

MICHAŁ WOŹNIAK, ALEKSANDER ZELIAŚ

ZASTOSOWANIE ANALIZY HARMONICZNEJ W BADANIACH SEZONOWOŚCI PRZEWOZÓW PŁODÓW ROLNYCH

Badania nad wyjaśnianiem mechanizmu powodującego wahania sezonowe zajmują jedno z poczesnych miejsc wśród analiz ekonometrycznych. Literatura naukowa traktująca o metodach badania sezonowości rośnie bardzo szybko i obejmuje obecnie wiele poważnych pozycji. Wymieńmy tutaj przykładowo prace E. J. Hannana¹, D. W. Joergensona² i R. Stone'a³. O możliwościach zastosowań tych metod w Polsce traktują takie publikacje, jak np. E. Vielroseg⁴, Z. Zielińskiego⁵, L. Dziembały⁶, S. Giembickiego⁷ i innych⁸, wnoszące pewien oryginalny wkład w metodologię badania wahań sezonowych w szeregach czasowych.

Należy jednak w tym miejscu podkreślić, że nie podejmowano, jak dotąd, szerszych prób praktycznego zastosowania metod ekonometrycznych w badaniach sezonowości kolejowych przewozów płodów rolnych.

¹ E. J. Hannan, *The Estimation of Seasonal Variation*, The Australian Journal of Statistics 1960, vol. 2, No 1; *The Estimation of Seasonal Variation in Economic Time Series*, Journal of the American Statistical Association 1963, vol. 58, No 301

² D. W. Joergenson, *Minimum Variance, Linear Unbiased Seasonal Adjustment of Economic Time Series*, Journal of the American Statistical Association 1964, vol. 59, No 307.

³ R. Stone, *Modele wyrównywania sezonowości*, Przegląd Statystyczny 1962, z. 2.

⁴ E. Vielrose, *O metodach badania sezonowości*, Przegląd Statystyczny 1960, z. 2.

⁵ Z. Zieliński, *O badaniu sezonowości metodą stosunków do trendu*, Przegląd Statystyczny 1962, z. 2; tenże, *Statystyczne studium sezonowości towarowych przewozów kolejami w Polsce w latach 1947 - 1960*, Szczecin 1965; tenże, *Model szeregu czasowego z periodycznym składnikiem sezonowym*, Przegląd Statystyczny 1967, z. 2; tenże, *Estymacja wskaźników sezonowości*, Przegląd Statystyczny 1968, z. 1..

⁶ L. Dziembała, *Analiza wahań cyklicznych miesięcznej liczby pożarów*, Przegląd Statystyczny 1967, z. 2.

⁷ S. Giembicki, *Zastosowanie średnich ruchomych ważonych do wyrównywania szeregów czasowych*, Wiadomości Statystyczne 1967, z. 2; tenże, *Zastosowanie analizy harmonicznej do szacowania periodycznego składnika sezonowości*, Wiadomości Statystyczne 1967, z. 12.

⁸ T. M. Gołogórski, *Rachunek wyrównawczy*, Poznań—Warszawa—Wilno—Lublin 1927; Z. Pawowski, *Ekonometria*, Warszawa 1966.

O znaczeniu tego rodzaju badań dla celów gospodarczych pisano już wiele i nie ma potrzeby uzasadniania ich praktycznej przydatności, również na odcinku sezonowości towarowych przewozów kolejami.

W dotychczasowych pracach badawczych przeważał początkowo werbalno-opisowy sposób podchodzenia do zagadnienia, odznaczający się bardzo wąskim, praktycznym jego ujęciem. Następnie w coraz większym stopniu zaczęto stosować metody statystyki opisowej, których rola ostatnio ogromnie wzrosła.

Z zakresu wykorzystania metod statystycznych w badaniach sezonowości towarowych przewozów kolejami w Polsce należy przede wszystkim wymienić cytowaną pracę Z. Zielińskiego⁹ poświęconą w całości tym właśnie zagadnieniom. Dla uzupełniania warto dodać, że praca ta była jednym z pierwszych, o ile wiadomo, polskich badań empirycznych z zakresu poruszanej tu problematyki.

Zjawisko sezonowości towarowych przewozów kolejami jest powszechnie znane. Znane są również ujemne skutki ekonomiczne wynikające z faktu występowania sezonowych wahań w przewozach. Poznanie mechanizmu kształtowania się sezonowości przewozów umożliwi, po pierwsze, lepszą koordynację zapotrzebowania w czasie na określony rodzaj środków transportowych, po drugie, może stanowić punkt wyjścia do badań z zakresu kosztów wahań sezonowych.

I

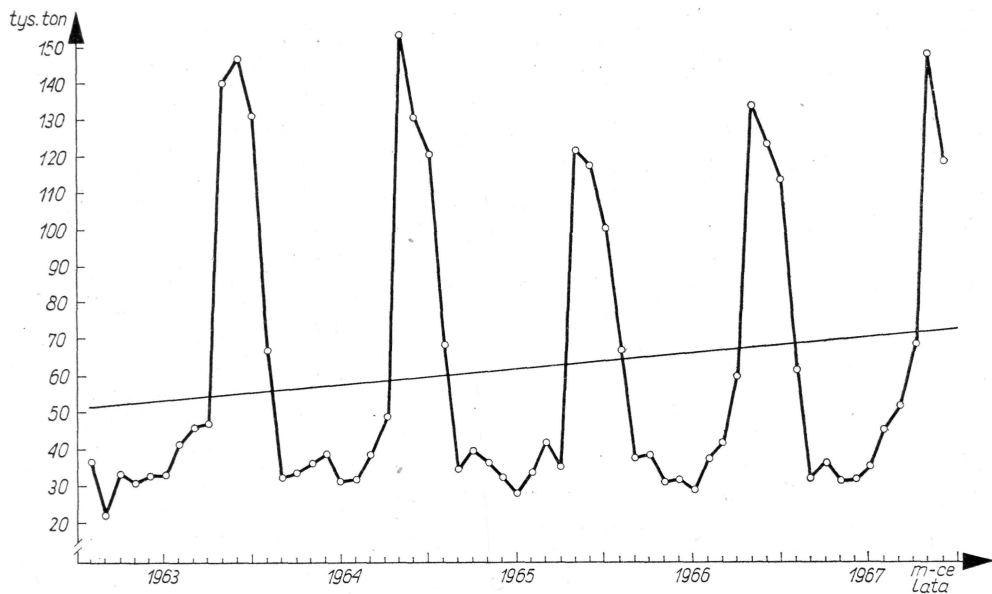
W niniejszej pracy autorzy stawiają sobie za cel wykrycie wahań sezonowych w przewozach płodów rolnych kolejami normalnotorowymi oraz wytłumaczenie mechanizmu ich powstawania. Zadanie to jest realizowane w pracy przy pomocy metod analizy harmoniczej.

Badania oparto na materiałach statystycznych dotyczących woj. krakowskiego i rzeszowskiego w latach 1963-1967. W pracy posłużono się materiałem liczbowym udostępnionym przez Dyрекcję Okręgową Kolei Państwowych w Krakowie. Dane źródłowe ujęto według okresów miesięcznych, jednostki czasu najbardziej użytecznej dla analizy wahań sezonowych¹⁰. Obejmują one informacje o czterech grupach płodów rolnych: zbożach, burakach, ziemniakach oraz „innych płodach i przetworach rolnych”. Należy jeszcze zwrócić tu uwagę na fakt, że wielkość przewozów w poszczególnych grupach towarowych obejmuje nadanie wewnętrzne, nadanie za granicę, przyjęcie z zagranicy oraz tranzyt.

W tabeli 1 zamieszczono podstawowy materiał liczbowy stanowiący punkt wyjścia dla omówienia podjętej problematyki. Na podstawie wstę-

⁹ Z. Zieliński, *Statystyczne studium...*, op. cit.

¹⁰ Można również brać pod uwagę dane za okresy dekadowe, tygodniowe itd. Tutaj ograniczamy się jednak do danych miesięcznych.



Ryc. 1. Miesięczne wielkości przewozów kolejowych płodów rolnych w DOKP Kraków w latach 1963-1967: — dane empiryczne, — dane teoretyczne

pnej analizy danych empirycznych stwierdzono, że grupa „zboże” charakteryzuje się relatywnie wysokimi, nieregularnymi wahaniami w przewozach. Wydaje się, że jest to w dużym stopniu wynikiem silnego wpływu polityki importu i skupu na wielkość nadania zboża w poszczególnych miesiącach. Skoro tak jest, nie jest rzeczą wskazaną, głównie z punktu widzenia zachowania jednorodności grup, uwzględnienie w badaniu tej właśnie grupy. Tak więc w dalszym toku rozważań ograniczono się jedynie do określenia prawidłowości zachodzących w wielkości ogólnych przewozów kolejowych o trzech grupach rolnych: burakach cukrowych, ziemniakach oraz „innych płodach i przetworach rolnych”.

Na ryc. 1 przedstawiono miesięczne wielkości ogólnych przewozów kolejowych płodów rolnych. Rozkład ten wykazuje wahania, przy czym maksima roczne dają się zaobserwować w miesiącach: październiku, listopadzie, grudniu i styczniu.

Spośród omawianych grup płodów rolnych najsilniej podlegają wahanom sezonowym przewozy buraków cukrowych, przewozi się je tylko w kilku miesiącach, a mianowicie w październiku, listopadzie i grudniu, niewielkie ilości przewozi się czasem we wrześniu i styczniu.

Na drugim miejscu pod względem znaczenia w tworzeniu się wahań sezonowych ogólnych przewozów omawianych grup ładunków znajdują się przewozy ziemniaków, których szczyt sezonowy przypada na październik. Podobnie oddziaływa na ogólną krzywą grupa „inne płody i prze-

twory rolne" (stopień tego wpływu jest jednak mniejszy i bardziej zróżnicowany).

W świetle tych spostrzeżeń można powiedzieć, że ogólna sezonowość przewozów kolejowych płodów rolnych jest wypadkową sezonowości poszczególnych grup towarowych.

Żałómy, że podstawą dekompozycji rozpatrywanego szeregu czasowego będzie model addytywny w postaci:

$$(Y_t) = X_t + S_t + \xi_t, \quad (t=0, 1, \dots, N-1)$$

gdzie:

Y_t — zmienna endogeniczna,

X_t — wartość trendu,

S_t — wartości składnika sezonowego,

ξ_t — składnik losowy, o którym zakładamy, że ma rozkład prawdopodobieństwa o średniej zero i wariancji σ^2 .

Punktem wyjścia do wyodrębnienia wahań sezonowych przewozów badanych płodów rolnych jest określenie składnika trendu X_t modelu (1).

W literaturze statystycznej znane są dwie podstawowe metody określania tego składnika. Pierwsza metoda polega na określeniu trendu przy pomocy średniej ruchomej scentrowanej rzędu m , gdzie m oznacza liczbę sezonów w roku (np. liczbę miesięcy lub kwartałów), druga na zdefiniowaniu trendu przy pomocy wielomianu dyskretnej zmiennej czasowej t ($t = 0, 1, \dots, N-1$).

Najpowszechniej stosowaną do chwili obecnej metodą obliczania trendu w badaniach wahań sezonowych jest metoda średniej ruchomej, łatwo jednak udowodnić, że stosowanie średniej ruchomej scentrowanej jest mniej przydatnym narzędziem obliczania trendu ponieważ a) przy obliczaniu średniej ruchomej m — okresowej nie znamy poziomu trendu dla $\frac{m}{2}$ pierwszych i $\frac{m}{2}$ ostatnich okresów objętych analizą empiryczną, b) trend obliczony za pomocą średniej ruchomej nie może być ekstrapolowany, c) eliminacja wartości trendu z szeregu czasowego metodą średniej ruchomej może przyczynić się do zniekształcenia składnika sezonowego poprzez pojawienie się tzw. efektu Śluckiego - Yule'a powstającego w wyniku autokorelacji składnika losowego.

Na niebezpieczeństwo zniekształcenia sezonowości przez średnią ruchomą zwraca uwagę R. G. D. Allen i sugeruje, że efektu Śluckiego - Yule'a można uniknąć, określając składnik X_t jako wielomian określonego stopnia zmiennej czasowej t .

Jeżeli zdefiniujemy trend przy pomocy wielomianu stopnia skończonego, to otrzymamy równanie postaci

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k + U_{kt}, \quad (2)$$

w którym k oznacza stopień wielomianu oraz $U_{kt} = S_t + \xi_{kt}$

Wskaźnik k przy symbolu U wprowadzono dla podkreślenia, że chodzi o odchylenia Y_t od linii trendu w przypadku, gdy ta linia jest wielomianem stopnia k .

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & N-1 & (N-1)^2 & \dots & (N-1)^k \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

model (2) można zapisać w postaci następującego równania:

$$y = T_0 \alpha + u, \quad (4)$$

gdzie:

y — N -wymiarowy kolumnowy wektor obserwacji na zmiennej endogenicznej,

T — $N \cdot k$ -wymiarowa macierz obserwacji dokonanych na zmiennej czasowej,

α — k -wymiarowy kolumnowy wektor parametrów strukturalnych modelu (4),

u — N -wymiarowy kolumnowy wektor reszt $y-x$ (x oznacza N -wymiarowy wektor kolumnowy wartości trendu).

Zauważmy jeszcze, że rząd macierzy T_0 jest $r(T_0) = k \leq N$

Wektor α parametrów strukturalnych modelu (4) szacować można klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, która daje estymator wektora określony wzorem

$$a = (T_0' T)^{-1} T_0' y, \quad (5)$$

gdzie T_0' macierz transponowana w stosunku do macierzy T_0

Tendencję rozwojową przewozów płodów rolnych dla okresu 1963 - 1967 r. wyznaczono przyjmując za linię trendu wielomian stopnia pierwszego. Dla $k=1$ równanie (2) przybiera postać

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + U_{1t}, \quad (6)$$

w którym $U_{1t} = S_t + \xi_{1t}$

Szacując parametry strukturalne równania (6) za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów, otrzymujemy:

$$Y_t = 51293,11 + 358,01t + U_{1t}, \quad (7)$$

$$(10444,75)(297,61)^{11}$$

gdzie $U_{1t} = S + \varepsilon_{1t}$

¹¹ W nawiasach podano średnie błędy szacunku parametrów modelu (6).

Średnie błędy szacunku parametrów α_0 , α_1 obliczono korzystając z następującego równania:

$$D^2(a) = \sigma^2 \{U_{1t}\} \cdot (T'_0 T_0)^{-1}, \quad (8)$$

gdzie $\sigma^2 \{U_{1t}\}$ jest wariancją reszt $U_{1t} = S_t + \xi_{1t}$

Z równania (8) wynika, że mnożąc o przez pierwiastek kwadratowy z elementu stojącego na przecięciu i -tego wiersza oraz i -tej kolumny macierzy $(T'_0 T_0)^{-1}$ otrzymujemy błędy średnie szacunku parametrów równania (6).

Obliczona wartość oceny $S^2 \{\hat{U}_{1t}\}$ parametru $\sigma^2 \{U_{1t}\}$ wynosi 1595826053,1. Stąd $S \{U_{1t}\} = 39947,8$. Podstawiając tę ocenę w miejsce $\sigma^2 \{U_{1t}\}$ do wzoru (8) znajdujemy, że błąd średni szacunku parametru α_0 jest równy 10444,75, a błąd średni szacunku α_1 jest równy 297,61.

Dla sprawdzenia, czy rzeczywiście istnieje trend, czy też może wzrost wartości Y_t jest przypadkowy, zweryfikujemy przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę $H_0 : \alpha_1 = 0$. Zauważmy, że gdy parametry szacowane były za pomocą metody najmniejszych kwadratów i gdy prawdziwa jest hipoteza H_0 , następująca zmienna losowa

$$t = \frac{a_1}{D(a_1)} \quad (9)$$

ma rozkład Studenta o $N-2$ stopniach swobody. Jako hipotezę alternatywną przyjmujemy $H_1 : \alpha_1 \neq 0$. Z tablic rozkładu Student przy 58 stopniach swobody i poziomie istotności 0,05 znajdujemy, że dopuszczalna wartość t , przy której nie musi się jeszcze odrzucić hipotezy H_0 , wynosi $t_{0,05} = 2,016$. Ponieważ spełniona jest relacja $1,203 < 2,016$, trzeba hipotezę H_0 przyjąć, a tym samym odrzucić, że parametr α_1 różni się od zera w sposób nieprzypadkowy. Oznacza to, że nie ma zatem podstaw do odrzucenia hipotezy o braku trendu w rozkładzie kolejowych przewozów badanych płodów rolnych w DOKP — Kraków w latach 1963 - 1967.

Na podstawie otrzymanych wyników należy stwierdzić, że model badanego szeregu czasowego możemy ostatecznie zapisać w następujący sposób:

$$Y_t = S_t + \xi_t, \quad (t=0, 1, \dots, N-1) \quad (10)$$

gdzie S_t oznacza składnik sezonowy.

W związku z modelem (10) powstaje teraz problem określenia nieznannej a priori postaci funkcji $\varphi(t)$, która opisywałaby możliwie dokładnie sezonowość zmiennej endogenicznej Y_t . Należy przy tym podkreślić, że swoboda poszukiwań jest ograniczona w tym sensie, że nie może ona wyjść poza klasę takich funkcji, których parametry można oszacować metodą najmniejszych kwadratów, przy czym liczba tych parametrów nie może być zbyt duża.

Tabela 1

Miesięczne wielkości przewozów kolejowych produktów rolnych w DOKP — Kraków
w latach 1963-1967

Lata	Miesiące											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1963	37466	22767	34017	31371	33288	33460	42170	46583	47614	140751	147181	131834
1964	60791	32784	34125	36815	39371	31445	32209	38804	49356	153834	130789	120510
1965	69276	34798	40060	36673	32736	28236	34338	42923	35650	121865	117882	100356
1966	67532	37374	39449	31520	32182	28675	38283	42300	60643	134088	123579	113681
1967	61881	32555	37064	31871	32130	35838	46034	52075	68815	147678	119281	114088

Tabela 2

Relatywne wartości składnika sezonowego i przypadkowego miesięcznych przewozów kolejowych produktów rolnych w DOKP — Kraków
w latach 1963 - 1967

Lata	Miesiące											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1963	55,4	36,6	54,7	50,4	53,5	53,8	67,8	74,9	76,5	226,2	236,6	211,9
1964	97,7	52,7	54,8	59,2	63,3	50,5	51,8	62,4	79,3	247,3	210,2	193,7
1965	111,3	55,9	65,3	59,9	52,2	45,4	55,2	69,0	57,3	195,9	189,5	161,3
1966	108,5	60,1	63,4	50,7	51,7	46,1	61,5	68,0	97,5	215,5	198,6	182,7
1967	99,5	52,3	59,6	51,2	51,6	57,6	74,0	83,7	110,6	237,4	191,7	183,4
$\bar{Y}_1$	94,5	51,5	59,6	54,3	54,5	50,7	62,1	71,6	84,2	224,5	205,3	186,6

Obecnie poświęcimy nieco miejsca tym właśnie problemom. W badaniu tych prawidłowości przydatne są metody analizy harmonicznej.

II

Badając sezonowość różnych zmiennych endogenicznych wydaje się wskazane zwrócić baczniejszą uwagę na klasę funkcji $\varphi(t)$ o okresie 2π , określonych w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zauważmy dalej, że rzeczywistą postać funkcji $\varphi(t)$ można aproksymować za pomocą wielomianu trygonometrycznego m -tego rzędu o postaci

$$Y_m(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^m [\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)], \quad (11)$$

w którym $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ są współczynnikami Fouriera¹².

Współczynniki wielomianu (11) powinny być dobrane w ten sposób, by przybliżenie było możliwie najlepsze, tak jak to zakłada się w metodzie najmniejszych kwadratów. W rezultacie, zadanie sprowadza się do wyznaczenia współczynników Fouriera o postaci¹³

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt \quad (k=0), \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(kt) dt \quad (k=1, 2, \dots, m), \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin(kt) dt \quad (k=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (12)$$

Bezpośrednie zastosowanie tych wzorów jest możliwe wtedy, gdy funkcja $\varphi(t)$ jest określona wyrażeniem analitycznym, niemożliwe natomiast, gdy funkcja jest podana tylko w sposób tabelaryczny lub graficzny.

W tych ostatnich dwóch przypadkach występujących z reguły w praktyce, stawiamy zagadnienie analizy harmonicznej w niżej podany sposób:

Znając wartości, które funkcja o okresie 2π przybiera w skończonym zbiorze punktów, chcemy określić ją w przybliżeniu za pomocą wielomianu trygonometrycznego, przy czym w oparciu o metodę najmniejszych kwa-

¹² Jean Baptiste Fourier (1768 - 1830), matematyk i fizyk francuski. Pierwsza praca Fouriera o szeregach noszących jego nazwisko została przedłożona Akademii Francuskiej w 1807 r.

¹³ Wzory te znaleźć można na przykład u S. Kalińskiego, *Analiza harmoniczna*, Łódź 1956, s. 136 - 148.

dratów wymagamy, by suma kwadratów odchyłeń wielomianu trygonometrycznego od tej fukcji w danych punktach stanowiła minimum.

Dla osiągnięcia powyższego celu podzielmy przedział $\langle 0, 2\pi \rangle$ na N równych części:

$$t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_{N-1}, t_N, \quad (13)$$

gdzie

$$t_i = \frac{2\pi}{N} \cdot i.$$

Niech wartościami funkcji w tych punktach będą

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_{N-1}, Y_N, \quad (14)$$

przy czym

$$Y_N = Y_0.$$

W naszym przypadku mamy więc wyznaczyć takie wartości dla $2m + 1$ współczynników wielomianu trygonometrycznego:

$$Y_m(t) = A_0 + \sum_{k=1}^m [A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)], \quad (15)$$

by spełniony był warunek¹⁴

$$\psi_m = \sum_{i=0}^{N-1} [Y_i - Y_m(t_i)]^2 = \text{minimum}. \quad (16)$$

Minimum funkcji (16) można otrzymać stosując właściwe dla rachunku różniczkowego zasady znajdowania ekstremum funkcji. Obliczamy zatem pochodne cząstkowe sumy (16) względem $A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ i przyrównujemy je do zera

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial A_k} = 0, \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial B_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (17)$$

Stąd otrzymujemy układ $2m + 1$ równań normalnych

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} Y_m(t_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} Y_i, \\ \sum_{i=0}^{N-1} Y_m(t_i) \cos(kt_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \cos(kt_i), \\ \sum_{i=0}^{N-1} Y_m(t_i) \sin(kt_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \sin(kt_i). \end{aligned} \quad (18)$$

¹⁴ W naszym przypadku przyjmujemy $2m < N$, gdyż w przeciwnym razie ilość współczynników wielomianu trygonometrycznego byłaby większa od liczby danych nam wartości (14), wszystkie więc odchylenia moglibyśmy doprowadzić w dowolny sposób do zera. W tym przypadku nie można by więc mówić o najlepszym przybliżeniu.

Rozwiązując układ równań (18) względem niewiadomych A_0 , A_k oraz B_k otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i, \\ A_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \cos(kt_i), \\ B_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \sin(kt_i), \end{aligned} \quad (19)$$

przy czym $k = 1, 2, \dots, m$.

Wzory (19) noszą nazwę wzorów Bessela¹⁵, a współczynniki wyrażone tymi wzorami nazwę współczynników Bessela.

Łatwo jest wykazać, że gdy $N \rightarrow \infty$, wówczas dla danej funkcji, wartości współczynników Bessela dążą do wartości współczynników Fouriera, jako do swojej granicy.

A zatem

$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt, \\ A_k &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(kt) dt, \\ B_k &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin(kt) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

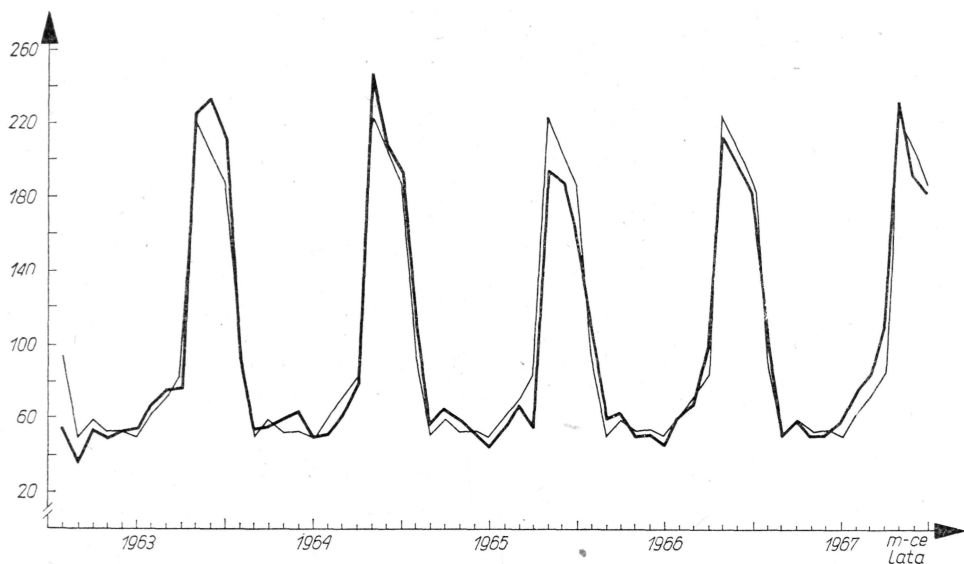
W ramach obliczeń zmierzających do określenia sezonowości badanej zmiennej Y zastosowano najpierw wielomian trygonometryczny o postaci (15).

Tabela 2 przedstawia szereg czasowy pozbawiony trendu, który daje obraz miesięcznych relatywnych wartości składnika sezonowego i przypadkowego przewozów płodów rolnych środkami PKP w DOKP — Kraków w latach 1963-1967. Tak więc szereg czasowy obejmuje 5 pełnych lat kalendarzowych, stąd $N = 5 \cdot 12 = 60$ pozycji. Wahania rozpatrywanej zmiennej obrazuje ryc. 2.

Należy się jeszcze jedno dodatkowe wyjaśnienie. Wielkości przedstawione w tabeli 2 uzyskano z pierwotnego szeregu czasowego po ich przeliczeniu. Przeliczenia dokonano w następujący sposób:

$$\frac{Y_i}{\bar{Y}} \cdot 100, \quad (i=0, 1, \dots, N-1) \quad (21)$$

¹⁵ Wzory te ogłosił Bessel w 1815 r.



Ryc. 2. Relatywne wartości składnika sezonowego i przypadkowego miesięcznych przewozów pól rolnych środkami PKP w DOKP Kraków w latach 1963 - 1967: — dane empiryczne — dane teoretyczne

gdzie Y_i oznacza wartości szeregu czasowego wyrażone w wielkościach absolutnych, a $\bar{Y}$ — średnia arytmetyczna zaobserwowanych wartości zmiennej Y .

W nawiązaniu do tego postępowania należy podkreślić, że wyżej podany sposób zdefiniowania zmiennej endogenicznej Y wydawał się bardziej poprawny z punktu widzenia dokonywanych obliczeń i merytorycznej interpretacji wyników. Natomiast inaczej ma się zwykle sprawa tam, gdzie korzysta się z danych wyrażonych w wielkościach absolutnych. Mierzenie poszczególnych zjawisk ekonomicznych za pomocą liczb o różnej liczbie cyfr znaczących powoduje zawsze duże zróżnicowanie wartości parametrów strukturalnych (współczynników Bessela) modelu (15).

Przy szacowaniu współczynników $A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ wielomianu trygonometrycznego (15) wzięto pod uwagę okres $<0,2\pi>$, który z kolei podzielony został na $N = 60$ równych części przez punkty o współrzędnych

$$t_i = \frac{2\pi}{N} \cdot i, \quad (i=0, 1, \dots, N). \quad (22)$$

Przy szacowaniu modelu (15) ograniczono się do wielomianu trygonometrycznego 6 rzędu ($m = 6$). Zwrócić należy jednak przy tym uwagę na fakt, że liczbę m wybieramy arbitralnie, choć niezupełnie dowolnie, bowiem występuje ograniczenie, iż liczba szacowanych współczynników nie może równać się liczbie obserwacji.

Estymacja tego modelu za pomocą metody najmniejszych kwadratów daje następujące wyniki:

$$\begin{aligned} A_0 &= 99,100 \\ A_1 &= 2,126 & B_1 &= 2,940 \\ A_2 &= -4,225 & B_2 &= -2,898 \\ A_3 &= -1,492 & B_3 &= 0,830 \\ A_4 &= -6,492 & B_4 &= -6,997 \\ A_5 &= 32,036 & B_5 &= -66,662 \\ A_6 &= -4,498 & B_6 &= -1,385 \end{aligned}$$

Znając wartości ocen A_0, A_k, B_k współczynników Fouriera wielomianu (11), wyliczamy ocenę wariancji składnika losowego posługując się wzorem-

$$S^2 = \frac{1}{N - (2m + 1)} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} [Y_i - Y_m(t_i)]^2. \quad (23)$$

We wzorze (23) Y_i oznacza obserwowane wartości zmiennej Y , a $Y_m(t_i)$ „teoretyczne” wartości tej zmiennej, tj. wartości wyliczone z wielomianu (15). Wielkość $2m + 1$ oznacza liczbę szacowanych w danym wielomianie współczynników, a N jest — jak zwykle — liczbą obserwacji.

Obliczona na podstawie wzoru (23) ocena wariancji składnika losowego jest równa 1652,6382, a oceną parametru σ jest liczba 40,65.

Znajomość oceny S^2 parametru σ^2 , umożliwia obliczenie dalszych miar zgodności wyników empirycznych z wynikami z obliczenia, a mianowicie współczynnika zbieżności oraz współczynnika korelacji wielorakiej. Współczynnik zbieżności definiujemy za pomocą następującego wzoru:

$$\varphi^2 = \frac{[N - (2m + 1)] S^2}{\sum_{i=0}^{N-1} (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (24)$$

gdzie $\bar{Y}$ jest średnią arytmetyczną zaobserwowanych wartości zmiennej Y , a S^2 jest zdefiniowane wzorem (23),

Współczynnik korelacji wielorakiej R z próby oblicza się według wzoru

$$R = \sqrt{1 - \varphi^2}. \quad (25)$$

Obliczony na podstawie wzoru (24) współczynnik zbieżności wynosi $\varphi^2 = 0,317$, natomiast współczynnik korelacji wielorakiej $R = 0,826$, co świadczy o niezłej zgodności wyników obliczonych z rzeczywistymi (por. ryc 2).

W części I niniejszej pracy przyjęliśmy w modelu (1), że ζ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Sprawdźmy obecnie, czy

rozkład zaobserwowanych odchyłeń wartości naszego szeregu od danej funkcji aproksymacyjnej jest normalny.

Ponieważ próbka pozostająca do dyspozycji jest liczna ($N = 60$), sprawdzenie tej hipotezy można przeprowadzić za pomocą znanych w statystyce testów zgodności (test χ^2 , test λ Kołmogorowa-Smirnowa, test serii, test Wolfowitza i inne).

Sprawdzenie hipotezy o normalności rozkładu odchyłeń od wielomianu (15) dokonamy za pomocą testu χ^2 .

Jako sprawdzian hipotezy przyjmujemy wyrażenie

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}, \quad (26)$$

gdzie:

f_i — liczebności zaobserwowane w klasie i ,

f'_i — liczebności oczekiwane w klasie i obliczone przy założeniu, że prawdziwa jest sprawdzana hipoteza H_0 .

Sprawdzian χ^2 przy $N \rightarrow \infty$ będzie miał, jak wiadomo, rozkład χ^2 o $r-m-1$ stopni swobody, przy czym m oznacza liczbę parametrów rozkładu, które należy oszacować z próby. Ponieważ w tej pracy $r=8$ (tyle było przedziałów) oraz $m=2$, przeto mamy $r-m-1=8-2-1=5$.

Przyjmując poziom istotności $\alpha=0,05$, z tablic rozkładu χ^2 znajdujemy wartość χ^2 spełniającą warunek

$$P\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}\} = \alpha. \quad (27)$$

Przy 5 stopniach swobody jest $P\{\chi^2 \geq 11,070\} = 0,05$, czyli do obszaru krytycznego (obszar krytyczny testu zbudowany jest prawostronnie) należą wartości sprawdzianu większe od 11,070.

Ponieważ sprawdzian χ^2 jest równy 9,544, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu zmiennej losowej.

Zauważmy teraz, że uzyskane wartości ocen A_0 , A_k , B_k współczynników α_0 , α_k , β_k możemy teraz wykorzystać dla rozwiązania problemu która, względnie które amplitudy wahań są statystycznie istotne?

W tym celu oznaczmy przez $R_k^2 = A_k^2 + B_k^2$ kwadrat amplitudy. Jeśli badany szereg czasowy jest pozbawiony składnika sezonowego, można dowieść, że nadzieja matematyczna kwadratu amplitudy jest równa

$$E(R_k^2) = R_m^2 = \frac{1}{N} \cdot 4\sigma^2, \quad (28)$$

gdzie σ^2 jest wariancją zmiennej Y populacji generalnej, a N — liczba obserwacji.

Parametr σ^2 jest zawsze a priori nieznany, ale można go oszacować w oparciu o posiadaną próbę statystyczną. Jak bowiem łatwo sprawdzić, wyrażenie

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (Y_i - \bar{Y})^2, \quad (29)$$

jest nie obciążonym estymatorem parametru a^2 .

Odpowiedź na pytanie, czy prawdopodobieństwo tego, iż R_k^2 będzie h razy większe od R_m^2 , otrzymać możemy w oparciu o podaną przez Schustera równość:

$$\alpha = e^{-h}, \quad (30)$$

gdzie: a — współczynnik istotności, $e \approx 2,718$ (podstawa systemu logarytmicznego Napiera).

Z (30) otrzymujemy:

$$h = -\ln \alpha. \quad (31)$$

Założmy dalej, że $h^* = R_k^2/R_m^2$. Wyrażenie R_k^2/R_m^2 umożliwia sprawdzenie hipotezy H_0 , która głosi, że k -ta amplituda jest przypadkowa. Jeśli zostanie spełniony warunek: $P\{h^* \geq h\} = a$, to hipotezę H_0 możemy odrzucić na poziomie istotności a i przyjąć, z prawdopodobieństwem równym $1 - a$, że szereg czasowy wykazuje statystycznie istotny cykl wahań o okresie równym $k' = N/k$ (N — ilość obserwacji, k — numer amplitudy).

Wielkość kwadratu amplitud (R_k^2) oraz wielkości sprawdzianu $h^* = R_k^2/R_m^2$ przedstawiono w tabeli 3. Wartość R_m^2 wyniosła: 276,57.

Tabela 3

Suma kwadratów współczynników Fouriera

Numery amplitudy k	Kwadraty amplitud R_k^2	Wartości sprawdzianu $h^* = R_k^2/R_m^2$
1	13,1635	0,0476
2	26,2490	0,0949
3	2,9149	0,0105
4	91,1041	0,3294
5	5470,1275	19,7784
6	22,1502	0,8009

Obierzmy współczynnik istotności $a = 0,05$. Można sprawdzić, że przy poziomie istotności $a = 0,05$ wartość $h = 3$. Przeprowadzając stosowne obliczenia (tabela 3) dochodzimy do wniosku, że nie ma statystycznych podstaw do przyjęcia hipotezy H_0 . Tak więc w naszym przykładzie istotna okazała się tylko amplituda dla $k = 5$ świadcząca o tym, że w rozkładzie miesięcznych wielkości ogólnych przewozów kolejowych badanych pólów rolnych w DOKP-Kraków na przestrzeni lat 1963-1967 istniał dwunastomiesięczny cykl wahań ($k' = N/k = 60/5 = 12$).

Z przeprowadzonych obliczeń wynika zatem, że wahania w badanym szeregu miesięcznej wielkości przewozów płodów rolnych są wynikiem istotnych wahań dwunastomiesięcznych.

III

Do problemu analitycznego przedstawienia periodycznego składnika sezonowego szeregu czasowego, można podejść jeszcze z innego punktu widzenia.

Rozpatrzmy w związku z tym funkcję $q(t)$ o okresie 2π , podaną tylko tabelarycznie lub graficznie. Zauważmy dalej, że funkcję tę można również aproksymować za pomocą wielomianu trygonometrycznego zawierającego tyle wyrazów, ile wynosi liczba danych (N'). Ciąg odpowiednich wartości ma postać następującą

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_{N'-1}, Y_N, \quad (32)$$

przy czym

$$Y_{N'} = Y_0$$

Dla lepszej ilustracji problemu założmy jeszcze, że liczba N' jest podzielna przez 4:

$$N' = 4p.$$

Przyjmując powyższe założenie, pragniemy teraz obliczyć współczynniki wielomianu trygonometrycznego

$$Y_{2p(t)} = A_0 + \sum_{k=1}^{2p-1} A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt) + A_{2p} \cos(2pt), \quad (33)$$

których ilość równa się $1 + 2(2p - 1) + 1 = 4p$.

Zauważmy, że dla tych współczynników możemy teraz wyznaczyć takie wartości, przy których wszystkie odchylenia wielomianu (33) od wartości (32), tzn. wszystkie reszty

$$Y_i - Y_{2p(t_i)}, \quad (i=0, 1, 2, \dots, N'-1)$$

równać się będą zeru.

Wtedy krzywa będąca obrazem geometrycznym aproksymanty $Y_{2p}(t)$ jest łamaną, przechodzącą przez wszystkie punkty ciągu wartości (32).

Jak łatwo jest zauważyć, powyższe współczynniki — z wyjątkiem A_{2p} — wyrażają się wzorami Bessela (19).

Dla obliczenia zaś współczynnika A_{2p} wychodzimy z relacji

$$\sum_{i=0}^{N'-1} \cos(r_1 t_i) \cos(r_2 t_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N'-1} \cos(r_1 + r_2) t_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N'-1} \cos(r_1 - r_2) t_i, \quad (34)$$

gdzie $r_1 = r_2 = 2_p = \frac{N'}{2}$.

Jak wynika z przekształceń, których tu nie przytaczamy, współczynnik A_{2p} wynosi:

$$A_{2p} = \frac{1}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} (-1)^i Y_i. \quad (35)$$

Dla obliczenia współczynników wielomianu trygonometrycznego (33) służą zatem wzory o postaci:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} Y_i, \\ A_k &= \frac{2}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} Y_i \cos(kt_i), \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{N'}{2} - 1\right) \\ B_k &= \frac{2}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} Y_i \sin(kt_i), \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{N'}{2} - 1\right) \\ A_{2p} &= A_{N'} = \frac{1}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} (-1)^i Y_i. \end{aligned} \quad (36)$$

Podstawą oszacowania parametrów wielomianu (33) były dane tabeli 2. Na podstawie tych danych obliczono średnie poziomy wielkości przewozów kolejowych płodów rolnych dla poszczególnych miesięcy badanych lat. Innymi słowy

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}, \quad (i = 0, 1, \dots, N' - 1) \quad (37)$$

gdzie:

Y_{ij} — wartość zmiennej Y w miesiącu i przypisana okresom rocznym,

$\bar{Y}_i$ — średnie miesięczne wartości zmiennej Y w ciągu n badanych lat,

n — liczba pełnych lat kalendarzowych w szeregu czasowym,

N' — liczba miesięcy w roku.

Korzystając z uzyskanych w ten sposób danych statystycznych oszacowano metodą najmniejszych kwadratów parametry relacji (33).

Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned} A_0 &= 99,950 \\ A_1 &= 32,630 & B_1 &= -66,683 \\ A_2 &= -23,967 & B_2 &= -33,225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= -15,633 & B_3 &= 2,367 \\
 A_4 &= 8,900 & B_4 &= 0,260 \\
 A_5 &= -0,797 & B_5 &= -16,051 \\
 A_6 &= -6,583 & &
 \end{aligned}$$

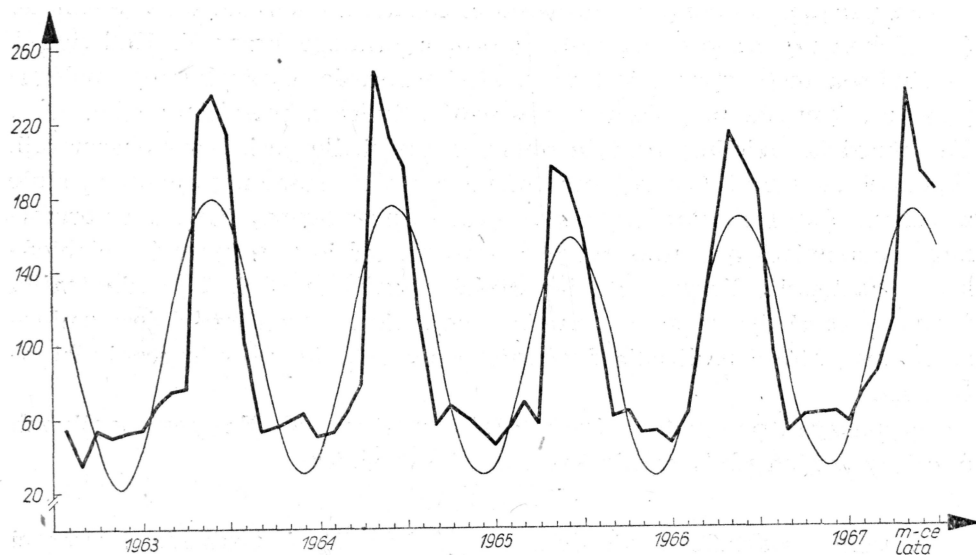
Dla zbadania stopnia zgodności danych zaobserwowanych z danymi obliczonymi z wielomianu (33) posłużono się oceną wariancji składnika losowego, współczynnikami zbieżności i korelacji wielorakiej.

Wariancja składnika losowego wynosi 197,0714, a więc odchylenie standardowe składnika losowego jest równe 14,04. Oszacowany kwadrat współczynnika zbieżności oraz współczynnika korelacji wielorakiej są odpowiednio równe:

$$\varphi^2 = 0,039 \text{ i } R = 0,980.$$

Oceniając przedstawione wyżej wyniki numeryczne stwierdzić należy, że wielomian trygonometryczny wynikający z równania (33) przyniósł znacznie lepsze rezultaty. Oszacowana wartość współczynnika zbieżności jest niska i wynosi 0,039, co świadczy, że nie wyjaśnione wahania zmiennej endogenicznej stanowią zaledwie około 3,9% całkowitej zaobserwowanej ich zmienności. Wariancja składnika losowego jest mniejsza również dla modelu (33).

Dla łatwiejszego porównania danych empirycznych z wielkościami z obliczenia, wyznaczonymi na podstawie modelu (33), wykonano wy-



Ryc. 3. Relatywne wartości składnika sezonowego i przypadkowego miesięcznych przewozów płodów rolnych środkami PKP w DOKP Kraków w latach 1963-1967: — dane empiryczne, - - - dane teoretyczne

kres (por. ryc. 3), na którym zaznaczono kształtowanie się obu ciągów wielkości dla lat 1963 - 1967.

W celu zweryfikowania hipotezy H_0 , że rozkład zaobserwowanych odchyłeń wartości empirycznych od wielomianu (33) jest normalny, wprowadzamy zmienną

$$t_i = \frac{\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}}{S_\varepsilon}, \quad (i=0, 1, \dots, N'-1) \quad (38)$$

gdzie:

ε_i — wartości zaobserwowanych reszt,

$\bar{\varepsilon}$ — średnia arytmetyczna odchylenia $\varepsilon_i = Y_i - Y_{2p(ii)}$

S_ε — odchylenie standardowe składnika resztowego,

a następnie formułujemy hipotezę

$$H_0 = H[F(x) \equiv \Phi(x)] \quad (39)$$

tzn. zakładamy, że nieznaną dystrybuantę $F(x)$ badanej zmiennej losowej jest równa tożsamościowo dystrybuancie $\Phi(x)$ rozkładu normalnego.

Sprawdzenie hipotezy H_0 prowadzić będziemy oddzielnie dla poszczególnych badanych lat. W rezultacie więc liczba obserwacji N' jest mała w statystycznym rozumieniu tego słowa.

W przypadku próbki o małej liczebności stoją do dyspozycji, jak dotąd, właściwie tylko dwa nieparametryczne testy zgodności, które mogą mieć zastosowanie dla sprawdzenia tej hipotezy. Są nimi test Massey'a i test Hellwiga.

Weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu odchyłeń od wielomianu (33) dokonamy za pomocą testu zaproponowanego przez Z. Hellwiga¹⁶.

Budowa testu oparta jest na znanej własności dystrybuanty, polegającej na tym, że przybiera ona wartości tylko z przedziału $< 0, 1 >$. Ten przedział dzielimy na tyle równych części, ile posiadamy obserwacji. Wartości zmiennej losowej otrzymane z próby standaryzujemy zgodnie z wzorem (38) i odczytujemy w tablicach dystrybuanty rozkładu normalnego, odpowiadające uporządkowanym wartościom t_i prawdopodobieństw. Następnie, liczymy do ilu części przedziału $< 0, 1 >$ nie trafiła żadna wartość dystrybuanty empirycznej. Liczba tych części jest zmienną losową, której realizacja decyduje o utrzymaniu lub odrzuceniu hipotezy H_0 .

W naszym przypadku liczba części pustych K dla poszczególnych miesięcy w różnych latach jest równa odpowiednio:

$$5, 4, 6, 5, 6.$$

Z tablic rozkładu znajdujemy przy $N' = 12$ i poziomie istotności $\alpha = 0,01$, że dopuszczalna wartość K , przy której nie musi się jeszcze odrzucić hipotezy H_0 , wynosi $1 < K < 7$.

¹⁶ Z. Hellwig, Test zgodności dla małych próbek i przykłady jego zastosowań, Przegląd Statystyczny 1965, z. 2.

W naszym przypadku ciąg wartości K powoduje spełnienie relacji $1 < K < 7$, nie ma więc statystycznych podstaw do odrzucenia hipotezy o losowości odchyłeń wartości szeregu od wielomianu (33).

Z przeprowadzonego testu kontrolnego wynika, że krzywa (przedstawiona na ryc. 3) będąca obrazem geometrycznym wielomianu (33) aproksymuje tak dobrze sezonowość badanego zjawiska, jak to można osiągnąć środkami statystycznymi.

Przeprowadzone rozważania dają z kolei podstawę do obliczenia wielkości kwadratu amplitud (R_k^2) oraz wielkości sprawdzianu h^* . Wartość R_m^2 wyniosła:

$$R_m^2 = \frac{1}{N'} \cdot 4\sigma^2 = 1429,829,$$

przy czym parametr σ^2 zastąpiono wariancją z próby:

$$s^2 = \frac{1}{N' - 1} \sum_{i=0}^{N'-1} (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2, \quad (40)$$

gdzie symbol $\bar{\bar{Y}}$ posiada następujące znaczenie:

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{N'} \sum_{i=0}^{N'-1} \bar{Y}_i. \quad (41)$$

Wielkości kwadratu amplitud oraz wartości sprawdzianu h^* zamieszczono w tabeli 4, z której wynika, że istotna okazała się tylko amplituda dla $k = 1$ świadcząca o tym, że w rozkładzie miesięcznych wielkości ogół-

Tabela 4

Suma kwadratów współczynników Fouriera

Numer amplitudy k	Kwadraty amplitud R_k^2	Wartości sprawdzianu $h^* = R_k^2 / R_m^2$
1	5511,3394	3,8545
2	1678,2698	1,1737
3	249,9934	0,1748
4	79,2776	0,0554
5	258,2698	0,1806

nych przewozów kolejowych badanych płodów rolnych w DOKP — Kraków w latach 1963 - 1967 istniał dwunastomiesięczny cykl wahań ($k' = N' : k = 12 : 1 = 12$). Analogiczny również wynik otrzymano w przypadku analitycznego przedstawienia periodycznego składnika sezonowego za pomocą wielomianu trygonometrycznego według formuły (15).

Przy okazji należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że ustalona amplituda dla określonego okresu czasu może w różnych okresach maleć (oscylacje tłumione), rosnać (oscylacje wybuchowe) lub utrzymywać się na niezmiennym poziomie (oscylacje regularne).

W naszym przykładzie, badanie charakteru oscylacji przeprowadzono przy pomocy testu normalności rozkładu odchyłek wartości szeregu od wielomianu trygonometrycznego (33). Zauważmy, że dla $N' = 12$ i $a = 0,01$ nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o braku normalności rozkładu odchyłek dla poszczególnych badanych lat. Można zatem uznać, że oscylacje utrzymywały się w badanym okresie na niezmiennym poziomie.

IV

Na zakończenie niniejszych rozważań zrekapitulujemy w punktach najważniejsze elementy zaprezentowanej tu analizy wahań cyklicznych przewozów płodów rolnych środkami PKP.

1) Tradycyjny sposób określania trendu za pomocą średniej ruchomej jest niedopuszczalny w przypadkach gdy szeregi czasowe wykazują na ogół „gładką” linię trendu, gdyż może ona przyczynić się do zniekształcenia składnika sezonowego w postaci tzw. efektu Słuckiego-Yule'a.

2) Niebezpieczeństwa wynikającego z efektu Słuckiego-Yule'a można uniknąć, gdy przy eliminacji trendu z szeregu używa się wielomianu zmiennej czasowej t lub też średniej ruchomej ważonej rzędu m , tzn. o liczbie wyrazów równej liczbie przyjętych podstawowych jednostek czasu (miesiące, kwartałów).

3) Dążność do wyznaczania aproksymanty $h(t)$ w taki sposób, aby dawała ona statystyczną gwarancję możliwie wiernego odtworzenia nieznanej postaci aproksymaty $\varphi(t)$, było podyktowane tym, że funkcja $\varphi(t)$ jest narzędziem opisu sezonowości badanego szeregu czasowego.

4) Zdefiniowanie funkcji $h(t)$ za pomocą wielomianu trygonometrycznego umożliwia realizację tego postulatu.

5) Aprioryczne założenie co do istnienia rocznego cyklu wahań przewozów płodów rolnych środkami PKP zostało w pracy potwierdzone za pomocą testu statystycznego, o którym była mowa w części II i III.

6) Spełnienie testu normalności rozkładu odchyłek $y_t - h(t)$ wskazuje, że ustalona amplituda dla badanego okresu czasu utrzymywała się na tym samym poziomie.

APPLICATION OF HARMONIC ANALYSIS IN THE INVESTIGATIONS OF SEASONALITY OF TRANSPORT OF AGRICULTURAL PRODUCTS

S u m m a r y

The work contains considerations that deal with the use of methods of harmonic analysis in researches of seasonality of transport of agricultural products in the District Management of the State Railways of Cracow in the time of 1963-1967. The calculated valuation of structural parameters and stochastic structure of model confirmed the thesis that the model that was presented in the work can be the tool of description of seasonal fluctuation of transport of agricultural products.