RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
ROK LXXI – zeszyt 1 – 2009

PIOTR PIETRASZEWSKI

UWAGI O „ZŁOTEJ REGULE" AKUMULACJI KAPITAŁU RZECZOWEGO I LUDZKIEGO W KONTEKŚCIE ZAGADNIENIA MAKSYMALIZACJI DOBROBYTU

I. WPROWADZENIE

Jednym z bardziej zaskakujących wniosków wynikających z neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego autorstwa R. Solowa[1] jest brak zależności pomiędzy wartością społecznej stopy oszczędności (inwestycji) a wartością długookresowej stopy wzrostu gospodarczego (na tzw. ścieżce wzrostu równomiernego), zdeterminowanej wyłącznie przez tempo zmian jakościowych, określanych mianem postępu techniczno-organizacyjnego. Zgodnie z modelem, zwiększenie części produktu przeznaczanej przez społeczeństwo na akumulację kapitału wywołuje przejściowe podniesienie tempa wzrostu kapitału i produktu, skutkujące wyniesieniem gospodarki na wyżej położoną ścieżkę wzrostu równomiernego. Jednoznacznie pozytywny wpływ wzrostu stopy oszczędności na położenie długookresowej ścieżki wzrostu produktu *per capita* nie musi się przenosić na wzrost położenia długookresowej ścieżki wzrostu konsumpcji *per capita*, decydującej w ostatecznej mierze o dobrobycie społeczeństwa. Pojawia się zatem pytanie o wartość stopy oszczędności (inwestycji), optymalną z punktu widzenia dobrobytu społecznego. Szczególnie prostą odpowiedzią na to pytanie jest „złota reguła akumulacji" Phelpsa.

W artykule wykorzystam koncepcję E. Phelpsa w neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego rozszerzonym o akumulację kapitału ludzkiego. Wskażę jednocześnie na ograniczenia analityczne tej koncepcji w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu, w którym to kontekście została oryginalnie postawiona[2]. Przezwyciężenie tych ograniczeń wymaga głębszego ujęcia zagadnienia dobrobytu, to znaczy odniesienia się do preferencji podmiotów co do rozkładu ich konsumpcji w czasie. Realizacja tego postulatu, prowadząca do endogenizacji społecznych stóp oszczędności/inwestycji, znajduje swój formalny wyraz w sformułowaniu i rozwiązaniu zadania dynamicznej optymalizacji na bazie wyjściowego modelu wzrostu.

---

[1] Zob. R. M. Solow, *A Contribution To The Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", 1956, February, s. 65-94.

[2] Zob. E. Phelps, *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review", 1961, September, s. 638-643.

Wyprowadzenie optymalnych wartości stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki z wyrażonych *explicite* preferencji podmiotów posłuży przede wszystkim do przedstawienia koncepcji „złotej stopy akumulacji" Phelpsa jako reguły optymalizacyjnej, a ściślej – pozwoli na ustalenie charakteru tych preferencji, przy których stopy inwestycji wynikające z reguły Phelpsa są optymalne (na ścieżce wzrostu równomiernego) i do których – zgodnie z modelem – powinna zmierzać gospodarka.

II. MODEL WYJŚCIOWY[3]

Rozważmy jednosektorową gospodarkę zamkniętą, bez jawnego udziału państwa, w której gospodarstwa domowe są właścicielami zasobów kapitału rzeczowego $K(t)$, kapitału ludzkiego $H(t)$ i siły roboczej $L(t)$, świadcząc usługi przedsiębiorstwom, maksymalizującym zyski w warunkach doskonale konkurencyjnych. Produkt $Y(t)$ wytwarzany jest zgodnie z agregatową funkcją produkcji:

$$Y = F(K, H, AL). \tag{1}$$

Zmienną oznaczoną symbolem (L) interpretujemy jako nakład pracy surowej, nieuwzględniającej rezultatów inwestycji w kapitał ludzki. Przyjmujemy, że zasoby siły roboczej L rosną według stałej stopy n, utożsamianej – dla uproszczenia – ze stopą przyrostu naturalnego[4]: $\mathring{L} = nL$. Zmienna (A) odzwierciedla dostępny w gospodarce zasób technik wytwarzania i organizacji produkcji (zasób wiedzy naukowo-technicznej). Poziom tej zmiennej wpływa na produktywność pozostałych czynników produkcji, a jej zmiany (według stałej, egzogenicznie danej stopy m: $\mathring{A} = mA$) można utożsamiać z postępem techniczno-organizacyjnym. Postęp techniczny jest naturalny w rozumieniu Harroda lub – inaczej mówiąc – czysto pracoefektywnościowy charakter postępu. Oznacza to, że jeden zatrudniony po t latach jest równoważny e^{mt} zatrudnionym w okresie początkowym lub też – inaczej rzecz ujmując – zasoby efektywnej pracy $\bar{L} = AL$ rosną w tempie $n + m$.

O funkcji produkcji (1) zakłada się, że:

– jest ciągła i (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna,

– zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt,

[3] Treść punktu II to skrócona prezentacja modelu przedstawionego i analizowanego w: P. Pietraszewski, *A Mechanics of Long-term Economic Growth – Generalized Neoclassical Approach*, „Mathematics in Economics", Wydawnictwo Naukowe AE w Poznaniu, Poznań 2008, będącego rozwinięciem idei zarysowanej przez N. G. Mankiwa, D. Romera i N. Weila, N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *A Contribution To The Empirics Of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics" 1992, May, s. 407-437, polegającej na rozszerzeniu podstawowej wersji neoklasycznego modelu wzrostu o akumulację kapitału ludzkiego.

[4] W celu uproszczenia zapisu w całym artykule przyjmujemy następujące oznaczenia: $\dot{x} = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ oraz $\mathring{x} = \mathring{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$.

– jest funkcją wklęsłą,
– charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi produktywnościami krańcowymi wszystkich trzech czynników wytwórczych, czyli: $F_K, F_H, F_L > 0$ i $F_{KK}, F_{HH}, F_{LL} < 0$, a ponadto: $F_{KL}, F_{HL}, F_{KH} > 0$, co oznacza, że krańcowa produktywność każdego czynnika rośnie przy wzroście zatrudnienia innego czynnika,
– spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{X \to 0} F_X = \infty$, $\lim_{X \to 0} F_X = 0$, gdzie: $X \in \{K, H, L\}$,
– jest liniowo jednorodna, czyli wykazuje stałe przychody względem skali produkcji: $F(cK, cH, cAL) = cF(K, H, AL)$.

Ostatnie założenie umożliwia przejście do następującej postaci funkcji produkcji[5]:

$$\bar{y} = f(\bar{k}, \bar{h}), \tag{2}$$

w której przyjęto oznaczenia:

$$\bar{k} = \frac{K}{AL}, \ \bar{h} = \frac{H}{AL}, \ \bar{y} = \frac{Y}{AL}, \tag{3}$$

dla, odpowiednio, kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego, produktu na jednostkę efektywnej pracy (wydajności).

Można pokazać[6], że funkcja (2) jest silnie wklęsłą, „dobrze zachowującą się” funkcją produkcji, tzn. charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi krańcowymi produktywnościami obu czynników, co formalnie oznacza, że: $f_{\bar{k}}, f_{\bar{h}} > 0$, $f_{\bar{k}\bar{k}} < 0$, $f_{\bar{h}\bar{h}} < 0$, oraz spełnia warunki Inady: $\lim_{k \to 0} f_{\bar{k}} = \infty$, $\lim_{k \to 0} f_{\bar{k}} = 0$, $\lim_{h \to 0} f_{\bar{h}} = \infty$, $\lim_{h \to 0} f_{\bar{h}} = 0$.

Produkt jest dzielony pomiędzy inwestycje w kapitał rzeczowy: $I_K = s_K Y$, inwestycje w kapitał ludzki: $I_H = s_H Y$ oraz konsumpcję bieżącą, gdzie: s_K i s_H oznaczają stałe, egzogenicznie dane wielkości stóp inwestycji w odpowiednie rodzaje kapitału, przy czym: $s_K, s_H > 0$ i $s_K + s_H \leqslant 1$.

Ponieważ zakładamy także, że zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego podlegają procesowi deprecjacji ze stałymi stopami, odpowiednio, $\delta_K \in (0, 1)$ i $\delta_H \in (0, 1)$, równania dynamiki zmiennych podlegających akumulacji mają postać[7]:

$$\dot{K} = s_K Y - \delta_K K, \quad \dot{H} = s_H Y - \delta_H H. \tag{4}$$

[5] Zob. P. Pietraszewski, op. cit., s. 184.

[6] Ibidem, s. 184-185.

[7] Jeśli dużą część ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego stanowią stracone zarobki osób poświęcających swój czas i wysiłek na naukę i doskonalenie zawodowe (bądź inne formy aktywności podnoszące jej przyszłą zdolność zarobkową), to zmienna Y w drugim równaniu (4) i w całym modelu oznacza hipotetyczny produkt, łącznie z wartością owych straconych zarobków, nie zaś realny PKB ujmowany w statystykach międzynarodowych. W skrajnym przypadku, gdy utracone dochody stanowią całość ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego, mierzalny produkt wytwarzany na rynku Y^m stanowi $(1 - s_H)$-tą część hipotetycznego produktu Y. Część mierzalnego produktu inwestowana w kapitał rzeczowy wynosi wtedy: $s^m_K = \frac{s_K}{1 - s_H}$.

Na podstawie (2), (3) i (4) oraz przyjętych założeń o stopach wzrostu L i A, można uzyskać tzw. układ równań ruchu modelu:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}} &= s_K f(\bar{k}, \bar{h}) - (n + m + \delta_K)\bar{k}, \\ \dot{\bar{h}} &= s_H f(\bar{k}, \bar{h}) - (n + m + \delta_H)\bar{h}. \end{aligned} \tag{5}$$

Przyrównując prawe strony układu równań różniczkowych (5) do zera, otrzymujemy rozwiązanie stacjonarne. Poziomy stacjonarne kapitału rzeczowego ($\bar{k}_e$) i ludzkiego ($\bar{h}_e$) spełniają następujący układ zależności:

$$\frac{f(\bar{k}, \bar{h})}{\bar{k}} = \frac{(n + m + \delta_K)}{s_K}, \quad \frac{f(\bar{k}, \bar{h})}{\bar{h}} = \frac{(n + m + \delta_H)}{s_H}. \tag{6}$$

Gospodarka funkcjonuje wówczas na tzw. ścieżce wzrostu równomiernego, na której produkt oraz zasoby obu rodzajów kapitału rosną według stałej stopy $n + m$ (co wynika z przyjętych wcześniej definicji (3) oraz założeń o stopach wzrostu L i A), a proporcje pomiędzy poziomem produktu oraz kapitału rzeczowego i ludzkiego pozostają stałe. Poziomy tych zmiennych w ujęciu *per capita* rosną wtedy według stopy egzogenicznego postępu technicznego.

Ze względu na założenie o maksymalizacji zysku w warunkach doskonale konkurencyjnych, czynniki produkcji wynagradzane są według swoich krańcowych produkcyjności. Łatwo pokazać[8], że: $F_K = f_{\bar{k}}$, $F_H = f_{\bar{h}}$ oraz zgodnie z twierdzeniem Eulera:

$$F_K K + F_H H + F_L L = Y, \tag{7}$$

czyli suma wynagrodzeń czynników produkcji wyczerpuje bez reszty wielkość produktu.

Ponieważ na ścieżce wzrostu równomiernego poziomy kapitału rzeczowego i ludzkiego w przeliczeniu na jednostkę efektywnej pracy, odpowiednio $\bar{k}$ i $\bar{h}$, są stałe, stałe są również poziomy produkcyjności krańcowych tych czynników: $f_{\bar{k}}$ i $f_{\bar{h}}$. Jednostkowe wynagrodzenia kapitału rzeczowego i ludzkiego utrzymują się na stałym poziomie, płace realne zaś (F_L) podążają za wzrostem produktu *per capita* – co wynika z (7).

Można pokazać, że przy przyjętych założeniach poziomy kapitału rzeczowego i ludzkiego w przeliczeniu na jednostkę efektywnej pracy, spełniające układ równań (6), czyli, odpowiednio, $\bar{k}_e$ i $\bar{h}_e$, a zatem również $\bar{y}_e = f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, są jednoznacznie określone przez wartości parametrów modelu (istnieje dokładnie jeden punkt stacjonarny) i wyznaczają globalnie asymptotycznie stabilny punkt długookresowej równowagi dynamicznej, do którego zmierza gospodarka[9].

[8] Ibidem.

[9] Teoretycznie możliwe są również sytuacje, gdy globalnie stabilny punkt stały systemu znajduje się w (0, 0) (gospodarka zmierza do samounicestwienia), bądź też w ogóle nie istnieje (w systemie następuje wybuchowy wzrost). Oba przypadki stanowią jednakże sytuacje krańcowe (wymagające, aby udział pracy w granicy – odpowiednio dla $\bar{k}, \bar{h} \to 0$ lub $\bar{k}, \bar{h} \to \infty$ – malał do zera), które w dalszej analizie pominięto. Ibidem, s. 187-193.

Korzystając z zależności (6) i twierdzenia o funkcji uwikłanej, można wyznaczyć formuły na elastyczność $\bar{y}_e$ względem poszczególnych parametrów, w szczególności stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, odpowiednio[10]:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_K} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{s_K}{\bar{y}_e} = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}, \quad \varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_H} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{s_H}{\bar{y}_e} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}, \tag{8}$$

przy czym:

$$\alpha(\bar{k},\bar{h}) = \frac{f_{\bar{k}}\bar{k}}{f(\bar{k},\bar{h})}, \quad \beta(\bar{k},\bar{h}) = \frac{f_{\bar{h}}\bar{h}}{f(\bar{k},\bar{h})}, \tag{9}$$

oznaczają wskaźniki elastyczności produktu względem, odpowiednio, kapitału rzeczowego kapitału ludzkiego lub też – zgodnie z neoklasycznym sposobem wynagradzania czynników wytwórczych według krańcowych produkcyjności – udziały tych czynników w produkcie. Liczby: $\alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $\beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ to stałe wartości wskaźników (udziałów) na danej ścieżce wzrostu równomiernego.

Ponieważ[11] α, $\beta > 0$ i $\alpha + \beta < 1$, wzrost części produktu przeznaczanej na akumulację kapitału (rzeczowego bądź ludzkiego) przyczynia się do wzrostu zamożności społeczeństwa, mierzonej poziomem produktu *per capita*. Graficznie oznacza to przesunięcie w górę ścieżki wzrostu równomiernego gospodarki. Nie musi to być prawdą w odniesieniu do poziomu dobrobytu społecznego, mierzonego poziomem konsumpcji *per capita*. Z powodu malejącej produkcyjności krańcowej, może się okazać, że dodatkowy produkt, pochodzący ze zwiększonego (dzięki wzrostowi stopy inwestycji) zasobu kapitału przypadającego na jednostkę efektywnej pracy, nie wystarcza do utrzymania tego zasobu na wyższym poziomie, co powoduje spadek konsumpcji (na jednostkę efektywnej pracy). Zmniejszenie stopy inwestycji może wówczas prowadzić do osiągania przez gospodarkę wyższego poziomu konsumpcji, zarówno obecnie, jak i w przyszłości.

III. „ZŁOTA REGUŁA AKUMULACJI” KAPITAŁU RZECZOWEGO I LUDZKIEGO

Jeśli wydatki na edukację, zdrowie itp., potraktujemy jako inwestycje, to poziom wydatków konsumpcyjnych (na jednostkę efektywnej pracy) w gospodarce możemy określić wzorem:

$$\bar{c} = (1 - s_K - s_H)\, f(\bar{k},\bar{h}). \tag{10}$$

Ze względu na (6), na ścieżce wzrostu równomiernego konsumpcja na jednostkę efektywnej pracy, $\bar{c}_e$, wyraża się wzorem:

---

[10] Zob. ibidem, s. 193-195.

[11] Ostatnia nierówność wynika np. z równania (7).

$$\bar{c}_e = f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) - (n+m+\delta_K)\bar{k}_e - (n+m+\delta_H)\bar{h}_e,$$

Warunkiem koniecznym maksymalizacji względem stacjonarnych poziomów kapitału rzeczowego i ludzkiego (na jednostkę efektywnej pracy) jest:

$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial \bar{k}_e} = 0 \wedge \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial \bar{h}_e} = 0;$$

$$f_{\bar{k}}^{\,*} = n+m+\delta_K \wedge f_{\bar{h}}^{\,*} = n+m+\delta_H. \tag{11}$$

Na podstawie definicji (9) oraz ze względu na (6), z (11) otrzymujemy wzory na optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki:

$$s_K^{\;*} = \alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \wedge s_H^{\;*} = \beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e). \tag{12}$$

Należy zwrócić uwagę, że ze względu na zależność wskaźników elastyczności $\alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $\beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ pośrednio od s_K i s_H, w (12) nie określa się *explicite* wartości optymalnych stóp inwestycji, a jedynie definiuje warunki, jakie stopy inwestycji muszą spełniać. Powstaje pytanie, czy układ stóp inwestycji s_K i s_H, spełniających (12), jest wyznaczony jednoznacznie?

Jednoznaczność punktu stacjonarnego $(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, spełniającego (11), można wykazać analizując nachylenie funkcji uwikłanych $\bar{h}_e = f_1(\bar{k}_e)$ i $\bar{h}_e = f_2(\bar{k}_e)$. Różniczkując równania (11) względem $\bar{k}_e$ i $\bar{h}_e$, możemy uzyskać odpowiednio:

$$f_{\bar{k}\bar{k}}^{\,*}\, d\bar{k}_e + f_{\bar{k}\bar{h}}^{\,*}\, d\bar{h}_e = 0, \qquad f_{\bar{h}\bar{k}}^{\,*}\, d\bar{k}_e + f_{\bar{h}\bar{h}}^{\,*}\, d\bar{h}_e = 0.$$

Formuły na pochodne funkcji f_1 i f_2 względem $\bar{k}_e$ mają następującą postać:

$$\frac{df_1(\bar{k}_e)}{d\bar{k}_e} = -\frac{f_{\bar{k}\bar{k}}^{\,*}}{f_{\bar{k}\bar{h}}^{\,*}}, \qquad \frac{df_2(\bar{k}_e)}{d\bar{k}_e} = -\frac{f_{\bar{h}\bar{k}}^{\,*}}{f_{\bar{h}\bar{h}}^{\,*}}.$$

Z przyjętych założeń o drugich pochodnych cząstkowych funkcji produkcji należy wnioskować, że obie funkcje, f_1 i f_2, są rosnące[12]. Z $F_{KK}\, F_{HN} - (F_{KH})^2 > 0$ wynika natomiast, iż w punktach wspólnych obu krzywych nachylenie pierwszej z nich jest większe od nachylenia drugiej, co bezpośrednio gwarantuje jednoznaczność punktu stacjonarnego. Wyznaczone poziomy stacjonarne kapitału rzeczowego i ludzkiego, $\bar{k}_e$ i $\bar{h}_e$, spełniające warunek konieczny maksymalizacji $\bar{c}_e$, określają wartości wskaźników elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego, odpowiednio, $\alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $\beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, a tym samym jednoznacznie określają optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki.

Optymalne stopy inwestycji są zatem równe stałym (na ścieżce wzrostu równomiernego) udziałom wynagrodzeń odpowiednich typów kapitału w produkcie. Inaczej mówiąc – gospodarka osiąga najwyżej położoną ścieżkę

[12] Ponieważ $F_K = f_{\bar{K}}$, $F_H = f_{\bar{h}}$, to $f_{\bar{k}\bar{k}} = \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial \bar{k}} = \frac{\partial F_K}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \bar{k}} = LF_{KK}$ i podobnie: $f_{\bar{h}\bar{h}} = LF_{HH}$, $f_{\bar{k}\bar{h}} = f_{\bar{h}\bar{k}} = LF_{KH} = LF_{HK}$.

konsumpcji, jeżeli całość dochodów osiąganych przez kapitał przeznacza się na jego akumulację. W szczególności, stopy inwestycji przekraczające $\alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ i $\beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$ oznaczałyby, że na akumulację danego rodzaju kapitału permanentnie przeznacza się więcej, niż wynoszą łączne generowane przezeń przychody, co w praktyce sprowadzałoby się do tego, iż część kapitału z konieczności znajdowałaby zastosowanie z wynagrodzeniem poniżej kosztu. Stwierdzenia te wyrażają najbardziej istotną treść tak zwanej „złotej reguły akumulacji” Phelpsa[13].

Należy jednakże zwrócić uwagę na fakt, że każde wyniesienie gospodarki na wyżej położoną ścieżkę wzrostu równomiernego wiąże się z koniecznością przejściowego ograniczenia konsumpcji bieżącej na rzecz wzrostu jej poziomu w przyszłości – oczywiście przy założeniu, że wyjściowe poziomy stóp inwestycji s_K, s_H są mniejsze, odpowiednio, od $\alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$, $\beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)$. Skokowy wzrost s_K i/lub s_H oznacza skokowy spadek konsumpcji na głowę, która następnie rośnie według stopy wyższej od m, choć stopa ta maleje asymptotycznie do m. Przyspieszony wzrost konsumpcji w okresie przejściowym, spowodowany zwiększoną akumulacją kapitału[14] i przyspieszonym wzrostem produktu[15], pozwala jednakże nie tylko na powrót konsumpcji do poziomu możliwego do osiągnięcia w dawnych warunkach, ale także na „przebicie” dawnej ścieżki konsumpcji i wreszcie stabilizację na wyżej położonej ścieżce wzrostu równomiernego, równoległej (w skali logarytmicznej) do starej. Sytuację tę zilustruwano na rysunku 1.

Z założenia konsumpcja stanowi stałą część produktu, zatem szybkość zbieżności konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy ($\bar{c}$) do nowego poziomu stacjonarnego ($\bar{c}_e$), odpowiadającego stanowi wzrostu równomiernego, pokrywa się z szybkością zbieżności produktu na jednostkę efektywnej pracy ($\bar{y}$) do nowego poziomu stacjonarnego ($\bar{y}_e$). Ponieważ szybkość zbieżności produktu na jednostkę efektywnej pracy do poziomu stacjonarnego można przybliżać za pomocą formuły[16]: $(\bar{y} - \bar{y}_e) \approx -(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)$, gdzie założono, że:

---

[13] Przy $\alpha=\beta=1/3$ (za: N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, op. cit., s. 417), na inwestycje w kapitał rzeczowy, inwestycje w kapitał ludzki oraz czystą konsumpcję powinno przypadać po 1/3 produktu. Ponieważ w rzeczywistych gospodarkach stopy inwestycji są zazwyczaj niższe, oznaczałoby to, że, w świetle „złotej reguły akumulacji” są one suboptymalne. W sprawie empirycznie obserwowanych stóp inwestycji w kapitał rzeczowy, zob. np. M. Burda, Ch. Wypłosz, *Makroekonomia. Podręcznik europejski*, PWE, Warszawa 1995, s. 157 (rys. 5.10) i s. 160 (rys. 5.12). Przekrojowa analiza stóp inwestycji w kapitał edukacyjny i zdrowotny w gospodarstwach domowych w Polsce znajduje się w B. Liberda, *Inwestycje w kapitał ludzki a stopa oszczędzania gospodarstw domowych w Polsce*, „Ekonomista” 2005, nr 4, s. 429-447.

Wnioski odnoszące się do optymalnych stóp inwestycji należałoby uściślić w związku z problemem niemierzalności części produktu (patrz przypis 7). W skrajnym przypadku, gdy całość ekonomicznych kosztów produkcji kapitału ludzkiego stanowią stracone dochody, optymalna, wynikająca ze złotej reguły akumulacji Phelpsa, część mierzalnego produktu przeznaczana na inwestycje w kapitał rzeczowy, wyraża się wzorem: $s_K^{m*} = \dfrac{\alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e)}{1-\beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e)}$. Przy założonych wartościach $\alpha=\beta=1/3$ daje to równomierny podział mierzalnego produktu pomiędzy konsumpcję i akumulację kapitału rzeczowego.

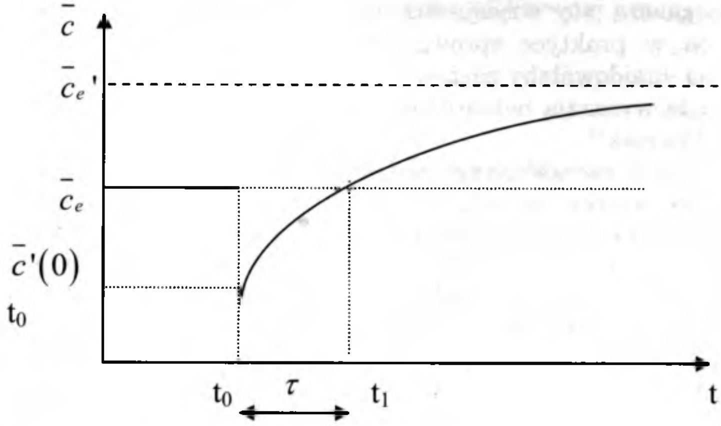
[14] Z (5) wynika, że przejściowo $\mathring{\bar{k}} > 0$ i $\mathring{\bar{h}} > 0$.

[15] Po obustronnym zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu względem czasu równania (2) i uwzględnieniu (9) mamy bowiem: $\mathring{\bar{y}} = \alpha(\bar{k}, \bar{h})\,\mathring{\bar{k}} + \beta(\bar{k}, \bar{h})\,\mathring{\bar{h}}$.

[16] Zob. P. Pietraszewski, op. cit., s. 198-200.

Rysunek 1

Reakcja konsumpcji na wzrost stopy inwestycji



Źródło: opracowanie własne.

$\delta_K=\delta_H=\delta$, to dynamikę konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy w pobliżu punktu równowagi długookresowej $\bar{c}_e$ można w przybliżeniu opisać wzorem: $\bar{c}(t)-\bar{c}_e\approx e^{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)t}(\bar{c}(0)-\bar{c}_e)$.

Z punktu widzenia społeczeństwa, które decyduje się na ograniczenie konsumpcji bieżącej na rzecz trwałego zwiększenia konsumpcji w przyszłości, poprzez zwiększenie części produktu przeznaczonej na akumulację kapitału, istotna jest przede wszystkim długość „okresu wyrzeczeń" (oznaczona dalej przez τ), czyli przedział czasu, w którym konsumpcja pozostaje na poziomie niższym niż ten, który byłby osiągany, gdyby zmiana stopy oszczędności się nie dokonała.

Długość okresu τ stanowi rozwiązanie następującego równania:

$$\bar{c}_e\approx\bar{c}_e'+e^{-(1-\alpha-\beta)(n+m+\delta)t}(\bar{c}'(0)-\bar{c}_e'), \tag{13}$$

gdzie: $\bar{c}_e$ oznacza poziom konsumpcji na jednostkę wydajności na ścieżce wzrostu równomiernego przed podniesieniem społecznych stóp inwestycji w kapitał rzeczowy (z poziomu s_K do s_K') i/lub ludzki (z s_H do s_H'), zaś $\bar{c}_e'$ – poziom konsumpcji na jednostkę wydajności po wzroście tych stóp. Oczywiście: $\bar{c}'(0)<\bar{c}_e$, co wyraża natychmiastowy efekt ograniczenia konsumpcji na skutek wzrostu stopy oszczędności. Przekształcając (13) i uwzględniając zależności: $\bar{c}_e=(1-s_K-s_H)\bar{y}_e$, $\bar{c}_e'=(1-s_K'-s_H')\bar{y}_e'$, oraz $\bar{c}'(0)=(1-s_K'-s_H')\bar{y}_e$, uzyskujemy wzór na długość okresu wyrzeczeń:

$$\tau\approx\frac{\ln\left(\frac{(s_K'-s_K)+(s_H'-s_H)}{(1-s_K'-s_H')(\bar{y}_e-\bar{y}_e')}\bar{y}_e+1\right)}{-(1-\alpha(\bar{k}_e;\bar{h}_e)-\beta(\bar{k}_e;\bar{h}_e))(n+m+\delta)}.$$

Korzystając z definicji $\varepsilon^{y}_{s_K}$, możemy w przybliżeniu dla niewielkiej zmiany s_K (przy niezmienionym poziomie $s_H = s'_H$) napisać:

$$\tau \approx \frac{\ln\left(1 - \dfrac{s_K}{(1 - s'_K - s_H)\varepsilon^{y}_{s_K}}\right)}{-\left((1 - \alpha(\bar{k}_e;\, \bar{h}_e) - \beta(\bar{k}_e;\, \bar{h}_e))\right)(n + m + \delta)}.$$

Dla: $\alpha = \beta = 1/3$ oraz $(n + m + \delta) = 0{,}06$ rocznie[17], wzrost s_K z poziomu $s_K = 0{,}2$ do $s'_K = 0{,}22$ (przy $s_H = s'_H = 0{,}2$) wiąże się z okresem wyrzeczeń o długości około 21 lat.

Sam E. Phelps zdaje się omijać ów problem „okresu wyrzeczeń", rozważając gospodarkę nieograniczoną w czasie wstecz (*endless looking backward*), która od zawsze cieszy się zrównoważonym wzrostem według stopy naturalnej[18]. „Każda generacja w bezkresnym złotym wieku naturalnej stopy wzrostu będzie preferować ten sam poziom stopy inwestycji, a tym samym – tę samą ścieżkę wzrostu" [tłum. P.P.][19]. Złota reguła akumulacji miałaby zatem stanowić odpowiedź na pytanie o najlepszą, w punktu widzenia każdej generacji, stopę oszczędności/inwestycji w sytuacji, gdyby gospodarka zawsze osiągała automatycznie odpowiadającą tej stopie ścieżkę wzrostu równomiernego.

Ujmując problem nieco inaczej, koncepcja Phelpsa ignoruje fakt, że w każdym momencie istnieje możliwość obniżenia stopy oszczędności, skutkująca osiąganiem przez pewien okres poziomu konsumpcji wyższego od tego, który byłby osiągany w przeciwnym razie. Dopiero uwzględnienie *explicite* preferencji podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie pozwala ustalić, w jakich warunkach (tzn. przy jakim charakterze owych preferencji) podmioty faktycznie preferować będą poziomy stóp inwestycji kierujące gospodarkę na ścieżkę wzrostu równomiernego związaną ze „złotą regułą akumulacji" (lub też może jakąś inną), po osiągnięciu której nie będą z kolei skłonne jej opuszczać.

Procedura wyprowadzenia optymalnych wartości stopy oszczędności z wyrażonych *explicite* preferencji podmiotów rzuca także nowe światło na zagadnienie obserwowanych w rzeczywistości poziomów stóp oszczędności/inwestycji, zwykle dużo niższych od tych, wynikających ze „złotej reguły akumulacji"[20].

---

[17] Za: N. G. Mankiw, op. cit., s. 417.

[18] W modelach bez postępu technicznego (jak u Phelpsa) pod pojęciem „naturalnej stopy wzrostu" rozumie się stopę wzrostu gospodarczego równą stopie wzrostu zasobów siły roboczej (stopie przyrostu naturalnego). W modelu z egzogenicznym postępem technicznym (neutralnym w sensie Harroda) naturalna stopa wzrostu gospodarczego jest równa sumie stopy wzrostu zasobów siły roboczej (n) i stopy postępu technicznego (m).

[19] E. Phelps, op. cit., s. 640.

[20] Zob. przyp. 13.

IV. ENDOGENICZNE UJĘCIE OSZCZĘDNOŚCI – MODEL RACJONALNYCH INDYWIDUALNYCH PODMIOTÓW EKONOMICZNYCH I MAKSYMALIZACJA DOBROBYTU

Formalnym wyrazem preferencji podmiotów odnoszących się do rozkładu konsumpcji w czasie jest – po pierwsze – określona postać funkcji chwilowej użyteczności konsumpcji, $u(c(t))$, czyli funkcji użyteczności, w której argumentem jest poziom konsumpcji $c(t)$ realizowany w chwili t. Po drugie założona stopa dyskontowa ρ określa różną wagę przypisywaną do tej samej konsumpcji w różnych momentach czasu – dodatni poziom tej stopy jest wyrazem założenia, że konsumpcja przyszła jest dla typowych podmiotów gospodarczych mniej cenna niż konsumpcja bieżąca.

Zakładamy, że celem działalności gospodarczej[21] jest maksymalizacja łącznej zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji *per capita* w nieskończonym horyzoncie czasu, czyli maksymalizacja funkcjonału:

$$\int_0^\infty u(c(t))e^{-\rho t}dt,$$

w którym $\rho > 0$. Dla funkcji $u(c)$ przyjmujemy standardowe neoklasyczne założenie o malejącej dodatniej użyteczności krańcowej konsumpcji (malejącej międzyokresowej marginalnej stopie substytucji konsumpcji):

$$u'(c) > 0;\ u''(c) > 0 \qquad \text{dla każdego} \qquad c > 0,$$

oraz tzw. warunki Inady: $\lim\limits_{c \to 0} u'(c) = \infty$, $\lim\limits_{c \to 0} u'(c) = 0$.

Przyjmujemy, że funkcja chwilowej użyteczności wyraża się wzorem[22]:

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

przy czym: $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$. Większy parametr γ oznacza większe tempo spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji (wartość bezwzględna stopy zmian $u'(c)$ względem c, czyli $\dfrac{u''(c)}{u'(c)} = -\gamma c^{-1}$, rośnie wraz ze wzrostem γ),

---

[21] Dyskusja nad ogólnym sensem poznawczym przedstawionego dalej modelu omówiona zostanie w dalszej części tego punktu. Wtedy również dokonane zostanie rozróżnienie interpretacji funkcjonału celu w kategoriach funkcji dobrobytu społecznego od interpretacji w kategoriach celu działalności typowego podmiotu mikroekonomicznego.

[22] Ta postać funkcji użyteczności znana jest w literaturze pod nazwą funkcji o stałej względnej awersji do ryzyka (CRRA – *constant rate of risk aversion*), przy czym poziom owej stałej stopy określa parametr γ. Interpretację w kategoriach ryzyka można pominąć, mając do czynienia z modelem *stricte* deterministycznym. Z punktu widzenia niniejszych rozważań istotne jest to, że funkcja ta charakteryzuje się malejącą krańcową użytecznością konsumpcji. Przyjęcie w analizie konkretnej postaci funkcji użyteczności podyktowane zostało zamiarem uzyskania formuł określających wartości optymalnych stóp inwestycji na ścieżce wzrostu równomiernego i możliwości ich porównania z wartościami wynikającymi z reguły Phelpsa.

a zatem – przy założeniu o maksymalizacji funkcjonału – charakteryzuje rosnącą skłonność podmiotów gospodarczych do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie[23]. Przy $\gamma \to 0$ podmiotom zaczyna być obojętne, czy całość konsumpcji przypada na jeden moment, czy też jest rozłożona w czasie, dlatego są skłonne odkładać konsumpcję w czasie, jeśli tylko stopa przychodu z oszczędności jest dostatecznie wysoka w porównaniu z ich stopą dyskontową.

W kategoriach konsumpcji przypadającej na jednostkę efektywnej pracy funkcjonał celu można zapisać następująco:

$$\int_0^\infty \frac{(A_0 e^{mt}\bar{c}(t))^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt = \int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} A_0^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t} dt.$$

Dla zapewnienia zbieżności tej całki należy założyć, że: $\rho-(1-\gamma)m>0$[24].

Rozwiązanie analizowanego problemu sprowadza się do rozwiązania następującego zadania dynamicznej optymalizacji[25]:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} A_0^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t} dt \xrightarrow{\bar{c};\, s_K} \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m>0, \tag{14}$$

przy warunkach:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = s_K f(\bar{k};\bar{h}) - (n+m+\delta_K)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = f(\bar{k};\bar{h}) - \bar{c} - s_K f(\bar{k};\bar{h}) - (n+m+\delta_H)\bar{h}, \tag{15}$$

$$\bar{k}(0)=\bar{k}_0, \ \bar{h}(0)=\bar{h}_0,$$

$$\bar{c}\geqslant 0;\ s_K\geqslant 0;\ (1-s_K)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}\geqslant 0.$$

Równania dynamiki dla zmiennych stanu $\bar{k}$ i $\bar{h}$ są powtórzeniem (5), przy czym w drugim równaniu skorzystano z zależności (10). Rolę zmiennych sterujących pełnią zmienne $\bar{c}(t)$ i $s_K(t)$[26].

---

[23] Odwrotność współczynnika wyraża stałą wartość międzyokresowej elastyczności substytucji konsumpcji (między konsumpcją w dwóch dowolnych momentach w czasie); zob. R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., New York 1995, s. 64-65.

[24] Ponieważ warunek ten można zapisać w równoważnej postaci: $\gamma>1-\frac{\rho}{m}$, oznacza to, że model nie posiada rozwiązania w sytuacji, gdy wartość międzyokresowej elastyczności substytucji konsumpcji $1/\gamma$ jest zbyt duża i/lub wartość stopy dyskonta konsumpcji w czasie – zbyt mała. Przy tego typu preferencjach podmioty byłyby skłonne odkładać konsumpcję w nieskończoność. Nałożony warunek eliminuje zatem sytuacje mało realistyczne.

[25] Stała $A_0^{1-\gamma}$ nie ma wpływu na postać rozwiązania maksymalizującego wartość funkcjonału, dlatego można ją pominąć.

[26] Ograniczenia zapisane w ostatnim wierszu (15) w kategoriach zmiennych sterujących odpowiadają *de facto* warunkom nakładanym na stopy inwestycji w oba rodzaje kapitału: $s_K+s_H\leqslant 1$, $s_K\geqslant 0$, $s_H\geqslant 0$.

Korzystając z zasady maksimum L. S. Pontriagina[27], w celu rozwiązania tego problemu zapisać można hamiltonian:

$$H=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}e^{((1-\gamma)m-\rho)t}+\lambda_K[s_K f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k}]+$$
$$+\lambda_H[(1-s_K)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_H)\bar{h}],$$

bądź – alternatywnie – tzw. hamiltonian wartości bieżącej:

$$H_C=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta_K[s_K f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k}]+$$
$$+\theta_H[(1-s_K)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_H)\bar{h}], \qquad (16)$$

gdzie: $\theta_K=\lambda_K e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ i $\theta_H=\lambda_H e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej.

Pierwszy warunek zasady maksimum, dotyczący maksymalizacji hamiltonianu w całym horyzoncie optymalizacji względem zmiennej sterującej $\bar{c}(t)$, ma postać następującą:

$$\frac{\partial H_C}{\partial \bar{c}}=\bar{c}(t)^{-\gamma}-\theta_H(t)=0. \qquad (17)$$

Ponieważ, ze względu na zależność (10), równania dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}$ i $\bar{h}$ można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{d\bar{k}}{dt}=f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-s_H f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt}=s_H f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h},$$

to odpowiadający tak przekształconemu problemowi dynamicznej optymalizacji – gdzie zamiast $s_K(t)$ rolę drugiej zmiennej sterującej odgrywa $s_H(t)$ – hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje postać:

$$H_C=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta_K[(1-s_H)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_K)\bar{k}]+$$
$$+\theta_H[s_H f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h}], \qquad (18)$$

zaś pierwszy warunek zasady maksimum przybiera postać następującą:

$$\frac{\partial H_C}{\partial \bar{c}}=\bar{c}(t)^{-\gamma}-\theta_K(t)=0. \qquad (19)$$

[27] W sprawie rozwiązywania problemów dynamicznej optymalizacji w ramach teorii sterowania optymalnego, z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina, zob. A. C. Chiang, *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa 2002, s. 163-310; E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, wyd. 2 poszerzone, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003, s. 373-713.

Z zestawienia (17) i (19) wynika:

$$\theta_K(t)=\theta_H(t)=\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{20}$$

Zgodnie ze standardową interpretacją mnożników Lagrange'a jako cen dualnych dla zmiennych stanu – kapitału rzeczowego i ludzkiego (wyrażających zmianę wartości całki preferencji – a zatem „sumy chwilowej użyteczności konsumpcji” w całym przedziale optymalizacyjnym – wywołanej krańcową zmianą poziomu kapitału w chwili t), równanie (20) charakteryzuje optymalną wielkość konsumpcji w chwili t jako wyrównującą krańcową użyteczność bieżącej konsumpcji z jej krańcowymi kosztami alternatywnymi (w odniesieniu zarówno do kapitału rzeczowego, jak i ludzkiego).

Ponieważ równość (20) zachodzi dla każdego momentu t, z (16) lub – alternatywnie – (18) wynika, że $s_K(s_H)$ nie wpływa na wartość hamiltonianu. Eliminuje to konieczność zapisywania warunku na maksymalizację hamiltonianu względem s_K (lub s_H).

Pozostałe warunki dla problemu (14)–(15) są następujące:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{k}}{dt}&=\frac{\partial H_C}{\partial \theta_K}=s_K f(\bar{k};\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k},\\ \frac{d\bar{h}}{dt}&=\frac{\partial H_C}{\partial \theta_H}=(1-s_K)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_H)\bar{h},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_K}{dt}&=-\frac{\partial H_C}{\partial \bar{k}}+\theta_K(\rho-(1-\gamma)m)=\\ &=-\theta_K\left(s_K\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}}-(n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)\right)-\theta_H(1-s_K)\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}},\\ \frac{d\theta_H}{dt}&=-\frac{\partial H_C}{\partial \bar{h}}+\theta_H(\rho-(1-\gamma)m)=\\ &=-\theta_H\left((1-s_K)\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}}-(n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)\right)-\theta_K s_K\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}},\end{aligned} \tag{22}$$

zaś warunki transwersalności[28]:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\lambda_K(t)=0\Leftrightarrow\lim_{t\to\infty}\theta_K(t)e^{((1-\gamma)m-\rho)t}=0,\\ &\lim_{t\to\infty}\lambda_H(t)=0\Leftrightarrow\lim_{t\to\infty}\theta_H(t)e^{((1-\gamma)m-\rho)t}=0,\end{aligned} \tag{23}$$

[28] Pierwsze dwa warunki transwersalności pojawiają się ze względu na swobodny „stan końcowy” (czyli nie ustalone a priori wartości graniczne zmiennych stanu przy $t\to\infty$), trzeci zaś odgrywa rolę ogólnego warunku transwersalności w problemach z nieskończonym horyzontem, ze względu na nie ustalony z konieczności końcowy moment optymalizacji. Zob. A. C. Chiang, op. cit., s. 239-242.

$$\lim_{t\to\infty} H = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} H_C(t) e^{((1-\gamma)m-\rho)t} = 0. \tag{24}$$

Podstawiając (20) oraz $\frac{d\theta_K}{dt} = \frac{d\theta_K}{dt} = -\gamma \bar{c}(t)^{-\gamma-1}\frac{\bar{c}}{dt}$ do obu równań (22), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}} - (n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m\right), \\ \frac{d\bar{c}}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}} - (n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Z przyrównania prawych stron tych równań otrzymujemy zrozumiały intuicyjnie warunek: $\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}} - \delta_K = \frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}} - \delta_H$. Produkt krańcowy netto (produkt krańcowy pomniejszony o stopę deprecjacji) dla obu typów kapitału osiąga tę samą wartość.

Dynamikę systemu charakteryzuje układ równań różniczkowych: (21) i (25). Ponieważ nie określiliśmy konkretnej postaci funkcji $f(\bar{k};\bar{h})$, nie możemy wyznaczyć rozwiązania tego układu w sposób analityczny. Możemy jednakże dokonać jego analizy jakościowej. Punkt stacjonarny znajdujemy przez przyrównanie prawych stron (21) oraz (25) do zera. Odpowiednie równania zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} s_K f(\bar{k};\bar{h}) &= (n+m+\delta_K)\bar{k}, \\ s_H f(\bar{k};\bar{h}) &= (n+m+\delta_H)\bar{h}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}} &= (n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m), \\ \frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}} &= (n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m). \end{aligned} \tag{27}$$

przy czym w drugim równaniu (26) skorzystaliśmy z zależności (10).

Wartości $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$ oraz s_K^{**} i s_H^{**}, będące rozwiązaniem układu równań (26)–(27), charakteryzują długookresową równowagę dynamiczną systemu[29].

Zbieżność gospodarki do stanu równowagi długookresowej jest formalnie zagwarantowana przez warunki transwersalności (23)–(24). Dla ich spełnienia $\theta_K(t)$, $\theta_H(t)$ i H_C muszą być skończone przy $t \to \infty$. Z analizy (16) i (20) wnioskować należy, że w takim wypadku wartości zmiennej $\bar{c}$ nie mogą w granicy zmierzać do zera lub nieskończoności. Z (25) wynika zaś, iż wobec tego: $\left(\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{k}} - (n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ oraz

[29] Ponadto, korzystając z (10), można również wyznaczyć $\bar{c}_e$.

$\left(\frac{\partial f(\bar{k};\bar{h})}{\partial \bar{h}} - (n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, czyli w granicy spełnione są warunki (27). Ponieważ prawe strony równań (27) są stałe w czasie, to dla zapewnienia obu tych równości musi zachodzić: $\bar{k}=\bar{k}_e=const.$ oraz $\bar{h}=\bar{h}_e=const.$, czyli $\frac{d\bar{k}}{dt}=\frac{d\bar{h}}{dt}=0$. Zatem w granicy spełnione są także warunki (26).

Korzystając z (20) oraz z uwagi na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k};\bar{h})$, w prosty sposób otrzymujemy wniosek, że tzw. zmaksymalizowany hamiltonian wartości bieżącej, zdefiniowany jako:

$$H_C^{**}(\theta_K(t);\theta_H(t);\bar{k}(t);\bar{h}(t))=H_C(\theta_K(t);\theta_H(t);\bar{k}(t);\bar{h}(t);\bar{c}^{**}(t);s_K^{**}(t)),$$

gdzie $\bar{c}^{**}$ i $s_K^{**}(t)$ oznaczają optymalne trajektorie zmiennych sterujących $\bar{c}(t)$ i $s_K(t)$, wynikające z zasady maksimum – jest silnie wklęsłą funkcją zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$. Tym samym spełniony jest warunek wystarczający na to, żeby rozwiązanie wynikające z zasady maksimum stanowiło jedyne rozwiązanie optymalne problemu (14)–(15).

Korzystając z (26)–(27) oraz definicji elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego (9), możemy wyznaczyć długookresowe optymalne stopy inwestycji (obowiązujące w punkcie równowagi długookresowej)[30]:

$$s_K^{**}=\alpha(\bar{k}_e;\bar{h}_e)\frac{m+n+\delta_K}{n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m}=\alpha(\bar{k}_e;\bar{h}_e)\frac{m+n+\delta_K}{\rho+n+\delta_K+\gamma m},$$
$$s_H^{**}=\beta(\bar{k}_e;\bar{h}_e)\frac{m+n+\delta_H}{n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m}=\beta(\bar{k}_e;\bar{h}_e)\frac{m+n+\delta_H}{\rho+n+\delta_H+\gamma m},\tag{28}$$

Należy zwrócić uwagę, że optymalne stopy inwestycji są stałe, określone przez (28), dopiero w punkcie równowagi długookresowej $(\bar{k}_e;\bar{h}_e)$. W okresie dochodzenia do tego punktu, stopy te zmieniają się.

Przy przyjętym założeniu: $\rho-(1-\gamma)m>0$, prawdziwe są nierówności: $s_K^{**}<s_K^{*}$ i $s_H^{**}<s_H^{*}$[31]. Optymalne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki są tym mniejsze, im wyższa jest stopa dyskontowa oraz im szybciej następuje spadek krańcowej chwilowej użyteczności konsumpcji – im wyższe γ (czyli im większą skłonność przejawiają podmioty do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie).

---

[30] Zauważmy na marginesie, że problem niemierzalności części produktu nie wywiera żadnego wpływu na postać zadania optymalizacyjnego i procedurę jego rozwiązywania, co nadaje przeprowadzonej analizie pewien dodatkowy wymiar ogólności. W skrajnym przypadku, gdy całość ekonomicznych kosztów tworzenia kapitału ludzkiego stanowią stracone dochody, optymalna część mierzalnego produktu przeznaczana na inwestycje w kapitał rzeczowy, wyraża się wzorem: $s_K^{m**}=\frac{s_K^{**}}{1-s_H^{**}}$.

[31] Ponieważ $\alpha\geqslant 0$; $\beta\geqslant 0$; $\alpha+\beta\leqslant 1$, to $s_K^{**}\geqslant 0$; $s_H^{**}\geqslant 0$; $s_K^{**}+s_H^{**}\leqslant 1$, czyli spełnione są ograniczenia nałożone na zmienne sterujące w ostatnim wierszu (15). Zob. przyp. 26.

Przy bardzo wysokiej stopie dyskontowej (i/lub bardzo wysokim γ) optymalne stopy inwestycji dążą do zera, co oznacza ekstremalnie nisko położoną ścieżkę konsumpcji *per capita*.

Wysokie stopy dyskonta konsumpcji (oraz niskie wartości elastyczności międzyokresowej substytucji konsumpcji), czyli koncentrowanie się przez podmioty na bieżącym dobrobycie, mogą zatem stanowić wyjaśnienie obserwowanych w rzeczywistości stóp oszczędności/inwestycji, kształtujących się zwykle znacznie poniżej poziomów wynikających ze „złotej reguły" akumulacji.

Poza tym, z uwagi na fakt, że poziom stopy dyskontowej obejmuje wpływ wielu różnych, trudno kwantyfikowalnych czynników, wśród których z pewnością nie można pominąć poziomu ogólnej stabilności makroekonomicznej i politycznej, może stanowić teoretyczne ogniwo łączące oddziaływanie tych ostatnich na wartość społecznej stopy oszczędności.

Formułując przedstawione wnioski, przyjęto *implicite*, że mamy do czynienia z pozytywną teorią funkcjonowania systemu gospodarczego – rozważany model optymalizacyjny odwzorowuje proces ustalania się obserwowanych poziomów stóp oszczędności/inwestycji jako rezultatu decyzji podejmowanych przez indywidualne podmioty funkcjonujące w gospodarce. Dokładniej rzecz ujmując, przyjmuje się tutaj, że model odzwierciedla zachowanie tzw. typowego podmiotu ekonomicznego (gospodarstwa domowego), będącego skalarnym modelem całej gospodarki[32], podejmującego w każdej chwili decyzje o podziale bieżącego dochodu między konsumpcję i oszczędności, przy czym rachunek optymalizacyjny przebiega w typowy dla ekonomii neoklasycznej sposób, czyli opiera się na porównywaniu krańcowych korzyści i strat[33].

Scharakteryzowane rozwiązanie równowagi konkurencyjnej odpowiada jednocześnie rozwiązaniu optymalnemu z punktu widzenia społecznego planisty, maksymalizującego dobrobyt społeczny, scharakteryzowany przez społeczną funkcję użyteczności, przy danych ograniczeniach technologicznych (funkcja produkcji i stopa egzogenicznego postępu technicznego) i zasobowych (początkowy zasób kapitału, stopa przyrostu naturalnego)[34]. Zasadność tezy o zbieżności zdecentralizowanej konkurencyjnej alokacji z alokacją optymalną wynika z faktu, że w analizowanym modelu gospodarki:

---

[32] Zabieg ten jest powszechnie stosowany w modelach powstających w obrębie nowej makroekonomii klasycznej, a także nowej makroekonomii keynesowskiej, zgodnie z duchem tzw. indywidualizmu metodologicznego, przyjmowanego w celu stworzenia kompletnych i spójnych mikropodstaw dla teorii makroekonomicznej.

[33] Przedstawiona tutaj interpretacja problemu dynamicznej optymalizacji nawiązuje do interpretacji, zaproponowanej przez Lucasa, zob. R. Lucas Jr., *On The Mechanics of Economic Development*, „Journal of Monetary Economics" 22, 1988 July, s. 9. Jeśli rozważamy zachowanie tzw. typowego podmiotu ekonomicznego, to problematyczne, z punktu widzenia motywacji podmiotu, może wydawać się przyjęcie nieskończonego horyzontu optymalizacji w funkcjonale celu. Można je wówczas interpretować jako równoważne z założeniem, że podmioty troszczą się nie tylko o własną dożywotnią konsumpcję, ale również o możliwości konsumpcyjne swoich potomków. Nieskończony horyzont planowania podmiotów należałoby więc tłumaczyć swego rodzaju altruizmem, wynikającym z silnych więzi międzypokoleniowych. W efekcie kolejne pokolenia danego podmiotu można traktować tak, jakby tworzyły jedno, istniejące nieskończenie długo, gospodarstwo domowe.

[34] Zob. F. P. Ramsey, *A Mathematical Theory of Savings*, „Economic Journal", December 1928, s. 543-559 oraz D. Cass, *Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation*, „Review of Economic Studies" 1965 July, s. 233-240.

– spełnione są warunki efektywności zdecentralizowanej równowagi konkurencyjnej w sensie Pareto (nie istnieje możliwość zwiększenia poziomu użyteczności jakiegokolwiek podmiotu bez konieczności jednoczesnego pogorszenia sytuacji jakiegoś innego)[35],

– ze względu na jednakowy charakter preferencji wszystkich podmiotów (ta sama postać całki preferencji), efektywność w sensie Pareto oznacza maksymalizację funkcji dobrobytu społecznego traktującej wszystkie podmioty w jednakowy sposób.

V. „ZŁOTA REGUŁA AKUMULACJI" JAKO SZCZEGÓLNY PRZYPADEK ROZWIĄZANIA ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO

Przeprowadzona endogenizacja stopy oszczędności pozwala na rozwiązanie problemu sformułowanego w związku ze „złotą regułą akumulacji" Phelpsa. Nietrudno zauważyć, że przy[36] $\rho \to ((1-\gamma)m)^{+}$ optymalne stopy inwestycji, określone przez (28), są zbieżne do wartości odpowiadających złotej regule akumulacji Phelpsa. Wynik ten wskazuje na to, że ta ostatnia odpowiada w istocie granicznym poziomom stóp oszczędności/inwestycji, wynikającym z zachowań optymalizacyjnych podmiotów, charakteryzujących się nieskończonym horyzontem planowania oraz określonymi preferencjami co do rozkładu konsumpcji w czasie. Formalnym wyrazem owych szczególnych preferencji byłyby różne kombinacje wartości ρ i γ, spełniające zależność graniczną: $\rho \to ((1-\gamma)m)^{+}$. W szczególnym przypadku sytuacja taka ma miejsce, gdy: $\rho \to m^{+}$ oraz $\gamma \to 0^{+}$. Wartości stóp oszczędności/inwestycji zgodne ze złotą regułą akumulacji Phelpsa mogą być zatem interpretowane jako wartości optymalne na ścieżce wzrostu równomiernego z punktu widzenia podmiotów, dyskontujących przyszłą konsumpcję według długookresowej stopy wzrostu wydajności pracy (czyli – zgodnie z modelem – stopy wzrostu realnych zarobków) oraz charakteryzujących się liniową funkcją chwilowej użyteczności konsumpcji (o stałej użyteczności krańcowej). Alternatywnie, dla przypadku, gdy: $\rho \to 0^{+}$ oraz $\gamma \to 1^{-}$, można te wartości także traktować, jako wynikające z decyzji optymalizacyjnych jednostek, których preferencje co do rozkładu konsumpcji w czasie mogą być opisane za pomocą logarytmicznej funkcji użyteczności[37], przy braku dyskonta konsumpcji w czasie[38].

Mgr Piotr Pietraszewski jest asystentem
Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu.

[35] Najważniejsze z tych warunków to wypukłość preferencji (zagwarantowana w modelu przez przyjęte założenie o malejącej marginalnej stopie substytucji konsumpcji w dwóch dowolnych punktach czasu) i technologii oraz brak jakichkolwiek (produkcyjnych bądź konsumpcyjnych) efektów zewnętrznych. Nie rozwijamy szerzej tego zagadnienia, gdyż dowody twierdzenia o Pareto – optymalnym charakterze stanów równowagi konkurencyjnej są powszechnie znane. Zob. np. M. Rojek, *Dowody fundamentalnych twierdzeń ekonomii dobrobytu w modelu równowagi ogólnej Arrowa – Debreu*, „Ekonomista" 2003, nr 1, s. 45-50 lub na poziomie bardziej intuicyjnym, zob. H. Varian, *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 2007, s. 508-536.

[36] Zapis $x \to a^{+}$ oznacza, że wartości zmiennej zbiegają do poziomu a z prawej strony na osi liczbowej.

[37] Przy $\gamma \to 1^{+}$ mamy $u'(c) = c^{-\gamma} \to u'(c) = c^{-1}$. Zatem $u(c) \to \ln c$.

[38] W literaturze interpretacja ta nigdy nie jest wyrażana *explicite*, sugeruje się za to, że złota reguła

REMARKS ON THE “GOLDEN RULE” OF ACCUMULATION OF REAL AND HUMAN CAPITAL IN THE CONTEXT OF SOCIAL WELFARE MAXIMISATION

Summary

The subject of the paper is social welfare maximisation in a neoclassical model of economic growth, extended by the accumulation of human capital. After introducing the model and characterising the behaviour of the economic system on the so-called balanced growth path, Phelps' “golden rule of accumulation” is used to establish the values of the rates of investments (into real and human capital) maximising the level of the long-term growth path of *per capita* consumption. At the same time the analytical limitations of this conception in the context of the welfare maximisation is shown. Overcoming those limitations necessitates a direct reference to the preferences of individual economic agents over (*per capita*) consumption streams. Realisation of this demand finds its formal expression in formulating and solving a dynamic optimisation problem, based on the initial growth model. Finally, this procedure serves to find the specific character of preferences of individual agents, in the light of which the values of investment rates resulting from Phelps' rule are the optimal values (on the balanced growth path), for the achievement of which, according to the model, the economy should strive.

akumulacji odpowiada sytuacji, w której ignoruje się jakiegokolwiek dyskonto konsumpcji przyszłej przez podmioty, przy założeniu o maksymalizacji bezpośrednio samej konsumpcji (czyli liniowej funkcji użyteczności). Zob. np. T. Tokarski, *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001, s. 117-123 oraz idem, *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005, s. 108-114. Interpretacja autora wynika prawdopodobnie stąd, iż zdaje się on zakładać maksymalizację sumy zdyskontowanej konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy jako cel optymalizacji podmiotu, zamiast konsumpcji *per capita*, jak wymaga tego – naszym zdaniem – logika rozważanego schematu optymalizacyjnego.