nie tylko uczą, ale także wychowują. Powinni stać się przewodnikami, partnerami gotowymi do zrozumienia różnych sytuacji, problemów uczniów oraz tworzyć odpowiednią atmosferę i stale się dokształcać (Laznibatová, 2005). Ponadto nauczyciele, którzy mają sukcesy w pracy z uczniami zdolnymi, potrafią stworzyć im poczucie bezpieczeństwa, jednocześnie stawiając wyzwania i wymagania (Limont, Cieślikowska, 2004).

Analizując zestawienie dokonane przez J. Cieślikowską (2005), na podstawie analizy literatury i dostępnych badań do najważniejszych cech nauczyciela ucznia zdolnego zalicza się: cechy osobowości i predyspozycje intelektualne takie jak entuzjazm, pasję, zaangażowanie, zainteresowanie pracą, motywację, samodyscyplinę, wytrwałość, ponadprzeciętną inteligencję, zdolności poznawcze, analityczność w myśleniu, szerokie zainteresowania, pewność siebie, empatia, sprawiedliwość, otwartość, poczucie humoru, intuicja, zadowolenie z pracy, czy wrażliwość na kulturę. Zalicza się także kompetencje zawodowe. Te ostatnie odnoszą się do przygotowania merytorycznego, dydaktycznego, społecznego, twórczego, badawczego i rozwojowego i dotyczą takich sfer jak: wiedza o przedmiocie nauczania, zdolnościach, metodyce przedmiotu, umiejętność indywidualizowania procesu nauczania, skuteczne nauczanie, budowanie relacji, wrażliwość na problemy ucznia, działania innowacyjne, identyfikowanie zdolności, stałe dokształcanie się i odpowiedzialność zawodowa. Ponadto wskazuje się, że również do najważniejszych cech nauczyciela ucznia zdolnego zalicza się przekonania filozoficzne, umożliwiające przyjęcie określonej koncepcji zdolności i wyboru ścieżki rozwoju uczniów. B. Dyrda (2009) z kolei jako najważniejsze umiejętności nauczycieli uczniów zdolnych wskazuje: umiejętność właściwej identyfikacji zdolności, stosowanie interesujących dla uczniów metod i form kształcenia, tworzenie zindywidualizowanych programów kształcenia, stawianie adekwatnych dla uczniów oczekiwań i wymagań, tworzenie warunków do rozwijania różnych typów myślenia u uczniów. Jako kolejne wymienia: rozpoznawanie stylów uczenia się i stosowanie zróżnicowanych metod nauczania adekwatnych do zdiagnozowanych stylów. Jako kolejne wskazuje motywowanie i trafne ocenianie wysiłku i osiągnięć uczniów zdolnych. Ponadto wymienia również jako istotne posiadanie wiedzy dotyczącej teorii zdolności, jak również umiejętność jej wykorzystania. Jako ważne w pracy z uczniem zdolnym wskazuje także kompetencje innowacyjne nauczyciela. Uważa, że nauczyciel powinien z jednej strony być przygotowanie do rozpoznawania i rozwijania uzdolnień twórczych u innych, a z drugiej do samodzielnego realizowania oryginalnych pomysłów w zakresie swoich działań dydaktycznych i wychowawczych (tamże).

Niestety, jak podkreśla J. Cieślikowska (2005) ilość wymagań stawianych przed nauczycielami uczniów zdolnych czy uzdolnionych nie sprzyja podejmowaniu przez nich takich czynności. Zauważa, że nauczyciele przyjmują wobec ucznia zdolnego następujące postawy: albo nie dostrzegają go, albo ignorują, hamując jego zdolności, albo także nie rozwijają jego zdolności, chociaż podejmują wobec niego działania wychowawcze. Większość nauczycieli nie czuje się przygotowana do pracy z uczniami zdolnymi, co więcej nie posiada również ku temu motywacji. Także opracowanie indywidualnych programów, czy przygotowanie zajęć dodatkowych i materiałów pochłania czas, a za ten poświęcony czas nauczyciele nie otrzymują wynagrodzenia. Ponadto materiały zawierające analizy teoretyczne czy praktyczne propozycje dotyczące prowadzenia zajęć z uczniami uzdolnionymi w różnych dziedzinach są jedynie propozycją wzbogacenia warsztatu pracy i nie stanowią uniwersalnego rozwiązania, dlatego nie w każdym przypadku ich stosowanie przyniesie zamierzony efekt. Trudność w samodzielnym poszukiwaniu materiałów wzbogacających edukację uczniów zdolnych są wynikiem powszechnych oczekiwań wobec nauczycieli. Zakłada się bowiem, że nauczyciele będą powielali pewne ustalone wzory, niewiele pozostawia się im miejsca na wdrażanie do nowych pomysłów (por. Meighan, 1991) a nadmierna swoboda w tym zakresie z kolei szokuje i budzi sprzeciw, gdyż ideałem nadal jest szkoła w wymiarze autorytarnym (tamże).

Nauczanie tradycyjne podkreśla dominującą rolę nauczyciela zarówno w przekazywaniu wiedzy, jak i umiejętności. W odniesieniu do uczniów zdolnych i uzdolnionych natomiast ogromne znaczenie ma właśnie samodzielność w procesie uczenia się a rola nauczyciela zmienia się na inspiratora, opiekuna, osobę, która kieruje procesem edukacji. Na pierwszym planie wysuwają się osobowościowe cechy ucznia, jego predyspozycje, zdolności, prowadzące do samodzielnego wypracowania osiągnięć pod wpływem nauczyciela zauważającego i doceniającego to, co w uczniu jest cenne (Pomykało, 1998). Zarówno indywidualność ucznia, jak również jego potrzeby i możliwości, zainteresowania muszą być uwzględniane w postępowaniu nauczyciela (Włodarski, 1998a). K. Kotlarski (1995) stwierdza, że nauczyciele mają problem z indywidualizacją procesu kształcenia i raczej nastawiają się na jeden rodzaj uczniów, albo wspierają uczniów słabych, albo dostosowują lekcje do uczniów przeciętnych, albo skupiają się głównie na uczniach zdolnych. Dlatego też uczniowie nie objęci uwagą nauczyciela odnoszą z lekcji mniejsze korzyści. Ponadto ten typ kształcenia obniża ich motywację, zniechęca do szkoły. Nauczyciele również nie są przygotowywani do tego, co tak ważne w edukacji, czyli „do poszukiwania (…) innowacyjności w działaniu, która głównie polega na stosowaniu oryginalnych, indywidualnych sposobów organizacji warunków procesu kształcenia" (Michalak, 2011, s. 168). Często również odmiennie oceniają swoje kompetencje niż ich uczniowie. I tak wyżej oceniają to, jak prowadzą lekcje, z kolei uczniowie oceniają ten aspekt bardzo krytycznie. Podobnie indywidualne podejście do uczniów, rozwijanie ich predyspozycji i zdolności czy prowadzenie zajęć pozalekcyjnych nauczyciele oceniają wysoko, uczniowie natomiast dużo niżej lub bardzo nisko. Rozbieżności te sugerują nadmierne zaufanie nauczycieli do własnych kompetencji, a być może nawet niezadowolenie i wysokie oczekiwania uczniów zdolnych wobec swoich nauczycieli (Kocór, 2012).

6.3.5. Doskonalenie zawodowe nauczycieli uczniów zdolnych i uzdolnionych

W odniesieniu do kształcenia nauczycieli nie można przyjąć szablonowych, jednolitych rozwiązań, polegających na standaryzacji wymogów na studiach, ponieważ zawód nauczyciela opiera się na zmienności sytuacji czy niestandardowości i stworzenie nieprzekraczalnych wzorców kształcenia zniszczyć może to, co u nauczyciela konieczne w jego pracy, czyli gotowość do poszukiwań, umiejętności kreatywne (Łaszczyk, 2011)

Ponieważ w polskich szkołach nauczyciele nie muszą posiadać specjalnego przygotowania do pracy z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi, dlatego też muszą poszukiwać miejsc, w których mogą pogłębiać swoje kwalifikacje w tym zakresie (Cieślikowska, 2005). W kontekście rozważań o kompetencjach nauczycieli uczniów zdolnych nie może zabraknąć rozważenia konieczności stałego doszkalania. Konieczne jest przyjęcia założenia, że wykształcenie akademickie nie jest wystarczające i nauczyciel powinien stale uzupełniać wiedzę, zarówno ogólną, jak i zawodową (Rusak, 2007). Powinien także wciąż uzupełniać swoją wiedzę przedmiotową, pedagogiczną, psychologiczną, socjologiczną, umiejętności metodyczne, czy zagadnienia społeczne, ekonomiczne oraz dotyczące kultury (Lewandowska-Kidoń, 2009). Istotnym jest również, by nauczyciel pogłębiał wiedzę nie tylko w zakresie metodyki przedmiotu, lecz także dotyczącą rozwijania różnych typów myślenia, rozpoznawania stylów uczenia się, aktywizowania poprzez stosowanie różnorodnych metod, wspierania uzdolnień twórczych, motywowania i oceniania (por. Dyrda, 2009). Na podstawie wyników badań T. Lewanadowskiej-Kidoń (2009) widoczne jest tylko niewielkie zaangażowanie nauczycieli w dokształcanie się. Większość w badanej grupie korzysta tylko z obowiązkowych form doszkolenia zawodowego, najczęściej w zakresie swojej dziedziny lub bezpłatne kursy doskonalenia o charakterze metodycznym. Mniej natomiast korzysta ze szkoleń innego typu, szczególnie płatnych a wsparcie koleżeńskie w szkole najczęściej istnieje jedynie w formie zapisu. Także procedurę awansu zawodowego nauczycieli ocenia się krytycznie, gdyż sprowadza się ona do zbierania zaświadczeń i dokumentowania swoich działań, zamiast do faktycznego doskonalenia własnego warsztatu pracy a w konsekwencji zdobycie najwyższego stopnia awansu upoważnia nauczyciela do zaprzestania doskonalenia się. Niestety istniejące sposoby motywowania nie sprawdzają się i nauczyciel wówczas uznaje, że nie musi się więcej douczać, nie ma również możliwości wpłynięcia na jego postawę (tamże).

Nauczyciele mają także trudność w realizacji zadań, które wymagają współpracy, zwłaszcza dotyczącej planowania działań, ewaluacji czy rozwiązywania problemów i w konsekwencji zadania tego typu realizowane są przez jedną wskazaną osobę (Lewandowska-Kidoń, 2009). Również badania D. Turskiej (2009) potwierdzają te spostrzeżenia, ukazując szkołę jako miejsce o atmosferze rywalizacji w gronie pedagogicznym, jak również hierarchicznych relacjach z dyrekcją szkoły, które nastawione jest na wymierne efekty edukacyjne i w którym dominuje brak możliwości ujawniania problemów z uczniami. Wychowawcy natomiast ze strachu przed posądzeniem o brak kompetencji nie mają zwyczaju dzielenia się swoimi niepokojami czy porażkami wychowawczymi i starają się samodzielnie radzić sobie z trudnymi klasami (por. Lewandowska-Kidoń, 2009).

Te same problemy rozwiązywane w grupie wspierających się osób mogą nabrać innego wymiaru. A przecież praca z uczniami zdolnymi i uzdolnionymi wymaga nie tylko samodzielnego poszukiwania rozwiązań metodycznych w zakresie przedmiotu nauczania, lecz także komunikowania się i współpracy z innymi pedagogami w szkole, gdyż cenna jest rola zespołów nauczycieli zajmujących się opracowaniem i wdrażaniem planu rozpoznawania i wspierania uczniów zdolnych i uzdolnionych w szkole.

6.4. Polskie szkoły, instytucje i ośrodki wspierające w sposób szczególny uczniów uzdolnionych matematycznie.

Oprócz podejmowanych ministerialnych inicjatyw, w Polsce od wielu lat istnieją instytucje i ośrodki, które zajmują się szeroko pojętym wspieraniem uczniów zdolnych i uzdolnionych a także ich środowisk. I mimo, iż badania T. Gizy (2005) pokazały, że na początku XX wieku w ponad 40% polskich szkół nie było w ogóle wsparcia uczniów zdolnych, zaś w pozostałych opieka ograniczała się jedynie do wsparcia merytorycznego, to jednak należy wskazać na chlubne przykłady skutecznych działań szkół, pedagogów czy instytucji, które od wielu lat ucznia zdolnego stawiają w centrum swoich oddziaływań. Swoją uwagę skupię przede wszystkim na tych instytucjach i osobach, które w szczególny sposób dbały, lub dbają o kształcenie, rozwój i wspieranie uczniów uzdolnionych matematycznie w Polsce. Do tych instytucji należą między innymi:

Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wybitnie uzdolnieni intelektualnie uczniowie mogą od 1998 roku kształcić się w Zespole Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, byłym Gimnazjum i Liceum Akademickim (GiLA) w Toruniu, obecnie w Liceum Akademickim. Jest to ogólnokształcącą ponadpodstawowa szkoła z internatem, przeznaczoną dla uczniów zdolnych, którzy rekrutowani są z obszaru całej Polski. Najpierw młodzież przechodzi wieloetapowy proces rekrutacji. Postępowanie kwalifikacyjne obejmuje: wstępną weryfikację kandydatów na podstawie złożonych dokumentów; badania psychologiczne, które obejmują zainteresowania, motywację, osobowość, zdolności intelektualne i twórcze; sprawdzian wiedzy humanistycznej i matematycznej; analizę osiągnięć kandydatów z uwzględnieniem wyników sprawdzianu kończącego naukę w szkole podstawowej. Bez egzaminu przyjmowani są Laureaci konkursów o zasięgu wojewódzkim lub ponadwojewódzkim z języka polskiego, historii, matematyki i biologii. Organem prowadzącym tej szkoły jest Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu. W szkole działa także Rada Programowa, w której zasiadają profesorowie UMK. W szkole tej program kształcenia realizowany jest w ramach specjalistycznych ścieżek o profilu humanistycznym, przyrodniczym i matematycznym a także wykorzystuje się indywidualizację nauczania, uczniowie uczestniczą w zajęciach fakultatywnych z wybranego wcześniej przez siebie przedmiotu a w klasach wyższych biorą

udział w zajęciach seminaryjnych. Realizowany jest model wzbogaconego i przyspieszonego kształcenia. Przed reformą edukacyjną, w dobie działania gimnazjów, w szkole tej już od drugiej klasy gimnazjum uczniowie poszerzali wiedzę zgodnie ze swoimi uzdolnieniami i zainteresowaniami, na dwóch wybranych przedmiotach kształcenia indywidualnego.
Szkoła ta w procesie edukacji wykorzystuje grupowanie uczniów zgodnie z posiadaną wiedzą i zdolnościami, a także tutoring koleżeński, związany z opieką merytoryczną oraz udzielaniem wsparcia emocjonalnego młodszym kolegom przez starszych rocznikowo uczniów. Uczniowie tej szkoły mają także możliwość uczestniczenia w wybranych zajęciach na UMK na prawach studenta a rozbudzaniu zainteresowań uczniów służą również cykle wykładów tematycznych odbywających się na terenie szkoły. Uczniowie mają również możliwość uczestniczenia w badaniach naukowych oraz w warsztatach artystycznych prowadzonych w pracowniach i laboratoriach Uniwersytetu. Realizowane są również programy związane z otwarciem uczniów zdolnych na problemy społeczne i zaangażowaniem się w działalność prospołeczną w postaci wolontariatu oraz uczestnictwa w akcjach humanitarnych. Szkoła ta ciągu 12 lat wychowała ponad 150 laureatów i finalistów olimpiad oraz ponad 800 laureatów i finalistów konkursów przedmiotowych a doświadczenia szkoły upowszechniane są w ramach ogólnopolskich konferencji poświęconych edukacji uczniów zdolnych oraz w publikacjach powstałych na podstawie referatów uczestników. Pracownicy Uniwersytetu natomiast dokształcają także nauczycieli w zakresie pedagogiki zdolności i twórczości (Limont, 2010).

Towarzystwo Szkół Twórczych

Istotną i wartościową inicjatywą dla edukacji uczniów zdolnych jest sieć szkół: Towarzystwa Szkół Twórczych, Towarzystwa Szkół Aktywnych i Stowarzyszenia Nauczycieli Olimpijskich. Jako organizacja pozarządowa został on zainicjowany w 1983 roku przez Danutę Nakoneczną. Towarzystwo to dąży do współpracy w zakresie ciągłego udoskonalania procesów nauczania i wychowania, poprzez m.in. projektowanie i wdrażanie innowacji pedagogicznych. Hasło „maksimum integracji – minimum separacji” oraz że dobra, powszechnie dostępna szkoła jest najlepszym środowiskiem dla rozwoju wybitnych zdolności są podstawowymi założeniami tych szkół. Podobne cele przyświecają założonemu nieco później Stowarzyszeniu Nauczycieli Olimpijskich, zrzeszającemu nauczycieli, którzy wychowali finalistów olimpiad krajowych lub międzynarodowych. Stowarzyszenie to umożliwia współpracę i wzajemne wsparcie nauczycieli uczniów zdolnych, w zaspokajaniu potrzeb edukacyjnych uczniów zdolnych na najwyższym poziomie. Zainicjowany przez Nakoneczną ruch wiązał się z wprowadzeniem innowacji, takich jak klasy autorskie, tworzone przez wychowawców w szkole, przy jednoczesnym czynnym zaangażowaniu uczniów i rodziców. Szkoły te w procesie dydaktyczno-wychowawczym uwzględniają rozluźnienie systemu klasowo-lekcyjnego w celu umożliwienia indywidualizacji nauczania, a także umożliwiają łączenie nauki w szkole podstawowej (dawniej również w gimnazjum), liceum i na uczelni wyższej. Do programów kształcenia zostały włączone również zadania związane z prowadzeniem prac badawczych w laboratoriach uniwersyteckich i w placówkach badawczych oraz uczestnictwo uczniów w obozach naukowych. Ważny element realizowanej koncepcji edukacji stanowi tutoring koleżeński. W szkołach tych opracowano system kształcenia osób zdolnych, oparty na zasadzie indywidualizacji umożliwiającej przyspieszanie i wzbogacanie kształcenia a także wypracowano odpowiednie strategie wychowawcze, jak również system kształcenia nauczycieli, który opiera się na wzajemnym przekazywaniu przez nauczycieli wiedzy i zdobytego doświadczenia w praktyce pedagogicznej oraz strategię kształcenia opartą na współpracy nauczyciela–mistrza z uczniami, którzy pełnią funkcję asystentów. W szkołach tych funkcjonują także Kluby Promocji Talentów oraz Szkoły Zimowe, w których realizowane są wzbogacone programy edukacyjne (Limont, 2012

Krajowy Fundusz na Rzecz Dzieci

Kolejnym ważnym polskim projektem, zainicjowanym przez Ryszarda Rakowskiego, który od 1983 roku oferuje liczne wzbogacone programy i opiekę nad uczniem zdolnym, jest Krajowy Fundusz na Rzecz Dzieci. Jego celem jest upowszechnianie wiedzy o szczególnych potrzebach edukacyjnych dzieci i młodzieży wybitnie uzdolnionej a także o metodach pracy z nimi oraz tworzenie klimatu akceptacji i zrozumienia dla opieki nad uczniami zdolnymi. Jednym z najistotniejszych celów należy także organizowanie warunków instytucjonalnych i materialnych, sprzyjających rozwojowi uzdolnień i zainteresowań uczniów.
Fundusz ten włączony jest w tworzenie spójnego systemu wspomagania rozwoju osób wybitnie zdolnych, który obejmuje cały proces kształcenia, aż do momentu podjęcia samodzielnej pracy zawodowej. Innym bardzo istotnym celem Funduszu jest wspieranie rozwoju wybitnie uzdolnionych uczniów szkół podstawowych i średnich o zdolnościach poznawczych, technicznych, muzycznych, baletowych i plastycznych.
Fundusz ten w ramach pracy na rzecz zdolnych dzieci wykorzystuje różne formy wspierania, zależnie od rodzaju zdolności. Osobom o uzdolnieniach poznawczych i technicznych proponuje się seminaria, specjalistyczne warsztaty i staże badawcze, obozy ogólnorozwojowe i naukowe, udział w obozach, konferencjach i spotkaniach zagranicznych, konsultacje na uczelniach. Z kolei osobom o uzdolnieniach muzycznych proponuje się warsztaty muzyczne, koncerty, dofinansowanie udziału w kursach i konkursach muzycznych, dofinansowanie zakupu instrumentów czy akcesoriów muzycznych. Dla osób uzdolnionych w dziedzinie baletu dofinansowuje się udział w kursach i konkursach zagranicznych. Uczniom uzdolnionym plastycznie z kolei proponuje się udział w warsztatach i plenerach plastycznych, wystawach czy konsultacjach na Akademii Sztuk Pięknych. Każdy stypendysta Funduszu może korzystać z obozów językowych i prenumeraty czasopism. Uczestnicy programu, zarówno obecni, jak i byli pomagają w organizacji warsztatów i obozów oraz prowadzą na nich zajęcia w ramach tutoringu koleżeńskiego, sami także organizują zajęcia i obozy naukowe dla młodszych kolegów, na które zapraszani są maturzyści- byli stypendyści.

Warszawski Staszic

Historia XIV Liceum Ogólnokształcącego w Warszawie sięga roku 1906, w którym to dzięki inicjatywie Stowarzyszenia Techników w Warszawie, (głównie - jego prezesa, inż. Piotra Drzewieckiego, późniejszego prezydenta m. st. Warszawy) utworzona została Szkoła Realna im. Stanisława Staszica. Pierwszym jej dyrektorem i organizatorem był Jan Zydler, absolwent Wydziału Matematycznego Uniwersytetu Warszawskiego, autor znakomitych podręczników do nauki geometrii. Zarządzeniem Ministra Oświaty W 1950 r. szkoła została zlikwidowana a do tego momentu wydała ogółem 1178 świadectw dojrzałości. Wśród jej wychowanków było m.in.: 6 członków Polskiej Akademii Nauk, 34 profesorów wyższych uczelni (wśród nich 7 rektorów i prorektorów), 19 docentów, 17 literatów, krytyków literackich i publicystów oraz wielu działaczy gospodarczych. W kwietniu 1990 r. w wyniku patriotycznej postawy środowiska nauczycielskiego i uczniowskiego XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Klementa Gottwalda nastąpiło Reaktywowanie Liceum im. St. Staszica i zmiana patrona na Stanisława Staszica. Liceum to od wielu lat było zawsze uznawane za jedną z najlepszych szkół średnich w Polsce, jego uczniowie rokrocznie odnosili sukcesy w olimpiadach przedmiotowych, zwłaszcza matematycznych, przez wiele lat także reprezentowali Polskę na olimpiadach międzynarodowych. Absolwenci tej szkoły z wielkim powodzeniem zdawali egzaminy wstępne na wyższe uczelnie. Po ich ukończeniu w znacznej mierze zasilali w kraju akademicką kadrę nauczycielską. Wielu spośród nich emigrowało z kraju, otrzymując posady w ośrodkach akademickich, w przemyśle, informatyce i bankowości. Sukcesy tej szkoły w dużej mierze zależą nie tylko od uzdolnionej młodzieży, która się w niej kształci, ale i od świetnej kadry nauczycielskiej, jak również klimatu panującego w szkole, w której to od początku istnienia dominowała atmosfera nauki i tolerancji. Na jej charakter zdecydowany wpływ miało utworzenie w 1968 roku klas dla "młodzieży utalentowanej matematycznie", z autorskim programem Szkoły, opracowanym przez profesora Uniwersytetu Warszawskiego Stanisława Mazura.

Obecnie w każdej klasie tej szkoły naucza się matematyki przynajmniej na poziomie rozszerzonym. Uczniowie XIV LO w Warszawie każdego roku zdobywają najwyższe miejsca w olimpiadach krajowych i międzynarodowych w szczególności: z matematyki, fizyki, informatyki. Jednym z najistotniejszych czynników, który ma ogromny wpływ na sukcesy uczniów tej szkoły jest znakomita kadra nauczycielska (uczy tu również wielu pracowników naukowych). Szkoła ta przykłada ogromną wagę do znajomości uniwersalnego języka, jakim jest matematyka, w szczególności zaś znajomości zasad logiki. Kadra nauczycielska rozumie bowiem, że znajomość matematyki ma duży wpływ na odnoszone sukcesy uczniów i jest konieczna do zrozumienia nauki, ale również nie można poradzić sobie bez niej także w sztuce, czy nawet teologii. Zdolność logicznego i krytycznego myślenia jest także niezbędna przy zgłębianiu historii i wiedzy o społeczeństwie.

Szkoła stara się przedstawiać treści w ciekawy sposób m.in. poprzez projekty edukacyjne. W każdym roczniku istnieje obecnie 7 klas a dwie z nich, klasy A i B, to klasy z eksperymentalnym nauczaniem matematyki. Do tych klas uczęszczają uczniowie szczególnie uzdolnieni. Kandydaci do tej klasy, piszą specjalny egzamin, punkty za jego wynik są doliczane do punktów uzyskanych w normalnej kwalifikacji i pomagają dopuścić do klas z eksperymentalnym programem tych, do których jest on skierowany. Klasa C z kolei ma rozszerzony zakres nauczania informatyki, matematyki i fizyki. To propozycja skierowana do uczniów, których najbardziej interesuje informatyka. W klasach D i E, w których rozszerzone są programy chemii i biologii (oraz matematyki i fizyki), zwane nieoficjalnie klasami matematyczno-przyrodniczymi, mają kształcić nowe pokolenia lekarzy i biologów, wykorzystujących znajomość matematyki i fizyki do lepszego działania w swoich dziedzinach. Z kolei dwie matematyczno-fizyczne klasy F i G przyjmują uczniów, którzy są skupieni na tych dwóch dziedzinach i w nich chcą się rozwijać.

Oprócz bardzo wysokiego poziomu nauczania szkoła proponuje uczniom szereg zajęć dodatkowych rozwijających ich umiejętności a także zdolności. Zarówno fakultety, jak i zajęcia koła podzielone są na poziomy zaawansowania. Ponadto co roku w ostatnim tygodniu września uczniowie XIV LO im. Stanisława Staszica, którzy chcieliby przygotować się do startu w Olimpiadzie Matematycznej biorą udział w Warsztatach Matematycznych. Podczas tygodniowego wyjazdu wszyscy codziennie uczestniczą w trwających 5 godzin zawodach indywidualnych, które polegają na rozwiązywaniu kilku zadań na różnym poziomie. I tak dla pierwszoklasistów przygotowywane są zadania wymagające pomysłowości, a nie konkretnej wiedzy. Młodsza grupa uczestników boryka się z zadaniami na poziomie dwóch pierwszych etapów OM, grupa starszych natomiast z trudniejszymi problemami, a z kolei uczestnicy z grupy najstarszej dostają do rozwiązania zadania na naprawdę bardzo wysokim poziomie. Po poobiedniej przerwie, którą uczestnicy spędzają na świeżym powietrzu odbywają się dwa bloki wykładów, a w każdym `z nich uczniowie mają do wyboru trzy wykłady o zróżnicowanych poziomach trudności i na różne tematy, dzięki czemu mogą sami wybrać najbardziej im odpowiadające zajęcia. Po kolacji natomiast omawia się zawsze zadania z porannych pięciogodzinnych zawodów. Jednego dnia warsztatów zamiast zawodów indywidualnych odbywają się drużynowe, na których uczestnicy ćwiczą umiejętność pracy w grupie. Ostatniego dnia natomiast odbywają się całodzienne mecze matematyczne. Po dwie na każdym z dwóch poziomów zaawansowania drużyny, przez większość dnia rozwiązują nietypowe, wymagające szerszej wiedzy, bardzo trudne i czasochłonne zadania, po kolacji natomiast przystępują do ekscytującego starcia z drużyną przeciwną. Warsztaty Matematyczne organizowane są z inicjatywy absolwentów Staszica, oni to również stanowią kadrę, która dopiera odpowiednie zadania na zawody, sprawdza rozwiązania uczestników i prowadzi poobiednie wykłady. Uczniowie liceum Staszica, którzy chcą być uczestnikami warsztatów muszą napisać w pierwszej połowie września test kwalifikacyjny. Większość uczestników chwali sobie warsztaty nie tylko pod kątem dobrego przygotowania do Olimpiady Matematycznej, ale też miło spędzonego czasu ze szkolnymi kolegami. Warto nadmienić również, że od 2006 roku przy szkole tej działa Fundacja, która wspiera finansowo wyjątkowo uzdolnionych uczniów pochodzących z niezamożnych rodzin. Szkoła także jest organizatorem konkursów i inicjatyw wspierających naukę (Strona internetowa, Staszic XIV Liceum Ogólnokształcące, 2021).

III L.O. w Gdyni.

Historia III Liceum w Gdyni sięga roku 1950, początkowo mieściło się ono w dzielnicy Gdynia-Grabówek a w 1963 roku siedzibę szkoły przeniesiono do obecnego budynku, patronem natomiast od roku 1989 została Marynarka Wojenna PRL, od tego też roku, jako jedno z kilku w Polsce posiada klasy z wykładowym językiem angielskim, przemianowane później na klasy dwujęzyczne. W 1993 roku jako jedna z dwóch pierwszych w Polsce utworzyła klasę o profilu matury międzynarodowej. Wysoko wykwalifikowana kadra nauczycielska, uzdolnieni uczniowie oraz bogata oferta edukacyjna dostępna w klasach o zróżnicowanych profilach sprawiają, że szkoła od lat utrzymuje się w pierwszej piątce najlepszych szkół w Polsce. Dowodem znakomitych efektów nauczania są bardzo wysokie wyniki w olimpiadach, czy ogólnopolskich i międzynarodowych konkursach przedmiotowych a także wyniki matury polskiej i międzynarodowej, kilkakrotnie najwyższe na świecie. Szkoła ta od lat współpracuje z trójmiejskimi uczelniami w zakresie nauczania następujących przedmiotów: matematyki, fizyki, chemii i biologii a także należy do Stowarzyszenia Szkół Polskiego Komitetu ds. UNESCO oraz Towarzystwa Szkół Twórczych, współpracuje także z Krajowym Funduszem na Rzecz Dzieci.

Gdyńska Trójka do lat plasuje się wysoko także w sportowych rankingach.
Od początku swojego istnienia szkoła ta przyciąga zdolnych uczniów z całego kraju, absolwenci tej szkoły z kolei studiowali i studiują w najlepszych uczelniach w kraju i na świecie, od Uniwersytetu Jagiellońskiego po Sorbonę, Oxford i Cambridge, Harvard czy Yale. Renoma tej szkoły przyciąga wiele znanych postaci świata polityki i kultury z Polski i zagranicy. Szkoła ta wspiera uczniowskie uzdolnienia poprzez stwarzanie możliwości: udziału w zajęciach na uczelniach wyższych z możliwością zaliczania na prawach studenta, konsultacji uczniów z wykładowcami, udział w studenckich kołach naukowych, czy laboratoriach na uczelniach. Opiekę nad uczniami sprawują akademiccy mentorzy. Ponadto pracownicy uczelni prowadzą wykłady w szkole a także grupy olimpijskie.
Szkoła ta także realizuje indywidualny tok nauki oraz indywidualny program nauki, umożliwiające uczniom realizację indywidualnych ścieżek rozwoju. Nauczanie odbywa się według programów autorskich, adresowanych do uczniów lub całych grup uczniów uzdolnionych, w formie programu indywidualnego lub programu nauczania dla grupy. Szkoła oferuje szeroki wachlarz zajęć dodatkowych wspierających uzdolnienia, są to koła zainteresowań a także koła olimpijskie. Szeroko rozbudowany system stypendiów naukowych i socjalnych obejmuje dużą grupę uczniów, praktycznie wszystkimi rodzajami stypendiów, m.in. stypendiami Rady Rodziców szkoły, stypendiami burmistrzów, prezydentów miast, czy stypendiami MEN.
Uczniowie tej szkoły mają także możliwość wzięcia udziału w naukowych obozach wyjazdowych, np. matematyczno- informatycznych, czy też stacjonarnych- fizycznych lub biologicznych. Uczniowie zachęcani są do udziału w konkursach, olimpiadach a także pracach badawczych, m.in. w ramach Turnieju Młodych Fizyków, Europejskiego Konkursu Młodych Naukowców, INTEL, ISET czy innych. Uczniowie mają również możliwość

udziału w seminariach i warsztatach akademickich, realizowanych w szkole lub na uczelni przez pracowników naukowych i nauczycieli ze szkoły. Uczniowie realizują także indywidualne oraz grupowe przedmiotowe lub interdyscyplinarne projekty. Dla uczniów szkoły prowadzone są przez absolwentów szkoły, którzy osiągają sukcesy jako studenci lub pracownicy naukowi zajęcia naukowo-dydaktyczne w ramach wzajemnej współpracy. Również zdolni starsi uczniowie działają na rzecz młodszych zdolnych uczniów prowadząc dla nich wykłady, laboratoria czy konsultacje. Szkoła ta również bardzo chętnie współpracuje z innymi szkołami poprzez np. realizacje wspólnych imprez, projektów naukowych lub popularnonaukowych rozwijających zainteresowania i umiejętności. Słynie ona również z organizacji wielu szkolnych i pozaszkolnych imprez, m.in. Ligii Zadaniowej, Meczy Matematycznych, Meczy Brydżowych i innych. Swoją niesamowitość szkoła ta zawdzięcza łączeniu wielu, pozornie przeciwstawnych nurtów między innymi otwartości no nowe idee, nowe propozycje i nowych ludzi z dyscypliną i efektywnością pracy, liberalizmu z dużymi wymaganiami, a także wspieraniu indywidualizmu i mocnych stron uczniów ze wzmacnianiem umiejętności współpracy w zespołach podczas realizacji projektów zespołowych oraz specjalizowaniu uczniów w danym przedmiocie na coraz wyższym poziomie z dbałością o ich rozwój ogólny
(Strona internetowa, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, 2021).

V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Jest to szkoła średnia o wieloletniej tradycji. Powstała ona na mocy rozporządzenia cesarza Austrii Franciszka Józefa I już w roku 1871 jako *I Cesarsko-Królewska Wyższa Szkoła Realna w Krakowie*. Powstanie szkoły o profilu politechnicznym z polskim językiem wykładowym miało w tym czasie wielkie znaczenie dla istniejącego bez własnego państwa narodu polskiego. Szkoła ta bardzo szybko osiągnęła wysoki poziom nauczania. Osiągnęła to dzięki wybitnym nauczycielom, wśród których byli znani geografowie, filolodzy, historycy, matematycy i malarze - często profesorowie Uniwersytetu Jagiellońskiego czy Akademii Sztuk Pięknych. W 1896 roku jej siedziba została przeniesiona do budynku przy ulicy Studenckiej 12, gdzie znajduje się do dnia dzisiejszego. W roku 1921 Szkoła zmieniła nazwę na VIII Państwowe Gimnazjum Matematyczno- Przyrodnicze im. Augusta Witkowskiego, w którym kontynuowano dobre tradycje, ale priorytet zaznaczył się głównie w dziedzinach matematyki i fizyki. Dowodem świadczącym o bardzo wysokim poziomie nauczania jest fakt, że uczniowie tej Szkoły byli przyjjmowani bez egzaminów wstępnych na Politechnikę Lwowską, posiadającą najwyższe notowania w kraju. Szkoła odrodziła się zaraz po zakończeniu działań wojennych a już w roku 1945 pierwsi uczniowie zdali maturę. W roku 1956 nastąpiła ostatnia zmiana nazwy szkoły, która utrzymała się do dziś - V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego. Od lat 50-tych Szkoła zaczęła się rozwijać coraz prężniej, lepiej i wspanialej, za główną zasługa jej ówczesnego dyrektora, mgr. Stanisława Potoczka.

Szczególny wkład dla jej rozwoju wniósł piastujący funkcję dyrektora w latach 1971-1991 mgr Mieczysław Stefanów, za czasów którego Szkoła wszechstronnie się rozwinęła i stała się jedną z najlepszych i najbardziej znanych w Krakowie. Powstały klasy o profilu humanistycznym, językowe i matematyczne Uniwersytetu Jagiellońskiego a tradycją szkoły stały się znakomite wyniki osiągane corocznie przez młodzież w konkursach i olimpiadach przedmiotowych. Od wielu lat szkoła ta utrzymuje również kontakty ze szkołami średnimi w całej niemal Europie. Jedną z ważnych inicjatyw było założenie w 1995 r. Stowarzyszenia Absolwentów i Przyjaciół V LO im. A. Witkowskiego, które pomaga w podtrzymywaniu więzi emocjonalnych z wychowankami tej szkoły. Ponadto szkoła śledzi losy swoich absolwentów, często odbywają się spotkania np. z okazji rocznicy matury, a ściany zapełniają się tablicami pamiątkowymi poświęconymi pamięci profesorów i zasłużonych wychowanków. Najważniejsza we wszystkich działaniach V LO jest troska o ucznia, o rozwój jego indywidualnych zdolności i zainteresowań, pomoc w rozwijaniu talentów i pasji o czym świadczą wszelkie inicjatywy podejmowane przez grono pedagogiczne m.in. obozy naukowe, wymiana międzynarodowa, projekty naukowe i warsztaty, Tydzień Nauki im. Prof. R. Zapały, itp.). Wspaniałe wyniki, jakie młodzież osiąga w nauce oraz konkursach olimpijskich, skutkują przyznawaniem stypendiów MEN oraz nagród edukacyjnych miasta Krakowa. Szkoła ta tworzy ,,kuźnie" olimpijczyków, stwarza świetne warunki dla rozwijania pasji, nie pozostawiając samemu sobie żadnego z uczniów. Wyrazem pozycji, jaką posiada V LO, jest uznanie we wszelkiego rodzaju rankingach a także nieustanna popularność wyrażająca się dużą ilością kandydatów do klas pierwszych (Strona internetowa, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, 2021).

Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Założycielem i pierwszym dyrektorem tej szkoły w latach 1974-2005 był Aleksander Dobrzycki, o którym wspomnę jeszcze przy okazji opisu wybitnych nauczycieli matematyki, którzy w znaczny sposób zaangażowani byli w kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie. Obecnie szkoła objęta jest patronatem Uniwersytetu Wrocławskiego oraz Uniwersytetu Ekonomicznego. Nauka języka obcych odbywa się w grupach o zróżnicowanym stopniu zaawansowania. Bardzo istotne i godne podkreślenia jest to, że „Czternastce" działa System Wspierania Uzdolnień – uczniowie mają możliwość uczestniczenia w dowolnie wybranym fakultecie olimpijskim, zajęciach pozalekcyjnych oraz skorzystać z Indywidualnego Toku Nauki. Z kolei osoby, które przejdą do II lub III etapu olimpiady przedmiotowej, mają możliwość ubiegania się o przyznanie Indywidualnego Toku Uczenia się (ITU). Umożliwia on zwolnienie z uczestnictwa w zajęciach lekcyjnych na pięć dni, aby w tym czasie przygotowywać się do olimpiady.

W szkole tej obecnie prowadzony jest projekt Akademia Informatyczna, skierowany do uczniów szkół podstawowych- w siedzibie tej szkoły przy współpracy studentów i pracowników Instytutu Informatycznego Uniwersytetu Wrocławskiego odbywają się trzy razy w tygodniu 1,5 h zajęcia z informatyki, mające na celu przygotowanie do Olimpiady Informatycznej Juniorów. Kandydaci na podstawie wyników testów predyspozycji przydzielani są do odpowiednich grup. Dodatkowo zajęcia wspomagane są przez następujące działania: obozy informatyczne, warsztaty przed Olimpiadą, czy sobotnie sparingi. Przy szkole działa również Fundacja, której celem jest wspomaganie nauki i dydaktyki, wspieranie uzdolnień uczniów i rozwoju zawodowego nauczycieli, wyrównywanie szans rozwoju i wychowanie społeczeństwa obywatelskiego opartego na wiedzy.
W ciągu jej dziewięciu lat działalności, Fundacja realizowała swoje cele poprzez wspieranie stypendiami uczniów szczególnie uzdolnionych oraz dotkniętych skutkami zdarzeń losowych. Finansowała także organizację zajęć dodatkowych dla uczniów gimnazjum i liceum Zespołu Szkół nr 14 we Wrocławiu, zakup pomocy dydaktycznych dla szkoły i organizację szkoleń. Kontynuując swoją działalność zmierza ona do umacniania postaw i rozwoju aktywności ukierunkowanych na współdziałanie uczniów, nauczycieli, pracowników szkoły a także zachęca do współpracy z uczelniami, instytucjami i organizacjami z obszaru nauki i edukacji. Inspiruje również do wykorzystywania w procesie edukacyjnym nowoczesnych technologii i innowacyjnych metod nauczania.

W szkole tej od wielu lat realizowany jest projekt Uzdolnieni Matematycznie, pierwotnie skierowany był do uczniów klas piątych i szóstych, po likwidacji gimnazjów adresowany jest do uczniów klas siódmych i ósmych szkół podstawowych. Projekt ten stwarza doskonałą szansę, by uczniowie mogli sprawdzić a następnie rozwijać swoje zdolności matematyczne a później być może kontynuować naukę w tejże szkole. Organizator zajęć kwalifikuje

uczestników na podstawie wyników testu predyspozycji. W szkole tej odbywa się również wiele zajęć pozalekcyjnych, rozwijających zainteresowania i zdolności młodzieży, m.in. koło olimpijskie z matematyki. Szkoła od wielu lat organizuje również obozy naukowe. Bardzo istotnym dla wspierania zainteresowań i uzdolnień uczniów, charakterystycznym dla tej szkoły jest system ITUs, czyli Indywidualny Tok Uczenia Się. Jest on inną formą realizacji obowiązkowych zajęć edukacyjnych, umożliwiającą rzetelne przygotowanie się uczniów do udziału w konkursach i olimpiadach przedmiotowych. Przyznawany jest najpóźniej na dwa dni przed pierwszym dniem nieobecności a liczba dni, które uczeń może wykorzystać na przygotowanie do olimpiady pod kierunkiem promotora, zależy od etapu, do którego się przygotowuje. Dzięki doskonale działającemu systemowi wspierania uzdolnień, opartemu na współpracy zainteresowanych zdobywaniem wiedzy i osiąganiem kolejnych sukcesów uczniów z nauczycielami- pasjonatami oraz pracownikami naukowymi i studentami wrocławskich uczelni, którymi często są absolwenci tejże szkoły a także dzięki ogromnej roli koordynatorów olimpiad, którzy prowadzą zajęcia olimpijskie a także czuwają nad organizacja poszczególnych etapów konkursów , uczniowie tej szkoły osiągają doskonałe wyniki na maturze a także zostają w laureatami i finalistami konkursów przedmiotowych. Warto podkreślić, że liczba finalistów czy laureatów jest każdego roku bardzo duża.
Szkoła w 2019 roku uzyskała tytuł Złotej Szkoły (Strona internetowa, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, 2021).

Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie

Wśród grona pedagogicznego Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie jest obecnie wielu nauczycieli akademickich, będących pracownikami Uniwersytetu Szczecińskiego. W szkole tej uczy także dwóch nauczycieli, którzy posiadają honorowy tytuł Profesora Oświaty. Szkoła posiada bursę, stwarzając tym samym możliwość kształcenia się w niej młodzieży z całego kraju. Szkoła ta współpracuje również z uczelniami. I tak w ramach sprawowanego przez Uniwersytet Szczeciński patronatu zajęcia z niektórych przedmiotów prowadzą nauczyciele i lektorzy akademiccy, pracownicy naukowi US sprawują merytoryczną opiekę nad kołami przedmiotowymi a szczególnie uzdolnieni uczniowie uczestniczą w wykładach i ćwiczeniach na wybranych kierunkach studiów. Uczniowie mają także możliwość korzystania z bibliotek i czytelni uniwersyteckich. Od 2011 roku patronat nad przedmiotami ścisłymi w Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie sprawuje również Politechnika Warszawska. Dzięki temu uczniowie tej szkoły biorą udział w obozach naukowych, na których zajęcia odbywają się w laboratoriach politechniki a także uczestniczą w wykładach odbywających się w ramach Dni Politechniki Warszawskiej.

XIII Liceum Ogólnokształcące, będące częścią Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 7 jest od 1991 roku członkiem Towarzystwa Szkół Twórczych a do tego elitarnego Towarzystwa należy 30, najbardziej renomowanych liceów z całego kraju. Celem Towarzystwa jest współdziałanie szkół w zakresie doskonalenia procesu nauczania i wychowania poprzez projektowanie, wdrażanie i upowszechnianie innowacji pedagogicznych.
Szkoła ta prowadzi cieszące się od lat wielkim zainteresowaniem Międzyszkolne Koła Matematyczne, od 1991 roku do czasu reformy klasy gimnazjalne z rozszerzonym programem matematyki, obecnie eksperymentalne klasy siódme i ósme. Szkoła ta posiada również bursę, dając w ten sposób możliwość kształcenia się w niej zainteresowanej młodzieży z całego kraju http://13lo.szczecin.pl/info/ogolne).
Szkoła ta od wielu lat utrzymuje się na czołowych miejscach w rankingach publicznych szkół średnich w całym kraju i mimo, tego, że jest to jedna z młodszych szkół tego typu w rejonie,

to dzięki licznym sukcesom zdołała już na stałe wpisać się do historii szczecińskiej i zachodniopomorskiej oświaty.

XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie to szkoła odpowiadającą na potrzeby tych absolwentów szkół podstawowych, którzy wyróżniają się pracowitością, uczciwością, ambicją i wytrwałością w dążeniu do realizacji postawionych sobie celów. Skuteczność pracy z taką młodzieżą potwierdzają liczne osiągnięcia uczniów tej szkoły m.in. osiągnięte tytuły laureatów oraz finalistów olimpiad i konkursów przedmiotowych, a także świetne wyniki egzaminu maturalnego i rekrutacji na wyższe uczelnie, w tym przede wszystkim, na najbardziej renomowane w kraju i za granicą. Ponadto szkoła proponuje uczniom wiele zajęć rozwijających zdolności i zainteresowania uczniowskie, jest również organizatorem wyjazdowych obozów naukowych.

Wartym szczególnej uwagi jest fakt, że Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie daje możliwość rozwijania uzdolnień matematycznych młodszym uczniom szkoły podstawowej a takie praktyki są obecnie, po reformie szkolnictwa bardzo rzadkie. Bowiem albo nie zauważa się potrzeby kształcenia kierunkowego znacznie młodszych uczniów, niż tych kształcących się w szkole średniej, nie stwarzając tym samym optymalnych warunków rozwoju uzdolnień matematycznych czy zainteresowań i pasji, albo też szkoły podstawowe nie posiadają dostatecznie przygotowanych nauczycieli na realizację takich innowacji. Jak stwierdza E. Gruszczyk-Kolczyńska (2018): „połowa dzieci polskich – przed rozpoczęciem szkolnej edukacji - wykazuje się uzdolnieniami do nauki matematyki, a co czwarte wysokim stopniem zadatków takich uzdolnień. Po kilku miesiącach nauki w szkole większość tych dzieci przestaje manifestować swoje znakomite możliwości umysłowe”. I tak od roku szkolnego 2019/2020 w Szkole Podstawowej nr 6, będącej częścią Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie, utworzony został jeden oddział klasy pierwszej, w którym realizowana jest innowacja pedagogiczna dotycząca modyfikacji i rozszerzenia treści programu nauczania matematyki. Nauka w tej klasie obejmie trzyletni cykl edukacji wczesnoszkolnej przewidziany w szkole podstawowej i określony podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej. Jej głównym celem jest rozwijanie naturalnych zdolności i zainteresowań matematycznych dzieci sześcio i siedmioletnich poprzez odpowiedni dobór metod jakimi są zadania logiczne i gry. Ma to pozwolić na kształtowanie myślenia przyczynowo- skutkowego oraz konstruktywnego wyciągania wniosków.
Wprowadzona innowacja dotyczy rozwoju dwóch głównych obszarów. Pierwszym z nich jest obszar wiedzy i umiejętności. W jego zakresie mają być w szczególności: rozwijane umiejętności logicznego myślenia i wnioskowania rozbudzane zainteresowania matematyczne, rozwijane umiejętności dostrzegania prawidłowości matematycznych, związków przyczynowo- skutkowych. Bardzo istotnym dla kształtowania tego obszaru jest również rozwijane wyobraźni geometrycznej i przestrzennej, rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem, rozwijanie umiejętności wyszukiwania i przetwarzania informacji przedstawionych w postaci wzorów, wykresów, diagramów, tabel, jak również rozwijanie umiejętności myślenia krytycznego i twórczego; rozwiązywania zadań wieloma sposobami, w tym poszukiwania rozwiązań nieszablonowych i umiejętności analizowania tych rozwiązań. Ponadto ma ona kształcić umiejętności uogólniania i analizowania przypadków szczególnych. Drugi obszar z kolei dotyczy kształtowania postaw i zachowań. I tak innowacja ta ma na celu rozwijanie cech charakteru takich jak dokładność, wytrwałość, wiarę we własne możliwości, ma również kształtować pozytywne nastawienia do podejmowanego wysiłku intelektualnego oraz umiejętności pracy indywidualnej i zespołowej. Ma także kształtować odporność emocjonalną w sytuacjach trudnych lub wymagających wysiłku umysłowego oraz kształtować umiejętności świadomego stosowania schematów i algorytmów. Od roku szkolnego 2019/2020 szkoła uruchomiła również funkcjonowanie eksperymentalnych klas siódmych: klas matematycznych i przyrodniczej. O przyjęciu kandydatów do klas matematycznych decyduje suma punktów otrzymana za oceny po

pierwszym semestrze klasy szóstej z następujących przedmiotów: języka polskiego, matematyki, historii i wiedzy o społeczeństwie oraz przyrody a także ocena z zachowania. Ponadto dodatkowo punktowany podczas rekrutacji jest posiadany przez kandydatów uzyskany tytuł finalisty w niektórych z konkursów matematycznych, których lista zostaje podana przez szkołę. Największy wpływ w przypadku kandydatów rekrutowanych na zasadzie naliczania punktów ma osiągnięty wynik na sprawdzianie uzdolnień kierunkowych z matematyki. I tak łącznie według ustalonych przez szkołę kryteriów kandydat może otrzymać 160 punktów, z czego aż 100 punktów za maksymalny wynik na sprawdzianie uzdolnień kierunkowych. Z pominięciem postępowania rekrutacyjnego przyjmowani zostają laureaci wojewódzkiego konkursu przedmiotowego dla uczniów szkół podstawowych z matematyki lub fizyki a także laureaci organizowanego przez tą szkołę konkursu matematycznego dla uczniów szkół podstawowych. Eksperymentalne klasy siódme i ósme Szkoły Podstawowej nr 6 w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Szczecinie funkcjonują na podstawie zgody Ministra Edukacji Narodowej uzyskanej w maju 2017 roku w ramach eksperymentu pedagogicznego „Być jak Kopernik- kształcenie przez odkrywanie". Polega on na wprowadzeniu w klasach VII i VIII nowatorskich rozwiązań organizacyjnych, programowych i metodycznych w zakresie nauczania matematyki, fizyki, biologii i chemii a także na wprowadzeniu programu wychowawczego dla klas objętych eksperymentem.
Program ten oparty jest m.in. na działaniach prowadzących do rozwijania postaw prospołecznych i obywatelskich u uczniów (http://www.kuratorium.szczecin.pl/szkoly-i-organy-prowadzace/eksperymenty-pedagogiczne/eksperymenty-pedagogiczne-realizowane-w-szkolach-wojewodztwa-zachodniopomorskiego/). Opiekę naukową nad klasami matematycznymi sprawuje Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych oraz Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej. Według ramowego rozkładu zajęć w klasach matematycznych uczniowie mają pięć godzin matematyki tygodniowo oraz trzy godziny fizyki tygodniowo zarówno w klasie siódmej i ósmej (Strona internetowa, XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie, 2021).

Szkoła Podstawowa nr 221 z Oddziałami Integracyjnymi im. Barbary Bronisławy Czarnowskiej

W szkole tej od września 2017 r. funkcjonują autorskie klasy matematyczne, które realizują rozszerzony program nauczania matematyki. Autorem programu jest dr hab. Wojciech Guzicki, matematyk, wykładowca Uniwersytetu Warszawskiego oraz nauczyciel matematyki w kilku szkołach. Obecnie, do klas siódmych i ósmej – matematycznych, uczęszczają utalentowani uczniowie, laureaci i finaliści konkursów kuratoryjnych z terenu Warszawy a także jej okolic. Nad przedsięwzięciem Patronat naukowy sprawuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Uczniowie tych klas osiągnęli już wiele sukcesów: w Matematycznym Konkursie Przedmiotowym, Informatycznym Konkursie Przedmiotowym, Olimpiadzie Matematycznej Juniorów i innych.

Jak czytamy we wstępie do książki autorstwa dra hab. Guzickiego (2013):" Uczę matematyki od ponad 40 lat, przez cały ten czas na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Przez kilka lat zajmowałem się pracą z nauczycielami w ODN w Warszawie, od ponad 20 lat uczę również w szkołach. Najpierw uczyłem w liceach: Pierwszym Społecznym Liceum Ogólnokształcącym (tzw. „Bednarska") w Warszawie, później w Liceum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie. W obu liceach pracowałem z uczniami zdolnymi, uczyłem według własnego programu rozszerzonego i przygotowywałem uczniów do Olimpiady Matematycznej (ok. 20 moich uczniów zostało finalistami Olimpiady). Od 10 lat uczę w gimnazjach: przez cały ten czas w Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie i aktualnie, trzeci rok, w Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie - pisze dr Guzicki "Rozszerzony program matematyki w gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki" (2013). Uczniowie dra Guzickiego od wielu lat odnoszą sukcesy w Olimpiadach Matematycznych Gimnazjalistów.

- „Te sukcesy przekonują mnie o skuteczności programu oraz o skuteczności moich dziesięcioletnich doświadczeń z pracy z uczniami zdolnymi. Tymi doświadczeniami chcę się teraz podzielić z innymi nauczycielami, z wiarą, że będą oni mogli moje doświadczenia przenieść do swoich szkół, i z wiarą, że ich uczniowie odniosą podobne sukcesy - pisze dalej dr Guzicki. W ostatnich pięciu olimpiadach, 89 finalistów to wychowankowie dr Guzickiego. Jest to najlepszy wynik w Polsce. Program skierowany jest dla młodzieży uzdolnionej matematycznie, ale nie tylko, jak przekonywał dr hab. Wojciech Guzicki na jednym ze spotkań informacyjnych odnośnie tworzonych oddziałów klas matematycznych- „Matematyka przede wszystkim uczy nas logicznego i rozsądnego myślenia a to, przyda się w wielu dziedzinach życia. Również tych, które z pozoru z matematyką nie są związane.” (Informacja Prasowa „Wola stawia na matematykę”, 2017).

Szkoła Podstawowa nr 112 Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II

Szkoła Podstawowa nr 112 Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II to szkoła, w której również realizowany jest autorski program nauczania matematyki opracowany przez dra hab. Wojciecha Guzickiego. Przedsięwzięcie to objęte zostało patronatem przez Wydział Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego a jego uzupełnieniem są organizowane obozy matematyczne i realizowane projekty naukowe, np. „Matematyka w gotyku”. Nauka w tych klasach zakłada: 5 godzin matematyki tygodniowo, zrealizowanie projektu matematyczno-kulturowego i dla chętnych udział w warsztatach matematycznych. Niezależnie od wybranego rozszerzenia wszystkie pozostałe przedmioty realizowane są w pełnym wymiarze godzin, przewidzianym ramowym planem nauczania. Ponadto w szkole tej uczniowie mają możliwość realizować określone przedmioty indywidualnie, w ramach nauczania autonomicznego. Dzięki tym działaniom szkoła ta jest ósmą szkołą w Polsce pod względem liczby finalistów Ogólnopolskiej Olimpiady Matematycznej Juniorów. Od roku szkolnego 2017/18 szkoła realizuje również program matematyczny od klasy pierwszej szkoły podstawowej. Koncepcja dotycząca nauczania matematyki w klasach 1-3 została opracowana przez zespół nauczycieli matematyki kierowany przez prof. Wojciecha Guzickiego. Dzieci diagnozowane są pod kątem rozwoju myślenia operacyjnego a następnie dzielone na grupy a w każdej klasie nauczania początkowego matematyki uczy dwóch nauczycieli. Uczniowie ubiegający się o przyjęcie do klas matematycznych muszą napisać egzamin wstępny z matematyki a po jego sprawdzeniu kandydaci spełniający kryteria zostają zaproszeni na rozmowy wraz z rodzicami. Wszyscy laureaci konkursów kuratoryjnych dla uczniów szkół podstawowych z matematyki i informatyki zostają przyjęci bez egzaminu, z kolei laureaci innych konkursów kuratoryjnych przyjmowani są bez egzaminu w miarę wolnych miejsc w pozostałych klasach. (Strona internetowa, Szkoła Podstawowa nr 221 z Oddziałami Integracyjnymi im. Barbary Bronisławy Czarnowskiej, 2021). Szkoła W całej Polsce klasy matematyczne na poziomie szkół podstawowych funkcjonują obecnie tylko w dwóch powyżej opisanych szkołach, ponadto obie dzięki zaangażowaniu tej samej Osoby profesora Wojciecha Guzickiego.

PODSUMOWANIE:

Rozwój oraz kształcenie uczniów zdolnych wymaga działań różnorodnych, nieszablonowych, dostosowanych do indywidualnych predyspozycji. Istnieje wiele opracowań i programów kompleksowego wsparcia uczniów zdolnych, wiele możliwości organizacyjnych dających szansę stworzenia odpowiednich warunków rozwoju potencjału uczniowskiego a także ośrodków wsparcia dla takich osób. Należy jednak pamiętać, że żadne rozwiązanie systemowe nie poprawi jakości kształcenia uczniów zdolnych bez dobrej woli i chęci ze strony nauczyciela a efekty tego kształcenia zawsze w dużej mierze zależeć będą od zaangażowania i chęci ze strony nauczycieli. Jedyną gwarancją sukcesu szkół w kwestii kształcenia uczniów zdolnych są więc uczący w nich nauczyciele z odpowiednią wiedzą, entuzjazmem i cechami osobowości.

7. Wybitni nauczyciele matematyki

7.1. Cechy dobrego nauczyciela.

Osobowość pedagoga zajmuje wiele miejsca w badaniach i pracach pedagogicznych, można przeczytać o niej w pismach wielu wybitnych przedstawicieli pedagogiki. Mimo to, stale powraca jednak pytanie: Jakie wartości i cechy gwarantują nauczycielowi skuteczność i efektywność w jego aktywności dydaktyczno-wychowawczej wśród dzieci, młodzieży i dorosłych. Warto więc przytoczyć kilka stanowisk najwybitniejszych przedstawicieli pedagogiki, którego dokonały Agnieszka Lasota i Emilia Pisarzowska (2016) w pracy pt. „Pożądane cechy osobowości nauczyciela- pedagoga w ujęciu klasycznych i współczesnych koncepcji". Polski pedagog, psycholog, twórca psychologii wychowawczej, Jan Władysław Dawid, pisząc o idealnym pedagogu i jego pożądanych cechach, zwracał uwagę na przygotowanie merytoryczne do zawodu a także podkreślał znaczenie wiedzy o rozwoju dziecka, która według niego konieczna jest dla odpowiedniego poznania wychowanka. Podkreślał wyraźnie, że osoba, która pracuje z dzieckiem musi zacząć od poznania obiektu swojego zainteresowania, jego mocnych stron, słabości, pasji (Dawid, 1946).
Według (Jabłonko, 2014) praca z dzieckiem powinna być oparta na partnerstwie, dialogu oraz życzliwości, zaufaniu i szacunku.

Wśród niezbędnych cech pedagoga oprócz wiedzy o rozwoju dziecka oraz chęci poznania go, szacunku i zaufania J. W. Dawid wymienia także chęć samodoskonalenia się, odpowiedzialność, obowiązkowość oraz odwagę moralną (Jabłonko, 2014).
Nauczyciel, pedagog oraz teoretyk wychowania, Zygmunt Mysłakowski pisząc o osobowości pedagoga, całość cech, jakie powinna posiadać osoba pracująca z dziećmi, ujął w ramy pojęcia „talent pedagogiczny" a termin ten wyjaśnia słowami: „Talent jest wrodzoną dyspozycją psycho-fizjologiczną, dzięki której osobnik pewne szczególne typy działalności lub produkcji uprawiać może w sposób bardziej wydajny niż w wypadku zajmowania się czymś innym (za: Suchodolski, 1982, s. 711)."
W swojej wypowiedzi zaznaczył, że praca z dzieckiem powinna być tym, co pedagog potrafi robić najlepiej a podjęcie pracy pedagoga nigdy nie może być dziełem przypadku.
Pisząc z kolei o talencie pedagogicznym, wymienia następujące cechy osobowości: empatia, opiekuńczość, otwartość na innych czy umiejętność nawiązywania kontaktu. Według Mysłakowskiego talent nie polega na posiadaniu określonych umiejętności czy kompetencji oraz wiedzy.

Utalentowany pedagog powinien mieć za to osobowość, która umożliwi mu dobrą, efektywną pracę., Z. Mysłakowski określając ów talent wyróżnił cechy osobowości podobne do tych, które wymieniają inni badacze w swoich pracach: otwartość, opiekuńczość czy empatia. Użyte przez niego słowo „talent" może być rozumiane w jeszcze innym kontekście. Ponieważ talent oznacza zazwyczaj cechy wrodzone, to mówiąc o talencie pedagogicznym, zakłada się, że albo ktoś od urodzenia wyposażony jest w cechy potrzebne do wykonywania tego zawodu, albo nie. Pedagog (również lekarz i psycholog) Stefan Szuman uważa, że idealny pedagog faktycznie powinien wyróżniać się, jak pisali wspomniani pedagodzy, określonymi cechami osobowości, które zapewne w dużej mierze są wrodzone (Szuman, 1947), ale poza tym jego zdaniem, pedagog w codziennej pracy, podczas kształcenia się i zdobywania kolejnych doświadczeń naukowych oraz zawodowych, podlega nieustannie procesowi doskonalenia się (za: Okoń (wybór i oprac.), 1959). Jest to znacznie bliższy rzeczywistości pogląd, gdyż pedagog, jak każdy inny człowiek, popełnia błędy w pracy, może ona go także znudzić czy zniechęcić. Według S. Szumana bogactwo zalet pedagoga nie jest wrodzone. Jest natomiast efektem pracy, autorefleksji i chęci doskonalenia się. Może stanowić również wskazówkę dla młodych pedagogów, żeby dali sobie czas na osiągnięcie tego ideału oraz czerpali od tych, którzy osiągnęli już więcej i mogą się podzielić doświadczeniem.

O tym jakie cechy powinien posiadać idealny nauczyciel pisał również Janusz Korczak, polsko-żydowski lekarz i pedagog, teoretyk wychowania, który wniósł do teorii pedagogiki ogromny wkład przede wszystkim swoim życiorysem i postawą, jak również pracami autorskimi. Własnym postępowaniem pokazał, jakim człowiekiem należy być w kontakcie z dziećmi. Zwracał uwagę przede wszystkim na stosunek do wychowanków, będących dla pedagoga najwyższą wartością (Niewęgłowski, 2003). Najbardziej znany jest z nawoływania do respektowania praw dziecka, przede wszystkim prawa dziecka do szacunku i samostanowienia. Zdaniem J. Korczaka dzieciństwo bowiem ma „wartość absolutną". Dlatego dziecku należy się szacunek, troska oraz umiejętne, dyskretne kierowanie jego rozwojem (Newerly, 1971, s. 342). Szacunek do dziecka polega na: traktowaniu go jako człowieka, czyli uznawaniu jego prawa do samodzielnego myślenia, umożliwianiu samodzielnego postrzegania świata a także dokonywania suwerennych wyborów. Wielokrotnie również podkreślał jak ważne jest zaufanie do dziecka, będące podstawą owocnych relacji. Jak podkreślają również A. Lasota i E. Pisarzowska (2016) naczelną zasadą, która powinna obowiązywać pedagoga w rozumieniu J. Korczaka, jest szacunek, zainteresowanie dzieckiem oraz chęć prawdziwego poznania. Jest to postulat, który stanowi sedno przesłania pedagoga. Bardzo istotne jest także poszanowanie własności dziecka, jego tajemnic, prawa do błędu i przeżywania różnych emocji (Niewęgłowski, 2003). Mimo, że J. Korczak nie pisał wprost o tym, jakie cechy osobowości powinien mieć pedagog, być może dlatego, że głownie skupił się na dziecku, to jednak jego rozważania są bardzo cenne dla każdego pedagoga. Swoim postępowaniem z podopiecznymi pokazał, że postawa dorosłego jest bardzo istotnym elementem w relacji pedagoga z dzieckiem.

A. Lasota i E. Pisarzowska (2016) ukazują również postać wybitnego psychologa Ziemowita Włodarskiego, według którego głównym zadaniem pedagoga jest gotowość pomocy dziecku w realizowaniu jego możliwości rozwojowych przez stwarzanie sprzyjających okoliczności (Włodarski, 1992) a skuteczność oddziaływań pedagogicznych zależy od rzeczywistego zaangażowania nauczyciela. Kolejną cechą osobowości dobrego pedagoga, którą ukazuje Z. Włodarski jest poczucie odpowiedzialności za innych. Wskazuje on, że nie wystarcza tylko zaspokoić potrzeby bezpieczeństwa dzieci, od pedagoga oczekuje się czegoś więcej:
poczucia odpowiedzialności, szczególnie ważne w pracy pedagoga (Włodarski, 1992).
Do innych cech pożądanych u pedagoga zalicza: zdolność empatii, umiejętność wczuwania się w sytuację dziecka, zdolność do współbrzmienia z innymi, otwartość na drugiego człowieka, jego potrzeby, prawa oraz uznanie i szanowanie jego podmiotowości. A.Lasota i E.Pisarzowska pokreślają także wagę koncepcji Marii Grzegorzewskiej (1938, 1946), która stała się źródłem późniejszych teorii i rozważań . Autorka ta bowiem w *Listach do młodego nauczyciela* (1946) stara się scharakteryzować pożądaną i niepożądaną osobowość nauczyciela. Zwraca uwagę na podmiotowe traktowanie wychowanków, na „złoże życzliwości", które powinno cechować nauczyciela, na troskę i wsparcie, jakimi powinien otaczać dzieci pedagog a także kładzie ona nacisk na relacje pomiędzy pedagogiem a uczniem. I tak wyróżnia dwa ich rodzaje: jedne o charakterze pozytywnym — wyzwalające, które zbliżają nauczyciela do ucznia, pozwalają na obustronny rozwój, i drugie — negatywne, hamujące i prowadzące do zerwania relacji, oddalenia i zamknięcia. Atmosfera życzliwości, serdeczności, miłości, dobroci, czyli atmosfera budząca poczucie bezpieczeństwa i zaufanie sprzyja tworzeniu relacji wyzwalających. Relacje hamujące z kolei oparte są na środkach przymusu, groźbach a także stosowaniu

kar, co w konsekwencji powoduje zmniejszenie zainteresowania uczniów nauką. Zmniejsza także ich chęć do pracy, wywołuje poczucie braku bezpieczeństwa i zachowania bierne. Tylko dobroć i życzliwy stosunek nauczyciela do uczniów stanowi podstawę efektywnej pracy pedagoga. Badaczka pisze: „Im jest lepszym człowiekiem, lepiej do pracy przygotowanym, im ma większą dla drugich życzliwość, głębszą o nich troskę i poczucie odpowiedzialności za swoją pracę, tym głębszy zostawi ślad w duszach dzieci „(Grzegorzewska, 1946, List 1). Wypowiedziane z kolei słowa: „Żeby zdziałać coś wartościowego, trzeba być kimś wewnętrznie, trzeba mieć swoje własne życie, swój własny świat, trzeba mieć mocny fundament przekonań [...]. Bo przecież jeżeli ma się dawać, to trzeba mieć coś do dawania — ażeby dać, trzeba dużo mieć „(Grzegorzewska, 1946, List 11), podkreślają konieczność świadomego rozwoju osobowości pedagoga a także zachęcają do kształtowania i poznawania siebie oraz świata.

W swojej pracy A.Lasota i E.Pisarzowska (2016) wspominają również o teorii Czesława Banacha (1995) i Roberta Kwaśnicy (2004). I tak podkreślają, że zdaniem pierwszego autora dobry nauczyciel musi posiadać przede wszystkim wysokie kompetencje merytoryczne, dydaktyczne oraz psychologiczno-pedagogiczne. Jako kolejną grupę kompetencji pożądanych z kolei wymienia on: kompetencje: komunikacyjne, społeczne oraz moralne. Podkreśla również, że nie należy umniejszać roli kompetencji twórczych, informatycznych czy technicznych. Drugi z wyżej wymienionych badaczy, C. Banach wyróżnia następujące cechy osobowości ukierunkowane na dobro dziecka: otwartość, serdeczność, empatię, poszanowanie podmiotowości dziecka, sprawiedliwość, dialog i wsparcie. Uważa również, że drugi kierunek rozwoju osobowości pedagoga nastawiony powinien być na samorozwój, doskonalenie własnego warsztatu pracy, wysoką motywację wewnętrzną i satysfakcję z pracy. Zdaniem R. Kwaśnicy (2004) doświadczenie kreowane jest na podstawie dwóch sfer znaczeń: pierwszą z nich jest wiedza praktyczno-moralna, a drugą — wiedza techniczna, dlatego też wyróżnia on dwie grupy kompetencji, z których pierwsza odgrywa ważniejszą rolę w rozwoju osobowym nauczyciela niż druga. Do praktyczno- moralnych zalicza zdolności interpretacyjne, kompetencje moralne i komunikacyjne, do drugiej grupy z kolei zalicza kompetencje normatywne, metodyczne oraz realizacyjne. A.Lasota i E.Pisarzowska poświęciły swoją uwagę najnowszym poglądom dotyczącym koncepcji osobowości nauczyciela. I tak za przykład podają rozwojową koncepcję osobowości i kompetencji nauczyciela Macieja Wilskiego (2011), który to wyróżnia trzy typy osobowości nauczyciela: osobowość reaktywną, dryfującą oraz rozwojową. W teorii tej istotne jest to, że kompetencje uzyskiwane przez nauczycieli są konsekwencją rozwoju ich osobowości, dlatego powinny być traktowane drugorzędnie w stosunku do przebiegu kształtowania się osobowości. Pierwszy typ osobowości, który wymienia, to osobowość reaktywna, charakterystyczna dla osób, które ukończyły studia pedagogiczne i zostały nauczycielami z przypadku a także takich, które nie mają pomysłu na życie i z obawy przed bezrobociem, myśląc, że w edukacji zawsze znajdą pracę, podejmują i często kończą studia pedagogiczne. Zdarza się nawet, że zaczynają pracować w zawodzie, choć ten z pewnością nie jest ich wymarzoną profesją. Tacy ludzie są zwykle mało zaangażowani zarówno w rozwój własny, jak i swoich podopiecznych a brak motywacji, wiedzy i małe umiejętności powodują, że osoby te szybko rezygnują z pracy nauczyciela. Ponadto zauważa również, że takie osoby nastawione są tylko na wypełnianie obowiązków, przestrzeganie regulaminów i zasad. Badaczki wspominają również o refleksji na temat rzeczywistości szkolnej w warunkach realizacji podstawy programowej Ewy Ir (2013), która to stwierdza, że takim nauczycielom bardzo łatwo można odgórnie narzucić sposób i styl nauczania. Podkreśla także, że w ich zachowaniu nie dostrzeżemy spontaniczności, radości z nauczania, rozwijania zainteresowań czy motywacji do pracy, jak również nie dostrzeżemy spełniania pragnień osobistych lub uczniów.

Kolejna przytoczona przez A.Lasotę i E .Pisarzowską obserwacja Kazimierza Obuchowskiego (1985) ukazuje, że w szkołach, wbrew pozorom ten typ osobowości nauczyciela jest często spotykany, a nawet pozytywnie odbierany przez przełożonych. Zdarzają się bowiem dyrektorzy szkół, którzy oczekują od pracowników właśnie posłusznego wypełniania obowiązków, a także bierności oraz niewychodzenia poza to, co wykracza poza zwykłe obowiązki. Okazuje się również, że nauczyciel, który chce i potrafi więcej a także prezentuje swoje umiejętności i możliwości, jest odbierany jako zagrożenie przez przełożonego i współpracowników. W kolejnym przytoczonym przez autorki rozważaniu Moniki Janiszewskiej (2013), będącej nauczycielem, zwrócona została uwaga, że taka postawa zabija zarówno w samym nauczycielu, jak i w uczniach chęć bycia twórczym, chęć poznawania i dociekania, co jest nieodzownym elementem rozwoju talentów i zdolności. Drugim z wymienionych rodzajów osobowości nauczycieli jest osobowość dryfująca. Ten rodzaj reprezentują ci, którzy od początku swej kariery zawodowej byli nastawieni na sukces, doskonalili się a także pracowali nad samorealizacją i samorozwojem, natomiast z upływem czasu powoli wycofywali się, tracąc cel, do którego dążyli. Pojawiające się na drodze zawodowej nauczyciela: niepewność i wątpliwości mogą przyczyniać się do kształtowania osobowości dryfującej, czyli powolnego wyhamowywania twórczej aktywności. Osoby o tym typie osobowości mają trudność z wyznaczaniem sobie długoterminowych celów. U takich osób pojawia się pustka zawodowa a udane życie rodzinne czy satysfakcja materialna nie są w stanie zniwelować braku celu w życiu zawodowym, czego konsekwencją może być wypalenie zawodowe.

Z kolei przytoczone przez autorki zdanie M. Wilskiego, który wskazuje, że rozwój osobisty to proces, w którym nie ma miejsca na stagnację, jednostka ma dwie możliwości: albo odnaleźć cel swojej pracy zawodowej, albo poddać się regresowi w rozwoju osobowościowym. Niestety jednak, jak podkreśla takie cofanie się w rozwoju sprawia, że taki nauczyciel prezentuje podobny typ osobowościowy do reaktywnego, z tą różnicą, że cechuje się większymi i lepszymi kompetencjami oraz potencjałem rozwojowym, nabytym wcześniej. W porównaniu osobowości reaktywnej i dryfującej M. Wilski odwołuje się do koncepcji rozwoju L. Wygotskiego, przypisując większą szansę rozwoju nauczycielowi o osobowości dryfującej. Za najbardziej pożądany typ osobowości nauczyciela uznaje osobowość rozwojową, charakterystyczną dla pedagogów, którzy potrafią z pełną świadomością kierować rozwojem własnym i uczniów i są zdolni do nieograniczonego rozwijania swoich kompetencji, a każde ich działanie wiąże się z odkrywaniem czegoś nowego, wzbogacaniem i poszerzaniem własnych umiejętności i możliwości (Wilski, 2011).

Największy wpływ na rozwój dzieci, młodzieży czy uczących się dorosłych, jak podkreślają autorki ma nauczyciel z osobowością rozwojową, ponieważ najbardziej efektywnie wykorzystuje swoje możliwości w pracy dydaktyczno-wychowawczej. Taki nauczyciel bowiem ma wysokie poczucie własnej wartości, jest ponadto otwarty i twórczy, wnikliwy czy pogodny. Potrafi też nawiązywać bliskie relacje społeczne i lepiej rozumieć podopiecznych a nauczycielami są z wyboru, a nie z konieczności. Taką osobowością cechują się ludzie szczęśliwi i spełnieni o głębokim poczuciu sensu życia, którzy realizują się w pracy i lubią to, co robią. Nauczyciel rozwojowy ma silną motywację wewnętrzną do bycia twórczym, jest pasjonatem, zaszczepiającym w swych uczniach nowe zainteresowania i talenty, dlatego mimo napotkanych na swojej drodze przeszkód zarówno ze strony uczniów, jak i współpracowników potrafi być nadal pełny pozytywnego nastawienia, pomysłów i dobrego samopoczucia. A.Lasota i E. Pisarzowska prezentują w swoim artykule inne odnalezione koncepcje klasyczne, w których spotyka się opis osobowości rozwojowej . I tak u M. Grzegorzewskiej:
Samokształcenie, Kolego, to jak gdyby cudowny drogowskaz, który Cię może wyprowadzić

w przedziwny sposób różnymi ścieżkami i dróżkami, przez labirynty nieraz i manowce na jasną i szeroką drogę z dalekim horyzontem i szeroką przestrzenią! Ten drogowskaz cudowny — to twórcza praca w dążeniu do świadomego życia, do budowy drogą nauki, przeżyć i przemyśleń swojego własnego świata, swojego stosunku do człowieka, do ludzi, do zjawisk otaczającego świata, do pracy, do życia i do siebie samego. Jaką to siłę w życiu daje! Spróbuj, Kolego, wejść na tę drogę! (Grzegorzewska, 1946, *List 11*). Według (Janiszewska, 2013) z kolei działania nauczyciela o osobowości rozwojowej powinny być świadome i ukierunkowane na rozwój uczniów a postawa nauczyciela powinna kształtować twórcze i krytyczne spojrzenie na świat dziecka.
Ponieważ nauczyciel to osoba, która wraz z rodzicami w czasie edukacji ma największy wpływ na psychikę i dalszy rozwój człowieka, dlatego dobry nauczyciel musi być również dobrym pedagogiem. Przecież to właśnie nauczyciel, podobnie, jak rodzice widuje uczniów codziennie.

Dobry nauczyciel w moi przekonaniu powinien posiadać nieprzeciętną wiedzę, w przedmiocie którego naucza, potrafić przekazać ją w prosty i zrozumiały sposób a także posiadać wiele odpowiednich cech osobowości, wymienionych powyżej. Powinien także posiadać silne przekonanie, że edukacja jest ważna i mieć odwagę przeciwstawiać się naciskom oraz siłę, by pokonywać trudności. Ponadto dobry nauczyciel powinien mieć wysokie oczekiwanie wobec zarówno swoich uczniów, jak i siebie a także podążać za duchem czasu samodoskonaląc się i rozwijając. Taki nauczyciel ponadto powinien być ekspertem w swej praktyce nauczycielskiej i stosować w swej pracy najnowsze odkrycia. Musi mieć również odwagę, by eksperymentować i wdrażać różnego rodzaju innowacje. Posiadanie tych wszystkich cech razem może zagwarantować sukces nauczycielowi a ponadto jego osoba może stać się inspiracją dla swoich uczniów.

7.2. Wybitni nauczyciele matematyki na świecie

7.2.1. Andriej Nikołajewicz Kołmogorow

Andriej Nikołajewicz Kołmogorow urodził się w 1903. Był matematykiem radzieckim, jednym z najwybitniejszych matematyków XX w, twórcą aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa, autorem wielu prac i monografii niemal ze wszystkich dziedzin matematyki. Studiował on na Uniwersytecie w Moskwie a od 1931 był profesorem tego Uniwersytetu. W wieku zaledwie 23 lat podał przykład funkcji całkowalnej w sensie Lebesgue'a, której szereg Fouriera jest rozbieżny wszędzie a wynik ten był w owym czasie bardzo znaczące. W zakresie rachunku prawdopodobieństwa jego pierwszymi ważnymi wynikami były m. in. twierdzenia o trzech szeregach i nierówność maksymalna. Praca z 1931 roku „O analitycznych metodach w rachunku prawdopodobieństwa” dała początek nowoczesnej teorii procesów Markowa. Kołmogorow również jako pierwszy zastosował w tej teorii równania różniczkowe, uściślając niezbyt precyzyjne wyniki uzyskane wcześniej przez fizyka niemieckiego M. Plancka, fizyka amerykańskiego A. H. G. Fokkera i fizyka polskiego M. Smoluchowskiego. Monografia Kołmogorowa z 1933 „Podstawowe pojęcia teorii prawdopodobieństwa” miała podstawowe znaczenie dla rozwoju rachunku prawdopodobieństwa, podana w niej została sformułowana przez Kołmogorowa aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa, a dowiedzione w niej twierdzenie o nieskończonych produktach miar jest fundamentalnym twierdzeniem teorii procesów stochastycznych Kołmogorow jest także twórcą teorii procesów kaskadowych, teorii interpolacji i ekstrapolacji stacjonarnych procesów stochastycznych , jest również współautorem jednej z najczęściej cytowanych prac z zakresu probabilistyki- książki Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych z 1957 roku. Kołmogorow jest także autorem prac z dziedziny topologii, analizy funkcjonalnej, teorii aproksymacji, geometrii rzutowej i różniczkowej, logiki matematycznej, zastosowań matematyki w takich dziedzinach, jak: balistyka, teoria przepływów turbulentnych, statystyczna kontrola jakości, cybernetyka, geologia, mechanika oceanów, teoria krystalizacji metali, lingwistyka.

Bardzo ważnym, co chciałabym szczególnie podkreślić jest fakt, że poświęcił on wiele uwagi działalności organizacyjnej, edytorskiej i pedagogicznej. Kołmogorow bowiem był inicjatorem utworzenia przy Uniwersytecie w Moskwie szkoły dla matematycznie uzdolnionej młodzieży, w której również sam prowadził wykłady nie tylko z matematyki, ale i z takich przedmiotów jak literatura czy historia sztuki. Ponadto wiele uniwersytetów i akademii nauk nadało Kołmogorowowi, w uznaniu za jego zasług, doktoraty honorowe i godność członka zagranicznego np. Uniwersytet Warszawski i Polska Akademia Nauk (Słynni matematycy, 2021).

7.3. Wybitni polscy nauczyciele matematyki

7.3.1. Aleksander Dobrzycki

Według informacji, które podaje Wikipedia „Urodził się w 1939 w Golankach koło Grabowa, zm. 12 kwietnia 2014 we Wrocławiu – nauczyciel matematyki, pedagog, metodyk. W latach 1974-2004 był dyrektorem XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Studia matematyczne ukończył na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach. W latach 1979-84 wykładał dydaktykę matematyki w IM UWr. Był pierwszym dyrektorem XIV Liceum Ogólnokształcącego we Wrocławiu i twórcą jego sukcesów w przedmiotach ścisłych. W ciągu kilku lat prowadzone przez niego liceum znalazło się w pierwszej dziesiątce rankingu "Perspektyw", a uczniowie XIV LO odnosili sukcesy na przedmiotowych olimpiadach krajowych i międzynarodowych. W roku 1992 uzyskał tytuł "Nauczyciela roku". W 2001 roku mimo protestów uczniów i rodziców doprowadził do przeniesienia szkoły z ul. Szczytnickiej na al. Brücknera i połączenia jej z Technikum Żeglugi Śródlądowej. Był również dyrektorem Gimnazjum nr 49 z oddziałami dwujęzycznymi. W latach 1979-84 wykładał dydaktykę matematyki w IM UWr (Matematyczne zaduszki, 2021).

Aleksander Dobrzycki postawił w szkole na umysły ścisłe, w budynku po podstawówce zaczął organizować liceum a już w 1977 r. uczeń drugiej klasy został laureatem ogólnopolskiej Olimpiady Matematycznej. W wielkim meczu matematycznym z III LO we Wrocławiu "czternastka" w każdej klasie była lepsza. Od tego czasu co roku szkoła miała po kilku finalistów w krajowych olimpiadach a w 1981 r. dwóch uczniów zdobyło złote medale na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Waszyngtonie. W 1983 roku na olimpiadę do Paryża wyjechało pięciu młodych matematyków, najlepszych w Polsce a czterech z nich to uczniowie XIV LO. Na początku lat 90 w naukach ścisłych szkoła nie miała sobie równych. Od lat z powodzeniem funkcjonują klasy informatyczne, matematyczne i chemiczne, powstały też klasy dwujęzyczne z obcym językiem wykładowym, a nowością w szkole dla "ścisłowców" stała się klasa teatralna i także na tym polu "Czternastka" osiągnęła sukcesy (http://old.perspektywy.pl/index.php?option=com_content&task=view&id=927)W rankingu ogłoszonym przez "Politykę" w 1988 r. Licea na piątkę", szkoła ta znalazła się wśród pięciu najlepszych, a w liczbie finalistów i laureatów olimpiad była pierwsza. W 1991 r. dyrektor Dobrzycki w ogólnopolskim konkursie organizowanym przez warszawską fundację "Innowacja" został "Nauczycielem Roku" (Słynny reportaż, 2021). Jeszcze wielokrotnie nagradzany za swą pracę, zaangażowanie i osiągnięcia nie tylko przez władze oświatowe, ale i inne instytucje państwowe, m. in.za wymierne efekty w pracy z uczniami uzdolnionymi ta sama fundacja „Innowacja" przyznała mu tytuł „Nauczyciela roku 1992". Został on również nagrodzony Medalem 50-lecia Akademii Medycznej we Wrocławiu, Złotą Odznaką 50-lecia Olimpiady Matematycznej, Złotym Krzyżem Zasługi, Medalem Komisji Edukacji i wieloma innymi odznaczeniami (Zespół Szkół nr 14 we Wrocławiu, Mikrokosmos, 2021). Po siedmiu latach istnienia szkoła prowadzona przez Dobrzyckiego stała się lokalną potęgą. Mówiono o nim, że : „że był nauczycielem innowacyjnym, otwartym, nie bojącym się zmian, do tego serdecznym dla wszystkich"(B. Józefiak, 2014) Podkreślano także jego całkowite oddanie dla szkoły i jej uczniów oraz miłość do matematyki, które zaowocowały świetnymi wynikami naukowymi tej placówki (Józefiak, 2014).

7.3.2. Henryk Pawłowski

Według informacji, które podaje Wikipedia :"ur. 2 czerwca 1960, zm. 11 czerwca 2016, nauczyciel matematyki w IV Liceum Ogólnokształcącym i Gimnazjum Dwujęzycznym nr 4 w Toruniu, a także w Gimnazjum i Liceum Akademickim w Toruniu, autor wielu książek dotyczących matematyki - od podręczników szkolnych do książek przygotowujących do olimpiady matematycznej. Prowadził olimpijskie koła matematyczne dla gimnazjalistów i licealistów w Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 6 w Bydgoszczy i LO im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu. Przewodniczył Komitetowi Okręgowemu Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów w Toruniu". Henryk Pawłowski był absolwentem Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Tego, jak pracować z uzdolnioną młodzieżą, uczył się do swojego mistrza, prof. Leona Jeśmanowicza. W tej dziedzinie miał wybitne osiągnięcia, gdyż wychował 150 finalistów olimpiad matematycznych i 29 medalistów międzynarodowych olimpiad matematycznych, którzy odnieśli sukcesy w Finlandii, Australii, Niemczech, Chinach, Szwecji, Turcji, Hongkongu, Kanadzie czy Indiach.

Henryk Pawłowski słynął ze swojej otwartości i poczucia humoru, mówił to, co myśli, nawet, gdy było to niewygodne. Kiedy po reformie oświatowej naukę w liceum skrócono z czterech do trzech lat, głośno narzekał (Wojciechowska-Narloch, 2016). Na lekcjach Henryka Pawłowskiego wolno było jeść a także popijać herbatę. Matematyk pozwalał na to, bo pamiętał czasy, kiedy sam był uczniem. Henryk Pawłowski w 2009 roku otrzymał prestiżowy tytuł profesora oświaty, najwyższy stopnień w karierze zawodowej nauczyciela. Zaszczyt ten przyjął z wielką pokorą. Uważał bowiem, że ma jeszcze bardzo dużo do zrobienia. Wiedział, że zdolnych dzieci jest na świecie jeszcze dużo, był chętny na podjęcie każdego wzywania. Za swoje osiągnięcia otrzymał także Złotą Karetę „Nowości" (J. Wojciechowska-Narloch, 2016). Najbardziej istotnym sukcesem Henryka Pawłowskiego było objęcie pogłębioną i rozwijającą edukacją matematyczną ogromnej rzeszy dzieci i młodzieży. Młodzi ludzi z różnych poziomów edukacyjnych z entuzjazmem i uporem starali się rozwiązywać nieobowiązkowe i trudne problemy matematyczne, co kształtowało w nich niezwykle cenne w obecnych czasach umiejętności, m.in. zdolność samodzielnych poszukiwań z jednoczesną odwagą prowadzenia rzeczowych dyskusji, zdolność rozumienia świata i pogłębienia wiedzy a także przyjmowania z pokorą mądrości innych ludzi. Uczniowie Henryka Pawłowskiego uzyskiwali zawsze wysokie wyniki na maturze a także zdawali bardzo dobrze egzaminy wstępne na wszelkie uczelnie politechniczne oraz wydziały kształcące w kierunkach ścisłych. Dyrektor IV Liceum Ogólnokształcącego w Toruniu, Małgorzata Białek wspomina: „Henryk Pawłowski był nauczycielem i człowiekiem, który, odchodząc tak nagle i nieoczekiwanie, pozostawił pustkę, niemożliwą chyba do wypełnienia. W naszym liceum stworzył i od ponad 20 lat prowadził autorski profil klas matematycznych, jeden z filarów naszej szkoły. Inspirował wiele pokoleń uczniów do rozwijania pasji matematycznych, nieodmiennie pozostawał młodym duchem partnerem młodzieży. Dla nas, nauczycieli, był po prostu przyjacielem, człowiekiem życzliwym, dowcipnym i przede wszystkim uczciwym oraz prawym. Jego rozsądny i często z poczuciem humoru wyrażony osąd sytuacji pozwalał nam zobaczyć nasze szkolne sprawy we właściwych proporcjach.” Małgorzata Białek dodaje również, że bardzo dbał o swoich wychowanków, interesował się ich problemami. W dyskretny i taktowny sposób potrafił rozwiązywać trudności uczniów. Mądry i rzeczowy stosunek Henryka Pawłowskiego do problemów młodzieży szkolnej oraz umiejętność osiągania konstruktywnych kompromisów był przyczyną wielokrotnego wybierania nauczyciela, przez społeczność uczniów IV LO, na rzecznika swoich praw. Małgorzata Białek podkreśla również, że nie ma wątpliwości, że to właśnie Henryk Pawłowski przysłużył się tworzeniu bardzo pozytywnego wizerunku toruńskiej i regionalnej edukacji.

W 2015 roku podczas warsztatów dla nauczycieli matematyki w Będlewie miałam możliwość poznać Pana Henryka Pawłowskiego a także uczestniczyć w pokazowych zajęcia koła olimpijskiego, które poprowadził w tym miejscu dla uczniów Liceum Św. Marii Magdaleny. Dał się poznać jako wspaniały człowiek o dużym poczuciu humoru. Wrażenia, jakie zrobił na mnie sposób przekazywania wiedzy a także sama forma prowadzenia zajęć „całym sobą” sprawiły, że te zajęcia mam w pamięci do dziś. Energia, która im towarzyszyła powodowała, że uczestniczący w zajęciach uczniowie rwali się do działania, precyzja i poprawność języka matematycznego dodawała zajęciom powagi, którą równoważyła dawka poczucia humoru, wszystko zachowywało idealne proporcje. Obejrzane zajęcia miały istotny wpływ na moją dalszą pracę i mają do dziś.

7.3.3. Wojciech Guzicki

Profesor Wojciech Guzicki od ponad 40 lat uczy na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, przez kilka lat zajmował się również pracą z nauczycielami w ODN w Warszawie, od ponad 20 lat uczy również w szkołach. Początkowo uczył w liceach: Pierwszym Społecznym Liceum Ogólnokształcącym w Warszawie, później w Liceum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie. W obu tych szkołach pracował z uczniami zdolnymi, uczył według własnego programu rozszerzonego i przygotowywał uczniów do Olimpiady Matematycznej (ponad 20 uczniów Profesora zostało finalistami Olimpiady. Przez wiele lat uczył także w gimnazjach: Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie i w Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie. W gimnazjum uczył także według własnego programu rozszerzonego i przygotowywał uczniów do Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów – wspomina w swoim autorskim poradniku.

W Gimnazjum Przymierza Rodzin wychował 27 finalistów, a większość z nich została również laureatami OMG. Po tak bogatych doświadczeniach, wyniesionych głównie ze szkół niepublicznych, przeniósł swoje doświadczenia na grunt szkoły publicznej. Uczył w Gimnazjum im. Staszica według tego samego własnego programu, w którym To, w roku szkolnym 2012/2013 wychował kolejnych jedenastu finalistów OMG.
Sukcesy te przekonują profesora o skuteczności programu oraz o skuteczności doświadczeń własnych z pracy z uczniami zdolnymi. Tymi doświadczeniami dzieli się z innymi nauczycielami w poradniku, podczas warsztatów dla nauczycieli, konferencji i innych. Wierzy, że doświadczenia te będą mogli przenieść do swoich szkół a ich uczniowie odniosą podobne sukcesy. W szkołach, w których uczył posiadał ogromną swobodę w kształtowaniu programu nauczania i wielokrotnie spotkał się z wielką życzliwością dyrekcji, która patrzyła z wyrozumiałością na te niestandardowe pomysły. Praca w szkole publicznej- w Gimnazjum im. Stanisława Staszica utwierdziła Profesora w przekonaniu, że jego pomysły mogą być realizowane w każdej szkole (Guzicki, 2013).

7.3.4. Edward Tutaj

Według informacji zawartych w Wikipedii „Urodził się w Tarnowie. Ukończył I Liceum Ogólnokształcące im. Kazimierza Brodzińskiego w Tarnowie. W 1960 podjął studia na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego, uzyskując w 1965 magisterium. Po studiach rozpoczął pracę na Uniwersytecie Jagiellońskim, przechodząc tam kolejne stopnie kariery akademickiej. Doktorat prowadzony przez profesora Stanisława Łojasiewicza obronił w 1974, a w 1990 uzyskał habilitację. W latach 1993–1999 pełnił funkcję prodziekana Wydziału Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. W latach 2006-2013 był kierownikiem Zakładu Historii Matematyki w Instytucie Matematyki UJ. Od roku 1999 pełni funkcję dyrektora Instytutu Matematyczno-Przyrodniczego Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie. W latach 2004–2010 był wiceprezesem Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego. W latach 1991-2008 był przewodniczącym Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej w Krakowie a następnie od 2008 roku jest wiceprzewodniczącym tego Komitetu. Od 2007 jest członkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Obszar jego zainteresowań naukowych stanowią analiza funkcjonalna, geometria przestrzeni Banacha, równania różniczkowe, topologia, historia matematyki oraz dydaktyka matematyki. Odznaczony Krzyżem Kawalerskim (2002), Złotym Krzyżem Zasługi (1987) a także Medalem Komisji Edukacji Narodowej (1989). W roku 2007 został laureatem Nagrody im. Hugona Kołłątaja”. Przez ponad dwadzieścia lat Profesor Edward Tutaj prowadził tzw. "klasy uniwersyteckie" w dwóch liceach Krakowa, w V Liceum i I Liceum. Ponadto przez kilka lat był "nadzorcą" tych klas z ramienia Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Zajmował się rekrutacją, programami i w pierwszym rzędzie uczeniem, o czym wspominał w listopadzie 2015 roku podczas wystąpienia na konferencji „Uczeń zdolny- wyzwanie czy problem” w Sielpi. Profesor wykształcił wielu finalistów i laureatów Olimpiady Matematycznej a także innych konkursów.

7.3.5. Waldemar Pompe

Doktor Waldemar Pompe jest pracownikiem naukowym Uniwersytetu Warszawskiego, zajmującym się geometrią. Jest osobą czynnie zaangażowaną w popularyzację matematyki a także kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie. To pomysłodawca Olimpiady Matematycznej Juniorów (dawnej Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów), wieloletni jej Przewodniczący, obecnie Przewodniczący Komisji Zadaniowej (Olimpiada Matematyczna Juniorów, 2021). Doktor Waldemar Pompe jest także nauczycielem matematyki w XIV Liceum im. Stanisława Staszica, w którym naucza matematyki oraz prowadzi warsztaty, wykłady i zajęcia koła olimpijskiego dla uczniów tej szkoły. Jest nauczycielem wielu laureatów i finalistów zarówno Olimpiady Matematycznej, jak i Olimpiady Matematycznej Juniorów. Organizuje także wyjazdowe obozy naukowe dla uzdolnionej matematycznie młodzieży oraz warsztaty, szkolenia i seminaria dla nauczycieli matematyki zainteresowanych pracą z uczniem zdolnym, to również członek Stowarzyszenia na Rzecz Edukacji Matematycznej, wieloletni prelegent podczas konferencji SEM w Sielpi.

7.3.6. Bartłomiej Bzdęga

Doktor Bartłomiej Bzdęga ukończył Wydział Matematyki i Informatyki UAM, był także przez wiele lat jego pracownikiem. Jest popularyzatorem matematyki, przygotowuje uczniów do Olimpiady Matematycznej, Olimpiady Matematycznej Juniorów oraz prowadzi zajęcia dla nauczycieli w tym zakresie. Prowadzi również Wielkopolską Ligę Matematyczną, współorganizuje obozy naukowe dla uczniów, jest redaktorem ,,Kącika początkującego olimpijczyka" w czasopiśmie Delta a także współorganizuje wiele wydarzeń dla młodzieży (wykłady, konkursy itp.) Na Wydziale MFiI UMCS prowadził trzydniowe warsztaty z zakresy zadań olimpijskich w ramach VII Kongresu Młodych Matematyków Polskich. Jest nauczycielem w VIII Liceum w Poznaniu, tam również prowadzi zajęcia koła olimpijskiego dla zainteresowanych matematyką uczniów wielkopolskich szkół średnich. Zajęcia warsztatowe prowadził także w wielu innych szkoła średnich, również poza Wielkopolską. Wychował wielu finalistów i laureatów zarówno Olimpiady Matematycznej Juniorów, jak i Olimpiady Matematycznej.

PODSUMOWANIE:

Warto poznać sylwetki wybitnych matematyków, którzy w szczególny sposób zasłużyli się kształceniu uczniów zdolnych matematycznie. Ich historie, dobre praktyki mogą stać się inspiracją do pracy dla nauczycieli matematyki, jak również studentów – przyszłych nauczycieli. Przygotowane przez wybitnych „mistrzów" matematyki poradniki, zbiory zadań, programy nauczania, organizowane szkolenia, konferencje mogą w znaczny sposób wpłynąć na poprawę jakości kształcenia uczniów zdolnych matematycznie, gdyż zawierają praktyczne rady, konkretne przykłady działań uwieńczone wieloma sukcesami uczniowskimi, czy ciekawe pomysły rozwiązań zadań i problemów olimpijskich, których nauczyciel nie znajdzie w podręczniku a student nie pozna podczas zajęć, studiując na kierunku matematyka.

8. Podstawy metodologiczne badań własnych

Niniejsza rozprawa składa się z dwóch części – teoretycznej, którą stanowiły zamieszczone wyżej rozdziały oraz części empirycznej. Na część empiryczną z kolei składają się dwa elementy: podstawy metodologiczne realizowanych badań własnych, a także analiza oraz interpretacja ich wyników wraz z odpowiednimi statystykami. Poniższy rozdział dotyczy pierwszego wymienionego elementu.

8.1. Charakterystyka badań

Badania własne realizowane na potrzeby niniejszej dysertacji są zarówno badaniami ilościowymi, weryfikacyjnymi, jak również jakościowymi. Celem ich realizacji jest określenie z jakim skutkiem zastosowane celowo heurystyczne metody pracy wpłyną na umiejętności i zdolności badanej grupy uczniów.

Badania własne objęły moją osobę, uczniów klas siódmych szkoły podstawowej, uczniów klas gimnazjalnych oraz ucznia gimnazjum. Zróżnicowanie badanych środowisk wymagało rozdzielenia planowanych badań na odrębne obszary badawcze, które poddane zostały wpływom odrębnych czynników, zróżnicowanych pod względem metodologicznym. I tak, moja osoba- czynnego zawodowo nauczyciela matematyki w największym poznańskim gimnazjum, przekształconym w szkołę podstawową wyraża swoje opinie i sugestie na temat efektywnej pracy z młodzieżą uzdolnioną matematycznie oparte na wieloletnich doświadczeniach w pracy zawodowej, zakończonych rożnymi sukcesami. Badanie to przeprowadzone było za pomocą obserwacji klas siódmych szkoły podstawowej oraz klas gimnazjalnych, które w tym czasie równolegle uczyłam. Badanie to jest badaniem empirycznym, diagnostycznym.

Drugą grupą objętą badaniami byli uczniowie dwóch klas siódmych uczęszczający do szkoły podstawowej nr 67 w Poznaniu, w której w tym czasie pracowałam. Celem zrealizowanych badań było sprawdzenie, czy zastosowane heurystyczne metody pracy a także praca z moim autorskim programem nauczania matematyki wpłynie na rozwój umiejętności i zdolności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego. Badania empiryczne przeprowadzone w grupie uczniów miały charakter ilościowy.

Ostatnim badaniem objęty został jeden uczeń gimnazjum, w którym w tym czasie pracowałam. Badanie to przeprowadzone było za pomocą metody studium przypadku. Było badaniem empirycznym i diagnostycznym.

Badanie przeprowadzone za pomocą metody obserwacji i metody studium przypadku prowadzone było przez okres trzech lat, badanie za pomocą eksperymentu pedagogicznego było rocznym badaniem. W trzecim roku badań, badanie metodą obserwacji i studium przypadku było realizowane przy jednoczesnym badaniu za pomocą eksperymentu pedagogicznego i stanowiło jego uzupełnienie.

8.2. Przedmiot i cele badań

Badanie naukowe jest wieloetapowym procesem „zróżnicowanych działań mających na celu zapewnienie obiektywnego, dokładnego i wyczerpującego poznania obranego wycinka rzeczywistości przyrodniczej, społecznej lub kulturowej, a wynikiem badania naukowego jest określony obraz badanej rzeczywistości." (Sobol, 1995). Wymaga ono zarówno jasnego określenia przedmiotu jak i celu badań. I to właśnie te czynności stanowią pierwszy, podstawowy krok w procedurze badawczej. Sformułowanie przedmiotu badań stanowi odzwierciedlenie głównych problemów badawczych, a także wyrażenie intencji badacza. Sam przedmiot badań jak podaje (Puślecki, 1985) stanowi „ściśle zdefiniowany wycinek rzeczywistości społeczno – przyrodniczej, stanowiącej obiekt zainteresowań poznawczych określonej dyscypliny naukowej". J. Sztumski (1995) z kolei określa przedmiot badań „jako wszystko, co składa się na tak zwaną rzeczywistość społeczną, a więc zbiorowości i zbiory społeczne, instytucje społeczne, procesy i zjawiska społeczne." (Pilch, 1995) natomiast przedmiot badań określił jako „zadanie, które staje przed nami w momencie uświadomienia sobie konieczności przeprowadzenia badań empirycznych".

Poza ustaleniem przedmiotu badań konieczne jest sformułowanie celu badań, stanowiącego wizytówkę poczynań badawczych, który nadaje odpowiedni kierunek badaniom. Od właściwego sformułowania celu bowiem zależy powodzenie wszystkich dalszych etapów badań (Pilch, Bauman, 2001). Według W. Dutkiewicza (1996) celem badań jest „dążenie do wzbogacenia wiedzy o osobach, rzeczach i zjawiskach będących przedmiotem badań." Zdaniem M. Łobockiego (1984) natomiast, jest to „rodzaj efektu, który zamierzamy uzyskać w wyniku badań, a także jest to rodzaj czynności, z którymi te efekty będą się wiązać.".

Zasadniczym celem przeprowadzonego przeze mnie badania jest uzyskanie odpowiedzi, czy w zwykłej publicznej szkole bez wcześniejszych tradycji związanych z kształceniem uczniów w kierunku nauk ścisłych ,szkole, w której uzyskiwane przez uczniów wyniki egzaminów z matematyki kształtowały się na średnim poziomie a jej uczniowie i absolwenci nie osiągali wcześniej znaczących sukcesów w konkursach i olimpiadach matematycznych, siłą „własnych rąk" można zainteresować uczniów przedmiotem, skutecznie przygotować do konkursów a przede wszystkim rozwinąć uzdolnienia i talenty matematyczne uczniów bez sprowadzania nauczania matematyki do odtwarzania algorytmicznych, odtwórczych schematów rozumowań w zamian za kształcenie „otwartości myślenia matematycznego". Natomiast praktycznym celem niniejszej rozprawy jest sformułowanie postulatów: skutecznego nauczania matematyki, rozwijania uzdolnień matematycznych niezwykle ważnych dla praktyki pedagogicznej oraz popularyzowanie wśród nauczycieli matematyki oraz przyszłych nauczycieli matematyki (studentów) właściwego podejścia do nauczania tegoż przedmiotu.

W niniejszej pracy badawczej wyznaczono następujące cele szczegółowe:

1. **Znajdowanie uczniów uzdolnionych matematycznie i rozwijanie ich uzdolnień.**
2. **Stworzenie możliwie „uniwersalnej" metody pracy z jak największą liczbą uczniów.**
3. **Znajdowanie sposobów motywacji do samorozwoju uczniów.**

4. **Wybranie metody nauczania, która rozwinie umiejętności i zdolności matematyczne, ale nie narzuca sposobu myślenia („nie zabija indywidualności”).**
5. **Opracowanie programu autorskiego i sprawdzenie jego użyteczności i ewentualnych korekt.**
6. **Zachęcenie uczniów do udziału wydarzeniach naukowych, konkursach**
7. **Wzbudzenie zamiłowania do nauki.**

Przedmiotem moich badań są przede wszystkim zdolności i uzdolnienia matematyczne uczniów, jak również ich umiejętności w zakresie nauczania tego przedmiotu.

Poniżej przywołuję kilka wypowiedzi, które stały się dla mnie inspiracją do podjęcia własnych badań w tym zakresie:

1. „Dzisiejsi uzdolnieni uczniowie to jutrzejsi społeczni, intelektualni liderzy gospodarki i kultury, a ich rozwój nie może być pozostawiony przypadkowi” (Eyre 2009, s. 1048, 1051)
2. „Więcej niż połowa dzieci polskich – przed rozpoczęciem szkolnej edukacji - wykazuje się uzdolnieniami do nauki matematyki, a co czwarte wysokim stopniem zadatków takich uzdolnień. Po kilku miesiącach nauki w szkole większość tych dzieci przestaje manifestować swoje znakomite możliwości umysłowe.” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2018).
3. Istnieją różne poziomy matematycznej aktywności i poza skrajnymi przypadkami do każdego normalnego ucznia można dobrać odpowiedni dlań poziom aktywności. (...) Uczeń musi polubić matematykę, musi znajdować przyjemność w rozwiązywaniu matematycznych zadań, mimo, że wymaga to wysiłku i niełatwej koncentracji (Krygowska, 1975, s. 105).

4. „Nauczanie matematyki może stanowić okazję do wyzwalania i stymulowania twórczości każdego ucznia” (Malenda, 2001, s. 50).

Warto podkreślić, że do tej pory nie wypracowano wzorcowego i uniwersalnego modelu postępowania z uczniami zdolnymi i takiego też nie poszukiwałam, gdyż nie jest możliwe znalezienie takich metod w rozpoznawaniu i rozwijaniu zdolności i uzdolnień, które sprawdzą się w każdym środowisku i w każdych warunkach. Jednak wskazane przeze mnie możliwe i skuteczne w pewnych warunkach sposoby postępowania mogą przyczynić się do zbudowania wśród nauczycieli matematyki postawy, wspieranej przez społeczność szkolną i rodziny, skutecznego planowania i wdrażania swoich autorskich rozwiązań, skierowanych na konkretnych uczniów z ich indywidualnymi potrzebami. Ich skuteczność potwierdzona wieloma wybitnymi osiągnięciami moich uczniów może również przyczynić się do wiary we własne możliwości i większej motywacji do pracy z uczniami uzdolnionym i zdolnymi matematycznie. Może stać się także powodem do refleksji i krytycyzmu w kwestii wspierania uczniów z potencjałem matematycznym. Niełatwo jest odkryć zdolności matematyczne ucznia, jeszcze trudniej pielęgnować talenty matematyczne. Potrzebna jest bowiem wiedza, doświadczenie, gotowość do działania i poświęcony czas, ni mniej jednak opisane przykłady działań, stosowane metody mogą zostać wcielone przez każdego nauczyciela matematyki a w połączeniu z konsekwencją i pasją do przedmiotu mogą przynieść radość z nauczania i uczniowskie sukcesy, czasem nawet dość spektakularne.

8.3. Problemy i hipotezy badawcze

Określenie przedmiotu i celu badań pozwala na sformułowanie problemu badań, które to stanowi pierwszy etap zadań naukowych. Właściwie określone problemy badawcze bowiem nadają głęboki sens badaniom naukowym oraz gwarantują ich rzetelność. Według W. Zaczyńskiego (1995), o problemie badawczym mówimy w sytuacji „zetknięcia się człowieka z trudnością, wraz z uświadomieniem sobie jej charakteru.” Z kolei J. Sztumski (1984) pojęcie problemu badawczego określa to „co jest przedmiotem wysiłków badawczych, czyli po prostu, to, co orientuje nasze przedsięwzięcie poznawcze”. M. Łobocki (2007) natomiast wskazując, iż „jest to pytanie, na które odpowiedzi szukamy na drodze badań naukowych, czyli poprzez dociekanie i wysiłek.” H. Muszyński z kolei definiuje problem badawczy jako „(…) logiczne ujęcie przeżywanej niewiedzy lub potrzeby wiedzy, zaś pytanie to gramatyczna konstrukcja wyrażająca sytuację problemową i będąca zarazem językowym odpowiednikiem” (Muszyński, 1971, s.177). Przy formułowaniu problemów istotnym jest, by spełnione zostały określone kryteria:

1. „problem ma wyrażać relację zachodzącą między dwiema lub więcej zmiennymi;

2. problem ma być sformułowany jasno i jednoznacznie, koniecznie w formie pytania, a nie stwierdzenia;

3. problem ma dotyczyć zmiennych, dających się zbadać (zmierzyć), bowiem pozbawiony takiej możliwości przestaje być problemem badawczym.” (M. Łobocki, 2007, s.126).

Warunki konieczne do sformułowania problemu badawczego, które podaje J. Sztumski (2005) wskazują, że postawione problemy:

- muszą wyczerpać zakres niewiedzy, który zawarty jest w temacie badań, określać zakres wątpliwości badawczych;

- muszą zawierać wszystkie zależności między zmiennymi; - muszą być rozstrzygalne empirycznie i mieć wartość praktyczną.

Ponadto również dla „poprawnego sformułowania problemów badawczych ważna jest ich geneza, czyli osobiste preferencje badacza, potrzeby społeczne i znajomość problematyki dotyczącej formułowania problemów badawczych.” (M. Łobocki, 2007, s.111). W zależności od typu badań, które przewiduje realizacja tematu, wyróżnia się także typy problemów badawczych. W literaturze przedmiotu najczęściej spotyka się trzy typy problemów badawczych: problemy o charakterze diagnostycznym, o charakterze zależnościowym i innowacyjnym.

Z uwagi na fakt, że badania przeprowadzone zostały w odrębnych grupach badawczych, problematyka badawcza została rozdzielona na dwie części. Skonstruowane zostały więc dwa zespoły pytań badawczych, dla których wyróżniono odrębne pytania szczegółowe. W niniejszej części pracy zaprezentowana zostanie problematyka badań własnych w podziale na badania prowadzone metodą obserwacji i studium przypadku oraz metodą eksperymentu pedagogicznego. Główny problem badawczy w badaniach przeprowadzonych metodą obserwacji (zarówno dotyczącej mojej osoby i obserwowanych uczniów klas siódmych i gimnazjalnych) i studium przypadku, jak również metodą naturalnego eksperymentu pedagogicznego wśród uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przybrał następujące brzmienie: Z jakim skutkiem zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy, w szczególności praca w własnym programem autorskim wpłyną na rozwój zdolności i umiejętności matematycznych uczniów oraz rozwój ich otwartości myślenia matematycznego?

8.3.1. Problemy badawcze w badaniach metodą obserwacji i metodą studium przypadku

W ramach głównego problemu badawczego w badaniach metodą obserwacji i metoda studium przypadku wyróżniono następujące pytania szczegółowe:

1. Jak odnajdywać uczniów uzdolnionych matematycznie?
2. Jak zainteresować uczniów matematyką?
3. Czy odpowiednia praca z uczniami zdolnymi jest w stanie doprowadzić do ich rozwoju, zamiłowania i sukcesu?
4. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na rozwój otwartości myślenia matematycznego uczniów?
5. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na poziom umiejętności matematycznych uczniów klasy siódmej?
6. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na rozwój zdolności matematycznych uczniów klas siódmych?

Odpowiedzi na powyższe pytania dostarcza obserwacja klas siódmych, obserwacja klas gimnazjalnych, studium przypadku ucznia gimnazjum rozwiązania wybranych zadań z przygotowanych własnych materiałów oraz osiągnięcia uczniów w konkursach matematycznych o różnym charakterze.

8.3.2. Problemy badawcze w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego.

W ramach głównego problemu badawczego w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego wyróżniono następujące pytania szczegółowe:

1. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?
2. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?
3. W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?
4. Czy istnieje zależność między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów?

Odpowiedzi na powyższe pytania badawcze dostarczyła analiza statystyczna danych uzyskanych w trakcie przeprowadzonego eksperymentu pedagogicznego.

Efektem określenia problemów badawczych jest możliwość sformułowania hipotez, które są następnym etapem procedury badawczej, bowiem celem każdego badania jest zweryfikowanie postawionych hipotez. W badaniach naukowych *sensu largo* stanowi ona prawdopodobne założenie, którego zgodność lub niezgodność z rzeczywistością powinna być dowiedziona w trakcie prowadzonych czynności badawczych. Hipoteza badawcza, która często nazywana jest hipotezą roboczą, jest stwierdzeniem, co do którego istnieje pewne prawdopodobieństwo, że stanowi ona prawdziwe rozwiązanie badanego problemu. Dlatego też zaleca się, by była ona przedstawiana w formie twierdzącej, a zatem nie powinna mieć charakteru ani zdania przeczącego, ani oceniającego, pytającego czy postulującego. Ponadto jej wymogiem jest określenie współzależności między zmienną niezależną i zależną (Łobocki, 2000).

Samo pojęcie hipoteza wywodzi się od łacińskiego słowa *hypothesis* lub greckiego *hypóhtesis* Używali jego Platon (428/427-348/347 p.n.e.) jak i jego uczeń Arystoteles ze Stagiry (384-322 p.n.e.) w *Analitykach pierwszych* i *Analitykach wtórnych* (Krajewski, 2006). W nauce problem hipotetyczny oznacza to, iż oparty jest on na hipotezie bądź będący *stricte* hipotezą. Na pytanie zadane w 1805 r. przez cesarza Napoleona francuskiemu matematykowi, astronomowi i fizykowi Pierre Simona de Laplace (1749-1827), dlaczego w swej *Mechanice nieba* nie wspominał o Bogu, ten odpowiedział tak:
„*Najjaśniejszy Panie, nie potrzebowałem tej hipotezy*" (H. Markiewicz, A. Romanowski, 1990, s. 237). Stawiana lub przyjęta hipoteza ma zatem na celu odkrycie nieznanych dotąd praw lub zjawisk (Sobol, 1995). W literaturze przedmiotu spotkać można wiele określeń tego pojęcia. Jak wskazuje W. Okoń są one „niesprawdzonymi twierdzeniami, których sprawdzenie odbywa się przez wyprowadzenie z nich wniosków empirycznych." (Okoń, 1984). H. Muszyński z kolei definiuje hipotezę jako „przypuszczenie dotyczące zachodzenia pewnych zjawisk lub zależności między nimi, które pozwala wyjaśnić jakiś nie wytłumaczony dotąd zespół faktów, będący pewnym problemem" (Muszyński, 1971, s.188). J. Gnitecki natomiast uważa, że „hipotezy stanowią przypuszczalne odpowiedzi na problemy badawcze i dotyczą spodziewanego kierunku zależności lub przewidywanego kierunki wydarzeń" (Gnitecki, 1993, s.136). Ze względu na stopień ogólności można dokonać podziału na dwa rodzaje hipotez: „hipotezy proste – wyprowadzone z uogólnienia prostych obserwacji, 159 - hipotezy złożone – zakładające istnienie powiązań między wydarzeniami lub nawet skomplikowanych łańcuchów przyczyn i skutków" (Pilch, 1998, s.38).
Hipoteza robocza sprawdzana jest w trakcie badań empirycznych lub wcześniejszych badań cząstkowych. Badania naukowe powinny więc zmierzać w kierunku sprawdzenia prawdziwości przyjętej hipotezy, jej falsyfikacji lub wykazania jej fałszywości. Zdaniem H. Muszyńskiego (1971) dobrze sformułowana hipoteza musi spełniać kilka warunków, takich jak m.in.: - być sprawdzalna; - określać zależności między zmiennymi; - mieć ściśle ograniczona zasięg; - być zbudowana na podstawie już uznawanej wiedzy naukowej; - ukierunkowywać wysiłek badacza; - być zdaniem wysoce prawdopodobnym; - dotyczyć istotnych dla danej nauki zdarzeń i mieć moc teorio twórczą; - nie być sprzeczna z udowodnionymi już twierdzeniami danej dyscypliny naukowej; - być jednoznaczna i dostatecznie szczegółowo sformułowana; - tłumaczyć w sposób dostateczny znane już fakty.

8.3.3. Hipotezy badawcze w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego.

W badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego weryfikacji poddana została główna hipoteza badawcza, w brzmieniu:

Poziom rozwoju zdolności, umiejętności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

W ramach głównej hipotezy badawczej sformułowano następujące hipotezy szczegółowe:

1. Poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

2. Poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

3. Poziom umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod, nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

4. Nie istnieją zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań u badanych uczniów a ich płcią.

8.3.4. Hipotezy badawcze w badaniach metodą obserwacji i metodą studium przypadku.

W badaniach za pomocą obserwacji oraz w badaniu za pomocą metody studium przypadku postawiano dodatkowo następujące hipotezy szczegółowe:

1. Przy jednoczesnym wzroście rozwoju otwartości myślenia matematycznego uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program nastąpi jednoczesny wzrost ich poziomu umiejętności matematycznych.
2. Poziom rozwoju zdolności matematycznych u uczniów biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Wszystkie poczynione obserwacje stanowiły uzupełnienie badań eksperymentalnych a wnioski z nich płynące pomogły je zweryfikować.

8.4. Zmienne i wskaźniki.

Kolejny etap pracy badawczej stanowi wyłonienie zmiennych oraz przyporządkowanie im wskaźników. Prowadzone bowiem w ilościowych badaniach pedagogicznych różnego typu pomiary zjawisk i faktów musza uwzględniać zmienne i wskaźniki, czyli uszczegółowienie problemów badawczych i związanych z nimi hipotez roboczych. Wynikają one z postawionych problemów badawczych. „Zmienne są to czynniki, które przyjmują różne wartości" (Gnitecki, 1993, s.141), gdzie wartość pojmowana jest w sensie ilościowym lub jakościowym. W pedagogice empirycznej spotkać możemy różne podziały zmiennych, natomiast panuje zgodność odnośnie potrzeby wyłonienia zmiennych niezależnych i zmiennych zależnych. M. Łobocki wskazuje, że zmiennymi niezależnymi mogą być różne i ściśle określone sposoby działalności dydaktycznej lub wychowawczej; z kolei zmiennymi zależnymi wyniki zastosowanych w badaniach oddziaływań pedagogicznych. Zmiennymi niezależnymi mogą być zatem wszelkiego rodzaju metody nauczania i wychowania, niektóre cechy osobowości, np., wysoki poziom motywacji, dezorganizacja życia rodzinnego, negatywne wpływy wychowawcze grup rówieśniczych itp. (Łobocki, 2000).
Ponadto M. Łobocki wyróżnia zmienne pośredniczące i zmienne kontrolne, a także zmienne ilościowe i zmienne jakościowe (Łobocki, 2000). Zmienne zależne to faktyczne lub przypuszczające skutki uwzględnionych w badaniach zmiennych niezależnych, czyli spodziewane przez badającego wyniki zastosowanych oddziaływań wychowawczych, np. wykorzystane w eksperymencie pedagogicznym nad skutecznością kierowania wychowawczego takie elementy, jak: stosunek do nauki i obowiązków szkolnych, osiągane wyniki nauczania, aktywność społeczna uczniów, postawa wobec rówieśników w klasie itp. (Łobocki, 2000).

Po wyłonieniu i zdefiniowaniu zmiennych kolejną czynnością badawczą jest ustalenie danych, na podstawie których można wnioskować o wystąpieniu i nasileniu poszczególnych zmiennych. Według S. Nowak „wskaźnikiem jakiegoś zjawiska Z nazywać będziemy takie zjawisko W. którego zaobserwowanie pozwoli nam (w sposób bezwyjątkowy lub z określonym czy choćby wyraźnym od przeciętnego prawdopodobieństwem) określić, iż zaszło zjawisko Z" (za: Gnitecki, 1993, s.146). Żeby można było wnosić o zajściu jakiegoś zjawiska stosuje się różne wskaźniki, które wyprowadza się z: bezpośredniej obserwacji zjawiska wskaźnikowego, definicji terminu związanego z badanym zjawiskiem lub z obserwacji zjawiska towarzyszącego zjawisku nieobserwowalnemu. S. Nowak (za: Łobocki, 1984) dlatego wyróżnia trzy typy wskaźników: 1. wskaźniki empiryczne; 2. wskaźniki definicyjne; 3. wskaźniki inferencyjne. „Wskaźniki empiryczne występują wtedy, gdy wskazane przez nie zjawisko daje się zaobserwować" (Gnitecki, 1993, s.147). Wskaźniki definicyjne z kolei mają miejsce wówczas, gdy wynikają z definicji pewnego zjawiska lub faktu" (Łobocki, 1984, s.102), inferencyjne natomiast „(…) odnoszą się do zjawisk bezpośrednio nieobserwowalnych i nie wchodzą do definicji badanych zjawisk" (Łobocki, 1984, s.104).

W tym miejscu pracy wyszczególniono zmienne wraz z ich wskaźnikami, które sformułowane zostały w odniesieniu do badań przeprowadzonych metodą obserwacji oraz metodą eksperymentu pedagogicznego.

8.4.1. Zmienne i wskaźniki w badaniach metodą obserwacji i metodą studium przypadku.

Głównymi zmiennymi niezależnymi w badaniach przeprowadzonych metodą obserwacji i studium przypadku są: heurystyczna metoda nauczania matematyki a także autorski program nauczania matematyki, natomiast głównymi zmiennymi zależnymi są zdolności, umiejętności matematyczne oraz otwartość myślenia matematycznego uczniów klas siódmych szkoły podstawowej, uczniów gimnazjum i wybranego ucznia gimnazjum. Zmienne zależne szczegółowe wraz z ich wskaźnikami w badaniach metodą obserwacji zostały zamieszczone w tabeli 1.

Tabela 1. Zmienne zależne szczegółowe i ich wskaźniki dla głównego problemu badawczego w badaniach metodą obserwacji i studium przypadku

Zmienna zależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Zainteresowanie przedmiotem	wyniki prac pisemnych, poziom udzielanych odpowiedzi na zadane pytania, poziom zainteresowania udziałem w wydarzeniach matematycznych, poziom zainteresowania organizacją wydarzeń matematycznych (własnych prelekcji, sędziowania meczy matematycznych itp.), dalsze wybory szkół i profili klas
Zdolności matematyczne uczniów	odpowiedzi uczniów na zadane pytania, osiągnięcia w konkursach, poziom napisanych prac twórczych poziom redagowanych rozwiązań
Umiejętności matematyczne uczniów klas siódmych i uczniów gimnazjum	wyniki prac pisemnych z matematyki, wyniki egzaminu gimnazjalnego z matematyki, jakość udzielanych odpowiedzi
Otwartość myślenia matematycznego	odpowiedzi na zadane problemy matematyczne, rozwiązania zadań problemowych z przeprowadzonych testów kontrolnych wykonywanych pomiędzy pretestem a posttestem, twórcze projekty, prace

Źródło: Opracowanie własne.

Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźniki w badaniach metodą obserwacji i metodą studium przypadku zostały zamieszczone w tabeli 2

Tabela 2. Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźnik dla głównego problemu badawczego w badaniu metodą obserwacji i studium przypadku

Zmienna niezależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Sposób odnajdywania uczniów uzdolnionych matematycznie	podjęte działania, sukcesy uczniów

Poziom motywacji uczniów	atmosfera na zajęciach, działania uczniowskie
Poziom zaangażowania w pracę	podjęte działania

Źródło: Opracowanie własne.

8.4.2. Zmienne i wskaźniki w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego.

Głównymi zmiennymi niezależnymi w badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego są: heurystyczna metoda nauczania matematyki a także autorski program nauczania matematyki, natomiast głównymi zmiennymi zależnymi: poziom zdolności, umiejętności matematycznych oraz otwartości myślenia matematycznego uczniów klas siódmych szkoły podstawowej i uczniów gimnazjum. Zmienne zależne szczegółowe wraz z ich wskaźnikami w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego zostały zamieszczone w tabeli 3.

Tabela 3. Zmienne zależne szczegółowe i ich wskaźniki dla głównego problemu badawczego w badaniach eksperymentalnych

Zmienna zależna szczegółowa	**Wskaźniki zmiennej**
Otwartość myślenia matematycznego	uczniowskie rozwiązania zadań problemowych i geometrycznych posstestu
Umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych	wynik posttestu z części arytmetycznej
Umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych	wyniki postestu z części geometrycznej
Umiejętności matematyczne	wyniki monitoringu z matematyki
Zdolności matematyczne	indywidualne wyniki serii testów przeprowadzonych pomiędzy pretestem a postetestem poszczególnych uczniów, ilość sukcesów w konkursach

Źródło: Opracowanie własne.

Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźniki w badaniach eksperymentalnych zostały zamieszczone w tabeli 4.

Tabela 4. Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźniki dla głównego problemu badawczego w badaniach eksperymentalnych

Zmienna niezależna szczegółowa	**Wskaźnik zmiennej**
Płeć ucznia	cecha fizyczna: -dziewczynka -chłopiec

Źródło: Opracowanie własne

8.5. Metody badawcze.

Następnym etapem pracy badawczej jest wybór odpowiedniej metody, techniki i narzędzi, które posłużą do poszukania odpowiedzi na określony wcześniej problem badań. Metodą badań określamy zespół teoretycznie uzasadnionych zabiegów koncepcyjnych i instrumentalnych, obejmujących całość postępowania badacza, które w konsekwencji ma prowadzić do rozwiązywania zakreślonego problemu naukowego (Kamiński, 2006). Metoda jest drogą realizacji procesu badawczego przyjętym przez badacza i wyróżniać się powinna adekwatnością do przyjętej hipotezy badawczej. Jednocześnie powinna być kompatybilna z technikami badawczymi. Ma ona ułatwić określenie hipotez roboczych lub prawidłowości określających stopień ich prawdopodobieństwa. Do metod badań pedagogicznych zalicza się powszechnie:

• monografię pedagogiczną,
• metodę indywidualnych przypadków, nazywana niekiedy jako studium indywidualnych przypadków,
• eksperyment pedagogiczny,
• sondaż diagnostyczny.
Natomiast w zakresie zbierania danych w badaniach pedagogicznych można zastosować inny podział, dzieląc je na:
• metody jakościowe, a w nich:
– obserwację etnograficzną,
– wywiad,
– przeszukiwanie i analiza archiwów,
• metody ilościowe, gdzie pozostają: – metody obserwacyjne (obserwacja ilościowa, eksperyment),
• metody sondażowe:
– ankieta,
– testy wystandaryzowane,
– wywiad ilościowy (Rubacha, 2003).

Można spotkać się również z jeszcze inną klasyfikacją metod i przyporządkowanych im technik badawczych: metoda obserwacji, szacowania, eksperyment pedagogiczny, testy osiągnięć szkolnych, metoda socjometryczna, metoda sondażu, metoda dialogowa, metoda biograficzna z dwiema jej odmianami: metodą monograficzną i metoda indywidualnych przypadków (Łobocki, 1984). W. Zaczyński z kolei metodę badań definiuje jako „sposób systematycznie stosowany, to znaczy w danym przypadku z intencją zastosowania go także przy ewentualnym powtórzeniu się analogicznego zadania.” (Zaczyński, 1990, s. 18). J. Sztumski definiując metodę wskazuje, iż „jest to na ogół system założeń i reguł pozwalających na uporządkowanie praktycznej lub teoretycznej działalności, aby można było osiągnąć założony cel.” (Sztumski, 1984, s.46). Ponadto T. Plich(1995) wyszczególnił następujące warunki poprawnej metody badawczej, która powinna:
a) „być adekwatna do problemu, którego rozwiązanie jest zadaniem badawczym,

b) zmierzać najkrótszą drogą do realizacji podjętej zadania badawczego;

c) określać generalny sposób postępowania badawczego odpowiadającego ogólnej koncepcji badań,

d) precyzować ramy terytorialne i czasowe w postaci hipotez lub prawidłowości ogólniejszych o określonym stopniu prawdopodobieństwa,

e) sugerować wybór technik badawczych,

f) ułatwić proponowane opracowanie badań w postaci hipotez." (Plich, 1995, s. 66).
M. Łobocki natomiast wskazuje, że: „metody są pewnym określonym, systemem reguł, dotyczących organizowania określonej działalności badawczej, tj. szeregu operacji poznawczych i praktycznych, kolejności ich zastosowania, jak również specjalnych środków działań skierowanych z góry na założony cel badawczy." (Łobocki, 1990, s.115).

Prowadząc badania posłużyłam się następującymi metodami:

-metodą eksperymentu pedagogicznego,

-metodą indywidualnych przypadków,

-metodą obserwacji.

Jednak główną metodą badawczą w badaniach określających skutek zastosowania heurystycznych metod nauczania matematyki oraz pracy z własnym autorskim programem był eksperyment pedagogiczny. Metoda ta uznawana jest za jedną z najistotniejszych metod, które wykorzystywane są w badaniach pedagogicznych. Definiuje się ją jako „badania określonego wycinka rzeczywistości (wychowawczej), polegająca na wywoływaniu lub tylko zmienianiu przebiegu procesów przez wprowadzanie do nich jakiegoś nowego czynnika i obserwowaniu zmian powstałych pod jego wpływem" (T. Plich, T. Bauman, 2001, s.73). Za badanie eksperymentalne uznaje się takie, które umożliwia manipulację zmienną niezależną główną, kontrolowanie pozostałych zmiennych niezależnych oraz pomiar zmienności zmiennej zależnej spowodowanej zamierzonym przez badacza oddziaływaniem na nią zmiennej niezależnej głównej (Brzeziński, 2000, s. 52). Metoda ta przebiega wedle ściśle określonego schematu postępowania nazywanego planem eksperymentalnym, który to powinien być sformułowany na zadawalającym poziomie i powinien spełniać kryteria natury metodologicznej a także kryteria natury psychologicznej (Brzeziński, 2015). Powinien także zapewnić badaczowi możliwość bezpośredniej manipulacji co najmniej jedną zmienną niezależną oraz możliwość kontroli nad zmiennymi ubocznymi. Ponadto również osoby poddane badaniom oraz poziomy zmiennej eksperymentalnej powinny być rozdzielone w sposób losowy (Brzeziński, 2015).

W niniejszych badaniach metoda eksperymentalna została zastosowana do określenia wpływu wprowadzenia czynnika eksperymentalnego, jakim było wykorzystanie podczas zajęć matematycznych heurystycznych metod pracy a także autorskiego programu nauczania, na zdolności, umiejętności matematyczne uczniów oraz na ich otwartość myślenia matematycznego. Realizacja zaplanowanego eksperymentu przebiegała etapowo. Na potrzeby badań przyjęto schemat postępowania, w którym ujęte zostały poszczególne fazy eksperymentu. Były to: wstępna diagnoza (pretest), będący punktem wyjścia do późniejszych analiz, następnie wprowadzenie czynnika eksperymentalnego (przeprowadzenie zajęć z wykorzystaniem heurystycznych metod pracy i programu autorskiego na lekcjach matematyki wśród uczniów klas siódmych szkoły podstawowej i diagnoza końcowa (posttest), umożliwiająca określenie wpływu zastosowania heurystycznych metod nauczania matematyki oraz autorskiego programu na lekcjach matematyki na zdolności, umiejętności matematyczne a także otwartość myślenia matematycznego uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. W opisywanych badaniach eksperymentalnych wykorzystano klasyczny schemat eksperymentalny z jedną grupą eksperymentalną GE i jedną grupą kontrolną GK. Pretest i posttest wykonano w obu tych grupach.

Realizacja klasycznego schematu eksperymentalnego ma przebieg etapowy i zakładała wykonanie:

Etap 1 – przeprowadzenie diagnozy wstępnej (pretestu) w grupie eksperymentalnej GE i grupie kontrolnej GK,

Etap 2 – wprowadzenie czynnika eksperymentalnego do grupy eksperymentalnej GE

Etap 3– przeprowadzenie diagnozy końcowej (posttestu) w grupie eksperymentalnej GE i grupie kontrolnej GK.

Zastosowane w niniejszych badaniach prestest i posttest były testami dydaktycznymi, opracowanymi przez autorkę niniejszej dysertacji. Test dydaktyczny stanowi zbiór zadań do wykonania, identycznych dla wszystkich badanych, wprowadzonych intencjonalnie w ściśle kontrolowanych warunkach oraz umożliwiających za pomocą jednakowych dla wszystkich kryteriów, pomiar ilości i jakości efektów nauczania i uczenia się w ściśle określonym zakresie (Kubielski, 2006, s.48). Ponadto zakres wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązania zadań zawartych w preteście i w postteście był zgodny z obowiązującą w czasie trwania eksperymentu Podstawą programową kształcenia ogólnego uczniów siódmej klasy szkoły podstawowej w zakresie matematyki. Każde zadanie zawierało także zrozumiałą dla ucznia instrukcję. Każdy z przygotowanych testów zawierał tylko zadania matematyczne o charakterze otwartym, które wymagały od ucznia samodzielnego formułowania i zapisywania odpowiedzi. Część zadań w przygotowanych testach zaczerpnięta została z dostępnej literatury zawierającej gotowe zadania dla uczniów499 a część z nich była autorstwa własnego. Każdy z tych testów zawierał także zadania problemowe. Pomiędzy pretestem a posttestem wśród grupy eksperymentalnej przeprowadzono cykl testów kontrolnych w celu obserwacji „poziomu” zdolności wybranych uczniów). Wszystkie przeprowadzone w badanych grupach testy zawierały zadania arytmetyczne i geometryczne. Pretest złożony był z trzynastu zadań o wysokim, aczkolwiek zróżnicowanym stopniu trudności z różnych obszarów matematyki. Posttest z kolei z dziewięciu. Zawarte w nich zadania były tak dobrane, by z jednej strony nie były zadaniami, z którymi uczeń ma styczność na co dzień w szkole, z drugiej zaś strony, by uczeń w tym wieku był w stanie je rozwiązać bez żadnej specjalnej wiedzy czy metody.

Ocena poprawności rozwiązania przez uczniów poszczególnych zadań pretestu i posttestu dokonana została w oparciu o przygotowany przez autorkę pracy poniższy schemat punktowania:

Kryteria oceny zadań pretestu

Zadanie. 1:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 1punkt, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1 punkt.

Zadanie. 2:

Za poprawny sposób obliczenia (metodę) uczeń otrzymuje 2 punkt, za poprawne obliczenia 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie. 3:

Za podanie 1 przykładu uczeń otrzymuje 1 punkt, za podanie 2-3 przykładów otrzymuje 2 punkty, za podanie powyżej 3 przykładów otrzymuje 3 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie. 4:

Za zastosowanie poprawnej metody rozwiązania uczeń otrzymuje 2 punkty, za poprawne obliczenia 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie. 5:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 1punkt, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1 punkt.

Zadanie. 6:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 1punkt, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1 punkt.

Zadanie. 7:

Za zastosowanie poprawnej metody rozwiązania uczeń otrzymuje 2 punkty, za poprawne obliczenia 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty

Zadanie. 8:

Za poprawne stwierdzenie uczeń otrzymuje 1 punkt, za dostrzeżenie zależności 2 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty

Zadanie. 9:

Za podanie 1 sposobu uczeń otrzymuje 1 punkt, za podanie 2-3 możliwości otrzymuje 2 punkty, za podanie powyżej 3 otrzymuje 3 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie. 10:

Za poprawne uzupełnienie ciągu uczeń otrzymuje 1 punkt, za prawidłowe zapisanie zauważonej reguły otrzymuje 2 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie 11:

Za podanie poprawnego sposobu uczeń otrzymuje 2 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2 punkty.

Zadanie 12:

Za podanie prawidłowej odpowiedzi uczeń otrzymuje 1 punkt, za podanie poprawnego uzasadnienia 2 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie 13:

Za prawidłowe uzasadnienie uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 1 punkt.

Kryteria oceny zadań posttestu

Zadanie. 1:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 2 punkty, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2 punkty.

Zadanie. 2:

Za poprawny sposób obliczenia (metodę) uczeń otrzymuje 2 punkty, za poprawne obliczenia 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Zadanie. 3:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 2 punkty, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2 punkty.

Zadanie. 4:

Za zastosowanie poprawnej metody rozwiązania uczeń otrzymuje 3 punkty, za poprawne obliczenia 2 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 5 punktów.

Zadanie. 5:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 2 punkty, za błędną lub brak 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2 punkty.

Zadanie. 6:

Za podanie prawidłowej odpowiedzi uczeń otrzymuje 2 punkty. Za poprawne uzasadnienie 3 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 5 punktów.

Zadanie. 7:

Za poprawny rysunek bez uzasadnienia uczeń trzymuje 2 punkty, za poprawny, dowolny sposób uzasadnienia otrzymuje 4 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4 punkty.

Zadanie. 8:

Za poprawnie uzupełnioną jedną cyfrę uczeń otrzymuje 1 punkt, za poprawie wpisanie dwie cyfry uczeń otrzymuje 2 punkty, za trzy odpowiednio 3 punkty, za pełne, poprawne uzupełnienie czterech cyfr uczeń otrzymuje 4 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4 punkty.

Zadanie. 9:

Za poprawnie wskazany ruch uczeń otrzymuje 3 punkty. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3 punkty.

Maksymalna liczba punktów możliwych do otrzymania przez uczniów za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań zarówno w preteście, jak i postteście wynosiła 30. Punkty uzyskane przez uczniów w teście początkowym oraz w teście końcowym posłużyły do wykonania analiz statystycznych, które miały celu weryfikację postawionych w badaniach eksperymentalnych hipotez a także udzielenie odpowiedzi na postawione w pracy pytania badawcze. Procedura wykonania analiz wyników badań własnych wynikała bezpośrednio z przyjętego na potrzeby niniejszej dysertacji klasycznego schematu eksperymentalnego w swej najprostszej postaci, który wymaga skonstruowania dwóch grup porównawczych: grupy eksperymentalnej i grupy kontrolnej, ujednoliconych pod istotnymi względami, zwłaszcza pod względem zmiennej zależnej, a więc pod względem tego, na co ma mieć wpływ badane przez nas działanie (bodziec). Grupy te mogą składać się z osób, zbiorowości lub instytucji.

Po wyborze grup: eksperymentalnej i kontrolnej, dokonujemy pomiaru przynajmniej wartości zmiennej zależnej (czyli wykonujemy tzw. pretest) w obu tych grupach a następnie grupę eksperymentalną poddajemy oddziaływaniu bodźca. Po odpowiednim czasie dokonujemy ponownie pomiaru wartości zmiennej zależnej (czyli wykonujemy tzw. posttest) pamiętając o zastosowaniu jednolitych narzędzi pomiarowych podczas wykonywaniaich wykonywania. Jeśli wynik pretestu w grupie eksperymentalnej oznaczymy symbolem Epre, zaś w grupie kontrolnej Kpre, natomiast wynik posttestu w grupie eksperymentalnej symbolem Epos, zaś w grupie kontrolnej Kpos, wówczas wpływ bodźca (działania) wyraża różnica (d), którą obliczamy korzystając z poniższego wzoru:

$$d = (Epos - Epre) - (Kpos - Kpre).$$

Taki eksperymentalny schemat klasyczny radzi sobie ze wszystkimi wyżej omawianymi trudnościami w określeniu wpływu działania na badaną grupę jednostek (sytuację) a wstępne ujednolicenie grupy eksperymentalnej i kontrolnej pozwala kontrolować pozostałe (inne niż wprowadzony bodziec) czynniki uboczne oraz wewnętrzne zmiany zachodzące w grupach, ponieważ działają one na obie grupy jednakowo. Ponadto w schemacie klasycznym efektywna kontrola innych czynników niż bodziec, nie wymaga uprzedniego przewidzenia ich pojawienia się - schemat ten bowiem dobrze kontroluje zarówno znane zakłócenia, jak i te których istnienia nawet się nie domyślamy. Z kolei fakt, czy zaobserwowane różnice mogą być wytłumaczone niekontrolowanymi okolicznościami przypadkowymi, sprawdzić można wykonując odpowiedni tzw. statystyczny test istotności (Sułek, 1986).

Weryfikacja wyników otrzymanych podczas badań eksperymentalnych dokonana została za pomocą wnioskowania statystycznego na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu Social Science Statistics (**https://www.socscistatistics.com**) oraz pakietu Excel. Przeprowadzone analizy statystyczne wymagały obliczenia średniego procentowego wyniku wykonania zadań przez badanych uczniów w preteście i w postteście. Zajęcia matematyczne w grupie eksperymentalnej przeprowadzone zostały przez autorkę niniejszej rozprawy, natomiast w grupie kontrolnej prowadzone były przez innego nauczyciela. Planowane do realizacji cele były podobne zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i kontrolnej a realizowane treści były zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych, która obowiązywała w roku szkolnym przypadającym na czas realizacji badań. Badanie metodą eksperymentu pedagogicznego przeprowadzono wśród uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. W trakcie badań eksperymentalnych prowadzono uzupełniające badania, w ramach których wykorzystano technikę obserwacji a także studium przypadku, które polegały na przeprowadzeniu kontrolowanej obserwacji zajęć matematycznych zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i grupie kontrolnej a także w innych klasach uczonych matematyki przez autorkę rozprawy.

8.6. Techniki badawcze

Badania opierają się na określonych technikach badawczych, czyli czynnościach praktycznych regulowanych starannie wypracowanymi wskazaniami, pozwalających na uzyskanie optymalnie sprawdzalnych informacji, opinii i faktów. W sensie rzeczowym technika jest podrzędna w stosunku do metody i stanowi sposób zbierania i gromadzenia materiałów oraz źródeł do badań. Techniki mają charakter instrukcji, które ograniczają się do pojedynczych czynności, a ich cechą powinny być użyteczność i skuteczność stosowania (Plich, 1998). Łobocki (1984) odnosi techniki badawcze do poszczególnych metod badawczych i wśród technik obserwacyjnych wyróżnia:

- technikę obserwacji dorywczej;
- technikę dzienników obserwacyjnych;
- technikę obserwacji kategoryzowanej;
- technikę obserwacji biernej;
- technikę próbek fotograficznych, próbek czasowych i próbek zdarzeń;

Z kolei do technik eksperymentu zalicza:

- technikę prób równoległych;
- technikę rotacji;
- technikę jednej grupy.

Natomiast wśród technik analizy dokumentów wyróżnia:

- technikę analizy treściowej;
- technikę analizy formalnej;
- technikę analizy grupowej;
- technikę diagnostyczną;
- technikę analizy rozwojowej
- technikę analizy psychologicznej.

Wśród technik badawczych wykorzystywanych w badaniach pedagogicznych (Plich, 1971 wskazuje:

- obserwację;
- wywiad;
- techniki projekcyjne;
- ankietę.

W literaturze spotkać możemy także opracowania dotyczące wykorzystania statystyki w badaniach pedagogicznych, skąd wskazać możemy jeszcze techniki statystyczne, które to w pedagogice stanowią podstawę opracowywania materiału badawczego. Statystyka jako pomocnicza technika ma szczególne znaczenie przy zastosowaniu takich metod badawczych jak: monografia, sondaż diagnostyczny i metoda indywidualnych przypadków.

W celu uzyskania materiału badawczego pozwalającego odpowiedzieć na uprzednio postawione problemy, zastosowana zostanie technika testu osiągnięć szkolnych, technikę obserwacji i technikę prób równoległych. Celem stosowania techniki testów osiągnięć szkolnych jest postawienie diagnozy. Oceniają one osiągnięcia szkolne uczniów w zakresie danej wiedzy i umiejętności określonego przedmiotu nauczania. Takie testy mogą obejmować:

- proste odtwarzanie z pamięci,

- rozumienie,

- umiejętność rozwiązania znanego problemu,

- umiejętność rozwiązania nowego problemu,

- krytyczną ocenę sytuacji,

- zdolność do syntezy? (Łobocki, 2006).

Testy osiągnięć szkolnych można podzielić wg B. Niemierko ze względu na:

- mierzoną cechę osiągnięć badanego,

- układ odniesienia wyników testowania,

- stopień zaawansowania konstrukcyjnego testu,

- zasięg stosowania testu,

- typ czynności wykonywanej przez badanego dla udzielenia odpowiedzi na zadanie testowe? (Łobocki, 2006, s.143). O kolejnej z użytych przeze mnie technik- obserwacji Jerzy Apanowicz pisze w następujący sposób: „Obserwacja naukowa staje się wówczas techniką badawczą, gdy ogranicza się ją tylko do prostego spostrzegania jednostkowych faktów, zjawisk, osób lub przedmiotów w ściśle wyznaczonym czasie i miejscu. Praktycznie przedmiotem obserwacji w badaniach naukowych może być wszystko to, co jest możliwe i dostępne zmysłom obserwatorowi" (Apanowicz, 2002, s.81).

Do podstawowych rodzajów technik obserwacji naukowej zaliczamy:

- technikę obserwacji zewnętrznej,

- technikę obserwacji uczestniczącej,

- technikę obserwacji własnej działalności.

Techniki te pomimo swojej specyfiki i odrębności zapewniają celowe i zgodne z koncepcją badań obserwowanie ściśle wyznaczonych osób, przedmiotów czy zdarzeń z nimi związanych., wówczas, gdy ich organizacja i przebieg przewidują:

- nawiązanie kontaktu z obserwowaną osobą czy zbiorowością,

- prowadzenie obserwacji zgodnie z wytycznymi,

- sporządzanie protokołu z obserwacji. Spostrzeżenia mogą być utrwalane różnie, w zależności od charakteru obserwacji, zastosowanej techniki i narzędzi badawczych.

M. Łobocki (2000) techniki obserwacji dzieli na:

1. techniki obserwacji standaryzowanej , do których zalicza:

- obserwację skategoryzowaną – dotyczącą określonych kategorii interesującego badacza

zjawiska; zapewniającą dokładność spostrzeżeń i redukującą do minimum czas obserwacji; pozwalającą uzyskać materiał nadający się do ilościowego opracowania

- obserwację próbek czasowych – pozwalającą na obserwowanie określonych

zjawisk w niedługich jednostkach.

2. techniki obserwacji niestandaryzowanej, do których zalicza:

- obserwację dorywczą – wyrywkowy zapis przejawów zachowania się uczniów,

- obserwację dzienników obserwacyjnych – systematyczne, zaplanowane; zakończone sporządzoną notatką tuż po zakończeniu zajęć

- obserwację próbek zdarzeń – obserwację jednej grupy; w której czas obserwacji wyznacza zjawisko, które nas interesuje, czasu obserwacji nie wyznacza obserwator,

- obserwację fotograficzną – ciągłą, czasową, w której czas narzuca obserwator

Z kolei za zalety obserwacji uznaje:

- możliwość bezpośredniego poznania zachowania się dzieci i młodzieży w

naturalnych warunkach i okolicznościach,

- łatwość sformułowania hipotezy roboczej lub wprowadzenia w niej zmian i poprawek we

wstępnej fazie badań jak również częściowe jej zweryfikowanie,

- umożliwienie sprowadzania twierdzeń uzyskanych za pomocą innych metod, przez co pogłębione jest nasze przekonanie o ich słuszności,

- stanowienie ważnego uzupełnienia i dopełnienia metod badań, a w szczególności metod testowych,

- możliwość uzyskania informacji o uczuciach, które trudno zdobyć innymi metodami

badawczymi,

- sprzyjanie ciągłemu ulepszaniu własnej pracy dydaktyczno – wychowawczej.

(Łobocki, 2000).

8.6.1. Techniki badawcze wykorzystane w badaniach metodą obserwacji i studium przypadku

W opisanych badaniach w ramach metody obserwacji i studium przypadku wykorzystano technikę obserwacji dorywczej.

8.6.2. Techniki badawcze wykorzystane w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego.

W opisanych badaniach w ramach metody eksperymentu pedagogicznego wykorzystano technikę grup równoległych.

8.7. Narzędzia badawcze

Do realizacji wybranej techniki badawczej służą narzędzia badawcze. Zaliczamy do nich:

- kwestionariusz wywiadu,
- kwestionariusz ankiety,
- arkusz obserwacyjny,
- narzędzia socjometrii,
- narzędzia obserwacji,
- skale (jako narzędzie pomiaru),
- urządzenia audiowizualne.

W. Okoń wskazuję, iż „są to materiały lub urządzenia techniczne służące do przeprowadzania badań i opracowywania ich wyników” (Okoń, 1995, s.182). W ujęciu T. Pilcha natomiast narzędzie badawcze „(…) oznacza sposób technicznego gromadzenia badań i opracowania ich wyników” (Pilch, 1998, s.135). T. Pilch (1998) wskazuje także reguły i zasady metodologiczne obowiązujące podczas przygotowania dowolnego narzędzia badawczego:

- konieczność budowania dla każdych badań odrębnych narzędzi badawczych;

- podporządkowanie budowy i treści narzędzi celom ogólnym badań;

- konstruowanie pytań odróżniających opisywanie od opiniowania;

- stosowanie właściwej kolejności w przygotowaniu badań;

- dyscyplinę w zakresie jednoznaczności i ścisłości używanych pojęć i zdań;

- respektowanie faktu, że wewnętrzna struktura narzędzi badań, stopień ich standaryzacji, wielkość, pytania kontrolne i filtrujące wpływają na wiarygodność uzyskiwanych informacji;
- konieczność, by było ono rzetelne i trafne. J. Gnitecki z kolei podkreśla, że wszystkie narzędzia badawcze musi charakteryzować:

- „trafność pomiaru, czyli dostarczenie informacji o tym czynniku, który jest przedmiotem badania, a nie o kilku jednocześnie bez możliwości ich wyodrębnienia,

- rzetelność, czyli dokładność pomiaru, a więc nie mogą być obarczone takim błędem, który uniemożliwiłby wnioskowanie z danych,

- praktyczność, więc muszą być dogodne w użyciu i stosowaniu na dużą skalę” (Gnitecki, 1993, s.153-154).

Arkusze obserwacji, występujące głównie w formie tabeli, to arkusze podzielone na szczegółowe ustalenia płynące z danej obserwacji. Nie sporządza się ich do obserwacji regularnych, tylko takich, które wykonujemy kilka razy. Do narzędzi diagnostycznych zaliczyć możemy również testy predyspozycji i zdolności, kwestionariusze i skale, które mogą stosować zarówno psychologowie jak i nauczyciele, którzy specjalizują się w pracy z uczniem zdolnym (Limont ,2005). Test jest próbą rozpoznania interesujących nas właściwości pewnych przedmiotów i składa się on zazwyczaj z racjonalnie dobranego zestawu zadań, które to wykonać ma osoba lub grupa badana. Testy służą do oceny rezultatów badań eksperymentalnych czy obserwacji i różnią się od innych sposobów kontroli i oceny wyników nauczania tym, że są od nich dokładniejsze, bardziej obiektywne, jak również wymierne. Doboru i układu zadań testowych dokonujemy w zależności od charakteru badanych czynników u interesującej badacza grupy lub osoby. Dzięki testom mamy możliwość porównywania grup i pojedynczych osób oraz ustalenia różnic indywidualnych. Mogą być one przygotowywane przez specjalistów i wówczas muszą spełniać wiele warunków wynikających ze statystyki oraz długotrwałych badań weryfikacyjnych, jak również mogą być konstruowane przez osoby badające wyniki prowadzonych przez siebie zajęć dydaktycznych (Kupiesiewicz ,2000).

Ilość testów jest spora, jednak w literaturze nie spotyka się numerycznego opisu testów, a próby klasyfikacji ich rodzajów. Dlatego osoba chcąca zbadać zakres wiedzy z jakiegoś przedmiotu nie znajdzie takiego testu w literaturze, może go jednak stworzyć mając cel i znając ogólne zasady budowania testów osiągnięć szkolnych. Dokonując klasyfikacji testów można brać pod uwagę różne punkty widzenia i stosować różne kryteria.

I tak z punktu widzenia przedmiotu pomiaru wyróżnia się:

- testy zdolności

- testy inteligencji,

-testy zdolności specjalnych,

Wśród testów osobowości:

-testy cech,

-testy zainteresowań,

-testy postaw,

-testy charakterologiczne,

-testy typologiczne,

i testy wiadomości

Z kolei z punktu widzenia metodyki pomiaru wyróżnia się:

-testy werbalne i niewerbalne, które mogą być:

- ustne,
- pisemne,
- rysunkowe,

- testy czynnościowe np. sytuacyjne oraz testy projekcyjne.

8.7.1. Narzędzia badawcze wykorzystane w badaniach metodą obserwacji i studium przypadku

W opisanych badaniach w ramach metody obserwacji i studium przypadku wykorzystano arkusz obserwacji, autorskie arkusze testów (aneks) do badania zdolności matematycznych i otwartości myślenia matematycznego oraz wybrane zadania. Arkusz obserwacji pracy uczniów podczas lekcji matematyki był narzędziem własnego autorstwa. Miał on charakter skategoryzowany, zawierał informacje na temat osoby prowadzącej obserwowane zajęcia oraz składał się z pytań dotyczących sposobów pracy uczniów na lekcjach matematyki. Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu Excel.

8.7.2. Narzędzia badawcze wykorzystane w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego

W opisanych badaniach w ramach metody eksperymentu pedagogicznego wykorzystano autorskie arkusze testów (aneks) do badania zdolności matematycznych i otwartości myślenia matematycznego a także test Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego sprawdzający umiejętności matematyczne po klasie siódmej. Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu Social Science Statistics oraz programu Excel.

8.8. Organizacja i przebieg badań.

Badania realizowane zarówno metodą eksperymentu pedagogicznego, jak i obserwacji i studium przypadku przeprowadzone zostały wedle harmonogramu zawartego w poniższej tabeli 5.

Tabela 5. Harmonogram badań własnych metodą eksperymentu pedagogicznego

Czynności badawcze	**Czas realizacji**
Kwerenda	marzec-lipiec 2017
Projekt badań	kwiecień 2017
Badania właściwe	wrzesień 2017- czerwiec 2017
Pretest	**wrzesień 2017**
Przeprowadzenie zajęć w ramach eksperymentu	**październik 2017- czerwiec 2017**
Posttest	**Czerwiec 2017**
Obserwacje	wrzesień 2017- czerwiec 2017

Harmonogram badań własnych metodą obserwacji i studium przypadku.

Obserwacja klas uczonych matematyki przez autorkę rozprawy oraz studium przypadku odbywały się w okresie wrzesień 2015- wrzesień 2017.

8.8.1. Organizacja i przebieg badań metodą eksperymentu pedagogicznego.

Organizacja i przebieg badań eksperymentalnych miały charakter etapowy i przebiegały następująco:

Etap wstępny, który obejmował następujące czynności:

– wybór szkoły, w której realizowany był eksperyment pedagogiczny,

– dobór grupy eksperymentalnej i kontrolnej,

– konstrukcja zadań testowych pretestu i posttestu,

– ustalenie schematu punktowania poprawnie rozwiązanych zadań pretestu i posttestu.

Badanie zasadnicze, które obejmowało wykonanie pomiaru początkowego (pretestu), przeprowadzenie eksperymentu pedagogicznego oraz wykonanie badań weryfikujących w postaci posttestu.

• Pomiar początkowy – pretest

– ocena umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK,

– ocena umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK,

– ocena umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK.

• Przeprowadzenie eksperymentu pedagogicznego:

– przeprowadzenie przez badaczkę zajęć matematycznych w grupie eksperymentalnej GE z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania matematyki według autorskiego programu nauczania oraz przeprowadzenie przez nauczycielkę zajęć matematycznych w grupie kontrolnej GK wykorzystujących tradycyjne metody pracy według programu nauczania Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego,

– obserwacja zajęć matematycznych w obu klasach,

• Pomiar końcowy – posttest:

– ocena umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych zawartych w postteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE i grupy kontrolnej GK,

– ocena umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych zawartych w postteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE i grupy kontrolnej GK,

– ocena umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych zawartych w postteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE i grupy kontrolnej GK.

Ostatnim etapem było przeprowadzenie badań weryfikujących, na które składały się następujące czynności:

– porządkowanie otrzymanych materiałów badawczych,

– obliczenie na podstawie uzyskanych wyników niezbędnych statystyk,

– analiza wyników otrzymanych badań.

Badania eksperymentalne rozpoczęły się od wyboru szkoły, w której planowano zrealizować badania. Przyjęty w opisywanej tu procedurze badawczej klasyczny schemat eksperymentalny implikował konieczność przeprowadzenia badań w szkole, w której w roku szkolnym przypadającym na czas realizacji badań znajdowały się równocześnie przynajmniej dwie klasy siódme. Realizacja badań w jednej szkole miała na celu zminimalizowanie liczby zmiennych zakłócających, które mogłyby wystąpić podczas realizacji badań w kilku szkołach. Opisany warunek spełniała Szkoła Podstawowa nr 67 w Poznaniu przekształcona z Gimnazjum nr 12 w Poznaniu. Innym czynnikiem wpływającym na wybór tej szkoły była deklarowana przez jej dyrekcję oraz nauczycieli w niej pracujących chęć uczestniczenia w badaniach. Ostatnim bardzo istotnym argumentem decydującym o celowym doborze miejsca badań było to, iż autorka rozprawy pracowała w tym czasie zawodowo właśnie w tej szkole. Dobór grup, czyli w tym przypadku przyporządkowanie poszczególnych klas do określonych grup badawczych miało charakter losowy, który uwzględniał zasadę randomizacji. W roku szkolnym planowanego badania utworzono cztery klasy siódme, z czego dwie z nich dwujęzyczne rekrutowane były na zupełnie innych zasadach, dlatego zostały one wykluczone. Uczniowie do dwóch pozostałych przyjmowani byli na zasadzie powszechnego przyjęcia a decyzja o przypisaniu do danej klasy była zupełnie losowa. Ponadto po utworzeniu obu tych klas wylosowano, która z nich będzie grupą eksperymentalną GE a która grupą kontrolną GK. Do klas biorących udział w badaniach uczęszczało 24 uczniów, do jednej z nich 25 uczniów. Warunkiem do zaliczenia uczniów do grup biorących udział w końcowych analizach była minimum pięćdziesięcioprocentowa obecność na lekcjach matematyki a także udział w posteście. Spośród wszystkich uczniów klas biorących udział w badaniach zdecydowano, by nie brać pod uwagę w końcowych analizach wyników łącznie 5 uczniów. Z grupy GE postanowiono wykluczyć trzech uczniów, którzy odmówili wzięcia udziału w posteście. Z kolei z grupy GK zostało wykluczonych dwoje uczniów ze względu na bardzo dużą absencję na lekcjach matematyki przekraczającą 50%. Uczniowie Ci nie przystąpili także do posttestu. W wyniku pominięcia pięciu uczniów z powyższych przyczyn, otrzymano finalnie dwie równoliczne grupy, do których zaliczono po 20 uczniów. Po dokonaniu podziału klas na grupy eksperymentalne i kontrolne przystąpiono do realizacji przyjętego planu badawczego. W grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK przeprowadzono pretest. Następnie w grupie eksperymentalnej GE na lekcjach matematyki wprowadzono czynnik eksperymentalny – heurystyczne metody nauczania matematyki i pracę z programem autorskim. Grupa kontrolna GK uczestniczyła w lekcjach matematyki prowadzonych bez wykorzystania heurystycznych metod nauczania matematyki i prowadzona była według programu Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego. Po zakończeniu cyklu zajęć matematycznych, w obu grupach: eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK przeprowadzono posttest.

Zajęcia matematyczne, w czasie których realizowany był eksperyment pedagogiczny odbywały się pięć razy w tygodniu przez okres dwóch semestrów. Podczas zajęć uczniowie grupy eksperymentalnych GE pracowali przy użyciu metod heurystycznych według autorskiego programu Zajęcia matematyczne w grupie eksperymentalnej GE były prowadzone przez autorkę niniejszej dysertacji. Zajęcia matematyczne w grupie kontrolnej GK były prowadzone przez nauczycielkę matematyki, która tak jak autorka tej rozprawy ukończyła studia wyższe z tytułem magistra na kierunku matematyka. Cele operacyjne nauczania matematyki były te same w obu grupach, natomiast nauczycielki stosowały inne metody kształcenia oraz pracowały według innych programów nauczania. W związku z zaobserwowanymi, od początku trwania eksperymentu, dużymi trudnościami uczniów grupy eksperymentalnej w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, zdecydowano o ograniczeniu proponowanych uczniom zadań problemowych do zadań najłatwiejszego typu. Zabieg ten można określić jako próbę indywidualizacji stosowanych wobec uczniów oddziaływań dydaktycznych. Nie mogły zostać zaproponowane uczniom zadania zbyt trudne, wykraczające poza ich możliwości, gdyż takie postępowanie byłoby niekorzystne z punktu widzenia realizacji założonych celów dydaktycznych. Mogłoby również spowodować zniechęcenie uczniów do uczestniczenia w zajęciach a w dłuższej perspektywie nawet do zniechęcenia uczniów do matematyki jako dziedziny wiedzy. Przykładowe zadania realizowane podczas zajęć można znaleźć w Skrypcie (aneks).

W każdym zestawie proponowanych w skrypcie zadań ułożone są one rosnąco względem poziomu trudności.

Zadania z pretestu, które okazały się być trudnymi dla grupy eksperymentalnej to zadania:

4, 8, 11 i 13 (aneks-pretest).

Wszystkie lekcje matematyki w grupie eksperymentalnej prowadzone były w oparciu o samodzielnie przygotowany program nauczania i skrypt, w którym to zawarte zadania były częściowo zaczerpnięte z dostępnej literatury, natomiast częściowo były autorstwa własnego. Podczas lekcji matematyki uczniowie grupy eksperymentalnej stosowali heurystyczne metody pracy m.in. heurystyczne rozmowy, lekcje układania zadań, heurystyczne wykłady, heurystyczne lekcje z wykorzystaniem prostych technologii informacyjnych służących do odkrywania matematyki itp. Wszystkie lekcje w grupie eksperymentalnej prowadzone były w duchu zgodnym z punktem widzenia George Polya odnośnie postawy „dobrego” nauczyciela, między innymi efektywnie wykorzystującego heurystyczne metody nauczania:

„1. Być zainteresowanym swym przedmiotem.

2. Znać swój przedmiot.

3. Wiedzieć, jak się uczyć: najlepszy sposób na nauczenie się czegokolwiek to odkrycie tego samemu. 4. Starać się czytać w twarzach uczniów, dostrzegać ich oczekiwania i trudności, umieć postawić się na ich miejscu.

5. Przekazywać uczniom nie tylko wiadomości, lecz również umiejętności, postawy myślowe, nawyk pracy metodycznej.

6. Niech uczą się odgadywać.

7. Niech uczą się udowadniać.

8. Dostrzegać te cechy zadania, które mogą być użyteczne przy rozwiązywaniu innych zadań — starać się dostrzec w danej konkretnej sytuacji metodę ogólną.

9. Nie ujawniać od razu całego sekretu — niech uczniowie odgadną go, zanim zostanie ujawniony — niech znajdą sami tyle, ile to jest możliwe.

10. Sugerować, nie narzucając własnego zdania” (Polya, 1975, s. 308).

Ponadto lekcje matematyki realizowane w grupie eksperymentalnej prowadzone były wedle struktury lekcji problemowej, która obejmowała:

a) część przygotowawczą:

– wstępna organizacja i przystąpienie do lekcji,

– powtórzenie materiału i nawiązanie do nowego tematu inicjującego stworzenie sytuacji problemowej.

b) część podstawową:

– zetknięcie uczniów z trudnością, jej odczucie i uświadomienie,

– ustalenie trudności i sformułowanie problemów, pytań, zagadnień,

– ustalenie pomysłu rozwiązania, planu wykonania zadania lub hipotez,

– wykonanie zadań, realizacja pomysłów, weryfikacja hipotez przez dobór i analizę danych, ich interpretację, przemyślenie i ocenę,

– sprawdzenie poprawności rozwiązania.

c) część końcową: – usystematyzowanie, powtórzenie i utrwalenie materiału,

- zastosowanie, wykorzystanie i wzbogacenie poznanych zagadnień (Plich,2005, s.913).

W trakcie trwania eksperymentu przeprowadzono szereg obserwacji, w szczególności uczniów klasy eksperymentalnej. Po ich zakończeniu uczniowie uczestniczyli w postteście. Następnie dokonano analiz otrzymanych wyników metodami analiz statystycznych.

8.8.2. Charakterystyka terenu badań i populacji generalnej badań eksperymentalnych

Właściwy dobór próby jest bardzo istotny w badaniach naukowych. Opisywane w niniejszej rozprawie badania za pomocą metody eksperymentu pedagogicznego dotyczą uczniów dwóch klas siódmych szkoły podstawowej w Poznaniu. Poniżej dokonano charakterystyki grupy badawczej biorącej udział w badaniach.

8.8.3. Charakterystyka grupy badanych uczniów

W badaniu uczestniczyli uczniowie dwóch klas siódmych szkoły podstawowej. Łącznie wzięło w nich udział 40 uczniów. W poniższej tabeli 6 przedstawiono rozkład płci badanych osób.

Tabela 6. Płeć badanych uczniów (N=40).

Płeć	Liczba	%
Dziewczynka	21	52,5
Chłopiec	19	47,5
Razem	40	100

Źródło: badania własne.

W sumie w grupie eksperymentalnej i kontrolnej większość stanowiły dziewczynki. Poniższa tabela 7 zawiera szczegółowe dane na temat liczebności grup badawczych z uwzględnieniem podziału na płeć badanych uczniów.

Tabela 7. Płeć badanych uczniów z podziałem na przynależność do grupy eksperymentalnej oraz grupy kontrolnej (N = 40).

Rodzaj grupy	Nazwa grupy	Liczba dziewczynek	%	Liczba chłopców	%	Razem	%
Grupa eksperymentalna	GE	10	50	10	50	20	100
Grupa kontrolna	GK	11	55	9	45	20	100
	Razem	21	52,5	19	47,5	40	100

Źródło: badania własne

Najliczniejszą pod względem liczby dziewczynek była grupa kontrolna GK (55 %), najwięcej chłopców (50 %) znajdowało się w grupie eksperymentalnej GE.

PODSUMOWANIE:

Badania własne realizowane na potrzeby niniejszej dysertacji objęły moją osobę, uczniów klas siódmych szkoły podstawowej, uczniów klas gimnazjalnych oraz ucznia gimnazjum. Celem ich realizacji stało się określenie z jakim skutkiem zastosowane celowo heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania wpłyną na umiejętności i zdolności badanej grupy uczniów a także na rozwój owartości myślenia matematycznego. Planowane badania rozdzielono na odrębne obszary badawcze, które poddane zostały wpływom odrębnych czynników, zróżnicowanych pod względem metodologicznym. Przeprowadzono trzyletnie badanie za pomocą metody obserwacji i metody studium przypadku oraz roczne za pomocą eksperymentu pedagogicznego.

9. Analiza wyników badań zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego

W tym miejscu niniejszej rozprawy zaprezentowane zostaną wyniki badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego przeprowadzonego wśród uczniów dwóch klas siódmych szkoły podstawowej. Zaprezentowane wyniki pozwolą odpowiedzieć na główny problem badawczy oraz na pytania szczegółowe dotyczące badanych uczniów. Pozwolą także zweryfikować słuszność postawionych hipotez. Główny problem badawczy dotyczący grupy badanych uczniów przybrał brzmienie: Z jakim skutkiem zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy, w szczególności praca w własnym programem autorskim wpłyną na rozwój zdolności i umiejętności matematycznych uczniów oraz rozwój ich otwartości myślenia matematycznego? Uzyskanie odpowiedzi na postawiony wyżej główny problem badawczy było możliwe dzięki analizie wyników badań eksperymentalnych, zaprezentowanych w kolejnych podrozdziałach.

Uzyskane wyniki badań własnych przedstawiono w następującej kolejności:

– wyniki uzyskane przez badanych uczniów w preteście (grupa eksperymentalna GE i kontrolna GK),

– sprawdzenie równoważności grupy eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK,

– wyniki uzyskane przez uczniów w postteście (grupy eksperymentalneJ GE oraz grupy kontrolnej GK),

- wpływ zastosowanych przeze mnie heurystycznych metod pracy, w szczególności pracy z moim autorskim programem nauczania matematyki na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej,

- wpływ zastosowanych przeze mnie heurystycznych metod pracy, w szczególności pracy z moim autorskim programem nauczania matematyki na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej,

- wpływ zastosowanych przeze mnie heurystycznych metod pracy, w szczególności pracy z moim autorskim programem nauczania matematyki na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej,

- zależność między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów,

- wpływ zastosowanych przeze mnie heurystycznych metod pracy, w szczególności pracy z moim autorskim programem nauczania matematyki na poziom kształcenia matematycznego uczniów klasy siódmej,

- zależność miedzyumiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów,

- wpływ zastosowanych przeze mnie heurystycznych metod pracy, w szczególności pracy z moim autorskim programem nauczania matematyki na rozwój zdolności matematycznych uczniów klas siódmych.

Analizy dotyczące stwierdzenia równoważności grup GE i GK oraz wpływu zastosowania czynnika eksperymentalnego na pomiar końcowy wykonano za pomocą testów statystycznych. Weryfikacja sformułowanych hipotez statystycznych oparta została o wnioski wyciągnięte z przeprowadzonych analiz wnioskowania statystycznego, które wykonane zostały przy użyciu programu Social Science Statistics oraz pakietu Excel. We wszystkich wykonanych testach przyjęto poziom istotności α = 0,05 a wszystkie obliczenia przeprowadzane były z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

9.1. Wyniki uzyskane w preteście przez badanych uczniów w grupach eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK

W tym miejscu rozprawy przedstawiono średnie wyniki uzyskane przez badanych uczniów w preteście. Liczba punktów uzyskanych zarówno przez uczniów grupy eksperymentalnej GE, jak i uczniów grupy kontrolnej GK zostały przedstawione w tabelach zawartych w aneksach do niniejszej pracy. Obliczono średni procent wykonania wszystkich zadań pretestu a także z uwzględnieniem podziału na zadania arytmetyczne oraz geometryczne. Dla wszystkich zadań pretestu, jak również dla zadań arytmetycznych pretestu i dla zadań geometrycznych pretestu policzona została mediana uzyskanych przez uczniów wyników, dzięki której możliwe było ukazanie wartości środkowej uzyskanych przez uczniów wyników oraz ich porównanie.

Tabela 8. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki pretestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	24%	18,33 %
GK	20,33 %	15 %

Źródło: Badanie własne

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań pretestu co najmniej 18, 33 %, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił 15 %. W poniższej tabeli 9 zostały zawarte średnie wyniki uzyskane przez uczniów grup eksperymentalnej i kontrolnej w preteście z części arytmetycznej, części geometrycznej a także części dotyczącej zadań problemowych. Dla wszystkich zadań pretestu oraz dla zadań arytmetycznych pretestu, dla zadań geometrycznych pretestu i zadań problemowych pretestu policzona została również mediana uzyskanych przez uczniów wyników, dzięki czemu możliwe było ukazanie wartości środkowej uzyskanych przez uczniów wyników oraz ich porównanie.

Tabela 9. Średnie wyniki uzyskane w preteście z podziałem na część dotyczącą zadań arytmetycznych, geometrycznych i problemowych przez uczniów z grupy eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Badana grupa	Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań geometrycznych	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań problemowych	Mediana
GE	24%	18,33 %	44%	40%	42,14%	42,86 %	4,17%	0%
GK	20,33%	15%	28%	20%	30,71%	14,29 %	2,5%	0%
Obie grupy	22,17%	16,67 %	36%	30%	36,43%	21,43 %	3,33%	0%

Źródło: Badanie własne

Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań pretestu w grupie eksperymentalnej GE (24%) był wyższy niż w grupie kontrolnej GK, w której uzyskano wynik 20,33%. Średni procentowy wynik wykonania zadań pretestu w obu grupach wyniósł 22,17 %. Oznacza to, iż grupa eksperymentalna GE wykonała prawidłowo większy procent zadań pretestu niż grupa kontrolna GK. Mediana uzyskanych przez uczniów wyników w przypadku grupy GE wyniosła 18,33%. Oznacza to, iż połowa uczniów z grupy eksperymentalnej osiągnęła wynik nie niższy niż 18,33 %. Mediana wyników uzyskanych przez uczniów w grupie kontrolnej wyniosła 15 %, co oznacza, że połowa uczniów tej grupy osiągnęła wynik nie niższy niż 15%. W związku z powyższym można stwierdzić, iż średnie wyniki całego pretestu uczniów należących do grupy kontrolnej GK były gorsze niż uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE. Mediana w przypadku obu grup wyniosła 16,67 %. Oznacza to, iż połowa uczniów w obu badanych grupach osiągnęła średnie wyniki dla wszystkich zadań pretestu nie niższe niż 16,67%. Średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych pretestu w grupie eksperymentalnej wyniósł 44 % i był znacznie wiższy niż średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych pretestu w grupie kontrolnej GK. Mediana w przypadku zadań arytmetycznych pretestu w grupie GE wyniosła 40%, podczas gdy w grupie GK była równa 20%, co oznacza, że połowa uczniów grupy kontrolnej osiągnęła z części arytmetycznej pretestu wynik nie niższy niż 20%, podczas gdy w grupie eksperymentalnej wartość ta była nie niższa niż 40%. Na tej podstawie można zatem stwierdzić, iż uczniowie grupy eksperymentalnej GE uzyskali z części arytmetycznej pretestu średnio lepsze wyniki niż uczniowie grupy kontrolnej GK. Mediana wyników uzyskanych przez uczniów w obu badanych grupach wyniosła 30%, co pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów obu badanych grup uzyskała z zadań z części arytmetycznej pretestu średnie wyniki nie niższe niż 30%. Średni procentowy wynik wykonania zadań geometrycznych pretestu w grupie eksperymentalnej GE wynosił 42,14% i był wyższy niż w przypadku wyniku uzyskanego przez uczniów z grupy kontrolnej (30,71%). Uczniowie obu badanych grup wykonali zadania geometryczne pretestu średnio w 36,43%. Duża różnica między wynikami uzyskanymi przez uczniów badanych grup ujawniła się po obliczeniu mediany. W grupie eksperymentalnej GE obliczona mediana (42,86%) pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów tej grupy wykonała zadania geometryczne pretestu na poziomie nie niższym niż 42,86%. W przypadku grupy kontrolnej GK połowa uczniów wykonała te zadania na poziomie nie niższym niż 14,29 %. Biorąc pod uwagę średnie wyniki uczniów z obu badanych grup stwierdza się, iż połowa badanych uczniów osiągnęła średnie wyniki z części geometrycznej pretestu na poziomie nie niższym niż 21,43%. Podsumowując powyższe wyniki badań stwierdzić można, iż dla grupy eksperymentalnej zadania arytmetyczne okazały się być łatwiejszymi niż zadania geometryczne, natomiast dla grupy kontrolnej odwrotnie. Jeśli chodzi o zadania problemowe, to ich średnie procentowe dla oby dwóch grup są najniższe a mediany zero oznaczają, iż połowa uczniów nie uzyskała z nich nawet jednego punktu.

9.2. Sprawdzenie równoważności grupy eksperymentalnej GE i kontrolnej GK na podstawie wyników uzyskanych w preteście przez badanych uczniów

Dla prawidłowego zaplanowania oraz przeprowadzenia badań eksperymentalnych konieczne jest sprawdzenie równoważności grup, które uczestniczą w pomiarze początkowym. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 10. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki pretestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	24%	18,33 %
GK	20,33 %	15 %

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć z powyższego, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań pretestu co najmniej 24%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił 20,33%. W celu porównania średnich wyników pretestu w grupach GE i GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w preteście w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji) H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w preteście w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli 11 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 11. Wartość testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki pretestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	161,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,30

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Zatem otrzymany wynik pozwala przyjąć, że różnica średnich wyników w obu grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK należą do tej samej populacji. Ta pozytywna weryfikacja równoważności grup GE oraz GK umożliwiła przeprowadzenie zaplanowanego eksperymentu pedagogicznego.

9.3. Wyniki uzyskane w postteście przez badanych uczniów w grupie eksperymentalnej GE i grupie kontrolnej GK.

W tym podrozdziale przedstawiono uzyskane przez badanych uczniów wyniki posttestu. Liczba punktów uzyskanych w postteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE oraz uczniów grupy kontrolnej GK została przedstawiona w tabelach, znajdujących się w aneksie niniejszej pracy. W poniższej tabeli 12 zostały zawarte średnie wyniki uzyskane przez uczniów w postteście w grupie eksperymentalnej GE oraz w grupie kontrolnej GK. Ponadto tabela ta zawiera średnie wyniki zadań z części arytmetycznej posttestu, średnie wyniki zadań z części geometrycznej posttestu oraz średnie wyniki z części dotyczącej zadań problemowych uzyskane przez uczniów badanych grup. Dla wszystkich zadań posttestu, w tym także dla zadań arytmetycznych, geometrycznych i problemowych posttestu policzona została również mediana.

Tabela 12. Średnie wyniki uzyskane w postteście z podziałem na część dotyczącą zadań arytmetycznych, geometrycznych i problemowych przez uczniów z grupy eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Badana grupa	Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań geometrycznych	Mediana	Średni procentowy wynik wykonania zadań problemowych	Mediana
GE	47,83%	50%	57,5%	50%	56,88%	62,5 %	60%	66,67 %
GK	17,83%	20%	21,25%	0%	18,13%	25%	16,67%	0%
Obie grupy	32,83%	33,33 %	39,36%	50%	37,5%	0%	38,33%	33,33 %

Źródło: Badanie własne

Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań posttestu w grupie eksperymentalnej GE wyniósł 47,83% a mediana wykonania wszystkich zadań posttestu w tej grupie wyniosła 50 %, co oznacza, iż połowa uczniów grupy GE osiągnęła wyniki dla wszystkich zadań posstestu nie niższe niż 50 %. Uczniowie grypy eksperymentalnej GE najlepiej poradzili sobie z częścią dotyczącą zadań problemowych pomiaru końcowego. Średni procentowy wynik wykonania zadań tej części dla tej grupy wyniósł 60%. Mediana dla tej części pozwala stwierdzić, że w przypadku zadań problemowych posstestu połowa grupy eksperymentalnej

GE uzyskała średnie wyniki nie niższe niż 66,67%. Średni procentowy wynik części dotyczącej zadań arytmetycznych posttestu dla grupy eksperymentalnej GK wyniósł 57,5% a części zadań geometrycznych 56,88%. Analizując wartość otrzymanej mediany dla części dotyczącej zadań arytmetycznych można stwierdzić, iż połowa grupy eksperymentalnej GE uzyskała średnie wyniki z tej części nie niższe niż 50 %. Z kolei środkowa wartość dla części dotyczcej zadań geometrycznych postestu dla grupy eksperymentalnej GE wyniosła 62,5 %, na podstawie czego można stwierdzić, iż połowa tej grupy osiągnęła średnie wyniki z tej części zadań na poziomie nie niższym niż 62,5%.

Grupa kontrolna GK w postteście osiągnęła średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań na poziomie 17,38%. Mediana w tym przypadku pozwala na stwierdzenie, iż połowa uczniów tej grupy uzyskała w końcowym pomiarze wyniki nie niższe niż 20%. Zadania arytmetyczne w tej grupie były wykonane średnio w 21,25 %, co oznacza, iż były łatwiejsze względem zadań geometrycznych, których średnie wykonanie wyniosło 18,13% oraz względem zadań problemowych, w przypadku których średnie wykonanie wynosiło w tej grupie 16,67 %. Mediana wykonania zadań arytmetycznych oraz zadań problemowych w grupie kontrolnej GK pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów tej grupy nie potrafiła rozwiązać żadnego zadania z obu tych części, podczas gdy z części geometrycznej wyniki te były nie niższe niż 25 %.

9.4. Wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na zdolności matematyczne, umiejętności matematyczne oraz otwartość myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej.

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na zdolności matematyczne, umiejętności matematyczne oraz otwartość myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań. Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na zdolności matematyczne, umiejętności matematyczne oraz otwartość myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej z podziałem na poszczególne etapy.

9.4.1. I CZĘŚĆ BADANIA

Etap I. Porównanie wyników pretestu w grupach GE i GK

Sprawdzenie równoważności grup eksperymentalnej GE i kontrolnej GK zamieszczono w podrozdziale 8.2. niniejszej rozprawy. Zgodnie z zaprezentowanymi w nim wynikami z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 stwierdzono, że różnica średnich wyników pretestu w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, dlatego w związku z powyższym grupy GE i GK należą do tej samej populacji, co pozwala stwierdzić, iż wyjściowa umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań była taka sama u uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE oraz u uczniów z grupy kontrolnej GK.

Etap II. Porównanie wyników posttestu w grupach GE i GK

Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań postestu dla grupy kontrolnej i grupy eksperymentalnej przedstawione zostały w poniższej tabeli

Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Tabela 13. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki posttestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	47,83 %	50%
GK	17,83%	20%

Źródło: Badanie własne

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 50 %, natomiast w grupie kontrolnej GK wynik ten wyniósł 20 %. W celu porównania średnich wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0– różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1– różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli 14 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowy.

Tabela 14. Wartość testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	35
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1 . Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica wyników w obu grupach jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli ze średnimi wynikami postetestu i medianami można stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane w postteście w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż w grupie kontrolnej GK, skąd wynika, iż umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań w końcowym pomiarze była wyższa u uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczne metody pracy oraz pracujących według autorskiego programu (grupa GE) niż u uczniów kształconych innymi metodami (grupa GK).

Etap III

Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Do porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań testu w grupach GE i GK posłużą odpowiednio wskaźniki $\boldsymbol{D_1}$ = GEpost – GEpre (różnica wyniku posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE oraz $\boldsymbol{D_2}$ = GKpost – GKpre (różnica wyniku posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK. Uzyskane wartości wskaźników $\boldsymbol{D_1}$ i $\boldsymbol{D_2}$ w grupach GE i GK zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 15. Wartości wskaźników D_1 i D_2 w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki postępów w grupach GE i GK		
grupa	średni wynik	Mediana
GE	D_1 =23,83%	22%
GK	D_2 =- 2,5%	-3,34%

Źródło: Badanie własne

Można zauważyć na podstawie powyższego, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów poprawiło wyniki posttestu w stosunku do pretestu o co najmniej 22%, natomiast w grupie kontrolnej GK wynik ten u 50 % uczniów pogorszył się o co najmniej 3,34 %.

Etap IV

Porównanie postępów w grupach GE i GK

W celu porównania średnich wyników postępów uzyskanych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya i postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1– różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki wyznaczonych statysty testowych:

Tabela 16. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 *i* D_2

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	52
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 a jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1, co oznacza, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli z wartościami wskaźników D_1 i D_2 w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK można zatem stwierdzić, że średnie wyniki postępów uzyskane grupie GE są znacznie wyższe niż w grupie GK. Wynika stąd, iż postęp umiejętności rozwiązywania zadań testu był większy w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej, którzy uczestniczyli w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania matematyki oraz autorski program nauczania matematyki (GE), niż u uczniów kształconych innymi metodami (GK).

Podsumowanie I części badania:

Przedstawione w I części badania powyższe analizy wyników badań własnych potwierdziły: prawdziwość hipotezy badawczej – wykazano, iż zastosowanie heurystycznych metod nauczania matematyki oraz praca z autorskim programem wpłynęły pozytywnie na umiejętność rozwiązywania zadań matematycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania i pracujący według autorskiego programu wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań matematycznych niż uczniowie kształceni innymi metodami. Potwierdzono także brak efektu zastosowania pretestu – wykazano, iż przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście. Przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Wykazano również, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań przez uczniów. Umiejętność ta okazała się być wyższą jedynie w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej.

9.4.2. II CZĘŚĆ BADANIA

9.4.2.1. Wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu nauczania na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań. Wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu nauczania na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych zgodnie z przyjętym planem przedstawiono poniżej.

Etap I.

Porównanie wyników pretestu części geometrycznej w grupach GE i GK

Realizacja badań zgodnie z przyjetym planem wymagała na początku porównania wyników pretestu części obejmujacej zadania geometryczne uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki pretestu tej części w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 17. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Wyniki -zadania geometryczne pretestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	42,14%	42,86%
GK	30,71%	14,29%

Źródło: Badanie własne

Jak wynika z powyższej tabeli, w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych pretestu co najmniej 42,86 %, podczas gdy w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł tylko 14,29 %. W celu porównania średnich wyników uzyskanych z części geometrycznej pretestu przez uczniów w grupach GE i GK wykonano analizę statystyczną za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych pretestu w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych pretestu w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 18. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych pretestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	132,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,07

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych pretestu przez uczniów w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy eksperymentalna GE i kontrolna GK należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż początkowa umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych wykazywana przez uczniów grupy eksperymentalnej (GE) nie różniła się w sposób istotny statystycznie od początkowej umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych wykazywanej przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK).

Etap II.

Porównanie wyników posttestu części geometrycznej w grupach GE i GK

Kolejny etap badań zgodnie z przyjętym planem wymagał porównania wyników części geometrycznej posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki posttestu w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 19. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Wyniki -zadania geometryczne posttestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	56,88%	62,5%
GK	18,13%	25%

Źródło: Badanie własne

W grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z części geometrycznej posttestu co najmniej 62,5%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł tylko 25%. W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu przez uczniów w grupach GE i GK wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testowych.

Tabela 20. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	37,00
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z części geometrycznej posttestu w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli ze średnimi wynikami uzyskanymi przez obie grupy z zadań geometrycznych postestu można zatem stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z zadań tej części w postteście w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż w grupie kontrolnej GK. Wynika z tego, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych była większa u uczniów uczestniczących w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody pracy oraz autorski program, niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Etap III. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w zadaniach geometrycznych w grupach GE i GK

Zgodnie z przyjętym planem realizacja badań wymagała następnie porównania wyników postępów uzyskanych w przypadku zadań geometrycznych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. W celu porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych w grupach GE i GK posłużą wskaźniki D_1 = GEpost – GEpre (różnica wyniku części geometrycznej posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE oraz D_2= GKpost – GKpre (różnica wyniku części geometrycznej posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK. Wartości wskaźników D_1 i D_2 odpowiednio w grupach GE i GK zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 21. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki postępów w grupach GE i GK		
grupa	średni wynik	Mediana
GE	D_1 = 14,74 %	10,71 %
GK	D_2 =-12,58 %	-14,29%

Źródło: Badanie własne

Na podstawie powyższego można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów poprawiło wyniki z części geometrycznej posttestu w stosunku do pretestu o co najmniej 10,71% natomiast w grupie kontrolnej GK 50% uczniów pogorszyło swój wynik o co najmniej 14,29%.

Etap IV

Porównanie postępów w grupach GE i GK

W celu porównania średnich wyników postępów uzyskanych z zadań geometrycznych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya i postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK z zadań geometrycznych nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1– różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów z zadań geometrycznych w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki wyznaczonych statysty testowych:

Tabela 22. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	96
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,01

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 a jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1, co oznacza, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów z zadań geometrycznych w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli z wartościami wskaźników D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK można zatem stwierdzić, że średnie wyniki postępów z zadań geometrycznych uzyskane w grupie GE są znacznie wyższe niż w grupie GK. Wynika stąd, iż postęp umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych testu był większy w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej, którzy uczestniczyli w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania matematyki oraz autorski program nauczania matematyki (GE), niż u uczniów kształconych innymi metodami (GK).

9.4.2.2. Wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznej metody pracy oraz pracy z autorskim programem na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań. Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych wraz z opisem kolejnych kroków wpływu zastosowania heurystycznych metod pracy oraz pracy z autorskim programem nauczania na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej.

Etap I. Porównanie wyników części arytmetycznej pretestu w grupach GE i GK

Przyjęty plan wymagał porównania wyników części arytmetycznej pretestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki pretestu części arytmetycznej w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 23. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki -zadania arytmetyczne pretestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	44%	40%
GK	28%	20%

Źródło: Badanie własne

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych pretestu co najmniej 40,0%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił tylko 20%. W celu porównania średnich wyników pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0– różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1– różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji). W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testowych.

Tabela 24. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań arytmetycznych pretestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	145
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,14

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu przez uczniów w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy eksperymentalna GE i kontrolna GK należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż początkowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywana przez uczniów grupy eksperymentalnej (GE) nie różniła się w sposób istotny statystycznie od początkowej umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywanej przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK).

Etap II.

Porównanie wyników posttestu części arytmetycznej w grupach GE i GK

Kolejny etap badań zgodnie z przyjętym planem wymagał porównania wyników części arytmetycznej posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki posttestu w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 25. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Wyniki -zadania geometryczne posttestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	57,5%	50%
GK	21,25%	0%

Źródło: Badanie własne

W grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z części arytmetycznej posttestu co najmniej 50%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł 0%. W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu przez uczniów w grupach GE i GK wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testowych.

Tabela 26. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	95,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00496

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z części arytmetycznej posttestu w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli ze średnimi wynikami uzyskanymi przez obie grupy z zadań arytmetycznych postestu można zatem stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z zadań tej części w postteście w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż w grupie kontrolnej GK. Wynika z tego, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych była większa u uczniów uczestniczących w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody pracy oraz autorski program, niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Etap III. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w zadaniach arytmetycznych w grupach GE i GK

Zgodnie z przyjętym planem realizacja badań wymagała następnie porównania wyników postępów uzyskanych w przypadku zadań arytmetycznych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. W celu porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych w grupach GE i GK posłużą wskaźniki D_1 = GEpost – GEpre (różnica wyniku części arytmetycznej posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE oraz D_2= GKpost – GKpre (różnica wyniku części arytmetycznej posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK. Wartości wskaźników D_1 i D_2 odpowiednio w grupach GE i GK zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 27. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki postępów w grupach GE i GK		
grupa	średni wynik	Mediana
GE	$D_1 = 13{,}5\%$	-0,05%
GK	$D_2 =$-6,75%	-0,2%

Źródło: Badanie własne

Na podstawie powyższego można zauważyć, że zarówno w grupie eksperymentalnej GE jak i w grupie kontrolnej GK 50% uczniów pogorszyło swój wynik z części arytmetycznej posttestu w stosunku do pretestu.

Etap IV

Porównanie postępów w grupach GE i GK

W celu porównania średnich wyników postępów uzyskanych z zadań arytmetycznych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya i postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK z zadań arytmetycznych nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1– różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów z zadań arytmetycznych w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki wyznaczonych statysty testowych:

Tabela 28. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	149
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,17

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów uzyskanych z zadań arytmetycznych w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można stwierdzić, iż zastosowanie heurystycznych metod nauczania matematyki a także praca z własnym programem nie przyniosły istotnych pod względem statystycznym postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych u uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE. Postęp umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych uczniów tej grupy, nie różnili się od postępu, jaki został odnotowany wśród uczniów grupy kontrolnej GK, którzy byli kształceni innymi metodami.

9.4.2.3. Wpływ zastosowania heurystycznych metod pracy oraz autorskiego programu na umiejętności rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznej metody pracy oraz pracy z autorskim programem na umiejętność rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań. Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych wraz z opisem kolejnych kroków wpływu zastosowania heurystycznych metod pracy oraz pracy z autorskim programem nauczania na umiejętność rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej.

Etap I. Porównanie wyników części dotyczącej zadań problemowych pretestu w grupach GE i GK

Przyjęty plan wymagał porównania wyników części dotyczącej zadań problemowych pretestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki pretestu tej części w obu grupach zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 29. Średnie wyniki uzyskane z zadań problemowych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki -zadania problemowe pretestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	4,17%	0%
GK	2,5%	0%

Źródło: Badanie własne

Można zauważyć, że zarówno w grupie eksperymentalnej GE, jak i grupie kontrolnej GK 50% uczniów uzyskało z zadań problemowych pretestu 0% (nie otrzymało żadnego punktu). W celu porównania średnich wyników pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0– różnica średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1– różnica średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych pretestu w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji). W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testowych.

Tabela 30. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań problemowych pretestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	198,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,98

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych pretestu przez uczniów w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy eksperymentalna GE i kontrolna GK należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż początkowa umiejętność rozwiązywania zadań problemowych wykazywana przez uczniów grupy eksperymentalnej (GE) nie różniła się w sposób istotny statystycznie od początkowej umiejętności rozwiązywania zadań problemowych wykazywanej przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK).

Etap II. Porównanie wyników posttestu części dotyczącej zadań problemowych w grupach GE i GK

Kolejny etap badań zgodnie z przyjętym planem wymagał porównania wyników części dotyczącej zadań problemowych posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. Średnie wyniki posttestu w obu grupach z tej części zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 31. Średnie wyniki uzyskane z zadań problemowych w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Wyniki -zadania problemowe posttestu		
Grupa	średni wynik	Mediana
GE	60%	66,67%
GK	16,67 %	0%

Źródło: Badanie własne

W grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów uzyskało z części dotyczącej zadań problemowych posttestu co najmniej 66,67 %, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł 0%. W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych posttestu przez uczniów w grupach GE i GK wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych posttestu w grupach GE i GK nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań problemowych posttestu w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testowych.

Tabela 32. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań problemowych posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	45
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z części dotyczącej zadań problemowych posttestu w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli ze średnimi wynikami uzyskanymi przez obie grupy z zadań problemowych postestu można zatem stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z zadań tej części w postteście w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż w grupie kontrolnej GK. Wynika z tego, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań problemowych była większa u uczniów uczestniczących w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody pracy oraz autorski program, niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Etap III. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w zadaniach problemowych w grupach GE i GK

Zgodnie z przyjętym planem realizacja badań wymagała następnie porównania wyników postępów uzyskanych w przypadku zadań problemowych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK. W celu porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań problemowych w grupach GE i GK posłużą wskaźniki D_1 = GEpost – GEpre (różnica wyniku części dotyczącej zadań problemowych posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE oraz D_2= GKpost – GKpre (różnica wyniku części dotyczącej zadań problemowych posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK. Wartości wskaźników D_1 i D_2 odpowiednio w grupach GE i GK zamieszczono w poniższej tabeli.

Tabela 33. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań problemowych w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK

Wyniki postępów w grupach GE i GK		
grupa	średni wynik	Mediana
GE	D_1 = 55,83%	67%
GK	D_2 =14,17%	0%

Źródło: Badanie własne

Na podstawie powyższego można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE 50% uczniów polepszyło swój wynik z części dotyczącej zadań problemowych posttestu w stosunku do pretestu o 67%, natomiast w grupie kontrolnej GK 50 % uczniów utrzymało taki sam wynik z części dotyczącej zadań problemowych posttestu w stosunku do pretestu.

Etap IV

Porównanie postępów w grupach GE i GK

W celu porównania średnich wyników postępów uzyskanych z zadań problemowych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE i kontrolnej GK wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya i postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK z zadań problemowych nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1– różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów z zadań problemowych w grupach GE i GK jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych:

Tabela 34. Wynik testu U Manna- Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna- Whitneya	66
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0

Źródło: Badanie własne

Uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE i GK z zadań problemowych jest istotna statystycznie, czyli grupy GE i GK nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli z wartościami wskaźników D_1 i D_2 dla zadań problemowych w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK można zatem stwierdzić, że średnie wyniki postępów z zadań problemowych uzyskane w grupie GE są znacznie wyższe niż w grupie GK. Wynika stąd, iż postęp umiejętności rozwiązywania zadań problemowych testu był większy w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej, którzy uczestniczyli w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania matematyki oraz autorski program nauczania matematyki (GE), niż u uczniów kształconych innymi metodami (GK).

9.4.2.4. Zależność między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów.

W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów przeprowadzono analizy statystyczne. W badaniu brało udział 40 uczniów, w tym 19 chłopców i 21 dziewczynek.

W poniższej tabeli zamieszczono wyniki posttestu wszystkich uczniów w podziale na płeć.

Tabela 35. Wyniki uzyskane w postteście w grupie eksperymentalnej GE i grupie kontrolnej GK z podziałem na płeć badanych uczniów (N = 40)

Statystyka	Wszystkie zadania chłopcy	Wszystkie zadania dziewczynki	Zadania arytmetyczne chłopcy	Zadania arytmetyczne dziewczynki	Zadania geometryczne chłopcy	Zadania geometryczne dziewczynki	Zadania problemowe chłopcy
N	19	21	19	21	19	21	19
Średnia	28,68%	36,95%	36,84%	46,43%	33,68%	41,33%	33,37%
Mediana	20,00%	37,00%	0,00%	50,00%	25,00%	38,00%	33,00%
Odchylenie standardowe	26,16 %	11,31%	0,00%	0,00%	44,55%	26,87%	47,38%

Źródło: Badanie własne

Z powyższego wynika, że 50% chłopców uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 20%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosi 37%. Z części dotyczącej zadań arytmetycznych posstestu 50% chłopców uzyskało co najmniej 0%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten jest znacznie wyższy i wynosi 50%. Wykonanie zadań geometrycznych w grupie chłopców wynosi co najmniej 25%, w grupie dziewczynek z kolei 38%. Jeśli chodzi o część dotyczącą zadań problemowych to 50% chłopców uzyskało co najmniej 33%, w grupie dziewczynek wynik ten wynosi 67%.

W celu porównania średnich wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu t dla prób niezależnych. Postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach dziewczynek i chłopców nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach dziewczynek i chłopców jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

Ponieważ zastosowanie testu t wymagało ustalenia równości wariancji, dlatego w tym celu przeprowadzono analizę testem Levene'a. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica wariancji wyników posttestu w grupach dziewczynek i chłopców nie jest istotna statystycznie (wariancje w obu grupach są statystycznie równe)

H_1 – różnica wariancji wyników posttestu w grupach dziewczynek i chłopców jest istotna statystycznie (wariancje w obu grupach są statystycznie różne).

Tabela 36. Wyniki testu Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40)

Test Levene'a jednorodności wariancji	**Wszystkie zadania**	**Zadania arytmetyczne**	**Zadania geometryczne**	**Zadania problemowe**
wartość statystyki F	6,41	4,27	1,46	0,03
p - istotność	0,02	0.0046	0,24	0,85

Źródło: Badanie własne.

W przypadku wszystkich zadań posttestu uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1, co oznacza, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica wariancji wyników posttestu dotyczących wszystkich zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można więc przyjąć, że wariancje wyników wszystkich zadań w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek nie są statystycznie równe, czyli występują różnice między wariancjami w porównywanych grupach. Podobnie, w przypadku części posttestu dotyczącej zadań arytmetycznych, uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1, co oznacza, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica wariancji wyników posttestu dotyczących zadań arytmetycznych posttestu w grupach chłopców i dziewczynek jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można więc przyjąć, że wariancje wyników zadań arytmetycznych w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek nie są statystycznie równe, czyli występują różnice między wariancjami w porównywanych grupach. Z kolei w przypadku części posttestu dotyczącej zadań geometrycznych, uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica wariancji wyników posttestu dotyczących zadań geometrycznych posttestu w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można więc przyjąć, że wariancje wyników zadań geometrycznych w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek są statystycznie równe. Podobnie w przypadku części posttestu dotyczącej zadań problemowych, uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica wariancji wyników posttestu dotyczących zadań problemowych posttestu w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można więc przyjąć, że wariancje wyników zadań problemowych w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek są statystycznie równe.

W poniższej tabeli zawarto wyniki statystyk testu t dla prób niezależnych przy założeniu jednorodności wariancji średnich wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek.

Tabela 37. Wyniki testu t dla prób niezależnych równości średnich wyników zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40)

Test t równości średnich	Zadania geometryczne	Zadania problemowe
t	$t = -0{,}98$	$t = -0{,}96$
df- liczba stopni swobody	$df_1 = 18,00$ $df_2 = 21{,}00$	$df_1 = 18,00$ $df_2 = 20{,}00$
p- istotność (dwustronna)	p=0,33	p=0,17
Różnica średnich	7,65%	9,63%

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica średnich wyników posttestu dotyczących zadań geometrycznych posttestu w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica średnich wyników posttestu dotyczących zadań problemowych posttestu w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. Wykonane testy pozwalają zatem stwierdzić, że tylko średnie wyniki chłopców i dziewczynek uzyskane w postteście z zadań geometrycznych i problemowych nie różnią się od siebie. Stałość wariancji dodatkowo pokazuje, że poziom wykonania zadań w obu grupach jest podobny to znaczy, że zmienność średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców i przez dziewczynki jest taka sama, przy czym zależność ta dotyczy tylko wykonania zadań geometrycznych i problemowych posttestu. W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów osobno w grupach eksperymentalnych i kontrolnych przeprowadzono analizy statystyczne. W badaniu brało udział 40 uczniów, w tym 19 chłopców i 21 dziewczynek a w poniższej tabeli zamieszczono wyniki posttestu wszystkich uczniów w podziale na płeć oraz przynależność do grupy eksperymentalnej GE i kontrolnej GK.

Tabela 38. Wyniki uzyskane w postteście w grupie eksperymentalnej GE oraz kontrolnej GK z podziałem na płeć badanych uczniów

Grupa i płeć	Statystyka	Wszystkie zadania	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne	Zadania problemowe
Grupa eksperymentalna chłopcy	N	10	10	10	10
Grupa eksperymentalna chłopcy	Średnia	45,50%	50,00%	55,20%	53,50%
Grupa eksperymentalna chłopcy	Mediana	50,00%	50,00%	56,50%	67,00%
Grupa eksperymentalna dziewczynki	N	10	10	10	10

Grupa eksperymentalna dziewczynki	Średnia	50,30%	65,00%	59,10%	67,00%
Grupa eksperymentalna dziewczynki	Mediana	50,00%	50,00%	63,00%	67,00%
Grupa kontrolna chłopcy	N	9	9	9	9
Grupa kontrolna chłopcy	Średnia	10,00%	22,22%	9,78%	11,00%
Grupa kontrolna chłopcy	Mediana	7,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Grupa kontrolna dziewczynki	N	11	11	11	11
Grupa kontrolna dziewczynki	Średnia	24,82%	29,55%	25,18%	21,18%
Grupa kontrolna dziewczynki	Mediana	23,00%	50,00%	25,00%	0,00%

Źródło: Badanie własne.

Analizując wyniki posttestu w grupie eksperymentalnej, oddzielnie dla chłopców i dziewczynek można zauważyć, że:

- zarówno 50 % chłopców, jak i 50 % dziewczynek uzyskało ze wszystkich zadań posttestu co najmniej 50%,

- z części dotyczącej zadań arytmetycznych posttestu, również zarówno 50% chłopców, jak i 50% dziewczynek uzyskało co najmniej 50%. Wykonanie zadań tej części w obu tych grupach wypadło najgorzej.

- z części dotyczącej zadań geometrycznych w grupie chłopców 50 % osiągnęło wynik 56,5% a w grupie dziewczynek wynik ten był równy 63%,

- z części dotyczącej zadań problemowych z kolei zarówno w grupie chłopców, jak i dziewczynek 50% osób otrzymało wynik 67%. Wykonanie zadań tej części w obu grupach wypadło najlepiej.

Analizując wyniki posttestu w grupie kontrolnej oddzielnie dla chłopców i dziewczynek można zauważyć, że:

- 50% chłopców uzyskało ze wszystkich zadań posttestu tylko 7%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten był równy 23%,

- w grupie chłopców rozpatrując zadania osobno z części dotyczącej zadań arytmetycznych, jak i geometrycznych oraz problemowych, z każdej z tych części z osobna 50 % uzyskało wynik 0%,

- w grupie dziewczynek 50% z części dotyczącej zadań arytmetycznych uzyskało 50%. Wykonanie zadań tej części dla tej grupy wypadło najlepiej. Z kolei z części dotyczącej zadań geometrycznych 50% dziewczynek uzyskało wynik 25%. Najgorzej w tej grupie wypadło wykonanie zadań problemowych i dla 50% dziewczynek wynik wyniósł 0%. Na podstawie wyników zamieszczonych w powyższej tabeli można stwierdzić, że wyniki posttestu osiągnięte zarówno przez chłopców, jak i przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej są wyższe niż wyniki posttestu osiągnięte przez uczniów w grupie kontrolnej.

W celu statystycznej weryfikacji powyższych wyników przeprowadzono test U Manna-Whitneya i postawiono następujące hipotezy statystyczne: H_0– różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie eksperymentalnej i kontrolnej dla dziewczynek i chłopców z osobna nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji), H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie eksperymentalnej i kontrolnej dla dziewczynek i chłopców z osobna jest istotna statystycznie, (grupy nie należą do tej samej populacji).

W poniższej tabeli zawarto wyznaczone statystyki testowe.

Tabela 39. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej i kontrolnej z podziałem na płeć badanych uczniów

Płeć	**Statystyka**	**Wszystkie zadania**	**Zadania arytmetyczne**	**Zadania geometryczne**	**Zadania problemowe**
chłopcy	Statystyka U Manna-Whitneya	7,00	27,50	6,50	13,50
chłopcy	P – Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00	0,16	0,00	0,01
Dziewczynki	Statystyka U Manna-Whitneya	4,00	24,00	8,50	10,00
dziewczynki	P – Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00	0,03	0,00	0,00

Źródło: Badanie własne.

Chłopcy

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących wszystkich zadań jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące wszystkich zadań uzyskane przez chłopców w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące wszystkich zadań uzyskane przez chłopców z grupy kontrolnej GK.

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić również, iż uzyskana wartość p >α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań arytmetycznych posttestu nie jest istotna statystycznie, czyli grupy te należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywana przez chłopców z grupy eksperymentalnej GE nie różniła się w sposób istotny statystycznie od końcowej umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywanej przez chłopców należących do grupy kontrolnej GK.

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić także, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań geometrycznych jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące zadań geometrycznych uzyskane przez chłopców w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące zadań geometrycznych uzyskane przez chłopców z grupy kontrolnej GK.

Ponadto na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań problemowych jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące zadań problemowych uzyskane przez chłopców w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące zadań problemowych uzyskane przez chłopców z grupy kontrolnej GK.

Dziewczynki

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 39 można stwierdzić, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez dziewczynki w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących wszystkich zadań jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące wszystkich zadań uzyskane przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące wszystkich zadań uzyskane przez dziewczynki z grupy kontrolnej GK.

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 39 można stwierdzić także, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez dziewczynki w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań arytmetycznych jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące zadań arytmetycznych uzyskane przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące zadań arytmetycznych uzyskane przez dziewczynki z grupy kontrolnej GK.

Ponadto na podstawie tychże wyników można stwierdzić, iż uzyskana wartość p < α (α = 0,05) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez dziewczynki w obu grupach:

eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań geometrycznych jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące zadań geometrycznych uzyskane przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące zadań geometrycznych uzyskane przez dziewczynki z grupy kontrolnej GK.

Dodatkowo można również stwierdzić, iż uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez dziewczynki w obu grupach: eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących zadań problemowych jest istotna statystycznie, czyli grupy te nie należą do tej samej populacji. Biorąc pod uwagę średnie wyniki zamieszczone we wcześniejszej tabeli można więc stwierdzić, że średnie wyniki posttestu dotyczące zadań problemowych uzyskane przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej GE są wyższe niż średnie wyniki posttestu dotyczące zadań problemowych uzyskane przez dziewczynki z grupy kontrolnej GK.

PODSUMOWANIE:

Podsumowując, na podstawie powyższych analiz można wywnioskować, że w przypadku zadań arytmetycznych zastosowane heurystyczne metody pracy a także praca z autorskim programem nauczania matematyki w grupie eksperymentalnej przyniosła podobne oczekiwane efekty, jak w przypadku uczniów grupy kontrolnej, kształconych w sposób tradycyjny. Wynikać to może z faktu, że bardzo duży nacisk na lekcjach matematyki kładzie się na tą właśnie część matematyki. Opanowanie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów jest dla wielu nauczycieli matematyki najważniejsze, co jeszcze głębiej utwierdza uczniów w przekonaniu, że na tych umiejętnościach właśnie matematyka się kończy. Takie działania kształtują wizję matematyki jako nauki o liczbach, co powoduje, że za jej sedno powszechnie uznaje się umiejętność sprawnego rachowania. Wyniki uzyskane przez uczniów grupy eksperymentalnej GE wskazują na to, iż zastosowane heurystyczne metody pracy a także praca z autorskim programem nauczania matematyki przyniosły wyraźne postępy w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych, jak również zadań problemowych w porównaniu z wynikami uczniów grupy kontrolnej GK, kształconych tradycyjnymi metodami. Na podstawie powyższych analiz można więc wyciągnąć wniosek, iż zastosowanie heurystycznych metod pracy a także kształcenie według autorskiego programu nauczania matematyki u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przynosi oczekiwane rezultaty w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań w szczególności zadań problemowych, a także zadań geometrycznych, co stanowi doskonały wskaźnik osiągniętego poziomu rozwoju otwartości myślenia matematycznego. Zadania problemowe bowiem są to zadania antyschematyczne, które można rozwiązać niestandardowymi sposobami, geometryczne z kolei wymagają dużej wyobraźni i spostrzegawczości. Zastosowanie heurystycznych metod pracy i praca z własnym programem okazały się być skuteczne w zakresie rozwijania umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań: geometrycznych a także problemowych, zaś w przypadku umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych uczniowie obu badanych grup rozwinęli tę umiejętność, jednak różnice w poziomie umiejętności nie zostały potwierdzone. Przeprowadzone analizy statystyczne pozwalają również stwierdzić, iż istnieją statystyczne różnice w średnich wynikach uzyskanych w postteście przez dziewczynki i przez chłopców zarówno odnośnie wszystkich zadań postestu, jak i części dotyczącej tylko zadań arytmetycznych. Można zatem powiedzieć, iż istnieją częściowe zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania zadań posttestu przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej a ich płcią. I tak, w przypadku wszystkich zadań oraz zadań arytmetycznych można stwierdzić, że średnie wyniki posttestu uzyskane przez dziewczynki są wyższe niż średnie wyniki postetestu uzyskane przez chłopców, zaś w przypadku zadań geometrycznych i problemowych średnie wyniki chłopców i dziewczynek uzyskane w postteście z zadań z tych części nie różnią się od siebie.

10. Analiza wyników badań zrealizowanych metodą obserwacji w grupach eksperymentalnej GE oraz grupie kontrolnej GK oraz wybranych klasach gimnazjalnych.

W niniejszej części rozprawy zaprezentowana zostanie analiza danych zebranych podczas obserwacji pracy uczniów klas siódmych szkoły podstawowej i wybranych klas gimnazjalnych podczas zajęć matematyki oraz podczas rozmów z nauczycielem matematyki grupy kontrolnej.

10.1. Obserwacje pracy uczniów grupy eksperymentalnej GE oraz grupy kontrolnej GK.

Obserwacje te dotyczyły przede wszystkim sposobu pracy uczniów podczas lekcji matematyki. W trakcie trwania obserwacji zauważono wiele różnic pomiędzy sposobami pracy uczniów a także stosowanymi przez nauczycielki metodami pracy. Obie klasy siódme korzystały z podręcznika „Matematyka z plusem" Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego. Jednak każdy z nauczycieli podczas swoich zajęć korzystał także z własnych dodatkowych materiałów. Grupa eksperymentalna pracowała w oparciu o autorski program nauczania oraz autorski Skrypt, który stanowił przede wszystkim źródło zadań ułożonych według spirali trudności. Autorski program z kolei zawierał dodatkowe treści, które poszerzały podstawę programową m.in. o następujące zagadnienia: elementy logiki, elementy teorii mnogości, wybrane zagadnienia geometrii, teorii liczb i inne, które uznane zostały przeze mnie za bardzo wartościowe w kształceniu u uczniów otwartości myślenia matematycznego a także niezbędne do prawdziwego zrozumienia pewnych zagadnień podstawy programowej nauczania matematyki w szkole podstawowej, ponadto wiele z nich stanowiło również dodatkowe narzędzie, pomocne do rozwiązywania zadań olimpijskich. Bywały to nawet zagadnienia matematyki wyższej, ale tak dobrane i na tyle pojęciowo nieskomplikowane, że uczeń klasy siódmej był w stanie je opanować. Zajęcia prowadzone w grupie eksperymentalnej różniły się od zajęć prowadzonych w grupie kontrolnej sposobem pracy uczniów nad zadaniami, które rozwiązywali oni podczas lekcji, mianowicie zajęcia w grupie eksperymentalnej GE prowadzone były z wykorzystaniem heurystycznych metod a w trakcie ich trwania uczniowie rozwiązywali przeważnie zadania o charakterze problemowym. W grupie kontrolnej na początku większości lekcji nauczyciel przedstawiał dane zagadnienie w formie wykładu a następnie uczniowie w zamyśle nauczyciela mieli pracowali samodzielnie nad rozwiązaniem zadań, jednak w zdecydowanej większości przypadków, praca uczniów ograniczała się do oczekiwania na podanie gotowego rozwiązania przez innego ucznia, co wywołało u uczniów zachowania takie, jak bierność, brak zainteresowania rozwiązaniem zadania czy odpisywanie gotowej odpowiedzi z tablicy. Przeważnie rozwiązywane zadania były bardzo podobne do siebie i miały na celu wyćwiczenie sprawności rachunkowej lub opanowanie pewniej „techniki", jednak uczniowie grupy kontrolnej również mieli styczność z zadaniami o charakterze problemowym, gdyż takie zadania znajdują się w podręczniku. Uczniowie klasy eksperymentalnej mieli wielokrotnie możliwość uczestniczenia w różnych zabawach i grach a lekcje powtórkowe przybierały formę meczów matematycznych. Uczniowie klasy eksperymentalnej wykonali wiele projektów, współtworzyli wiele wydarzeń popularyzujących kulturę matematyczną i wykazywali duże zainteresowanie i aktywność związaną z różnymi konkursami matematycznymi, czego nie dało się zaobserwować w przypadku grupy kontrolnej. Heurystyczne metody pracy nie były znane nauczycielowi matematyki grupy kontrolnej, dlatego też nie były tam stosowane. Czasami uczniowie grupy kontrolnej pracowali na lekcjach matematyki w grupach, rozwiązując przygotowane przez nauczyciela karty pracy. W grupie eksperymentalnej zaś praca w małych grupach była bardzo częstą formą organizacji zajęć, ponadto przynależność do grupy była określana losowo a tworzone grupy były zawsze zróżnicowane pod względem umiejętności matematycznych poszczególnych ich członków, dzięki czemu każdy uczeń mógł przyjmować różne role. Prowadząc zajęcia w grupie eksperymentalnej w tej formie dało się zauważyć, że uczniowie bardzo ja lubili i sprawiała im ogromną radość. Zauważono również, że w przypadku, gdy któryś z członków grupy nie rozumiał treści zadania, to pozostali uczniowie wchodzili w rolę nauczyciela i starali się wyjaśniać niejasne kwestie. Jednak początki pracy w grupach w klasie eksperymentalnej były trudne dla wielu uczniów. Bardzo często czekali oni na gotowe pomysły zaproponowane przez kolegów. Zdarzało się nawet, że niektórzy uczniowie nie byli w stanie wpaść na żaden poprawny pomysł, dlatego też najczęściej wykorzystywałam do pracy zadania problemowe, jak również zadania bardziej zaawansowane o wysokim stopniu trudności, które miały na celu oderwanie uczniów od sztywnego myśleniowego schematu i kształtowanie otwartości myślenia matematycznego.

Podczas prezentowania własnych wyników w przypadku pracy w grupach, szczególnie w przypadku rozgrywanych na początku eksperymentu meczów matematycznych, kiedy zdarzyło się, że zaprezentowana propozycja okazywała się być błędna uczniowie reagowali wycofaniem, często również złością, ale z czasem dało się zauważyć, że coraz lepiej radzili sobie z doznawanymi porażkami. Umiejętności współpracy nabyte podczas lekcji matematyki grupa eksperymentalna świetnie wykorzystywała podczas grupowych zawodów czy konkursów takich jak mecze matematyczne, czy KOALA. Dzięki częstej pracy zespołowej uczniowie grupy eksperymentalnej mieli okazję nabyć także umiejętność argumentowania i uzasadniania swojego stanowiska, co stanowi cenną umiejętność przydatną nie tylko na lekcjach matematyki, ale przede wszystkim w codziennym życiu.

Interesującą kwestią było poznanie najczęstszej formy zapoznawania się uczniów z treścią zadań, które rozwiązywali. W przypadku grupy kontrolnej treści zadań były najczęściej odczytywane na głos przez jednego ucznia. Podczas rozmów z nauczycielką grupy kontrolnej, wskazano, iż jest to najczęściej wykorzystywana forma zapoznawania się uczniów z treścią zadań, ponadto lubiana jest przez uczniów. Nauczyciel jednak dostrzega, że nie wszyscy uczniowie skupiają się nad odczytywaną treścią i w tym czasie zajmują się rozmowami lub innymi czynnościami, niezwiązanymi z rozwiązaniem zadania ani z tokiem zajęć w ogóle, jednak z względu na realia szkolne i brak czasu na to, by uczniowie mogli sami zapoznać się spokojnie z treścią zadań ze względu na fakt, że czas ten zmniejsza ilość rozwiązanych w czasie trwania zajęć zadań, tą formę uznaje za optymalną. W grupie eksperymentalnej z kolei uczniowie samodzielnie zapoznawali się z treścią zadań. Przeznaczano w tym celu odpowiednią ilość czasu na spokojne, samodzielne przeczytanie treści zadań przez każdego ucznia. Również sam sposób rozwiązywania przez uczniów zadań w obu grupach był rożny. I tak w grupie kontrolnej po odczytaniu treści zadania chętny uczeń przedstawiał swoje rozwiązanie, rzadko zdarzało się, by to nauczyciel wyznaczał konkretnego ucznia do wykonania tej czynności. Następnie uczeń ten przedstawiał swój pomysł i po akceptacji ze strony nauczyciela zapisywał rozwiązanie na tablicy. Jeśli natomiast propozycja nie była poprawna, dopiero po skorygowaniu jej przez nauczyciela dokonywał zapisu. W tym samym czasie inni uczniowie byli proszeni o samodzielne własne rozwiązywanie tego zadania i sprawdzenie poprawności swoich obliczeń zgodnie z propozycją zapisaną na tablicy. Taki model pracy znacznie ogranicza aktywność uczniów i nie sprzyja rozwijaniu samodzielności ich myślenia. Podczas rozmów nauczyciel grupy kontrolnej wskazywał, że często prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie zadania, zauważa jednak, że zdarza się, że część uczniów w klasie nie podejmuje w ogóle próby samodzielnego rozwiązania zadania, a jedynie czeka na gotową odpowiedź. Nauczyciel takie zachowania uznaje za nieakceptowalne i szkodliwe dla samych uczniów, dlatego stara się regularnie zachęcać wszystkich uczniów do aktywnej pracy na zajęciach, by im zapobiegać. Kolejny etap przebiegu rozwiązywania zadań w grupie kontrolnej stanowiło zapisanie w zeszytach rozwiązania a końcowym sformułowanie i zapisanie w nich odpowiedzi. W rozmowie nauczyciel grupy kontrolnej przyznał, iż w codziennej pracy wielokrotnie brakuje mu czasu na bardziej szczegółowe omawianie rozwiązywanych zadań. Realizacja obszernej podstawy programowej powoduje, że górę bierze rozwiązywanie większej ilości zadań, niż samo ich zrozumienie lub zrozumienie metody i wykorzystanie jej do rozwiązywania kolejnych zadań, choć rozmówczyni przyznaje, że warto byłoby rozwiązywać mniej zadań, ale w sposób bardziej szczegółowy a także z większym zrozumieniem przez uczniów. Z kolei w grupie eksperymentalnej przebieg rozwiązywania zadań wyglądał inaczej, mianowicie po samodzielnym spokojnym zapoznaniu się uczniów z jego treścią, następował czas na jego omówienie, uczniowie wówczas mogli zadawać pytania odnośnie treści zadania. Wyjaśniane były wszelkie wątpliwości, które nasuwały się uczniom po jego przeczytaniu. Dobra atmosfera, która towarzyszyła zajęciom dodatkowo sprzyjała otwartości uczniów, dlatego chętnie i szczerze dzieli się oni swoimi wątpliwości. W celu naprowadzenia uczniów na odpowiedni tok rozumowania, zadawałam pytania pomocnicze. Przykładowymi były:

- Co jest dane?

– Co wiemy z treści zdania?

– Co jest niewiadome?

– Jakie są warunki? itp.

Żeby uczniowie mogli nauczyć się rozumienia a także analizy treści zadań konieczne jest stworzenie uczniom możliwość samodzielnego zapoznania się z nią i interpretowania, przy czym pomocne są dodatkowe pytania kierowane w ich stronę przez prowadzącego w umiejętny sposób, czyli taki, który nie wyręcza ich i nie podaje im gotowych wniosków. Podczas lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej dało się zauważyć, że niektórzy uczniowie wykazywali się małą wiarą we własne możliwości, umiejętności matematyczne i byli niepewni swojej wiedzy. Jednak po kilku pytaniach wspomagających byli już w stanie przedstawić swoje rozumowanie, które często było poprawne. Zdarzali się również i tacy, którzy z góry zakładali, że nie rozumieją zadania w momencie, gdy odczytali jego treść samodzielnie i prosili mnie o pomoc w jego zrozumieniu. W takich sytuacjach prosiłam, by uczeń spróbował określić jaka część jest zrozumiała a jaka wymaga dalszego objaśnienia i dalszymi pytaniami naprowadzałam na właściwy tok rozumowania. Często okazywało się, że i tacy uczniowie wyciągali słuszne wnioski i potrafili wygenerować poprawne pomysły rozwiązania, problemem był tylko brak wiary w słuszność swojego rozumowania. Podczas trwania lekcji matematyki, szczególnie na początku badania, w grupie eksperymentalnej wielokrotnie dało się odczuć usztywnienie myślenia uczniów oraz brak umiejętności wychodzenia poza poznane schematy postępowania. Warto nadmienić, że wcześniej uczniowie tej klasy byli uczniami innej szkoły podstawowej a po reformie edukacji z racji takiej możliwości kontynuowali naukę w szkole, w której w tym czasie pracowałam, i w której przeprowadzono eksperyment. Często w trakcie poszukiwań rozwiązania zamiast je odkrywać, poszukiwali pewnych wyuczonych i poznanych wcześniej schematów a na prośbę podania więcej niż jednego rozwiązania danego zadania na ogół nie odpowiadano.

Stwierdzenie to zostanie podparte prostymi przykładami zadań. Mianowicie, podczas jednej z lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej uczniowie mieli za zadanie zsumować następujące liczby:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{3}{10}+1\frac{7}{9}+2\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}+1\frac{7}{10}=$$

Uczniowie byli tak bardzo przyzwyczajeni do pewnego schematu, że pomimo prawidłowego zrozumienia polecenia przeważnie sumowali powyższe liczby „od lewej do prawej". Taki sposób postępowania doprowadził do konieczności sprowadzenia wszystkich ułamków o różnych mianownikach do jednego wspólnego o dużej wartości, w konsekwencji czego rachunki stały się bardzo żmudne a czas rozwiązywania zadania długi. Znacznie prostszym sposobem byłoby pogrupować liczby, które w wygodny sposób dadzą się zsumować:

np.

$$\left(1-\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+(-\frac{1}{4}+3\frac{3}{4})+(\frac{2}{9}+1\frac{7}{9})+(1\frac{7}{10}-\frac{3}{10})$$

i niemal natychmiastowo otrzymać wynik:

$$\left(3+1+3\frac{1}{2}+2+1\frac{4}{10}\right)=9{,}5+1{,}4=10{,}9$$

Jednak taki nieszablonowy sposób wykraczał poza znany im do tej pory sposób postępowania.

Innym razem na prośbę rozwiązania następującego zadania:

Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku długości 2

na dwa sposoby pojawiły się problemy, bowiem większość uczniów pomyślała w standardowy sposób i w związku z nabytą lekcję wcześniej, umiejętnością obliczenia pola powierzchni trójkąta równobocznego o danej długości boku, nie była w stanie podać innego rozwiązania, jak tylko takie, w którym sześciokąt foremny został podzielony na sześć przystających trójkątów równobocznych, których pola można było w łatwy sposób obliczyć. Tutaj kolejny raz uczniowie nie potrafili wyjść poza wcześniej poznany schemat. Dopiero po odpowiednim naprowadzeniu byli w stanie zauważyć, że istnieją jeszcze inne możliwości podziału powierzchni sześciokąta foremnego, np. na dwa przystające trapezy, których pola również w łatwy sposób można było wyznaczyć.

Pracując z uczniami grupy eksperymentalnej dało się również zauważyć, że spora część z nich ma trudności w zakresie samodzielnego zapisu rozwiązania. Często bowiem, szczególnie na początku badania prosili o to, by zapisać na tablicy rozwiązania zadań, ponieważ sami nie wiedzieli w jaki sposób dokonać tego zapisu, mimo, iż potrafili przeprowadzić prawidłowy proces rozumowania. Najtrudniejsze okazało się redagowanie rozwiązań zadań dotyczących dowodzenia twierdzeń., w szczególności geometrycznych. W grupie eksperymentalnej zdarzało się także, że uczniowie skreślali czasem swoje prawidłowo zapisane obliczenia, ponieważ na tablicy zostały one zapisane w inny sposób. Obserwacje te pozwalają odnieść wrażenie, że brak pewności uczniów w tej kwestii może wiązać się z tym, iż na co dzień byli oni przyzwyczajeni do dokładnego przepisywania treści wedle gotowego wzoru. Dlatego też podczas lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej unikano narzucania z góry jakichkolwiek schematów zapisu i zachęcano uczniów do podejmowania samodzielnych prób w tym zakresie. Z czasem dało się już zaobserwować różne pomysły uczniów na rozwiązanie tego samego zadania.

W trakcie lekcji matematyki w grupach: eksperymentalnej i kontrolnej odnotowano różnicę pomiędzy liczbą rozwiązanych zadań. I tak, w grupie kontrolnej uczniowie rozwiązywali w czasie jednej lekcji średnio 4 lub 5 zadań. Były to zadania zróżnicowane i miały różny charakter: zadań problemowych i bezproblemowych, tekstowych, rachunkowych, zadań na dowodzenie o różnym stopniu trudności. W grupie eksperymentalnej z kolei uczniowie byli w stanie rozwiązać maksymalnie trzy zadania. Zdarzało się nawet, że rozwiązano tylko jedno zadanie. Bardzo często bowiem przedstawiane i zapisywane były różne pomysły na rozwiązanie danego zadania. Sami uczniowie zwracali również uwagę na to, iż czasem wolno rozwiązują zadania i że byli przyzwyczajeni do większej liczby rozwiązywanych zadań podczas lekcji, mieli zatem obawy, że będą musieli rozwiązać po kilka zadań za każdym razem dodatkowo w domu w ramach nadrobienia „zaległości”. Potrzebowali czasu, by zrozumieć, że nie będą ponosić żadnych konsekwencji tego, że na lekcjach rozwiążą małą liczbę zadań. Ciekawym pozostaje również fakt, że pod koniec eksperymentu zdarzało się, że niektórzy uczniowie sami prosili o zadania domowe.

Bardzo często, zarówno w czasie lekcji, na których uczniowie klasy eksperymentalnej pracowali samodzielnie, jak i w grupach po rozwiązanym zadaniu pojawiała się refleksja nad zadaniem, czyli jego omówienie, które to często przybierało formę dyskusji. Uczniowie chętnie wypowiadali się na temat rozwiązanego zadania, mieli czasem dodatkowe pytania i aktywnie reagowali na wypowiedzi kolegów i koleżanek. Czasami zdarzało się, że uczniowie samodzielnie wychodzili z inicjatywą skonstruowania własnego zadania, podobnego do tego, które wykonali przed chwilą, lub formułowali wnioski, które były konsekwencją wcześniej rozwiązanego zadania. Pod koniec trwania eksperymentu niektórzy uczniowie sami starali się uogólniać wcześniej rozwiązane problemy i zaczęli dostrzegać analogie. Po dyskusji nad przebiegiem rozwiązania zadania, jeśli czas na to pozwolił przechodziliśmy do kolejnego, bardziej złożonego z ciągu matematycznych problemów.

W związku z faktem prowadzenia w grupie eksperymentalnej lekcji matematyki heurystycznymi metodami oraz charakterystycznym dla tych metod rozwiązywaniem szeregu złożonych zadań i problemów matematycznych i dyskusją nad ich rozwiązaniami w krótkim czasie dało się zauważyć i wyłonić jednostki szczególnie zdolnie matematycznie. Po ich odkryciu rozpoczęłam czynności mające na celu rozwijanie tych zdolności a także obserwację postępów w tym zakresie. Bardziej szczegółowy opis dotyczący obserwacji uczniów zdolnych grupy eksperymentalnej przedstawiony zostanie w kolejnym podrozdziale niniejszego rozdziału. Lekcje matematyki prowadzone w grupie kontrolnej i eksperymentalnej różniły się od siebie także pod względem poziomu hałasu, który towarzyszył pracy uczniów. W rozmowie z nauczycielem grupy kontrolnej wskazywano, że podczas lekcji matematyki panował porządek i dyscyplina, ale atmosfera była przyjazna i spokojna. W grupie eksperymentalnej lekcjom matematyki towarzyszyła głośna praca uczniów, zarówno podczas grupowej formy pracy, jak i indywidualnej, gdyż możliwość konsultowania z innymi uczniami oraz nauczycielem swoich pomysłów sprawiały, że podczas ich trwania było głośniej niż zwykle. Również sami uczniowie zwracali uwagę na to, że pod tym względem zajęcia te różnią się od innych lekcji. Bardzo szybko jednak uczniowie przyzwyczaili się do takiego stanu rzeczy. Podczas pracy z grupą eksperymentalną dało się zauważyć, szczególnie na początku eksperymentu, że uczniowie obawiają się popełniania błędów podczas rozwiązywania zadań i mimo dobrej atmosfery na lekcjach matematyki oraz wielokrotnego zapewniania o braku konsekwencji w przypadku pomyłki woleli oni nie zgłaszać swoich pomysłów i sugestii dotyczących rozwiązań zadań, ponieważ obawiali się, że nie będą one prawidłowe a często okazywało się, że pomysły uczniów były dobre a problem stanowiła blokada spowodowana obawą przed popełnieniem błędu, w konsekwencji czego nie dzieli się swoimi pomysłami na forum klasy. Istotnym czynnikiem, który w znacznym stopniu zmniejszył obawy uczniów przed popełnianiem błędów była moja postawa. Ponieważ z natury jestem osobą chaotyczną i zdarza mi się samej popełniać błędy, podczas lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej takowe również się zdarzały. Odpowiednia reakcja w sytuacji, kiedy uczeń zauważał mój błąd, mająca na celu pokazanie, że błędy są naturalne w procesie uczenia się i nauczania, że się zdarzają i będą zdarzać nawet najlepszym, w znacznym stopniu zmniejszyło ich obawy w tym zakresie.

Ponadto, by jeszcze bardziej uświadomić uczniom, że nie ma nic złego w popełnianiu błędów, że popełnianie błędów jest naturalnym elementem poszukiwania sposobu rozwiązania zadania lub problemu przeprowadziłam lekcję pt. Błędy w matematyce. Na tej lekcji poza podkreśleniem po raz kolejny, że popełniony błąd nie przynosi żadnych negatywnych konsekwencji uczniowie dowiedzieli się o tym, że wielcy matematycy również błędy popełniali i popełniają, że wiele pism matematycznych obfituje w błędy. Poznali także różne rodzaje błędów matematycznych, ukazane zostały nawet przykłady prac naukowych uznanych za poprawne, a które, jak się później okazało takowe nie były. Co więcej, lekcja ta miała na celu pokazanie uczniom, że odszukane w pracach błędy wielokrotnie dawały początek nowym poprawnym twierdzeniom i przysługę nauce a także mogą stanowić doskonały środek pomocniczy w nauczaniu. Na tej lekcji został przytoczony uczniom przykładowy błędny dowód a ich zadaniem było jego odnalezienie a później podjęcie próby jego naprawy. Z biegiem czasu dało się zauważyć, że uczniowska postawa wobec własnych błędów w grupie eksperymentalnej zmieniła się i uczniowie w mniejszym stopniu przejmowali się nimi, dając sobie prawo do ich popełniania.

Niewątpliwie bardzo istotne znaczenie miał tutaj fakt, że popełniony błąd nie przynosił uczniom żadnych negatywnych konsekwencji, nigdy z mojej strony nie stał się podstawą do wystawienia negatywnej oceny, czy negatywnej opinii. W rozmowie nauczyciel matematyki grupy kontrolnej wykazał, że posiada świadomość tego, że jego uczniowie często boją się przedstawiać swoje własne rozwiązywania zadań przed resztą klasy i problem ten dotyczy dużej grupy uczniów. Nauczyciel twierdził również, że uczniowie często boją się matematyki, szczególnie w najstarszych klasach szkoły podstawowej. Wskazywał, że w swojej codziennej pracy stara się nie pogłębiać poziomu stresu u uczniów poprzez na przykłada niewywoływanie do odpowiedzi na forum klasy tych uczniów, którzy nie są pewni swojego wyniku, czy tych, którzy nie rozwiązali zadania lub przez stwarzanie w klasie przyjaznej atmosfery pracy.

Analiza powyższych danych zebranych w trakcie obserwacji pracy uczniów grupy eksperymentalnej podczas lekcji matematyki wykazują, iż stosowanie heurystycznych metod pracy a także praca z autorskim programem i skryptem było wartościowe i przyniosło wiele korzyści. Korzyści te można rozpatrzeć w różnych kontekstach. Dla uczniów praca heurystycznymi metodami stanowiła duże wyzwanie, które ostatecznie doprowadziło do ich ogromnego zaangażowania w rozwiązywanie problemów i sprawiło wiele radości. Przyniosło także wiele satysfakcji i sukcesy. Mimo rozwiązywania znacznie mniejszej ilości zadań podczas lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej niż w grupie kontrolnej, jednakże zadań niestandardowych i dokładna ich analiza przyniosły uczniom klasy eksperymentalnej zarówno lepsze wyniki testu diagnostycznego, który miał na celu sprawdzenie umiejętności matematycznych nabytych w klasie siódmej (diagnoza składa się tylko z tradycyjnych zadań , podobnych poziomem i charakterem do zadań egzaminu ósmoklasisty), jak i wiele sukcesów w konkursach i zawodach matematycznych, co bardziej szczegółowo opisane zostanie w kolejnych podrozdziałach niniejszego rozdziału.

Osiągnięcia poszczególnych uczniów z grupy eksperymentalnej, jak również obserwacje pracy z uczniami badanych grup a także innych wybranych klas gimnazjalnych prowadzonych pod kątem zdolności uczniowskich przedstawione zostaną w kolejnym podrozdziale niniejszego rozdziału dysertacji.

Korzyści z zastosowanych heurystycznych metod nauczania matematyki można rozpatrywać jeszcze w odniesieniu do mojej osoby, gdyż wymagały ode mnie jako nauczyciela, dobrego przygotowania się do zajęć, odpowiedniego doboru zadań, jak również zrozumienia uczniowskich strategii rozwiązywania zadań.

10.2. Obserwacje pracy uczniów zdolnych grupy eksperymentalnej GE, grupy kontrolnej GK oraz wybranych klas gimnazjalnych.

Ponieważ kompletna identyfikacja zdolności i uzdolnień matematycznych jest dość trudna, gdyż może się przejawiać w różnych aspektach aktywności ucznia, dlatego moja obserwacja prowadzona była w wielu formach. Były to cykliczne testy kompetencji, obserwacja ucznia i tego, jak radzi sobie z konkretnym problemem przy tablicy, obserwacja uczniowskich pomysłów rozwiązań na zadane przeze mnie problemy, obserwacja indywidulanej pracy uczniów w domu nad zadanymi zagadnieniami. Wszystkie te obserwacje dotyczyły zarówno pracy z uczniami grupy eksperymentalnej, jak i wybranych klas gimnazjalnych, które w trakcie trwania eksperymentu uczyłam. Bardzo istotnym było, rozpoczynając obserwację uczniów w kierunku ich uzdolnień matematycznych zerwanie ze stereotypem ucznia zdolnego jako takiego ucznia, który odpowiada na wszystkie pytania, na wszystkich testach wypada najlepiej i osiąga najwyższe możliwe oceny. Przy takim stereotypie bowiem nauczyciel zawsze wychodzić będzie rozczarowany z lekcji ze stwierdzeniem na ustach, że nie ma z kim pracować. Zdając sobie sprawę, że matematyka jest nauką abstrakcyjną, więc i przez to trudną, ponieważ wymaga poruszania się w przestrzeni nierzeczywistej, starałam się zauważać nawet najmniejszy przejaw samodzielnego myślenia, bo często sygnalizuje on, że mamy do czynienia z uczniem uzdolnionym. Abstrakcyjność tej nauki prowadzi również do tego, że często mylimy uczniów uzdolnionych z „wyuczonymi", co jest niekorzystne dla obydwu tych grup uczniowskich. Dlatego prowadzone przeze mnie obserwacje mogą być uznane za nietypowe, gdyż nie opierają się na zadaniu konkretnych zadań, wykonaniu konkretnych testów, uzyskaniu konkretnych odpowiedzi i ocenie ich. Wszystkie prowadzone przeze mnie działania, czyli testy, zadania, pytania miały dla mnie charakter informacyjny i w pewnym sensie były mi potrzebne do wskazania, na którego z uczniów mam zwrócić uwagę (jako ucznia zdolnego) i w jaki sposób mogę rozwinąć dalej jego umiejętności. Podstawą do oceny był dla mnie dopiero cały rozwój i działalność ucznia w okresie, w którym był on moim uczniem. Bo dopiero to jest miarą wskazującą czy dany uczeń jest zdolny matematycznie i czy został trafnie wytypowany jako taki.

Dokonywane przeze mnie badanie zdolności matematycznych u moich uczniów służyło wszechstronnemu, rzetelnemu poznawaniu uczniów. Umożliwiło mi bardziej skuteczną pracę z nimi i służyło indywidualizacji nauczania podczas zajęć dydaktycznych. Stworzyło możliwość nie tylko poznania ucznia, lecz także pomogło uczniom w poznaniu siebie. Wstępną diagnozę rozpoczęłam pretestem, który przeprowadzony został w dwóch klasach: eksperymentalnej i kontrolnej. Test ten złożony był z trzynastu zadań o wysokim, aczkolwiek zróżnicowanym stopniu trudności z różnych obszarów matematyki. Doboru zadań dokonałam w ten sposób, by zagadnienia na teście nie pokrywały się z zagadnieniami, które realizowane są na lekcjach matematyki, ponadto były również tak dobrane, by uczeń w tym wieku był w stanie je rozwiązać bez żadnej specjalnej wiedzy czy metody. Istotą tego wstępnego badania było bowiem poznanie możliwości intelektualnych uczniów i samodzielnego rozumowania. W tej części badań najistotniejszy nie był dla mnie wynik punktowy, lecz przeprowadzone przez dzieci rozumowania. Należy bowiem podkreślić, że często nawet nie do końca poprawne rozwiązanie świadczyć może o uzdolnieniach dziecka, jeśli przeanalizuje się je pod odpowiednim kątem. Dla przykładu podam tutaj trzy rozumowania przeprowadzone przez moich uczniów. Pierwsze pochodzi z zajęć lekcyjnych prowadzonych przeze mnie, drugie z zajęć koła matematycznego, trzecie z kolei z pretestu, który uczniowie mieli do rozwiązania.

Zadanie 1.
Rozwiąż nierówność $|x–3|+|x–4| < \frac{2}{3}$.

Standardowe podejście do tego zadania polega na rozważeniu trzech przypadków układu znaków zmiennej x i usuwania wartości bezwzględnej. Natomiast uczennica skorzystała z interpretacji geometrycznej modułu różnicy jako odległości liczb na osi. Poszukiwała więc takiej liczby x, której suma odległości od trójki i czwórki jest mniejsza od 1. Zauważyła następnie, że takich liczb nie ma, ponieważ dla każdego punktu prostej ta suma wynosi co najmniej 1.

Z kolei podczas zajęć koła matematycznego przedstawiłam uczestnikom następujący problem:

Zadanie 2.
Rozwiąż nierówność:
$\sqrt{6x - 9 - x^2} \leq x^{2018} + 2018$

Nierówność ta wygląda na trudną a poszukiwanie jej rozwiązań (o ile da się je znaleźć) musi być bardzo żmudne. Większość uczestniczących w zajęciach uczniów podjęło próbę jej rozwiązania, tylko jeden z uczniów zastanowił się nad sensem wyrażenia występującego po lewej stronie tej nierówności i zauważył, że dziedzina tego wyrażenia jest jednoelementowa i wynosi 3. Po tym spostrzeżeniu wszyscy uczestnicy byli już w stanie dokończyć to rozumowanie. Wystarczyło bowiem w bardzo prosty sposób sprawdzić, czy 3 spełnia tę nierówność.

Zadanie 3.

Wiedząc, że suma miar wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180^o wyznacz sumę miar wszystkich katów wewnętrznych dowolnego pięciokąta wypukłego.

Jeden z uczniów narysował do powyższego zadania wielokąt foremny, zaznaczył w nim środek okręgu opisanego na tym wielokącie a tym samym podzielił go na trójkąty równoramienne. Rozwiązanie to nie jest w pełni poprawne, gdyż nie na każdym wielokącie wypukłym można opisać okrąg, jednakże idea wybrania punktu wewnątrz wielokąta jest skuteczna do rozwiązania tego problemu w ogólnym przypadku.

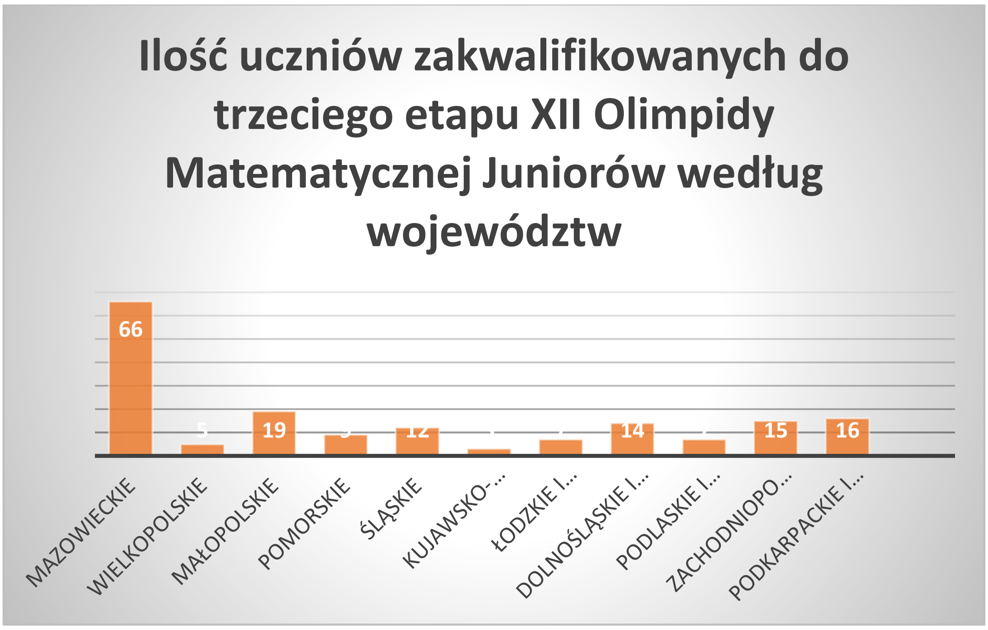
Bardzo istotne w procesie rozwoju zdolności matematycznych uczniów były zadawane uczniom na lekcjach problemy do dyskusji, gdyż pozwalały one rozwijać umiejętności w szybki sposobów, uczniowie bowiem korzystali ze swojej wiedzy nawzajem, by któryś z nich jako pierwszy znalazł rozwiązanie, przy czym należało nie tylko w tym dostrzegać tego ucznia, ale także pomysły innych, z których on korzysta. Ważne było zawsze dla mnie to, by nie robić z lekcji zawodów matematycznych a raczej miejsce, w którym uczniowie wzbogacają wiedzę, uczą się samodzielnego myślenia, łączenia faktów, ale też współpracy z innymi, która tak bardzo ważna jest w rozwoju, nauce, etc. Czasami również pozostawiałam lekcje w tym sensie niedokończoną, by został jakiś problem nierozwiązany w sposób zamierzony lub niezamierzony, który mógł stać się inspiracją dla uczniów do rozwiązania go. Czasami uczniowie próbowali go rozwiązać samodzielnie lub szukali rozwiązania w literaturze czy Internecie. Nie miało to większego znaczenia, gdyż każda z tych czynności przyczyniała się do rozwoju tych uczniów w sposób świadomy, lub nieświadomy, co również jest bardzo ważne, bo im więcej uczeń zrozumie, nauczy się, pozna, tym lepiej dla jego edukacji. W dzisiejszych czasach zwraca się głównie uwagę na noty uzyskiwane przez uczniów, nie chcąc tego kwestionować, pragnę zwrócić uwagę, że nie zawsze są one wymierne a często zmieniają salę lekcyjną w boisko, na którym rozgrywają się zawody matematyczne. Ze względu na zróżnicowane charaktery ludzkie, nie wszyscy sprawdzają się w tej rywalizacji, dlatego też ja często rozmawiałam z uczniami i prowadziłam zajęcia różnego typu a, starając się w jak najbardziej optymalny sposób wyłaniać uczniów zdolnych i odpowiednio indywidualnie stymulować ich rozwój, by mogli odnosić sukcesy. Prowadzenie ucznia zdolnego nie jest rzeczą prosta ani też rzeczą, która w większości wypadków podlega pewnemu schematowi postępowania. Należy zwrócić uwagę na fakt, że uczniowie zdolni są w większości wypadków indywidualnościami, dlatego należy poznać ich bliżej, by stymulować ich rozwój. Część z nich lubi rywalizację, inna zaś część nie, co nie oznacza, że żadna z nich jest lepsza do drugiej, tylko wymaga innego podejścia. Jednym z nich lepiej stawiać problemy na forum, innym zaś być może zadawać problemy do własnej pracy. Wszystko to wymagało ode mnie nie tylko odpowiedniego przygotowania merytorycznego, ale również starałam się być dobrym obserwatorem i działać zgodnie z myślą, że najważniejsze jest to, aby jak najlepiej przyczynić się do rozwoju danego ucznia, bez względu na to, czy rozwój ten ma się odbywać dyktowany przez ramy już utarte, czy też nie. Bowiem celem edukacji jest wykształcenie jak najlepszego fachowca w danej dziedzinie.

Znaczna część moich uczniów lubiła atmosferę rywalizacji podczas zdobywania wiedzy, uczniowie Ci lubili też uczestnictwo w różnego rodzaju konkursach matematycznych. Starałam się więc wskazać drogę, w jaki sposób do takich konkursów się przygotować, czy też pomagałam im osobiście w przygotowaniach. Ponieważ jednak konkursy nie odbywają się zbyt często, maksymalnie cztery razy na rok, dlatego starałam się podtrzymywać w tych uczniach ducha (rywalizacji) na lekcjach matematyki, by prowadziło to do ich ciągłego rozwoju. Czasami na lekcji zdawałam jakieś trudniejsze pytanie, dodatkowo punktowane czy nagrodzone w jakiś inny sposób, tak, aby tego ducha nie zatracały, gdyż byłam świadoma, że wiedzie on ich ku rozwojowi. Jednak nie wszyscy moi uczniowie taką atmosferę lubili a i wśród nich zdarzali się uczniowie zdolni, dlatego starałam się również myśleć i o nich. Zlecałam im zadania jako pracę do domu, lub na dłuższy czas dotyczącą jakiegoś tematu do opracowania czy problemu do rozwiązania.

Często bowiem uczniowie, którzy nie wykazywali się specjalną aktywnością na lekcji, potrafili skutecznie, czy też w ciekawy sposób rozwiązywać zadania poza salą lekcyjną. Nie zawsze bowiem brak aktywności musi oznaczać brak zainteresowania. Praca z uczniem zdolnym charakteryzuje się tym, że nie ma jednej utartej techniki czy metody pracy z tym uczniem, bo uczniowie zdolni są na ogół indywidualnościami, dlatego w większości wypadków każdy z nich potrzebuje specyficznego podejścia. Należy podkreślić, że praca ta jest ciężka z tego powodu, aczkolwiek przy odpowiednim podejściu może dać nauczycielowi dużo satysfakcji, np. w postaci sukcesów swoich uczniów. Poniżej przedstawione zostaną przykłady indywidualnych osiągnięć uczniów zarówno z klasy eksperymentalnej, jak również z klas gimnazjalnych, które w tym samym czasie uczyłam zestawione z wynikami ilościowymi dla poszczególnych województw. Jeden z uczniów klasy gimnazjalnej uzyskał tytuł finalisty XII Olimpiady Matematycznej Juniorów w roku szkolnym 2016/2017. Według danych przedstawionych przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów z dnia 28.06. 2017 roku do XII Olimpiady Matematycznej Juniorów przystąpiło 12154 uczniów z 1157 szkół. Do zawodów trzeciego stopnia (finałowych) XII Olimpiady Matematycznej Juniorów zakwalifikowało się 173 uczniów z 94 szkół. Dla poszczególnych województw dane ilościowe wyglądały następująco:

1. Województwo mazowieckie 66
2. Województwo wielkopolskie 5
3. Województwo małopolskie 19
4. Województwo pomorskie 9
5. Województwo śląskie 12
6. Województwo kujawsko-pomorskie 3
7. Województwa łódzkie i świętokrzyskie 7
8. Województwa dolnośląskie i opolskie 14
9. Województwa podlaskie i warmińsko-mazurskie 7
10. Województwa zachodniopomorskie i lubuskie 15
11. Województwa podkarpackie i lubelskie 16

Wykres 1



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej Juniorów

Jak widać z powyższego uzyskany status finalisty mojego ucznia był ogromnym wyróżnieniem, gdyż osiągnęło go tylko 5 uczniów naszego województwa oraz 173 uczniów z całego kraju. Jeden z uczniów klasy gimnazjalnej uzyskał tytuł laureata XIII Olimpiady Matematycznej Juniorów w roku szkolnym 2017/2018. Według danych przedstawionych przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów z dnia 27.06. 2018 roku do XIII Olimpiady Matematycznej Juniorów przystąpiło 10473 uczniów z 1070 szkół. Do zawodów trzeciego stopnia (finałowych) XIII Olimpiady Matematycznej Juniorów zakwalifikowało się 127 uczniów z 69 szkół.

Dla poszczególnych województw dane ilościowe wyglądały następująco:

1. Województwo mazowieckie 50
2. Województwo wielkopolskie 4
3. Województwo małopolskie 9
4. Województwo pomorskie 8
5. Województwo śląskie 9
6. Województwo kujawsko-pomorskie 8
7. Województwa łódzkie i świętokrzyskie 3
8. Województwa dolnośląskie i opolskie 13
9. Województwa podlaskie i warmińsko-mazurskie 4
10. Województwa zachodniopomorskie i lubuskie 8
11. Województwa podkarpackie i lubelskie 11

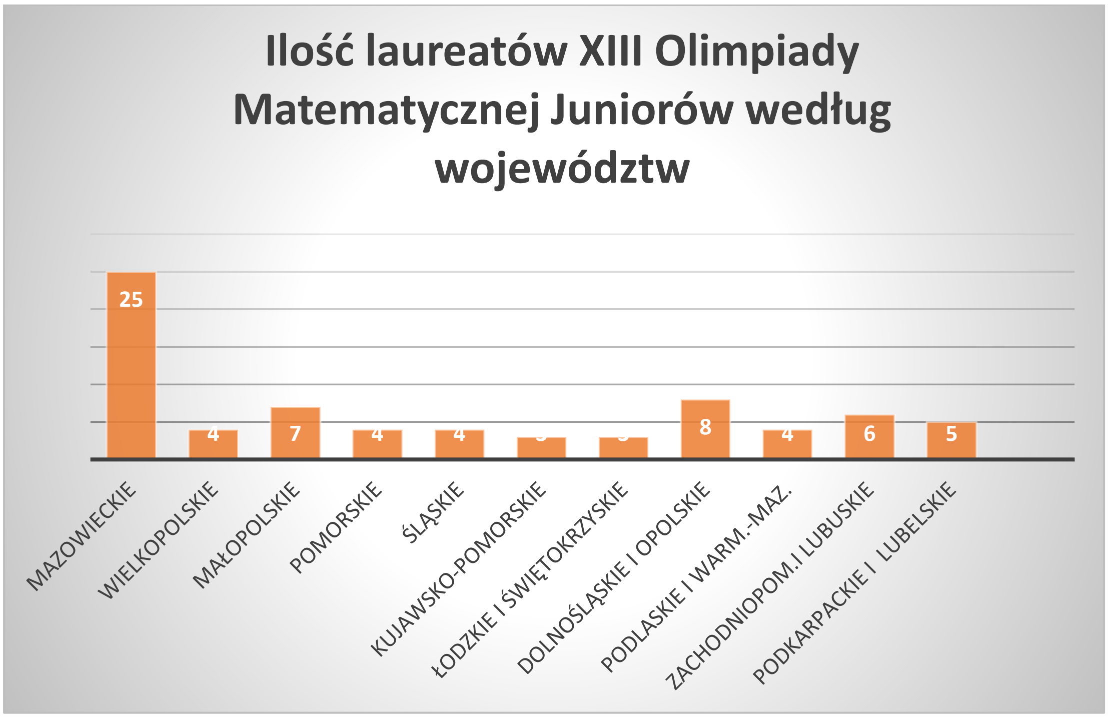
Wykres 2

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej Juniorów

Z kolei tytuł laureata XIII Olimpiady Matematycznej Juniorów uzyskało łącznie 73 uczniów z 49 szkół. Dla poszczególnych województw dane ilościowe wyglądały następująco:

1. Województwo mazowieckie 25
2. Województwo wielkopolskie 4
3. Województwo małopolskie 7
4. Województwo pomorskie 4
5. Województwo śląskie 4
6. Województwo kujawsko-pomorskie 3
7. Województwa łódzkie i świętokrzyskie 3
8. Województwa dolnośląskie i opolskie 8
9. Województwa podlaskie i warmińsko-mazurskie 4
10. Województwa zachodniopomorskie i lubuskie 6
11. Województwa podkarpackie i lubelskie 5

Wykres 3



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej Juniorów

Jak widać z powyższego sukces mojego ucznia był ogromnym wyróżnieniem, gdyż status laureata osiągnęło wówczas tylko 4 uczniów z naszego województwa a łącznie w kraju tylko 73 uczniów.

Inne ważne osiągnięcia uczniowskie dotyczyły udziału w Wojewódzkim Konkursie Matematycznym. I tak, w roku szkolnym 2016/2017 tytuł laureata uzyskała jedna uczennica, którą w tym czasie uczyłam. W całym województwie wielkopolskim w tym czasie do Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla gimnazjalistów przystąpiło 6319 uczniów, z czego 114 uzyskało w nim tytuł laureata (co stanowi 1,8% liczby uczestników), 23 natomiast uzyskało w nim tytuł finalisty (co stanowi 0,36% liczby uczestników). Łączna liczba nagrodzonych w tym konkursie to 137 uczniów (co stanowi **2,17%** liczby uczestników). Z kolei w roku szkolnym 2017/2018 tytuł laureata osiągnęło czworo uczniów, których w tym czasie uczyłam, status finalisty z kolei jeden z moich uczniów. W tym czasie w całym województwie wielkopolskim do Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla gimnazjalistów przystąpiło 6135 uczniów, z czego 95 uzyskało w nim tytuł laureata (co stanowi 1,55% liczby uczestników), 45 natomiast uzyskało tytuł finalisty (co stanowi 0,73% liczby uczestników). Łączna liczba nagrodzonych w tym konkursie to 140 uczniów (co stanowi **2,28%** liczby uczestników).

Poniżej przestawiono opisane wyniki na wykresie.

Wykres 4

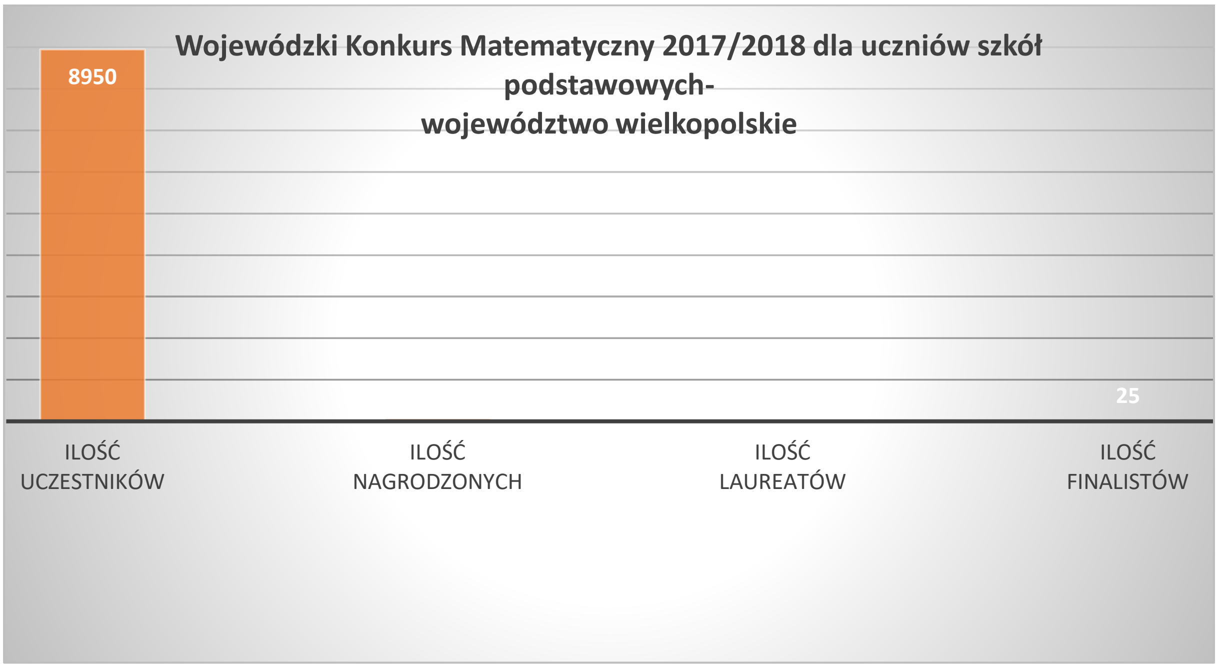
Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronie internetowej Kuratorium Oświaty w Poznaniu

Uczniowie klas gimnazjalnych osiągnęli jeszcze wiele sukcesów indywidualnych w takich konkursach matematycznych, jak Kangur (I miejsce, liczne bardzo dobre wyniki i wyróżnienia), II miejsce w konkursie Złota Żaba i inne, a także w zawodach drużynowych m.in. trzecie miejsce w Wielkopolskich Meczach Matematycznych Gimnazjalistów, VIII miejsce w Wielkopolsce a XVII w kraju w klasowym konkursie Matematyka bez granic.

Oprócz wygranych w konkursach uczniowie zdobyli jeszcze wiele innych niemierzalnych sukcesów. Wielu spośród moich uczniów było prelegentami wystąpień popularyzujących matematykę na uniwersytetach, które skierowane były do młodszych uczniów klas szóstych szkół podstawowych. Uczniowie stworzyli także wiele projektów matematyczno-informatycznych. Zawsze chętnie angażowali się we wszelkie działania związane z matematyką a wspólnie spędzony czas uważali za bardzo przyjemny. Wielu spośród moich uczniów po ukończeniu gimnazjum wybrało naukę w klasach o profilach matematycznych. Wszystkie te sukcesy były konsekwencją wieloletnich działań wdrażanych zarówno na lekcjach matematyki, jak i poza szkołą. Ponadto obserwując dalsze losy tych uczniów można zauważyć, że uczniowie ci w dalszym przebiegu nauki okazali się również uczniami bardzo zdolnymi.

Badanie, którym objęta została grupa eksperymentalna było krótkim badaniem, jednak mimo tego dało się zaobserwować jednostki szczególne zdolne w tej grupie. Co więcej po niespełna roku pracy heurystycznymi metodami według autorskiego programu nauczania zdarzyły się także w tej grupie uczniowskie sukcesy. I tak, najbardziej spektakularnym było osiągnięcie przez jednego z uczniów tej grupy tytułu laureata Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla uczniów szkół podstawowych z uwagi na fakt, że w całym województwie taki tytuł osiągnęło tylko 25 uczniów. W roku szkolnym 2017/2018 po raz pierwszy, w konsekwencji reformy edukacji do Wojewódzkich Konkursów Matematycznych dla uczniów szkół podstawowych przystąpić mogli również uczniowie klas siódmych. Uczniowie klas siódmych stanowili największy odsetek nagrodzonych. W województwie wielkopolskim do Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla uczniów szkół podstawowych w tym czasie przystąpiło 8950 uczniów, z czego 25 uczniów uzyskało tytuł laureata (co stanowi 0,28% wszystkich uczestników), tytuł finalisty również 25 uczniów (co stanowi 0,28% wszystkich uczestników). Łączna liczba nagrodzonych w tym konkursie wyniosła 50 uczniów (co stanowi 0,56% wszystkich uczestników).

Wykres 5



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronie internetowej Kuratorium Oświaty w Poznaniu

Ponadto dwoje uczniów grupy eksperymentalnej osiągnęło w tym czasie wyróżnienie a jeden bardzo dobry wynik w Międzynarodowym Konkursie Kangur Matematyczny. Zdarzyły się także sukcesy w mniej znanych konkursach, np. Adwentowym Kalendarzu Matematycznym i innych. Uczniowie grupy eksperymentalnej bardzo chętnie bowiem uczestniczyli w różnych konkursach matematycznych, do których udziału ich zachęcałam lub które organizowałam, szczególnie lidze zadaniowej oraz Matematycznym Problemie miesiąca. W grupie kontrolnej z kolei żaden z uczniów nie zdecydował się na udział w jakimkolwiek konkursie matematycznym. Uczniowie tej klasy nie zaangażowali się także w żadne projekty czy działania popularyzujące kulturę matematyczną.
Poniżej przytoczono opis przypadku ucznia szczególnie utalentowanego.

10.3. Analiza przypadku

10.3.1. Identyfikacja problemu

W każdej klasie można spotkać uczniów interesujących się matematyką jak również takich, których zainteresowania wykraczają poza szkolne nauczanie tego przedmiotu. W wielu z nich można również napotkać uczniów uzdolnionych matematycznie, czasem nawet utalentowanych a obowiązkiem szkoły i nauczyciela jest takie zorganizowanie pracy, dzięki której we właściwy sposób uczniowie ci rozwiną swoje zainteresowania czy zdolności. Dodatkowo wiele różnych czynników takich jak m.in. system klasowo-lekcyjny, liczne oddziały nie sprzyjają indywidualizacji w procesie nauczania. Ponadto szkoły skupiają swą uwagę na średnio zdolnych i słabych uczniach, z kolei zdolni, bardziej dociekliwi i pracjący w szybszym tempie uczniowie nie mieszczą się w granicach wymagań szkół. Tacy uczniowie swoim rozwojem znacznie wyprzedzają swoich rówieśników, jednak na ogół pozostawieni zostają sami sobie i pracują samodzielnie. Szanse na rozwój takich uczniów w większości szkół są słabe, przy czym również należy uwzględnić fakt, że fundusze na zajęcia wspierające takich uczniów są z roku na rok coraz skromniejsze i takie formy pomocy istnieją właściwie już tylko dzięki społecznemu zaangażowaniu nauczycieli pasjonatów, którzy swą prace pojmują jako coś więcej niż tylko wykonywanie wyuczonego zawodu. Nauczyciel, który chce osiągnąć widoczne efekty w pracy z uczniem zdolnym powinien najpierw rozpoznać jego możliwości a następnie opracować, zgodny z własnym wynikiem rozpoznania, przemyślany plan działania. Plan ten powinien dotyczyć zarówno doboru treści kształcenia, metod nauczania, jak również form organizacyjnych zajęć. Nie należy również zapominać o kwestiach wychowawczych, wiadomo bowiem, że zdolni uczniowie miewają często kłopoty z funkcjonowaniem w społeczeństwie. Warto również, by nauczyciel w swych przedsięwzięciach mógł liczyć na współpracę z rodzicami ucznia zdolnego, wówczas bowiem zwiększa się szansa na to, by w przyszłości działania te zaowocowały jego sukcesami naukowymi i zawodowymi oraz zmobilizowały go do wytężonego wysiłku i twórczych poszukiwań. Ciekawą i skuteczną formę pomocy uczniom zdolnym stanowi opracowywanie i wdrażanie indywidulanych programów nauczania matematyki lub prowadzenie ich indywidulanym tokiem nauczania.

Poniżej przedstawię autentyczną sytuację przypadku ucznia uzdolnionego matematycznie, jedną z wielu napotkanych na mojej drodze nauczania, jednak wybraną z powodu szczególnych zdolności wychowanka. Sytuację tę przedstawię z mojego punktu widzenia, czyli osoby uczącej matematyki tego ucznia i sprawującej opiekę nad nim.

10.3.2. Geneza i dynamika zjawiska

Z wywiadu przeprowadzonego z mamą Antoniego już podczas drzwi otwartych w szkole, w której w tym czasie pracowałam otrzymałam następujące informacje: chłopiec od początku swojej nauki w szkole przewyższał swoich rówieśników wiedzą i umiejętnościami. Szybko liczył, wszystkie zadania rozwiązywał bezbłędnie, obserwował już nawet pewne proste własności liczb i badał pewne zależności. Począwszy od czwartej do szóstej klasy szkoły podstawowej, do której wcześniej uczęszczał, uczony był matematyki według indywidualnego programu nauczania. Ponadto również uczeń ten miał już na swoim koncie wiele osiągnięć w różnych konkursach matematycznych i logicznych, m. in. wielokrotnie uzyskany tytuł laureata Międzynarodowego Konkursu Kangur Matematyczny, czy bardzo wysoki wynik w Mistrzostwach Polski w Grach Matematycznych i Logicznych oraz dwukrotnie wysokie miejsce (uzyskany tytuł laureata) we współorganizowanym przez szkołę, w której w tym czasie pracowałam i Wydział Matematyki UAM konkursie Horyzonty Matematyki. Ponieważ byłam jego pomysłodawcą a także autorka wykładu i zadań konkursowych nie miałam więc wątpliwości, że to uczeń niezwykły o ogromnym talencie matematycznym. Ponadto to właśnie moje wykłady konkursowe stały się przyczyną do podjęcia decyzji o dalszym kształceniu w szkole, którą w tym czasie reprezentowałam pod moja opieką merytoryczną. Specyficzna forma tego konkursu a także jego wysoki poziom merytoryczny pozwalał wyławiać prawdziwe matematyczne talenty, dlatego sukces chłopca w tym konkursie dodatkowo potwierdzał diagnozę matki. Antoni posiadał także opinię z poradni psychologiczno- pedagogicznej orzekającą jego zdolności matematyczne. Po potwierdzeniu decyzji odnośnie wybory szkoły i udanym procesie rekrutacji (miejsce zamieszkania ucznia oddalone było o około 15 kilometrów od wybranej szkoły) mama chłopca rozpoczęła starania o zajęcia indywidualne dla syna. Ze względu na liczne osiągnięcia Antoniego, Kuratorium Oświaty w Poznaniu wydało pozwolenie na organizację takich zajęć w szkole, które w całości zostały sfinansowane, w wymiarze dwóch godzin tygodniowo. Ze względu na fakt, iż znacznie wcześniej wiedziałam, że to ja będę nauczycielem Antoniego i jego opiekunem i że to na mnie spoczęła odpowiedzialność za jego talent, miałam czas przygotować się do tego należycie. Napisałam autorski program indywidualnego nauczania matematyki, w którym zawarłam zagadnienia poszerzające podstawę programową nauczania matematyki zarówno o treści stałe (które uznałam za konieczne do zrealizowania np. elementy logiki i teorii mnogości) oraz elastyczne tzn. zależne od osiągniętego poziomu rozwoju (możliwe do zrealizowania np. pewne wybrane zagadnienia geometrii) w pierwszym roku nauki pod moją opieką.

Pierwszy semestr nauki matematyki nastawiony był na realizację wszystkich treści podstawy programowej potrzebnych do zrealizowania na tym etapie szkolnym (wówczas jeszcze był to trzyletni okres gimnazjum) Rozwiązywane przed nas zadania były zadaniami o znacznie podwyższonym stopniu trudności, tak by stworzyły uczniowi szansę na osiągnięcie sukcesu w Wojewódzkim Konkursie Matematycznym dla gimnazjalistów. Pierwszy etap tego konkursu, etap szkolny, odbył się pod koniec października i zakończył dla ucznia awansem do etapu rejonowego (osiągnął to już po niespełna dwóch miesiącach nauki matematyki ze mną w wymiarze dwóch godzin tygodniowo). Dalsza wytężona praca do końca pierwszego semestru przyniosła Antoniemu kolejny sukces w postaci awansu do etapu wojewódzkiego ww. konkursu. Był to dość spektakularny zarówno dla niego, jak i dla szkoły sukces, gdyż w pierwszym roku nauki na etapie gimnazjum taki sukces to fenomen (tylko kilka przypadków na całą Wielkopolskę w ciągu ostatnich 5 lat). Uczeń posiadł więc po pierwszym semestrze nauki wszystkie niezbędne umiejętności z matematyki na poziomie gimnazjum. Pojawił się na tym etapie problem, jak dalej pracować z uczniem, w jakim tempie, by z jednej strony nie zatrzymać procesu rozwoju uzdolnień a z drugiej nie zniechęcić go.

10.3.3. Znaczenie problemu

Praca z uczniem zdolnym nabiera obecnie coraz większego znaczenia na świecie, chociażby ze względu na zwiększające się zapotrzebowanie na wyspecjalizowanych pracowników naukowych, czy kadry techniczne lub kierownicze. Dlatego też, by przyczynić się do rozwoju zdolności i zainteresowań oraz myślenia twórczego należy takie osoby uczyć efektywnie. Warto przy tym poszukiwać różnych metod i form innych niż tylko te tradycyjne. Istotnym więc, zarówno dla mnie, jak również dla mamy ucznia i jego samego na tym etapie stało się określenie kolejnych kroków, jak dalej pracować, by nie zahamować rozwoju ucznia i nie zdemotywować go do dalszej nauki i pracy, gdyż posiadał on ogromne możliwości intelektualne.

Prognoza negatywna

Nieodpowiednie postępowanie z uczniem mogłoby stać się przyczyną zatrzymania procesu rozwoju uzdolnień, stawianie zbyt wysokich wymagań natomiast mogłoby skutkować obniżeniem własnej samooceny, brakiem aktywności i inicjatywy. Ponadto również mogłyby pojawić się porażki odniesione w konkursach, a te z kolei mogłyby doprowadzić nawet do odmowy udziału w nich. Indywidualna praca ucznia z nauczycielem bez obecności klasy stanowi także zagrożenie zahamowania jego rozwoju społecznego.

Prognoza pozytywna

Organizacja optymalnej ścieżki rozwoju ucznia : stawienie uczniowi wysokich wymagań, ale na miarę jego możliwości, mobilizacja do pracy, dbanie o wszechstronny rozwój jego intelektualnych możliwości , budowanie atmosfery sprzyjającej wzrostowi poczucia jego własnej wartości i wysokiej samoocenie ucznia, motywowanie do udziału w konkursach i wydarzeniach naukowych przy jednoczesnym uświadamianiu istoty i sensu nauki (w szczególności mowa tu o nastawieniu do rywalizacji i konkursów, sama rywalizacja i chęć odnoszenia sukcesów nie może wziąć góry nad wartością samorozwoju) stwarza uczniowi ogromne szanse na rozwój jego talentu, na zadowolenie , rozumienie istoty nauki a także twórcze podejście do matematyki.

Propozycja rozwiązania

Uczeń od drugiego semestru pierwszej klasy gimnazjum oprócz uczestniczenia w zajęciach indywidulanych w wymiarze dwóch godzin tygodniowo, uczestniczył również w lekcjach matematyki z klasą, ponadto po zakończeniu przygotowań do Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego planowane było poświęcenie większej uwagi na przygotowania do Olimpiady Matematycznej Juniorów oraz wdrożenie ucznia do intensywniejszej pracy samodzielnej, realizacji projektów, pomocy przy organizacji konkursów a także pisania i wygłaszania prelekcji przy jednoczesnym motywowaniu do udziału w konkursach matematycznych i logicznych o różnej formie, zarówno tych szkolnych, jak i pozaszkolnych na skale krajową a nawet międzynarodową, indywidualnych i grupowych. Zaproponowałam uczniowi udział w zajęciach szkolnego koła matematycznego a także zajęciach koła olimpijskiego.

Wdrażanie oddziaływań

Uczeń przez cały okres trzech lat gimnazjum uczestniczył w zajęciach indywidualnego nauczania matematyki prowadzonych przeze mnie a od drugiego semestru pierwszej klasy także w lekcjach matematyki z klasą. Na tych ostatnich Antoni albo realizował wspólnie z klasą zagadnienia mojego autorskiego programu nauczania matematyki np. elementy logiki i teorii mnogości, wybrane zagadnienia teorii liczb itp., albo samodzielnie opracowywał zadane przeze mnie zagadnienia, czasem rozwiązywał wskazane przeze mnie zadania i problemy, lub też prowadził wybrane lekcje dla kolegów ze swojej klasy. Podczas zajęć indywidualnych w klasie pierwszej zrealizował podstawę programową nauczania matematyki w całym gimnazjum, przy jednoczesnym przygotowywaniu się do udziału w Wojewódzkim Konkursie Matematycznym dla gimnazjalistów. W drugim semestrze jednocześnie realizując podstawę programową nauczania matematyki w całym gimnazjum rozpoczął rozwiązywanie pierwszych zadań olimpijskich. Drugi rok pracy i nauczanie Antoniego nastawione było na przygotowania do Olimpiady Matematycznej Juniorów. Uczeń na zajęciach indywidualnych rozwiązywał problemy olimpijskie, poznając przy tym różne narzędzia pomocne do ich rozwiązywania np. kongruencje, pewne wybrane twierdzenia geometrii itp., na zajęciach z klasą często również pracował nad ich rozwiązaniami. Trzeci rok nauki matematyki z kolei nastwiony był na twórczy rozwój ucznia a wytężona praca ukierunkowana na przygotowania do udziału w konkursie na uczniowskie prace z matematyki. Drugi i trzeci rok oprócz wyznaczonego kierunku pracy były także pełne różnych innych działań: uczeń motywowany był do udziału w matematycznych konkursach o różnym charakterze m.in. co roku Antoni startował w Międzynarodowym Konkursie Kangur Matematyczny, w Wielkopolskich Meczach Matematycznych, Wielkopolskiej Lidze Zadaniowej, Wojewódzkim Konkursie Matematycznym i tym podobnych. Był wielokrotnym prelegentem podczas współorganizowanych przez nas i Wydział Matematyki i Informatyki UAM wydarzeń takich jak: Międzyszkolne Warsztaty Matematyczne czy Sympozjum Matematyczne, skierowanych do uczniów klas szóstych, siódmych i ósmych wielkopolskich szkół podstawowych. Wielokrotnie również sędziował razem ze mną i innymi nauczycielami mecze matematyczne. Bardzo chętnie czytał wskazaną przeze mnie literaturę a także otrzymał możliwość korzystania z dostępu do prac naukowych z interesującej go dziedziny. Podczas jednego z wykładów otwartych odbywających się na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM dotyczących Teorii Gier zadany został przez prowadzącego problem, który po czasie uczeń rozwiązał i listownie przedstawił jego rozwiązanie, za co otrzymał możliwość spotkania przy kawie z samym Dziekanem tegoż Wydziału. Poznane rozwiązania pewnych problemów olimpijskich stały się dla Antoniego podstawą do rozważań i podjęcia prób uogólnienia pewnych zależności. W wyniku czego powstała praca pt. „Uogólnienia pewnych wybranych problemów olimpijskich. Tożsamości i przekształcenia algebraiczne.”

Efekty oddziaływań

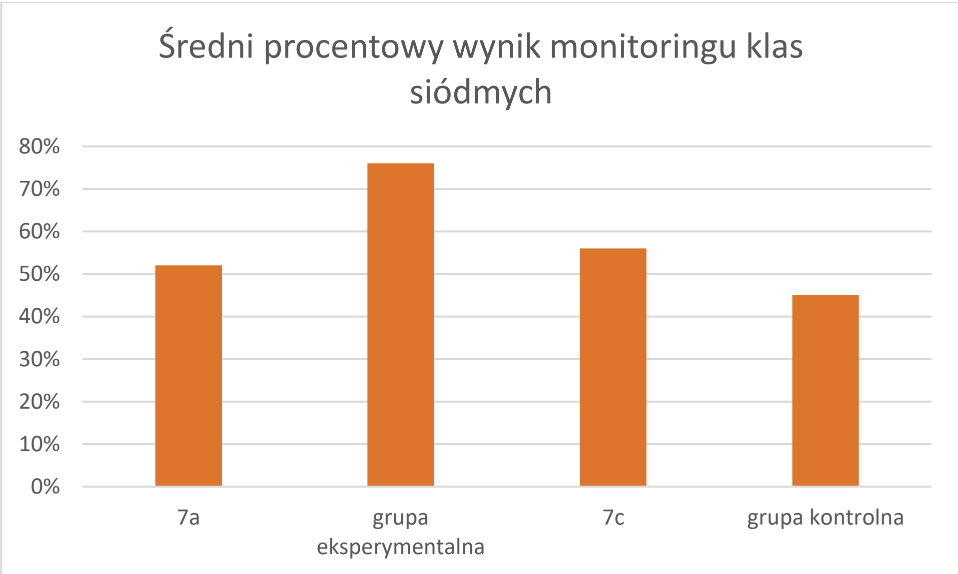
W efekcie wdrożonych oddziaływań uczeń Antoni doskonale opanował podstawę programową nauczania matematyki w gimnazjum i szkole średniej. W pierwszej klasie gimnazjum uzyskał m.in. tytuł laureata Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla gimnazjum, tytuł laureata Międzynarodowego Konkursu Kangur Matematyczny, tytuł laureata Wielkopolskiej Ligii Zadaniowej, w drugim roku z kolei tytuł finalisty XII Olimpiady Matematycznej Juniorów, tytuł laureata Międzynarodowego Konkursu Kangur Matematyczny. Był w tym czasie również kapitanem drużyny, która zajęła III miejsce w Wielkopolskich Meczach Matematycznych Juniorów. W trzeciej klasie z kolei po raz drugi osiągnął tytuł laureata Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego dla gimnazjalistów, tytuł laureata Międzynarodowego Konkursu Kangur Matematyczny, tytuł laureata XIII Olimpiady Matematycznej Juniorów a także tytuł laureata konkursu Matematyka dla Młodych, w którym jedną z nagród była publikacja jego zwycięskiej pracy pt. „Uogólnienia pewnych wybranych problemów olimpijskich. Tożsamości i przekształcenia algebraiczne.” na łamach Poznańskiego Portalu Matematycznego. Uczeń za swoje wybitne osiągnięcia otrzymał m.in. Nagrodę Prezydenta Miasta Poznania a także stypendium. Do końca nauki w gimnazjum pozostał skromnym chłopcem, który bardzo chętnie pomagał kolegom a także chętnie uczestniczył w każdym klasowym wyjściu. Wielokrotnie angażował się w organizację wydarzeń popularyzujących kulturę matematyczną skierowanych do młodszych uczniów z wielkopolskich szkół podstawowych, stając się dla nich wzorem i autorytetem. Swoją pasję do nauk ścisłych rozwija dalej uczęszczając do III L.O. w Gdyni, w którym to będąc obecnie w klasie drugiej uzyskał tytuł finalisty XXVII Olimpiady Informatycznej

10.4. Obserwacje rozwoju umiejętności matematycznych uczniów grupy eksperymentalnej GE, grupy kontrolnej GK oraz uczniów wybranych klas gimnazjalnych.

W celu zobrazowania poziomu nabytych umiejętności matematycznych uczniów grupy eksperymentalnej GE przeanalizowano średnie procentowe wyniki diagnozy w zestawieniu ze średnimi wynikami grupy kontrolnej GK oraz średnimi wynikami uczniów innych klas tego rocznika ze szkoły, w której miał miejsce niniejszy eksperyment, jak również średni ocenowy wynik klasyfikacji końcowej z matematyki oraz wyniki wybranych prac pisemnych.

Poniżej przedstawione zostały średnie procentowe wyniki monitoringu wszystkich klas siódmych przeprowadzonego pod koniec trwania eksperymentu:

Wykres 6

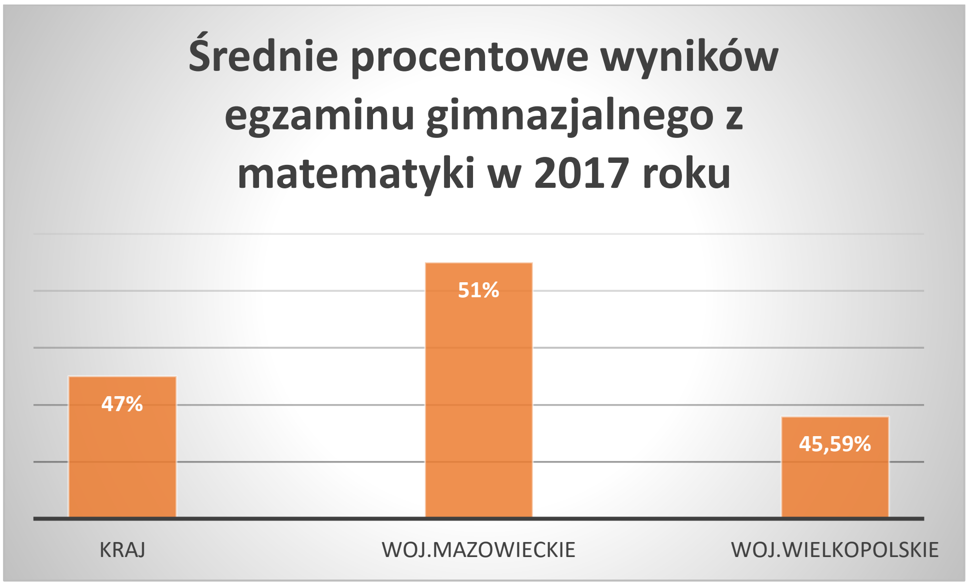


Źródło: Badanie własne.

Średni procentowy wynik diagnozy z matematyki dla całej szkoły wyniósł 57%, średni procentowy wynik grupy kontrolnej 45%, zaś grupy eksperymentalnej 76%, ponadto grupa eksperymentalna osiągnęła najlepszy średni procentowy wynik z wszystkich czterech klas siódmych w szkole. Minimalna średnia procentowa prac pisemnych (kartkówek, sprawdzianów) w grupie eksperymentalnej wyniosła 52% a najniższą oceną końcową osiągniętą w tej klasie była ocena dostateczny (2 osoby), natomiast średni ocenowy wynik końcowy wyniósł w tej grupie 4,8 (co stanowi 80 %). W grupie kontrolnej z kolei minimalna średnia procentowa prac pisemnych wyniosła 38%, najniższą oceną końcową osiągniętą w tej grupie była ocena dopuszczający (5 osób). Z kolei średni ocenowy wynik końcowy wyniósł w tej grupie 3,85 (co stanowi 64,17 %).

Przytoczę jeszcze przykłady wyników egzaminu gimnazjalnego moich uczniów w celu analizy poziomu nabytych umiejętności matematycznych. I tak, uczniowie trzeciej klasy gimnazjum w roku 2017 osiągnęli średni procentowy wynik egzaminu gimnazjalnego z matematyki równy 75%. Poniżej przedstawiono wyniki tegoż egzaminu w zestawieniu ze średnim procentowym wynikiem w kraju, naszym województwie oraz województwie mazowieckim (jako najwyższym z wszystkich województw).

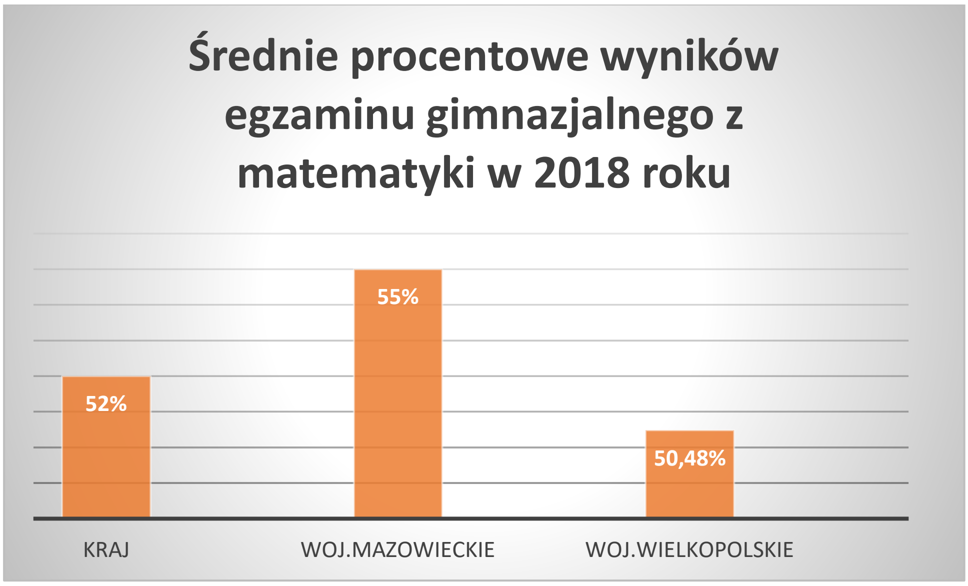
Wykres 7



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronach internetowych Okręgowych Komisji Egzaminacyjnych

Z kolei uczniowie trzeciej klasy gimnazjum roku 2018, których uczyłam osiągnęli średni procentowy wynik egzaminu gimnazjalnego z matematyki równy 83%. Poniżej przedstawiono wyniki tegoż egzaminu w zestawieniu ze średnim procentowym wynikiem w kraju, naszym województwie oraz województwie mazowieckim (jako najwyższym z wszystkich województw).

Wykres 8



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych dostępnych na stronach internetowych Okręgowych Komisji Egzaminacyjnych

PODSUMOWANIE:

Na podstawie powyższego można stwierdzić, że rozwój umiejętności matematycznych szedł w parze z rozwojem zdolności matematycznych uczniów. Praca heurystycznymi metodami i praca z własnym programem autorskim przyniosła więc korzyści na różnych płaszczyznach.

11. Wnioski końcowe

11.1. Weryfikacja hipotez

Wyniki przeprowadzonych analiz statystycznych oraz obserwacji przedstawione w poprzednich podrozdziałach pozwalają na weryfikację postawionych w rozprawie hipotez. Ich weryfikacja została zawarta w niniejszym podrozdziale. Najpierw weryfikacji poddano cztery hipotezy szczegółowe postawione w ramach hipotezy głównej. Przyjęto pierwszą hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

O przyjęciu powyższej hipotezy zadecydowały wyniki opisanych analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 9.4.2.3. Zaprezentowane analizy pokazują, iż istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części dotyczącej zadań problemowych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE a średnimi wynikami posttestu z części dotyczącej zadań problemowych uzyskanymi przez uczniów grupy kontrolnej GK. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod i autorskiego programu nauczania prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań problemowych, niż uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy pierwsza hipoteza szczegółowa może zostać uznana za prawdziwą.

Odrzucono drugą hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

O odrzuceniu niniejszej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 9.4.2.2. Zaprezentowane tam analizy wskazują, iż nie istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części dotyczącej zadań arytmetycznych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE a średnimi wynikami posttestu z części dotyczącej zadań arytmetycznych uzyskanymi przez uczniów grupy kontrolnej GK. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod i autorskiego programu nauczania prezentowali w końcowym pomiarze podobną umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych, co uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy druga hipoteza szczegółowa zostaje uznana za nieprawdziwą.

Przyjęto trzecią hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Poziom umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod, nauczania *w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.*

O przyjęciu powyższej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 9.4.2.1. Zaprezentowane analizy pokazują, iż istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części dotyczącej zadań geometrycznych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE a średnimi wynikami posttestu z części dotyczącej zadań geometrycznych uzyskanymi przez uczniów grupy kontrolnej GK. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod i autorskiego programu nauczania prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych, niż uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy trzecia hipoteza szczegółowa może zostać uznana za prawdziwą.

Odrzucono czwartą hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Nie istnieją zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań u badanych uczniów a ich płcią.

O odrzuceniu niniejszej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 9.4.2.4. Zaprezentowane analizy pokazują, że istnieją statystyczne różnice w średnich wynikach uzyskanych w postteście przez dziewczynki i przez chłopców zarówno odnośnie wszystkich zadań posttestu, jak i części dotyczącej tylko zadań arytmetycznych. Nie istnieją natomiast statystyczne różnice w średnich wynikach uzyskanych w postteście tylko odnośnie części dotyczącej zadań geometrycznych i problemowych między grupą dziewczynek a grupą chłopców. W związku z powyższym wykryto zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania zadań, również zadań arytmetycznych przez badanych uczniów a ich płcią. Na podstawie powyższego wniosku postawiona w pracy trzecia hipoteza szczegółowa w ogólności zostaje uznana za nieprawdziwą.

Przyjęto piątą hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Przy jednoczesnym wzroście rozwoju otwartości myślenia matematycznego uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program nastąpi jednoczesny wzrost ich poziomu umiejętności matematycznych.

O przyjęciu powyższej hipotezy zadecydowały wyniki obserwacji opisanych w rozdziale 10. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod i autorskiego programu nauczania prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych i problemowych, które najlepiej odzwierciadlają otwartość myślenia matematycznego, niż uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami, ponadto wyniki obserwacji umiejętności matematycznych (wyniki diagnozy, średnia ocen prac pisemnych, średnia ocen końcowych z przedmiotu) wskazują jednoczesny wzrost poziomu umiejętności matematycznych uczniów grupy kontrolnej. W związku z powyższym postawiona w pracy piąta hipoteza szczegółowa może zostać uznana za prawdziwą.

Przyjęto szóstą hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Poziom rozwoju zdolności matematycznych u uczniów biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów kształconych innymi metodami.

O przyjęciu powyższej hipotezy zadecydowały wyniki obserwacji i studium przypadku opisanych w rozdziale 10. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod i autorskiego programu nauczania prezentowali większe zainteresowanie przedmiotem, większe zainteresowanie udziałem w konkursach i wydarzeniach naukowych oraz osiągnęli liczne sukcesy matematyczne, których nie odnotowano w przypadku uczniów kształconych innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy szósta hipoteza szczegółowa może zostać uznana za prawdziwą.

Następnie dokonano weryfikacji hipotezy głównej postawionej w niniejszej pracy. Przyjęto hipotezę główną w brzmieniu:

Poziom rozwoju zdolności, umiejętności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych szkoły podstawowej biorących udział w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

O przyjęciu niniejszej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w rozdziale 9, które ukazują, iż istnieje statystyczna różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE a średnimi wynikami posttestu uzyskanymi przez uczniów grupy kontrolnej GK, a także wyniki obserwacji opisanych w rozdziale 10, które ukazują rozwój zdolności matematycznych tylko w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej. Uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program nauczania osiągnęli wyższy rozwój zdolności i umiejętności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego W związku z powyższym postawiona w rozprawie hipoteza główna zostaje uznana za prawdziwą.

11.2. Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego

Celem przeprowadzonych badań było sprawdzenie skuteczności zastosowania heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program podczas lekcji matematyki w rozwijaniu umiejętności, zdolności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Główną metodą badawczą był tu eksperyment pedagogiczny z wykorzystaniem pretestu oraz posttestu w dwóch grupach, przeprowadzony zgodnie z założonym planem. Diagnoza wstępna i końcowa przeprowadzona została w oparciu o samodzielnie przygotowane testy dydaktyczne. Testy zawierały matematyczne zadania z podziałem na zadania arytmetyczne, geometryczne i problemowe. W trakcie badań eksperymentalnych prowadzono ponadto badania metodą obserwacji lekcji matematyki w grupie eksperymentalnej a także wybranych klasach gimnazjalnych. Przeprowadzono także rozmowy z nauczycielem matematyki grupy kontrolnej. Badania eksperymentalne objęły uczniów dwóch klas siódmych szkoły podstawowej i zostały przeprowadzone w Szkole Podstawowej nr 67 w Poznaniu. W eksperymencie wzięło udział w sumie 40 uczniów, wśród których więcej było dziewczynek (52,5%) niż chłopców (47,5%). Klasy zostały przyporządkowane losowo do grup eksperymentalnej i kontrolnej, których ostateczna liczebność była równa – w każdej grupie po 20 uczniów.

W niniejszej części rozprawy sformułowano wnioski związane z głównym problemem badawczym oraz wynikającymi z niego pytaniami szczegółowymi przyjętymi w badaniach eksperymentalnych uczniów klas siódmych a odpowiedź na postawione pytania była możliwa dzięki analizie danych zebranych w toku badań eksperymentalnych oraz dzięki ich statystycznej weryfikacji przeprowadzonej przy pomocy wnioskowania statystycznego z zastosowaniem testu U Manna-Whitneya, testu t dla prób niezależnych oraz testu Levene'a jednorodności wariancji. Na podstawie wykonanych analiz statystycznych potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej i tym samym wykazano, iż zastosowanie heurystycznych metod nauczania matematyki w oparciu o autorski program wpłynęło pozytywnie na rozwój umiejętność matematycznych, zdolności matematycznych oraz otwartości myślenia matematycznego przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Wykazano, iż uczniowie uczestniczący w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody nauczania oraz autorski program prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań matematycznych niż uczniowie kształceni innymi metodami. U uczniów tych ponadto odnotowano liczne sukcesy w konkursach świadczące o osiągniętym poziomie zdolności matematycznych. Wyniki wykazały również, że istnieje statystyczna różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z zadań geometrycznych i problemowych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE, a średnimi wynikami posttestu uzyskanymi przez uczniów grupy kontrolnej GK, co stanowi doskonały wskaźnik poziomu rozwoju otwartości myślenia matematycznego u badanych uczniów. Uczniowie grupy eksperymentalnej uczestniczący w zajęciach z zastosowaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program osiągnęli w końcowym pomiarze wyższy poziom umiejętności rozwiązywania zadań problemowych i geometrycznych, niż uczniowie, którzy w tym samym czasie uczestniczyli w zajęciach realizowanych innymi metodami kształcenia. Powyższe wyniki analiz statystycznych pozwalają dokonać oceny skuteczności zastosowania heurystycznych metod nauczania oraz autorskiego programu, które to przyczyniły się do wzrostu umiejętności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego, dlatego ich wpływ ocenić należy jako pozytywny.

Poniżej przedstawiono odpowiedzi na poszczególne pytania szczegółowe wyodrębnione w ramach głównego problemu badawczego.

-W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program na umiejętność rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne przy użyciu testu U Manna-Whitneya i na podstawie wykonanych analiz statystycznych potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej, mianowicie wykazano, iż ich zastosowanie wpływa pozytywnie na umiejętność rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań problemowych niż uczniowie kształceni innymi metodami. Potwierdzono także brak efektu zastosowania pretestu, bowiem wykazano, że przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście a zatem przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Ponadto wykazano również, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań problemowych przez uczniów a jedynie okazała się być wyższą w przypadku uczniów uczestniczących w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program a statystyczna weryfikacja danych umożliwiła przyjęcie pierwszej hipotezy szczegółowej w brzmieniu: Poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami. Powyższe wyniki oznaczają więc, że zastosowane heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program przyczyniły się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań problemowych, czyli zastosowane metody i autorski program okazały się być skuteczne, zatem ich wpływ na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych ocenia się jako pozytywny.

- W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne za pomocą testu U Manna-Whitneya. Z uwagi na brak potwierdzenia jednorodności grup pod względem umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych pretestu wykonano tylko elementy analizy statystycznej w tym obszarze, dzięki którym możliwe było sprawdzenie czy zastosowanie heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program może mieć korzystny wpływ na wyniki uczniów klas siódmych szkoły podstawowej w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych. Analizy statystyczne pokazały, że zastosowanie heurystycznych metod w oparciu o autorski program nie przyniosło uczniom grupy eksperymentalnej GE wyraźnych postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych, w porównaniu z wynikami uczniów grupy kontrolnej GK, kształconych innymi metodami a tym samym skuteczność zastosowania heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program w przypadku umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej nie została potwierdzona. Zatem na podstawie przeprowadzonych analiz statystycznych odrzucono hipotezę w brzmieniu:

Poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

Oznacza to, że zastosowanie heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program nie przyniosło oczekiwanych skutków w tym zakresie, czyli nie przyczyniło się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań arytmetycznych.

- W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne przy użyciu testu U Manna-Whitneya i na podstawie wykonanych analiz statystycznych potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej, mianowicie wykazano, iż ich zastosowanie wpływa pozytywnie na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych niż uczniowie kształceni innymi metodami. Potwierdzono także brak efektu zastosowania pretestu. Wykazano bowiem, że przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście a zatem przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Ponadto wykazano również, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów a jedynie okazała się być wyższą w przypadku uczniów uczestniczących w lekcjach matematyki wykorzystujących heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program a statystyczna weryfikacja danych umożliwiła przyjęcie pierwszej hipotezy szczegółowej w brzmieniu: Poziom umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klasy siódmej szkoły podstawowej biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznych metod, nauczania w oparciu o autorski program jest wyższy niż u uczniów klas siódmych kształconych innymi metodami.

Powyższe wyniki oznaczają więc, że zastosowane heurystyczne metody nauczania w oparciu o autorski program przyczyniły się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań geometrycznych, czyli zastosowane metody i autorski program okazały się być skuteczne, zatem ich wpływ na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas siódmych ocenia się jako pozytywny.

- Czy istnieje zależność między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań a płcią badanych uczniów?

W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania zadań matematycznych a płcią badanych uczniów przeprowadzono analizy statystyczne z wykorzystaniem testu U Manna-Whitneya, testu t dla prób niezależnych oraz testu Levene'a jednorodności wariancji. Wykazano na podstawie analiz statystycznych, iż różnica średnich wyników posttestu uzyskanych w badanych grupach chłopców i dziewczynek w zakresie umiejętności rozwiązywania wszystkich zadań matematycznych oraz zadań arytmetycznych jest istotna statystycznie, natomiast różnica średnich wyników posttestu w badanych grupach odnośnie zadań geometrycznych i problemowych nie jest istotna statystycznie.

Ponadto wykazano także, że średnie wyniki posttestu w zakresie umiejętności rozwiązywania wszystkich zadań, w tym również zadań arytmetycznych, geometrycznych i problemowych osiągnięte zarówno przez chłopców, jak i przez dziewczynki w grupie eksperymentalnej są wyższe niż średnie wyniki posttestu w tych zakresach osiągnięte przez uczniów grupy kontrolnej. Na podstawie statystycznej weryfikacji danych odrzucono więc hipotezę szczegółową w brzmieniu:

Nie istnieją zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań u badanych uczniów a ich płcią.

Zatem płeć różnicuje umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań, w tym także zadań arytmetycznych u dziewczynek i u chłopców. Odnotowano wyższy poziom umiejętności rozwiązywania wszystkich zadań a także zadań arytmetycznych u dziewczynek niż u chłopców.

11.3. Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych zrealizowanych metodą obserwacji i studium przypadku

Celem przeprowadzonych obserwacji było przede wszystkim poznanie wpływu zastosowanych heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program na poziom rozwoju zdolności matematycznych uczniów a także poziom rozwoju otwartości myślenia matematycznego, jak również na poziom nabytych umiejętności matematycznych. Obserwacje miały charakter dorywczy i polegały na uważnej analizie pomysłów rozwiązań uczniowskich, śledzeniu osiągnięć uczniowskich w konkursach, analizie wyników monitoringu, egzaminu końcowego, ocen końcowych z przedmiotu oraz dalszych losów tych uczniów. Ponadto w celu porównania wyżej wymienionych wskaźników odnośnie wyników grupy kontrolnej przeprowadzono liczne rozmowy z nauczycielem matematyki tej grupy.

W niniejszej części rozprawy zebrano wnioski, sformułowane w odniesieniu do poszczególnych pytań szczegółowych wyodrębnionych w ramach problemu głównego w badaniach metodą obserwacji i studium przypadku. Pierwszym głównym problemem badawczym było pytanie:

Jak odnajdywać uczniów uzdolnionych matematycznie?

Odpowiedź na pytanie była możliwa dzięki wnikliwym obserwacjom i analizom rozumowań uczniowskich zarówno tych prowadzonych na lekcjach matematyki w grupie eksperymentalnej, jak również tych, przedstawianych w serii testów przeprowadzonych w tej grupie pomiędzy pretestem a posttestem, które pozwoliły w miarę rzetelnie wyodrębnić z grupy eksperymentalnej uczniów o wysokim potencjale matematycznym. Dodatkowo ilościowa analiza osiągniętych sukcesów uczniowskich i ich skala wskazują, że podjęte działania w tym między innymi zastosowane heurystyczne metody nauczania a także przygotowane własne arkusze testowe pozwoliły skutecznie wyodrębnić z grupy eksperymentalnej uczniów uzdolnionych matematycznie.

Kolejne pytanie brzmiało następująco: Jak zainteresować uczniów matematyką? Odpowiedź na pytanie była możliwa dzięki obserwacjom uczniowskich reakcji na wdrożone przeze mnie działania zarówno te na lekcji matematyki jak i pozaszkolne. Były to między innymi wprowadzone do autorskiego programu zagadnienia matematyki, które poszerzały podstawę programową np. o elementy historii matematyki, logiki itp. Zagadnienia te wzbudziły ciekawość poznawczą uczniów a także dla niektórych z nich stały się narzędziami, które w znaczny sposób wspomogły odniesie sukcesu w konkursach. Ponadto wszystkie podejmowane przeze mnie działania pozalekcyjne takie jak: przeprowadzone konkursy matematyczne, zorganizowane wydarzenia popularnonaukowe z racji dużego zainteresowania uczniów potwierdzają swą skuteczność odnośnie zainteresowania uczniów przedmiotem.

Trzecie z postawionych pytań brzmiało z kolei: Czy odpowiednia praca z uczniami zdolnymi jest w stanie doprowadzić do ich rozwoju, zamiłowania i sukcesu?

Odpowiedź na to pytanie była możliwa dzięki obserwacji uczniowskich losów, w szczególności przedstawione studium przypadku. Liczne uczniowskie sukcesy w konkursach, jak również licznie podjęte przez uczniów działania: zrealizowane projekty, przeprowadzone uczniowskie prelekcje na uniwersytecie, uczniowska praca badawcza potwierdzają skuteczność pracy heurystycznymi metodami w oparciu o autorski program w kwestii rozwoju zamiłowania i możliwości osiągniecia sukcesu.

Kolejne z postawionych pytań brzmiało:

W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na rozwój otwartości myślenia matematycznego uczniów? Odpowiedź na to pytanie była możliwa dzięki zarówno przeprowadzonym analizom statystycznym danych zebranych w toku badań eksperymentalnych i ich statystycznej weryfikacji w zakresie pomiaru umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych i zadań problemowych testu końcowego, które pozwoliły stwierdzić, że zastosowane heurystyczne metody nauczania w oparciu o program autorski w istotny statystycznie sposób wpłynęły na umiejętność rozwiązywania tych zadań w grupie eksperymentalnej, jak również wykazały , że końcowy poziom umiejętności ich rozwiązywania jest znacznie wyższy u uczniów grupy eksperymentalnej niż u uczniów grupy kontrolnej, co świadczy o wzroście poziomu rozwoju otwartości myślenia matematycznego. Poczynione dodatkowo obserwacje uczniowskich rozumowań przeprowadzonych zarówno na lekcjach matematyki, jak również na zajęciach koła matematycznego, na pracach pisemnych, czy też testach autorskich pozwalają stwierdzić znaczny rozwój otwartości myślenia matematycznego wśród uczniów grupy eksperymentalnej.

Inne z postawionych pytań było następujące:

W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na poziom umiejętności matematycznych uczniów klasy siódmej?

Uzyskanie odpowiedzi na powyższe pytanie było możliwe dzięki obserwacji wyników uczniów grupy eksperymentalnej i grupy kontrolnej osiąganych w pracach pisemnych z matematyki, diagnozy z matematyki a także ocen końcowych z przedmiotu tych uczniów, jak również na analizie ilościowej niektórych z tych wyników, które potwierdziły, że zastosowane podczas zajęć heurystyczne metody nauczania i praca w oparciu o autorski program w znacznym stopniu wpłynęły na rozwój poziomu umiejętności matematycznych uczniów klasy siódmej.

Ostatnie z postawionych pytań brzmiało następująco:

W jaki sposób zastosowane przeze mnie heurystyczne metody pracy w oparciu o autorski program nauczania matematyki wpłyną na rozwój zdolności matematycznych uczniów klas siódmych?

Uzyskanie odpowiedzi na ostatnie pytanie było możliwe dzięki obserwacji sukcesów uczniów w konkursach, zaangażowania uczniów w działania związane z popularyzacją kultury matematycznej, jak również obserwacji dalszych ich losów oraz na podstawie analizy ilościowej sukcesów uczniów grupy eksperymentalnej i na podstawie przeprowadzonych rozmów z nauczycielem matematyki grupy kontrolnej odnośnie uczniowskich sukcesów, w wyniku których wskazano, że w grupie kontrolnej uczniowie nie wykazali chęci udziału w żadnym konkursie i wydarzeniu matematycznym, wobec czego nie odnotowano również w tej grupie żadnych uczniowskich sukcesów matematycznych. Na podstawie powyższego można stwierdzić, że zastosowane przeze mnie heurystyczne metody nauczania matematyki w oparciu o autorski program w znacznym stopniu wpłynęły na wzrost rozwoju zdolności matematycznych uczniów grupy eksperymentalnej.

Powyższe wyniki obserwacji w połączeniu z wynikami analiz statystycznych pozwalają dokonać oceny skuteczności zastosowania heurystycznych metod nauczania oraz autorskiego programu, które to przyczyniły się do wzrostu poziomu umiejętności matematycznych, rozwoju otwartości myślenia matematycznego, jak również wzrostu rozwoju zdolności matematycznych, dlatego ich wpływ ocenić należy jako pozytywny. Biorąc pod uwagę przedstawione powyżej dane wynikające zarówno z analizy wyników badań eksperymentalnych, jak również prowadzonych metodą obserwacji można sformułować wnioski użyteczne na potrzeby praktyki edukacyjnej, które zostały zamieszczone poniżej.

11.4. Podsumowanie- uogólnienia i wnioski dla praktyki pedagogicznej

W rozprawie podjęto tematykę nauczania matematyki na drugim etapie edukacyjnym. Rozważania dotyczyły wpływu heurystycznych metod nauczania w oparciu o autorski program na poziom rozwoju zdolności matematycznych, umiejętności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego uczniów klas siódmych szkoły podstawowej. Zastosowanie heurystycznych metod nauczania oraz autorskiego programu jako czynnika eksperymentalnego w badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego miało na celu ukazanie ich wpływu na rozwój poziomu umiejętności matematycznych, rozwój poziomu zdolności matematycznych a także otwartości myślenia matematycznego u uczniów klas siódmych. Zaprezentowane w pracy analizy wyników badań własnych przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego oraz metodą obserwacji pozwalają na przyjrzenie się tym metodom pod kątem oceny ich skuteczności w pracy z uczniami a przedstawione w poprzedniej części rozprawy wnioski z przeprowadzonych badań pozwalają na sformułowanie wniosków, jak skutecznie uczyć matematyki, użytecznych dla praktyki pedagogicznej.

Ponieważ nie ma gotowej recepty na sukces, która zagwarantowałby nam skuteczne rozwijanie myślenia uczniów, to nauczyciel, który chce pozwolić dzieciom myśleć i działać, musi sam wypracować swoje sposoby, własne strategie i metody nauczania matematyki. W sytuacji tej, najbliższą idealnej wydaje się być strategia stosowana przez uczniów podczas rozwiązywania zadań i problemów a sformułowana przez Mirosława Dąbrowskiego - "próbuj, poprawiaj i wyciągaj wnioski ". Najważniejsze jest, aby nauczyciel, który podejmuje się tej pracy był dobrze przygotowany merytorycznie, cechował się dużą wyrozumiałością dla uczniów, którzy często nie zachowują się szablonowo. Powinien być również dobrym „psychologiem", tzn. osobą, która potrafi obserwować uczniów i w odpowiedni sposób starać się zaspokoić ich potrzeby edukacyjne. Powinien też być to człowiek o przyjaznym usposobieniu, gdyż należy pamiętać, że nadrzędnym celem edukacji jest wychowanie dobrego człowieka i wykształcenie fachowca. Na pewno zaś nie uzyskamy tego w złej atmosferze. Moje wieloletnie doświadczenie w pracy z uczniami utwierdza mnie w przekonaniu, że brak którejkolwiek z wyżej wymienionych cech wpływa w znaczący sposób na spadek jakości pracy. Od początku pracy zawodowej, najpierw w gimnazjum, potem w szkole podstawowej moje relacje z uczniami były co najmniej bardzo dobre. Lekcjom towarzyszyła zawsze dobra atmosfera a brak poczucia strachu u uczniów powodował ich otwartość i odwagę w dążeniu do zdobywania wiedzy, czego dowodem były duże ilości zadawanych podczas lekcji pytań. Ponadto wielogodzinne zajęcia koła, warsztaty, wspólne wyjścia na różnego rodzaju wydarzenia, wspólne wyjazdy na wycieczki czy obozy naukowe, wspólnie pokonane kilometry podczas matematycznych gier miejskich, czy rozegrane mecze matematyczne znacznie zacieśniły nasze więzi, co w znaczący sposób wpłynęło na nasze relacje. Ta więź bowiem powodowała, że nie miałam problemu z dyscyplina na lekcji a uczniowie w naturalny sposób zachowywali się odpowiednio. Co więcej, w klasach, których uczyłam na początku swojej pracy zawodowej– ogólnych czy sportowych, takie dobre relacje w znaczący sposób wpływały na poprawę jakości nauczania matematyki, gdyż nawet jeśli uczniowie nie przepadali za matematyką, to dobra atmosfera, która towarzyszyła lekcjom powodowała u nich większą motywację do nauki przedmiotu oraz znacznie większą chęć. W klasach matematycznych z kolei, z uczniami łączyła mnie dodatkowo wspólna pasja, która w jeszcze większym stopniu zacieśniała nasze wspólne relacje.

Ponieważ sama nie odmawiałam pomocy uczniom, nigdy tez nie miałam najmniejszego problemu uzyskać taką od nich. Moi wychowankowie z wielką chęcią angażowali się we wszelkiego rodzaju inicjatywy, prowadzili zajęcia koła dla swoich młodszych kolegów ze szkoły, prelekcje i wykłady podczas wydarzeń popularyzujących kulturę matematyczną, również później już jako absolwenci szkoły. Do dziś utrzymuję kontakt z wieloma z nich lub obserwuję ich dalsze losy: sukcesy naukowe czy nawet karierę naukową. Miło również było widzieć ich podczas Drzwi Otwartych, kiedy w większym gronie odwiedzali mnie i mile wspominali czas ze mną spędzony. Uśmiech, który towarzyszy nam podczas przypadkowych spotkań po latach, kiedy się gdzieś mijamy jest również oznaką dobrych relacji, które nam dawniej towarzyszyły. Wysokie wymagania, które były im stawiane równoważyła dobra atmosfera i humor, wspólnie spędzony czas podczas lekcji matematyki pozostawał więc w pamięci jako czas przyjemny. Nauczania matematyki nigdy nie traktowałam jak pracy, to była zawsze i jest dla mnie po prostu przyjemność.

Równie ważną sprawą jest motywowanie, dlatego też uczniów szczególnie zdolnych należy często nagradzać. Jest rzeczą oczywistą, że nagroda powinna być za odpowiedni wysiłek intelektualny, aczkolwiek należy uczniów często chwalić, żeby nie tracili chęci i zapału do nauki i żeby wiedzieli, że nauczyciel cały czas docenia ich rozwój i wkład pracy. Atmosfera, w której dla nauczyciela nie ma znaczenia rozwój ucznia ani jego samopoczucie a jest on tylko kontrolerem, który sprawdza, czy uczeń wykonuje swoje obowiązki jest atmosferą niesprzyjającą rozwojowi. Chociaż te rzeczy wydają się wszystkim dobrze znane, to nie należy ich traktować jako slogany i puste słowa, lecz starać się tworzyć taką atmosferę w klasie. Należy bowiem pamiętać, że to nauczyciele w dużej mierze budują przyszłe społeczeństwo i w pewnym sensie jest ono obrazem ich prac, więc jeśli chcemy mieć zdrowych i mądrych ludzi wokół siebie jak najwięcej to musimy starać się, by mieć jak najwięcej światłych, dobrze przygotowanych do swojej pracy nauczycieli, którzy są pozytywnie nastawieni do swoich uczniów i swojej pracy.

Nauczyciel matematyki pracujący z uczniami powinien mieć także świadomość istnienia różnych typów myślenia. I tak np. za amerykańskim psychologiem Laurencem Steinbergiem można wyróżnić trzy podstawowe typy myślenia: analityczny, twórczy i praktyczny. Przekładając to na płaszczyznę myślenia matematycznego osoba myśląca analitycznie będzie poddawała problem dogłębnemu badaniu, porównywaniu z innymi znanymi sobie, jak również będzie rozkłada go na mniejsze części, zauważała i usuwała trudności poprzez formułowanie prostszych wariantów. Taki typ myślenia sprawdzi się więc w rozwiązywaniu trudnych, ale typowych zadań. Z kolei do rozwiązania zadania nietypowego jest niewystarczające, gdyż do procesu myślenia należy włączyć jeszcze projektowanie, planowanie i syntezowanie. Osoba myśląca twórczo potrafi bowiem dostrzegać nietypowe możliwości rozwiązania problemu, łamie schematy, próbuje wykorzystać metody, które pochodzą z innych z pozoru niezwiązanych z tym zagadnieniem działów matematyki. Osoba o takim typie myślenia potrafi również interpretować problem w różnych dostępnych sobie językach (np. potrafi geometryzować zagadnienia algebraiczne) i posiada łatwość łączenia pomysłów z różnych dziedzin oraz dopasowywania ich do nowej poznawczo sytuacji. Osoba myśląca praktycznie rozważać będzie problem z perspektywy ewentualnego zastosowania go lub dobrania gotowego narzędzia. Taki typ myślenia w dużej mierze oparty jest na schematach i algorytmach. Preferująca go osoba najczęściej nie ma potrzeby rozumienia poprawności, jak również celowości obranego przez siebie sposobu postępowania. Wie, jak należy coś zrobić i stosuje tę wiedzę. Nauczycielowi matematyki znacznie łatwiej będzie dobierać odpowiednie rodzaje zadań, problemów czy ćwiczeń a także indywidualizować wymagania, kiedy pozna preferowany sposób myślenia swoich uczniów. Jeśli wybierzemy pracę indywidualną, podczas której każdy uczeń będzie zmuszony do intelektualnego wysiłku, pozwólmy pracować uczniom we własnym tempie, zastosujmy przy tym przyjazne im techniki. Jeśli natomiast zdecydujemy się na pracę w grupach, niech odbywa się ona w małych zespołach, złożonych z uczniów o różnych typach myślenia, by nawzajem mogli się inspirować. Rolą nauczyciela bowiem jest stworzenie optymalnego klimatu zajęć, tak, by pobudzać twórczą aktywność uczniów. Zachęcajmy do krytycznego przyglądania się założeniom, szukania luk i błędów w poszczególnych krokach rozumowaniach, jak również podważania argumentów kolegów i szukania dla nich kontrprzykładów. Warto pamiętać, że schematy czasem są także ważne, gdyż jeśli sprowadzimy nowy problem do zagadnienia typowego, zaoszczędzi to nasz czas i wysiłek intelektualny.

Niezwykle ważną rzeczą jest również uświadomienie uczniom, że nauka nie jest oderwana od czasu i nie wzięła się znikąd, dlatego należy rozwijać wśród uczniów kulturę matematyczną, tzn. by uczniowie znali wybitne postacie tej dziedziny a także wiedzieli o istnieniu różnych działów matematyki i z grubsza, by wiedzieli, czym matematyka się zajmuje. Ze względu na to istotne są wyjścia na wydarzenia naukowe organizowane przez różne instytucje naukowe. Jest to istotnym czynnikiem, mającym wpływa na zainteresowanie dzieci nauką, gdyż trzeba pamiętać, że uczeń, który uczy się z ciekawości poznania uczy się wielokrotnie więcej, niż uczeń, który robi to tylko z przymusu dla uzyskania dobrej noty. Należy nie zapominać, że najważniejszą rzeczą dla rozwoju dziecka jest zainteresowanie go danymi przedmiotami. Wzbogacanie kultury matematycznej, czy wprowadzanie elementów historii matematyki, jak i również pokazywanie, że jest to żywa nauka ma ona ogromny wpływ na rozwój. Nie należy również zapominać, że mamy do czynienia z ludźmi młodymi i różnego rodzaju „dziwne zjawiska" mają duży wpływ na zainteresowanie przedmiotem i często sprawiają, że uczniowie sami „garną „się do nauki, dlatego tez warto wspomnieć o różnego rodzaju paradoksach, na pozór ‘niemożliwych rzeczach.

Warto też poświęcić trochę czasu na przedstawienie uczniom podstawowych faktów z historii matematyki, która jest obecnie zupełnie pomijana, co nie jest rzeczą dobrą, gdyż odrywa naukę od czasu i uczniowie nie wiedzą, kiedy to czego się uczą było znane, kiedy i kto to wymyślił i skąd w ogóle to się wzięło. Nie można się więc dziwić, że większość uczniów w przeciętnej szkole myśli o matematyce jako sztuce liczenia na czas, co wypacza naturę tego przedmiotu. I tak np. mówiąc o zadaniach konstrukcyjnych warto powiedzieć o problemach delijskich, nie tłumaczyć precyzyjnie, ale wyjaśnić poglądowo. Przy temacie podzielności warto wspomnieć o rozkładzie liczby na czynniki pierwsze, warto przedstawić sylwetki np. Gaussa, Archimedesa, Eulera. To wszystko wzbudza ciekawość u uczniów, zainteresowanie przedmiotem. Uczniowie stają się zainspirowani do dalszej nauki i samodzielnego rozwoju, co jest rzeczą bardzo ważną dla każdego człowieka, w szczególności takiego, który w przyszłości ma być dobrym fachowcem w swojej dziedzinie, co stanowi główny cel edukacji. Trzeba bowiem wiedzieć, że edukacja szkolna jest początkiem edukacji człowieka a nie jego końcem, dlatego istotna sprawą jest nauczenie tych młodych ludzi, jak się uczyć, gdzie szukać informacji, aby mogli dalej rozwijać się sami. Powszechnym jest bowiem przekonanie, że szkoła stanowi jedyne miejsce, gdzie można zdobywać wiedzę. Jest to przekonanie wygodne dla wielu grup społecznych, stąd też tak trwałe, aczkolwiek jest nieprawdziwe i szkodliwe. Uczniowie powinni nauczyć się skąd i w jaki sposób czerpać wiarygodną wiedzę, co jest rzeczą istotniejszą niż sama wiedza przekazywana im na lekcjach. Przecież każdy z nas może po pewnym czasie zapomnieć te wszystkie wzory, reguły, zasady, twierdzenia itp., ale jeśli będzie wiedział, że istnieją lub mogą istnieć i będzie wiedział, gdzie ich szukać a także będzie nauczony ich rozumienia, to wszystko to znajdzie, kiedy będzie mu to potrzebne. I tego właśnie powinna nauczyć szkoła. Powinna uczyć rozumienia i inspirować do rozwoju.

Jak rozwiązywać trudne zadania?
Podczas rozwiązywania trudniejszych zadań, w których to nie narzuca się żaden naturalny sposób postępowania, warto oglądać problemy z różnych stron. Oglądanie od przodu stanowi rutynowe podejście do problemu. Oglądanie od tyłu polega na przedstawieniu gotowego wyniku zadania i na wspólnym zastanawianiu się, w jaki sposób go otrzymano. Jednak zadaniom można również przyglądać się z góry, spoglądając na nie jako na całość, wówczas możemy na przykład dostrzec, że stanowi ono element szerszego problemu, mającego ogólne, znane nam rozwiązanie. Poszukujemy więc analogii, próbujemy powiązać je z jakąś teorią. Nie zawsze jednak nasze przypuszczenia okażą się słuszne, ale mogą stać się pomocne w znalezieniu rozwiązania. Z kolei z oglądaniem z dołu mamy do czynienia w sytuacjach, gdy koncentrujemy się na jednym szczególe bez zagłębiania się w treść zadania.

Jeśli zajęcia mają sprawiać uczniom i nam radość i satysfakcję, nie działajmy pospiesznie, nie przesadzajmy też z liczbą zadań, zostawmy też czas na swobodne dyskusje o założeniach, możliwych uogólnieniach, czy na rozważanie różnych sposobów dochodzenia do rozwiązania. Miejmy na względzie również fakt, że lepiej rozwiązać jedno zadanie wieloma sposobami niż wiele zadań tym samym sposobem. Zachęcajmy uczniów do poprawiania własnych rozwiązań, poszukiwania krótszych, bardziej elementarnych, czy też mniej rachunkowych. Starajmy się, żeby dobrane przez nas zadania nie stanowiły tylko standardowych przykładów ze szkolnych podręczników, dobierzmy również takie przykłady zadań, które łamią schematy myślenia. Warto zadbać o to, by na lekcjach pokazać uczniów różne typy zadań: takie z nadmiarem danych, które np. prowadzą do sprzeczności danych i braku rozwiązań, takie z niedomiarem danych, mogące prowadzić np. do niejednoznaczności rozwiązania. Warto pokazać także takie z nieprecyzyjnymi danymi, przez co treść zadania staje się niejednoznaczna i należy ja doprecyzować, by móc takie zdanie rozwiązać, jak również otwarte, czyli takie bez znanego rozwiązania, bądź antyschematyczne, które zamiast wykonać za pomocą żmudnych operacji da się rozwiązać natychmiast niestandardowym sposobem. A. Dobrzycki (1986, s. 279) uważa, że „rozwiązywanie zadań, które nie są dostępne ani w podręcznikach, ani w popularnych zbiorach zadań może być początkiem twórczej aktywności ucznia przejawiającej się w:

a) uogólnianiu problemów, b) formułowaniu problemów odwrotnych, c) innych modyfikacjach problemów". Potwierdza to opinia wybitnych dydaktyków matematyki (Ciosek, Krygowska, Turnau, 1974), którzy podkreślają, że elementy twórczości matematycznej pojawiaj¡ się na każdym poziomie nauczania, kiedy uczeń staje w obliczu zadania matematycznego, które nie jest typowe i nie daje się rozwiązać przez proste odwołanie do określonego schematu.

Kolejny ważny aspekt stanowi dobór odpowiedniego programu nauczania matematyki. Przeglądając większość programów można dostrzec w nich tendencje do uśredniania i rozwijania u uczniów sprawności mechanicznych, tzn. temat omawiający jakieś pojęcie jest na ogół tak długo powtarzany, aż uczniowie zaczną sprawnie, ale mechanicznie rozwiązywać zadania. W konsekwencji prowadzi to do absurdu, gdyż uczniowie wyliczają dane wartości bardzo sprawnie, aczkolwiek niezupełnie nie rozumiejąc, co wyliczyli. Kształci się w większości maszyny liczące, przestarzałe, gdyż nie dorównują szybkością tym, które można kupić za niewielką cenę (koszt komputera). Dla większości uczniów prowadzonych takimi metodami matematyka staje się nauką bez treści merytorycznej zbliżoną do sportu. Aczkolwiek ćwiczenia sportowe realizowane są w o wiele ciekawszej scenerii i dają satysfakcję z osiąganych efektów. Natomiast w nauce matematyki w ten sposób uczeń nie widzi żadnego realnego efektu i w konsekwencji nie czerpie satysfakcji. Stąd też między innymi bierze się niechęć uczniów do nauki tego przedmiotu. Pisząc swój program autorski starałam się uniknąć tego typu sytuacji, tzn. starałam się tak dobrać treści, aby wymuszały one w trakcie ich realizacji rozwijanie myślenia, które nie jest schematyczne. Stąd też podstawa programowa poszerzona została o m.in. następujące treści: elementy logiki i teorii mnogości, elementy historii matematyki, elementy teorii podzielności, równania diofantyczne, gdyż na tym poziomie nauczania nie da się na ogół zautomatyzować tych treści. Zmusza więc to uczniów i nauczyciela do ich rozumienia, gdyż w innym przypadku nie będą w stanie rozwiązać tego w poprawny sposób. Chociaż na początku może to budzić niechęć, to po pewnym czasie dzieci uczone tych treści w odpowiedni sposób, szczególnie wtedy, gdy widzą zastosowanie zdobytej w ten sposób umiejętności do rozwiązywania konkretnych rzeczywistych problemów zaczynają widzieć sens uczenia się tego przedmiotu i czerpać z tego satysfakcję, co wzbudza w nich ciekawość poznawczą i powoduje, że same zaczynają rozwijać się, co stanowi nadrzędny cel edukacji.

Pomimo rozwoju uzdolnień i sprawności matematycznej należy pamiętać, aby w uczniach próbować rozwijać również myślenie twórcze. Matematyka jest trudną nauką i jest to dość skomplikowane, aczkolwiek nie jest to niemożliwe. Należy jednak pamiętać, że mimo tego, że jest to bardzo trudne, to jest to najbardziej wartościowy dla samej nauki rodzaj myślenia. Toteż warto czasem zadać uczniom jakieś pytanie otwarte, na które nie znają odpowiedzi albo jakiś problem do rozwiązania na dłuższy czas do domu, zainspirować jakim tematem, żeby uczniowie sami zaczęli myśleć nad czymś, co być może doprowadzi do jakiś ciekawych przemyśleń, spostrzeżeń a nawet twierdzeń. Nie jest to niemożliwe o czym świadczyć może praca twórcza jednego z moich uczniów pt. „Uogólnienia pewnych wybranych problemów olimpijskich” nagrodzona w konkursie Matematyka dla Młodych. Uczniowie, którzy w tak młodym wieku zainspirowani zostaną jakimś ciekawym zagadnieniem mogą w przyszłości stanowić grupę ludzi, która być może będzie budować naszą naukę, dlatego w szczególności warto w uczniach rozwijając ten typ myślenia.

W tym miejscu warto jeszcze wspomnieć o nauczaniu geometrii. W ostatnich latach można zauważyć trend do zaniedbywania tej nauki w szkole. Wynika to głównie z tych samych przyczyn, o których wspominałam już poprzednio tj. fakt, że szkoła uczy głównie algorytmicznego myślenia a rozwiązywanie zadania geometrycznych wymaga spostrzegawczości, umiejętności łączenia faktów (twierdzeń) i pomysłowości, co stanowi zupełne zaprzeczenie algorytmicznego sposobu myślenia. Trzeba jednak podkreślić, że solidne uczenie geometrii rozwija w uczniach właśnie te cechy tzn. uczy spostrzegawczości, umiejętności łączenia faktów i pomysłowości, co jest rzeczą niezwykle pożądaną u każdego człowieka a w szczególności matematyka. Pisząc swój program autorski miałam na względzie właśnie te aspekty i dlatego w znacznym stopniu poszerzyłam standardowe treści o wiele rozumowań geometrycznych, m.in. o dowody geometryczne podstawowych twierdzeń i własności, jak również uogólnienia, gdyż uważam, że treści te mają ogromny wpływ na rozwój intelektualny uczniów, co można zauważyć realizując te treści.
Na zakończenie chciałabym przedstawić jeszcze kilka dobrych praktyk, które stanowią wsparcie dla rozwoju zdolności i zainteresowania uczniów przedmiotem.

Koła matematyczne

Zajęcia koła matematycznego obecnie kojarzone są przeważanie albo z akademicką formą zajęć, na które to uczęszcza kilku zapaleńców z zamkniętego kręgu szkolnych geniuszy lub takimi, w trakcie których pod przykrywką rozwijania zdolności matematycznych prowadzone są zajęcia przygotowujące do sprawdzianów czy egzaminów zewnętrznych a wszystko po to, by zapewnić sobie godziwą frekwencję na tych zajęciach. Na jednych i drugich osoby, które zainteresowane są ciekawostkami matematycznymi, czy poszukiwaniem prostych rozwiązań dla niebanalnych problemów nie znajdą dla siebie miejsca, gdyż te pierwsze nie dają szansy zrozumienia czegokolwiek osobom, które znalazły się na nim przypadkowo a także dostrzeżenia celowości zgłębiania takiej wiedzy, drugie z kolei nie zaspokoją potrzeby ciekawości poznawczej a nawet znudzą. Jak więc postępować, by rzeczywiście stymulować zdolności twórcze uczniów?

Na początku należy uświadomić sobie, że niemożliwym jest stworzenie uniwersalnego modelu satysfakcjonującego wszystkich miłośników matematyki a organizację takich zajęć warto rozpocząć od przeanalizowania własnych zainteresowań i umiejętności, bowiem kiedy nauczyciel przekazuje uczniom to, co jego pasjonuje, wzbudza w nich większe zainteresowanie, niż wtedy, kiedy przedstawia wiedzę z obszarów, które są mu obojętne, lub takich w których sam porusza się niechętnie. Nauczyciel nie musi przecież umieć w matematyce wszystkiego i pewne obszary może pozostawić bardziej doświadczonym. Planując pracę koła matematycznego ważne jest by wybrać krąg odbiorców oraz zaproponować na tyle atrakcyjną tematykę, by była ona w stanie zachęcić do pozostania dłużej w szkole, stanowiąc konkurencję dla różnych innych zainteresowań uczniowskich. Rozpoczynając działalność takiego koła należy pamiętać, że ze względu na dużą konkurencję i bogatą, szczególnie w dużych miastach ofertę płatnych i bezpłatnych zajęć początki mogą być trudne. Jeśli jednak zaproponowane przez nas zajęcia będą dla uczestników interesujące z czasem nie powinno być już trudno o chętnych a nawet mogą zacząć cieszyć się renomą (Mikołajczyk, 2012).

W szkole, w której rozpoczęłam swoją pracę zawodową odbywały się zajęcia koła matematycznego, jednak uczestniczących w nim uczniów była zawsze garstka, ponadto też żaden z uczniów nie odniósł wcześniej znaczącego sukcesu w konkursach matematycznych, czy olimpiadach. Postanowiłam więc spróbować zorganizować własne zajęcia, które były dla mnie w tym czasie ogromnym wyzwaniem. Początki nie były łatwe, szczególnie jeśli chodzi o pozyskanie chętnych na pierwsze takie zajęcia. Jednak zaproponowana tematyka skusiła kilku uczniów, a trafny dobór zadań i atmosfera, która towarzyszyła zajęciom spełniły swoją rolę i wkrótce zainteresowanych udziałem było więcej. Kiedy pojawiły się pierwsze sukcesy matematyczne uczestników poszerzyłam swoją ofertę o kolejne zajęcia. Wkrótce zajęcia zyskały renomę w środowisku lokalnym z czasem nawet w całym mieście, dlatego rozpoczęłam prowadzenie otwartych kół dla wszystkich chętnych uczestników z poznańskich szkół.

Opiekun kółka zanim rozpocznie prowadzenie zajęć powinien jasno określić sobie cele i realizować wcześniej przyjęte założenia, ale także sprecyzować wymagania dotyczące uczestników. Powinien także ustalić, czy zajęcia te będą zajęciami zamkniętymi dla grupy osób ze szkoły czy też będą otwarte, dając możliwość uczestniczenia w nich uczniom spoza szkoły a także, czy będą powiązane ze sobą, czy też niezależne od siebie. Po przeanalizowaniu wszystkich tych powyższych kwestii opiekun koła może przejść już do dokonywania wyboru tematyki i organizacji takich zajęć. Tematyka koła powinna być dostosowana do potrzeb uczniów, dlatego też, jeśli np. celem koła jest edukacja matematyczna dla przyjemności warto sformułować zagadkowe, czy nawet intrygujące tematy, np. *Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej w toto-lotka?* Atrakcyjne tematy przyciągną znużonych szkolną rutyną i znudzonych uczniów. Jeśli z kolei uczestnikami miałyby być osoby przygotowujące się do konkursów czy olimpiad, to zaproponowana tematyka musi być dla nich atrakcyjna i wykraczać poza zagadnienia omawiane na lekcjach matematyki, by mogła je przyciągnąć. Ponieważ także uczniowie w różny sposób gromadzą i zapamiętują informacje a także preferują różne style uczenia, dlatego należy urozmaicać techniki przekazywania wiedzy i zadbać, by podczas zajęć uczniowie nie byli bierni i mieli okazję do eksperymentowania, dyskusji, czy do zadawania pytań. Warto pozwolić uczniom na odbieganie od tematu głównego, na tematy boczne, które ich szczególnie interesują.

Ponieważ uczniowie są z natury bardzo chętni do działania i pomysłowi warto więc angażować ich w różne działania a także zabierać na wyjścia do różnych ośrodków naukowych. Ja swoich uczniów wielokrotnie zabierałam na różne wydarzenia naukowe a także angażowałam w różnego rodzaju inicjatywy: m.in. moi uczniowie byli wielokrotnie prelegentami na młodzieżowych konferencjach matematycznych, które współorganizowałam. Do takich wystąpień przygotowywali się pod moją opieką, pracując nad pomysłem przez dłuższy czas. Wielokrotnie również najpierw jako moi uczniowie, później również już jako absolwenci współtworzyli ze mną otwarte warsztaty matematyczne dla młodszych uczniów z różnych poznańskich szkół podstawowych, konkursy matematyczne a także mecze matematyczne.

Jak ocenić, czy prowadzone przez nas zajęcia są wartościowe? Wysoka frekwencja na naszych zajęciach jest najlepszą oceną wystawioną przez uczestników, choć należy pamiętać, że nie jest to dobry wskaźnik jakości. Taki wskaźnik może świadczyć o osiągniętym przez nas sukcesie ilościowym. Miarą natomiast mogą być osiągnięte przez uczestników sukcesy. Oczywiście sukces to rzecz względna, jeśli więc uczestnicy w momencie rozpoczęcia naszych zajęć dopiero zaczynali drogę rozwoju swoich zainteresowań czy zdolności matematycznych, taki sukces stanowić może nawet najdrobniejsze osiągnięcie, np. awans do etapu rejonowego, czy lokalnego jakiegoś konkursu matematycznego. Znacznie ważniejszy jednak od formalnych tytułów jest rozwój umiejętności rozwiązywania nowych problemów, chęć podejmowania takich wyzwań a także przekonanie o ich potrzebie. Pisząc swój program zajęć koła matematycznego powinniśmy mieć świadomość, że wtłaczanie uczniom do głów kolejnych algorytmów czy pojęć nie pobudzi w żaden sposób ich wyobraźni matematycznej tylko w sposób bierny ułatwi rozwiązywanie tylko pewnych zadań. W zamian warto dobrać takie treści, które to rozwiną sprawność analitycznego i syntetycznego myślenia, jak również dostrzegania zależności czy budowania analogii. I tak np. większość zadań olimpijskich z geometrii jest tak skonstruowanych, że można je rozwiązać za pomocą elementarnych metod i mimo, że są to na ogół zadania trudne, to ich rozwiązania może zrozumieć nawet przeciętny uczeń. Żeby jednak na te rozwiązania wpaść potrzeba już geniuszu, wyobraźni i doświadczenia. Pokażmy uczniom, że rozwiązywanie zadań nie polega tylko na stosowaniu mechanicznych algorytmów. Nauczmy dzieci oglądania problemu z różnych stron, rozwiązywania zadań na wiele sposobów, poprawiania i upraszczania rozwiązań. Nie narzucajmy się ze swoimi rozwiązaniami a pozwólmy uczniom na swobodne poszukiwania właściwej drogi. Bierzmy pod uwagę uczniowskie pomysły, nawet jeśli nie są precyzyjne czy całkowite (Mikołajczyk, 2012).

Poszukując tematów na zajęcia koła warto zastanowić się, które z nich mogą być nie tylko ciekawe, ale i przydatne. Przykładem może tu być Zagadnienie mostów królewieckich prowadzące do teorii grafów. Bardzo atrakcyjnymi dla uczniów tematami kółek mogą być rachunek prawdopodobieństwa, statystyka czy zadania logiczne. Musimy mieć świadomość, że nie wszyscy, którzy zadeklarują chęć udziału w zajęciach naszego koła będą chętni do pracy. Część z nich może przychodzić w innych celach, części natomiast może zabraknąć wytrwałości do dalszej nauki czy samodzielnego rozwiązywania problemów w domu. Nie należy jednak rezygnować z takich uczniów, gdyż każdy z nich, nawet z pozoru słaby może

zaskoczyć nas pomysłem, czy niestandardowym rozumowaniem. Nauczyciel powinien wesprzeć takich uczniów, wierząc w ich potencjalne możliwości.
Rozwijajmy więc potencjał intelektualny uczestników koła, przygotowujmy do udziału w konkursach i prowadzenia własnych prac badawczych. Nie wiążmy zbytnio zawartości koła z matematyką szkolną a tematy szkolne niech będą jedynie rozszerzane i uatrakcyjniane, ale bez wkraczania do programów wyższych etapów edukacyjnych. Traktujmy zajęcia koła jako dobrą zabawę
i okazję do zaprzyjaźnienia się z matematyką, gdzie przy okazji wzbogacony zostaje ogromny zasób wiedzy i umiejętności uczniów. Zachęcajmy, pokazujmy również uczniom to, od czego zaczęła się nasza fascynacja matematyką. Dajmy im dużą swobodę w doborze problemów i metod pracy nad nimi. Poznajmy uczestników, ich zainteresowania, by na zajęciach koła mogli je rozwijać i zaspokajać.

Łowienie talentów

Bardzo skutecznym narzędziem odkrywania uczniów o wysokim potencjale uczenia się okazały się być konkursy: Horyzonty Matematyki i zachowujący podobną formę, aczkolwiek poszerzony o etap szkolny konkurs Matematyka bez pamiętnika. Pierwszy z nich powstał w 2014 roku, byłam jego pomysłodawcą i przez pięć lat także wykonawcą. Koordynowałam prace związane z tym konkursem, pisałam i wygłaszałam wykłady konkursowe a także przygotowywałam testy konkursowe. Drugi z wyżej wymienionych współtworzę do dziś. Konkursy te charakteryzuje nietypowa forma, gdyż startujący w nim uczeń nie korzysta bezpośrednio z wcześniej zdobytej wiedzy szkolnej a ich celem nie jest zatem sprawdzenie, ile uczeń już umie, ale jak duży jest jego potencjał intelektualny i możliwości uczenia się. Ponieważ w pierwszym z wyżej wymienionych liczba uczestniczących osób ze szkoły była ograniczona i to opiekun decydował, których z uczniów zabierze, ponadto tylko część z zainteresowanych udziałem szkół mogła w nim uczestniczyć z racji ograniczonej liczby miejsc, wymuszonej warunkami lokalowymi, stąd pomysł nowego konkursu, który zrodził się w mojej głowie likwidował te niedogodności. Od 2019 roku przy współpracy Zespołu Szkolno-Przedszkolnego nr 9 w Poznaniu oraz Wydziału Studiów Edukacyjnych UAM organizowany jest dwuetapowy konkurs Matematyka bez pamiętnika. Ważna jest w nim na etapie szkolnym umiejętność rozumienia czytanego tekstu, na etapie finałowym słuchania i przetwarzania informacji. Głównym założeniem jest nacisk na zrozumienie pojęć matematycznych a nie wiedzę pamięciową, stąd też jego nazwa -Matematyka bez pamiętnika. Przy zachowanej sprawdzonej formule, która z powodzeniem pełni funkcję sita wyławiającego potencjalne talenty stworzyliśmy możliwość udziału każdemu uczniowi z każdej szkoły podstawowej naszego województwa. Praktyka bowiem pokazała, że często odnosili w nim sukcesy inteligentni i bardzo błyskotliwi uczniowie, którzy wcześniej nie przejawiali specjalnego zainteresowania matematyką a dla których odniesione sukcesy i satysfakcja z osiągniętych wyników stała się motywacją do rozwijania matematycznych zainteresowań. Bardzo wysoki poziom merytoryczny wykładu, o który zawsze staram się dbać a także dobierane zagadnienia powodowały, że oba te konkursy w krótkim czasie zyskały dużą popularność. Co więcej wielu spośród słuchaczy (nie tylko nagrodzonych) zdecydowało się na dalsze kształcenie w szkole, w której w tym czasie pracowałam w klasach „matematycznych". Niejednokrotnie usłyszałam też od nich, że to właśnie wysłuchany wykład zadecydował o wyborze, mówiono o zauroczeniu, czasem niezrozumieniu, nagrodzeni pragnęli rozwijać odkryty w sobie nowy talent, powódek było wiele. Ci, którzy kształcili się w innych szkołach, wracali za rok na kolejną edycję konkursu a także uczestniczyli w zajęciach otwartego koła matematycznego, które prowadziłam. Uśmiechy, zainteresowanie wykładem (o którym świadczyły liczne pytania zarówno w trakcie wykładu jak i podczas przerwy), wszystko to było dla mnie potwierdzeniem, że cel, który temu wydarzeniu przyświeca został osiągnięty.

Etap szkolny polega na rozwiązaniu testu wielokrotnego wyboru złożonego z nietypowych zadań, w którym bardzo istotna jest umiejętność rozumienia czytanego tekstu, wszystkie nieznane a potrzebne do rozwiązania zadań pojęcia zostają zdefiniowane w teście. Komisja Konkursowa na podstawie osiągniętych przez uczestników wyników ustala próg kwalifikujący uczniów do finału. Etap finałowy konkursu zaczyna się wykładem z ćwiczeniami dotyczącym albo zupełnie nowego dla słuchaczy zagadnienia, albo znanego, jednak przedstawionego w innej odsłonie, niż ta z którą spotykają się na lekcjach matematyki w szkole. Forma to raczej luźna pogadanka, podczas której słuchacze mogą zadawać pytania. Po nim następuje przerwa na uporządkowanie notatek i zadawanie pytań i wyjaśnianie wątpliwości Potem następuje część zadaniowa, w której można korzystać ze sporządzonych wcześniej notatek. Również zadania tego etapu są testowe, wielokrotnego wyboru, co pozwala na szybkie sprawdzenie zadań po konkursie. Na tym etapie bardzo ważna jest umiejętność słuchania i przetwarzania informacji. Tematy wykładów finałowych to np.: Elementy kombinatoryki, Średnie, Ciągi, Elementy Teorii Grafów, Trochę geometrii. Przykładowy wykład i test konkursowy do wykładu a także test etapu szkolnego (załącznik).

Liga zadaniowa.

Liga zadaniowa to intelektualna rozrywka, która możliwa jest do zrealizowania praktycznie na każdym poziomie edukacji i matematycznego zaawansowania. Daje organizatorom szerokie możliwości, gdyż odpowiednio skonstruowana i prowadzona
może zaangażować uczestnika w wiele form aktywności, jakie w matematyce i jej nauczaniu występują: naukę nowych treści, powtarzanie i wykorzystanie już znanych, odkrywanie zależności, stawianie hipotez oraz ich weryfikowaniu.
Polega ona na cyklicznej publikacji (np. w klasie, na korytarzu szkolnym, czy stronie internetowej szkoły) zestawów zadań. Uczestnicy natomiast rozwiązania dostarczają w ustalonym przez organizatorów terminie, którzy to oceniają je, publikując co jakiś czas aktualny ranking zawodników. Ligi zadaniowe stanowią jeden z bardziej efektywnych sposobów zaangażowania
w naukę przez zabawę zarówno w nauczaniu podczas lekcji, jak i w formie pozaszkolnej. Istnieje wiele możliwych wariantów organizacyjnych takich lig. W niektórych ustala się np., że rozwiązania kolejnych zestawów zadań należy oddawać zawsze przed upływem określonego czasu, w innych z kolei, że wszystkie można oddać do zakończenia trwania całego konkursu. Uczniowie mogą pracować w grupach lub też indywidualnie i tak są wówczas klasyfikowani.

Rozwiązania zadań ligowych można oceniać różnie: zero-jedynkowo albo przyznawać częściowe punkty również za rozwiązania nie w pełni poprawne. Każde z zadań może być warte tyle samo punktów albo można różnicować punktację.
Ligi zadaniowe mogą być ogólnodostępne, lub też przeznaczone tylko dla uczniów jednej szkoły, czy nawet jednej klasy. Zwykle ligi adresowane są do określonego poziomu, czasem jednak specyfika zadań pozwala uniknąć tego ograniczenia. Jeśli zdecydujemy się na wybór tych samych zadań i punktacji, to możliwe jest prowadzenie odrębnej klasyfikacji uczestników według grup wiekowych. Rodzaj zamieszczonych zadań może być dowolny. Konkurs może być jedno lub interdyscyplinarny. Jeśli chcemy np. zmotywować uczniów do powtórki, to zestaw zadań ligowych może zawierać zadania przygotowujące do egzamin, czy sprawdzianu, ale konkurs może równie dobrze być odległy od szkolnej matematyki. Ligi zadaniowe można również wykorzystać podczas obozów naukowych.

Ponieważ udział w lidze zadaniowej wymaga od uczniów dużej systematyczności i punktualności., dlatego aby ich nie zniechęcić, warto wcześniej przemyśleć kwestię poziomu ich wiedzy i trudności. Można np. w każdym zestawie umieścić jedno zadanie łatwe, kilka średnich i jedno trudne, stanowiące wyzwanie dla najlepszych. Zadań w zestawie nie powinno być za dużo a odstępy między kolejnymi edycjami ligi nie powinny być ani zbyt długie, ani za krótkie. Liczba zestawów zadań z kolei może być dowolna, istotne jest, by odpowiednio często podawać bieżący ranking. Jeśli chcielibyśmy jeszcze bardziej wykorzystać możliwości dydaktyczne ligi możemy publikować przykładowe poprawne rozwiązania zadań konkursowych, możemy również stworzyć możliwość skonsultowania uczniom ich ocen.Taki konkurs pozwala na udział nieograniczonej ilości uczestników, jest również bardzo wygodny dla uczestników, gdyż mogą oni rozwiązywać zadania w dogodnym dla siebie miejscu i czasie (Mikołajczyk, 2012).

Pracując z uczniami klas „matematycznych" ligi zadaniowe wykorzystywałam wielokrotnie, zarówno w celu utrwalenia materiału przed sprawdzianem, jak i rozwijania pasji matematycznych i uzdolnień. Byłam również pomysłodawcą i współorganizatorem polsko-ukraińskiej ligi zadaniowej, w której uczestniczyli uczniowie ze szkoły, w której w tamtym czasie uczyłam oraz z zaprzyjaźnionej szkoły ukraińskiej. Byłam również członkiem komisji konkursowej pierwszej edycji Wielkopolskiej Ligi Matematycznej Juniorów, skierowanej do zainteresowanej matematyką młodzieży z Wielkopolski.

Mecze matematyczne

Historia meczów matematycznych sięga już XVI wieku, kiedy to w Europie stanowiły one popularną formę prezentacji dorobku naukowego matematyków, gdyż nie było jeszcze czasopism naukowych a polegały one wówczas na publicznym wzajemnym przekazaniu sobie nawzajem przez zawodników określonej liczby problemów a następnie na umówieniu się na kolejne spotkanie, na którym to każdy przedstawiał rozwiązania zadań przeciwnika. Zwyciężał ten, kto zrobił ich więcej. Zwyczajową nagrodą był obiad fundowany przez przegranego tylu przyjaciołom zwycięzcy, ile wynosiła różnica liczby rozwiązanych przez nich zadań. Najpopularniejsze odbywały się we Włoszech.
W Polsce odbywają się od 2001 roku, pierwsze na Dolnym Śląsku, kolejne w innych częściach kraju. Dziś mecze matematyczne stanowią popularną formę zespołowego turnieju rozgrywanego np. między klasami lub reprezentacjami szkół, jak również uczestnikami kółek czy obozów matematycznych, w czasie, którego drużyny otrzymują jednakowe zestawy zadań do rozwiązania. Po ustalonym czasie spotykają się i zadają sobie nawzajem zadania z tego zestawu a wybrani zawodnicy przedstawiają rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie każdego zadania musi być pełne i szczegółowo uzasadnione, gdyż w przeciwnym razie przeciwnicy od razu wskażą luki w rozumowaniu a jury obniży ocenę. Ponadto część tych punktów może przejąć drużyna przeciwna. Nie wystarczy zatem umieć rozwiązać zadanie, znaczenie ma tu również sztuka prezentacji, argumentowania a także uważnego śledzenia rozumowania przeciwnika.

Odpowiednio dobrane zadania meczowe powinny być specyficzne, rozwijające umiejętności wnioskowania dedukcyjnego i argumentowania, rzadko wykorzystywane obecnie w praktyce nauczania. Mogą być dobrane tematycznie lub też przekrojowo. Ważne jest natomiast to, żeby zadania miały zróżnicowany stopień trudności, na przykład w zestawie 10 zadań na ogół trzy są łatwe, trzy średnie i trzy trudne, co sprawia, że istotną rolę odgrywa strategia rozgrywki. Mecze sędziują na ogół nauczyciele obu drużyn.
Istotną zasadą jest przyznawanie jedynie 2 punktów za udzielenie samej poprawnej odpowiedzi bez objaśnienia sposobu jej uzyskania, bowiem rozwiązanie zadania polega na prezentacji procesu myślowego a nie samego wyniku. Inną ważną regułą jest przestrzeganie tego, by w rozwiązaniu podane zostały wszystkie obiekty, które spełniają warunki zadania, i by uzasadniono, że innych nie ma. Odgadnięcie więc odpowiedzi i sprawdzenie,

że spełnia warunki zadania, nie stanowi rozwiązania. Istotne jest wskazanie drogi dojścia do tej jedynej odpowiedzi, która jednocześnie wykazuje, że innych możliwości nie ma. Natomiast za rozwiązania merytorycznie poprawne, ale żmudne, nieefektywne, odejmuje się 2 punkty. Jeśli taką nieefektywność rozwiązania wskaże drużyna przeciwna, to otrzymuje te punkty w ramach tzw. „przejęcia", choć istotę rywalizacji stanowi jednak wskazywanie usterek, błędów i luk w zaprezentowanych rozwiązaniach a nie pokazanie innego sposobu rozwiązania. Forma ta ma ogromne walory edukacyjne, uczniowie bowiem nie tylko „ścigają się",
ale i uczą się od siebie nawzajem:

- kiedy wspólnie pracują nad zadaniami, konsultują swoje pomysły z kapitanem, nawzajem analizują też swoje rozwiązania, próbują wychwytywać błędy i ewentualne niejasności, jak również uzupełnić luki,
- podczas rozgrywki, kiedy obserwują przy tablicy rozwiązania przeciwników i dyskutują z nimi o przedstawionym rozwiązaniu,
- od jurorów, nauczycieli, którzy podczas oceny rozwiązania omawiają zauważone błędy. Jest ona także bardzo atrakcyjna dla zawodników i kibiców, gdyż angażuje ich emocjonalnie. Zwycięstwo z kolei zależy zarówno od wiedzy matematycznej, jak również od przyjętej strategii rozgrywki. Takie turnieje uczą również współpracy w grupie i za zarazem odpowiedzialnego podejmowania samodzielnych decyzji. Zaletą takich spotkań jest również fakt, że uczniowie słabsi bardzo dużo się uczą od swoich lepszych kolegów. Znacznie łatwiej jest im bowiem przejąć pewne postawy od rówieśników niż od nauczyciela i łatwiej również zrozumieć argumentację rówieśnika.

Jest to niezwykle ciekawy konkurs, który stwarza okazję do uczenia się matematyki, m.in. rozwijania umiejętności argumentowania, prezentowania rozwiązań a także uważnego śledzenia rozumowań. Z własnego doświadczenia wiem, że uczniowie bardzo lubią taką formę konkursów i chętnie się w nie angażują. Dzięki niej nabierają również dużej dojrzałości w prowadzeniu rozumowań matematycznych, którą później prezentują także na lekcjach. Klasowe mecze matematyczne organizowałam wielokrotnie, kiedy chciałam powtórzyć z uczniami jakąś partię materiału. Współorganizowałam także Wielkopolskie Mecze Matematyczne Juniorów, w których brali udział uczniowie klas „matematycznych", których w tym czasie uczyłam, jak również sędziowałam ich finał. Drużyna, której byłam opiekunem zajęła III miejsce w Wielkopolsce.

Konkursy matematyczne

Ponieważ konkursy stanowią doskonały bodziec do rozbudzania zainteresowania i są także bardzo dobrym treningiem dla uczniów, warto angażować uczniów w różnego rodzaju działania konkursowe a także motywować do udziału w konkursach o różnej formie. Ponieważ na ogół większość uczniów bardzo lubi rywalizację można taką organizować również na lekcjach. Ja wielokrotnie organizowałam uczniom różne konkursy, zarówno takie, które wymagały większego wysiłku organizacyjnego, jak i takie spontaniczne. Były to m.in. zadawane na koniec lekcji problemy bądź zagadki dotyczące omawianego przeze mnie tematu (rywalizacja indywidualna, w której zwycięzca otrzymywał dodatkową ocenę do aktywności), publikowane na stronie internetowej szkoły problemy miesiąca. Wielokrotnie również organizowałam mecze matematyczne i ligi zadaniowe dla własnych uczniów, jak również konkursy szczebla wojewódzkiego dla uczniów szkół podstawowych Województwa Wielkopolskiego, które opiszę bardziej szczegółowo w dalszej części pracy.

Swoich uczniów motywowałam do udziału w wielu konkursach o różnych formach charakteryzujących się wysoką wartością merytoryczną. Były wśród nich zarówno konkursy matematyczne, które dają dodatkowe uprawnienia przy przyjmowaniu do szkoły wyższego szczebla edukacyjnego, jak również takie, które takich uprawnień nie dają, a uczeń startuje w nich dla satysfakcji i sprawdzenia się. Należały do nich m.in. Wojewódzki Konkurs Matematyczny, Olimpiada Matematyczna Juniorów, Kangur Matematyczny, konkursy uczniowskich prac z matematyki. Motywując do udziału a także przygotowując do nich byłam świadoma zagrożeń, jakie za sobą niosą. Należy bowiem być zawsze czujnym i uważać, by chęć rywalizacji nie wzięła góry nad chęcią rozwoju matematycznej pasji. Konkursy matematyczne a w szczególności olimpiady mają swoją specyfikę, charakteryzują się one przede wszystkim tym, że poziom trudności tych zadań jest wielokrotnie większy niż poziom najtrudniejszych zadań na statystycznej lekcji matematyki, dlatego tez nawet bardzo zdolny uczeń, jeśli nie ma kontaktu z tymi zadaniami i nie zna podstawowych metod rozwiązywania tych zadań, to jego szanse osiągnięcia sukcesu są znikome. Zadania te tez na ogół są zadaniami schematycznymi, tylko poziom tego schematu jest wysoko wyżej niż poziom rozwiązywania zadań szkolnych. Więc aby zauważać te schematy uczeń musi być przede wszystkim zdolny. Dobrze to widać na przykładach szkół, które specjalizują się w przygotowywaniu uczniów do takich olimpiad i ich uczniowie prawie zawsze są w czołówce Laureatów, dlatego tez można podjąć się przygotowywania uczniów w systematyczny sposób, tak by mogli w tych konkursach odnosić sukcesy. Wymaga to jednak dużego wkładu pracy ucznia, jak również nauczyciela, który musi nauczyć się rozwiązywać tego typu zadania a chociażby umieć wytłumaczyć uczniom gotowe rozwiązania, które są dostępne. Nie jest to jednak rzeczą taka prostą, bo jak łatwo się domyśleć, biegłość przeciętnego nauczyciela matematyki nie przekracza biegłości przeciętnego studenta matematyki w rozwiązywaniu zadań a studenci mają poważne problemy, żeby rozwiązać takie zadania, więc nauczyciele też je mają i z tego powodu nie podejmują się tego typu działalności. Zatem jest rzeczą ważną, żeby studentów, którzy mają być w przyszłości nauczycielami matematyki uczyć tej umiejętności, bo nauczyciele tej umiejętności nabywać już nie muszą, więc na ogół nie będą tego robić. Oczywiście jest to wielka strata dla uczniów zdolnych, którzy występują w różnych szkołach, w różnych miejscach w kraju i stracą możliwość zapoznania się z tymi metodami i tą częścią matematyki, która jest bardzo rozwijająca.

Obozy matematyczne

Obóz matematyczny to przedsięwzięcie zarówno dydaktyczne, jak i logistyczne, które wymaga dość długich i solidnych przygotowań ze strony organizatorów. W Polsce w nagrodę za wybitne osiągnięcia z matematyki proponowany jest młodzieży udział w obozach matematycznych, m.in. organizowanych przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej, Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów a także często taki obóz stanowi główną nagrodę dla wielokrotnych zwycięzców konkursu Kangur Matematyczny. Takie obozy organizowane są także przez wiele uczelni wyższych w naszym kraju, np. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego i Fundacja Matematyków Wrocławskich dwa razy w roku organizują obozy matematyczne dla dzieci i młodzieży: Zimowe Szkoły Matematyki (od 1990 roku (dla licealistów i wyjątkowo zdolnych młodszych uczniów) oraz letnie Obozy Naukowe (prowadzone od 2001 roku (dla uczniów ze wszystkich poziomów edukacyjnych)). Ich uczestnikami są uzdolnieni matematycznie uczniowie ze szkół z Dolnego Śląska i Opolszczyzny. Obozy te były przez wiele lat obozami międzynarodowymi, co z jednej strony podsycało matematyczne współzawodnictwo, z drugiej zaś zacieśniało przyjaźnie, jak również pozwalało wymieniać się informacjami dotyczącymi systemów edukacyjnych w innych krajach. Te i tym podobne obozy mają swoje tradycje i specyfikę, a liczba chętnych zawsze przekracza liczbę miejsc. Zajęcia dydaktyczne podczas obozów są prowadzone zarówno przez studentów, doktorantów, jak i pracowników naukowych.

Przeważnie organizowane obozy trwają od 5 do 7 dni a ich tematyka może być zarówno monograficzna, jak i przeglądowa, zupełnie pozaszkolna, bądź poszerzająca omawiane w szkole działy. Najważniejsze, by zajęcia obozowe były ciekawe i by młodzież była zadowolona. Żeby zaoszczędzić czas i wydatki nie trzeba wybierać bardzo odległych miejsc na takie obozy. W kwestii organizacji dni obozowych należy uwzględnić również czas na wycieczki, zawody sportowe, ogniska itp. (M. Mikołajczyk, 2012).

Wzorując się na tych niezwykle ciekawych i wartościowych formach wspierania i rozwoju zainteresowań i pasji uczniów współorganizowałam kilka takich przedsięwzięć dla własnych uczniów. Były to trzydniowe wyjazdowe obozy organizowane dla uczniów klas matematycznych zamienne za wiosenne tradycyjne wycieczki szkolne. By w dużym stopniu zminimalizować ilość kwestii organizacyjnych korzystałam z usług biura turystycznego i zajmowałam się tylko przygotowaniem zajęć. Harmonogram dnia przewidywał poranne wykłady, poobiednie zawody matematyczne (ligi zadaniowe, mecze matematyczne lub gry terenowe) oraz wieczorne gry logiczne i planszowe podczas ogniska. Oprócz tego każdego dnia odbywały się zajęcia w terenie (zwiedzanie, zabawy ruchowe). Obozy w opinii uczniów były bardzo ciekawe i pełne wrażeń.

Warsztaty Matematyczne

Kolejnym przedsięwzięciem wartym uwagi są warsztaty matematyczne. Mogą być to kilkugodzinne spotkania z matematyką, czy nawet wielodniowe wydarzenia. Mogą być organizowane w szkołach, na uczelniach samodzielnie bądź przy współpracy ośrodków naukowych, mogą również przyjmować formę wyjazdowych zajęć. Pierwsze organizowane przeze mnie warsztaty skierowane były dla uczniów starszych klas dawnych szkół podstawowych a wykonawcami byli wówczas uczniowie klas „matematycznych” gimnazjum, w którym w tym czasie pracowałam. Początkowo zajęcia warsztatowe odbywały się tylko na terenie naszej szkoły, zapraszaliśmy wówczas kilka grup pięcioosobowych z różnych szkół podstawowych naszego województwa. Celem warsztatów było poszerzenie i popularyzacja wiedzy matematycznej wśród uczniów szkół podstawowych a udział w warsztatach był bezpłatny. W trakcie warsztatów uczniowie-uczestnicy wysłuchiwali krótkich prezentacji związanych tematycznie z matematyką i przygotowanych przez uczniów- gimnazjalistów. Tematy prezentacji uczniowie-uczestnicy poznawali dopiero w chwili ich przedstawienia. Następnie rozgrywane były konkursy matematyczne, w których brały udział drużyny reprezentujące poszczególne szkoły podstawowe. Zadania konkursowe dotyczyły treści przedstawionych w trakcie prezentacji gimnazjalistów. Dotyczyły one zagadnień, z którymi uczestnicy nie mieli jeszcze okazji zapoznać się na lekcjach matematyki, nigdy również nie były to zagadnienia podstawy programowej wyższych poziomów a takie, które rozwijały myślenie logiczne. Z czasem wydarzenia te zyskały taką popularność, że organizacja w szkole przy takiej ilości uczestników nie była już możliwa.

Konferencje Młodzieżowe

Kolejnym istotnym działaniem, którego cel oprócz rozwoju uczniowskich zdolności matematycznych stanowi zerwanie ze stereotypem matematyki jako nauki kojarzącej się ze szkolną nudą i mozolną pracą jest organizacja uczniowskich konferencji, współorganizowanych przez różne środowiska. Głównymi prelegentami takich wydarzeń są uczniowie, którzy przygotowują różne zajęcia dla innych uczniów a sam pomysł wywodzi się od konferencji Trimat organizowanej w Gdyni. Miałam okazję wraz z uczniami wziąć udział w dwóch edycjach tej konferencji. Wyjazd stanowił połączenie możliwości udziału uczniów zainteresowanych matematyką w różnych zajęciach rozwijających z możliwością podziwiania uroków tego pięknego miasta. Podczas konferencji moi uczniowie mieli okazję spotkać młodzież o podobnych zainteresowaniach jak również poznać wybite osobistości z matematycznych kręgów, m.in. Prof. W. Guzickiego czy redaktorów czasopisma ‘Delta”. Ta okoliczność dała im także okazję do poznania specyfiki pracy naukowej. Pomysł organizacji tego wydarzenia tak bardzo mi się spodobał, że stał się dla mnie inspiracją do organizacji podobnego w naszym województwie- Uczniowskiej Konferencji Matematycznej współtworzonej przez moich uczniów, uczniów i nauczycieli z innych szkół a także pracowników naukowych Wydziału Matematyki i Informatyki UAM oraz Wydziału Studiów Edukacyjnych UAM. Wydarzenie to skierowane było do uczniów szkół podstawowych z całego województwa i cieszyło się sporym zainteresowaniem. Łącznie w dwóch edycjach wzięło udział około 200 uczniów i 50 nauczycieli. Uczniowie prelegenci (byli wśród nich zarówno moi uczniowie, uczniowie z innych szkół jak i moi absolwenci) starli się przekonać uczestniczących uczniów, że matematyka może być niezwykle ciekawa i inspirująca a czasem także tajemnicza. Podczas wykładów i warsztatów przedstawione zostały m.in: zagadnienie Mostów Królewieckich, tajemnice liczb pierwszych, historie geniuszy matematycznych, którzy w młodym wieku dokonali znaczących odkryć w tej dziedzinie, kilka twierdzeń, które mogły zadziwić (Twierdzenie o antypodach, Twierdzenie o kanapkach i naleśnikach), Wzór Picke’a, problem wież Hanoi, czy też związek matematyki w muzyce połączony z krótkim koncertem oraz zagadnienie czwartego wymiaru. Wydarzenie to cieszyło się dużym zainteresowaniem, co stanowiło potwierdzenie potrzeby organizacji takich dla uczniów szkół podstawowych, jak również po raz kolejny stało się potwierdzeniem tego, że jest możliwe do organizacji praktycznie przez każdego nauczyciela, który dostatecznie mocno tej organizacji chce.

Kółka olimpijskie

Szczególny rodzaj zajęć koła matematycznego, którego celem jest przygotowanie uczniów do Olimpiady Matematycznej Juniorów (na poziomie szkoły podstawowej) lub Olimpiady Matematycznej (na poziomie szkoły ponadpodstawowej) stanowią zajęcia koła olimpijskiego. Swoją uwagę poświęcę tym pierwszym ze względu na własne doświadczenia, jak również fakt, że przeprowadzone badanie dotyczyło uczniów w wieku 13-15 lat. Omówię pokrótce jak przygotować i poprowadzić takie zajęcia, jakie stosować formy zajęć i metody nauczania a także podam przykładowy plan takich zajęć. Kółko olimpijskie może przybierać różne formy np. formę wykładu, na którym omówione zostaje konkretne zagadnienie matematyczne a po nim następuje wspólne rozwiązywanie zadań związanych z tym zagadnieniem, lub też polegać może na wspólnym rozwiązywaniu zadań, które łączy pewna idea, np. takich, w których istotne jest uszczegółowienie zagadnienia ogólnego, lub też mogą polegać po prostu na wspólnym rozwiązywaniu zadań z różnych dziedzin matematyki (szczególnie wskazana w czasie przygotowań do kolejnych etapów olimpiady).

Podczas takich zajęć podobnie zresztą jak podczas każdego rodzaju zajęć koła matematycznego uczymy, jak uczeń powinien zapisać swoje rozwiązanie, aby zawierało wszystkie istotne elementy i było pełną prezentacją toku rozumowania. Przy okazji uczymy również, jak planować pracę w czasie pisania konkursu.
Podczas swoich zajęć koła olimpijskiego stosowałam zasadę spiralności nauczania, czyli kilkakrotnego powrotu do tego samego zagadnienia, ale za każdym razem poszerzając lub pogłębiając jego kontekst. Takie postępowanie pozwalało uczniom nie tylko zdobyć wiedzę, ale i skutecznie ją utrwalić. (Mikołajczyk, 2012).

Poniżej zaproponuję wybrany temat kółka Zasada Szufladkowa Dirichleta.
Pierwszą część zajęć poprowadziłabym w formie wykładu, rozpoczynając od krótkiego przedstawienia osoby Dirichleta a następnie przeszłabym do sformułowania Zasady

Szufladkowej oraz jej uogólnionej postaci. W kolejnej części przedstawiłabym kilka prostych zastosowań tego twierdzenia zarówno w arytmetyce, jak i geometrii i kombinatoryce wraz z przykładem zastosowania jego uogólnionej postaci. Oto kilka przykładowych problemów:

Zadanie 1.

Udowodnij, że wśród trzech dowolnych liczb naturalnych zawsze znajdziemy dwie parzyste lub dwie nieparzyste.

Zadanie 2.
Udowodnij, że wśród siedmiu dowolnych liczb naturalnych pewne dwie dają taką samą resztę z dzielenia przez sześć.

Zadanie 3.
Wykaż, że wśród 37 uczniów przynajmniej czworo urodziło się w tym samym miesiącu.

Zadanie 4.
W kole o promieniu 1 wybrano siedem punktów. Wykaż, że wśród nich istnieje co najmniej jedna para punktów odległych od siebie o nie więcej niż 1.

W kolejnej części zajęć przeszłabym do wspólnego z uczestnikami rozwiązywania problemów nieco bardziej złożonych. Poniżej kilka przykładów zadań:

Zadanie 1.
Wykaż, że w prostokącie o wymiarach 3x4, w którym danych jest 6 punktów istnieją wśród nich takie dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 2.

We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 2 wybrano pięć punktów. Udowodnij, że pewne dwa spośród nich są odległe o co najwyżej 1.

Zadanie 3.

Wykaż, że w każdym wypukłym parzystokącie istnieje przekątna, która nie jest równoległa do żadnego z boków.

Zadanie 4.

Udowodnij, że w gronie 6 osób albo pewne 3 osoby się znają, albo pewne 3 się nie znają.

Zadanie 5.

Udowodnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie 2, których suma lub różnica dzieli się przez 10.

Konkursy uczniowskich prac z matematyki

Praca z uczniem zdolnym na ogół kojarzy nam się z działaniami pod kątem olimpiady lub innych konkursów, czyli ze zdobywaniem wiedzy potrzebnej do uczenia się rozwiązywania określonych typów zadań. I choć konkursy są niezbędne w procesie pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie, nie kształcą one wszystkich umiejętności niezbędnych w pracy matematyka. W tej części omówię inny rodzaj pracy z uczniem zdolnym niż prowadzenie kół matematycznych, mianowicie przygotowanie uczniów do samodzielnego pisania prac badawczych. Przedstawię ich cel, sposób kierowania uczniem w czasie takiej pracy, podam także przykłady tematów i kilku źródeł, skąd można je czerpać oraz przedstawię przykład pracy badawczej swojego ucznia.

Matematykę warto pisać z wielu powodów, m.in. po to, by nauczyć się formułować i analizować problemy, jak również przedstawiać w sposób czytelny ich rozwiązania a ta umiejętność przyda się każdemu, nie tylko matematykowi. Jeśli ktoś matematykiem zostanie dowie się w ten sposób, na czym będzie polegała jego przyszła praca. Szkoła bowiem kształtuje fałszywe przekonanie co do tego, czym jest i na czym polega matematyka. Pracę badawczą może napisać właściwie każdy uczeń, który wykazuje zainteresowanie matematyką, również ten, który nie odnosi sukcesów olimpijskich, gdyż podczas zawodów liczy się pomysłowość, umiejętność szybkiego kojarzenia faktów, wiedza z wielu działów matematyki, tempo pracy i duże doświadczenie, natomiast przy pisaniu pracy badawczej znacznie mniej liczy się posiadany zasób wszechstronnych wiadomości czy szybkość pracy. Bardziej istotna jest cierpliwość, dociekliwość czy upór w dążeniu do celu. Wielu uczniów nie odnosi sukcesów olimpijskich właśnie dlatego, że nie potrafią oni wpadać na właściwe pomysły w krótkim czasie zawodów, ale są w stanie napisać efektowną pracę badawczą. Oczywiście do napisania pracy z matematyki trzeba ucznia odpowiednio zachęcić. Dla większości jest to zupełnie nowa forma, gdyż na lekcjach, egzaminach czy konkursach wymaga się od nich wyłącznie umiejętności rozwiązywania zadań. Nie mają więc okazji do samodzielnego badania, opisywania interesujących ich zagadnień czy stawiania własnych hipotez. Opiekun odgrywa bardzo ważną rolę w całym procesie powstawania uczniowskiej pracy. Kiedy przedstawi już uczniowi poszczególne etapy, czyli:

- wybór tematu pracy,
- zebranie wiadomości, materiałów,
- postawienie hipotezy,
- weryfikacja hipotezy,
- zapisanie wyników,
- przygotowanie prezentacji wyników.

powinien wspomagać go na każdym z tych etapów. Opiekunem może być nauczyciel szkolny jak również pracownik akademicki. Istotne jest doświadczenie takiej osoby w proponowaniu interesujących zagadnień, które mogą prowadzić do ciekawych wyników.

Niezwykle ważny i trudny jest wybór tematu pracy. Powinien on być zgodny z zainteresowaniami i predyspozycjami ucznia a zadanie badawcze nie powinno być ani zbyt obszerne, by uczeń nie pogubił się w wielości możliwych do przeanalizowania wątków, ani zbyt wąski, gdyż taki z kolei może spowodować zniechęcenie, kiedy nie uda się uzyskać w miarę szybko istotnego postępu w uczniowskim badaniu. Bardzo dobrym źródłem pomysłów są zadania olimpijskie. Dokonanie zmiany założeń, uszczegółowienie lub uogólnienie tezy może ukazać uczniowi bardzo ciekawe problemy. Warto również polecić uczniowi przejrzenie czasopism popularnonaukowych takich jak np. „Delta”, gdyż zawarte w nich artykuły mogą być świetną inspiracją, często również zawierają propozycje gotowych problemów. A czasami na temat uczeń wpadnie sam. Po ustaleniu tematu uczeń powinien zapoznać się z dostępnymi materiałami, w których są opisane główne pojęcia i metody umożliwiające badanie tematu, gdyż ich analiza dostarczy informacji o stanie wcześniejszej wiedzy na zadany temat, pozwoli również ocenić uczniowi, co ciekawego pozostało jeszcze do zbadania. Następnie może już przejść do postawienia problemu, który musi być precyzyjnie sformułowany. Czasem może się zdarzyć, że uczeń udowodni znany fakt, ale w inny sposób niż wcześniej tego dokonano, lub też znajdzie dowód bardziej elementarny, wówczas osiągnie bardzo wartościowy wynik pracy badawczej. Czasem również cząstkowe wyniki mogą okazać się ciekawe i znaczące.

Kolejnym, najdłuższym etapem jest prowadzenie badań nad postawioną hipotezą, który wymaga od ucznia dużej cierpliwości. Zdarzyć się bowiem mogą fałszywe tropy lub konieczne może okazać się zapoznanie z dodatkowymi metodami czy pojęciami i tu szczególnie potrzebna jest pomoc opiekuna i odpowiednie pokierowanie uczniem. Jeśli otrzymane rezultaty zostaną przez ucznia i opiekuna uznane za satysfakcjonujące, to kolejnym etapem jest zapisanie pracy, które powinno być zrobione w sposób przejrzysty, zwięzły i w miarę prosty. Taka praca we wstępie powinna zawierać krótki opis, o czym jest i jakie są jej główne wyniki, w kolejnej części powinna zawierać wiedzę teoretyczną niezbędną do zrozumienia opisanego problemu i jego rozwiązania, a następnie zaprezentowany opis przeprowadzonych badań i własne wyniki wraz z podaną pełną informacją o źródłach, z których korzystał autor pracy.

Swoimi badaniami uczeń może pochwalić się i np. wziąć udział w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki organizowany przez miesięcznik „Delta” lub konkursie prac uczniowskich o nazwie Ogólnopolski Sejmik Matematyków, czy Konkursie Prac Matematycznych organizowany przez Krakowskie Młodzieżowe towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk. Przy wsparciu nauczyciela uczeń może pokusić się nawet o publikację swojej pracy w jakimś czasopiśmie lub na portalu internetowym (Mikołajczyk, 2012).

W czasie istnienia gimnazjum wspólnie z pracownikami naukowymi Wydziału Matematyki i Informatyki UAM współorganizowałam korespondencyjny konkurs uczniowskich prac z matematyki o nazwie Matematyka dla Młodych, którego byłam pomysłodawcą. Jego celem było poszerzenie i popularyzacja wiedzy matematycznej wśród uczniów gimnazjów naszego województwa oraz wyłanianie uczniowskich talentów matematycznych. Uczestnicy konkursu zobowiązani byli do zredagowania pracy na jeden z zaproponowanych przez komisje konkursową tematów. Praca zgłoszona do konkursu miała być samodzielnie przygotowanym przez ucznia oryginalnym opracowaniem problemu a każdy uczestnik konkursu miał prawo do konsultacji (po wcześniejszym uzgodnieniu mailowym) z wskazanymi osobami odnośnie pisanej przez siebie pracy.

Zastosowanie przez nauczyciela matematyki narzędzi TIK

Wskazanym jest, by współczesny nauczyciel potrafił wykorzystywać nowe środowiska uczenia się, współtworząc i współdzieląc się wiedzą z uczniami. Kluczową rolę w tworzeniu skutecznego środowiska komunikacyjnego odgrywa dobrze wykształcony nauczyciel, który zna nie tylko współczesne koncepcje pedagogiczne, ale również narzędzia TIK (Technologie informacyjno-komunikacyjne). Zastosowanie przez nauczyciela narzędzi TIK w edukacji, stwarza bowiem uczniom możliwość dostosowania nauki do indywidualnych potrzeb.

Ponadto technologie te umożliwiają wszystkim naukę w dowolnym miejscu, czasie i za pośrednictwem dowolnego urządzenia oraz stały dostęp do aktualnych postępów w nauce. Przykłady zastosowań prostych narzędzi informatycznych do wspomagania nauczania matematyki przedstawione zostały w rozdziale pt. Zastosowania prostych narzędzi informatycznych do wspomagania rozwiązywania problemów, również całkiem niebanalnych w procesie kształcenia matematycznego w publikacji pt. Liczby w cyfrowym świecie. Rozmowy o współczesnej edukacji matematycznej dziecka, red. T. Przybyła, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2021, które można wykorzystać zarówno na lekcjach matematyki jak i zajęciach koła w szkole podstawowej (Kolczyńska-Przybycień, Przybycień, 2021b).

BIBLIOGRAFIA

1. Adamek I. (2000), *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo Impuls, Warszawa-Radom.
2. Anweiler O. (2005), *Nauki uniwersyteckie i kształcenie nauczycieli w Niemczech i w Polsce – uwagi historyczne.* W: *Nauczyciel i kształcenie nauczycieli. Zmiany i wyzwania,* red. W. Hörner, M. Szymański, Warszawa.
3. Apanowicz J. (2002), *Metodologia ogólna*, Wydawnictwo Bernardinum, Gdynia.
4. Apostol E.M.D. (2017), *Problem Solving Heuristics on Non-Routine Problems of College Student*s, American Journal of Educational Research, vol. 5, no. 3.
5. Artykuł 1 Ustawa z dnia 14 grudnia 2016 roku Prawo Oświatowe (Dz. U. z 2019 r. poz. 1148, 1078, 1287, 1680, 1681 i 1818), ogłoszono dnia 19 czerwca 2019 r., obowiązuje od dnia 1 września 2017 r.
6. Bałachowicz J. (2009), *Style działań edukacyjnych nauczycieli klas początkowych. Między uprzedmiotowieniem a podmiotowością*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna Towarzystwa Wiedzy Powszechnej, Warszawa.
7. Banach C. (1995), *Cechy osobowościowe nauczycieli, „Nowa Szkoła”,* nr 3.
8. Bartnicka K., Szybiak I. (2001), *Zarys historii wychowania*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
9. Bauman Z. (2012), *O edukacji. Rozmowy z Riccardo Mazzeo,* Wydawnictwo Naukowe Dolnośląskiej Szkoły Wyższej, Wrocław.
10. Bauman Z. (2006), *Praca, konsumpcjonizm i nowi ubodzy*, Wydawnictwo WAM, Kraków.
11. Beugnon J. (2012), *Organizacja kształcenia uczniów zdolnych w kontekście systemowych rozwiązań w pracy z uczniem zdolnym.* Materiały z Konferencji „Jakich systemowych rozwiązań w kształceniu uczniów zdolnych potrzebuje współczesna szkoła?”, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.
12. Białecki I. (1978), *Kształtowanie się wybitnych uzdolnień i metody selekcji uczniów wybitnie uzdolnionych a olimpiady matematyczne*, W: L. Wołoszynowa (red), Materiały do nauczania psychologii, Seria II, T.8, PWN, Warszawa.
13. Boaler J. (2015*), Fluency Without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts,* Youcubed series: Stanford University.
14. Boaler J. (2016), *Mathematical Mindsets. San Francisco*, John Wiley and Sons Ltd.
15. Boczarowa O. (2011), *Pedagogiczne wsparcie dzieci uzdolnionych w szkołach Polski i Ukrainy*, Wydawnictwo AFM, Kraków.
16. Borzym I. (1979), *Uczniowie zdolni. Psychologiczne i społeczne determinanty osiągnięć szkolnych*, PWN, Warszawa.

17. Bourdieu P., Passeron J.C. (2006), *Reprodukcja,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

18. Brzeziński J. (1978), *Metodologiczne i psychologiczne wyznaczniki procesu badawczego w psychologii*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu.

19. Brzeziński J. (1980), *Elementy metodologii badań psychologicznych*, PWN, Warszawa.

20. Brzeziński J. (2000), *Badania eksperymentalne w psychologii i pedagogice*, Wydawnictwo Scholar, Warszawa.

21. Brzeziński J. (2002), *Metody badań psychologicznych,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

22. Brzeziński J.M. (2015), *Badania eksperymentalne w psychologii i pedagogice,* Wydawnictwo Naukowe Scholar Sp. Z.o.o., Warszawa.

23. Căprioară D., *Problem Solving - Purpose and Means of Learning Mathematics in School,* Procedia - Social and Behavioral Sciences, Volume 191, 2 June 2015, Pages 1859-1864.

24. Chmielewski W. (2002), *Licea pedagogiczne w systemie kształcenia nauczycieli w latach 1944-1956, „Przegląd Historyczno-Oświatowy*", nr 1-2.

25. Chodubski A. (2002), *Edukacja a wartości cywilizacji współczesnej*. W: (red.) W. Kojs, *Wartości – Edukacja – Globalizacja*, Wybrane zagadnienia, Uniwersytet Śląski Filia w Cieszynie, Cieszyn.

26. Cieślikowska J. (2005), *Nauczyciel ucznia zdolnego w teorii i badaniach,* [w]: (red.) Limont W.,Cieślikowska J., *Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych*. Tom 2, Uczeń – Nauczyciel – Edukacja, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

27. Ciosek M., Krygowska Z., Turnau S. (1974), *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki* (fragment badań), Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Zeszyt 54, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

28. Clarke G. (1983), *Guidelines for the Recognition of Gifted Pupils*, Longmans, Londyn.

29. Cydzik Z. (1990), *Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej szkoły podstawowej,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

30. Czerniak J. (2013). *System edukacji w Finlandii czynnikiem sprzyjającym innowacyjności gospodarki*, Annales Universitas Mariae Curie-Sklodovska Lublin – Polonia. Vol. XLVII, 2. S. 45–52.

31. Dai D.Y., Renzulli J.S. (2008), *Snowflakes, living systems, and the mystery of giftedness*, Gifted child Quarterli, 52(2).

32. Daniłczenko M.G., Piotrowicz Błoński P. (1996). W: *Myśliciele – o wychowaniu*, t. 1, red. C. Kupisiewicz, I. Wojnar, Warszawa.

33. Dawid J. Wł. (1911), *Inteligencja, wola i zdolność do pracy*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław, Warszawa, Kraków.

34. Dawid Ł. (2010), *Uczenie się jako forma działalności ucznia.* w*: Dziecko w świecie szkoły. Szkice o wychowaniu,* red. Dymara B., Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

35. Dawid J. W. (1946), *O duszy nauczycielstwa,* Nasza Księgarnia, Warszawa.

36. Deringöl,Y; Davasligil,Ü. (2020), *The Effect of Differentiated Mathematics Programs on the Mathematics Attitude of Gifted Children,* Malaysian Online Journal of Educational Sciences.

37. Dąbek A. (1984*), Psychologiczna analiza zdolności matematycznych. Struktura i kształcenie*, Wydawnictwo WSP, Zielona Góra.

38. Dobrzański J. (1967*), Działalność Izby Edukacyjnej na polu oświaty ludu.* W: *Historia wychowania,* t. 2, red. Ł. Kurdybacha, Warszawa.

39. Doroszewski J. (2002), *Seminaria nauczycielskie w Polsce w świetle polityki oświatowej państwa (1918-1937),* Lublin.

40. Dutkiewicz W. (1996), *Przewodnik metodyczny dla studentów pedagogiki,* Kielce.

41. Dweck C. (2014), *Nowa psychologia sukcesu*. Warszawa: Muza.

42. Dyrda B. (2007), *Zjawiska niepowodzeń szkolnych uczniów zdolnych*. *Rozpoznawanie i przeciwdziałanie*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

43. Dyrda B. (2008), *Zjawiska niepowodzeń szkolnych uczniów zdolnych. Rozpoznawanie i przeciwdziałania*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

44. Dyrda B. (2009), *Nauczycielskie kompetencje w pracy z uczniami zdolnymi*, W: (red.) S. Popek, A. Winiarz. Nauczyciel. Zawód. Powołanie. Pasja, Wydawnictwo UMCS, Lublin.

45. Dyrda B. (2012), *Edukacyjne wspieranie rozwoju uczniów zdolnych studium społeczno-pedagogiczne*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

46. Dyrda B. (2014), *W stronę rozwoju ludzkich potencjalności- z perspektywy interdyscyplinarnej,* Chowanna, T 2(43).

47. Dyrda B. (2011a), *Badanie systemu pracy z uczniem zdolnym. Raport z badania case study w Austrii, Czechach, Finlandii, Niemczech i Wielkiej Brytanii,* Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

48. Dyrda B. (2011b), *Polityka, organizacja i programy pracy z uczniami zdolnymi w Anglii i Niemczech – analiza komparystyczna.* W*:* (red.) Łaszczyk J., Jabłonowska M., *Wokół problematyki zdolności,* Tom 2, Wydawnictwo Uniwersitas Rediviva, Warszawa.

49. Dziedziewicz D., Gajda A. (2011*), Działania na rzecz wspierania rozwoju zdolności w wybranych krajach Europy,* W: (red.) Łaszczyk J., Jabłonowska M., *Wokół problematyki zdolności*, Tom 2, Wydawnictwo Uniwersitas Rediviva, Warszawa.

50. DzUMWRiOP (1919), nr 2, poz. 3.

51. DzUMWRiOP (1922), nr 90, poz. 828

52. Eby J.W., Smutny J.F. (1998), *Jak kształcić uzdolnienia dzieci i młodzieży,* WSiP, Warszawa.

53. Eisenmann P., Novotna J.,Přibyl, J. , Břehovský, J. (2015), *The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies*, Mathematics Education Research Journal volume 27, pages 535–562 (2015).

54. Ennis, R.H. (2015), *Critical Thinking: A Streamlined Conception.* The Palgrave Handbook of Critical Thinking in Higher Education, pp 31-47.

55. Eyre D. (2009), *The English Model of Gifted Education.* W*: Shavinina L. V. (red.) International Handbook on Giftedness*, Wyd. Springer, UK.

56. Fechner-Sędzicka I. (2013*), Model pracy z uczniem zdolnym w szkole podstawowej Jak praktycznie i systemowo zorganizować edukację uczniów zdolnych na poziomie szkoły podstawowej*?, Wydawnictwo ORE, Warszawa.

57. Fuszek C. (2012), *Tworzenie sieci współpracy w Europie w dziedzinie rozwiązań systemowych dotyczących kształcenia uczniów zdolnych*, *Materiały z międzynarodowej konferencji „Systemowe strategie kształcenia uczniów zdolnych drogą ku edukacji przyszłości*" ,Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

58. Galant J. (1987), *Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów w klasach początkowych,* WSiP, Warszawa.

59. Gallagher J., Harradine C.C., Coleman M.R. (1997), *Gifted students in the classroom: Challenge or boredome? Gifted students' vievs on their schooling,* "Roeper Review" 19.

60. Gawda B. (1996), *Elementy postawy twórczej u młodzieży o zróżnicowanych uzdolnieniach matematycznych*. W: Zdolności i uzdolnienia jako osobowościowe właściwości człowieka, red. Popek S., Wydawnictwo UMCS, Lublin.

61. Gębuś D., Pierzchała A. (2016), *Twórczy nauczyciele, pomysłowi uczniowie. Osobowościowe korelaty kreatywności nauczycieli w perspektywie analizy transakcyjnej*, Wydawnictwo im. Stanisława Podobińskiego Akademii im. Jana Długosza, Częstochowa.

62. Giza T. (2006), *Filozoficzne i metodologiczne aspekty komputerowych systemów odkryć naukowych*, UMCS, Lublin.

63. Giza T. (2008*), Procesy samokształtowania jako działania transgresyjne człowieka*. W: (red.) I. Pufal-Struzik, *O przekraczaniu granic własnych ograniczeń. Z perspektywy psychotransgresjonizmu.* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

64. Giza T. (2005), *Uczniowie zdolni w opiniach nauczycieli.* W: (red.) W. Limont, *Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych*, Tom 2., Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

65. Giza T. (2009), *Jakiej szkoły potrzebują uczniowie zdolni?* W: (red.).Dumuła T., Dyrda T., *Szkoły. Nauczyciele. Uczniowie. Dyskusja o programie, metodzie, uczeniu się w Europie*, Wydawnictwo Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego im. Jana Kochanowskiego, Kielce.

66. Gnitecki J. (1993), *Zarys metodologii badań w pedagogice empirycznej*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Zielona Góra.

67. Gołąb-Mayer Z. (2014), Foton 127, Zima.

68. Gondzik E. (1976), *Kariery szkolne uczniów,* WSiP, Warszawa.

69. Góralski A. (1980), *Twórcze rozwiązywanie zadań*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

70. Góralski A. (1996), *Szkice do pedagogiki zdolności,* Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.

71. Góralski A. (2003), *Teoria twórczości,* Wydawnictwo APS, Warszawa.

72. Górska L. (2000), *Wizje zawodu nauczycielskiego w Polsce u progu trzeciego tysiąclecia,* Szczecin.

73. Grzegorzewska M. (1938), *Znaczenie wychowawcze osobowości nauczyciela. „Chowanna*", nr 4.

74. Grzegorzewska M. (1946), *Listy do młodego nauczyciela, List I, List XI,* Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej, Warszawa.

75. Grzęda M. (2009), *Nauczyciele matematyki w Polsce*, Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

76. Günther K.H. (1988), *Problemy oświaty i szkolnictwa w programach i działalności głównych sił politycznych Niemiec Zachodnich (1945-1949),* Rozprawy z Dziejów Oświaty 31.

77. Guzicki W. (2013), *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki,* Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

78. Guzik- Tkacz M. (2011), *Badania diagnostyczne w pedagogice,* Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

79. Guzy-Steinke, H. (2007), *Między oczekiwaniami a rzeczywistością. Postrzeganie nauczycieli przez gimnazjalistów,* Wydawnictwo Edukacyjne Akapit, Toruń.

80. Hajnicz W. (2010), *Ocena i diagnoza w procesie edukacyjnym,* W: (red.) A. Konieczna. Diagnozowanie potrzeb edukacyjnych dziecka, Wydawnictwo APS, Warszawa.

81. Halicki J. (1971), *Rozwijanie uzdolnień matematycznych.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

82. Hattie, J. (2015), *Widoczne uczenie się dla nauczycieli*, CEO, Warszawa.

83. Horner W., Szymański M. (2005), *Nauczyciel i kształcenie nauczycieli. Zmiany i wyzwania,* Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

84. Igielska B. (2010), *Nauczyciel non-fiction, „Polityka",* nr 15.

85. Ir, E. (2013), *Warunki realizacji nowej podstawy programowej a rzeczywistość. Refleksje nauczyciela*, „Pedagogika"

86. Jabłonko O. (2014), *Myśl etyczno-pedagogiczna Jana Władysława Dawida w dzisiejszych czasach, Prace Naukowe Wałbrzyskiej Wyższej Szkoły Zarządzania i Przedsiębiorczości***,** Wałbrzych.

87. Jabłonowska M., Łukasiewicz-Wieleba J. (2010), *Model pracy z uczniem szczególnie uzdolnionym*. [w]: *Podniesienie efektywności kształcenia uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi*, *Materiały dla nauczycieli, cz. II.*, MEN, Warszawa.

88. Janicka-Panek T. (2017), *Studium indywidualnego przypadku jako strategia w badaniach jakościowych,* Red. F. Szlosek, Warszawa.

89. Janiszewska M. (2013), *Nauczyciel jako odkrywca zdolności uczniów w klasach I–III szkoły podstawowej,* Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna nr 2, Kraków.

90. Janowicz J. (1985), *Kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie: zagadnienia teoretyczne: zbiór zadań,* Instytut Kształcenia Nauczycieli, Wrocław.

91. Janowski A. (1975), *Poznawanie uczniów,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

92. Janowski A. (2002), *Poznawanie uczniów. Zdobywanie informacji w pracy wychowawczej*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

93. Jarowiecki J., Nowecki B. (1983), *Kształcenie nauczycieli w Polsce Ludowej (1945-1975),* Kraków.

94. Juchacz P.W. (1958), *Sokrates: Filozofia w działaniu,* PAX,Warszawa.

95. Kamiński A. (1974),(2006), *Metoda, technika, procedura badawcza w pedagogice empirycznej.* W: *Metodologia pedagogiki społecznej red. Wroczyński R., Pilch T.,* Ossolineum, Wrocław.

96. Kapica G. (2013*), Edukacyjne bariery kreatywności młodszych uczniów,* W: *Edukacja małego dziecka. Konteksty rozwojowe i wychowawcze, Tom 4*. red. Ogrodzka-Mazur E., Szuścik U, Oleksy J.*,* Cieszyn, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

97. Karta Nauczyciela, art. 6, art. 75, art. 76 ustawy z 26 stycznia 1982 r., DzU 2006, nr 97, poz. 674 z późn. zm.

98. Karta Nauczyciela, ustawa z dnia 26 stycznia 1982 r., DzU 2006, nr 97, poz. 674, z późn. zm. 29.

99. Kautz T. (2011), *Przegląd kształcenia nauczycieli w Polsce w latach 1945-2010,* Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej Rok LII Nr 2 (185).

100. Kawiak E. (2018), *Zmiana sposobu myślenia o nauczaniu matematyki: zwrot ku zadaniom problemowym.* W: Kawiak Ewelina. (2018). Zmiana sposobu myślenia o nauczaniu matematyki: zwrot ku zadaniom problemowym. "Chowanna" (T. 1, (2018), s. 149-160).

101. Kawula S. (1996*), Studia z pedagogiki społecznej,* Wyd. WSP, Olsztyn.

102. Klus-Stańska D., Kalinowska A. (2004), *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

103. Klus-Stańska D., Nowicka M. (2005*), Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

104. Kochan K. (2002), *Nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej w Polsce (19452000*). W: *Nauczyciel – opiekun – wychowawca (tradycje – teraźniejszość – nowe wyzwania), red. R. Stankiewicz,* Poznań-Zielona Góra.

105.Kocór M. (2012), *Kompetencje zawodowe nauczycieli uczniów zdolnych.* W: (red.) Barłóg K., Mach A., Zaborniak-Sobczak M., *Odkrywanie talentów. Wybrane problemy diagnozy, wspierania rozwoju i edukacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.

106.Kojs W. (2014), *Prakseopedagogiczny wgląd w wybrane zagadnienia edukacji, gospodarki i globalizacji.* W: *Edukacja i gospodarka w kontekście procesów globalizacji. Red. W. Kojs, E. Rostańska, K. Wójcik,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

107.Kolczyńska-Przybycień K., Przybycień H.(2021b), *Zastosowania prostych narzędzi informatycznych do wspomagania rozwiązywania problemów, również całkiem niebanalnych w procesie kształcenia matematycznego.* W: Przybyła T.,*Liczby w cyfrowym świecie. Rozmowy o współczesnej edukacji matematycznej dziecka*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań

108.Kołaczek B. (2002), *Dostęp młodzieży do edukacji. Zróżnicowanie. Uwarunkowania. Wyrównywanie szans,* IPiSS, Warszawa.

109.Komarzyniec G. (2002), *Nauczyciel wczoraj i dziś,* „*Wychowawca”,* nr 2.

110.Konarski S. (1955), *Pisma wybrane,* Warszawa.

111.Konarzewski K. (2000), *Jak uprawiać badania oświatowe. Metodologia praktyczna*, Warszawa.

112.Korczak, J. (1978), *Pisma wybrane. Wybór A. Lewin. T. 2.,* Nasza Księgarnia, Warszawa.

113.Korczak, J. (1993), *Jak kochać dziecko. Momenty wychowawcze. Prawo dziecka do szacunku,* Red. Kraków 2001.

114.Korzeniowska W. (2001), *Przemiany edukacyjne w Polsce i na świecie a modele wychowania,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

115.Kość L. (1982), *Psychologia i patopsychologia zdolności matematycznych*, COM PWZMOiW, Warszawa

116.Kot S. (2016), *Historia wychowania, t. 1,* Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

117.Kotlarski K. (1990), *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

118.Kotlarski K. (1995), *Kariery edukacyjne uczniów zdolnych i mniej zdolnych matematycznie*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.

119.Krajewski M. (2006), *Historia wychowania i myśli pedagogicznej. Zarys wykładu,* Wydawnictwo Naukowe Novum, Poznań.

120.Krawcewicz S. (1974), *Kształcenie i doskonalenie nauczycieli. Problemy i tendencje,* Warszawa.

121.Krokiewicz A. (1958), *Sokrates,* Pax, Warszawa.

122.Krońska I. (1985), *Sokrates,* Wiedza Powszechna, Warszawa.

123.Krupa W. (1986), *Uzdolnienia matematyczno- fizyczne a uzdolnienia twórcze młodzieży licealnej. W: W. Panek (red.), Formy i metody pracy z uczniem uzdolnionym i utalentowanym w domu i szkole*, Dział Wydawnictw Filii UW w Białym Stoku, Białystok.

124.Krupa W. (1987), *Zależność między uzdolnieniami matematycznymi a poziomem inteligencji i uzdolnieniami twórczymi.* W: Popek S. (red*), Z badań nad zdolnościami i uzdolnieniami specjalnymi młodzieży*, Wydawnictwo UMCS, Lublin.

125.Krutiecki W. A, (1971), *Zagadnienia ogólne dotyczące struktury zdolności matematycznych.* W: *Zagadnienia psychologii różnic indywidualnych: prace psychologów radzieckich*, red. Strelau J., PWN, Warszawa.

126.Krutiecki W.A. (1968), *Psichołogija matiematiczieskich sposobnostiej szkolnikow, „Proswieszczenije"*, Moskwa.

127.Krygowska Z (1975), *Współczesne tendencje w nauczaniu geometrii,* Journals of the Polish Mathematical Society, T.19, Nr 02.

128.Krygowska Z. (1977), *Zarys dydaktyki matematyki. Cz. 2.,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

129.Książek W. (1999), *Ministerstwo Edukacji Narodowej o uczniu zdolnym,* MEN, Warszawa.

130.Kubiczek B. (2005), *Metody aktywizujące: jak nauczyć uczniów uczenia się*, Wydawnictwo NOWIK, Opole.

131.Kubielski W. W. (2006), *Podstawy pomiaru, konstruowania i ewaluacji testu dydaktycznego,* Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.

132.Kupisiewicz C. (2000), *Dydaktyka ogólna*, Wydawnictwo Impuls, Warszawa.

133.Kupisiewicz C. (2010), *Szkice z dziejów dydaktyki,* Wydawnictwo Impuls, Kraków.

134.Kupisiewicz C., Kupisiewicz M. (2009), *Słownik pedagogiczny*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

135.Kurdybacha Ł. (1948), *Zawód nauczyciela w ciągu wieków*, Czytelnik, Warszawa.

136.Kuźma J. (2005), *Nauka o szkole,* Wydawnictwo Impuls, Kraków.

137.Kwartaklnik "Cracovia Leopolis" (1999), nr 1 (17).

138.Kwaśnica, R. (2004), *Wprowadzenie do myślenia o wspomaganiu nauczycieli w rozwoju.* W: *Z. Kwieciński, B. Śliwerski* (red.), WOM, Wrocław.

139.Kwieciński Z. (2007), *Między patosem a dekadencją. Studia i szkice socjopedagogiczne*, Wydawnictwo Naukowe Dolnośląskiej Szkoły Wyższej Edukacji TWP, Wrocław.

140.Lasota A., Pisarzowska E. (2016*), Pożądane cechy osobowości nauczyciela-pedagoga w ujęciu klasycznych i współczesnych koncepcji*, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN, Kraków.

141.Laznibatová, J. (2005), *Uczeń zdolny na Słowacji – koncepcja opieki na podstawie projektu alternatywnej opieki nad uzdolnionymi dziećmi*. W: (red.) W. Limont, *Kompleksowe wspieranie uczniów uzdolnionych… Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych*, Tom II, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

142.Lee K.H., Kim Y., Lim W. (2020), *Risks of aiming to kill two birds with one stone: the affect of mathematically gifted and talented students in the dual realities of special schooling,* Mathematical thinking and learning 2020, Ahead-Of-Print, 1-20.

143.Leplczyk I., Badura J.A. (1987), *Elementy diagnostyki pedagogicznej,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

144.Lewandowska-Kidoń T. (2009), *Nauczyciel wobec wyzwań współczesnej szkoły.* W: (red.) Popek S.,Winiarz A., *Nauczyciel. Zawód. Powołanie. Pasja*, Wydawnictwo UMCS, Lublin.

145.Lewowicki T. (1986), *Kształcenie uczniów zdolnych.* WSiP, Warszawa.

146.Liljedahl P., Santos-Trigo M., Malaspina U., Bruder R. (2016), *Problem solving in Mathematics Education.* Springer Open, Icme-13 Topical Surveys, Hamburg.

147.Limont W. (2004), *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

148.Limont W. (2005), *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Sopot.

149.Limont W. (2010), *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować,* Gdańskie Wydawnictwo Pedagogiczne, Sopot.

150.Limont W. (2012), *Kształcenie uczniów zdolnych w polskim systemie oświaty – wybrane przykłady.* Referat wygłoszony na międzynarodowej konferencji: Systemowe strategie kształcenia uczniów zdolnych droga edukacji ku przyszłości, Warszawa.

151.Limont W., Cieślikowska J. (2004), *Czy potrzebna jest pedagogika zdolności?* W: (red.) Limont W., *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

152.Łaszczyk J. (2008a), *Uczeń zdolny w zmienionej sytuacji edukacyjnej i społecznej.* W: (red.)Łaszczyk J., Jabłonowska M., *Uczeń zdolny wyzwaniem dla współczesnej edukacji*, Uniwersitas Rediviva, Warszawa.

153.Łaszczyk J. (2008b), *Szanse rozwoju ucznia zdolnego.* W: (red.). Limont W., Cieślikowska J.,Dreszer J., *Zdolność. Talent. Twórczość*, Tom 1, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.

154.Łaszczyk J. (2011*), Kształcenie nauczycieli a pedagogika twórczości*. W: (red.) Łaszczyk J., Jabłonowska M., *Wokół problematyki zdolności*, Uniwersitas Rediviva, Warszawa.

155.Łobocki M. (1984), (1990), *Metody badań pedagogicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

156.Łobocki M. (2000), *Metody i techniki badań pedagogicznych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

157.Łobocki M. (2003), *Metody badań pedagogicznych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

158.Łobocki M. (2006), *Wprowadzenie do metodologii badań pedagogicznych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

159.Łobocki M. (2007), *Wprowadzenie do metodologii badań pedagogicznych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

160.Łoś E., Reszka A. (2009), *Metody nauczania stosowane w kształtowaniu kompetencji kluczowych,* Wydawnictwo Naukowe Wyższej Szkoły Ekonomii i Innowacji, Lublin.

161.Łukasiewicz-Wieleba J. (2013), *Szkoła i nauczyciele wobec uczniów zdolnych*. W: (red.) Jabłonowska M., *Środowisko edukacyjne uczniów zdolnych,* Universitas Rediviva, Warszawa.

162.Magiera E. (2006), *Historyczne konteksty nauczyciela jutra,* Wydawnictwo Marszalek A., Toruń.

163.Makowska K. (2010), *Praca z uczniem zdolnym i słabym na matematyce,* WP ZNM, Kielce.

164.Malenda A. (2001), *O twórcze nauczanie – uczenie się matematyki*, Podkowa Bis, Gdańsk.

165.Markiewicz A., Romanowski A. (2005), *Skrzydlate słowa. Wielki słownik cytatów polskich i obcych,* Wydawnictwo Literackie, Kraków.

166.Maulidiya, M, Nurlaelah, E. (2019), *The effect of problem based learning on critical thinking ability in mathematics education,* IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1157 (2019) 042063.

167.Mazur P. (2012), *Zarys historii szkoły*, WSETiNS, Kielce.

168.Mazur P. (2015), *Zawód nauczyciela w ciągu dziejów*, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Chełm.

169.Mazur P. (2015), *Zawód nauczyciela w ciągu dziejów.* W*: Skrypt dla studentów z historii wychowania*, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie, Chełm.

170.Meighan R. (1991), *Edukacja elastyczna,* Wydawnictwo Stowarzyszenie Nasza Szkoła, Warszawa.

171.Meighan R. (1993), *Socjologia edukacji,* Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.

172.Michalak R. (2011*), Program nauczania w szkolnej rzeczywistości edukacji elementarnej.* W: (red.) Sowińska H., *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej,* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

173.Mikołajczyk M. (2012), *Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa

174.Milerski B., Śliwerski B. (2000), *Leksykon PWN. Pedagogika*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

175.Ministerstwo Edukacji o uczniu zdolnym (1999), Biblioteczka Reformy, Warszawa.

176.Mönks F.J. (2004), *Zdolności a twórczość*. W: (red.) Limont W., *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

177.Mönks F.J. (2012). *Tworzenie europejskiej sieci współpracy w celu poprawienia jakości nauczania wybitnie zdolnych*. *Materiały z międzynarodowej konferencji „Systemowe strategie kształcenia uczniów zdolnych drogą ku edukacji przyszłości*" Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa

178.Mönks F.J., Pflüger, R. (2005b), *Szkolna motywacja uczniów zdolnych – stan rzeczy*, W: (red.) Limont W., Cieślikowska J*., Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych,* Tom 2. Uczeń – Nauczyciel – Edukacja, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

179.Możdżeń S. I. (1995), *Zarys historii wychowania (1918-1939),* Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, Kielce.

180.Możdżeń S.I. (2000), *Historia wychowania 1918-1945,* Biuletyn historii wychowania, Wydawnictwo Stachurski, Kielce.

181.Możdżeń S.I. (2013), *Historia wychowania 1918-1945*, Wydawnictwo Diecezjalne, Sandomierz.

182.Murawski R. (1995), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

183.Murawski R. (2004), *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

184.Mustaffa N., Ismail Z., Tasir Z., Said M. (2016), *The Impacts of Implementing Problem-Based Learning (PBL) in Mathematics: A Review of Literature.* International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences 2016, Vol. 6, No. 12.

185.Muszyński H. (1971), *Wstęp do metodologii pedagogiki,* PWN, Warszawa.

186.Muzioł, E.A. (2005), *Indywidualny programu lub tok nauki w świetle prawa oświatowego i w praktyce szkolnej na przykładzie szkoły muzycznej*. W: (red.) Limont W.,Cieślikowska J., *Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych*, Tom 2. Uczeń – Nauczyciel – Edukacja, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

187.Nakoneczna, D. (1993), *Klasy autorskie w szkołach twórczych*, TST, Warszawa.

188.National system overview on education systems in Europe (2011), Eurydice, European Commission. UNESCO IBE - World Data on Education, 6th edition – Poland.

189.Neapolitański S. (1958), *Zarys dydaktyki matematyki,* PZWS,Warszawa.

190.Newerly I. (1971), *Żywe wiązanie. Wspomnienia o Januszu Korczaku.* Czytelnik, Warszawa.

191.Nęcka E. (1994), *Twórcze rozwiązywanie problemów*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

192.Niemierko B. (2007), *Rozwój jako zdawanie egzaminów,* XIII Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, *Uczenie się i egzamin w oczach uczniów*, Łomża.

193.Niewęgłowski J. (2003), *Janusz Korczak — dziecko i Bóg, Seminare. Poszukiwania naukowe*, Towarzystwo Naukowe Franciszka Salezego, Łomianki.

194.Nikolaev D., Chugunov D. (2012), *The Education System in the Russian Federation*, Education Brief 2012, Washington DC, The World Bank.

195.Nokhatbayeva Rashidkizi K. (2020), *The effects of heuristic teaching methods in mathematics,* Proceedings of 2020 International Young Scholars Workshop held during.

196.Nosal C.S. (1990), *Psychologiczne modele umysłu,* PWN, Warszawa.

197.Nowak S. (1985), *Metodologia badań społecznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

198.Nowak-Łojewska A. (2015*), Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci: poradnik dla nauczycieli klas I- III*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

199.Obuchowski, K. (1985), *Adaptacja twórcza*, Książka i Wiedza, Warszawa.

200.Okoń W. (1984), *Słownik pedagogiczny,* PWN, Warszawa.

201.Okoń W. (1995), (2017) *Nowy słownik pedagogiczny*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

202.Okoń W. (1959), *Osobowość nauczyciela. Rozprawy J. Wł. Dawida, Z. Mysłakowskiego,* Państwowe Zakłady Zagadnień Szkolnych, Warszawa.

203.Olechnicki K. (2000), *Słownik socjologiczny*, Graffiti BC, Toruń.

204.Olubiński A. (2001), *Podmiotowość roli nauczyciela i ucznia w świetle analiz opinii społecznych*, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń.

205.Orlikowski C. (2008), *Matematyka i sztuka*, Studia Elbląskie 9.

206.Painter, F. (1993), *Kim są wybitni,* WSiP, Warszawa.

207.Pankiewicz M. (2007), *Style komunikacji a preferencje wartości uczniów zdolnych,* „Studia z Psychologii" Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, 14.

208.Philipp R.A, Siegfried J.Z., Thanheiser E. (2019), *Seeing Mathematics through the Lens of Children's Mathematical Thinking,* Perspective on the Development of Mathematical Knowledge for Teaching in: International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1.

209.Pilch T. (1971), *Metodologia pedagogicznych badań środowiskowych*, Ossolineum, Warszawa

210.Pilch T. (1995), (1998), *Zasady badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

211.Pilch T. (2003), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku. T. 3*., Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

212.Pilch T. (2005), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku. T. 1.,* Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

213.Pilch T. (2005), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku. T. 2,* Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

214.Pilch T. (2005), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku. T. 4*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

215.Pilch T., T. Bauman (2001), *Zasady badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

216.Piotrowski E. (1998), Pedagogika dzieci zdolnych i uzdolnionych. W: (red.) Sękowska Z.,Wprowadzenie do pedagogiki specjalnej, Wydawnictwo WSPS, Warszawa.

217.Piotrowski E. (2003), Kształcenie specjalne dzieci wybitnie zdolnych. W: (red.) Dykcik W., *Pedagogika specjalna*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

218.Polya G. (1975), *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Springer, Berlin.

219.Polya G. (2009), *Jak to rozwiązać?* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

220.Polya, G.(1975) *Odkrycie matematyczne*, Warszawa: WNT.

221.Porzucek-Miśkiewicz M. (2013), *Samopoczucie ucznia zdolnego w szkole*. W: (red.) Jabłonowska M., Środowisko edukacyjne uczniów zdolnych, Universitas Rediviva, Warszawa.

222.Przybyła T.,_ Bronikowski M., Bzdęga B., Cichy I.,Hofman J, Hrybiuk O., Kaiser I., Kolczyńska- Przybycień K. , Rokita A. ,Klichowski M. (2020), *Dziecięca matematyka*. W: Krauze-Sikorska H., Klichowski M., *Pedagogika dziecka*, Podręcznik akademicki (pp. 119-137), Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

223.Pufal-Struzik I. (2009), *Rozwijanie samowiedzy i samorealizacji uczniów zdolnych jako ważne zadanie szkoły.* W: (red.) Gumuła T.,Dyrda T., *Szkoły. Nauczyciele. Uczniowie. Dyskusja o programie, metodzie, uczeniu się w Europie,* Wydawnictwo Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego im. Jana Kochanowskiego, Kielce.

224.Puślecki W. (1985), *Metody badań pedagogicznych*, ODN, Kalisz.

225.Raszka R. (2013), *Rozwijanie myślenia matematycznego dziecka w przekonaniach nauczycieli i kandydatów na nauczycieli*, Oficyna Wydawnicza Im S. Neapolitański. W: *Zarys dydaktyki matematyki*, PZWS, Warszawa.

226.Ratuś B. (1974), *Licea pedagogiczne w Polsce Ludowej (1944-1970),* Warszawa-Poznań

227.Reclik R. (2015), *Wspieranie potencjału twórczego uczniów w wieku wczesnoszkolnym podczas rozwiązywania problemów matematycznych.* [w]: *Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*, Red. Skibska J., Wojciechowska J., Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.

228.Renzulli J.S., Reis S.M (2000), *The Schoolwide Enrichment Model*. W: (red.) F.J. Monks, R.J. Sternberg, R.F. Subotnik. International Handbook of Giftedness and Talent, Oxford, Elsevier.

229.Robinson D, (2015), *Core Maths: A New Opportunity.* Journal of Core Maths, Bishop Luffa School Chichester, PO19 3LT.

230.Rocznik Naukowo-Dydaktyczny (1957), Z. 6*, Zagadnienie Kształcenia Nauczycieli w Szkołach Wyższych*, Kraków.

231.Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej.

232.Rubacha K. (2003), *Metody zbierania danych w badaniach pedagogicznych.* W: *Pedagogika. Podręcznik akademicki, t. 1,* pod red. Kwiecińskiego Z. i Śliwerskiego B*.,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

233.Rusak A. (2007), *Informacja i wiedza w życiu współczesnych społeczeństw – od poliprofesjonalizacji do edukacji ustawicznej*. W: (red.). W. Horyń, J. Maciejewski. Andragogika w ujęciu interdyscyplinarnym, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław.

234.Semadeni Z. (2016), *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

235.Semerádová S. (2015), *Didactical situations in building children`s ideas about matematical concepts in preschool education. „Didactica Mathematicae*", T. 37.

236.Sękowski A. (1998), *Redakcja Przeglądu Psychologicznego. Zeszyt tematyczny*, Psychologia zdolności, 41, 1 / 2.

237.Sękowski A. (2005), *Rozwijanie inteligencji i mądrości w kształceniu i wspomaganiu ucznia szczególnie zdolnego*. W: (red.) Limont W., Cieślikowska J., *Wybrane zagadnienia edukacji uczniów zdolnych*, Tom 2. *Uczeń – Nauczyciel – Edukacja*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

238.Sękowski, A. (1997). *Wybrane formy pracy z uczniami zdolnymi w Europie.* Acta Universitatis Nicolai Copernici. Pedagogika XXII Nauk Humanistyczno-Społeczne, Zeszyt 314.

239.Shaughnessy J. J. (2002), *Metody badawcze w psychologii*, Gdańsk.

240.Siekańska M. (2004), *Koncepcje zdolności a identyfikacja uczniów zdolnych.* W: Sękowski A. (red.) Psychologia zdolności. Współczesne kierunki badań. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

241.Sitarska-Niemierko W. (2004), *Rozumienie matematyki przez przyszłe nauczycielki klas I-III. W: Diagnostyka edukacyjna. Teoria i praktyka. Red. B. Niemierko.* Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjnej, Kraków.

242.Skoczek J. (1965), *Rozwój szkolnictwa w Polsce średniowiecznej.* W: *Historia wychowania, t. 1, red.* Kurdybacha Ł., Warszawa.

243.Słownik socjologii i nauk społecznych (2008), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

244.Smith D.D. (2009), *Pedagogika specjalna.* Tom 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Wydawnictwo APS, Warszawa.

245.Smołalski A. (1997), *Wizje nauczyciela w polskiej myśli pedagogicznej do 1939 roku,* Studia i Monografie Uniwersytet Opolski.

246.Sobol E. (1995), *Mały słownik języka polskiego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

247.Sowińska, H. (2004), *Szkoła jako miejsce życia i rozwoju dziecka.* W: (red.) Sowińska H., Michalak R., *Edukacja elementarna jako strategia zmian rozwojowych,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

248.Spengler O. (1917), *Zmierzch zachodu*, Monachium, fragmenty rozdziału *O znaczeniu liczb,* przeł. Marzęcki J. (2001), Warszawa.

249.Stankiewicz R. (2002)*, Nauczyciel w czasach II Rzeczypospolitej.* W: *Nauczyciel – opiekun – wychowawca (tradycje – teraźniejszość – nowe wyzwania),* red. Stankiewicz R., Poznań-Zielona Góra.

250.Stockero S.L., Rupnow R.L., Pascoe A.E. (2017), *Learning to notice important student mathematical thinking in complex classroom interactions*, Teaching and Teacher Education, Volume 63, Pages 384-395.

251.Su Fang F.H., Ricci, Frederick A.; Mnatsakanian, Mamikon (2016), *Mathematical Teaching Strategies: Pathways to Critical Thinking and Metacognition,* International Journal of Research in Education and Science*,* v2 n1 p190-200 Win 2016.

252.Suchodolski B. (1982), *Pedagogika. Podręcznik dla kandydatów na nauczycieli,* PWN, Warszawa.

253.Sułek A. (1986), *Badania eksperymentalne i quasi-eksperymentalne.* W: *Metody analizy socjologicznej*, Instytut Socjologii UW, Warszawa.

254.Szabo K. Z., Körtesi P., Guncaga, J., Szabo D., Neag R. (2020*), Examples of Problem-Solving Strategies in Mathematics Education Supporting the Sustainability of 21st-Century Skills,* Sustainability.

255.Szmidt K.J. (2018), *Edukacyjne uwarunkowania rozwoju kreatywności,* Wydawnictwo Uniwersytetu łódzkiego, Łódź.

256.Sztumski J. (1984), *Wstęp do metodologii i technik badań społecznych,* PWN, Warszawa.

257.Sztumski J. (1995), *Wstęp do metodologii i technik badań społecznych,* Wydawnictwo Śląsk, Katowice.

258.Szuman S. (1947), *Talent pedagogiczny*, Wyd. Instytutu Pedagogicznego, nakładem J. Nawrockiego, Katowice.

259.Szumna D. (2009), *Pytania w procesie edukacyjnym. Z obserwacji szkolnej rzeczywistości.* W: (red.) Gumuła T., Dyrda T., *Szkoły. Nauczyciele*, *Uczniowie. Dyskusja o programie, metodzie, uczeniu się w Europie,* Wydawnictwo Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego im. Jana Kochanowskiego, Kielce.

260.Szumski G. (1995), *Dobór i kształcenie uczniów zdolnych. Studium porównawcze o legitymizacji instytucji edukacyjnych*, Wydawnictwo WSPS, Warszawa.

261.Szwed T. (2018), *George Polya i jego dobre rady dla nauczycieli matematyki na tle wybranych koncepcji efektywnego nauczania* .W:Ogrody Nauk i Sztuk nr 2018 (8).

262.Tambunan H. (2018), *Impact of Heuristic Strategy on Students' Mathematics Ability in High Order Thinking.* International Electronic Journal of Mathematics Education, 2018, Volume 13, Issue 3, pp. 321-328.

263.Tiepłow B. (1951), *Psychologia,* Wydawnictwo Nasza Księgarnia, Warszawa.

264.Tokarz A., Całek A (2004), *Metoda psychobiograficzna w badaniu procesu twórczego.* W: Popek S. (red.) Twórczość w teorii i praktyce, Wyd. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.

265.Toramann C., Orakci S., Aktan O. (2020), Analysis of the Relationships between *Mathematics Achievement, Reflective Thinking of Problem Solving and Metacognitive Awareness,* International Journal of Progressive Education, Volume 16 Number 2, 2020.

266.Trochimiak M. (2010), *Model pracy z uczniem ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi w przedszkolu, szkole podstawowej, gimnazjum i szkole ponadgimnazjalnej*. W: *Podniesienie efektywności kształcenia uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi*, MEN, Warszawa.

267.Turnau S. (1995), *Dokąd zmierza szkolne nauczanie matematyki?*, Matematyka, nr 3.

268.Turska D. (2006), *Skuteczność ucznia. Od czego zależy udana realizacja wymogów edukacyjnych,* Wydawnictwo UMCS, Lublin.

269.Turska D. (2009), *Syndrom wypalenia zawodowego nauczycieli – problem indywidualny i społeczny*. W: (red.) Popek S., Winiarz A., *Nauczyciel. Zawód. Powołanie. Pasja*, Wydawnictwo UMCS, Lublin.

270.Tyl. A. (2006), Między schematem a poszukiwaniem w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.

271.Tyszkowa M. (1987), *Rozwój człowieka dorosłego w świetle wybranych koncepcji teoretycznych psychologii*. Oświata Dorosłych, 2.

272.Ustawa z dnia 27 kwietnia 1972 r. Karta praw i obowiązków nauczyciela, DzU 1972, nr 16, poz. 115.

273.Wąsowicz. E. (1976), *Informator o zakładach kształcenia nauczycieli w latach 1944-1971*, Warszawa.

274.Wierzbicki A.P. (2000), *Podstawy optymalizacji,* Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.

275.Wierzbicki A.P. (2005), *Najnowsze tendencje w tworzeniu wiedzy; L.W. Zacher, Przyszłość myślenia strategicznego w społeczeństwie opartym na wiedzy. „Przyszłość. Świat – Europa - Polska”*. W: *Biuletyn Komitetu Prognoz „Polska 2000 Plus*” przy Prezydium PAN, nr 2.

276.Wierzchowska-Konera B. (1981), *Szkolnictwo średnie ogólnokształcące w województwie lubelskim w latach 1918-1939*, Biblioteka UMCS, Lublin.

277.Wilski, M. (2011), *Osobowość i specyficzne problemy psychologiczne nauczycieli.* W: Kowalik S. (red.), *Psychologia ucznia i nauczyciela,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

278.Wiłkomirska A. (2005), *Ocena kształcenia nauczycieli w Polsce*, Instytut Spraw Publicznych, Warszawa.

279. Włoch S. (2005), *W poszukiwaniu innowacyjnego modelu kształcenia nauczycieli*. W: *Polski system edukacji po reformie 1999 roku. Stan, perspektywy, zagrożenia*, red. Andrzejak Z., Kacprzak L., Pająk K., Poznań — Warszawa.

280. Włodarski Z. (1998a), *Nauczyciel. Relacje między nauczycielami a uczniami,* W: (red.) Szewczuk W., *Encyklopedia psychologii*, Fundacja Innowacji, Warszawa.

281. Włodarski Z. (1998b), *Nauczyciel. Różnice indywidualne w nauczaniu i wychowaniu*. W: (red.) Szewczuk W., *Encyklopedia psychologii*, Fundacja Innowacji, Warszawa.

282. Włodarski Z., Hankała, A. (2004), *Nauczanie i wychowanie jako stymulacja rozwoju człowieka*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.

283. Włodarski, Z. (1992), *Człowiek jako wychowawca i nauczyciel*, WSiP, Warszawa.

284. Wojciechowska K. (1994), *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania.* W: Diagnostyka edukacyjna. Red. Niemierko B., Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.

285. Wojnowska M. (2007), *Między przekazem a odkryciem*, Wydawnictwo Impuls, Kraków.

286. Wojtyński W. (1969), *Kształcenie nauczycieli w pierwszym ćwierćwieczu Polski Ludowej, „Przegląd Historyczno-Oświatowy*", nr 3.

287. Wołoszyn-Spirka W. (2001), *W poszukiwaniu realistycznych podstaw moralnego postępowania nauczyciela,* Akademia Bydgoska- Wydawnictwo uczelniane, Bydgoszcz.

288. Wrona L. (2004), *Uzdolnienia matematyczne.* W: Pilecka W.,Rutkowska G., Wrona L. (red), *Podstawy psychologii-podręcznik dla studentów kierunków nauczycielskich,* Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

289. Yayuk E., Husamah H. (2020), *The Difficulties of Prospective Elementary School Teachers in Item Problem Solving for Mathematics: Polya's Steps,* Journal for the Education of Gifted Young Scientists, Volume 8, Issue 1.

290. Zaczyński W. (1995), *Praca badawcza nauczyciela*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

291. Zaczyński W. P. (1990), *Uczenie się przez przeżywanie*, WSiP, Warszawa.

292. Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej Rok LII (2011), Nr 2 (185).

293. Zoglowek, H. (2011), *Actual aspects of gifted and talented education in Norway.* W: (red.) Łaszczyk J., Jabłonowska M., *Wokół problematyki zdolności*, Wydawnictwo Uniwersitas Rediviva, Warszawa.

294. Zoglowek, H. (2013), *Gifted and Talented in Norway – Blessing or Curse?* W: (red.) Jabłonowska M., *Uczeń zdolny i jego edukacja. Koncepcje. Badania. Praktyka.* Universitas Rediviva, Warszawa.

295. Zych A.A. (2003), *Błoński Paweł Piotrowicz*. W: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*, t. 1, red. Pilch T., Warszawa.

296. Żebrowska M. (1966), *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

NETOGRAFIA

1. Czajkowska A. (2007), *„Likwidują" najzdolniejszych w SP nr 3*. http://forum.gazeta.pl/forum/w,27463,64280504,64280504,Likwiduja_najzdolniejszych_w_SP_nr_3. Html [data dostępu: 20.09. 2020]
2. Dragan A. (2010), *Pomoc państwa i instytucji pozarządowych dla dzieci zdolnych,* Opracowanie tematyczne. Kancelaria Senatu, Warszawa, Na: http://www.senat.gov.pl/gfx/senat/pl/senatopracowania/89/plik/ot-577.pdf [data dostępu: 16.07. 2020]
3. Duda R., Łukaszewicz J.<https://www.polskieradio.pl/39/156/Artykul/2245583,Hugo-Steinhaus-geniusz-matematyczny> [data dostępu: 07.08. 2020]
4. Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej. Zalecenie Rady z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=en. [data dostępu: 29.07.2020]
5. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2018), Krótko o kryzysie w matematycznym kształceniu dzieci i jego konsekwencjach", Warszawa, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf> [data dostępu: 02.03. 2019]
6. Grzegorzewska, M. (1946), *Listy do młodego nauczyciela*, <http://prototo.pl/wp-content/uploads/2012/09/>[data dostępu: 20.06. 2020]
7. Jabłecka, J. (2021) *Filozoficzna refleksja nad matematyką – jako nauką - ujętą w kontekście historycznym.*< https://szkolnictwo.pl/index.php?id=PV1053>[data dostępu: 10.02. 2020]
8. Józefiak, B. (2014), Gazeta Wrocławska, <https://gazetawroclawska.pl/pogrzeb-aleksandra-dobrzyckiego-na-sepolnie-pochowano-bylego-dyrektora-xiv-lo-zdjecia/ar/3405131>[data dostępu: 13.09. 2020]
9. Kolczyńska-Przybycień K., Przybycień H., (2021a), *Propozycje rozwiązań dydaktycznych i metodycznych wspomagających nauczanie matematyki w klasach IV-VIII szkoły podstawowej*, ORE, MEN, Warszawa <www.doskonaleniewsieci.pl/o_ore.aspx?mm=230> [data dostępu:17.10. 2021]
10. Kostecki R.P., Krótka historia matematyki, <https://docer.pl/doc/5vne0s>[data dostępu: 20.09. 2019]
11. Krzyżewski T. (1999), <https://letheko.pl/index.php/ludzie/stefan-banach>[data dostępu: 21.09. 2020]
12. III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, <https://www.lo3.gdynia.pl>[data dostępu: 03.04. 2020]
13. V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, <https://v-lo-krakow.edupage.org/>[data dostępu: 19.05. 2019]
14. XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie,< http://13lo.szczecin.pl/>[data dostępu: 07.09. 2020]

15. XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, <https://lo14.wroc.pl>[data dostępu: 25.09. 2020]

16. Leśniak J., Kształcenie nauczycieli matematyki, <https://rep.up.krakow.pl/xmlui/bitstream/handle/11716/3446/09--Ksztalcenie-nauczycieli-matematyki--Lesniak.pdf?sequence=1&isAllowed=y>[data dostępu: 13.04. 2020]

17. Matematyczne zaduszki, Wrocławski Portal Matematyczny, <http://matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/matematyczne-zaduszki>[data dostępu: 03.09. 2019]

18. Mönks, F.J., Pflüger, R. (2005). *Gifted Education in 21 European Countries: Inventory and Perspective*. Nijmegen: Radboud University: <https://www.bmbf.de/upload_filestore/pub/gifted_education_21_eu_countries.pdf>[data dostępu: 15.03. 2020]
19. Olimpiada Matematyczna Juniorów, <https://omj.edu.pl/komitety>[data dostępu: 08.08. 2020]
20. Rotherham, A.J. (2013), *The Illusion of the 'Gifted' Child. Why our policies for good students really aren't that smart,* Na: <http://ideas.time.com/2013/04/25 /the-illusion-of-the-gifted-child/>[data dostępu: 20.09. 2021]
21. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej. <http://www.dziennikustaw.gov.pl/DU/2017/356>. [data dostępu: 29.07.2020]

22. Słynni matematycy, <http://matematyka-gim.neostrada.pl/zawartosc/matematycy.html>[data dostępu: 09.09. 2020]

23. Słynny reportaż, <http://xivlo.we.wroclawiu.net/reportaz.html>[data dostępu: 21.10. 2020]

24. Staszic XIV Liceum Ogólnokształcące, <https://staszic.waw.pl>[data dostępu: 07.11. 2020]

25. Szkoła Podstawowa nr 221 z Oddziałami Integracyjnymi im. Barbary Bronisławy Czarnowskiej, <https://sp221.edu.pl/>[data dostępu: 20.02. 2020]

26. Uczelnie pedagogiczne, MNiSW, <www.nauka.gov.pl/szkolnictwo-wyzsze/system-szkolnictwa-wyzszego>[data dostępu: 02.12. 2020]

27. Wojciechowska-Narloch J. „Nowości", 15 czerwca 2016 r. <https://nowosci.com.pl/z-zalobnej-karty-henryk-pawlowski-genialny-nauczyciel-matematyki-i-wychowawca-setek-olimpijczykow-nie-zyje/ar/10809866>[data dostępu: 10.04. 2020]

28. Zespół Szkół nr 14 we Wrocławiu, Kosmos, <https://docplayer.pl/5613137-Aleksander-dobrzycki.html>[data dostępu: 10.02. 2020]

29. Zhilin, D.M. (2011). *Work with gifted children in Russia.* Na: <http://www.giftedchildren.org.nz/national/article9.php>[data dostępu: 28.10. 2020]

SPIS TABEL

SPIS ANEKSÓW

ANEKS 1

Kinga Kolczyńska-Przybycień

„Matematyka alfabetem myślenia”

Program nauczania matematyki
dla drugiego etapu edukacyjnego
(klasy IV – VIII szkoły podstawowej)

Program zbieżny z rozporządzeniem Ministra Edukacji
Narodowej z dn. 14 lutego 2017 r. w sprawie podstaw programowych

SPIS TREŚCI

UWAGI WSTĘPNE

Opracowując swój program ***Matematyka alfabetem myślenia*** opierałam się na programie „*Matematyka z plusem*" Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego. Program powstał dzięki wieloletniej obserwacji i doświadczeniu w pracy z uczniami utalentowanymi matematycznie. Jest on polecany do realizacji w klasach , w których uczniowie wykazują szczególne zainteresowanie przedmiotem. Ilość wprowadzonych dodatkowych treści sugeruje zwiększenie tygodniowego wymiaru godzin matematyki od klasy VI do klasy VIII o jedną godzinę lekcyjną więcej. Pozycje programu „*Matematyka z plusem*" zmodyfikowałam i wzbogaciłam o treści , które są pomocne a czasem nawet niezbędne w kształceniu uczniów, którzy chcą wiązać swe przyszłe plany edukacyjne z naukami ścisłymi. Program ten poszerza podstawę programową o m.in, następujące treści: elementy logiki i teorii mnogości, elementy teorii liczb, równania diofantyczne, niektóre równania i nierówności stopnia wyższego niż 1, niektóre elementy geometrii płaskiej nie występujące w tradycyjnym kanonie nauczania na tym etapie edukacyjnym. Te dodatkowe treści zostały dobrane w ten sposób, aby wzbudzić u uczniów ciekawość poznawczą i wyobraźnię oraz rozwinąć umiejętność abstrakcyjnego myślenia. Choć zagadnienia te są częścią matematyki „wyższej" to w istocie nie są pojęciowo skomplikowane, rozwijają wyobraźnię ucząc abstrakcyjnego myślenia i nie ma przeszkód natury merytorycznej, aby uczeń na tym etapie edukacyjnym nie był w stanie pojąć ich głównej idei. Ich walory i znaczenie w rozwoju talentu matematycznego zostały potwierdzone osiągnięciami moich uczniów, m.in. w Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, Wojewódzkim Konkursie Matematycznym, Wielkopolskiej Lidze Matematycznej Gimnazjalistów, Kangurze, Złotej Żabie i wielu innych konkursach matematyczno- informatycznych.
Matematyka jest to nauka, która poszukuje związków lub ich braków pomiędzy obiektami, posługując się regułami logicznego rozumowania. Zatem niezwykle ważne w nauczaniu matematyki powinno być rozwijanie tegoż logicznego rozumowania i kształtowanie wyobraźni u uczniów. Uczniowie już w młodym wieku są zdolni do przeprowadzania nawet dość skomplikowanych i abstrakcyjnych rozumowań, co świadczy o tym, że nauczanie matematyki w szkole nie musi stać w opozycji do głównej idei matematyki jako nauki.
Jeden z największych matematyków w historii Stefan Banach wypowiedział następujące słowa:
„Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty,
matematyk wybitny – analogie między faktami,
zaś matematyk genialny – analogie między analogiami."
Na etapie konkretnym, kształtowanie i rozwój tych umiejętności powinien odbywać się poprzez odniesienie do konkretnych obiektów. Wszelkie wprowadzone w tym czasie pojęcia czy zagadnienia powinny być powiązane z obiektami występującymi w otaczającym świecie. Na etapie formalnym natomiast, kiedy to u uczniów następuje rozwój umiejętności abstrakcyjnych można prowadzić już rozumowania z wykorzystaniem obiektów abstrakcyjnych, nawet dość skomplikowane.

Obudową dydaktyczną tego programu są :podręczniki „*Matematyka z plusem*" oraz opracowany przeze mnie autorski Skrypt.

Program ten uwzględnia wszystkie treści, zadania i umiejętności zawarte w *Podstawie programowej*. Jest także zgodny z celami i zadaniami wynikającymi z tej podstawy.

Może być on zatem realizowany jako kontynuacja dowolnego programu zgodnego z podstawami programowymi dla I etapu edukacyjnego. Wszystkie dodatkowe treści poszerzające *Podstawę programową* nauczania matematyki w szkole podstawowej zostały zapisane „wytłuszczonym” drukiem, te z kolei, które są elementami *Podstawy programowej* a które zostały przesunięte z klasy wyższej do niższej zostały zapisane kursywą. Należy więc w szczególności zwrócić na nie uwagę, gdy program nie będzie realizowany od klasy IV, tylko wyższej, by nie pominąć żadnych koniecznych do realizacji treści.

Program ułożony został zgodnie z zasadą spiralności. Przez powtarzanie zagadnień na coraz wyższym poziomie nauczyciel ma możliwość utrwalania i pogłębiania wiedzy. Treści nauczania zostały podzielone między poszczególne klasy tak, aby wymagania podstawowe i wyższe dla poszczególnych klas zostały dostosowane do możliwości percepcyjnych i poziomu intelektualnego uczniów przy jednoczesnym szerokim rozwoju rożnych obszarów .

CELE EDUKACYJNE W KLASACH IV-VI

CELE EDUKACYJNE — WYCHOWANIE

Rozwijanie podstawowych umiejętności matematycznych:

- Umiejętności sprowadzania nieznanych wcześniej uczniom zagadnień matematycznych do poznanych zagadnień i skuteczne ich rozwiązywanie,
- Wykształcenie u uczniów sprawności w posługiwaniu się w miarę szerokim zakresem technik matematycznych i odpowiedni ich dobór w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień,
- Rozwijanie pamięci oraz umiejętności myślenia abstrakcyjnego i logicznego rozumowania.
- Rozwijanie umiejętności czytania tekstu ze zrozumieniem. Przygotowanie do korzystania z tekstów dotyczących różnych dziedzin wiedzy oraz tekstów użytkowych.
- Rozwijanie umiejętności interpretowania informacji.
- Rozwijanie zdolności i zainteresowań matematycznych.
- Uczenie dostrzegania prawidłowości matematycznych w otaczającym świecie.
- Kształtowanie umiejętności stosowania schematów, symboli literowych i rysunków przy rozwiązywaniu różnych zadań i problemów w sytuacjach codziennych.
- Wzbudzenie wśród uczniów zamiłowania do matematyki , ukazanie jej piękna.
- Kształtowanie wyobraźni przestrzennej.
- Rozwijanie umiejętności korzystania z definicji i twierdzeń.
- Przygotowanie do korzystania z nowych technologii informacji.

Rozwijanie osobowości

- Kształtowanie pozytywnego nastawienia do podejmowania wysiłku intelektualnego oraz postawy dociekliwości.
- Wyrabianie nawyku obserwacji i eksperymentowania.
- Rozwijanie samodzielności w poszukiwaniu i zdobywaniu informacji.
- Nauczanie dobrej organizacji pracy, wyrabianie systematyczności, pracowitości i wytrwałości.
- Rozwijanie umiejętności współdziałania w grupie.
- Nauczanie przedstawiania rozwiązań problemów i zadań w sposób czytelny.
- Wyrabianie nawyków sprawdzania otrzymanych odpowiedzi i korygowania błędów.
- Rozwijanie umiejętności prowadzenia dyskusji, precyzyjnego formułowania problemów i argumentowania.

SZCZEGÓŁOWE CELE EDUKACYJNE — KSZTAŁCENIE

KLASA IV

Rozwijanie sprawności rachunkowej

♦ Wykonywanie jednodziałaniowych obliczeń pamięciowych na liczbach naturalnych.
♦ Stosowanie reguł kolejności wykonywania działań.
♦ Porównywanie liczb naturalnych.
♦ Dzielenie z resztą liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe.
♦ Stosowanie algorytmów dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb naturalnych sposobem pisemnym.
♦ Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych o jednakowych mianownikach.
♦ Stosowanie algorytmów dodawania i odejmowania ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym.

Kształtowanie sprawności manualnej i wyobraźni geometrycznej

♦ Rozpoznawanie i rysowanie prostych prostopadłych i prostych równoległych.
♦ Mierzenie odcinków i kątów.
♦ Rysowanie odcinków i prostokątów w skali.
♦ Rysowanie siatek prostopadłościanów i klejenie modeli.
♦ Wykorzystanie znajomości geometrii w sytuacjach praktycznych.

Kształtowanie pojęć matematycznych i rozwijanie umiejętności posługiwania się nimi

♦ Posługiwanie się systemem dziesiątkowym.
♦ Posługiwanie się systemem rzymskim.
♦ Kształtowanie pojęcia ułamka zwykłego.
♦ Kształtowanie pojęcia ułamka dziesiętnego.
♦ Rozumienie i używanie pojęć związanych z arytmetyką: suma, różnica, iloczyn, iloraz, kwadrat i sześcian liczby, cyfra, oś liczbowa, ułamek zwykły, ułamek właściwy, ułamek niewłaściwy, liczba mieszana, ułamek dziesiętny.
♦ Rozumienie i używanie pojęć związanych z geometrią: punkt, prosta, półprosta, odcinek, kąt, kąt prosty, kąt ostry, kąt rozwarty, prostokąt, kwadrat, koło, okrąg, promień, średnica, cięciwa, centymetr kwadratowy, metr kwadratowy, hektar, ar, prostopadłościan, sześcian, wierzchołek, krawędź i ściana prostopadłościanu, siatka prostopadłościanu.

Rozwijanie umiejętności stosowania matematyki

♦ Rozwiązywanie nieskomplikowanych zadań tekstowych (w tym zadań dotyczących porównywania różnicowego i ilorazowego).
♦ Korzystanie z informacji podanych za pomocą tabel.
♦ Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy i pola.
♦ Zamiana jednostek (np. kilometrów na metry, metrów na centymetry, kilogramów na gramy) oraz zapisywanie wyrażeń dwumianowanych w postaci ułamków dziesiętnych.
♦ Posługiwanie się skalą przy odczytywaniu odległości z mapy i z planu.
♦ Obliczanie pól i obwodów prostokątów oraz pól powierzchni prostopadłościanów.

KLASA V

Rozwijanie sprawności rachunkowej

♦ Rozwijanie sprawności nabytych w klasie czwartej.
♦ Wykonywanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb naturalnych w pamięci i sposobem pisemnym oraz stosowanie reguł kolejności wykonywania działań.
♦ Stosowanie cech podzielności liczb.
♦ Skracanie i rozszerzanie ułamków, zamiana liczb mieszanych na ułamki niewłaściwe i ułamków niewłaściwych na liczby mieszane, porównywanie ułamków zwykłych, dodawanie i odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych i liczb mieszanych, obliczanie ułamka danej liczby.
♦ Porównywanie ułamków dziesiętnych, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym.
♦ Szacowanie wyników działań.
♦ Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych.

Kształtowanie sprawności manualnej i wyobraźni geometrycznej

♦ Rozwijanie sprawności nabytych w klasie czwartej.
♦ Rozpoznawanie i rysowanie różnych rodzajów trójkątów i czworokątów.
♦ Rozpoznawanie i rysowanie graniastosłupów prostych.
♦ Wskazywanie w graniastosłupach par ścian oraz par krawędzi prostopadłych i równoległych.

Kształtowanie pojęć matematycznych i rozwijanie umiejętności posługiwania się nimi

♦ Rozwijanie intuicji związanych z pojęciami matematycznymi poznanymi w klasie czwartej.
♦ Kształtowanie intuicji związanych z liczbami całkowitymi.
♦ Rozumienie i używanie nowych pojęć związanych z arytmetyką: wielokrotność liczby, dzielnik liczby, liczba pierwsza, liczba złożona.
♦ Rozumienie i używanie nowych pojęć związanych z geometrią: kąt półpełny, kąt pełny, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe, trójkąt ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny, równoboczny i równoramienny, równoległobok, romb, trapez, trapez prostokątny, trapez równoramienny, wysokość trójkąta, równoległoboku i trapezu.

Rozwijanie umiejętności stosowania matematyki

♦ Rozwiązywanie zadań tekstowych.
♦ Korzystanie z informacji podanych za pomocą tabel.
♦ Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy, pola i objętości, zamiana jednostek.
♦ Zapisywanie wyrażeń dwumianowanych w postaci ułamków dziesiętnych.
♦ Posługiwanie się liczbami (w szczególności ułamkami dziesiętnymi) w prostych sytuacjach związanych z życiem codziennym.
♦ Obliczanie pól i obwodów trójkątów i czworokątów oraz objętości graniastosłupów prostych.
♦ Sprawdzanie, czy dana liczba jest pierwsza za pomocą Sita Eratostenesa, rozpoznawanie liczb pierwszych oraz liczb złożonych w zakresie 1-200 rozkładanie liczb 1-40 000 na czynniki pierwsze, stosowanie cech podzielności liczb naturalnych przez 2, 3, 5, 7, 9 i 10 , stosowanie Zasadniczego Twierdzenia Arytmetyki, Twierdzenia o rozkładzie liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych, stosowanie algorytmu wyznaczania NWD i NWW liczb naturalnych oraz stosowanie ich podstawowych własności , stosowanie Algorytmu Euklidesa.

KLASA VI

Rozwijanie sprawności rachunkowej
♦ Rozwijanie sprawności nabytych w klasie piątej.
♦ Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (wielodziałaniowych), w których występują liczby całkowite, z zastosowaniem reguł kolejności wykonywania działań.
♦ Wykonywanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb wymiernych.
♦ Zaokrąglanie liczb i szacowanie wyników działań.

Kształtowanie sprawności manualnej i wyobraźni geometrycznej
♦ Rozwijanie sprawności nabytych w klasie piątej.
♦ Konstruowanie figur za pomocą cyrkla i linijki.

Kształtowanie pojęć matematycznych i rozwijanie umiejętności posługiwania się nimi
♦ Rozwijanie intuicji związanych z pojęciami poznanymi w klasie piątej.
♦ Używanie i rozumienie pojęcia liczby wymiernej i niewymiernej.
♦ Posługiwanie się kartezjańskim układem współrzędnych.
♦ Zagadnienie triangulacji wielokątów-umiejętność obliczania pola dowolnych wielokątów oraz pola dowolnych wielościanów na podstawie pomiarów.
♦ Obliczanie pól figur o wierzchołkach w punktach kratowych za pomocą wzoru Picka.

Rozwijanie umiejętności posługiwania się symbolami literowymi
♦ Rozumienie i używanie pojęć związanych z algebrą: wyrażenie algebraiczne, wartość wyrażenia algebraicznego, liczba spełniająca równanie.
♦ Budowanie wyrażeń algebraicznych i rozwiązywanie równań.

Rozwijanie umiejętności stosowania matematyki
♦ Rozwiązywanie zadań tekstowych (w tym także zadań wymagających umiejętności zapisania i rozwiązania prostego równania).
♦ Odczytywanie danych podanych za pomocą tabel, diagramów i wykresów, porządkowanie i przedstawianie danych.
♦ Posługiwanie się kalkulatorem przy wykonywaniu obliczeń (w tym także przy obliczaniu wartości wyrażeń) oraz przy sprawdzaniu wyników szacowania.
♦ Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy, pola (w tym ar i hektar) i objętości, zamiana jednostek.
♦ Rozwiązywanie zadań dotyczących prędkości, drogi i czasu.
♦ Zaokrąglanie liczb wymiernych i niewymiernych z zadaną dokładnością.
♦ Odczytywanie współrzędnych punktów w układzie współrzędnych, obliczanie długości odcinków i pola figur w układzie współrzędnych .
♦ Konstruowanie sześciokąta foremnego, podział kąta i odcinka na połowy, konstruowanie prostych prostopadłych i równoległych.

RAMOWY ROZKŁAD MATERIAŁU W KLASACH IV-VI

Poniższa tabela przedstawia podział głównych treści programowych między poszczególne klasy oraz orientacyjną liczbę godzin potrzebnych na ich realizację.

Dokładniejsze rozkłady materiału z uwzględnieniem przydziału godzin stanowią element obudowy programu.

Rok szkolny liczy około 190 dni lekcyjnych. Licząc po 4 godziny tygodniowo, otrzymujemy nominalnie 150 lekcji matematyki rocznie. Wiadomo, że pewną liczbę godzin trzeba odliczyć ze względu na absencję, wycieczki, imprezy szkolne itp. Zakładamy, że nauczyciel może przeznaczyć na realizację materiału po 125 jednostek lekcyjnych w każdej klasie (tyle wynosi suma godzin w każdej kolumnie tabeli). W związku z ilością wprowadzonych dodatkowych treści wskazane byłoby zwiększenie godzin w klasie VI o jedną jednostkę lekcyjną tygodniowo (czyli do 156 jednostek lekcyjnych).

KLASA IV		KLASA V		KLASA VI	
ARYTMETYKA		ARYTMETYKA		ARYTMETYKA	
Liczby naturalne	55	Liczby naturalne	25	Liczby wymierne	25
Ułamki zwykłe	20	Ułamki zwykłe	20	Liczby na co dzień	25
Ułamki dziesiętne	15	Ułamki dziesiętne	20	Procenty	16
		Liczby całkowite	10	Układ współrzędnych	10
GEOMETRIA		GEOMETRIA		GEOMETRIA	
Figury na płaszczyźnie	30	Figury na płaszczyźnie	35	Figury na płaszczyźnie	25
Prostopadłościany i sześciany	5	Graniastosłupy	15	Bryły	15
				Konstrukcje geometryczne	10
				ALGEBRA	
				Wyrażenia algebraiczne i równania	30

MATERIAŁ NAUCZANIA W KLASACH IV-VI

KLASA IV

Treści	Komentarze
	ARYTMETYKA
Liczby naturalne	
Rachunek pamięciowy w zakresie 100.	Dodawanie i odejmowanie w pamięci liczb dwucyfrowych. Mnożenie i dzielenie przez liczby jednocyfrowe (działania typu $2 \cdot 27$, $68 : 2$). Dzielenie z resztą.
Porównywanie różnicowe i ilorazowe.	Znajdowanie liczby, która jest od danej liczby o 15 większa, o 7 mniejsza, 3 razy większa, 2 razy mniejsza, itp. Rozwiązywanie zadań tekstowych.
Kwadraty i sześciany liczb.	Przykłady obliczania drugiej i trzeciej potęgi liczb naturalnych.
Kolejność wykonywania działań.	Obliczanie wartości prostych wyrażeń arytmetycznych.
Zadania tekstowe.	Rozwiązywanie i układanie prostych zadań tekstowych wymagających obliczeń pamięciowych.
Oś liczbowa.	Zaznaczanie liczb na osi liczbowej (także liczb wielocyfrowych typu 100, 200, 350 czy 500, 1000). Odczytywanie współrzędnych punktów na osi.
System dziesiątkowy.	Zapisywanie i odczytywanie liczb. Zapisywanie liczb słowami.
Porównywanie liczb naturalnych.	Wprowadzenie znaków nierówności .
Działania na dużych liczbach.	Proste działania na dużych liczbach – dodawanie i odejmowanie typu: $2500 + 400$, $5000 - 4700$ oraz mnożenie i dzielenie przez 10, 100, 1000. Posługiwanie się jednostkami długości i jednostkami masy.

System rzymski.	Zapisywanie liczb naturalnych w systemie rzymskim. Odczytywanie liczb zapisanych w systemie rzymskim.
Kalendarz i czas.	Posługiwanie się zegarami — tradycyjnym i elektronicznym. Obliczenia związane z liczbą dni w tygodniu, w miesiącu i w roku.
Dodawanie i odejmowanie liczb sposobem pisemnym.	Dodawanie i odejmowanie liczb wielocyfrowych.
Mnożenie i dzielenie liczb sposobem pisemnym.	Mnożenie i dzielenie liczb wielocyfrowych przez liczby jednocyfrowe *i dwucyfrowe oraz mnożenie i dzielenie typu 3570 · 2500, 225000 : 1500.*
Zastosowanie algorytmów działań pisemnych.	Obliczanie wartości prostych wyrażeń arytmetycznych (typu $375 \cdot 8 + 3216 : 6$). Rozwiązywanie zadań tekstowych.
Ułamki zwykłe	
Ułamek jako część całości.	Opisywanie części figury lub części zbioru skończonego za pomocą ułamka.
Ułamki właściwe i ułamki niewłaściwe. Liczby mieszane. *Ułamek jako iloraz liczb naturalnych.*	Interpretowanie ułamków niewłaściwych i liczb mieszanych za pomocą rysunków. Zaznaczanie ułamków i liczb mieszanych na osi liczbowej. *Zamiana liczb mieszanych na ułamki niewłaściwe. Zapisywanie ułamków w postaci ilorazu i odwrotnie. Zamiana ułamków niewłaściwych na liczby mieszane.*
Skracanie i rozszerzanie ułamków. Ułamki nieskracalne.	Proste przykłady skracania i rozszerzania ułamków. Zapisywanie ułamków w postaci nieskracalnej.
Porównywanie ułamków.	Porównywanie ułamków o jednakowych mianownikach (np. $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{7}$) i jednakowych licznikach (np. $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$).

Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach.	*Dodawanie i odejmowanie dwóch ułamków o jednakowych mianownikach (przykłady typu* $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$, $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$, *a także* $2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{7}+2\frac{1}{7}$*).*
Ułamki dziesiętne	
Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000.	Zapisywanie ułamków o mianownikach 10, 100, 1000 w postaci dziesiętnej. Zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe nieskracalne. Przedstawianie ułamków dziesiętnych na osi liczbowej. Porównywanie ułamków dziesiętnych.
Wyrażenia dwumianowane.	Zamiana jednostek (np. 1 cm = 0,01 m, 35 gr = 0,35 zł). Zapisywanie wyrażeń dwumianowanych w postaci ułamków dziesiętnych (np. 1 kg 125 g = 1,125 kg, 1 m 6 cm = 1,06 m).
Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych.	Działania pamięciowe typu 0,2 + 0,3, 1,7 − 0,6. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym.
GEOMETRIA	
Figury na płaszczyźnie	
Podstawowe figury płaskie.	Rozpoznawanie, rysowanie i oznaczanie podstawowych figur — punkt, prosta, półprosta, odcinek. Mierzenie długości odcinków.
Proste i odcinki prostopadłe i równoległe.	Rozpoznawanie prostych i odcinków prostopadłych i równoległych. Rysowanie prostych prostopadłych za pomocą ekierki. Rysowanie prostych równoległych za pomocą ekierki i linijki.
Kąty. Mierzenie kątów.	Rozpoznawanie i rysowanie kątów prostych, ostrych i rozwartych. Odczytywanie miar kątów za pomocą kątomierza. Rysowanie kątów o zadanych miarach.
Prostokąty i kwadraty.	Rozpoznawanie i rysowanie prostokątów i kwadratów za pomocą ekierki. Obliczanie obwodów.
Koła i okręgi.	Odróżnianie okręgu od koła. Rozróżnianie pojęć: środek, cięciwa, promień, średnica. Rysowanie okręgów o danych promieniach.

Skala [*i plan*].	Rysowanie odcinków i prostokątów w skali, np. 1 : 1, 1 : 2, 3 : 1. [*Obliczanie rzeczywistych odległości na podstawie mapy i planu*].
Pole figury. Jednostki pola. Pola prostokątów i kwadratów.	Obliczanie pól prostokątów i kwadratów. Rozwiązywanie zadań tekstowych. [*Zamiana jednostek pola*].
Prostopadłościany i sześciany	
Prostopadłościan i sześcian. Siatka prostopadłościanu.	Wskazywanie ścian, wierzchołków, krawędzi. Wskazywanie par ścian i krawędzi prostopadłych i równoległych. Rysowanie siatek prostopadłościanów i sześcianów. Klejenie modeli.
[*Pole powierzchni prostopadłościanu*].	[*Obliczanie pól powierzchni prostopadłościanów o danych wymiarach*].

KLASA V

Treści	Komentarze
ARYTMETYKA	
Liczby naturalne	
Działania na liczbach naturalnych.	Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb w pamięci i sposobem pisemnym (także dzielenie z resztą). Obliczanie kwadratów i sześcianów liczb naturalnych. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych z wykorzystaniem reguł kolejności działań. Rozwiązywanie zadań tekstowych.
Liczby pierwsze i złożone.	Przykłady liczb pierwszych i złożonych. Stosowanie cech podzielności liczb naturalnych do sprawdzania, czy dana liczba jest pierwsza czy złożona. **Rozpoznawanie liczb pierwszych oraz liczb złożonych w zakresie 1-200, sprawdzanie, czy dana liczba jest pierwsza za pomocą Sita Eratostenesa.**

Wielokrotności i dzielniki liczb. Podzielność liczb.	**Rozkładanie liczb 1-40 000 na czynniki pierwsze ; cechy podzielności liczb(stosowanie cech podzielności liczb naturalnych przez 2, 3, 5, 7, 9 i 10);** Zapisywanie wielokrotności i dzielników danej liczby naturalnej. Rozpoznawanie, czy dana liczba jest podzielna przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25 i 100. Wspólne wielokrotności i wspólne dzielniki. **Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki, Twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych, algorytm wyznaczania NWD i NWW liczb naturalnych oraz ich podstawowe własności , Algorytm Euklidesa .**
Ułamki zwykłe	
Ułamek jako część całości. Ułamek jako iloraz.	Opisywanie części figury lub części zbioru skończonego za pomocą ułamka. Zapisywanie ułamków w postaci ilorazu i odwrotnie. Zamiana ułamków niewłaściwych na liczby mieszane i odwrotnie. Zaznaczanie ułamków zwykłych i liczb mieszanych na osi liczbowej.
Skracanie i rozszerzanie ułamków. Porównywanie ułamków.	Sprowadzanie ułamka do postaci nieskracalnej. Rozszerzanie ułamka do ułamka o zadanym mianowniku. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika. Porównywanie ułamków o różnych mianownikach.
Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych.	Dodawanie i odejmowanie ułamków (o jednakowych i różnych mianownikach) i liczb mieszanych.
Mnożenie ułamków zwykłych.	Mnożenie ułamków przez liczbę naturalną. Obliczanie ułamka danej liczby. Mnożenie ułamków i liczb mieszanych. Obliczanie kwadratów i sześcianów ułamków zwykłych i liczb mieszanych.
Dzielenie ułamków zwykłych.	Dzielenie ułamków przez liczbę naturalną. Zapisywanie odwrotności ułamków i liczb mieszanych. Dzielenie ułamków i liczb mieszanych.

Ułamki dziesiętne	
Pojęcie ułamka dziesiętnego.	Zapisywanie ułamków zwykłych o mianownikach 10, 100, 1000 itp. w postaci dziesiętnej i odwrotnie.
Porównywanie ułamków dziesiętnych.	Zaznaczanie ułamków dziesiętnych na osi liczbowej. Porządkowanie (rosnąco lub malejąco) kilku ułamków dziesiętnych.
Wyrażenia dwumianowane.	Zapisywanie wyrażeń dwumianowanych w postaci ułamków dziesiętnych (np. 35 g = 0,035 kg, 1 km 200 m = 1,2 km).
Zamiana ułamków dziesiętnych na zwykłe i zwykłych na dziesiętne.	Przedstawienie ułamka dziesiętnego w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisywanie w postaci dziesiętnej ułamków zwykłych o mianownikach 2, 4, 8, 20, 25, 40 itp.
Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych.	Dodawanie i odejmowanie w pamięci prostych ułamków dziesiętnych. Dodawanie i odejmowanie sposobem pisemnym.
Mnożenie ułamków dziesiętnych.	Stosowanie reguł mnożenia i dzielenia ułamków przez 10, 100, 1000, itp. Pamięciowe i pisemne mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną. Pisemne mnożenie ułamków dziesiętnych. Obliczanie kwadratów i sześcianów ułamków dziesiętnych. Szacowanie wyników mnożenia.
Dzielenie ułamków dziesiętnych.	Pamięciowe i pisemne dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną. Pisemne dzielenie ułamków dziesiętnych.
Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.	Obliczanie wartości wyrażeń (jednodziałaniowych oraz kilkudziałaniowych), w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne.
[*Procenty a ułamki.*]	[*Co to jest procent? Interpretacja 100%, 50%, 25%, 10% i 1% danej wielkości*].

Liczby całkowite	
Liczby ujemne.	Przedstawienie różnych interpretacji liczb całkowitych (np. ujemne temperatury, długi). Zaznaczanie liczb całkowitych na osi liczbowej, porównywanie liczb całkowitych.
[*Działania na liczbach całkowitych*].	[*Pamięciowe dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych*].
GEOMETRIA	
Figury na płaszczyźnie	
Proste prostopadłe i proste równoległe.	Kreślenie prostych prostopadłych i równoległych za pomocą linijki i ekierki.
Kąty.	Mierzenie kątów. Rozpoznawanie kątów ostrych, prostych, rozwartych, półpełnych, pełnych oraz par kątów przyległych i wierzchołkowych. Obliczanie miary kąta, gdy dana jest np. miara kąta przyległego. **Rozpoznawanie kątów odpowiadających i naprzemianległych.**
Wielokąty.	Wskazywanie boków, wierzchołków, kątów i przekątnych wielokąta. Obliczanie obwodu wielokąta.
Rodzaje trójkątów. Suma miar kątów trójkąta.	Rozpoznawanie trójkątów ostrokątnych, prostokątnych i rozwartokątnych oraz trójkątów równobocznych i równoramiennych. Własności trójkąta równobocznego i równoramiennego. Rozwiązywanie zadań dotyczących kątów w trójkątach. [*Konstruowanie trójkąta o danych bokach*].
Rodzaje czworokątów.	Rozpoznawanie i rysowanie prostokątów, kwadratów, równoległoboków, rombów, trapezów. Własności przekątnych równoległoboku.
Miary kątów w czworokątach.	Wskazywanie kątów o jednakowych miarach w równoległobokach i trapezach równoramiennych. Obliczanie miar kątów równoległoboku i trapezu równoramiennego, gdy dana jest miara jednego z kątów.
Figury przystające.	**Rozpoznawanie figur przystających**

Pola i obwody wielokątów. **Graniastosłupy**	Rysowanie wysokości i obliczanie pól trójkątów, równoległoboków, rombów i trapezów. Wykorzystywanie wzorów na pola trójkątów i czworokątów do obliczania długości boków lub wysokości. Zamiana jednostek pola.
Przykłady graniastosłupów prostych. Siatki graniastosłupów prostych.	Rozpoznawanie graniastosłupów. Wskazywanie ścian prostopadłych i równoległych oraz krawędzi prostopadłych i równoległych w graniastosłupach. Rysowanie siatek. Klejenie modeli.
Pole powierzchni graniastosłupa prostego.	Obliczanie pól powierzchni graniastosłupów prostych.
Objętość bryły. Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa prostego.	Obliczanie objętości prostopadłościanów, sześcianów i innych graniastosłupów prostych. Zamiana jednostek objętości.

KLASA VI

Treści	Komentarze
ARYTMETYKA	
Liczby wymierne **Liczby wymierne**	**Pojęcie liczby wymiernej i niewymiernej. Zaokrąglanie liczb wymiernych i niewymiernych z zadaną dokładnością. Zamiana ułamków okresowych na zwykłe**
Działania na liczbach wymiernych (nieujemnych).	Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych i dziesiętnych (w tym przykłady typu: $4{,}2 - 2\frac{1}{3}$, $5{,}2 \cdot \frac{1}{6}$, $2{,}5 : \frac{1}{4}$). Obliczanie wartości wyrażeń z uwzględnieniem kolejności wykonywania działań. Rozwiązywanie zadań tekstowych.

Liczby całkowite. Działania na liczbach całkowitych. Działania na liczbach wymiernych dodatnich i ujemnych. **Liczby na co dzień** Liczby na co dzień. Odczytywanie informacji. Prędkość, droga, czas. **Procenty** **Układ współrzędnych**	Porównywanie liczb całkowitych, zaznaczanie ich na osi liczbowej. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb całkowitych. Obliczanie wartości wyrażeń, w których występują liczby całkowite (przykłady typu $10 - 8 \cdot (-9) - (-3) \cdot 7$). Obliczanie wartości bezwzględnej. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb wymiernych. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych z uwzględnieniem kolejności działań. Obliczenia związane z kalendarzem i czasem. Stosowanie jednostek długości i masy. Posługiwanie się skalą na mapach i planach. Zaokrąglanie i szacowanie liczb. Posługiwanie się kalkulatorem. Odczytywanie danych z tabel i diagramów. Odczytywanie danych przedstawionych na prostych wykresach. Rozumienie pojęcia prędkości i intuicyjne obliczanie jednej z wielkości (drogi, prędkości lub czasu), gdy dane są dwie pozostałe wielkości. Interpretacja 100% wielkości jako całości, 50% – jako połowy, 25% – jako jednej czwartej, 10% – jako jednej dziesiątej, a 1% – jako setnej części całości. Obliczanie procentu danej wielkości. *Odczytywanie współrzędnych punktów w układzie współrzędnych. Zaznaczanie punktów na podstawie ich współrzędnych. Znajdowanie środka odcinka , którego końce mają dane współrzędne oraz znajdowanie współrzędnych drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek. Znajdowanie następnych punktów kratowych na prostej AB, dla danych punktów kratowych A i B. Pola wybranych figur.*
ALGEBRA	
Wyrażenia algebra-iczne i równania Budowanie prostych wyrażeń algebraicznych. Wartości wyrażeń algebraicznych.	Zapisywanie wyrażeń typu $x - 5$, $2x$, $3x + 1$, $3(x + 1)$. Obliczanie wartości prostych wyrażeń algebraicznych.

[*Przekształcanie prostych wyrażeń algebraicznych**]. Rozwiązywanie równań.	[*Przekształcanie wyrażeń typu $5x + 3x$, $2x + 4 - x$, $2 \cdot (3x + 1)$**]. Rozwiązywanie równań typu $2x - 5 = 3$, $5(x + 4) = 10$. Rozwiązywanie prostych zadań tekstowych za pomocą równań.
GEOMETRIA	
Figury na płaszczyźnie Własności figur płaskich.	Rodzaje trójkątów. Własności kątów w trójkątach. Nierówność trójkąta. Rodzaje czworokątów. Własności kątów w czworokątach. Własności przekątnych w równoległobokach.
Pola i obwody wielokątów.	*Pojęcie wielokąta foremnego*. Pola i obwody wielokątów. Obliczanie pól i obwodów trójkątów. Obliczanie pól i obwodów czworokątów. **Zagadnienie triangulacji wielokątów i obliczanie pól dowolnych wielokątów na podstawie pomiarów. Wzór Picka**
Konstrukcje geometryczne.	Przenoszenie odcinków i *katów*. Konstruowanie *różnych* trójkątów. *Konstruowanie sześciokąta foremnego. Podział kąta i odcinka na połowy. Konstruowanie kątów o miarach 60º, 30º, 45 º.* **Konstruowanie prostych prostopadłych i równoległych. Konstrukcja dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka.**
Bryły Rozpoznawanie brył.	Rozpoznawanie brył. Graniastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, kule — podstawowe własności.
Graniastosłupy.	Własności sześcianów i prostopadłościanów. Graniastosłupy proste. Objętość graniastosłupa.
Przykłady ostrosłupów. Siatki ostrosłupów.	Rysowanie ostrosłupów. Rysowanie siatek ostrosłupów. Klejenie modeli.
Pole powierzchni ostrosłupa.	*Obliczanie pól powierzchni ostrosłupów na podstawie pomiarów.*

Pola powierzchni dowolnych wielościanów.	**Obliczanie pól powierzchni wielościanów na podstawie pomiarów.**

OPIS ZAŁOŻONYCH OSIĄGNIĘĆ UCZNIA W KLASACH IV–VI

Szczegółowy opis osiągnięć przedstawiono w tabeli. Osiągnięcia zostały podzielone na podstawowe („p”) i ponadpodstawowe („pp”). Wśród osiągnięć podstawowych znajdują się osiągnięcia na poziomie koniecznym i podstawowym, a wśród osiągnięć ponadpodstawowych – osiągnięcia na poziomie rozszerzonym i dopełniającym. W rubryce „Klasa” podano numer klasy, w której dana umiejętność pojawia się po raz pierwszy (w szczególności wymagana jest na końcu danego roku). Osiągnięcia z niższych klas są dalej ćwiczone i obowiązują także w klasach wyższych. W skali ocen od 1 do 6 osiągnięcia oznaczone „p” odpowiadają ocenie dostatecznej. Uczeń czwórkowy, piątkowy i szóstkowy oprócz tych wymagań powinien spełniać wymagania wyższe, oznaczone „pp” a jego ocena wystawiona powinna być zgodnie z obowiązującą w szkole skalą ocen.

OPIS ZAŁOŻONYCH OSIĄGNIĘĆ – ETAP KONKRETNY

Wymagania	**Klasa**		
	IV	**V**	**VI**
ARYTMETYKA Uczeń powinien umieć:			
dodawać i odejmować w pamięci liczby dwucyfrowe:			
bez przekraczania progu dziesiątkowego,	p		
z przekraczaniem progu dziesiątkowego;		p	
mnożyć i dzielić w pamięci liczby dwucyfrowe:			
przez 2 i przez 3,	p		
przez liczby jednocyfrowe;	pp		
rozwiązywać i układać zadania tekstowe:			
jednodziałaniowe,	p	p	
wielodziałaniowe;	pp	p	
obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych, w których występują liczby naturalne:			
jednocyfrowe,	p		
jedno- i dwucyfrowe;	pp	p	
obliczać kwadraty i sześciany liczb naturalnych;	pp	p	
zaznaczać liczby na osi liczbowej i odczytywać	p		

współrzędne punktów na osi;			
zapisywać i odczytywać liczby:			
do miliona,	p		
do miliarda;	pp		
porównywać liczby naturalne, posługując się znakami < i >;	p		
zapisywać i odczytywać liczby naturalne w systemie rzymskim:	p		
do 30,	p		
do 3999;	pp		
posługiwać się zegarem i kalendarzem;	p		
dodawać i odejmować liczby naturalne sposobem pisemnym;	p		
mnożyć i dzielić liczby naturalne sposobem pisemnym:			
przez liczby jednocyfrowe,	p		
przez liczby dwucyfrowe;	pp	p	
zamieniać jednostki, przykłady typu 5 m = 500 cm, 7 kg = 7000 g;	p		
zapisywać wielokrotności liczb i znajdować dzielniki liczb dwucyfrowych;		p	
rozpoznawać (bez wykonywania dzielenia):			
liczby podzielne przez 2, 5, 10,		p	
liczby podzielne przez 2, 3, 5, 9, 10, 100;		p	
rozpoznawać liczby złożone na podstawie cech podzielności;		p	
rozpoznawać liczby pierwsze oraz liczby złożone w zakresie 1-200, sprawdzać czy dana liczba jest pierwsza za pomocą Sita Eratostenesa , rozkładać liczby 1- 40 000 na czynniki pierwsze, stosować cechy podzielności liczb naturalnych, stosować Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki, stosować Twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych , stosować algorytm wyznaczania NWD i NWW liczb naturalnych oraz znać ich podstawowe własności , znać Algorytm Euklidesa		pp	
porównywać dwie liczby całkowite;		p	
zaznaczać na osi liczbowej liczby całkowite i odczytywać współrzędne punktów;		p	

dodawać i odejmować:			
dwie liczby całkowite,		p	
kilka liczb całkowitych;		pp	
obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych, w których występują:			
liczby całkowite,			p
liczby wymierne; w tym znać pojęcie liczby wymiernej i niewymiernej. zaokrąglać liczby wymierne i niewymierne z zadaną dokładnością, zamieniać ułamki okresowe na zwykłe			pp
opisywać część figury za pomocą ułamka;	p		
porównywać dwa ułamki o liczniku 1 oraz dwa ułamki o jednakowych mianownikach;	p		
skracać i rozszerzać proste przykłady ułamków;	p		
porównywać dwa ułamki zwykłe;	pp	p	
zapisywać ułamki w postaci nieskracalnej;	pp	p	
sprowadzać ułamki do wspólnego mianownika;		p	
zamieniać liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i odwrotnie;	pp	p	
zaznaczać ułamki zwykłe i liczby mieszane na osi liczbowej;	pp	p	
dodawać i odejmować dwa ułamki o jednakowych mianownikach;	p		
dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki zwykłe i liczby mieszane;		p	
obliczać sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych;			p
obliczać kwadraty i sześciany liczb wymiernych;			p
zamieniać ułamki dziesiętne na zwykłe;	p		
zamieniać ułamki zwykłe o mianownikach 2, 4, 5, 25 itp. na ułamki dziesiętne;		p	
porównywać dwa ułamki dziesiętne o tej samej liczbie cyfr po przecinku;	p		
zaokrąglać rozwinięcia dziesiętne do jednego i dwóch miejsc po przecinku;			p

zapisywać liczbę wymierną w postaci rozwinięcia dziesiętnego;			pp
zamieniać jednostki - przykłady typu 1 cm = 0,01 m, 35 g = 0,035 kg, 1 kg 125 g = 1,125 kg;	pp	p	
dodawać i odejmować w pamięci ułamki dziesiętne w przykładach typu 0,2 + 0,3, 1,7□– 0,6;	p		
dodawać i odejmować ułamki dziesiętne sposobem pisemnym;	p	p	
mnożyć ułamki dziesiętne;		p	
dzielić ułamek dziesiętny:			
przez liczbę naturalną,		p	
przez ułamek dziesiętny;		pp	p
obliczać wartości wyrażeń, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne:			
jednodziałaniowych,		p	
wielodziałaniowych;		pp	p
obliczać procent danej liczby;			pp
odczytywać dane z tabel i diagramów;			p
rysować diagramy;			pp
korzystać z kalkulatora;			p
ELEMENTY ALGEBRY Uczeń powinien umieć:			
obliczać wartość prostego wyrażenia algebraicznego;			p
budować wyrażenia algebraiczne:			
proste przykłady (typu: liczba o 5 większa od *a*),			p
trudniejsze przykłady;			pp
przekształcać proste wyrażenia algebraiczne;			p
rozwiązywać równania:			p
typu $x + 53 = 85$, 3□□ $x = 21$ (zgadując rozwiązania),	p		
typu $1 + x = 10$□$- 2x$;			p
rozwiązywać zadania tekstowe za pomocą równań;			p

odczytywać w układzie współrzędnych współrzędne punktu i zaznaczać punkt o danych współrzędnych;			pp
odczytywać dane z wykresów			p
GEOMETRIA Uczeń powinien umieć:			
rozpoznawać proste i odcinki prostopadłe i równoległe;	p		
rysować proste prostopadłe za pomocą ekierki;	p		
rysować proste równoległe za pomocą linijki i ekierki;	pp		
konstruować trójkąt o danych bokach;		pp	p
konstruować proste prostopadłe;			p
podzielić konstrukcyjnie odcinek i kąt na połowy;			pp
konstruować: trójkąt o danym boku i dwóch kątach, trójkąt o danych dwóch bokach i kącie między nimi, równoległobok o danych bokach i danym kącie między bokami, niektóre kąty o zadanej mierze, np. 30º, 45º, 135º, 60º, 105º;sześciokąt foremny, proste prostopadłe i równoległe Podział kąta i odcinka na połowy.			pp
Rozpoznawać kąty w tym odpowiadające i naprzemianległe	P	pp	
mierzyć kąty;	p		
rysować kąty o zadanej mierze;	pp	p	
rozpoznawać i rysować za pomocą ekierki prostokąty i kwadraty;	p		
rysować okrąg o danym promieniu i o danej średnicy;	p		
rysować odcinki i prostokąty w skali 1 : 1, 2 : 1 i 1 : 2;	p		
obliczać na podstawie mapy i planu rzeczywiste odległości;			p
obliczać pola prostokątów i kwadratów;	p		
zamieniać jednostki pola;		pp	
obliczać obwody:			
prostokątów;	p		
trójkątów i czworokątów;		p	
obliczać miary kątów trójkąta, gdy dane są miary dwóch kątów lub gdy dana jest miara jednego kąta w trójkącie równoramiennym;		p	
obliczać pole trójkąta, równoległoboku i trapezu;		p	
obliczać długości boków lub wysokości trójkątów, gdy dane		pp	

jest pole i jedna z wysokości;			
rozpoznawać figury przystające		pp	
zna pojęcie wielokąta foremnego			pp
Zagadnienie triangulacji wielokątów i obliczanie pól dowolnych wielokątów na podstawie pomiarów. Wzór Picka.			pp
rozpoznawać bryły (graniastosłup prosty, walec, ostrosłup, stożek, kula);			p
rysować siatkę:			
prostopadłościanu,	p		
graniastosłupa prostego o podstawie np. trójkąta prostokątnego równoramiennego,		p	
graniastosłupa prostego czworokątnego,		pp	
obliczać:			
pole powierzchni prostopadłościanu,	p		
objętość prostopadłościanu,		p	
pole powierzchni ostrosłupa;			p
zamieniać jednostki objętości.		pp	
obliczać pola powierzchni dowolnych wielościanów na podstawie pomiarów.			pp
Odczytywanie współrzędnych punktów w układzie współrzędnych. Zaznaczanie punktów na podstawie ich współrzędnych. Znajdowanie środka odcinka , którego końce mają dane współrzędne oraz znajdowanie współrzędnych drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek. Znajdowanie następnych punktów kratowych na prostej AB, dla danych punktów kratowych A i B. Pola wybranych figur.			pp

CELE EDUKACYJNE W KLASACH VII-VIII

CELE EDUKACYJNE — WYCHOWANIE

Rozwijanie myślenia

- Rozwijanie pamięci oraz umiejętności myślenia abstrakcyjnego i logicznego rozumowania.
- Rozwijanie zdolności myślenia krytycznego i twórczego, umiejętności wnioskowania oraz stawiania i weryfikowania hipotez.
- Kształtowanie wyobraźni przestrzennej.
- Rozwijanie zdolności i zainteresowań matematycznych.
- Nauczanie dostrzegania prawidłowości matematycznych w otaczającym świecie.
- Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem tekstu matematycznego oraz korzystania z definicji i twierdzeń. Przygotowanie do czytania ze zrozumieniem tekstów dotyczących różnych dziedzin wiedzy oraz analizowanie ich z wykorzystaniem pojęć i technik matematycznych.
- Rozwijanie umiejętności interpretowania danych.
- Przygotowanie do korzystania z nowych technologii.
- Kształtowanie umiejętności stosowania schematów, symboli literowych, rysunków i wykresów w sytuacjach związanych z życiem codziennym.
- Rozwijanie umiejętności korzystania z definicji i twierdzeń.

Rozwijanie osobowości

- Kształtowanie pozytywnego nastawienia do podejmowania wysiłku intelektualnego oraz postawy dociekliwości. Wyrabianie nawyku samodzielnego poszukiwania informacji.
- Nauczanie dobrej organizacji pracy, wyrabianie systematyczności, pracowitości i wytrwałości.
- Rozwijanie umiejętności współdziałania w grupie.
- Rozwijanie umiejętności prowadzenia dyskusji, precyzyjnego formułowania problemów i argumentowania.
- Nauczanie przedstawiania rozwiązań problemów i zadań w sposób czytelny i precyzyjny.
- Wyrabianie nawyków sprawdzania otrzymanych odpowiedzi i korygowania popełnianych błędów.
- Przygotowanie uczniów do pokonywania stresu w sytuacjach egzaminacyjnych
- Wzbudzenie wśród uczniów zamiłowania do matematyki , ukazanie jej piękna.
- Wyrobienie umiejętności poprawnego redagowania rozwiązań zadań i problemów.
- Pogłębianie pracy ideowo–wychowawczej (elementy matematyki wyższej, jako inspiracja do własnej twórczej pracy).

SZCZEGÓŁOWE CELE EDUKACYJNE — KSZTAŁCENIE

KLASA VII

Rozwijanie umiejętności posługiwania się liczbami

- Uporządkowanie i utrwalenie wiadomości dotyczących pojęć związanych z arytmetyką, poznanych w młodszych klasach.
- Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (wielodziałaniowych), w których występują liczby wymierne, z zastosowaniem reguł kolejności wykonywania działań.
- Przedstawianie liczb wymiernych w postaci rozwinięć dziesiętnych skończonych lub nieskończonych okresowych.
- Wykonywanie obliczeń procentowych. Posługiwanie się procentami w sytuacjach praktycznych.
- Potęgowanie, stosowanie własności potęg przy obliczaniu wartości wyrażeń arytmetycznych.
- Pierwiastkowanie, stosowanie własności pierwiastków przy obliczaniu wartości wyrażeń arytmetycznych.
- Utrwalanie pojęć poznanych w młodszych klasach, rozumienie i używanie nowych pojęć: pierwiastek z liczby, rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Rozwijanie umiejętności posługiwania się symbolami literowymi

- Rozumienie i używanie pojęć związanych z algebrą: wyrażenie algebraiczne, wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego, jednomian, suma algebraiczna, liczba spełniająca równanie, równania równoważne, zbiór rozwiązań równania.
- Przekształcanie prostych wyrażeń algebraicznych.
- Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- Przekształcanie wzorów.
- Uczenie posługiwania się sformalizowanym językiem matematycznym w formie werbalnej z wykorzystaniem słów, symboli, i niewerbalnej (rysunków, schematów, tabel, itp.).

Kształtowanie wyobraźni geometrycznej

- Uporządkowanie i utrwalenie wiadomości o figurach płaskich (własności trójkątów i czworokątów, podstawowe konstrukcje geometryczne).
- Utrwalanie pojęć poznanych w młodszych klasach, rozumienie i używanie nowych pojęć: trójkąty przystające, układ współrzędnych, współrzędne punktu na płaszczyźnie.
- Posługiwanie się układem współrzędnych, obliczanie długości odcinków (równoległych do jednej z osi układu współrzędnych) i pól wielokątów.
- Rozpoznawanie i rysowanie graniastosłupów.
- Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów.

Rozwijanie umiejętności stosowania matematyki

- Wykorzystywanie umiejętności rachunkowych przy rozwiązywaniu problemów z różnych dziedzin życia codziennego.
- Zaokrąglanie liczb. Wykorzystywanie własności liczb i działań do wykonywania rachunków jak najprostszym sposobem, szacowanie wyników działań.

- Zapisywanie dużych i małych liczb z zastosowaniem notacji wykładniczej.

- Rozwiązywanie zadań tekstowych, w szczególności zadań wymagających obliczeń procentowych lub rozwiązywania równań.
- Posługiwanie się kalkulatorem przy wykonywaniu obliczeń oraz przy sprawdzaniu wyników szacowania.
- Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy, pola i objętości przy rozwiązywaniu różnych zagadnień praktycznych.
- Obliczanie pól powierzchni i objętości różnych przedmiotów w kształcie graniastosłupów.
- Porządkowanie i interpretowanie danych statystycznych.
- Przykłady prostych doświadczeń losowych.

KLASA VIII

Rozwijanie umiejętności posługiwania się symbolami literowymi

- Utrwalanie pojęć i umiejętności związanych z algebrą, poznanych w młodszych klasach.
- Przekształcanie wyrażeń algebraicznych.
- Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz równań podanych w postaci proporcji.

Kształtowanie wyobraźni geometrycznej

- Obliczanie długości okręgu i pola koła.
- Dostrzeganie związków między długościami boków w trójkątach prostokątnych.
- Stosowanie twierdzenia Pitagorasa przy obliczaniu np. długości przekątnej kwadratu, wysokości trójkąta równoramiennego.
- Utrwalanie pojęć poznanych w młodszych klasach: oś symetrii i figury osiowosymetryczne oraz rozumienie i używanie nowych pojęć: symetralna odcinka, dwusieczna kąta, środek symetrii, figury środkowosymetryczne.
- Rozpoznawanie figur osiowosymetrycznych i środkowosymetrycznych, wskazywanie osi symetrii i środka symetrii figury, rysowanie figury symetrycznej do danej figury względem prostej i figury symetrycznej względem punktu.
- Rozpoznawanie i rysowanie graniastosłupów i ostrosłupów.
- Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów.

Rozwijanie umiejętności stosowania matematyki

- Rozwiązywanie zadań tekstowych, w szczególności zadań wymagających obliczeń procentowych, rozwiązywania równań.
- Wykorzystanie wzorów na długość okręgu i pole koła do obliczania obwodów i pól powierzchni różnych przedmiotów.
- Stosowanie twierdzenia Pitagorasa w różnych sytuacjach praktycznych.
- Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy, pola i objętości przy rozwiązywaniu różnych zagadnień praktycznych.
- Obliczanie pól powierzchni i objętości różnych przedmiotów w kształcie graniastosłupów i ostrosłupów.

- Stosowanie reguł mnożenia i dodawania do zliczania par elementów o określonych własnościach.
- Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń.
- Posługiwanie się podstawowymi jednostkami długości, masy, pola i objętości przy rozwiązywaniu różnych zagadnień praktycznych.
- Obliczanie pól powierzchni i objętości różnych przedmiotów w kształcie graniastosłupów.
- Porządkowanie i interpretowanie danych statystycznych.
- Przykłady prostych doświadczeń losowych.

RAMOWY ROZKŁAD MATERIAŁU W KLASACH VII-VIII

Poniższa tabela przedstawia podział głównych treści programowych między poszczególne klasy oraz orientacyjną liczbę godzin potrzebnych na ich realizację.
Rok szkolny liczy około 190 dni lekcyjnych. Licząc po 4 godziny tygodniowo, otrzymujemy nominalnie 150 lekcji matematyki rocznie. Wiadomo, że pewną liczbę godzin trzeba odliczyć ze względu na absencję, wycieczki, imprezy szkolne itp. W związku z ilością wprowadzonych dodatkowych treści wskazane byłoby zwiększeni godzin o jedną jednostkę lekcyjną tygodniowo w każdej z wymienionych klas Zakładamy, że nauczyciel może przeznaczyć na realizację materiału w klasie siódmej 156, a w ósmej 146 jednostek lekcyjnych.

KLASA VII		**KLASA VIII**	
ARYTMETYKA		**ARYTMETYKA**	
Liczby wymierne	15	Powtórzenie wiadomości	15
Procenty	20	**ALGEBRA**	
Potęgi i pierwiastki	22	Powtórzenie wiadomości	10
ALGEBRA		Proporcje	5
		Układy równań. Funkcje.	10
Wyrażenia algebraiczne	15	**GEOMETRIA**	
Równania. Niektóre równania i nierówności wymierne. Wybrane nierówności wyższych stopni.	30	Powtórzenie wiadomości	5
STATYSTYKA		Koła i okręgi Kąt wpisany i kąt środkowy w okręgu Wielokąty i okręgi.	20
Elementy statystyki	5	Trójkąty prostokątne	15
Doświadczenia losowe	2	Dowodzenie w geometrii	5
GEOMETRIA		Symetrie	10
Figury na płaszczyźnie	20	**RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA**	
Wielościany	10	Doświadczenia losowe. Elementy kombinatoryki Elementy rachunku prawdopodobieństwa	25
Figury podobne.	5	Graniastosłupy, ostrosłupy, wielościany.	20
ELEMENTY LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI		**ZASTOSOWANIA MATEMATYKI**	6
Elementy logiki. Elementy teorii mnogości.	7 5		

MATERIAŁ NAUCZANIA W KLASACH VII-VIII

KLASA VII

Treści	Komentarze
ELEMENTY LOGKI I TEORII MNOGOŚCI	
Elementy logiki	
Zdania i spójniki logiczne	**Pojęcie zdania logicznego; spójniki logiczne; prawa rachunku zdań.**
Elementy teorii mnogości.	
Działania na zbiorach	**Pojęcie: zbioru, należenia do zbioru; inkluzji; sumy zbiorów; iloczynu zbiorów; różnicy zbiorów; diagramy Venna; prawa de Morgana.**
ARYTMETYKA	
Liczby wymierne	
Działania na liczbach wymiernych.	Porównywanie liczb wymiernych; zaznaczanie ich na osi liczbowej oraz określanie odległości liczb na osi liczbowej. Wskazywanie na osi liczbowej zbioru liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb wymiernych. Obliczanie wartości wyrażeń z uwzględnieniem kolejności działań oraz ich szacowanie. Zamiana jednostek. Obliczenia z wykorzystaniem kalkulatora.
Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych.	Zapisywanie liczb wymiernych w postaci rozwinięć dziesiętnych skończonych i nieskończonych okresowych. Zaokrąglanie rozwinięć dziesiętnych.
Procenty i ich zastosowania.	Rozumienie pojęcia procentu. Odczytywanie diagramów procentowych. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba. Obliczanie procentu danej liczby i liczby, gdy dany jest jej procent. Rozwiązywanie zadań tekstowych. Wykorzystanie kalkulatora do obliczeń procentowych. **Pojęcie punktu procentowego.**
Potęgi i pierwiastki	
Potęga o wykładniku naturalnym. Własności potęg. **Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym**	Obliczanie wartości wyrażeń, w których występują potęgi. Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach lub jednakowych wykładnikach. Potęgowanie potęgi. Porównywanie potęg o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach oraz potęg o takich samych wykładnikach naturalnych a różnych podstawach. **Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym.**
Notacja wykładnicza	Zapisywanie i porównywanie dużych liczb. Potęga liczby 10 o wykładniku ujemnym. Zapisywanie i porównywanie bardzo małych liczb.
Pierwiastki. Własności pierwiastków.	Pierwiastek kwadratowy i sześcienny. Mnożenie i dzielenie pierwiastków tego samego stopnia. Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka. Obliczanie wartości wyrażeń, w których występują pierwiastki. Szacowanie liczb niewymiernych (także z użyciem kalkulatora). *Rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych*. **Niewymierność liczby $\sqrt{2}$.**
Twierdzenia. Dowodzenie twierdzeń	**Budowa twierdzenia matematycznego. Dowody: rodzaje (dowód wprost, dowód nie wprost), proste przykłady.**

ALGEBRA	
Wyrażenia algebraiczne	
Zapisywanie wyrażeń algebraicznych. Wartość liczbowa wyrażenia.	Budowanie wyrażeń algebraicznych. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych.
Jednomiany i sumy algebraiczne.	Porządkowanie jednomianów. Redukcja wyrazów podobnych w sumie algebraicznej. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych. Mnożenie i dzielenie sumy algebraicznej przez liczbę. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias. Mnożenie dwumianu przez dwumian. *Mnożenie sum algebraicznych.* Przekształcanie wyrażeń algebraicznych przy rozwiązywaniu równań**. Wzory skróconego mnożenia.**
Równania	
Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	Zapisywanie związków pomiędzy wielkościami za pomocą równania; sprawdzanie, czy dana liczba spełnia równanie. Rozwiązywanie równań. **Przykłady równań tożsamościowych i sprzecznych.** Rozwiązywanie zadań tekstowych. **Rozwiązywanie równań z wartością bezwzględną. Wybrane równania wyższych stopni.**
Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	**Znajdowanie liczb spełniających nierówność. Rozwiązywanie nierówności. Zaznaczanie zbioru rozwiązań na osi liczbowej.**
Wybrane nierówności wyższych stopni **Niektóre równania i nierówności niewymierne.**	**Nierówność między średnimi i jej zastosowania, dowodzenie nierówności.**
Przekształcanie wzorów.	Przekształcanie prostych wzorów (w tym fizycznych i geometrycznych). Wyznaczanie wskazanej wielkości z podanych wzorów.
GEOMETRIA	
Figury na płaszczyźnie	
Kąty utworzone przez dwie przecinające się proste. Proste równoległe przecięte trzecią prostą.	Własności kątów przyległych, wierzchołkowych, odpowiadających, naprzemianległych.
Własności trójkątów i czworokątów.	Rodzaje trójkątów i czworokątów. Kąty w trójkątach. Kąty i przekątne w czworokątach. Obliczanie obwodów trójkątów i czworokątów.
Figury przystające. Cechy przystawania trójkątów.	Rozpoznawanie trójkątów przystających. Obliczanie długości boków i miar kątów trójkątów z wykorzystaniem cech przystawania trójkątów. Konstruowanie trójkątów przystających.
Figury podobne.	
Twierdzenie Talesa.	**Wprowadzenie twierdzenia Talesa wraz z dowodem. Zastosowanie twierdzenia Talesa. Konstrukcyjny podział odcinka na równe części i w danym stosunku. Zadania związane z twierdzeniem Talesa**
Podstawowe konstrukcje geometryczne.	Przenoszenie odcinków *i kątów. Konstruowanie trójkątów. Konstruowanie prostych prostopadłych i równoległych.*
Pola trójkątów i czworokątów.	Jednostki pola i zależności pomiędzy nimi. Obliczanie pól trójkątów i czworokątów.
Figury geometryczne w układzie współrzędnych.	Zaznaczanie punktów w układzie współrzędnych. Odczytywanie współrzędnych punktów. Rysowanie

	odcinków, wielokątów w układzie współrzędnych. Obliczanie długości odcinków równoległych do jednej z osi układu. Obliczanie pól wielokątów umieszczonych w układzie współrzędnych.
Wielokąty foremne.	Wielokąty foremne i ich własności. *Konstruowanie sześciokąta foremnego i ośmiokąta foremnego.* Obliczanie miary kąta wewnętrznego wielokąta foremnego.
Wielościany	
Graniastosłupy.	Rozpoznawanie i rysowanie graniastosłupów. Rozpoznawanie i rysowanie siatek graniastosłupów. Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów. *Zamiana jednostek objętości.*
STATYSTKA	
Dane statystyczne. Doświadczenia losowe	
Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych.	Przedstawianie danych statystycznych w rozmaity sposób (tabele, diagramy, wykresy). Interpretowanie danych statystycznych. Obliczanie średniej arytmetycznej. Wykorzystanie kalkulatora lub komputera do opracowania danych statystycznych.
Zdarzenia losowe.	Opisywanie prostych przykładów zdarzeń losowych. Ocenianie szans — zdarzenia bardziej i mniej prawdopodobne, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe. Obliczanie prawdopodobieństwa prostych zdarzeń.
ARYTMETYKA	
Liczby całkowite.	
Działania i podzielność w zbiorze liczb całkowitych	**Kongruencje; cechy podzielności liczb; równania diofantyczne.**

KLASA VIII

Treści	Komentarze
ARYTMETYKA	
Powtórzenie wiadomości	Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych. Własności liczb naturalnych. Porównywanie liczb. Działania na potęgach i pierwiastkach. System rzymski zapisu liczb. Obliczanie drogi przy danej prędkości i danym czasie, prędkości przy danej drodze i danym czasie, czasu przy danej drodze i danej prędkości. Zamiana jednostek prędkości.
ALGEBRA	
Powtórzenie wiadomości.	Dodawanie, odejmowanie i mnożenie sum algebraicznych. Obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych. Rozwiązywanie równań.
Proporcje.	Własności proporcji. Rozwiązywanie równań podanych w postaci proporcji. Rozwiązywanie zadań tekstowych dotyczących wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych.
GEOMETRIA	
Powtórzenie wiadomości.	Własności trójkątów i czworokątów. Kąty w

	trójkątach i czworokątach. Pola i obwody trójkątów i czworokątów.
Koła i okręgi.	Określenie i szacowanie liczby π. Obliczanie długości okręgu o danym promieniu i obliczanie promienia okręgu o danej długości. Obliczanie pola koła o danym promieniu i obliczanie promienia koła o danym polu. Obliczanie pola pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień. *Styczna do okręgu*. Wzajemne położenie okręgów.
Kąt wpisany i kąt środkowy w okręgu.	**Kąt wpisany i kąt środkowy w okręgu.**
Wielokąty i okręgi.	
Wzajemne położenie prostej i okręgu. Prosta styczna. **Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt** **Okrąg wpisany w czworokąt. Okrąg opisany na czworokącie.**	**Ustalanie liczby punktów wspólnych prostej i okręgu. Konstruowanie prostej stycznej do okręgu w danym punkcie. Wykorzystanie w zadaniach faktu, że prosta styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.** **Konstruowanie okręgu opisanego na trójkącie, okręgu wpisanego w trójkąt** **Podanie warunków koniecznych i wystarczających na to, aby na czworokącie można było opisać okrąg. Podanie warunków koniecznych i wystarczających na to ,aby w czworokąt można było wpisać okrąg. Zadania związane z okręgiem wpisanym i okręgiem opisanym na czworokącie.**
Wielokąty foremne.	**Obliczanie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym i promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny. Wielokąty foremne i ich własności. Konstruowanie sześciokąta foremnego i ośmiokąta foremnego. Obliczanie miary kąta wewnętrznego wielokąta foremnego.**
Trójkąty prostokątne.	Wprowadzenie twierdzenia Pitagorasa **wraz z dowodem**. Stosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości boków trójkąta prostokątnego, wysokości trójkąta równoramiennego i przekątnej prostokąta.. Wyprowadzenie wzorów na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego. Wykorzystywanie związków między długościami boków trójkątów prostokątnych o kątach 30°, 60° i 90° oraz trójkątów prostokątnych równoramiennych.
Dowodzenie w geometrii.	Przeprowadzanie dowodów wykorzystujących własności poznanych figur geometrycznych oraz twierdzenie Pitagorasa.

Układ współrzędnych.	**Wyprowadzenie wzoru na odległość dwóch punktów zadanych za pomocą współrzędnych. Sprowadzanie geometrii do „rachunków” za pomocą kartezjańskiego układu współrzędnych -przykłady m.in. wyprowadzenie równania okręgu, dowód twierdzenia o kącie wpisanym w okrąg opartym na średnicy, dowód nierówności trójkąta, itp.**
Symetrie	
Symetria względem prostej.	Rysowanie figury symetrycznej do danej figury względem prostej. Znajdowanie osi symetrii figury. *Konstruowanie symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta.* Wykorzystywanie własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta. *Konstruowanie kątów o miarach 60°, 30°, 45 °.*
Symetria względem punktu.	Rysowanie figury symetrycznej do danej względem punktu. Znajdowanie środka symetrii figury.
Symetrie w układzie współrzędnych.	Zaznaczanie punktów symetrycznych do danego punktu względem osi układu współrzędnych oraz względem początku układu współrzędnych.
Graniastosłupy i ostrosłupy.	Rozpoznawanie i rysowanie graniastosłupów i ostrosłupów. Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów (m.in. z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa). Obliczanie długości odcinków w graniastosłupach i ostrosłupach. *Zamiana jednostek objętości.*
RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA	
Odczytywanie danych.	Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w rozmaity sposób (tabele, diagramy, wykresy). Obliczanie średniej arytmetycznej **i mediany**. **Wskazywanie mody, lub stwierdzanie jej braku**
Zaawansowane metody zliczania.	Stosowanie reguły dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach wymagających rozważenia kilku przypadków, **permutacje, wariacje bez powtórzeń; wariacje z powtórzeniami; kombinacje; Zasada Szufladkowa Dirichleta. Zliczanie elementów zbiorów skończonych.**
Rachunek prawdopodobieństwa.	Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach polegających na rzucie dwiema kostkami, losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem lub bez zwracania **Zdarzenia bardziej i mniej prawdopodobne, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.**
ZASTOSOWANIA MATEMATYKI	
Obliczenia procentowe.	Powtórzenie obliczeń procentowych z klasy VII. Podatek VAT i inne podatki, lokaty bankowe.
Podział proporcjonalny.	Rozwiązywanie zadań tekstowych dotyczących podziału proporcjonalnego.

FUNKCJE	
Przykłady funkcji. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji.	**Pojęcie funkcji. Posługiwanie się wzorem funkcji, tabelką, wykresem. Rozpoznawanie argumentów, wartości, miejsc zerowych funkcji. Odczytywanie własności funkcji z wykresu. Rozumienie związków między wzorem funkcji a jej wykresem. Proporcjonalność prosta i odwrotna.**
Układy równań	
Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. **Wybrane układy równań**	**Zapisywanie związków między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań. Znajdowanie par liczb spełniających układ równań. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania ,metodą przeciwnych współczynników, metodą wyznaczników i metodą graficzną. Rozwiązywanie zadań tekstowych.** **Układy równań z dowolną liczbą niewiadomych; układy równań wyższych stopni.**

OPIS ZAŁOŻONYCH OSIĄGNIĘĆ UCZNIA W KLASACH VII–VIII

OPIS ZAŁOŻONYCH OSIĄGNIĘĆ –ETAP FORMALNY

Szczegółowy opis osiągnięć przedstawiono w tabeli. Osiągnięcia zostały podzielone na podstawowe („p”) i ponadpodstawowe („pp”). Wśród osiągnięć podstawowych znajdują się osiągnięcia na poziomie koniecznym i podstawowym, a wśród osiągnięć ponadpodstawowych – osiągnięcia na poziomie rozszerzonym i dopełniającym. W rubryce „Klasa” podano numer klasy, w której dana umiejętność pojawia się po raz pierwszy (w szczególności wymagana jest na końcu danego roku). Osiągnięcia z niższych klas są dalej ćwiczone i obowiązują także w klasach wyższych. W skali ocen od 1 do 6 osiągnięcia oznaczone „p” odpowiadają ocenie dostatecznej. Uczeń czwórkowy, piątkowy i szóstkowy oprócz tych wymagań powinien spełniać wymagania wyższe, oznaczone „pp” a jego ocena wystawiona powinna być zgodnie z obowiązującą w szkole skalą ocen.

Wymagania	**KLASA VII**	**KLASA VIII**
ELEMENTY LOGIKI Uczeń powinien umieć:		
znać pojęcie zdania logicznego, spójnika logicznego, prawa rachunku zdań, znać pojęcie i budowę twierdzenia matematycznego, pojęcie i rodzaje dowodów: wprost i nie wprost	pp	
ELEMENTY TEORII MNOGOŚCI Uczeń powinien umieć:		
znać pojęcie zbioru, należenia do zbioru, inkluzji, sumy zbiorów, iloczynu zbiorów, różnicy zbiorów, znać prawa de Morgana, diagramy Venna	pp	
ARYTMETYKA Uczeń powinien umieć:		
w zbiorze licz całkowitych :rozwiązywać kongruencje, stosować cechy podzielności liczb, rozwiązywać równania diofantyczne	pp	
obliczać wartości prostych wyrażeń arytmetycznych, w których występują liczby wymierne;	p	
zapisywać liczby wymierne w postaci rozwinięć dziesiętnych;	p	
obliczać procent danej liczby i liczbę na podstawie jej procentu;	p	
obliczać, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba:	p	
proste przykłady liczbowe,	p	
trudniejsze przykłady;	pp	
pojęcie punktu procentowego	pp	
szacować niektóre liczby niewymierne;	p	
rozpoznawać liczby niewymierne;	p	
obliczać potęgę (o wykładniku naturalnym) liczby wymiernej; i całkowitym ujemnym i potęgę o wykładniku wymiernym	P pp	

wykonywać działania na potęgach:	p	
proste przykłady,	p	
trudniejsze przykłady;	pp	
zapisywać duże i małe liczby w notacji wykładniczej;	p	
wykonywać działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej;	pp	
mnożyć i dzielić pierwiastki tego samego stopnia (drugiego lub trzeciego);	p	
wyłączać czynnik przed znak pierwiastka;	p	
przekształcać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki:	p	
przykłady typu: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$, $(2\sqrt{6})^2$	p	
przykłady typu: $2\sqrt{3}+\sqrt{27}$, $(2\sqrt[3]{6})^7 - \sqrt[7]{6}$	p	
Dowód niewymierność liczby $\sqrt{2}$.	pp	
ALGEBRA Uczeń powinien umieć:		
budować proste wyrażenia algebraiczne, obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych, dodawać i odejmować sumy algebraiczne, mnożyć jednomian przez dwumian;	p	
mnożyć dwumian przez dwumian;	p	
mnożyć sumy algebraiczne;	p	
wyłączać przed nawias:	pp	
liczbę,	pp	
jednomian;	pp	
znać i stosować wzory skróconego mnożenia	pp	
Dowodzić twierdzeń dotyczących algebry	pp	
rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (także podane w postaci proporcji); znać równania sprzeczne, tożsamościowe, rozwiązywać wybrane równania wyższych stopni	p pp	
rozwiązywać za pomocą równań zadania tekstowe:		
proste,	p	
złożone;	pp	
przekształcać proste wzory fizyczne, geometryczne itp.;	pp	
rozwiązywać nierówności i zaznaczać na osi liczbowej zbiór rozwiązań, również wybrane nierówności wyższych stopni oraz niewymierne, zna i potrafi stosować nierówność między średnimi	pp	
zaznaczać punkty w układzie współrzędnych i odczytywać współrzędne punktów;	p	
wyprowadzić wzór na odległość dwóch punktów zadanych za pomocą współrzędnych. Sprowadzać wybrane zagadnienia		pp

geometrii do „rachunków” za pomocą kartezjańskiego układu współrzędnych m.in. wyprowadzenie równanie okręgu, udowodnić twierdzenie o kącie wpisanym w okrąg opartym na średnicy, udowodnić nierówności trójkąta, itp.		
znajdować współrzędne punktu symetrycznego do danego względem osi lub początku układu współrzędnych;		pp
znać pojęcie funkcji, posługiwać się wzorem funkcji, tabelką, wykresem. Rozpoznawać argumenty, wartości, miejsca zerowe funkcji, odczytywać własności funkcji z wykresu. rozumieć związki między wzorem funkcji a jej wykresem, proporcjonalność prosta i odwrotna.		pp
zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań, znajdować pary liczb spełniających układ równań		pp
rozwiązywać układy równań liniowych metodami algebraicznymi; wyznaczników i geometryczną		pp
rozwiązywać za pomocą układu równań zadania tekstowe:		pp
Umie rozwiązywać wybrane układy równa z dowolną liczbą niewiadomych; układy równań wyższych stopni .		pp
GEOMETRIA Uczeń powinien umieć:		
rozwiązywać proste zadania dotyczące kątów, trójkątów i czworokątów; znać i stosować cechy przystawania trójkątów	P pp	
obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów;	p	
zamieniać jednostki pola;	p	
rysować figurę symetryczną do danej figury względem prostej i względem punktu; symetrie w układzie współrzędnych		pp pp
rozpoznawać figury osiowosymetryczne i środkowosymetryczne;		p
obliczać długość okręgu i pole koła; długość łuku i pole wycinka koła;		p
rozpoznawać kąty wpisane i środkowe;		pp
konstruować: proste prostopadłe, symetralną odcinka, dwusieczną kąta, trójkąt o trzech danych bokach, niektóre kąty o zadanej mierze, np. 45^o, 135^o, 60^o, 30^o;	p	
rozwiązywać niezbyt skomplikowane zadania konstrukcyjne;	p	
konstruować: okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany w trójkąt, wielokąty foremne (trójkąt równoboczny, kwadrat, sześciokąt, ośmiokąt); zna warunki konieczne i wystarczające na to, by na czworokącie można było opisać okrąg oraz na to, aby w czworokąt można było wpisać okrąg, obliczać długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym i promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, własności wielokątów foremnych, ustala liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu, konstruuje prostą styczną do okręgu w danym punkcie, wykorzystuje w zadaniach fakt, że prosta styczna jest prostopadła		pp

do promienia poprowadzonego do punktu styczności.		
rozwiązywać zadania wykorzystując własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta;		p
obliczać miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego		pp
zna twierdzenie Pitagorasa z dowodem		p
stosować twierdzenie Pitagorasa do obliczania długości boków trójkąta prostokątnego		p
do obliczania długości odcinków w złożonych sytuacjach geometrycznych; wyprowadzić wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego oraz jego pole. Wykorzystywać związki między długościami boków trójkątów prostokątnych o kątach 30 60 i 90 oraz trójkątów prostokątnych równoramiennych.		p pp
Znać z dowodem twierdzenie Talesa i umieć stosować	pp	
wykorzystywać cechy podobieństwa prostokątów i trójkątów prostokątnych:		
przy rozwiązywaniu prostych zadań,	pp	
przy rozwiązywaniu zadań trudniejszych;	pp	
Dowodzić wybranych faktów geometrii :prosty złożonych		P pp
rozpoznawać i rysować graniastosłupy i ostrosłupy;		p
wskazywać niektóre odcinki i kąty w graniastosłupach i ostrosłupach, np. przekątne graniastosłupa, wysokość i wysokości ścian bocznych ostrosłupa;		p
obliczać pola powierzchni i objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów;		p
odczytywać diagramy, tabele i wykresy statystyczne;		p
przedstawiać dane statystyczne w rozmaity sposób;		□□□□p□□□□□
obliczać średnią arytmetyczną: obliczać inne średnie, medianę, wskazywać modę		P pp
w prostych sytuacjach,		p
w skomplikowanych sytuacjach;		pp
ELEMENTY KOMBINATORYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA		
Uczeń potrafi: obliczać, ile jest obiektów, mających daną własność w prostych przykładach zdarzeń losowych, obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w doświadczeniach losowych, polegających na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kuli spośród zestawu kul. zna regułą mnożenia; reguła dodawania;		p

.		
Zna i stosuje w zadaniach: permutacje, wariacje bez powtórzeń; wariacje z powtórzeniami; kombinacje; Zasadę Szufladkową Dirichleta, potrafi zliczać elementy zbiorów skończonych		pp

SPOSOBY OSIĄGANIA CELÓW KSZTAŁCENIA I WYCHOWANIA

Dobierając sposoby osiągania celów edukacyjnych, powinniśmy uwzględniać możliwości i zainteresowania uczniów, stosując zasadę stopniowania trudności.
Omawiane treści powinniśmy starać się odnosić do rzeczywistości otaczającego nas świata, by ukazać piękno matematyki a zarazem jej użyteczność.
By rozwinąć zdolności myślenia twórczego u uczniów nauczyciel powinien stosować heurystyczne metody rozwiązywania problemów, które stymulują uczniów do poszukiwania rozwiązań ,do nowych wyzwań. . Stwarzają warunki do odkrycia nowej wiedzy i myślenia twórczego. Nauczyciel matematyki powinien dążyć do tego, by jego uczniowie nabyli umiejętność sprowadzania nieznanych wcześniej zagadnień matematycznych do poznanych zagadnień i skutecznie je rozwiązywali, jak i również by wykształcić u uczniów sprawność w posługiwaniu się w miarę szerokim zakresem technik matematycznych i nauczyć dokonywania odpowiedniego ich doboru w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień.
Warto również na lekcjach matematyki stosować formę nauczania, jaką jest praca w grupach. Dzięki niej uczniowie uczą się współdziałania, organizacji pracy, kształcą umiejętności komunikowania się i argumentowania. Warto też na lekcjach matematyki wykorzystywać urządzenia techniczne typu: kalkulator, kalkulator graficzny, komputer, programy komputerowe wspomagające nauczanie geometrii, algebry oraz szczególne na etapie konkretnym gry dydaktyczne, modele brył, czy zestawy do budowy brył.

Podczas kształcenia uczniów na początku etapu konkretnego ważne jest, by rozwinąć u nich sprawność rachunkową. Wprowadzając nowe działania możemy starać się zainicjować sytuację, w której dane działanie jest przydatne. Uczniowie powinni sami odkrywać odpowiedni algorytm a my tylko powinniśmy pełnić rolę osoby wspomagającej uczniów w ich samodzielnym dochodzeniu do rozwiązania stawianych przed nimi problemów. Potem powinniśmy podsumować odkrycia uczniów, rozwiązując z nimi konkretny przykład. Nabyte już z kolei umiejętności rachunkowe powinniśmy doskonalić przy każdej możliwej okazji, także przy okazji omawiania tematów z innych działów, warto doskonalić te umiejętność również na etapie formalnym.
Nauka geometrii z kolei na początku etapu konkretnego powinna odbywać się poprzez czynnościowe poznawanie figur geometrycznych i ich własności: przez wycinanie, mierzenie, sklejanie. Po takim etapie można przejść do rysowania figur geometrycznych, najpierw na papierze w kratkę. Powinniśmy zwracać na tym etapie szczególną uwagę na estetykę i dokładność wykonywanych rysunków. W starszych klasach coraz częściej odwołujemy się do

wyobraźni uczniów. Rysunek zaczyna pełnić rolę pomocniczą wystarczy, by był szkicem (nawet odręcznym) pozwalającym zrozumieć problem geometryczny. Przy okazji omawiania figur geometrycznych i ich własności na etapie formalnym powinniśmy uzasadniać wprowadzane treści, wyprowadzać wzory, czy dowodzić twierdzeń. Powinniśmy również starać się, aby uczniowie sami przeprowadzali krótkie rozumowania i uzasadnienia, a my kolejnymi pytaniami i podpowiedziami możemy im w tym pomagać. Na etapie formalnym powinniśmy kształtować już umiejętność przeprowadzania sformalizowanych dowodów.

Zadania konstrukcyjne z kolei powinniśmy traktować jako rozwijanie sprawności manualnej i umiejętności praktycznych.

Kształtowanie pojęć matematycznych na etapie konkretnym powinno odbywać się poprzez głębsze przyjrzenie się obiektowi: konkretne przykłady, badanie ich własności, które to ma doprowadzić do uogólnienia i wprowadzenia nowych nazw. Wskazane jest sprawdzanie rozumienia nowych pojęć w różnych kontekstach i sytuacjach. Na etapie formalnym z kolei można już uczyć posługiwania się sformalizowanym językiem matematycznym.

Rozwijanie umiejętności posługiwania się symbolami literowymi, czyli nauka algebry na etapie konkretnym powinna być traktowana wyłącznie propedeutycznie, wprowadzenie symboli literowych poprzedzone powinno być stosowaniem różnych symboli graficznych. Zastąpienie konkretnych liczb symbolami literowymi powinno wynikać z naturalnej potrzeby uogólnienia jakieś zależności. Dopiero w kolejnym etapie powinniśmy budować z dziećmi proste wyrażenia algebraiczne i powoli podnosić stopień trudności. Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań , powinniśmy odpowiednio dużo czasu poświęcić budowaniu wyrażeń algebraicznych. W następnych klasach przed wprowadzaniem nowych tematów powinniśmy znaleźć czas na sprawdzanie i utrwalanie nabytych wcześniej umiejętności uczniów. Przy rozwiązywaniu zadań za pomocą algebry powinniśmy starać się wyrabiać u uczniów nawyk sprawdzania otrzymanych wyników. Dotyczy to rozwiązywania równań, zadań tekstowych. Na etapie formalnym możemy już przeprowadzać dowody algebraiczne i kształtować u uczniów umiejętność przeprowadzania sformalizowanych dowodów.

Zarówno przy kształtowaniu pojęć z arytmetyki, algebry i geometrii, jak i przy utrwalaniu wiedzy, starajmy się podsuwać uczniom przykłady związane z życiem codziennym. W ten sposób nauczamy ich dostrzegać prawidłowości matematyczne w otaczającym świecie i rozwiniemy ich praktyczne umiejętności stosowania matematyki.

PROPOZYCJE KRYTERIÓW OCENY I METOD SPRAWDZNIA OSIĄGNIĘĆ UCZNIA

Systematyczne ocenianie efektów pracy zarówno ucznia, jak i nauczyciela, jest koniecznym oraz nieodłącznym elementem każdego programu szkolnego, mającego przynosić zaplanowane i oczekiwane wyniki.

Propozycja systemu oceniania za pomocą stopni :

Obowiązująca skala ocen: od 1 do 6.
Ocenie w stopniach od 1 do 6 podlegają:

1. sprawdziany,
2. prace klasowe – zapowiedziane (oceny niedostateczne z pracy klasowej można poprawić w trakcie dyżurów, w ciągu dwóch tygodni po otrzymaniu stopnia, jeżeli uczeń był na pracy klasowej nieobecny, powinien napisać ją po powrocie do szkoły, w trakcie dyżuru, w ustalonym terminie),
3. kartkówki z 2-3 tematów.

W czasie semestru stawiane mogą być również plusy i minusy. Trzy plusy dają ocenę bardzo dobrą, trzy minusy – ocenę niedostateczną. Plusami i minusami oceniane mogą być:

• praca ucznia na lekcji – wypowiedzi ustne, aktywność i zaangażowanie; wyróżniająca się wypowiedź – plus, kompletny brak zaangażowania, niewykonywanie poleceń – minus
• prace domowe – wyróżniające się wykonanie zadania domowego – plus, brak pracy domowej – minus

Otrzymane w trakcie semestru stopnie są podstawą do wystawienia oceny za cały semestr. Oceny semestralne natomiast są podstawą do wystawienia oceny rocznej.

Można przyjąć następujący system przeliczania punktów uzyskanych z pracy na ocenę:
Procent maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania
0 – 39 – niedostateczny
40 – 54 – dopuszczający
55 – 69 – dostateczny
70 – 84 – dobry
85 – 95 – bardzo dobry
96 – 100 – celujący
Waga ocen: Waga 2: sprawdziany, prace klasowe, Waga 1: prace domowe, kartkówki, odpowiedz ustna, aktywność itp..
Poprawy (w zależności od zapisu nauczyciela)

Propozycja oceniania punktowego :

Nauczycielom, którym nie wystarcza tradycyjny sposób oceniania, proponuję metodę opartą na następującym systemie punktowym — uczeń za swoje bieżące osiągnięcia otrzymuje punkty, a stopnie w skali od 1 do 6 pojawiają się dopiero jako oceny semestralne, według kryteriów ustalonych w szkole. Przedmiotem oceny może być: odpowiedź ustna z bieżącego materiału, sprawdzian pisemny zapowiadany z wyprzedzeniem,

kartkówka – niezapowiedziana (z ostatnich 2-3 tematów), praca klasowa, aktywność , zadanie domowe.
Na początku okresu nauczyciel informuje uczniów i ich rodziców (opiekunów) o ilości ocen cząstkowych, na przykład: dwie oceny z odpowiedzi, trzy sprawdziany (kartkówki), jedno zadanie aktywizujące, jedna praca klasowa, dwie kontrole zadania domowego i przypisuje im orientacyjne wagi (rangi) punktowe, to znaczy maksymalne liczby punktów, jakie będzie można za nie uzyskać (tym więcej punktów, im bardziej znacząca ocena). Na semestr możemy podać uzyskaną liczbę punktów wraz z przeliczeniem na ocenę. Chcąc wystawić ocenę końcową, dzielimy sumę wszystkich punktów zdobytych przez ucznia przez sumę punktów, które mógł otrzymać, mnożymy razy 100% i według ustalonych w szkole progów procentowych wystawiamy ocenę. Uczeń ma prawo do zgłoszenia nieprzygotowania (wymiennie z brakiem zadania) bez podawania przyczyny 1 raz w ciągu semestru, przy 4 godzinach i więcej – 2 razy w semestrze zaraz na początku lekcji, nie może to mieć jednak miejsca w przypadku zapowiedzianych prac pisemnych bądź powtórek. W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na zajęciach (na podstawie dziennika lekcyjnego), uczeń ma obowiązek napisania pracy pisemnej, która została przeprowadzona w klasie pod jego nieobecność w terminie do 2 tygodni od momentu pojawienia się w szkole (nie dotyczy dłuższych nieobecności, wtedy termin ustala się odrębnie w porozumieniu z nauczycielem). Uczeń sam dba o terminowość i zgłasza się do nauczyciela o wyznaczenie stosownego terminu uzupełnienia pracy pisemnej. Jeżeli uczeń ma wszystkie oceny z prac pisemnych, może poprawić dowolnie wybraną z nich w ustalonym terminie a najpóźniej na dwa tygodnie przed klasyfikacją okresową (roczną). W tej sytuacji słabsza z ocen zostaje anulowana. Reszty działań nie poprawia się.
Przykładowe przeliczenie liczby punktów na oceny:
(podane w % bazując na przyjętej w danej szkole maksymalnej do zdobycia liczbie punktów):

0 – 39 – niedostateczny
40 – 54 – dopuszczający
55 – 69 – dostateczny
70 – 84 – dobry
85 – 95 – bardzo dobry
96 – 100 – celujący

ANEKS 2

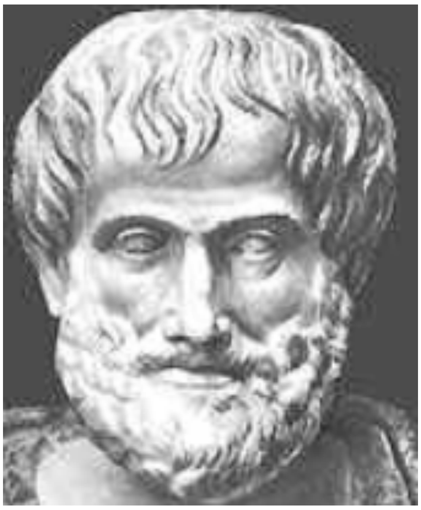
Skrypt z matematyki

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Elementy Logiki

Logika jest to nauka zajmująca się zagadnieniami prawdy i fałszu. Podstawowym pojęciem tej nauki jest *pojęcie zdania w sensie logiki* .
Za ojca logiki można uznać greckiego uczonego Arystotelesa.

Arystoteles *urodził się w Stagirze, na Półwyspie Trackim w roku 384, zmarł w roku 322 p.n. e. w Chalkis. W roku 367 przybył do Aten i wstąpił do platońskiej Akademii (szkoły).*
W Akademii spędził dwadzieścia lat, z początku jako uczeń i zwolennik plutonizmu, następnie jako samodzielny, oryginalny myśliciel. Po opuszczeniu Aten i trzyletnim pobycie w Assos (w Azji) oraz, w pobliskim Atarneusie, gdzie nauczał i prowadził badania, był nauczycielem Aleksandra Macedońskiego aż do jego wstąpienia na tron; następnie pozostał w Macedonii i mieszkał w Stagirze. Po ustaniu bliskich stosunków z Aleksandrem powrócił do Aten i założył tam szkołę „perypatetycką", którą prowadził od roku 335 do 323. Następnie udał się do Chalkis, gdzie zmarł niebawem.



Rysunek 1: Arystoteles

Zdaniem w sensie logiki nazywamy każde zdanie o którym możemy stwierdzić, czy jest prawdziwe czy też nieprawdziwe.
Przykłady **zdań w sensie logiki :**
Stół jest krzesłem.
W sierpniu jest lato.
Przykłady zdań, które **nie są zdaniami w sensie logiki :**
Czy jutro będzie padało?
Podejdź do tablicy!
Zdaniami w sensie logiki nie są ani zdania w trybie pytającym, ani w trybie rozkazującym.

Zadanie 1
W poniższym tekście wskaż zdania, które są zdaniami w sensie logiki.
"Polya mawiał:

- von Neumann był jedynym moim uczniem, którego się bałem. Prowadziłem w Zurichu seminarium, którego uczestnikiem był von Neumann. Doszedłszy do pewnego twierdzenia powiedziałem, że nie jest udowodnione i dowód pewnie byłby trudny. Von Neumann nie odezwał się, ale po pięciu minutach podniósł rękę. Gdy go wywołałem, podszedł do tablicy i to twierdzenie......... udowodnił. Odtąd lękałem się go jak ognia."

Ze zdań logicznych za pomocą pewnych operacji logicznych możemy tworzyć nowe zdania logiczne.
Taki operatorami są tzw. **spójniki logiczne.** Wyróżniamy pięć podstawowych spójników logicznych:
koniunkcja "i" ozn. $\wedge$
alternatywa "lub" ozn. $\vee$
implikacja "jeżeli ..., to ..." ozn. $\Longrightarrow$
równoważność "..., wtedy i tylko wtedy, gdy..." ozn. $\Longleftrightarrow$
negacja "nieprawda, że ..." ozn. $\neg$

Ćwiczenie 1
Niech p będzie zdaniem: Polska leży w Europie.
Niech q będzie zdaniem: Europa jest kontynentem o największej powierzchni.
Zapisz słownie zdania: $p \wedge q$, $q \vee p$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$, $\neg p$, $\neg q$ i oceń ich prawdziwość.

W celu skrócenia zapisu w dalszym ciągu wartości logiczne tj. prawdę i fałsz będziemy oznaczali odpowiednio symbolami $1, 0$.
Poniższa tabela przedstawia wartości logiczne wyżej zdefiniowanych spójników logicznych.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0

Prawa logiczne to formuły (tzn. sensowne wyrażenia) złożone ze spójników logicznych oraz liter o tej własności, że jeżeli za każdą literę podstawimy dowolne zdanie w sensie logiki, to w wyniku takiego podstawienia otrzymamy zdanie prawdziwe.

Wybrane prawa rachunku zdań

- Prawo tautologii

$$p \Longrightarrow p$$

- Prawo podwójnego przeczenia

$$(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$$

- Prawo wyłączonego środka

$$(\neg p) \vee p$$

- Prawa de Morgana

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

Dowód Prawa tautologii :

p	$p \Longrightarrow p$
0	1
1	1

Dowód Prawa podwójnego przeczenia

p	$\neg p$	$(\neg(\neg p))$	$(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Dowód Prawa wyłączonego środka

p	$\neg p$	$(\neg p) \vee p$
1	0	1
0	1	1

Dowód Praw de Morgana

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1

Przykład 1
Sprawdź, czy poniższa formuła jest tautologią :

$$[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r] \Longrightarrow [(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)]$$

Rozwiązanie :

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r$	$p \Longrightarrow r$	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	formuła
0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Odpowiedź:
Powyższa formuła jest tautologią.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Sprawdź, czy poniższe formuły są tautologiami:

(a)
$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \Longrightarrow p$$

(b)
$$(\neg p \Longrightarrow p) \Longrightarrow q$$

(c)
$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Zadanie 2
Udowodnij następujące prawa:

- *Prawo przemienności koniunkcji:*
$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$$
- *Prawo przemienności alternatywy:*
$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$$
- *Prawo łączności alternatywy:*
$$[(p \vee q) \vee s] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee s)]$$
- *Prawo łączności koniunkcji:*
$$[(p \wedge q) \wedge s] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge s)]$$
- *Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:*
$$[p \wedge (q \vee s)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge s)]$$

- *Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*

$$[p \vee (q \wedge s)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee s)]$$

- *Reguła odrywania*

$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Zadanie 3
Zdefiniuj implikację za pomocą negacji i alternatywy.

Elementy Teorii Mnogości

Pojęcie zbioru
Dawniej używano nazwy mnogość, którą wprowadził twórca tej teorii, niemiecki matematyk Georg Cantor.

Cantor Georg Ferdinand Ludwig Philip *(ur. 3 marca 1845 r. w Sankt Petersburgu - zm. 6 czerwca 1918 r. w sanatorium w Halle) - niemiecki matematyk. Studiował w Darmstadt, Zürichu i Getyndze.Do jego nauczycieli należeli: Karol Weierstraß, Ernst Edward Kummer oraz Leopold Kronecker. Później pracował w Halle. Był zaprzyjaźniony z Ryszardem Dedekindem. Cantor miał znaczący udział w tworzeniu podwalin nowoczesnej matematyki. W szczególności uchodzi za twórcę teorii mnogości. Cantorowi zawdzięczamy następującą definicję zbioru: Zbiorem jest spojenie w całość określonych rozróżnialnych podmiotów naszej poglądowości czy myśli, które nazywamy elementami danego zbiory."*

Jego największym wkładem w rozwój matematyki było stworzenie podwalin teorii mnogości a w tym koncepcji liczb pozaskończonych. Cantor odkrył, że zbiory nieskończone mogą być różnej wielkości - w szczególności pokazał za pomocą rozumowania przekątniowego, że zbiór liczb naturalnych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych. Cantor przez długi czas starał się udowodnić hipotezę continuum (jak się okazało w latach 50. - jego wysiłki nie mogły

Rysunek 2: G. Cantor

przynieść zadowalającego go rezultatu). Długie lata cierpiał na ciężkie depresje (parokrotnie był z tego powodu hospitalizowany). Pod koniec życia zajmował się również mistycyzmem - rozwijał koncepcję Absolutnej Nieskończoności, którą utożsamiał z Bogiem. Większość współczesnych mu matematyków odnosiło się do jego dokonań z dużą nieufnością. Obecnie niemal wszyscy matematycy nie tylko w pełni akceptują jego wyniki, ale i uznają je za przełomowe w historii matematyki.

Zbiór jest w teorii mnogości **pojęciem pierwotnym**, czyli takim, którego nie definiujemy. Możemy jedynie tworzyć tzw. intuicyjną definicję tego pojęcia.
Przez **zbiór** rozumiemy "kolekcję " jakiś przedmiotów.
Na przykład zbiór może być złożony z : krzesła, książki i psa.
Zbiory oznaczamy dużymi literami alfabetu, natomist jego elementy małymi literami alfabetu.
Jeżeli A jest zbiorem, zaś a jego elementem, to piszemy $a \in A$ i czytamy [a należy do A].
Jeśli natomiast A jest zbiorem, zaś a nie jest jego elementem to piszemy $a \notin A$ i czytamy [a nie należy do A].
O dwóch zbiorach A i B mówimy, że są **równe**, wtedy i tylko wtedy, gdy są złożone z tych samych elementów, tzn. dla dowolnego x prawdziwe jest zdanie:

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

Równość zbiorów oznaczamy $A = B$ i czytamy [A równe B].

Mówimy, że zbiór A jest **zawarty** w zbiorze B (**inkluzja**), lub, że A jest **podzbiorem** zbioru B , jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B, co oznaczamy $A \subset B$ i czytamy [A zawiera się w B].
Można więc teraz krótko napisać:

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Zbiorem pustym nazywamy zbiór, który nie ma żadnych elementów i oznaczamy symbolicznie $\emptyset$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Ćwiczenie 1
Wypisz elementy podanego zbioru:
$A = \{x \in C : x \cdot x = 9\}$.
Odpowiedź:
$A = \{-3, 3\}$.

Przykład 1
Niech A_n będzie zbiorem wszystkich wielokrotności liczby naturalnej n. Czy istnieje liczba x która należy do nieskończenie wielu zbiorów A_n?
Rozwiązanie:
W zależności od definicji. Jeśli wielokrotność liczby a zdefiniujemy jako zbiór wszystkich liczb postaci $k \cdot a$, gdzie $k \in C$, to wówczas taka liczba istnieje i nietrudno odgadnąć, że jest nią zero.
Jeśli ntomiast wielokrotność liczby a zdefiniujemy jako zbiór wszystkich liczb postaci $k \cdot a$, gdzie $k \in N$, to wówczas taka liczba nie istnieje, gdyż każda liczba naturalna ma tylko skończoną liczbę dzielników.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Wypisz elementy podanych zbiorów:

(a)
$$B = \{x \in N : x \cdot x = 9\}.$$

(b)
$$C = \{x \in N : x \cdot x = -3\}.$$

Zadanie 2
Czy prawdziwe jest zdanie: $1 \in A$. jeżeli, $A = \{x : 2x = 3\}$.

Zadanie 3
Czy prawdą jest, że $A \subset B$, jeżeli :

- $A = \{1, 3, 5, 9, 14, 20\}$ a $B = \{-3, 1, 3, 5, 9\}$,

- A- zbiór uczniów klasy 1b, zaś B- zbiór uczniów całej szkoły,

- A-zbiór pusty i B- zbiór pusty,

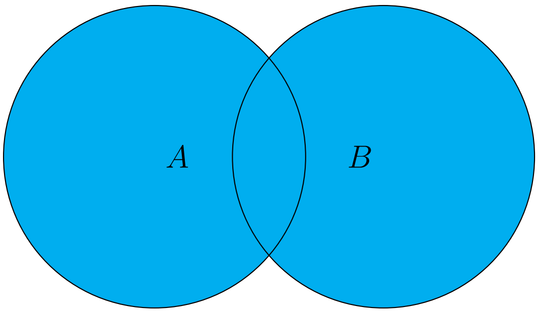
- $A = \{x \in N\}$, zaś $B = \{x \in C\}$.

Zadanie 4
Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, \}$.
Wyznacz zbiór wszystkich jego podzbiorów. Ile ich jest?

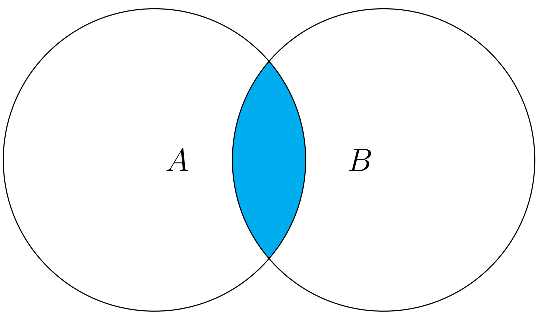
Wykonaj to samo dla zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, \}$.
Co zauważyłeś?
Obserwacja
Jeśli udało Ci się zobserwować, że zbiór n-elementowy ma dokładnie 2^n wszystkich podzbiorów, to postaraj się to uzasadnić.

Działania na zbiorach

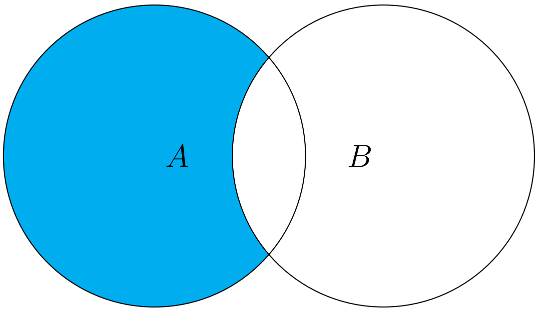
Mając dane dwa zbiory: A i B możemy za pomocą pewnych operacji utworzyć z nich nowe zbiory.
Suma zbiorów (Suma mnogościowa)
Sumą zbiorów A **i** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B. Oznaczamy ją symbolicznie $A \cup B$.
Piszemy:
$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$.



Iloczyn (przekrój) zbiorów (Iloczyn mnogościowy)
Iloczynem zbiorów A **i** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B. Oznaczamy go symbolicznie $A \cap B$.
Czyli:
$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$.



Różnica zbiorów(Różnica mnogościowa)
Różnicą A **minus** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Oznaczamy ją $A \setminus B$.
Czyli: $x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$.



Przykład 1
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
A- zbiór dzielników liczby 16, zaś $B = \{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie :
Zbiór A to zbiór wszystkich dzielników liczby 16, zatem :

$$A = \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\},$$

natomiast

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

Więc :

- $A \cup B = \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 8, 16\}$,
- $A \cap B = \{1, 2\}$,
- $A \setminus B = \{-16, -8, -4, -2, -1, 4, 8, 16\}$,
- $B \setminus A = \{3\}$,

Zadanie 1
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
A- zbiór kwiatów, B- zbiór róż.

Zadanie 2
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$.

Zadanie 3
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
$A = \{x : x^2 = 16\}$, $B = \{x : x + 1 = 2\}$.

Zadanie 4
Niech $A = \{x :$ istnieją $a, b \in N$ takie, że $a > 1, b > 1$ oraz $x = a \cdot b\}$, opisz słownie czym są elementy zbioru $N \setminus (A \cup \{1\})$?

Zadanie 5
Niech $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące własności:

(a)
$$A \dot{-} B = \emptyset \iff A = B$$

(b)
$$A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

(c)
$$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$$

(d)
$$(A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C) \supset A \dot{-} C$$

Operację $A \dot{-} B$ nazywamy *różnicą symetryczną zbiorów* a i b. Może domyślasz się dlaczego tę różnicę nazywamy różnicą symetryczną? Jeśli tak, spróbuj to wyjaśnić.

Moc zbiorów

Jeżeli zbiór A ma skończenie wiele elemntów, to ilość elementów zbioru A oznaczamy przez $\overline{\overline{A}}$ i nazywamy **mocą zbioru** A.
Dla zbiorów skończonych A, B, C prawdziwe są następujące własności:

(a) $\overline{\overline{A \cup B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}-\overline{\overline{A \cap B}}$

(b) $\overline{\overline{A \cup B \cup C}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}-\overline{\overline{A \cap B}}-\overline{\overline{A \cap C}}-\overline{\overline{B \cap C}}+\overline{\overline{A \cap B \cap C}}$

(c) Jeżeli $A \subset B$, to $\overline{\overline{B \setminus A}} = \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A}}$

(d) $\overline{\overline{B \setminus A}} = \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{B \cap A}}$

Przykład 1
W klasie jest 20 uczniów,przy czym każdy uczy się co najmniej jednego języka. Języka łacińskiego uczy się 10 osób, języka greckiego natomiast 15 osób. Ile osób uczy się łaciny i greki?

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez A zbiór osób uczących się łaciny,przez B natomiast zbiór osób uczących się greki.
Wiemy , że:

$$\overline{\overline{A \cup B}} = 20, \qquad \overline{\overline{A}} = 10, \qquad \overline{\overline{B}} = 15$$

Szukamy: $\overline{\overline{A \cap B}}$.
Ponieważ

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}.$$

więc

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cup B}}.$$

Zatem

$$\overline{\overline{A \cap B}} = 10 + 15 - 20 = 5.$$

Odpowiedź.
Łaciny i greki uczy się pięć osób.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
W klasie każdy uczy się co najmniej jednego języka. 17 osób uczy się języka angielskiego, 14 języka niemieckiego a 5 osób uczy się angielskiego i niemieckiego. Ilu uczniów liczy ta klasa?

Zadanie 2
W klasie jest 30 uczniów i każdy uczy się co najmniej jednego języka. 20 osób uczy się języka angielskiego, 15 języka niemieckiego a 10 osób języka francuskiego. 5 z nich uczy się języka angielskiego i języka niemieckiego, 5 języka angielskiego i języka francuskiego oraz 5 języka francuskiego i języka niemieckiego. Ilu uczniów uczy się wszystkich trzech języków?

Zadanie 3
W klasie jest 24 uczniów i każdy uczy się co najmniej dwóch języków. Przy czym: języka angielskiego uczy się 16 osób, języka niemieckiego 17 osób, języka hiszpańskiego natomiast 18 uczniów. Ilu uczniów uczy się wszystkich

trzech języków?

Zadanie 4
Każda spośród 154 osób pracujących w pewnej firmie drogę do pracy pokonuje korzystając z tramwaju, autobusu lub metra. Z tramwaju korzysta 80 osób, z autobusu 110, a z metra 60 osób. Wśród nich są osoby korzystające z wszystkich trzech środków lokomocji i nie ma osób, które korzystają tylko z dwóch środków lokomocji. Ile osób korzysta z trzech środków lokomocji?

Zadanie 5
Dane są dowolne zbiory A i B uzasadnij, że

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A \cup B}}.$$

Zadanie 6
Uogólnij tezę poprzedniego zadania w następujący sposób. Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, ..., A_n$ zachodzi nierówność:

$$\overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + ... + \overline{\overline{A_n}} \geqslant \overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}}.$$

Zadanie 7
Czy dla niepustych zbiorów A, B może zajść równość $\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$? Jeśli tak, to dla jakich?

Arytmetyka liczb całkowitych

Przez N oznaczać będziemy zbiór liczb naturalnych, natomiast przez C zbiór liczb całkowitych. Zatem

$$N = \{1, 2, 3, ...\},$$

$$C = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}.$$

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Mówimy, że liczba całkowita a **dzieli liczbę całkowitą** b, jeżeli istnieje liczba całkowita c, taka, że: $b = a \cdot c$. Oznaczamy to $a \mid b$. Wówczas liczbę a nazywamy **dzielnikiem liczby** b.
Dalej podamy podstawowe własności relacji podzielności.

Dla dowolnych liczb całkowitych prawdziwe są poniższe własności:

1. $a \mid b \wedge b \mid c \Longrightarrow a \mid c$

2. $a \mid a$

3. $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid b + c$

4. $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid b - c$

Wśród liczb naturalnych wyróżniamy **liczby pierwsze** i **liczby złożone**. Zbiór liczb pierwszych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{P}$.
Definicja 1
Liczbę naturalną, różną od jeden nazywamy **liczbą pierwszą**, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne.
Na przykład, zbiorem dzielników naturalnych liczby 5 jest zbiór $D = \{1, 5\}$.

Definicja 2
Liczbę naturalną, różną od jeden, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy **liczbą złożoną**.
Na przykład, zbiorem dzielników naturalnych liczby 6 jest zbiór $D = \{1, 2, 3, 6\}$.

Uwaga!
Liczba "1" nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną.

Ćwiczenie 1
Udowodnij, że jeśli liczba naturalna a jest liczbą złożoną, to ma ona dzielnik pierwszy, mniejszy lub równy od $\sqrt{a}$.

Ćwiczenie 2
Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c prawdziwe są następujące zdania:

(a) $a|a$,

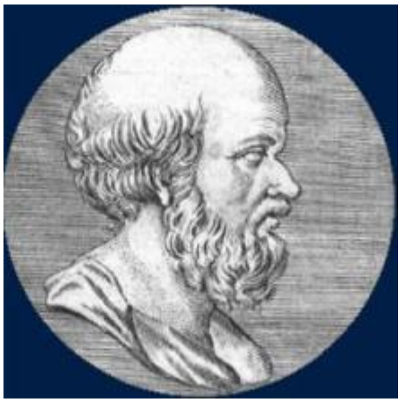
(b) $(a|b \wedge b|a) \Longrightarrow (a = b \vee a = -b)$,

(c) $(a|b \wedge b|c) \Longrightarrow (a|c)$.

Sito Eratostenesa

Już starożytni Grecy zastanawiali się nad zagadnieniem liczb pierwszych. Do rozwoju teorii przyczynił się zdecydowanie **Eratostenes z Cyreny**- wymyślił tzw. **Sito Eratostenesa** czyli dość prosty (dla małych liczb) algorytm znajdowania liczb pierwszych.

Eratostenes z Cyreny, *ur. ok. 275 p.n.e., Cyrena (Libia), zm. ok. 194 p.n.e., Aleksandria, grecki filozof, astronom, matematyk i geograf. Zajmował się także filologią, historią i muzyką; naczelny kustosz Biblioteki Aleksandryjskiej i wychowawca późniejszego faraona Ptolemeusza IV Filopatora; uważany za najbardziej uczonego człowieka swych czasów. Do jego największych osiągnięć należy wykonanie pierwszego, stosunkowo dokładnego pomiaru wielkości kuli ziemskiej. Wykorzystał przy tym fakt, że gdy w Syene (ob. Asuan) w południe Słońce znajduje się dokładnie w zenicie, w Aleksandrii, leżącej w przybliżeniu na tym samym południku, odległość Słońca od zenitu wynosi 1/50 kąta pełnego (czyli* $7^o12'$*). Wywnioskował stąd, że kąt środkowy, odpowiadający łukowi południka między tymi miejscowościami, jest także równy 1/50 kąta pełnego, a więc obwód południka wynosi 50 odległości z Syene do Aleksandrii. Odległość tę przyjął E. jako 5000 stadionów, co dało obwód kuli ziemskiej 250 000 stadionów. Przeliczenie stadionów na metry jest niepewne; jeśli np. przyjmuje się za J.L. Dreyerem, że 1 stadion = 157,5 m, to promień i obwód Ziemi oceniane przez E. są tylko o nieco ponad 1% mniejsze od obecnie znanych; podane przez E. wartości są najwidoczniej zaokrąglone, więc ich dokładne przeliczanie na współczesne miary jest mało uzasadnione. E. wyznaczył też kąt nachylenia ekliptyki do równika niebieskiego.*



Rysunek 3: Erastotenes

Aktualnie problem zdaje się wciąż nie być dostatecznie zbadany. Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele i do tej pory nie znamy żadnego praktycznego wzoru na znajdowanie kolejnych liczb pierwszych.
Sito Eratostenesa to algorytm służący do wyznaczania liczb pierwszych z zadanego przedziału.
Działanie sita Eratostenesa omówimy na następującym przykładzie:

Przykład 1
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od liczby 101.

Rozwiązanie:
Wypisujemy wszystkie liczby naturalne, mniejsze od liczby 101:
1 krok
Wykreślamy 1(bo 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną). Ponieważ pierwszą w kolejności liczbą pierwszą jest liczba 2, więc ją zostawiamy, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej jej wielokrotności.
2 krok
Ponieważ po wykonaniu pierwszego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 2 jest liczba 3, więc 3 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 3.
3 krok
Ponieważ po wykonaniu drugiego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 3 jest liczba 5, więc 5 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 5.
4 krok
Ponieważ po wykonaniu trzeciego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 5 jest liczba 7, więc 7 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 7.
Ponieważ, jak wynika to z Ćwiczenia 1, każda liczba złożona mniejsza od 101 musi mieć dzielnik pierwszy mniejszy lub równy od $\sqrt{100} = 10$, a jedynymi liczbami pierwszymi mniejszymi lub równymi od liczby 10 są liczby: $2, 3, 5, 7$, więc wszystkie niewykreślone po 4 kroku liczby z poniższej tabeli są liczbami pierwszymi.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Zadanie 1
Podaj przykład sześciu liczb pierwszych $p_1, p_2, ..., p_6$ takich, że

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4 = p_6 - p_5$$

Zadanie 2
Udowodnij, że jeżeli $p \in \mathcal{P},\ p > 5$, to, istnieje liczba naturalna m taka, że $p = 6m + 1$ lub istnieje liczba naturalna n taka, że $p = 6n + 5$.

Zadanie 3
Udowodnij, że jeżeli $p \in \mathcal{P}$ oraz $p = a^2 + b^2$ dla pewnych $a, b \in N$, to istnieje $k \in C$ o tej własności, że $p = 4k + 1$.

Zasadnicze twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie 1 (*Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki*)
Jeżeli p jest liczbą pierwszą, natomiast a i b są liczbami całkowitymi, oraz $p \mid a \cdot b$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.

Symbolicznie twierdzenie powyższe możemy zapisać następująco:

$$(p \in \mathcal{P} \wedge a, b \in C \wedge p \mid a \cdot b) \Longrightarrow (\ p \mid a \vee p \mid b\ )$$

.
Uwaga!
Twierdzenie 1 nie jest prawdziwe, gdy p nie jest liczbą piwrwszą.
Na przykład:

$$4 \mid 6 \cdot 6 \text{ ale } 4 \nmid 6.$$

Twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych

Twierdzenie 1 (*Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn liczb pierwszych*) *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby pierwsze różne między sobą $p_1 < p_2 < ... < p_k$ oraz liczby naturalne $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ takie, że*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k},$$

przy czym, rozkład ten jest jednoznaczny.

Przykład
Rozłóż liczbę 20 na iloczyn liczb pierwszych.

Rozwiązanie:
Mamy
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5.$$

Zadanie 1
Rozłóż na iloczyn liczb pierwszych następujące liczby: $33, 100, 1523$.

Zadanie 2
Wyzacz ilość wszystkich dzielników naturalnych liczb: $1024, 3333, 2676$.

Zadanie 3
Dana jest liczba naturalna
$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{c_s}.$$
Ile wszystkich dzielników naturalnych ma liczba n?

Algorytm wyznaczania NWD i NWW liczb całkowitych

Przez NWD oznaczać będziemy *największy wspólny dzielnik liczb całkowitych*, natomiast przez NWW *najmniejszą wspólną wielokrotność liczb całkowitych.*
Definicja
Liczbę naturalną d nazywamy NWD liczb całkowitych a i b, jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej x prawdziwa jest implikacja:
$$(\, x \mid a \wedge x \mid b\,) \Longrightarrow x \mid d$$
.
Definicja
Liczbę naturalną w nazywamy NWW liczb całkowitych a i b, jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej x prawdziwa jest implikacja:
$$(\, a \mid x \wedge b \mid x\,) \Longrightarrow w \mid x$$
.

Przykład 1
Znajdź NWD$(32, 112)$

Rozwiązanie
Znajdujemy rozkład liczb 32 oraz 112 na czynniki pierwsze tak, jak to przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Z powyższego odczytujemy, że

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^0$$

oraz

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7^1.$$

Ponieważ $\min\{5, 4\} = 4$ oraz $\min\{0, 1\} = 0$, więc

$$\mathrm{NWD}(32, 112) = 2^4 \cdot 7^0 = 2^4 = 16$$

Przykład 2
Znajdź NWW$(32, 112)$

Rozwiązanie
Znajdujemy rozkład liczb 32 oraz 112 na czynniki pierwsze tak, jak to przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Z powyższego odczytujemy, że

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^0$$

oraz

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7^1.$$

Ponieważ $\max\{5,4\} = 5$ oraz $\max\{0,1\} = 1$, więc

$$\mathrm{NWW}(32,112) = 2^5 \cdot 7^1 = 224$$

Twierdzenie 1
Dla liczb całkowitych a, b, c różnych od 0 zachodzą następujące wzory:

1. $\mathrm{NWD}(a,-b) = \mathrm{NWD}(a,b)$
2. $\mathrm{NWD}(a,b+a) = \mathrm{NWD}(a,b)$
3. $\mathrm{NWD}(a,b-a) = \mathrm{NWD}(a,b)$
4. $\mathrm{NWD}(a \cdot b, a \cdot c) = a \cdot \mathrm{NWD}(b,c)$
5. $\mathrm{NWD}(a,b,c) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a,b),c)$
6. $\mathrm{NWW}(a,b,c) = \mathrm{NWW}(\mathrm{NWW}(a,b),c)$
7. $\mathrm{NWD}(a,b) \cdot \mathrm{NWW}(a,b) = a \cdot b$

Twierdzenie 2 (*O dzieleniu z resztą*)
Dla dowolnych liczb całkowitych a,b, $b \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych p, r o tej własności, że:

$$a = p \cdot b + r$$

przy czym $0 \leqslant r < |b|$.

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa to metoda wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.
Dla prostoty działanie Algorytmu Euklidesa przedstawimy na poniższym przykładzie:

Euklides z Aleksandrii *(ur. ok. 365 r. p.n.e., zm. ok. 300 r. p.n.e.) – matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii. Autor jednych z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Główne jego dzieło to Elementy (tytuł grecki Stoicheia geometrias). Elementy są pierwszą próbą aksjomatycznego ujęcia geometrii i były podstawowym podręcznikiem geometrii do XIX wieku. Elementy były bardzo poczytne - przetłumaczono je na olbrzymią liczbę języków, zaś liczbą wydań ustępują jedynie Biblii. Euklides usystematyzował ówczesną wiedzę matematyczną w postaci aksjomatycznego wykładu; zachowały się też dzieła z geometrii, optyki (m.in. prawo odbicia światła), astronomii, teorii muzyki. Dostępne jest tłumaczenie pierwszych ośmiu ksiąg z 1817 dokonane przez Józefa Czecha na język polski napisane językiem staropolskim. Teraz trwają prace nad badaniem "Księgi Euklidesa", mającym za cel przetłumaczenie na język polski przekładu angielskiego dokonanego i opublikowanego przez amerykańskiego profesora matematyki Davida Joyce'a. W projekcie tym biorą udział uczniowie szkół.*

Rysunek 4: Euklides

Przykład
Wyznacz NWD$(33, 121)$.

Rozwiązanie
Ponieważ $121 > 33$, zatem dzielimy z resztą liczbę 121 przez 33

$$121 = 3 \cdot 33 + 22$$

Otrzymujemy w ten sposób resztę równą 22. Następnie liczbę 33 dzielimy przez tę resztę.

$$33 = 1 \cdot 22 + 11$$

I tak postępujemy do momentu uzyskania reszty równej 0.

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$

Wówczas ostatnia niezerowa reszta jest największym wspólnym dzielnikiem danych liczb.
W naszym przypadku jest to liczba 11.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Za pomocą Algorytmu Euklidesa wyznacz $\mathrm{NWD}(6720, 3510)$.

Zadanie 2
Znajdź największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność następujących liczb:

(a) 5187 i 329.

(b) 7717 i 787,

(c) 324, 9288 i 549,

(d) 23717 i 22818.

Zadanie 3
Znajdź liczby całkowite x_0, y_0 tak, aby :

$$23717 \cdot x_0 + 22818 \cdot y_0 = 1$$

Zadanie 4
Liczbę 78561 podzielono przez pewną liczbę naturalną a i otrzymano iloraz równy 136 oraz resztę r. Wyznacz a i r.

Zadanie 5
Liczba naturalna, której suma cyfr jest podzielna przez 3 ma dokładnie cztery dzielniki. Ponadto suma dzielników tej liczby wynosi 80. Wyznacz tę liczbę.

Kongruencje

Defincja 1
Mówimy, że liczba całkowita a *przystaje do* liczby całkowitej b *modulo* n, $n \in N$, jeżeli $n \mid a - b$, co zapisujemy

$$a \equiv b(\text{mod } n).$$

Własności przystawania liczb względem danego modułu podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Dla liczb całkowitych a, b, c, d i liczby naturalnej n zachodzą następujące własności:

1. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$ i $c \equiv d(\text{mod } n)$, to $a + c \equiv b + d(\text{mod } n)$.
2. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$ i $c \equiv d(\text{mod } n)$, to $a - c \equiv b - d(\text{mod } n)$.
3. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$ i $c \equiv d(\text{mod } n)$, to $a \cdot c \equiv b \cdot d(\text{mod } n)$.
4. $a \equiv a(\text{mod } n)$.
5. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$, to $b \equiv a(\text{mod } n)$.
6. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$ i $b \equiv c(\text{mod } n)$, to $a \equiv c(\text{mod } n)$.
7. Jeżeli $a \equiv b(\text{mod } n)$, to $a^k \equiv b^k(\text{mod } n)$, $k \in N$.
8. Jeżeli przez $r_n(x)$ oznaczymy resztę z dzielenia liczby x przez liczbę n, to zachodzi następująca równoważność:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \iff r_n(a) = r_n(b)$$

.

Ćwiczenie 1
Sprawdź,czy prawdziwe są poniższe zdania:

$$10 \equiv 1(\text{mod } 3)$$

$$11 \equiv 5(\text{mod } 4)$$

$$1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$$

Przykład 1
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$3 \mid 10^n - 1$$

Dowód

Ponieważ:

$$10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),$$

zatem :

$$10^n \equiv 1^n (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$10^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),$$

co kończy dowód.

Przykład 2
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$k - 1 \mid k^n - 1$$

Dowód
Ponieważ

$$k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ (k-1)),$$

zatem

$$k^n \equiv 1^n (\mathrm{mod}\ (k-1))$$

$$k^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ (k-1)),$$

co kończy dowód.

Przykład 3
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$24 \mid 11^{2n+1} + 13^{2n+1}$$

Dowód
Ponieważ

$$11 \equiv -13 (\text{mod } 24),$$

zatem

$$11^{2n+1} \equiv (-13)^{2n+1} (\text{mod } 24),$$

ale

$$(-13)^{2n+1} = -13^{2n+1},$$

bo dla dowolnego $n \in N$ liczba $2n+1$ jest nieparzysta. Stąd

$$11^{2n+1} + 13^{2n+1} \equiv 0 (\text{mod } 24),$$

co kończy dowód.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Udowodnij, że liczba $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 1$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 2
Znajdź liczbę pierwszą p, jeśli wiadomo, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ są liczbami pierwszymi.

Zadanie 3
Sprawdź, czy prawdziwe jest poniższe zdanie:

$$5^{1984} \equiv 1983 (\text{mod } 25)$$

Zadanie 4
Wykaż, że liczba:

$$2^{5n+1} + 4^{5n+1} - 6$$

jest podzielna przez 31.

Zadanie 5
Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000} ?

Zadanie 6
Niech p będzie liczbą pierwszą a liczby a i b liczbami całkowitymi, takimi, że $a^2 \equiv b^2 (\mathrm{mod}\ p)$. Wykaż, że wówczas p dzieli $a + b$ lub p dzieli $a - b$.

Zadanie 7
Rozwiąż następujące kongruencje:
a) $x^3 - 2x + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$
b) $x^2 - x + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$

Zadanie 8
O liczbie naturalnej a wiemy, że przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Podaj kilka przykładów liczb spełniających warunki zadania.

Cechy podzielności liczb

Dla liczb całkowitych prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podaje cechy podzielności:

Twierdzenie 1

(a) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 2, jeżeli jej ostatnia cyfra jest parzysta.

(b) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 3, jeżeli suma jej cyfr dzieli się przez 3.

(c) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 4, jeżeli liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr jest liczbą podzielną przez 4.

(d) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 5, jeżeli jej ostatnia cyfra to 0 lub 5.

(e) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Ponieważ z zasadniczego twierdzenia arytmetyki wynika następujący wniosek:

Wniosek z Zasadniczego Twierdzenia Arytmetyki

Jeżeli p i q, to liczby pierwsze różne od siebie, to zachodzi następująca równoważność:

$$(p \cdot q \mid n) \iff (p \mid n \wedge q \mid n)$$

Więc dla przykładu, korzystając z tego wniosku otrzymamy *cechę podzielności liczby całkowitej przez* 6 otrzymamy w następujący sposób:
Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$, oraz liczby 2 i 3 są liczbami pierwszymi, więc

$$(6 \mid n) \iff (2 \mid n \wedge 3 \mid n).$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Czy liczba 123456789 jest liczbą podzielną przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2
Dobierz x tak, aby liczba $238x765$ była podzielna przez 3, ale nie była podzielna przez 9:

Zadanie 3
Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

Zadanie 4
Ile jest liczb mniejszych od liczby 50 i względnie pierwszych z liczbą 50?

Zadanie 5
Ile jest naturalnych liczb 11-cyfrowych, z których każda jest podzielna przez 9 i w jej zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 0 i 5 ?

Zadanie 6
Znajdź wszsytkie dzielniki liczby $200014 - 2014$.

Problem
Niech p i q będą różnymi od siebie liczbami pierwszymi i niech $n = p \cdot q$. Ile

jest liczb mniejszych do n i względnie pierwszych z n?

Zadanie 7
Przyjmijmy, że k oznacza liczbę całkowitą. Udowodnij, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych bezpośrednio następujących po liczbie $2k$ jest podzielna przez 8.

Zadania 8
Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest podzielna przez 3 Wykaż, że ta liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 3.

Zadanie 9
Wykaż, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

Zadanie 10
Wykaż, że jeśli w liczbie trzycyfrowej środkowa cyfra jest równa sumie skrajnych cyfr, to liczba ta jest podzielna przez 11.

Zadanie 11
Udowodnij, że suma liczby dwucyfrowej i liczby utworzonej z tych samych cyfr, zapisanych w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 11.

Zadanie 12
Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Równania Diofantyczne

Definicja 1
Równaniem diofantycznym nazywamy równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych.

Nazwa: *"Równanie Diofantyczne"*, wywodzi się od matematyka greckiego Diofantosa.

Według legendy na jego nagrobku widniał napis:
"Tu jest grobowiec, w którym złożono prochy Diofantosa. Przez jedną szóstą jego życia Bóg obdarzył go młodością, przez dalszą, dwunastą część życia jego policzki były pokryte brodą. Po siódmej dalszej części życia doświadczył szczę-

ścia małżeńskiego, w którego piątym roku został ojcem syna. Nieszczęśliwie syn żył tylko połowę lat ojca, który pozostał w smutku przez cztery ostatnie lata swego życia. Przechodniu, oblicz długość jego życia!"

Ćwiczenie 1
Rozwiąż powyższą zagadkę.

Diofantos *(ur. około 200/214 n.e., zm. około 284/298 n.e.) – matematyk grecki żyjący w III wieku n.e. w Aleksandrii. Jest autorem dzieła Arytmetyka, składającego się z 13 ksiąg, z których zachowało się 6 w języku greckim i 4 przetłumaczone na arabski. Poszerza ono zakres sposobów rozwiązania równań do trzeciego stopnia włącznie, względem wiedzy Babilończyków. Dzięki wprowadzeniu symboli i skrótów (np. na działanie odejmowania, symbol równości lub oznaczenie zmiennej) Diofantos może być uznany za autora języka algebraicznego. Diofantos nie znał liczb ujemnych, jednak odróżniał liczby „dodawane" od „odejmowanych" przez stosowanie odpowiednich znaków. Diofantos miał uważać się za pierwszego matematyka, który zastosował znak równania - (=) oraz znak odejmowania (-).*

Rysunek 5: Diofantos

Przykład 1
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$y = 1 + \frac{2}{x}$$

Rozwiązanie:
Ponieważ $y \in C$, więc $1 + \frac{2}{x} \in C$, skąd wnosimy, że $\frac{2}{x}$ musi być liczbą całkowitą.
Szukamy zatem całkowitych dzielników liczby 2. Łatwo widać, że są nimi $D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$.
Czyli

$$x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Dla powyższych x wyznaczamy y.
Dla $x = -2$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{-2} = 1 - 1 = 0$.

Dla $x = -1$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{-1} = 1 - 2 = -1$.
Dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$.
Dla $x = 2$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$.

Odpowiedź
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych: $(x, y) = (-2, 0), (-1, -1), (1, 3), (2, 2)$.

Przykład 2
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x \cdot y + x + y = 4$$

Rozwiązanie:
Podstawiając w powyższym równaniu $x = s - 1$, $y = v - 1$, otrzymujemy kolejno

$$(s - 1) \cdot (v - 1) + s - 1 + v - 1 = 4$$

$$sv - s - v + 1 + s - 1 + v - 1 = 4$$

$$sv - 1 = 4$$

$$sv = 5$$

Ponieważ $s, v \in C$ z powyższego iloczynu otrzymujemy następujące pary rozwiązań:

$$(s, v) = (-5, -1), (-1, -5), (1, 5), (5, 1).$$

Ale

$$x = s - 1, \quad y = v - 1.$$

Zatem:
Dla $(s, v) = (-5, -1)$ otrzymujemy :$x = -5 - 1 = -6$ i $y = -1 - 1 = -2$
Dla $(s, v) = (-1, -5)$ otrzymujemy :$x = -1 - 1 = -2$ i $y = -5 - 1 = -6$
Dla $(s, v) = (1, 5)$ otrzymujemy :$x = 1 - 1 = 0$ i $y = 5 - 1 = 4$
Dla $(s, v) = (5, 1)$ otrzymujemy :$x = 5 - 1 = 4$ i $y = 1 - 1 = 0$

Odpowiedź
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych: $(x, y) = (-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)$.

Przykład 3
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x^2 + 2x = y^2$$

Rozwiązanie:
Przekształcając dane równanie (korzystając z wzorów skróconego mnożenia) otrzymujemy kolejno

$$x^2 + 2x = y^2$$
$$(x+1)^2 - 1 = y^2$$
$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$
$$(x+1-y) \cdot (x+1+y) = 1$$
$$(x-y+1) \cdot (x+y+1) = 1$$

Ponieważ liczby x, y są na mocy założenia liczbami całkowitymi, więc liczby $x-y+1, x+y+1$ też są liczbami całkowitymi, oraz jedynymi rozkładami liczby 1 na iloczyn dwóch liczb całkowitych są $1 \cdot 1$ i $(-1) \cdot (-1)$ toteż otrzymujemy do rozpatrzenia dwa poniższe przypadki:

- $x - y + 1 = -1 \wedge x + y + 1 = -1$, skąd
$$(x, y) = (-2, 0)$$
- $x - y + 1 = 1 \wedge x + y + 1 = 1$, skąd
$$(x, y) = (0, 0)$$

Odpowiedź:
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych:

$$(x, y) = (-2, -4), (0, 0).$$

Przykład 4
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x^2 + 2 = y^2$$

Rozwiązanie:
Korzystając z *wzoru na różnicę kwadratów* mamy kolejno:

$$x^2 + 2 = y^2$$

$$x^2 - y^2 = -2$$
$$(x-y)\cdot(x+y) = -2$$

Ponieważ, jedyne możliwe rozkłady liczby -2 na iloczyn liczb całkowitych to $(-2)\cdot 1$ oraz $(-1)\cdot 2$ więc otrzymujemy stąd cztery przypadki do rozważenia:

- $x-y=-2$ i $x+y=1$, skąd $2x=-1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=1$ i $x+y=-2$, skąd $2x=-1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=2$ i $x+y=-1$ skąd $2x=1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=-1$ i $x+y=2$ skąd $2x=1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.

Reasumując otrzymujemy

Odpowiedź
Powyższe równanie diofantyczne nie posiada żadnych rozwiązań.

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Definicja 1
Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x (inaczej *moduł* x) określamy w następujący sposób :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jeżeli } x \geqslant 0 \\ -x \text{ jeżeli } x < 0 \end{cases}$$

Dla przykładu $|-6| = 6$, $|87| = 87$, $|0| = 0$.

Podstawowe własności wartości bezwzględnej podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą poniższe własności:

(a) $|x| \geqslant 0$,

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

(d) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$,

(e) $|x+y| \geqslant ||x|-|y||$,

(f) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$,

(g) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$,

(h) $|x| : |y| = |x : y|$,

(i) $|x|^2 = x^2$.

Przykład 1
Rozwiąż równanie:

$$|x+3| = 5$$

Rozwiązanie:
$|x+3| = 5$, zatem $x+3=5$ lub$x+3=-5$, skąd

$$x = 2 \text{ lub } x = -8$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada dwa rozwiązania $x = 2$, $x = -8$.

Przykład 2
Rozwiąż równanie:

$$|||x+3|-5|+2| = 10$$

Rozwiązanie:
$|||x+3|-5|+2| = 10$, więc

$$||x+3|-5|+2 = 10 \text{ lub } ||x+3|-5|+2 = -10$$

skąd

$$||x+3|-5| = 8 \text{ lub } ||x+3|-5| = -12$$

Ponieważ wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartości nieujemne więc równanie $||x+3|-5| = -12$ jest *sprzeczne* czyli nie ma rozwiązań. Pozostaje więc nam tylko do rozpatrzenia równanie $||x+3|-5| = 8$.
Jeżeli $||x+3|-5| = 8$, to

$$|x+3|-5 = 8 \text{ lub } |x+3|-5 = -8,$$

czyli

$$|x+3| = 13 \text{ lub } |x+3| = -3.$$

Podobnie jak poprzednio wnioskujemy, że równanie $|x+3| = -3$, jest sprzeczne zatem pozostaje do rozpatrzenia tylko równanie

$$|x+3| = 13$$

skąd

$$x+3 = 13 \text{ lub } x+3 = -13$$

czyli

$$x = 10 \text{ lub } x = -16.$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada dwa rozwiązania $x = 10$, $x = -16$.

Przykład 3
Rozwiąż równanie:

$$x^2 - |x| = 0$$

Rozwiązanie:
Naa mocy własności wartości bezwzględnej $|x|^2 = x^2$ otrzymujemy:

$$|x|^2 - |x| = 0$$

Wyłączając wspólny czynnik (”$|x|$”) przed nawias mamy

$$|x|(|x| - 1) = 0.$$

Skąd

$$|x| = 0 \text{ lub } |x| - 1 = 0$$

a więc

$$x = 0 \text{ lub } |x| = 1.$$

czyli

$$x = 0 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 1.$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada trzy rozwiązania $x = -1$, $x = 0, x = 1$.

Przedziały liczbowe

Definicja 1
Przedziałami liczbowymi nazywamy zdefiniowane poniżej w podpunktach (a)-(h).

(a) $(a, b) = \{x : a < x < b\}$,

(b) $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$

(c) $(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$

(d) $[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$

(e) $(a, +\infty) = \{x : a < x\}$,

(f) $(-\infty, a) = \{x : a > x\}$,

(g) $(-\infty, a] = \{x : a \geqslant x\}$,

(h) $[a, +\infty) = \{x : a \leqslant x\}$.

Do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną użyteczne będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Jeżeli $w(x)$ jest wyrażeniem algebraicznym zminnej x to zachodzą następujące własności:

1. $|w(x)| < a \iff w(x) < a \wedge w(x) > -a$,

2. $|w(x)| \leqslant a \iff w(x) \leqslant a \wedge w(x) \geqslant -a$,

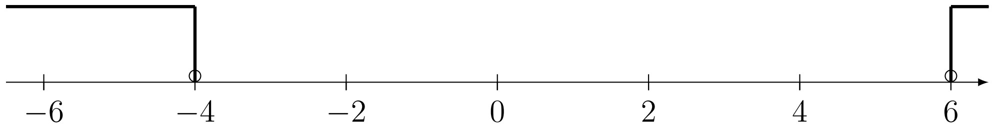
3. $|w(x)| > a \iff w(x) > a \vee w(x) < -a$,

4. $|w(x)| \geqslant a \iff w(x) \geqslant a \wedge w(x) \leqslant -a$,

Przykład 1
Rozwiąż poniższą nierówność. Zbiór rozwiązań zapisz za pomocą przedziału i zaznacz na osi liczbowej.

$$|x - 1| > 5$$

Rozwiązanie:
$|x - 1| > 5 \iff x - 1 > 5 \vee x - 1 < -5$
zatem $x > 6 \vee x < -4$,



Odpowiedź
$x \in (-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$

Przykład 2
Rozwiąż poniższą nierówność. Zbiór rozwiązań zapisz za pomocą przedziału.

$$|x - 1| \leqslant 5$$

Rozwiązanie:
$|x - 1|| \leqslant 5 \iff x - 1 \leqslant 5 \wedge x - 1 \geqslant -5$
zatem $x \leqslant 6 \wedge x \geqslant -4$,

Odpowiedź
$x \in [-4, 6]$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1
Rozwiąż poniższe nierówności a następnie zapisz rozwiązanie używając przedziałów oraz zaznacz je na osi liczbowej:

(a) $|x - 1| \geqslant 11$

(b) $|7x - 27| < 2$

(c) $|x - 6| \leqslant 5$

(d) $||x - 2| - x| > 11$

Zadanie 2
Rozwiąż nierówność
$$x^2 - 6|x| \geqslant |x| - 2.$$

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Pojęcie układu i rozwiązania układu

Układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy dwa równania liniowe z których każde zawiera dwie niewiadome (x i y) zapisywane najczęściej w następujący sposób

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \tag{1}$$

gdzie a, b, c, d, e, f są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, natomiast x, y pełnią rolę niewiadomych.
Rozwiązaniem układu (1) nazywamy każdą parę uporządkowaną (x_0, y_0) dla której spełnione są jednocześnie równości

$$ax_0 + by_0 = c \text{ oraz } dx_0 + ey_0 = f. \tag{2}$$

Rozwiązać układ równań to znaczy znaleźć wszystkie jego rozwiązania lub stwierdzić, że nie posiada żadnych rozwiązań .

Typy układów

Ze względu na ilość rozwiązań układy równań postaci (1) możemy podzielić na trzy rodzaje:

- **układy oznaczone** to znaczy takie, które mają dokładnie jedno rozwiązanie,
- **układy nieoznaczone** to znaczy takie, które mają nieskończenie wiele rozwiązań,
- **układy sprzeczne** to znaczy takie, które nie mają wcale rozwiązań.

Metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych, z dwiema niewiadomymi

Metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi przedstawimy na przykładzie układu:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ -2x - 4y = -22. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Metoda podstawiania.
Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x, mianowicie

$$x = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} \tag{4}$$

i wstawiamy ją do drugiego równania otrzymując w ten sposób równanie z jedną niewiadomą postaci:

$$\begin{gathered} -2 \cdot \left(\frac{3}{5}y + \frac{3}{5}\right) - 4y = -22 \quad | \cdot 5 \\ -6x - 6 - 20y = -110 \quad | + 6 \\ -26y = -104 \quad | : (-26) \\ y = 4. \end{gathered}$$

Podstawiamy teraz $y = 4$ do wyrażenia (4) i obliczamy w ten sposób wartość drugiej niewiadomej:

$$x = \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{3}{5} = \frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Zatem potencjalnym kandydatem na rozwiązanie układu (3) jest para $(3, 4)$. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że para $(3, 4)$ jest rzeczywiście rozwiązaniem układu (3) co pozostawiamy czytelnikowi.
(b) Metoda przeciwnych współczynników.
Mnożymy pierwsze równanie układu (3) obustronnie przez 2 drugie zaś obustronnie przez 5 (robimy to dlatego by współczynniki liczbowe przy niewiadomej x w pierwszym i w drugim równaniu były liczbami przeciwnymi). Otrzymujemy w ten sposób układ:

$$\begin{cases} 10x - 6y = 6 \\ -10x - 20y = -110. \end{cases} \tag{5}$$

Teraz dodajemy do siebie stronami równania układu (5) w następujący sposób

$$\begin{array}{c|rcrcr} & 10x & -6y & = & 6 \\ + & -10x & -20y & = & \text{-110} \\ \hline & = & -26y & = & \text{-104.} \end{array}$$

Otrzymujemy w ten sposób jedno równanie z jedną niewiadomą y :

$$-26y = -104 \quad | : (-26) \tag{6}$$

Po rozwiązaniu którego otrzymujemy szukaną wartość $y = 4$. Teraz podstawiając tę wartość do któregokolwiek z równań układu (3) np. do drugiego otrzymujemy kolejno:

$$-2x - 4 \cdot 4 = -22$$

$$-2x - 16 = -22$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3.$$

Tak więc potencjalnym kandydatem na rozwiązanie układu jest para $(3, 4)$ i pozostaje tak jak poprzednio tylko sprawdzenie, że para ta w istocie rozwiązaniem jest.

(c) Metoda wyznaczników.

Zanim przedstawimy tę metodę wprowadzimy pewne pojęcia, które będą w dalszej części użyteczne. Pojęciami tymi będą: *pojęcie macierzy kwadratowej stopnia 2 i pojęcie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia 2.*

Tak więc *macierzą kwadratową stopnia 2* nazywamy tablicę o dwóch wierszach i dwóch kolumnach, której elementami są liczby rzeczywiste, zapisywaną w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Każdej macierzy A (takiej jak powyżej) odpowiada pewna liczba rzeczywista określona następująco:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Liczbę tą nazywamy *wyznacznikiem macierzy kwadratowej stopnia 2* i oznaczamy tak jak zrobiono to powyżej symbolem $\det A$.

Rozważmy teraz nasz układ równań:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases} \tag{7}$$

Układowi temu odpowiadają trzy macierze określone następująco:

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}, U_x = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}, U_y = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}.$$

Można udowodnić, że jeżeli det$U \neq 0$ to układ (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie, które wyraża się wzorami:

$$x = \frac{\det U_x}{\det U}, y = \frac{\det U_y}{\det U},$$

które noszą nazwę *wzorów Cramera* .
Powróćmy teraz do naszego układu:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ -2x - 4y = -22. \end{cases} \tag{8}$$

W tym przypadku mamy:

$$\det U = \det \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-3) = -26,$$

$$\det U_x = \det \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -22 & -4 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) - (-22) \cdot (-3) = -78,$$

$$\det U_y = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -22 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-22) - (-2) \cdot 3 = -104.$$

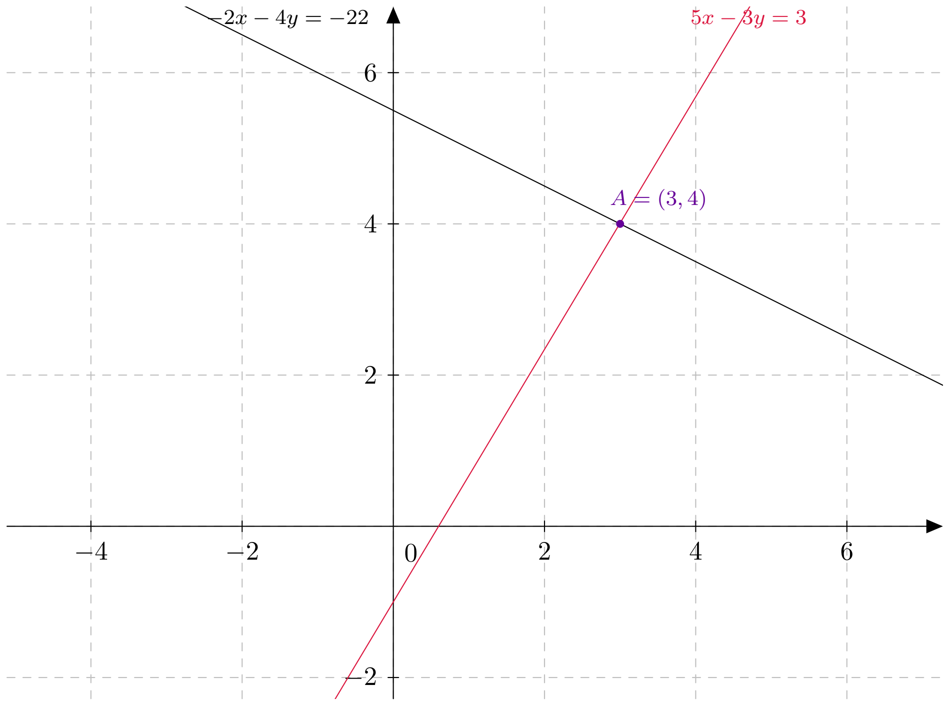
Zatem z wzorów Cramera otrzymujemy rozwiązanie:

$$x = \tfrac{-78}{-26} = 3, \; y = \tfrac{-104}{-26} = 4.$$

Czyli rozwiązaniem układu (8) jest para $(3, 4)$.

(d) Metoda graficzna.

Metoda graficzna polega na wykreśleniu prostych, których równania są równaniami układu równań (1). Wspólrzędne punktu przecięcia się tych prostych są rozwiązaniem układu. Dla układu (8) metoda ta jest przedstawiona na poniższym rysunku:



Z rysunku odczytujemy, że punkt $A = (3, 4)$ jest rozwiązaniem układu (8).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. W pewnej liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności. Wiedząc że liczba o przestawionych cyfrach jest o 18 mniejsza od początkowej wyznacz wszystkie liczby spełniające warunki.

Zadanie 2. Uczniów pewnej szkoły ustawiono w kwadrat (tj. tyle samo rzędów, co uczniów w rzędzie). Następnie próbowano ich ustawić w prostokąt, zmniejszając liczbę rzędów o 4, a zwiększając o 5 liczbę uczniów w rzędzie. Okazało się, że brakuje 3 uczniów do wypełnienia tego prostokąta. Ilu uczniów liczyła ta szkoła?

Zadanie 3. W pewnej klasie dziewczęta stanowiły 25% liczby uczniów. Do klasy przybyła jedna osoba i wówczas odsetek dziewcząt wzrósł do 28%. Ilu chłopców jest w tej klasie?

Zadanie 4. Pierwszy rowerzysta wyjeżdża na trasę o godzinie 12 : 00. Z tego samego miejsca pół godziny później w tym samym kierunku wyjeżdża drugi rowerzysta. Oblicz prędkości obu rowerzystów, jeśli wiadomo, że drugi jedzie o 5 km/h szybciej niż pierwszy i dogoni pierwszego o godzinie 14 : 30.

Zadanie 5. Wnuczek ma tyle miesięcy co dziadek lat. Razem maja 91 lat. Ile lat ma dziadek, a ile wnuczek?

Zadanie 6. Dwa lata temu Jacek był dwa razy starszy od Piotrka. Za dwa lata będą mieli razem 26 lat. Ile lat ma każdy z nich?

Zadanie 7. W naczyniu znajduje się 10 kg dziesięcioprocentowej solanki. Gdybyśmy odlali pewną ilość tej solanki, a następnie do pozostałej części dolali pewną ilość sześcioprocentowej solanki, to otrzymalibyśmy 6 kg solanki ośmioprocentowej. Ile kilogramów solanki musielibyśmy odlać, a ile dolać?

Zadanie 8. Z miejscowości A i B wyruszyli naprzeciw siebie dwaj podróżni, maszerujący z różną średnią prędkością. Po spotkaniu jeden z nich musiał jeszcze maszerować do celu 16 godzin, a drugi 9. Ile czasu potrzeba każdemu z nich na przebycie całej drogi?

Zadanie 9. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x(x+3) - \frac{1}{2}x + y = 1 + \frac{1}{2}x^2 \\ (x-3y)^2 - x^2 = 3y(3y-1) - 6x(y+1) + 3 \end{cases}$$

Zadanie 10. Dany jest układ równań.

$$\begin{cases} x - y = k \\ 4x + 2y = 10k + 6 \end{cases}$$

(a) Wyznacz z układu równań x i y za pomocą k.

(b) Dla jakich k rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych?

Zadanie 11. Rozwiąż układy równań

(a) $\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ x^2 = 2y - 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23 \\ x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = zt \\ z^2 + t^2 = xy \end{cases}$

(e) $\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 3 \\ zx = z + x + 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = -9 \\ y^2 - 2x - 4y = -9 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -5 \\ x + y^2 = -2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zt = 3 \\ tu = 4 \\ ux = 5 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} (x + y)^2 = 4z \\ (y + z)^2 = 4x \\ (z + x)^2 = 4y \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x^2 - 3x = y - 3 \\ y^2 - 3y = z - 4 \\ z^2 - 3z = x - 5 \end{cases}$

Nierówność między średnimi

Zadanie 1
Udowodnij, że średnia arytmetyczna dwóch liczb jest nie mniejsza niż ich średnia geometryczna, a ta z kolei nie mniejsza niż ich średnia harmoniczna.

Rozwiązanie:
Musimy pokazać, że dla dowolnych liczb $x, y > 0$ zachodzą poniższe nierówności:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Mamy kolejno

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$
$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \quad |: 2$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$$

Podstawiając

$$a = \sqrt{x}, \ b = \sqrt{y}$$

otrzymamy

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y}.$$

Podstawiając zaś w ostatniej nierówności

$$x = \frac{1}{v}, \ y = \frac{1}{s}$$

otrzymamy

$$\frac{\frac{1}{v} + \frac{1}{s}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{v}}$$

skąd

$$\sqrt{sv} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{s} + \frac{1}{v}},$$

zatem

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Twierdzenie 1
Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi następująca nierówność:

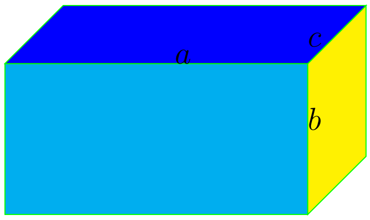
$$\frac{|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|}{n} \geqslant \sqrt[n]{|a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n|}$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|a_1| = |a_2| = ... = |a_n|$.

Problem 1
Sormułuj nierówność pomiędzy średnią geometryczną a średnią harmoniczną dla n liczb a następnie, opierając się na powyższym twierdzeniu udowodnij ją.

Przykład 1
Spośród wszystkich prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej równym 6 znajdź ten, który ma największą objetość.

Rozwiązanie



Oznaczmy przez a, b, c długości krawędzi prostopadłościanu, przez S jego pole powierzchni całkowitej, zaś przez V jego objętość.
Mamy zatem:
$S = 2ab + 2ac + 2bc = 6$, skąd otrzymujemy $ab + ac + bc = 3$, $V = abc$.
$\sqrt[3]{v^2} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{(ab) \cdot (ac) \cdot (bc)}$.
Korzystając z nierówności między średnimi otrzymujemy:
$\sqrt[3]{(ab) \cdot (ac) \cdot (bc)} \leqslant \frac{ab+bc+ac}{3} = \frac{3}{3} = 1$
$\sqrt[3]{V^2} = 1$. Podnosząc obustronnie do sześcianu otrzymujemy $V^2 = 1^3 = 1$, zatem $V = \sqrt{1} = 1$
Zatem objętość tego prostopadłościanu nie przekracza liczby 1, przy czym ta równość zajdzie, wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = bc = ac$, z czego wynika, że $a = b = c$.

Odpowiedź
Największą objetość spośród wszystkich prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej równej 6 ma sześcian o krawędzi długości 1.

Uwaga !
Rozumując, jak powyżej można uzasadnić, że spośród wszystkich prostopadłościanów o danym polu powierzchni całkowitej S największą objetość ma sześcian o krawędzi długości $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Przykład 2
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierównośc:

$$a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 4$$

Rozwiązanie
Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2,$$

podobnie

$$b + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} = 2.$$

Dodając powyższe nierówności stronami mamy

$$b + \frac{1}{b} + a + \frac{1}{a} \geqslant 2 + 2 = 4.$$

co należało udowodnić.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

(a) Udowodnij, (nie korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla n liczb), że

$$a + b + c + d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d.

(b) Spośród wszystkich prostokątów o polu powierzchni równym S znajdź ten, który ma największe pole.

(c) Liczbę 100 rozłóż na sumę czterech składników tak aby iloczyn tych składników był największy.

Liczby wymierne i niewymierne

Definicja 1
Liczbę rzeczywistą a nazywamy *liczbą wymierną*, jeżeli istnieje taka liczba całkowita p i liczba całkowita $q \neq 0$, że $a = \frac{p}{q}$.
Zbiór liczb wymiernych oznaczamy symbolem W.

Defincja 2
Liczby rzeczywiste, które nie są liczbami wymiernymi nazywamy *liczbami*

niewymiernymi.

Ćwiczenie 1
Uzasadnij, że poniższe liczby są liczbami wymiernymi:
a) 7
b) -3.5
c) 0.(3)
Rozwiązanie:
ad a) $7 = \frac{7}{1}$
ad b) $-3.5 = \frac{-35}{10}$
ad c) $0.(3) = \frac{1}{3}$.

Uwaga!
Każda liczba całkowita k jest liczbą wymierną, gdyż $k = \frac{k}{1}$.

Twierdzenie 1
Liczba rzeczywista $0 \leqslant a < 1$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie w systemie dziesiętnym jest albo skończone, albo nieskończone okresowe.
Powyższe twierdzenie rozstrzyga o niewymierności dowolnej liczby rzeczywistej (jeżeli znamy jej rozwinięcie dziesiętne), gdyż każdą liczbę rzeczywistą x możemy zapisać w postaci $x = m \pm a$, gdzie m jest liczbą całkowitą oraz $0 \leqslant a < 1$.
Udowodnimy teraz, że istnieją liczby niewymierne.

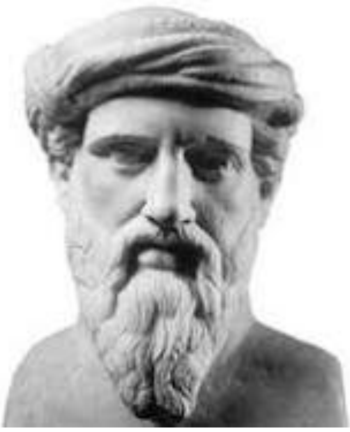
Twierdzenie 2
Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód
Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Zatem istnieją naturalne liczby względnie pierwsze p i q, $q \neq 0$, takie że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Podnosząc obustronnie do kwadratu otrzymujemy $2 = \frac{p^2}{q^2}$, czyli $p^2 = 2q^2$, zatem $2 \mid p^2$. Z zasadniczego twierdzenia arytmetyki wynika, że $2 \mid p$. Zatem $p = 2k$, $k \in N$. Otrzymujemy dalej $(2k)^2 = 2q^2$, czyli $4k^2 = 2q^2$, skąd $q^2 = 2k^2$, czyli $2 \mid q^2$, więc $2 \mid q$.
Zatem $\mathrm{NWD}(p, q) \geqslant 2$, sprzeczność.
Zatem założenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną doprowadza nas do sprzeczności, czyli jest ono nieprawdziwe a to oznacza, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Twierdzenie Pitagorasa

Zadanie 1
Za pomocą cyrkla i linijki zbuduj trójkąt o bokach długości:
a) $a = 2, b = 2, c = 1$
b) $a = 3, b = 2, c = 2$
c) $a = 3, b = 4, c = 5$
d) $a = 5, b = 12, c = 13$
i oblicz do każdego przypadku $a^2 + b^2 - c^2$. Co zauważyłeś?

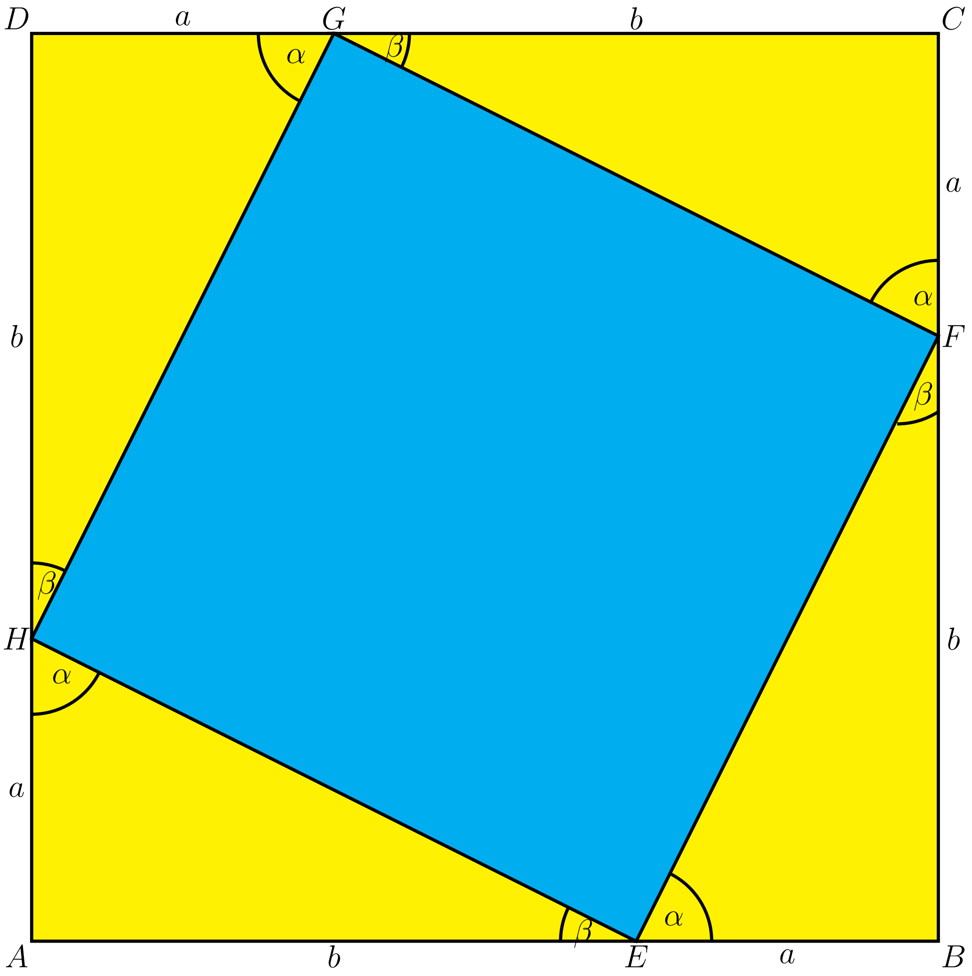
Grecki matematyk i filozof, założyciel tzw. szkoły pitagorejskiej w Krotonie (południe Włoch). W szkolej tej rozważano między innymi takie problemy matematyczne, jak podwojenie sześcianu, trysekcja kąta, kwadratura koła itp. Do klasycznej wiedzy matematycznej przeszło słynne twierdzenie, powszechne zwane twierdzeniem Pitagorasa. O samym Pitagorasie wiemy niewiele. Prąd filozoficzno-religijny związany z jego imieniem trwał przez dwa wieki i nie sposób ustalić, co on zawdzięcza Pitagorasowi, a co jego uczniom. Dlatego mówić należy raczej o pitagoreizmie.



Rysunek 6: Pitagoras

Twierdzenie Pitagorasa
Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą długościami boków trójkąta $\triangle ABC$. Wówczas trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

Poniżej przedstawiamy jeden z wielu dowodów tego twierdzenia
Dowód

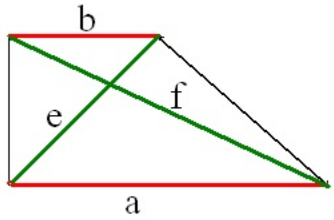


Konstruujemy kwadrat ABCD o boku długości $a + b$. A następnie na boku AB obieramy punkt E, taki, że $|AE| = b, |EB| = a$. Podobnie punkty F, G i H. Wówczas trójkąty: $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle GCF$, $\triangle DGH$ są przystające z zasady bkb, gdyż mają dwa boki równej długości i kąty zawarte między tymi bokami równej miary. Więc mają wszystkie odpowiednie boki równej długości i wszystkie odpowiednie kąty równej miary. Wynika stąd, że czworokąt $EFGH$ jest kwadratem.
Zatem
$P_{ABCD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Z drugiej strony
$P_{ABCD} = P_{EFGH} + 4 \cdot P_{AEH} = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab$
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ a zatem po przekształceniu otrzymujemy $a^2 + b^2 = c^2$.

Problem
Znajdź i przedstaw inny dowód Twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa
Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą długościami boków trójkąta $\triangle ABC$. Wówczas jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym.

Zadanie 1
Uzasadnij, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów podstaw jest równa różnicy kwadratów przekątnych.



Rysunek 7:

Teza: $a^2 – b^2 = f^2 – e^2$

Okręgi wpisane i opisane na czworokątach

Kąt wpisany i kąt środkowy w okręgu

Definicja 1
Kątem wpisanym w okrąg o środku w punkcie A i promirniu r opartym na łuku CD nazywamy dowolny kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, zaś jego ramiona przechodzą przez punkty C i D, oraz łuk CD leży wewnątrz tego kąta.

Definicja 2
Kątem środkowym w okręgu o środku w punkcie A i promieniu r opartym na łuku CD nazywamy dowolny kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, zaś jego ramiona przechodzą przez punkty C i D, oraz łuk CD leży wewnątrz tego kąta.

Zachodzi następujące twierdzenie, które podaje związek pomiędzy miarą kąta wpisanego i miarą kąta środkowego, które są oparte na tym samym łuku.

Twierdzenie 1
Niech dany będzie okrąg o środku w punkcie A i promieniu r i niech C, D, E będą różnymi punktami na okręgu. Wówczas:

$$|\measuredangle CDA| = 2 \cdot |\measuredangle CDE|$$

Wniosek
Wszystkie kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Czworokąty wpisane w okrąg

Jak wiadomo, każdy trójkąt można wpisać w okrąg. Wynika to z faktu, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Nie jest to jednak prawdą dla czworokątów, ani ogólniej dla wielokątów o liczbie boków większej niż trzy.

Problem 1
Podaj przykład z uzasadnieniem czworokąta, którego nie da się wpisać w żaden okrąg.

Twierdzenie 1
Czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ADC| = 180^o$$

Czworokąty opisane na okręgu

Podobnie, jak nie każdy czworokat można wpisać w okrąg, tak również nie każdy czworokąt można opisać na okręgu.

Problem 1
Podaj przykład z uzasadnieniem czworokąta, którego nie da się opisać na

żadnym okręgu.
Podamy teraz warunek konieczny i wystarczający na to, aby czworokąt można było opisać na okręgu.

Twierdzenie 1
Czworokąt $ABCD$ da się opisać na okręgu, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je:

- Can a rhombus that is NOT a square be inscribed in a circle?
- A regular 12 sided polygon is inscribed in a circle of radius 10. A,B,C,D,E are its consecutive vertices taken in that order. Find the area of quad. ABDE.
- Let's say we have a rhombus with diagonals a and b, which contains an inscribed circle. How can we find the area of that circle in terms of a and b?
- What types of trapezoids have circumcircles?

Elementy kombinatoryki

Czy kiedykolwiek zasatnawialiście na ile sposobów może zajść jakieś zjawisko? Dla niektórych z nich określenie na ile sposobow mogą zajść jest bardzo proste. N.p. Ile jest wszystkich możliwości przy jednorazowym rzucie monetą, czy tez sześcienną symetryczną kostką?
Jednak dla niektórych z nich określenie na ile sposobów mogą zajść jest na tyle skomplikowane, że bez znajomości odpowiednich narzędzi kombinatorycznych zliczenie ich jest niemal niemożliwe.
Poniżej postaramy się przedstawić najbardziej elementarne narzędzia, którymi posługuje się *kombinatoryka*, czyli dział matematyki, który zajmuje się zliczaniem, na ile sposobów może zajść jakieś zjawisko. Powstała ona dzięki grom hazardowym a dopiero później rozwinęła się w gałąź nauki.

Reguła iloczynu
Jeżeli pewnego wyboru można dokonać etapami,podejmując wielokrotnie decyzje, co do wyboru poszczególnych elementów, przy czym pierwszą decyzję

podejmujemy na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposoby itd. a ostatnią decyzję podejmujemy na n_k sposobów, i jeśli te decyzję są podejmowane niezależnie od siebie, to całkowita liczba możliwych wyborów jest iloczynem liczb podejmowanych decyzji, tzn. wynosi

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Przykład 1
Mając do dyspozycji: 2 pary butów, 5 par spodni i 7 bluzek na ile sposobów możemy się ubrać?

Rozwiązanie.
Ubierając się musimy podjąć 3 decyzje:
1 dotyczy butów - wybieramy je na $n_1 = 2$ sposoby,
2 dotyczy spodni - wybieramy je na $n_2 = 5$ sposobów,
3 dotyczy bluzki - wybieramy ją na $n_3 = 7$ sposobów.
Jeśli nie dopasowujemy kolorów ubrań i decyzje podejmujemy niezależnie dla każdej części garderoby, to na podstawie reguły mnożenia możemy się ubrać na $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ sposobów.

Reguła dodawania
Jeżeli mamy wybrać pewien element z dwóch zbiorów A i B przy czym zbiór A ma m elementów a zbiór B ma n elementów i zbiory te nie mają wspólnych elementów to wyboru tego dokonać możemy na dokładnie $m + n$ sposobów.

Przykład 2
Mamy do dyspozycji : 3 spódnice żółte i 2 czerwone oraz 4 bluzki żółte i 3 czerwone. Na ile sposobów możemy się ubrać, jeżeli chcemy, aby bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?
Rozwiązanie.
Mamy do wyboru dwa kolory, w które możemy się ubrać: żółty - wtedy musimy wybrać jedną z trzech żółtych spódnic i jedną z czterech żółtych bluzek, zatem możemy ubrać się na żółto na $3 \cdot 4 = 12$ sposobów,
albo
czerwony - wtedy musimy wybrać jedną z dwóch czerwonych spódnic i jedną z trzech czerwonych bluzek, zatem możemy ubrać się na czerwono na $2 \cdot 3 = 6$ sposobów.Ponieważ ubierając się na żółto nie możemy jednocześnie ubrać się na czerwono i odwrotnie. Zatem zgodnie z regułą dodawania mamy $12 + 6 = 18$ sposobów ubrania się.

Jeżeli podejmujemy kilka niezależnych decyzji częściowych, które dotyczą jednego całościowego wyboru, to liczby decyzji mnożymy, jeśli natomiast dokonujemy wykluczających się wyborów, to liczby wyborów dodajemy.

Permutacje

Definicja
Permutacją (przestawieniem) nazywamy ustawienie elementów danego zbioru w pewnej kolejności. Liczba permutacji określa na ile sposobów możemy ustawić elementy zbioru w kolejce.
Powiedzmy, że mamy zbiór A, który ma n elementów i chcemy wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych ustawień tych elementów w kolejce. Musimy więc podjąć n wyborów dotyczących tego, jaki element ustawić na kolejnym miejscu.
1 wybór –na pierwszym miejscu w kolejce możemy ustawić każdy z n elementów
2 wybór – na drugim miejscu w kolejce możemy ustawić już tylko $n-1$ elementów (bo jeden został już wykorzystany)
3 wybór – na trzecim miejscu w kolejce można ustawić już tylko $n-2$ elementy (bo 2 elementy są już wykorzystane), itd.
$(n-1)$-wszy wybór –na przedostatnim miejscu w tej kolejce możemy ustawić już tylko 2 elementy,
n-ty wybór- na ostatnim miejscu możemy ustawić już tylko jeden element
Zatem zgodnie z regułą mnożenia liczba możliwych wyborów kolejności to:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

Jest to iloczyn liczb naturalnych od 1 do n. Oznaczamy go $n!$ (czytamy n silnia). Zatem liczbę P_n wszystkich permutacji zbioru n- elementowego możemy zapisać w następujący sposób :

$$P_n = n!$$

Przyklad
Na ile sposobów można ustawić w kolejce do kasy biletowej 5 panów i 4 panie, jeżeli:
a) panowie są dżentelmenami i przepuszczają panie przodem?
b) panowie nie byli grzeczni i wepchnęli się przed panie?
c) kolejność nie zależy od płci?

Rozwiązanie a)
Panie można ustawić w obrębie czterech pierwszych miejsc w kolejce na $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby, panów natomiast na kolejnych pięciu miejscach na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sposobów. Każde ustawienie pań może wystąpić z każdym ze 120 ustawień panów. Wyboru kolejności pań i panów dokonujemy niezależnie, więc (korzystając z reguły iloczynu) mamy $4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$ takich możliwych ustawień.

Rozwiązanie b)
Możliwych ustawień jest tyle samo.

Rozwiązanie c)
Ustawiamy w kolejce dziewięcioro ludzi niezależnie od płci, co można zrobić na $9! = 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ czyli na aż 362880 sposobów.

Wariacje
Tworzenie *wariacji* polega na k- krotnym wybieraniu pojedynczych elementów z pośród n elementów, jakie mamy do dyspozycji. Elementy wybierane są po kolei, a nie wszystkie na raz.
Wyróżniamy dwa rodzaje wariacji, w zależności od tego, czy po wybraniu danego elementu może on być użyty jeszcze raz i wybrany ponownie (nazywamy go *wariacją z powtórzeniami*), czy też raz wybrany element nie może być wybrany ponownie (*wariacja bez powtórzeń*).

Wariacje z powtórzeniami
Wybieramy kolejno k elementów spośród n, które mamy do dyspozycji. Za każdym razem wybrany element wraca do pozostałych i może być wybrany ponownie. Zatem musimy podjąć k decyzji:
1 decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów,
2 decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z n elementów, itd.
k- ta decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów.
Na podstawie reguły iloczynu wszystkich możliwych ustawień k elementów wybieranych spośród n elementów (jeśli wybierane elementy mogą się powtarzać) jest:

$$W_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k-\text{razy}} = n^k$$

Przykład
Ile stacjonarnych numerów telefonicznych jest dostępnych w poznańskiej cen-

trali? Wszystkie numery są dziewięciocyfrowe i zaczynają się numerem kierunkowym 61.

Rozwiązanie:
Ponieważ dwie pierwsze cyfry są już ustalone 61, pozostało nam do rozważenia siedem pozostałych pozycji. Cyfry mogą się na nich powtarzać, a kolejność występowania cyfr w numerze też jest istotna. Wybieramy zatem jedną z 10 cyfr na III miejsce, jedną z 10 na IV miejsce itd. aż jedną z 10 cyfr wybierzemy na ostatnim IX miejscu.
Wyborów kolejnych cyfr dokonujemy niezależnie, zatem jest ich tyle, ile siedmioelementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru dziesięcioelementowego, czyli:

$$W_{10}^{7} = 10^{7} = 10000000$$

Wariacje bez powtórzeń
Wybieramy kolejno k elementów spośród n, które mamy do dyspozycji, ale raz wybrane elementy nie mogą zostać użyte ponownie. Zatem musimy podjąć k decyzji:
1 decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów,
2 decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z pozostałych $n-1$ elementów, itd. (za każdym razem mamy do dyspozycji o 1 element mniej niż poprzednio)
k- ta decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z pozostałych $n-k+1$ elementów.
Zatem na podstawie reguły iloczynu liczba wszystkich możliwych k- elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru nelementowego wyraża się wzorem:

$$V_{n}^{k} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład
W sali lekcyjnej jest 30 miejsc . Na ile sposobów 5 uczniów może zająć miejsca , jeżeli każdy z nich siada gdzie chce?

Rozwiązanie:
Każdemu rozmieszczeniu uczniów w klasie (czyli zajęciu przez nich miejsc)odpowiada dokładnie jedna 5-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru 30-elementowego, czyli wszystkich możliwych rozmieszczeń będzie dokładnie:

$$V_{30}^{5} = \frac{30!}{25!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{25!} = 17100720$$

Kombinacje

Kombinacją nazywamy wybór całej grupy k-elementowej spośród n elementów, jakie mamy do dyspozycji. Nie jest istotna kolejność elementów, jakie wybierzemy, i żaden nie może być wybrany dwukrotnie. Liczbę takich wyborów zapisujemy tzw. symbolem Newtona $\binom{n}{k}$ (czytamy: n po k).
Każdej kombinacji k- elementowej ze zbioru n- elementowego odpowiada dokładnie $k!$ kelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n- elementowego, gdyż każde k elementów możemy ustawić w kolejce na $k!$ sposobów. Zatem wszystkich tych kombinacji będzie:

$$C_n^k = \frac{1}{k!} \cdot V_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Przykład

Klasa liczy 25 osób. Na ile sposobów można wybrać 3-osobową delegację spośród uczniów tej klasy.

Rozwiązanie:

Ważne są dwie rzeczy: nie jest istotna kolejność, w jakiej dokonujemy wyboru uczniów i uczeń może zostać wybrany do delegacji tylko raz.Wobec tego wystarczy zastosować wzór na liczbę możliwych wyborów 3 elementów spośród 25:

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot (25-3)!} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{22! \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{22! \cdot 6} = 2300$$

Zadania

Zadanie 1. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $P_4 \cdot P_5 > W_{10}^4$

b) $P_4 \cdot P_5 > V_{10}^4$

c) $P_5 \cdot C_{10}^5 = V_{10}^5$.

Zadanie 2. Na przyjęciu spotkała się pewna liczba znajomych. Wszyscy znajomi przywitali się (każdy z każdym) poprzez uścisnięcie dłoni. Wiadomo, że nastąpiło dziesięć uścisków dłoni. Ilu przyjaciół spotkało się na tym przyjęciu:

a) 5

b) 4

c) $4 \cdot 25 - 19 \cdot 5$

Zadanie 3. Na salę gimnastyczną wbiegło pięć dziewcząt i pięciu chłopców. Nauczyciel polecił im ustawić się w szeregu. Ile jest wszystkich możliwych ustawień tych osób w szeregu:

a) $10!$

b) $5! \cdot 5!$

c) V_{10}^{10}

Zadanie 4. Na ile różnych sposobów mogą trzy osoby wsiąść do tramwaju złożonego z dwóch wagonów:

a) 2^3

b) 3^2

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2$

Zadanie 5. Na ile sposobów można podzielić cztery osoby na trzy grupy:

a) 6

b) $\binom{4}{2}$

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Zadanie 6. Ile słów (niekoniecznie mających sens) można ułożyć ze słowa "SZKOŁA":

a) 6

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

c) $6!$

Zadanie 7. Na ile sposobów można wybrać sześć liczb z czterdziestu dziewięciu liczb:

a) $6!$

b) $\binom{49}{6}$

c) $49 \cdot 6$

.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Twierdzenie 1
Jeżeli m przedmiotów umieścimy w k szufladkach, przy czym $m > k$, to w co najmniej jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (ur. 13 lutego 1805 w Düren, zm. 5 maja 1859 w Getyndze) – niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia. Był wykładowcą uniwersytetów we Wrocławiu, Berlinie i Getyndze. Jego prace dotyczą teorii liczb, szeregów liczbowych, analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego i fizyki teoretycznej. Udowodnił zbieżność szeregu Fouriera (warunki Dirichleta), jest autorem zasady szufladkowej Dirichleta.

Rysunek 8: J. Dirichlet

.

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je używając Zasady szufladkowej Dirichleta:

- There are 50 baskets of apples. Each basket contains no more than 24 apples. Show that there are at least 3 baskets containing the same number of apples.
- Show that among any 4 numbers one can find 2 numbers so that their difference is divisible by 3.
- Show that among any n+1 numbers one can find 2 numbers so that their difference is divisible by n.
- Show that for any natural number n there is a number composed of digits 5 and 0 only and divisible by n.

- Given 12 different 2-digit numbers, show that one can choose two of them so that their difference is a two-digit number with identical first and second digit.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli przeprowadzamy pewne doświadczenie, w którym możemy otrzymać dokładnie m różnych wyników i rozważamy pewne zdarzenie, którego zajściu sprzyja dokładnie k wyników (spośród tych wszystkim m możliwych wyników) to *prawdopodobieństwo* zajścia zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{k}{m}$$

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je:

- A die is rolled, find the probability that an even number is obtained.
- Two coins are tossed, find the probability that two heads are obtained.
- A die is rolled and a coin is tossed, find the probability that the die shows an odd number and the coin shows a head.
- A card is drawn at random from a deck of cards. Find the probability of getting the 3 of diamond.
- A card is drawn at random from a deck of cards. Find the probability of getting a queen.
- The blood groups of 200 people is distributed as follows: 50 have type A blood, 65 have B blood type, 70 have O blood type and 15 have type AB blood. If a person from this group is selected at random, what is the probability that this person has O blood type?
- What is the probability of getting an odd number when rolling a single 6-sided die?
- What is the probability of getting a 7 after rolling a single die numbered 1 to 6?
- What is the probability of choosing a king from a standard deck of playing cards?

- Let C be the number rolled on the first die and A be the number rolled on the second die. Show that the probability of C being equal to A is 1/6.

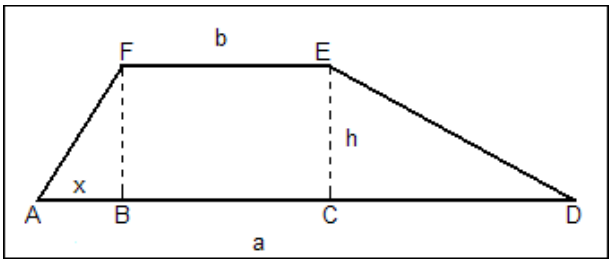
- Gareth was told that in his class 50% of the pupils play football, 30% play video games and 30% study mathematics. So if he was to choose a student from the class randomly, he calculated the probability that the student plays football, plays video games, and studies mathematics is 50% + 30% + 30% = 1/2 + 3/10 + 3/10 = 11/10. But all probabilities should be between 0 and 1. What mistake did Gareth make?

Geometria

Przyjmujemy wzór na pole prostokąta o bokach długości a, b :

$$P = a \cdot b$$

Przykład 1
Wyprowadź wzór na pole trapezu.



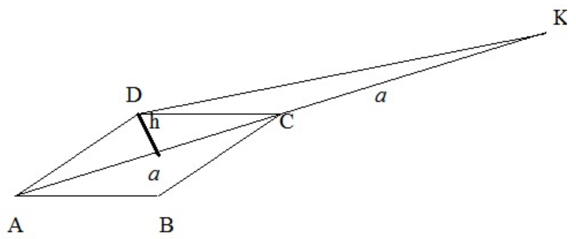
Rysunek 9:

Rozwiązanie
Łatwo widać (Rysunek 1), że:
$P_{ADEF} = P_{ABF} + P_{BCEF} + P_{CDE}$
Ponieważ $|AB| = x, |BC| = b, |CD| = a - (x + b) = a - x - b$, zatem
$P_{ADEF} = \frac{xh}{2} + bh + \frac{(a-x-b)\cdot h}{2} = \frac{xh}{2} + bh + \frac{ah}{2} - \frac{xh}{2} - \frac{bh}{2}$
Po redukcji otrzymujemy zatem

$$P_{ADEF} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Przykład 2
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt K taki, że długości odcinków AC i CK są równe. Uzasadnij, że pole trójkąta ACD jest równe polu trójkąta CDK.

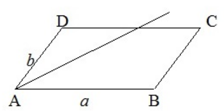
Rozwiązanie



Rysunek 10:

Łatwo zauważyć, że że odcinek h jest zarówno wysokością trójkąta ACD opuszczoną na bok AC oraz wysokością trójkąta DCK opuszczoną na przedłużenie boku CK.
$P_{ADC} = \frac{|AC| \cdot h}{2}$, $P_{CDK} = \frac{|CK| \cdot h}{2}$
Ale $|AC| = |CK| = a$.
Zatem $P_{ADC} = P_{CDK} = \frac{a \cdot h}{2}$

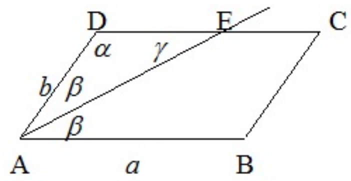
Przykład 3
Boki równoległoboku $ABCD$ są równe a i $b(a > b)$. Uzasadnij, że długości odcinków, na które dwusieczna kąta ostrego równoległoboku podzieli bok o długości a wynoszą b oraz a–b.



Rysunek 11:

Rozwiązanie
Wprowadzamy na rysunku dodatkowe oznaczenia:

Z własności dwusiecznej kąta ostrego wynika, że miary kątów DAE i BAE są równe (na rysunku oznaczone zostały jako β). Kąty $BAE = \beta$ oraz



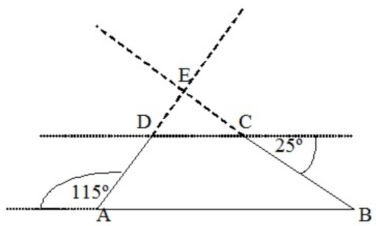
Rysunek 12:

$AED = \gamma$ są katami naprzemianległymi, czyli są równej miary . Zatem $\beta = \gamma$. Z tego wynika, że trójkąt AED jest równoramienny (kąty przy podstawie są jednakowej miary). Stąd dalej otrzymujemy, że $|AD| = |DE| = b$. Odcinek $|EC| = |DC|–|DE| = a–b$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1
Wyprowadź wzór na pole trójkata.

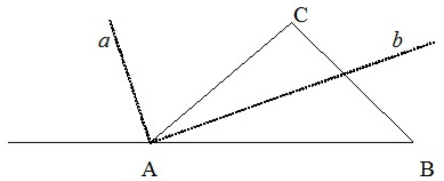
Zadanie 2
W trapezie $ABCD$ przedłużenia ramion AD i BC przecięły się w punkcie E (rysunek). Uzasadnij, ze kąt AEB jest kątem prostym.



Rysunek 13:

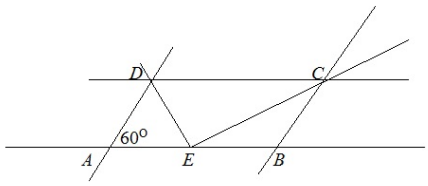
Zadanie 3
Uzasadnij, że dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta ABC i dwusieczna kąta zewnętrznego przy tym samym wierzchołku są prostopadłe. Pamiętaj, że kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.

a - dwusieczna kąta zewnętrznego, b - dwusieczna kąta wewnętrznego



Rysunek 14:

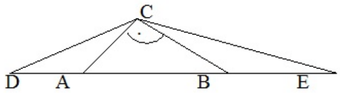
Zadanie 4
Na podstawie rysunku uzasadnij, że trójkąt CED jest prostokątny.



Rysunek 15:

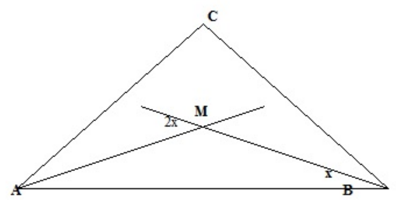
$$AB||CD, AD||BC, \ |AE| = |AD| = |EB|$$

Zadanie 5
W trójkącie prostokątnym ABC wykonano następujące czynności:
1. przedłużono przeciwprostokątną AB,
2. odłożono odcinki $AD = AC$ oraz $BE = BC$.
Uzasadnij, że kąt DCE ma miarę 135^o.



Rysunek 16:

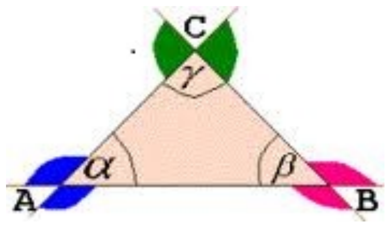
Zadanie 6
Półproste AM i BM są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta ABC. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoramienny.
Zadanie 7
Punkt E jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Punkt ten połączono z wierzchołkiem C. Uzasadnij, że pole trójkąta EBC jest trzy razy



Rysunek 17:

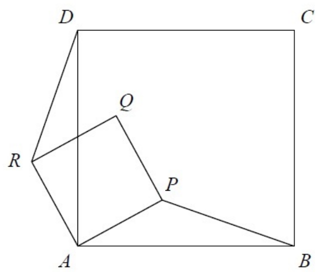
mniejsze od pola czworokąta $AECD$.

Zadanie 8
Kąt zewnętrzny trójkąta jest to każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta (rysunek 18). Wykaż, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych trójkąta jest równa 720^o.



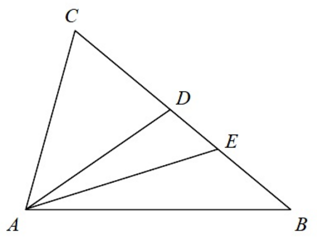
Rysunek 18:

Zadanie 9
Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (rysunek 19). Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Rysunek 19:

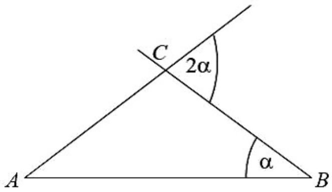
Zadanie 10
Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt D tak, by $\measuredangle CAD = \measuredangle ABC$.



Rysunek 20:

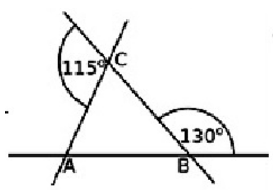
Odcinek AE jest dwusieczną kąta DAB. Udowodnij, że $|AC| = |CE|$.

Zadanie 11
Uzasadnij , że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe .



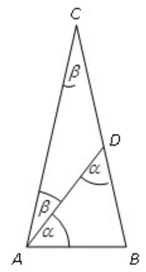
Rysunek 21:

Zadanie 12
Trzy proste przecinają się w sposób przedstawiony na rysunku , tworząc trójkąt ABC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Rysunek 22:

Zadanie 13
Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w



Rysunek 23:

taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek poniżej). Udowodnij, że $|\measuredangle ADC| = 5 \cdot |\measuredangle ACD|$

Twierdzenie Talesa

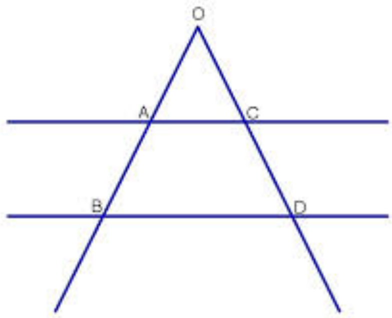
Tales z Miletu (ok. 627 - 546 p.n.e.). Tales urodził się w Milecie, stolicy starożytnej greckiej prowincji Jonia, nad morzem Egejskim. Jemu zawdzięczamy słynne powiedzenie: "Poznaj samego siebie!" Uważany jest za jednego z "siedmiu mędrców" starożytności, był pierwszym, który ogłosił ogólne wyniki dotyczące obiektów matematycznych. Interesował się przede wszystkim figurami geometrycznymi: kołami prostymi i trójkątami. Dowiódł, że każdemu trójkątowi można przypisać okrąg: taki, który przechodzi przez trzy wierzchołki trójkąta i zaproponował ogólną zasadę konstrukcji.

Rysunek 24: Tales z Miletu

Tales był założycielem jońskiej szkoły filozofów przyrody. Brał aktywny udział w życiu politycznym i gospodarczym swego miasta. Utrzymywał ożywione stosunki handlowe z Egiptem, Fenicją i Babilonią. To było powodem, iż do krajów tych odbywał częste podróże. I prawdopodobnie wtedy zapoznał się z osiągnięciami matematyki i astronomii Egiptu i Babilonii. Gdy Tales wpatrywał się w niebo, by odkryć sekrety obrotów gwiazd, wpadł do dziury. Młoda służąca, która mu towarzyszyła powiedziała: "Nie widzisz tego, co masz pod nogami, a myślisz, że potrafisz zrozumieć, co się dzieje na niebie!" Tales na owe czasy był wielkim astronomem, przewidział zaćmienie słońca na dzień 28 V 585 r. p.n.e. co przysporzyło mu sławy. Pomierzył również wysokość piramid za pomocą cienia, które one rzucały.

Jednym z twierdzeń geometrii elementarnej, sformułowanej przez Talesa, jest twierdzenie zwane jego imieniem: Jeśli ramiona kąta przeciąć dwiema równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.

Talesa można uznać za tego, który łącząc teorię z praktykę zbudował fundamenty geometrii jako nauki dedukcyjnej, której ukoronowaniem były Elementy Euklidesa. Charakterystyczne są poglądy filozoficzne Talesa. Zrywały one z panującą we wcześniejszych koncepcjach, dotyczących powstania wszechświata, mitologiczną interpretacją zjawisk przyrody. Tales za prapierwiastek rzeczywistości uważał wodę, która miała otaczać ze wszystkich stron płaski krąg Ziemi.



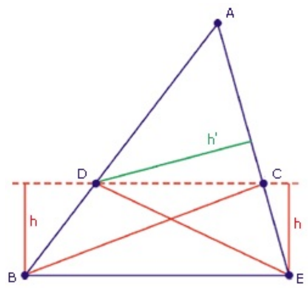
Rysunek 25:

Twierdzenie Talesa
Jeżeli ramiona kąta BOD przetniemy dwiema prostymi równoległymi $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, to zachodzi następująca równość:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

Poniżej przedstawiony zostanie jeden z dowodów Twierdzenia Talesa. Jest to najstarszy zachowany dowód tego twierdzenia, pochodzący z VI. księgi "Elementów" Euklidesa.

Dowód

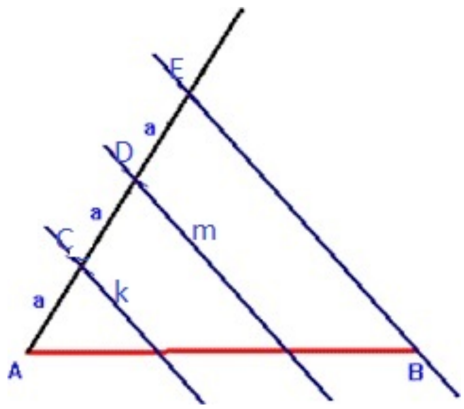


Rysunek 26:

Zauważmy, że trójkaty CED i EAD mają wspólną wysokość h', zatem

$\frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Ponieważ trójkąty CED i BDC mają wspólną podstawę $|DC|$ oraz wspólną wysokość h, zatem $P_{CED} = P_{BDC}$.
Stąd $\frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{EAD}}$
Trójkaty BDC i ABC mają wspólną wysokość, zatem $\frac{P_{BDC}}{P_{ABC}} = \frac{|BD|}{|AB|}$
Ponadto
$P_{ABC} = P_{BCD} + P_{CDA} = P_{CDE} + P_{CDA} = P_{ADE}$,
stąd
$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{ABC}} = \frac{|BD|}{|AB|}$

Przykład
Dany odcinek $\overline{AB}$ podziel konstrukcyjnie na trzy równe części.



Rysunek 27:

Rowiązanie
Przez punkt A prowadzimy prostą l tak, aby utworzyła z odcinkiem $\overline{AB}$ kąt ostry. Na prostej l z punktu A odkadamy trzy odcinki dowolnej, równej długości a. Uzyskujemy w ten sposób punkty: C, D, E na prostej l. Łączymy prostą punkty E i B a następnie przez punkty C i D prowadzimy proste k i m równoległe do prostej AB. Punkty przecięcia prostych k i m z odcinkiem AB to szukane punkty podziału.
Uwaga!
W analogiczny sposób jak w Przykładzie powyżej możemy podzilić konstrukcyjnie dowolny odcinek na dowolną, naturalną liczbę części.

Wybrane równania wyższych stopni

Paragraf ten zaczniemy od pewnej dość oczywistej obserwacji:

Obserwacja 1
Jeśli iloczyn pewnej ilości liczb rzeczywisych jest równy zero, to któryś z czynników tego iloczynu musi być równy zero.

Pokażemy teraz na przykładzie jak zastosować tą obserwację do rozwiązywania niektórych równań algebraicznych. Powiedzmy, że chcemy rozwiązać następujące równanie

$$x^2 + 5x = 6$$

Pierwszą krok jaki zrobimy, to przeniesiemy wszystkie wyrazy danego równania na lewą stronę, otrzymamy w ten sposób rówanie

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Drugim krokiem jaki wykonamy, to spróbujemy lewą stronę naszego równania zapisać w postaci iloczynu dwóch czynników w ten sposób aby każdy czynnik tego iloczynu zawierał niewiadomą "x" w pierwszej potędze. Mamy więc kolejno

$$x^2 + 5x - 6 = x^2 + x - 6x - 6 = x \cdot x + x \cdot 1 + (-6) \cdot x + (-6) \cdot 1 =$$

$$= x \cdot (x+1) + (-6) \cdot (x+1) = (x+1) \cdot (x + (-6)) = (x+1)(x-6).$$

Nasze równanie możemy więc zapisać w postaci

$$(x+1)(x-6) = 0$$

Korzystając teraz z obserwacji 1 zauważamy, że jeśli liczba x spełnia powyższe równanie to musi być prawdziwa poniższa alternatywa

$$x + 1 = 0 \vee x - 6 = 0$$

skąd otrzymujemy, że rozwiązaniami naszego równania są liczby: -1 i 3.

Zwrócimy tera na uwagę na drugą równie oczywistą (jak obserwacja 1) rzecz aczkolwiek równie użyteczną, będzie nią następująca obserwacja:

Obserwacja 2
Jeżeli suma pewnej ilości liczb rzeczywistych nieujemnych jest równa zero, to

każdy składnik tej sumy musi być równy zero.

Zauważmy na wstępie, że z tej można by rzec trywialnej obserwacji wynika na przykład, że równanie

$$x^2 + 1 = 0$$

nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Jest tak dlatego, że równośc $1 = 0$ nie może zajśc.

Podobnie jak poprzednio pokażemy teraz na przykładzie jak zastosować obserwację 2 do rozwiązywania niektórych równań algebraicznych. Powiedzmy, że chcemy rozwiązać następujące równanie

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2$$

Pierwszą krok jaki zrobimy, to przeniesiemy wszystkie wyrazy danego równania na lewą stronę, otrzymamy w ten sposób rówanie

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Drugim krokiem jaki wykonamy, to spróbujemy lewą stronę naszego równania zapisać w postaci sumy kwadratów. Mamy więc kolejno

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Nasze równanie możemy więc zapisać w postaci

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

Korzystając teraz z obserwacji 2 zauważamy, że jeśli para liczb (x, y) spełnia powyższe równanie to musi być prawdziwa poniższa alternatywa

$$x - 1 = 0 \vee y - 1 = 0$$

skąd otrzymujemy, że rozwiązaniami naszego równania para liczb $(1, 1)$.

Zadanie 1
Rozwiąż równania:

(a) $x^2 + 2 = 3x$

(b) $x^3 + 2 = 3x$

(c) $x^4 + 2 = 3x^2$

(d) $x^2 + q = -px$, gdzie $p, q \in R$ oraz $p^2 - 4q \geqslant 0$.

(e) $x^2 + y^2 - 2x = -1$

Zadanie 2

(a) Uzasadnij, że jeśli $p^2 - 4q < 0$. to równanie $x^2 + px + q = 0$, nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

(b) Jaki warunek muszą spełniać liczby $p, q, r \in R$ aby równanie

$$x^2 + y^2 - px - qy = r$$

miało dokładnie jedno rozwiązanie?

Niektóre równania i nierówności niewymierne

W paragrafie tym pokażemy na przykładach jak rozwiązywać niektóre równania i nierówności niewymierne. Zaczniemy od prostego przykładu.

Przykład 1
Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{x+1} = 2$$

Rozwiązanie
Jeżeli

$$\sqrt{x+1} = 2,$$

to

$$(\sqrt{x+1})^2 = 2^2$$

a więc

$$x + 1 = 4$$

a zetem

$$x = 3.$$

Otrzymaliśmy więc następujący wniosek: *jeżeli jakakolwiek liczba rzeczywista x spełnia równanie $\sqrt{x+1} = 2$, to musi ona być równa* 3.
Pozostaje nam teraz jeszcze sprawdzić, czy liczba 3 jest rzeczywiście rozwiązaniem tego równania. Podstawiając $x = 3$ mamy

$$\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

A zatem liczba 3 jest rozwiązaniem równania $\sqrt{x+1} = 3$.

Odpowiedź
Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Przykład 2
Rozwiąż równanie
$$\sqrt{x^2+x+1} = x+1$$

Rozwiązanie
Podobnie jak w zadaniu poprzednim, mamy kolejno:
$$\sqrt{x^2+x+1} = x+1$$
$$(\sqrt{x^2+x+1})^2 = (x+1)^2$$
$$x^2+x+1 = x^2+2x+1$$
$$x^2+x-x^2-2x = 1-1$$
$$-x = 0$$
$$x = 0$$

Otrzymaliśmy więc następujący wniosek: *jeżeli jakakolwiek liczba rzeczywista* x *spełnia równanie* $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$, *to musi ona być równa* 0.
Pozostaje nam teraz jeszcze sprawdzić, czy liczba 0 jest rzeczywiście rozwiązaniem tego równania. Podstawiając $x = 0$ mamy
$$\sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1} = 1 = 0+1.$$

A zatem liczba 0 jest rozwiązaniem równania $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$.

Odpowiedź
Rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Przykład 3
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierównośc:
$$\sqrt{a+b+c} < \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Rozwiązanie
Mamy
$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} > \frac{a}{\sqrt{a+b+c}}$$
i analogicznie
$$\sqrt{b} = \frac{b}{\sqrt{b}} > \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}$$

oraz

$$\sqrt{c} = \frac{c}{\sqrt{c}} > \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Dodając teraz stronami trzy powyższe nierówności otrzymamy:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} > \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b+c}} =$$

$$= \frac{a+b+c}{\sqrt{a+b+c}} = \frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{\sqrt{a+b+c}} = \sqrt{a+b+c}.$$

Zadania 1

Rozwiąż równania:

- $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$
- $(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0$
- $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2x + 1$

Zadania 2

Udowodnij nierówności:

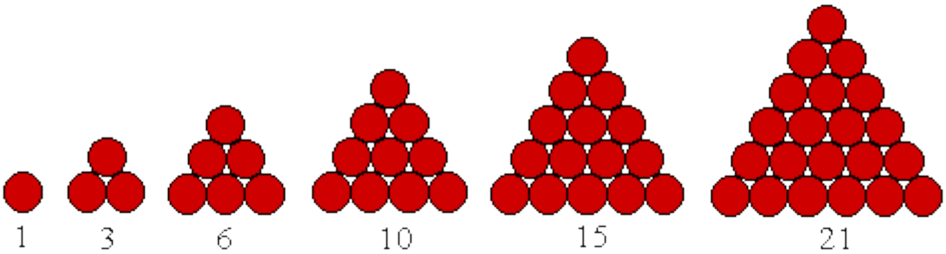
- $|a||c| + |b||d| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ dla dowolnych $a, b, c, d \in R$.
- $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$ dla dowolnych $x, y \in R$.
- $|u| - 3\sqrt{|u|} + 4 > 0$ dla $u \in R$.

ANEKS 3

PRETEST

Zadanie 1.

Liczby trójkątne definiujemy jako ilość kół potrzebnych do zbudowania z nich kolejnych trójkątów równobocznych, tak jak na rysunku poniżej:



Podaj trzynastą z kolei liczbę trójkatną.

Zadanie 2.

Wiedząc, że suma miar wszystkich katów wewnetrznych w trójkącie wynosi 180°,wyznacz sumę miar wszystkich kątów wewnętrznych dowolnego pięciokąta wypukłego.

Zadanie 3.

Podaj możliwie jak najwięcej przykładów liczb naturalnych większych od 20, których nie da się przedstawić jako sumy kwadratów trzech liczb naturalnych (kwadratem liczby naturalnej a nazywamy liczbę $a \cdot a$).

Zadanie 4.

Mamy 10 chłopców i 10 dziewczynek. Na ile sposobów można ich wszystkich usadzić przy okrągłym stole tak, aby chłopcy siedzieli na przemian z dziewczynkami?

Zadanie 5.

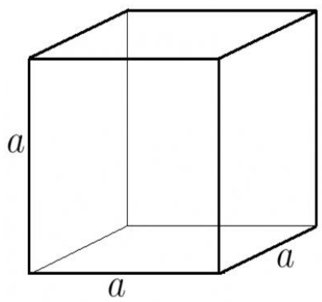
Pewna liczba naturalna daje resztę 2 przy dzieleniu przez 5 i 7. Jaką resztę daje ta liczba przy dzieleniu przez 35?

Zadanie 6.

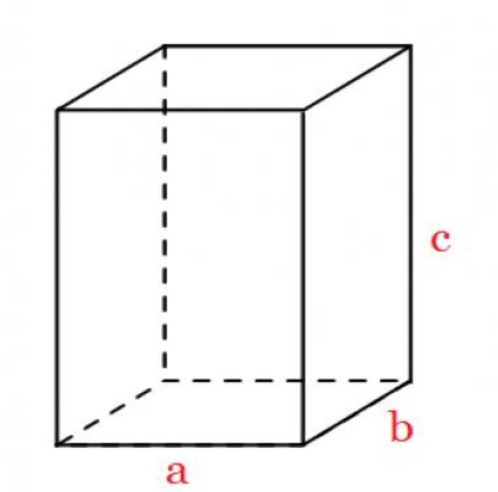
Czy dowolny trójkąt da się jednym „cięciem” rozciąć na dwie figury o równych polach?

Zadanie 7.

Prostopadłościan o wymiarach 10 x 15 x 18 wypełniono w $\frac{3}{4}$ swojej objętości wodą. Oblicz, ile potrzeba sześciennych kostek 3 x 3 x 3, aby można było do nich przelać wodę z tego prostopadłościanu.



sześcian



prostopadłościan

Zadanie 8.

Dane są liczby

a= 2(1 + 2 +…+ 100)

b= 100^2

Która z liczb jest większa a czy b? Czy dostrzegasz jakąś ogólniejszą zależność, którą sugerowałaby nierówność pomiędzy tymi liczbami? Jeśli tak, napisz jaką.

Zadanie 9.

Za pomocą czterech siódemek i być może znaków działań arytmetycznych oraz nawiasów przedstaw cyfrę zero. Zrób to na możliwie największą liczbę sposobów.

Zadanie 10.

Dany jest ciąg 7, 26, ………………., 215. Uzupełnij go według reguły odnalezionej przez siebie i zapisz tę regułę.

Zadanie 11.

Jak za pomocą dwóch pojemników 5 litrowego i 3 litrowego odmierzyć jeden litr wody?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12.

Na stawie rozrasta się kępa lilii wodnych. Codziennie kępa staje się dwukrotnie większa. Jeśli zarośnięcie całego stawu zajmie liliom 48 dni, to ile dni potrzeba, żeby zarosły połowę stawu?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 13.

Kot Prot siedzi na pierwszym, najniższym szczeblu drabiny, kot Sylwester na jedenastym. Grają w grę: na przemian przemieszczają się o jeden lub dwa szczeble, Prot do góry, Sylwester do dołu. Przegra ten, który nie będzie mógł wykonać ruchu (nie wolno przeskakiwać przeciwnika, ani stawać na zajmowanym przez niego szczeblu). Zaczyna Prot. Czy któryś kot może grać tak, by zapewnić sobie zwycięstwo?

Odpowiedź uzasadnij.

TEST 2

Zadanie 1.

Mamy sześciu chłopców i cztery dziewczynki. Na ile sposobów można ich ustawić w kolejce, tak, aby cztery pierwsze miejsca były zajęte przez dziewczynki?

Zadanie 2.

Dany jest ciąg

1, -1, -5, -13, ?, -61.

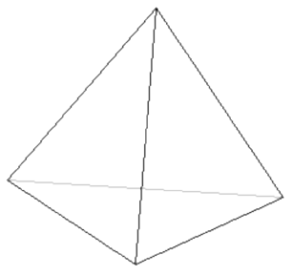
Uzupełnij go według reguły odnalezionej przez siebie a następnie zapisz tę regułę.

Zadanie 3.

Podaj przykład trzech trójek uporządkowanych (a, b, c) takich, że $a^2 + b^2 = c^2$ oraz liczby a, b, c są liczbami naturalnymi większymi niż jeden.

Zadanie 4.

Ile wynosi suma miar wszystkich kątów płaskich przy wszystkich wierzchołkach czworościanu? (Rysunek czworościanu przedstawiono poniżej).



czworościan

Zadanie 5.

Pewna liczba przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Jaką resztę przy dzieleniu przez 3 daje trzecia potęga tej liczby?

Zadanie 6.

Spośród wszystkich prostokątów o obwodzie 40 j znajdź ten, który ma największe pole. Ile wynosi pole tego prostokąta?

TEST 3

Zadanie 1.

Liczba doskonała to liczba naturalna, która jest sumą wszystkich swych dzielników właściwych (to znaczy od niej mniejszych). Znajdź jedną z takich liczb.

Zadanie 2.

Ile razy w ciągu doby wskazówki zegara pokryją się?

Zadanie 3.

Za pomocą pięciu piątek oraz być może nawiasów lub znaków działań arytmetycznych zapisz Liczbę 31.

Zadanie 4.

Mamy dwie patelnie. Na każdej zmieścimy tylko jednego kotleta. Jedna strona kotleta smaży się w ciągu 1 minuty. W jakim najkrótszym czasie usmażymy na tych patelniach 3 kotlety?

A

Zadanie 5.

Jak podzielić równoramienny trójkąt prostokątny na 6 tworzących różne pary takich trójkątów prostokątnych równoramiennych?

Zadanie 6.

Spośród wszystkich prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej równym 6 znajdź ten, który ma największą objętość?

TEST 4

Zadanie 1.

Na prostej obrano kolejno pięć punktów A, B, C, D, E . Wiadomo, że |AB|= 20j, |CE|= 80j, oraz |AC|= |BD|. Znajdź długość odcinka |DE

Zadanie 2.

Dane są liczby :

$$x = \frac{3+5+7+9+11}{5}$$

oraz

$$y = \frac{5}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}}$$

Która z nich jest większa?

Czy dostrzegasz jakąś ogólniejszą zależność?

Zapisz ja.

Zadanie 3.

Ania i Małgosia są kłamczuchami. Jednak obie z nich kłamią tylko w wybrane dni. Ania kłamie w piątki, soboty i niedziele. W inne dni mówi prawdę. Małgosia zaś kłamie we wtorki, środy i czwartki. W inne dni mówi prawdę. W jaki dzień tygodnia możliwym jest wypowiedzenie przez obie z nich słów : „ Będę kłamać jutro”?

Zadanie 4.

Jaś i Małgosia hodują żółwie w akwariach w kształcie prostopadłościanu. Jaś ma akwarium o wymiarach podstawy 40 cm na 50 cm i wysokości 25 cm. Akwarium Małgosi ma wymiary podstawy 50 cm na 60 cm i wysokość 30 cm. Jaś podarował Małgosi żółwia ze swojego akwarium i wówczas poziom wody w jego akwarium obniżył się o 3 mm. Oblicz o ile podniesie się poziom wody w akwarium Małgosi po włożeniu do niego żółwia otrzymanego od Jasia?

Zadanie 5.

W trapezie ABCD połączono punkt M będący środkiem ramienia BC z końcami drugiego ramienia AD. Uzasadnij, że pole powstałego trójkąta ADM jest równe połowie pola trapezu ABCD.

Zadanie 6.

Uzasadnij, że w kwadracie magicznym 3 x 3 o sumie P (sumy w wierszach, kolumnach i na głównych przekątnych są równe P) wyraz centralny jest równy $\frac{P}{3}$

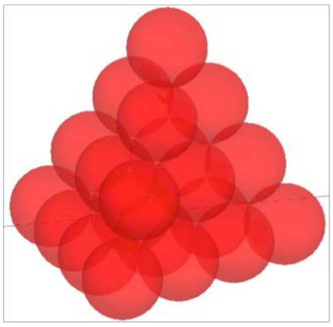
Kwadratem magicznym nazywamy kwadrat z wpisanymi w niego liczbami, w ten sposób, że suma wszystkich liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i każdej głównej przekątnej jest taka sama.

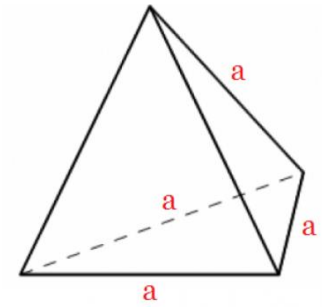
TEST KOŃCOWY

Zadanie 1.

Liczby czworościenne definiujemy jako liczby naturalne, dla których możliwe jest skonstruowanie czworościanu formalnego z kul.

Czworościan foremny zaś definiujemy jako ostrosłup prawidłowy trójkątny o wszystkich przystających ścianach.



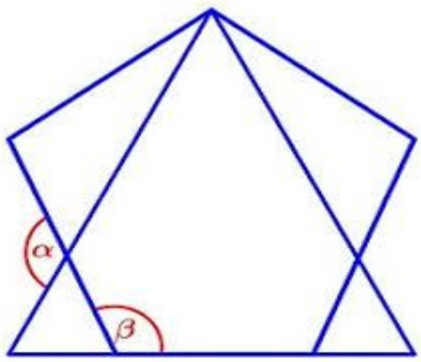


czworościan foremny

Znajdź czwartą z kolei liczb e czworościenną.

Zadanie 2.

Na pięciokąt foremny nałożono trójkąt równoboczny, jak na rysunku poniżej. Oblicz miarę kąta α.



Zadanie 3.

Podaj przykład najmniejszej liczby naturalnej większej niż 10, którą da się przedstawić jako sumę kwadratów trzech liczb naturalnych.

Zadanie 4.

Ile można utworzyć maksymalnie numerów telefonów stacjonarnych zaczynających się numerem kierunkowym (61), jeśli każdy numer łącznie z cyframi 61 składa się z dziewięciu cyfr?

Zadanie 5.

Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 5 i przy dzieleniu przez 11 daje tą samą resztę.

Zadanie 6.

Czy istnieją dwa trójkąty, które mają pole równe 10, a których obwody wynoszą odpowiednio: 50 i 500?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7.

Jak za pomocą trzech cięć nożyczkami rozciąć trójkąt równoboczny na cztery trójkąty o równych polach?

Zadanie 8.

Kwadratem magicznym nazywamy kwadrat z wpisanymi w niego liczbami w ten sposób, że suma wszystkich liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i każdej głównej przekątnej jest taka sama.

Uzupełnij poniższy kwadrat tak, aby był kwadratem magicznym.

8	1	6
	5	
	9	

Zadanie 9.

Szachem nazywamy sytuację, w której Lew jest atakowany przez zwierzę przeciwnika. Na diagramie nasz Lew na A3 jest szachowany przez Żyrafę na A2. Jeśli nic z tym nie zrobimy, to w kolejnym ruchu nasz Lew zostanie zbity i przegrany. Jest tylko jeden ruch, który pozwala uniknąć natychmiastowej porażki. Jaki?

ANEKS 4

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE w preteście

Imię i nazwisko	SUMA	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne	Zadania problemowe	Inne zadania
Nikodem B.	5	1	4	0	0
Grzegorz B.	8	2	4	0	2
Izabela B.	5	1	4	0	0
Elżbieta B.	5	2	2	0	1
Adrianna B.	9	1	3	0	5
Aleksandra K.	20	5	7	0	8
Adam L.	8	4	1	0	3
Maja L.	17	5	6	0	6
Marcin L.	10	5	4	0	1
Oliwia Ł.	8	3	3	0	2
Patryk M.	2	0	1	0	1
Joanna P.	5	2	3	0	0
Antonina R.	15	4	7	3	1
Aleksandra S.	7	2	3	1	1
Agnieszka R.	5	2	1	0	2
Krzysztof S.	3	0	1	1	1
Leonard S.	3	1	1	0	1
Michał S.	0	0	0	0	0
Marcel S.	6	4	2	0	0
Maciej Ś.	3	0	2	0	1

ANEKS 5

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE w postteście

Imię i nazwisko	**Suma**	**Zadania arytmetyczne**	**Zadania geometryczne**	**Zadania problemowe**	**Inne zadania**
Nikodem B.	**11**	0	5	4	2
Grzegorz B.	**20**	4	5	4	7
Izabela B.	**13**	2	3	4	4
Elżbieta B.	**18**	2	5	4	7
Adrianna B.	**12**	2	4	4	2
Aleksandra K.	**16**	4	5	4	3
Adam L.	**18**	2	5	4	7
Maja L.	**15**	4	5	4	1
Marcin L.	**20**	4	8	4	4
Oliwia Ł.	**15**	2	5	4	4
Patryk M.	**8**	2	2	2	2
Joanna P.	**11**	0	3	4	4
Antonina R.	**20**	4	8	4	4
Aleksandra S.	**12**	2	4	4	2
Agnieszka R.	**19**	4	5	4	6
Krzysztof S.	**3**	0	3	0	0
Leonard S.	**6**	0	2	0	4
Michał S.	**13**	2	2	4	5
Marcel S.	**20**	2	8	6	4
Maciej Ś.	**17**	4	4	4	5

ANEKS 6

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK w preteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne	Zadania problemowe	Inne zadania
Oliwia B.	2	0	1	0	1
Marta B.	7	1	1	0	5
Marianna C.	4	0	1	0	3
Dawid D.	4	1	1	0	2
Jakub F.	4	1	2	0	1
Amelia K.	4	2	1	0	1
Weronika K.	7	2	4	0	1
Filip K	16	5	7	1	3
Weronika M.	1	0	1	0	0
Marta M.	3	0	3	0	0
Julia P.	5	2	1	0	2
Kamil P.	5	0	1	1	3
Mateusz P.	11	4	4	0	3
Mieszko R.	4	0	1	0	3
Zofia S.	20	5	7	1	7
Bruno S.	7	2	1	0	4
Julia Sz.	4	0	1	0	3
Maja S.	3	0	1	0	2
Bogusz O.	6	2	3	0	1
Franek P.	5	1	1	0	3

ANEKS 7

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK w postteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne	Zadania problemowe	Inne zadania
Oliwia B.	6	0	2	0	4
Marta B.	9	2	1	2	4
Marianna C.	2	2	0	0	0
Dawid D.	0	0	0	0	0
Jakub F.	2	0	0	2	0
Amelia K.	7	1	2	0	4
Weronika K.	11	2	2	2	5
Filip K.	2	0	2	0	0
Weronika M.	7	2	3	2	0
Marta M.	6	0	2	0	4
Julia P.	9	0	5	0	4
Kamil P.	0	0	0	0	0
Mateusz P.	6	0	2	2	2
Mieszko R.	0	0	0	0	0
Zofia S.	13	2	3	4	4
Bruno S.	11	4	3	2	2
Julia Sz.	4	0	2	0	2
Maja S.	8	2	0	4	2
Bogusz O.	4	0	0	0	4
Franek P.	0	0	0	0	0

ANEKS 8

Test 1

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki pretestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 161.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
16.67	6.67
26.67	23.33
16.67	13.33
16.67	13.33
30.00	13.33
66.67	13.33
26.67	23.33
56.67	53.33
33.33	3.33
26.67	10.00
6.67	16.67
16.67	16.67
50.00	36.67
23.33	13.33
16.67	66.67
10.00	23.33
10.00	13.33
0.00	10.00
20.00	20.00
10.00	16.67

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 161.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is *not* significant at $p < .05$.

The *z*-score is 1.0279. The *p*-value is .30302. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 2

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki posttestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 35.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.37	0.20
0.67	0.30
0.43	0.07
0.60	0.00
0.40	0.07
0.53	0.23
0.60	0.37
0.50	0.07
0.67	0.23
0.50	0.20
0.27	0.30
0.37	0.00
0.67	0.20
0.40	0.00
0.63	0.43
0.10	0.37
0.20	0.13
0.43	0.27
0.67	0.13
0.57	0.00

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *z*-score is 4.44974. The *p*-value is < .00001. The result is significant at $p < .05$.

Test 3

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – porównanie średnich wyników postępów w grupach GE i GK

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 52.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.2	0.13
0.4	0.06
0.26	-0.06
0.43	-0.13
0.1	-0.67
-0.13	0.1
0.33	0.13
-0.06	-0.46
0.33	0.2
0.23	0.1
0.2	0.13
0.2	-0.16
0.16	-0.16
0.16	-0.13
0.46	-0.23
0	0.13
0.1	0
0.43	0.16
0.46	-0.06
0.46	-0.16

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

The *U*-value is 52. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 3.98989. The *p*-value is .00006. The result is significant at $p < .05$.

Test 4

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych pretestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 132.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.57	0.14
0.57	0.14
0.29	0.14
0.43	0.14
1.00	0.29
0.14	0.14
0.86	0.57
0.57	1.00
0.43	0.14
0.14	0.43
0.43	0.14
1.00	0.14
0.43	0.57
1.00	0.14
0.43	1.00
0.14	0.14
0.14	0.14
0.00	0.14
0.29	0.43
0.29	0.14

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 132.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is *not* significant at $p < .05$.

The *z*-score is 1.81236. The *p*-value is .0703. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 5

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 37.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.63	0.25
0.63	0.13
0.38	0.00
0.63	0.00
0.5	0.00
0.63	0.25
0.63	0.25
0.63	0.25
1.00	0.38
0.63	0.25
0.25	0.63
0.38	0.00
1.00	0.25
0.5	0.00
0.63	0.38
0.38	0.38
0.25	0.25
0.25	0.00
1.00	0.00
0.5	0.00

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

The *z*-score is 4.39564. The *p*-value is < .00001. The result is significant at $p < .05$.

Test 6

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 96.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.05	0.11
0.05	-0.02
-0.05	-0.14
0.34	-0.14
0.07	-0.29
-0.38	0.11
0.48	-0.32
-0.23	-0.75
0.43	0.23
0.20	-0.18
0.11	0.48
-0.05	-0.14
0	-0.32
0.07	-0.14
0.48	-0.63
0.23	0.23
0.11	0.11
0.25	-0.14
0.71	-0.43
0.21	-0.14

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 96. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 2.79968. The *p*-value is .00512. The result is significant at $p < .05$.

Test 7

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań arytmetycznych pretestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 145.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.2	0.0
0.4	0.2
0.2	0.0
0.4	0.2
0.2	0.2
1.0	0.4
0.8	0.4
1.0	1.0
1.0	0.0
0.6	0.0
0.0	0.4
0.4	0.0
0.8	0.8
0.4	0.0
0.4	1.0
0.0	0.4
0.2	0.0
0.0	0.0
0.8	0.4
0.0	0.2

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

The *U*-value is 145. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is *not* significant at $p < .05$.

The *z*-score is 1.47423. The *p*-value is .14156. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 8

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 95.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.0	0.0
1	0.5
0.5	0.5
0.5	0.0
0.5	0.0
1	0.25
0.5	0.5
1	0.0
1	0.5
0.5	0.0
0.5	0.0
0.0	0.0
1	0.0
0.5	0.0
1	0.5
0.0	1
0.0	0.0
0.5	0.5
0.5	0.0
1	0.0

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 95.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 2.81321. The *p*-value is .00496. The result is significant at $p < .05$.

Test 9

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 149.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
-0.2	0
0.6	0.3
0.3	0.5
0.1	-0.2
0.3	-0.2
0	-0.15
-0.3	0.1
0	-1
0	0.5
-0.1	0
0.5	-0.4
-0.4	0
0.2	-0.8
0.1	0
0.6	-0.5
0	0.6
-0.2	0
0.5	0.5
-0.3	-0.4
1	-0.2

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 149. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is *not* significant at $p < .05$.

The *z*-score is 1.36603. The *p*-value is .17068. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 10

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań problemowych pretestu

The value of U is 198.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0.17
0	0
0	0
0	0
0	0.17
0.5	0
0.17	0
0	0.17
0.17	0
0	0
0	0
0	0
0	0

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 198.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is *not* significant at $p < .0$

The *z*-score is 0.02705. The *p*-value is .97606. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 11

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki zadań problemowych posttestu

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 45.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether yo
hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Resu
blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0	0.67
0	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0.67	0.67
0.33	0
0	0
0.67	0.67
0	1
0	0.67

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *z*-score is -4.17924. The *p*-value is < .00001. The result is significant at $p < .05$.

Test 12

Test U Manna- Whitneya w grupie eksperymentalnej GE i kontrolnej GK – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 66.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0	0.0
0.67	0.33
0.67	0.0
0.67	0.0
0.67	0.33
0.67	0.0
0.67	0.33
0.67	-0.17
0.67	0.33
0.67	0.0
0.33	0.0
0.67	-0.17
0.17	0.33
0.5	0.0
0.67	0.5
-0.17	0.33
0.0	0.0
0.67	0.67
1.0	0.0
0.67	0.0

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 66. The critical value of *U* at $p < .05$ is 127. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 3.61119. The *p*-value is .0003. The result is significant at $p < .05$.

Test 13

Test Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) - wszystkie zadania

Homogeneity of Variance Calculator - Levene's Test

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is a little complex. What you need to know is that the values of *f* and *p* appe
the bottom of the page. It's important to note that a significant result suggests that the two samples hav
different variances. *The requirement of homogeneity is met when the result is not significant.*

Sample 1 (*a*)

0.37
0.67
0.6
0.67
0.27
0.1
0.2
0.43
0.67
0.57
0.0
0.07
0.0
0.2
0.0
0.37
0.13
0.13
0.0

Sample 2 (*b*)

0.43
0.6
0.4
0.53
0.5
0.5
0.37
0.67
0.4
0.63
0.2
0.3
0.07
0.23
0.37
0.23
0.2
0.3
0.43
0.13

Mean *a* - a_i (*c*)

0.0832
0.3832
0.3132
0.3832
0.0168
0.1868
0.0868
0.1432
0.3832
0.2832
0.2868
0.2168
0.2868
0.0868
0.2868
0.0832
0.1568
0.1568
0.2868

Mean *b* - b_i (*d*)

0.0605
0.2305
0.0305
0.1605
0.1305
0.1305
0.0005
0.3005
0.0305
0.2605
0.1695
0.0695
0.2995
0.1395
0.0005
0.1395
0.1695
0.0695
0.0605
0.2395

(Mean *c* - c_i)^2

0.0084
0.0435
0.0192
0.0435
0.0249
0.0001
0.0077
0.001
0.0435
0.0118
0.0126
0.0018
0.0126
0.0077
0.0126
0.0084
0.0003
0.0003
0.0126

(Mean *d* - d_i)^2

0.013
0.0031
0.0208
0.0002
0.0019
0.0019
0.0303
0.0158
0.0208
0.0074
0
0.011
0.0156
0.0012
0.0303
0.0012
0
0.011
0.013
0.0042

Summary of Data

	Sample Variances		
	c	*d*	Total
N	19	21	40
∑X	4.1105	2.7914	6.902
Mean	0.2163	0.1329	0.173
$\sum X^2$	1.1286	0.5433	1.6719
Std.Dev.	0.1153	0.0928	0.1111

Result Details

Source	*SS*	*df*	*MS*	
Between-treatments	0.0694	1	0.0694	$F = 6.4088$
Within-treatments	0.4116	38	0.0108	
Total	0.481	39		

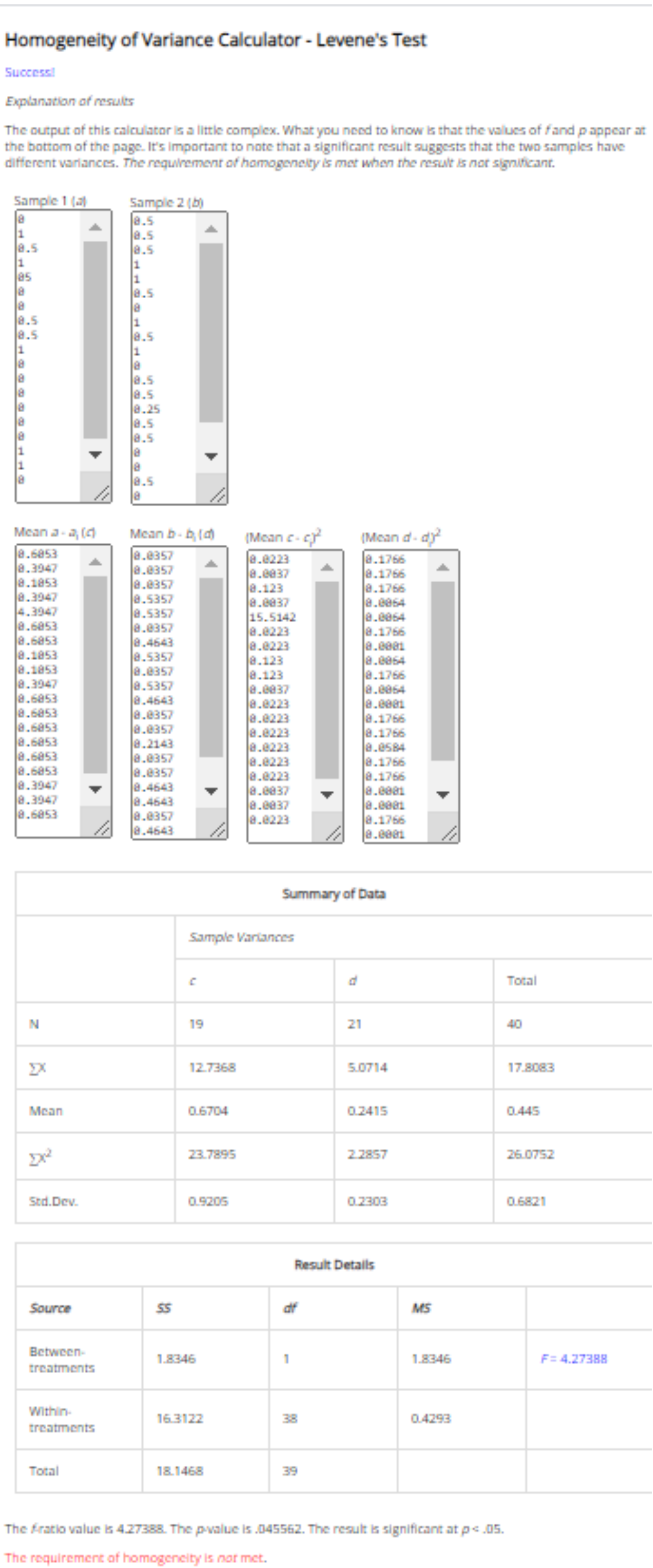
The *f*-ratio value is 6.4088. The *p*-value is .015613. The result is significant at $p < .05$.

The requirement of homogeneity is *not* met.

Calculate Reset

Test 14

Test Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) – zadania arytmetyczne



Homogeneity of Variance Calculator - Levene's Test

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is a little complex. What you need to know is that the values of *f* and *p* appear at the bottom of the page. It's important to note that a significant result suggests that the two samples have different variances. *The requirement of homogeneity is met when the result is not significant.*

Sample 1 (*a*)
0
1
0.5
1
05
0
0
0.5
0.5
1
0
0
0
0
0
0
1
1
0

Sample 2 (*b*)
0.5
0.5
0.5
1
1
0.5
0
1
0.5
1
0
0.5
0.5
0.25
0.5
0.5
0
0
0.5
0

Mean *a* - a_i (*c*)
0.6053
0.3947
0.1053
0.3947
4.3947
0.6053
0.6053
0.1053
0.1053
0.3947
0.6053
0.6053
0.6053
0.6053
0.6053
0.6053
0.3947
0.3947
0.6053

Mean *b* - b_i (*d*)
0.0357
0.0357
0.0357
0.5357
0.5357
0.0357
0.4643
0.5357
0.0357
0.5357
0.4643
0.0357
0.0357
0.2143
0.0357
0.0357
0.4643
0.4643
0.0357
0.4643

(Mean *c* - c_i)^2
0.0223
0.0037
0.123
0.0037
15.5142
0.0223
0.0223
0.123
0.123
0.0037
0.0223
0.0223
0.0223
0.0223
0.0223
0.0223
0.0037
0.0037
0.0223

(Mean *d* - d_i)^2
0.1766
0.1766
0.1766
0.0064
0.0064
0.1766
0.0001
0.0064
0.1766
0.0064
0.0001
0.1766
0.1766
0.0584
0.1766
0.1766
0.0001
0.0001
0.1766
0.0001

Summary of Data			
	Sample Variances		
	c	*d*	Total
N	19	21	40
∑X	12.7368	5.0714	17.8083
Mean	0.6704	0.2415	0.445
∑X^2	23.7895	2.2857	26.0752
Std.Dev.	0.9205	0.2303	0.6821

Result Details				
Source	***SS***	***df***	***MS***	
Between-treatments	1.8346	1	1.8346	*F* = 4.27388
Within-treatments	16.3122	38	0.4293	
Total	18.1468	39		

The *f*-ratio value is 4.27388. The *p*-value is .045562. The result is significant at *p* < .05.

The requirement of homogeneity is *not* met.

Test 15

Test Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) - zadania geometryczne

Homogeneity of Variance Calculator - Levene's Test

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is a little complex. What you need to know is that the values of *f* and *p* app the bottom of the page. It's important to note that a significant result suggests that the two samples ha different variances. *The requirement of homogeneity is met when the result is not significant.*

Sample 1 (*a*)

0.63
0.63
0.63
1
0.25
0.38
0.25
0.25
1
0.5
0
0
0.25
0
0.25
0
0.38
0
0

Sample 2 (*b*)

0.38
0.63
0.5
0.63
0.63
0.63
0.38
1
0.5
0.63
0.25
0.13
0
0.25
0.25
0.38
0.25
0.63
0.38
0.25

Mean *a* - a_i (*c*)

0.2932
0.2932
0.2932
0.6632
0.0868
0.0432
0.0868
0.0868
0.6632
0.1632
0.3368
0.3368
0.0868
0.3368
0.0868
0.3368
0.0432
0.3368
0.3368

Mean *b* - b_i (*d*)

0.0333
0.2167
0.0867
0.2167
0.2167
0.2167
0.0333
0.5867
0.0867
0.2167
0.1633
0.2833
0.4133
0.1633
0.1633
0.0333
0.1633
0.2167
0.0333
0.1633

(Mean *c* - c_i)^2

0.0043
0.0043
0.0043
0.19
0.0197
0.0339
0.0197
0.0197
0.19
0.0041
0.012
0.012
0.0197
0.012
0.0197
0.012
0.0339
0.012
0.012

(Mean *d* - d_i)^2

0.0376
0.0001
0.0198
0.0001
0.0001
0.0001
0.0376
0.1291
0.0198
0.0001
0.0041
0.0031
0.0346
0.0041
0.0041
0.0376
0.0041
0.0001
0.0376
0.0041

Summary of Data			
	Sample Variances		
	c	*d*	Total
N	19	21	40
∑X	4.9105	4.12	9.0305
Mean	0.2584	0.1962	0.226
$\sum X^2$	1.8862	1.2007	3.0869
Std.Dev.	0.1852	0.1401	0.1639

Result Details				
Source	***SS***	***df***	***MS***	
Between-treatments	0.0387	1	0.0387	*F* = 1.45547
Within-treatments	1.0095	38	0.0266	
Total	1.0481	39		

The *f*-ratio value is 1.45547. The *p*-value is .235109. The result is *not* significant at $p < .05$.

The requirement of homogeneity is met.

Test 16

Test Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) - zadania problemowe

Homogeneity of Variance Calculator - Levene's Test

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is a little complex. What you need to know is that the values of *f* and *p* appear at the bottom of the page. It's important to note that a significant result suggests that the two samples have different variances. *The requirement of homogeneity is met when the result is not significant.*

Sample 1 (*a*)	Sample 2 (*b*)
0.67	0.67
0.67	0.67
0.67	0.67
0.67	0.67
0.33	0.67
0	0.67
0	0.67
0.67	0.67
1	0.67
0.67	0.67
0	0
0.33	0.33
0	0
0	0
0.33	0.33
0	0.33
0.33	0
0	0
0	0.67
	0

Mean $a - a_i$ (c)	Mean $b - b_i$ (d)	(Mean $c - c_i)^2$	(Mean $d - d_i)^2$
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.0037	0.24	0.0755	0.0015
0.3337	0.24	0.0031	0.0015
0.3337	0.24	0.0031	0.0015
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.6663	0.24	0.1505	0.0015
0.3363	0.24	0.0034	0.0015
0.3337	0.43	0.0031	0.023
0.0037	0.1	0.0755	0.0318
0.3337	0.43	0.0031	0.023
0.3337	0.43	0.0031	0.023
0.0037	0.1	0.0755	0.0318
0.3337	0.1	0.0031	0.0318
0.0037	0.43	0.0755	0.023
0.3337	0.43	0.0031	0.023
0.3337	0.24	0.0031	0.0015
	0.43		0.023

Summary of Data			
	Sample Variances		
	c	*d*	Total
N	19	21	40
$\sum X$	5.3684	5.76	11.1284
Mean	0.2825	0.2743	0.278
$\sum X^2$	2.0134	1.8306	3.844
Std.Dev.	0.1661	0.112	0.1385

Result Details				
Source	***SS***	***df***	***MS***	
Between-treatments	0.0007	1	0.0007	*F* = 0.03463
Within-treatments	0.7473	38	0.0197	
Total	0.748	39		

The *f*-ratio value is 0.03463. The *p*-value is .853365. The result is *not* significant at *p* < .05.

The requirement of homogeneity is met.

Test 17

Test t dla prób niezależnych równości średnich wyników zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) - zadania geometryczne

T-Test Calculator for 2 Independent Means

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is pretty straightforward. The values of *t* and *p* appear at the bottom of the page. If the text is blue, your result is significant; if it's red, it's not. The only thing that might catch you out the way that we've rounded the data. The data you see in front of you, apart from the *t* and *p* values at the page bottom, has been rounded to 2 significant figures. However, we did not round when actually calculat the values of *t* and *p*. This means if you try to calculate these values on the basis of the summary data provided here, you're likely going to end up with a different, less accurate, result. This is especially the cas you're dealing with numbers that are fractions of 1.

Treatment 1 (X)	Diff ($X - M$)	Sq. Diff ($X - M$)^2
0.63	0.29	0.09
0.63	0.29	0.09
0.63	0.29	0.09
1	0.66	0.44
0.25	-0.09	0.01
0.38	0.04	0.00
0.25	-0.09	0.01
0.25	-0.09	0.01
1	0.66	0.44
0.5	0.16	0.03
0	-0.34	0.11
0	-0.34	0.11
0.25	-0.09	0.01
0	-0.34	0.11
0.25	-0.09	0.01
0	-0.34	0.11
0.38	0.04	0.00
0	-0.34	0.11
0	-0.34	0.11

Treatment 2 (X)	Diff ($X - M$)	Sq. Diff ($X - M$)^2
0.38	-1.14	1.30
0.63	-0.89	0.79
0.5	-1.02	1.04
0.63	-0.89	0.79
0.63	-0.89	0.79
0.63	-0.89	0.79
0.38	-1.14	1.30
1	-0.52	0.27
0.5	-1.02	1.04
0.63	-0.89	0.79
0.25	-1.27	1.61
0.13	-1.39	1.93
0	-1.52	2.31
0	-1.52	2.31
0,25	23.48	551.33
0.25	-1.27	1.61
0.38	-1.14	1.30
0.25	-1.27	1.61
0.63	-0.89	0.79
0.38	-1.14	1.30
0.25	-1.14	1.30

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05
- ○ .10

One-tailed or two-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

Difference Scores Calculations

Treatment 1

N_1: 19
$df_1 = N - 1 = 19 - 1 = 18$
M_1: 0.34
SS_1: 1.89
$s^2_1 = SS_1/(N - 1) = 1.89/(19-1) = 0.1$

Treatment 2

N_2: 22
$df_2 = N - 1 = 22 - 1 = 21$
M_2: 1.52
SS_2: 578.93
$s^2_2 = SS_2/(N - 1) = 578.93/(22-1) = 27.57$

T-value Calculation

$s^2_p = ((df_1/(df_1 + df_2)) * s^2_1) + ((df_2/(df_2 + df_2)) * s^2_2) = ((18/39) * 0.1) + ((21/39) * 27.57) = 14.89$

$s^2_{M_1} = s^2_p/N_1 = 14.89/19 = 0.78$
$s^2_{M_2} = s^2_p/N_2 = 14.89/22 = 0.68$

$t = (M_1 - M_2)/\sqrt{(s^2_{M_1} + s^2_{M_2})} = -1.18/\sqrt{1.46} = -0.98$

The *t*-value is -0.97856. The *p*-value is .333831. The result is *not* significant at $p < .05$.

Want to know how to report this *t*-test result in your work? (Opens in a new tab so you don't lose your calculation.)

Test 18

Test t dla prób niezależnych równości średnich wyników zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 40) - zadania problemowe

T-Test Calculator for 2 Independent Means

Success!

Explanation of results

The output of this calculator is pretty straightforward. The values of *t* and *p* appear at the bottom of the page. If the text is blue, your result is significant; if it's red, it's not. The only thing that might catch you out is the way that we've rounded the data. The data you see in front of you, apart from the *t* and *p* values at the page bottom, has been rounded to 2 significant figures. However, we did not round when actually calculating the values of *t* and *p*. This means if you try to calculate these values on the basis of the summary data provided here, you're likely going to end up with a different, less accurate, result. This is especially the case if you're dealing with numbers that are fractions of 1.

Treatment 1 (X)	Diff ($X - M$)	Sq. Diff ($X - M$)^2
0.67	0.34	0.11
0.67	0.34	0.11
0.67	0.34	0.11
0.67	0.34	0.11
0.33	0.00	0.00
0	-0.33	0.11
0	-0.33	0.11
0.67	0.34	0.11
1	0.67	0.44
0.67	0.34	0.11
0	-0.33	0.11
0.33	0.00	0.00
0	-0.33	0.11
0	-0.33	0.11
0.33	0.00	0.00
0	-0.33	0.11
0.33	0.00	0.00
0	-0.33	0.11
0	-0.33	0.11

Treatment 2 (X)	Diff ($X - M$)	Sq. Diff ($X - M$)^2
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0.67	0.24	0.06
0	-0.43	0.18
0.33	-0.10	0.01
0	-0.43	0.18
0	-0.43	0.18
0.33	-0.10	0.01
0.33	-0.10	0.01
0	-0.43	0.18
0	-0.43	0.18
0.67	0.24	0.06
0	-0.43	0.18

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05
- ○ .10

One-tailed or two-tailed hypothesis?:

- ● One-tailed
- ○ Two-tailed

Difference Scores Calculations

Treatment 1

N_1: 19
$df_1 = N - 1 = 19 - 1 = 18$
M_1: 0.33
SS_1: 2.01
$s^2_1 = SS_1/(N - 1) = 2.01/(19-1) = 0.11$

Treatment 2

N_2: 21
$df_2 = N - 1 = 21 - 1 = 20$
M_2: 0.43
SS_2: 1.83
$s^2_2 = SS_2/(N - 1) = 1.83/(21-1) = 0.09$

T-value Calculation

$s^2_p = ((df_1/(df_1 + df_2)) * s^2_1) + ((df_2/(df_2 + df_2)) * s^2_2) = ((18/38) * 0.11) + ((20/38) * 0.09) = 0.1$

$s^2_{M_1} = s^2_p/N_1 = 0.1/19 = 0.01$
$s^2_{M_2} = s^2_p/N_2 = 0.1/21 = 0$

$t = (M_1 - M_2)/\sqrt{(s^2_{M_1} + s^2_{M_2})} = -0.1/\sqrt{0.01} = -0.96$

The *t*-value is -0.95643. The *p*-value is .172451. The result is *not* significant at $p < .05$.

Want to know how to report this *t*-test result in your work? (Opens in a new tab so you don't lose your

Test 19

Test U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej i kontrolnej z podziałem na płeć badanych uczniów-chłopcy wszystkie zadania

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 7.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.37	0.0
0.67	0.07
0.6	0.0
0.67	0.2
0.27	0.0
0.1	0.37
0.2	0.13
0.43	0.13
0.67	0.0
0.57	

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 7. The critical value of *U* at $p < .05$ is 20. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 3.06186. The *p*-value is .00222. The result is significant at $p < .05$.

Test 20

Test U Manna-Whitneya dla chłopców z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania arytmetyczne.

The value of U is 27.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0	0
1	0
0.5	0
1	0
0.5	0
0	0
0	1
0.5	1
0.5	0
1	

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 27.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 20. Therefore, the result is *not* significant at $p < .05$.

The *z*-score is 1.38804. The *p*-value is .16452. The result is *not* significant at $p < .05$.

Test 21

Test U Manna-Whitneya dla chłopców z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania geometryczne

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 6.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.63	0
0.63	0
0.63	0.25
1	0
0.25	0.25
0.38	0
0.25	0.38
0.25	0
1	0
0.5	

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

The *U*-value is 6.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 20. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 3.10269. The *p*-value is .00194. The result is significant at $p < .05$.

Test 22

Test U Manna-Whitneya dla chłopców z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania problemowe

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 13.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.67	0
0.67	0.33
0.67	0
0.67	0
0.33	0.33
0	0
0	0.33
0.67	0
1	0
0.67	

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 13.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 20. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is 2.53114. The *p*-value is .0114. The result is significant at $p < .05$.

Test 23

Test U Manna-Whitneya dla dziewczynek z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- wszystkie zadania

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 4.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.43	0.2
0.6	0.3
0.4	0.07
0.53	0.23
0.5	0.37
0.5	0.23
0.37	0.2
0.67	0.3
0.4	0.43
0.63	0.13
	0.27

Significance Level:

- ○ .01
- ● .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ● Two-tailed

The *U*-value is 4. The critical value of *U* at $p < .05$ is 26. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is -3.5561. The *p*-value is .00038. The result is significant at $p < .05$.

Test 24

Test U Manna-Whitneya dla dziewczynek z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania arytmetyczne

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 24.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.5	0
0.5	0.5
0.5	0.5
1	0.25
1	0.5
0.5	0.5
0	0
1	0
0.5	0.5
1	0
	0.5

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 24. The critical value of *U* at $p < .05$ is 26. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is -2.14775. The *p*-value is .03156. The result is significant at $p < .05$.

Test 25

Test U Manna-Whitneya dla dziewczynek z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania geometryczne

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 8.5.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.38	0.25
0.63	0.13
0.5	0
0.63	0.25
0.63	0.25
0.63	0.38
0.38	0.25
1	0.63
0.5	0.38
0.63	0.25
	0

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 8.5. The critical value of *U* at $p < .05$ is 26. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is -3.23922. The *p*-value is .0012. The result is significant at $p < .05$.

Test 26

Test U Manna-Whitneya dla dziewczynek z grupy eksperymentalnej i kontrolnej- zadania problemowe

Mann-Whitney U Test Calculator

The value of U is 10.

You'll notice below that we have calculated a critical value for U based on alpha level and whether your hypothesis is one or two tailed. We have also calculated a value for *Z* and its associated *p*-value. Results in blue reach significance. Results in red do not.

Sample 1	Sample 2
0.67	0
0.67	0.33
0.67	0
0.67	0
0.67	0.33
0.67	0.33
0.67	0
0.67	0
0.67	0.67
0.67	0
	0.67

Significance Level:

- ○ .01
- ◉ .05

1 or 2-tailed hypothesis?:

- ○ One-tailed
- ◉ Two-tailed

The *U*-value is 10. The critical value of *U* at $p < .05$ is 26. Therefore, the result is significant at $p < .05$.

The *z*-score is -3.1336. The *p*-value is .00174. The result is significant at $p < .05$.