RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok XLIII — zeszyt 4 — 1981

ZBIGNIEW PAWŁOWSKI

WYBÓR MODELU EKONOMETRYCZNEGO DLA PREDYKCJI DYSKRYMINACYJNEJ

Jak wiadomo, predykcja dyskryminacyjna jest metodą pozwalającą na sterowanie zachowaniem się systemu ekonomicznego na podstawie modelu typu ekonometrycznego, który opisuje ilościowe związki i prawidłowości rządzące tym systemem[1]. Dokładniej sprawę ujmując, przyjmijmy, że rozpatruje się pewien G-wymiarowy wektor Y zmiennych opisujących system lub efekty jego działania i że w odniesieniu do wektora Y i pewnego przyszłego odcinka czasu T wyznacza się pewien cel do osiągnięcia, na przykład żąda się, by składowe tego wektora przyjęły wartości nie mniejsze od z góry ustalonych liczb[2]. Wektor Y nazywać będziemy w związku z tym wektorem celu, a jego składowe — zmiennymi celu.

Przyjmijmy dalej, ze kształtowanie się wektora celu może być opisane za pomocą modelu

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \xi), \tag{1}$$

gdzie x_1 jest wektorem egzogenicznych zmiennych decyzyjnych, x_2 jest wektorem zmiennych czysto egzogenicznych (a więc niezależnych od ośrodka sterującego), x_3 jest wektorem opóźnionych zmiennych endogenicznych[3], a ξ jest wektorem elementów losowych.

Predykcja dyskryminacyjna polega — skrótowo biorąc — na:

1) znalezieniu takiego zbioru Ω_3 wartości zmiennych objaśniających spełniających narzucone warunki brzegowe i bilansowe, by spełniona była relacja

$$P\{Y_T \in A | x_1, x_2, x_3 \in \Omega_3\} \geqslant \gamma, \tag{2}$$

(gdzie A jest ustalonym celem[4], a γ jest z góry ustaloną liczbą z przedziału (0, 1)), i następnie: 2) wyznaczeniu ze zbioru Ω_3 punktu w określonym sensie optymalnego.

[1] Szersze informacje o predykcji dyskryminacyjnej znaleźć można w pracy Z. Pawłowski, *Predykcja dyskryminacyjna a sterowanie procesami gospodarczymi,* Przegląd Statystyczny 1974.

[2] Taki sposób definiowania celu jest zwłaszcza charakterystyczny dla systemów rozwijających się, w których wszystkie zmienne Y_i są stymulantami, a więc wyższy ich poziom odpowiada wyższej osiągniętej użyteczności.

[3] Warto zauważyć więc, że w rozpatrywanej sytuacji pojęcia nieopóźnionych zmiennych endogenicznych i zmiennych celu pokrywają się.

[4] Dokładniej — A jest wyznaczonym przez ustalony a priori cel G-wymiarowym zbiorem w kartezjańskiej przestrzeni $Y_1 \, x Y_2 \, x \, ... \, x Y_G$ możliwej zmienności zmiennych endogenicznych.

W pracy niniejszej zajmiemy się w dalszym ciągu niektórymi warunkami, które powinien spełniać model (1), aby oparta na nim predykcja dyskryminacyjna przynosiła zamierzone rezultaty.

I. WŁASNOŚCI DOBREGO MODELU

Zajmiemy się najpierw ogólnymi postulatami, jakie wysunąć trzeba w odniesieniu do modelu ekonometrycznego, mającego służyć celom predykcji dyskryminacyjnej. Jak zobaczymy, niektóre z tych postulatów są zgodne z żądaniami wysuwanymi pod adresem każdego modelu ekonometrycznego[5]. Niektóre jednak dotyczą kwestii specyficznych dla predykcji dyskryminacyjnej. Wysunąć można przynajmniej 6 następujących postulatów:

1) model mechanizmu kształtowania się wektora Y powinien być modelem typu przyczynowo-opisowego;

2) model ten powinien być aktualny na całym odcinku czasu od przedziału czasowego próby aż do końca okresu sterowania T włącznie;

3) w zbiorze zmiennych objaśniających muszą znajdować się zmienne decyzyjne, a więc wektor x_I musi mieć przynajmniej jedną składową;

4) uwzględnione w modelu zmienne decyzyjne powinny charakteryzować się dużą sprawnością, niezawodnością i efektywnością ekonomiczną[6];

5) model powinien zawierać wszystkie takie zmienne czysto egzogeniczne, które w silny sposób oddziałują na wektor zmiennych celu;

6) stopień zmienności przypadkowej, reprezentowany przez wariancje poszczególnych składowych wektora ξ, powinien być możliwie niski.

Obecnie skomentujemy nieco szerzej poszczególne z tych postulatów. Postulat pierwszy jest dość oczywisty, jeżeli weźmie się pod uwagę, że chcąc osiągnąć określone skutki trzeba uruchomić właściwe dla tych skutków przyczyny. Również i drugi postulat jest bezpośrednio zrozumiały, jako że nie miałoby sensu korzystanie z modelu zdezaktualizowanego, reprezentującego jedynie przeszłość. Ponieważ jednak jest rzeczą znaną, że rzeczywistość ekonomiczna nie jest statyczna, tak iż ulegają zmianom ilościowe relacje między poszczególnymi zjawiskami i elementami systemu, nasuwa się wniosek, że celowe jest szerokie korzystanie z dynamicznych wersji modelu ekonometrycznego[7]. Ma to zwłaszcza znaczenie tam, gdzie okres T wybiega dość daleko w przyszłość, gdyż znaczne predyktywne opóźnienie modelu zwiększa

[5] Dlatego też nie można wykluczyć tego, że w niektórych przypadkach model ekonometryczny zbudowany dla predykcji ekonometrycznej będzie wykorzystywany i dla innych celów, np. dla predykcji bezpośredniej.

[6] Terminy te, którym nadajemy specjalne, nieco odmienne od spotykanego w literaturze znaczenie, zostaną zdefiniowane w punktach II i III.

[7] To jest wersji dopuszczających zmienność parametrów modelu w czasie, jak też i dających możność wprowadzenia do modelu zmiennych objaśniających, które tylko okresowo wywierają wpływ na nieopóźnione zmienne endogeniczne (tak zwane zmienne migawkowe, por. np. Z. Pawłowski, *Use of Dummy Variables in Econometric Model Building with Special Reference to Centrally Planned Economies,* w pracy zbiorowej A. Straszaka i B. V. Wagle'a, *Models for Regional Planning and Policy Making,* IIASA Vienna 1977.

oczywiście niebezpieczeństwo tego, że oszacowany na podstawie danych z przeszłości model okaże się nieaktualny[8]. Także i trzeci postulat jest zrozumiały. Jeżeli model (1) ma służyć działaniom praktycznym, to jest oczywiście niezbędne, by zawierał on — jako zmienne objaśniające — takie zmienne, na które użytkownik predykcji dyskryminacyjnej ma rzeczywisty wpływ i może je, przynajmniej w pewnych granicach, dowolnie kształtować. Od tych zmiennych decyzyjnych jednocześnie żąda się, by były one sprawne, niezawodne i efektywne. Odkładając — jak to już zapowiedzieliśmy — bardziej precyzyjne zdefiniowanie tych pojęć do punktów II i III, ograniczymy się tu jedynie do stwierdzenia, że postulat 4 sprowadza się do tego, by zmienne decyzyjne były silnie stochastycznie powiązane z odpowiednimi zmiennymi wektora *Y*, by istniała realna możliwość ustalenia w okresie *T* ich wartości na pożądanym poziomie i aby koszt związany[9] ze zmianą poziomu zmiennych decyzyjnych był ekonomicznie uzasadniony.

Jakkolwiek model (1) ma służyć celom predykcji dyskryminacyjnej, a więc znajdowaniu optymalnego wariantu działania nastawionego na realizację celu, to przecież nie można wykluczyć możliwości znalezienia się w zbiorze jego zmiennych objaśniających, także i zmiennych czysto egzogenicznych (postulat 5). Rzeczywiście, jeżeli wektor *Y* w silnej mierze jest uzależniony od czynników egzogenicznych znajdujących się poza kontrolą, to pominięcie w modelu takich zmiennych spowodowałoby małą adekwatność modelu, a tym samym i małą jego przydatność dla sterowania odpowiednim systemem ekonomicznym, reprezentowanym przez model W konsekwencji należy uznać, że metoda doboru zmiennych objaśniających do modelu powinna być taka, by z góry gwarantowała uwzględnienie w nim zarówno zmiennych egzogenicznych typu decyzyjnego, jak i zmiennych czysto egzogenicznych, a także ewentualnie i opóźnionych zmiennych endogenicznych[10].

Ostatni wreszcie postulat, dotyczący niskiego poziomu zmienności przypadkowej wektora *Y*, jest zrozumiały, jeżeli wziąć pod uwagę żądanie, by model dobrze odzwierciedlał opisywany system ekonomiczny i by umożliwiał tym samym skuteczne nim sterowanie.

II. SPRAWNOŚĆ I NIEZAWODNOŚĆ ZMIENNYCH DECYZYJNYCH

Niech t_1 oznacza okres bieżący, w którym dokonuje się predykcji dyskryminacyjnej w odniesieniu do określonego przyszłego okresu *T*, takiego, że $T—t_1=h$, a więc *h* jest wyprzedzeniem czasowym predykcji dyskryminacyjnej. Załóżmy dalej,

[8] Dodać trzeba, że predykcja dyskryminacyjna jest z natury rzeczy przede wszystkim wnioskowaniem długookresowym, a więc niebezpieczeństwo dezaktualizacji modelu jest tu większe niż w sytuacjach, gdy wnioskuje się na bliską przyszłość.

[9] Pomijając szczególne sytuacje, gdy zmienne decyzyjne mogą być ustalone drogą decyzji administracyjnych, w większości przypadków zmiana ich poziomu pociąga za sobą koszty. Typowym przykładem są tu inwestycje.

[10] Jeżeli modelowanie ma charakter strukturalny (to znaczy opiera się na wiedzy a priori), jest to sprawa łatwa do przeprowadzenia. Przy modelowaniu predyktywnym, gdy korzysta się z pewnego algorytmu doboru zmiennych objaśniających, algorytm ten powinien być tak zmodyfikowany, by zapewniał wejście do modelu zarówno zmiennych x_i, jak i x_2 (a ponadto ewentualnie i zmiennych zaliczanych do wektora x_3).

że z postawionego celu wynika, iż w porównaniu z sytuacją w okresie t_1 wektor Y musi ulec zmianie, tak iż wektor $\Delta Y_T = Y_T - Y_{t1}$ powinien znaleźć się w obszarze[11] D_y . Przyjmijmy wreszcie, iż z przeprowadzonej predykcji dyskryminacyjnej (to znaczy z wyznaczonego zbioru Ω_3) wynika, iż zmienne decyzyjne tworzące wektor x_x powinny ulec zmianie na odcinku[12] (t_1, T) w taki sposób, by wektor $\Delta x_{1T} = x_{1T} - x_{1t_1}$ należał do pewnego obszaru D_{x1}. Rozpatrzmy prawdopodobieństwo P sukcesu takiego działania. Mamy

$$P = P\{\Delta Y_T \in D_y | \Delta x_{1T} \in D_{x_1}\} \cdot P\{\Delta x_{1T} \in D_{x_1}\}. \tag{3}$$

Wartość pierwszego z czynników występujących po prawej stronie znaku równości nazywać będziemy sprawnością wektora x_1 zmiennych decyzyjnych. Wartość drugiego czynnika występującego po prawej stronie znaku równości nazywać będziemy niezawodnością wektora x_1. Prawdopodobieństwo P sukcesu działania nazywać natomiast będziemy sterowalnością systemu opisanego przez model (1) z wektorem decyzyjnym x_1. Będziemy mówili, że system jest sterowalny, jeżeli prawdopodobieństwo P określone wzorem (3) okaże się większe od pewnej z góry założonej liczby p_0. Jeżeli natomiast okaże się, że $P<p_0$, wówczas powiemy, że system jest niesterowalny[13].

Sprawność zmiennych decyzyjnych zależy od stopnia natężenia ich związku stochastycznego ze zmiennymi tworzącymi wektor Y, a więc — w przypadku liniowym — od współczynników korelacji liniowej. Niezawodność natomiast można uznać za uzależnioną od przynajmniej trzech czynników. Czynnikami tymi są: a) rozmiary zmian, jakim mają ulec zmienne decyzyjne w okresie T w porównaniu z okresem t_1 ; b) czasowe wyprzedzenie predykcji dyskryminacyjnej h; c) koszt działań nastawionych na dokonanie zmian poziomu zmiennych decyzyjnych. Ogólnie rzecz biorąc, niezawodność jest tym mniejsza[14], im założone zmiany są większe. Jednocześnie przyjąć można, że niezawodność jest tym większa, im wyższą wartość ma parametr h oraz im wyższe są nakłady ponoszone na osiągnięcie niezbędnych warunków w okresie T.

Z tego, co powiedziano wyżej, wynika więc, że sterowalność nie jest atrybutem, który jest stale związany z danym systemem i modelem lub który stale nie występuje. W odniesieniu do pewnych sytuacji, to znaczy niektórych celów i odpowiadających im warunków ich realizacji, zbudowany model może zapewniać sterowalność syste-

[11] Obszar D_y zależy od postawionego celu A, wyjściowego poziomu Y_{t_1} wektora zmiennych celu oraz założonego prawdopodobieństwa γ.

[12] Symbolem (a, b) oznaczamy zbiór takich przyszłych kolejnych okresów czasu, że pierwszym z nich jest okres następujący bezpośrednio po okresie a, natomiast ostatnim jest okres b.

[13] Liczba $p_0 \in (0, 1)$ zależy od użytkownika prognozy. Porównując wzory (2) i (3) widzimy, że p_0 jest progiem prawdopodobieństwa osiągnięcia celu, gdy uwzględni się możliwość losowych odchyleń zmiennych decyzyjnych od wymaganego poziomu. Oznaczając dopuszczalne prawdopodobieństwo takich odchyleń symbolem β, otrzymujemy nierówność $p_0 \geq \gamma\beta$, stąd mając dane γ i β znajdujemy i p_0.

[14] Ze względu na ich złożony charakter, związki niezawodności z poszczególnych wpływającymi na nią czynnikami mogą w praktyce być rozpatrywane przede wszystkim jako zależności typu statystycznego, a więc opartego na zebranych materiałach empirycznych.

mu, natomiast w odniesieniu do innych sterowalność może nie zachodzić. W szczególności sterowalność może nie być osiągalna, gdy postawiony cel jest bardzo oderwany od wyjściowego poziomu wektora zmiennych celu lub gdy czasowe wyprzedzenie predykcji dyskryminacyjnej jest małe[15].

Jeżeli okaże się, że prawdopodobieństwo P określone wzorem (3) jest niższe od założonego progu p_0, wówczas można osiągnąć sterowalność systemu w drodze przebudowy modelu, to znaczy poprzez zwiększenie jego adekwatności. Cel ten osiągnąć można przede wszystkim przez wprowadzenie nowych (dodatkowych) zmiennych decyzyjnych, poprawiających ich ogólną sprawność lub wymianę niektórych zmiennych decyzyjnych w taki sposób, by podniosła się ich niezawodność. Przy okazji omawiania niezawodności zmiennych decyzyjnych warto zwrócić również uwagę na pojęcie ich wzajemnej zgodności lokalnej. Pojęcie to ma zastosowanie w sytuacjach, gdy zmienne decyzyjne mogą być ustalone jedynie z pewnym przybliżeniem, gdyż liczyć się trzeba z pewnymi ich losowymi odchyleniami od poziomów wyznaczonych przez odpowiednie plany lub programy działania[16].

Przez zgodność lokalną zmiennych decyzyjnych będziemy rozumieli taki typ ich wzajemnych powiązań stochastycznych, gdy łączne prawdopodobieństwo przybrania przez te zmienne wartości z pewnego interesującego nas obszaru[17] ω jest większe niż iloczyn odpowiednich prawdopodobieństw obliczonych z rozkładów brzegowych tych zmiennych decyzyjnych. Jeżeli natomiast łączne prawdopodobieństwo jest mniejsze od iloczynu prawdopodobieństw brzegowych, wówczas będziemy mówili o *lokalnej niezgodności* zmiennych decyzyjnych w obszarze ω. Zgodność zmiennych decyzyjnych oznacza mianowicie, że wybrane instrumenty działania wzajemnie się zazębiają i wobec tego dają realnie większą szansę zrealizowania w okresie T wariantu działania zapewniającego dostatecznie wysokie prawdopodobieństwo osiągnięcia celu $\boldsymbol{Y_T} \in \boldsymbol{A}$. Jeżeli natomiast zgodność uwzględnionych w modelu (1) zmiennych decyzyjnych jest niska, to instrumenty (to znaczy zmienne tworzące wektor x_1) nie współdziałają ze sobą lub nawet — być może — pożądane zdarzenie $\boldsymbol{x_1} \in \omega$ ma bardzo małe szanse realizacji[18]. Niezgodność zmiennych decyzyjnych stawia więc pod znakiem zapytania możliwość osiągnięcia postawionego dla wektora Y_T celu.

Celowe może być sformułowanie prostej miary lokalnej zgodności zmiennych decyzyjnych. Niech $p_{(j)}$ oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego

[15] Czyli gdy cel jest nierealny w stosunku do czasu, jaki przeznacza się na jego realizację.

[16] Typowym przykładem zmiennych decyzyjnych o charakterze losowym są zmienne reprezentujące inwestycje, gdyż w tej dziedzinie odchylenia od ustalonego programu realizacji zdarzają się często.

[17] W kontekście predykcji dyskryminacyjnej obszar ω sprowadza się zwykle bądź do zbioru Ω_3^1 , będącego kartezjańską podprzestrzenią (ze względu na x_1) przestrzeni zawartej w zbiorze Ω_3 realnie dopuszczalnych wariantów działania.

[J8] Dochodzimy tym samym do sformułowanego przez Z. Hellwiga pojęcia luki probabilistycznej (Z. Hellwig, *Zastosowanie przekształcenia ortogonalnego do wyznaczania dopuszczalnych wartości zmiennych objaśniających w modelu ekonometrycznym,* Przegląd Statystyczny 1974), odpowiadającej sytuacjom, gdy pewne układy wartości losowych zmiennych objaśniających modelu nie są praktycznie możliwe do zrealizowania.

$x_1 \in \omega$ i niech $p_{(m)}$ będzie prawdopodobieństwem tego samego zdarzenia, ale obliczonym na podstawie rozkładów brzegowych poszczególnych zmiennych, a więc $p_{(m)}$ jest iloczynem prawdopodobieństw brzegowych. Za miernik zgodności lokalnej zmiennych decyzyjnych w zbiorze ω przyjmować będziemy wyrażenie

$$\gamma_\omega = \frac{p_{(j)} - p_{(m)}}{max(p_{(j)}, p_{(m)})}. \tag{4}$$

Ponieważ zawsze $0 \leq p_{(j)} \leq 1$ oraz $0 \leq p_{(m)} \leq 1$, przeto widać, że miernik (4) przyjmuje wartości z przedziału [—1, +1]. Jeżeli w pewnym przypadku okaże się, że $\gamma_\omega < 0$, będziemy mówili o niezgodności lokalnej zmiennych decyzyjnych, natomiast o ich zgodności — gdy γ_ω przyjmie wartość dodatnią. Przypadek $\gamma_\omega = 0$ określać będziemy mianem lokalnej niezależności zmiennych decyzyjnych[19].

Przyjmijmy teraz, że zbiór ω jest rozpatrywanym przez nas wcześniej zbiorem D_{XI}; (por. początek niniejszego punktu oraz wzór (3)). Jest zrozumiałe, że mając do dyspozycji pewien duży zbiór $\{X_l\}$ potencjalnych zmiennych decyzyjnych i przy tym takich, że tworząc z niego różne wektory x_l osiąga się zbliżone wartości prawdopodobieństwa $p_{(m)}$, należy do modelu (1) wybrać ostatecznie wektor zawierający zmienne, których przyrosty są wysoce zgodne w zbiorze D_{xl}. Zapewni to bowiem odpowiednią niezawodność tych zmiennych[20].

III. EFEKTYWNOŚĆ ZMIENNYCH DECYZYJNYCH

Wymieniając cechy dobrego modelu ekonometrycznego dla predykcji dyskryminacyjnej zwróciliśmy uwagę również na to, iż zmienne decyzyjne powinny być ekonomicznie efektywne. Przez efektywność taką rozumiemy po prostu osiąganie zamierzonego celu przy poniesieniu możliwie niskich nakładów. Jeżeli liczba możliwych zmiennych decyzyjnych jest bardzo ograniczona, wówczas problem wyboru praktycznie nie istnieje i trzeba wykorzystywać te zmienne, które są praktycznie dostępne. Inaczej jednak ma się sprawa wtedy, gdy zbiór $\{X_l\}$ potencjalnych zmiennych decyzyjnych jest na tyle liczny, iż można z jego elementów tworzyć wektory x_l różniące się między sobą liczbą i rodzajem tworzących je zmiennych decy-

[19] Zauważmy, że γ_ω nie jest miernikiem współzależności stochastycznych zmiennych decyzyjnych, gdyż ogranicza się do porównania prawdopodobieństw realizacji tych zmiennych tylko do zbioru ω, który jest podzbiorem właściwym obszaru Δ możliwej ich zmienności. Dopiero podział Δ na pewną liczbę rozłącznych podzbiorów ω, a następnie odpowiednia agregacja odpowiadających różnym ω mierników γ_ω mogłaby dać miernik ogólnej współzależności zmiennych decyzyjnych. Alternatywnie można by skorzystać w tym celu z gotowych już mierników współzależności opracowanych i zbadanych przez W. Ostasiewicza (por. W. Ostasiewicz, *Możliwości uogólnienia miar zależności stochastycznej,* Przegląd Statystyczny 1975).

[20] Inna sprawa, że uwzględnienie w modelu zmiennych wysoce zgodnych stwarza pewne problemy natury statystycznej. Jeżeli model jest liniowy, wysoka zgodność lokalna oznaczać będzie zwykle wysoką ogólną współliniowość zmiennych objaśniających, co oczywiście utrudnia estymację modelu.

zyjnych wziętych ze zbioru $\{X_1\}$. Powstaje wtedy kwestia, który wektor zawiera „lepsze" w sensie ekonomicznym zmienne. Najogólniej rzecz biorąc, odpowiedź na tak postawione pytanie daje porównanie dla poszczególnych wyróżnionych wektorów x_1 następujących mierników efektywności:

$$\varepsilon = \frac{P\{\Delta x_1 \in D_{x_1}\}}{k}, \tag{5}$$

gdzie ε jest efektywnością, a k kosztem działania[21] mającego na celu odpowiednią zmianę wartości zmiennych decyzyjnych. Ponieważ koszt k zależy zwykle od założonej niezawodności zmiennych, przeto — dla uniknięcia nieoznaczoności problemu — zakładamy, że przy badaniu efektywności zmiennych decyzyjnych poziom niezawodności dla wszystkich rozpatrywanych wektorów x_1 jest ustalony tak samo. Prowadzi to w rezultacie do porównań kosztów i wyboru takiego zestawu zmiennych decyzyjnych, dla których k jest najniższe.

Innym, choć zbliżonym zagadnieniem jest wybór optymalnego — ze względu na koszty i prawdopodobieństwo pomyślnej realizacji — wariantu działania spośród zbioru Ω_3 realnie dopuszczalnych wariantów. W tym ostatnim przypadku zakładamy, iż model jest już zbudowany (a więc skład wektora x_1 jest ustalony) i chodzi o porównanie wariantów należących do Ω_3 i różniących się między sobą wartościami tych samych zmiennych decyzyjnych. Zagadnienia tego, jako wybiegającego poza temat niniejszej pracy, nie będziemy tu rozpatrywali, odsyłając zainteresowanego czytelnika do innego artykułu autora[22].

IV. PROBLEM GIĘTKOŚCI ZMIENNYCH DECYZYJNYCH

Zbiór Ω_3 zawiera zwykle takie punkty (warianty działania), które charakteryzują się wartościami zmiennych decyzyjnych dość znacznie różniącymi się od wartości wyjściowych, występujących w okresie t_1, zatem duże znaczenie ma również *giętkość* zmiennych decyzyjnych. Giętkość jest pojęciem związanym z możliwymi do realizacji przyrostami [23] wartości tych zmiennych. Jeżeli zmienna jest wysoce giętka, to łatwo jest dostosować jej wartość do poziomu pożądanego w okresie T, a więc łatwo można zapewnić warunki realizacji ustalonego celu. Odwrotnie ma się natomiast sprawa, gdy giętkość jest mała. W sytuacji takiej osiągnięcie dużej zmiany wartości zmiennej decyzyjnej jest bardzo trudne, a to z kolei oznacza, że dla osiągnięcia sukcesu sterowanie trzeba rozpocząć wcześnie. Predykcja dyskryminacyjna musi więc być przeprowadzona ze znacznym wyprzedzeniem czasowym.

[21] Nie tracimy tu bynajmniej z pola widzenia trudności praktycznych związanych z obliczeniem k, a związanych przede wszystkim z tym, że w liczniku wzoru (5) jest $\Delta x_1 \in D_{x_1}$, a więc że w grę wchodzą różne zmiany wyjściowych wartości zmiennych objaśniających. Jednym ze sposobów postępowania może być przyjęcie, że k jest średnim kosztem działania obliczonym ze względu na różne możliwe zmiany zawarte w zbiorze D_{x1}.

[22] Z. Pawłowski, op. cit.

[23] I ogólniej — zmianami.

Niech x_0 oznacza początkowy[24] poziom zmiennej decyzyjnej X i niech k będzie założonym kosztem działania mającego na celu dokonanie zmiany wartości tej zmiennej o wielkość Δx. Niech dalej τ będzie długością odcinka czasu niezbędnego na urzeczywistnienie założonej zmiany zmiennej decyzyjnej. Jeżeli zmienna ta jest niezawodna[25], to τ jest wielkością zdeterminowaną przez odpowiednie decyzje planistyczne lub administracyjne. Jeżeli natomiast niezawodność ta jest niższa od 1, wówczas τ trzeba traktować jako zmienną losową przyjmującą wartości nieujemne.

Oznaczmy przez $F(u;\, x_0,\, x,\, k)$ dystrybuantę zmiennej losowej τ. Wartości tej funkcji są więc równe prawdopodobieństwu tego, że w warunkach gdy początkowy poziom zmiennej jest x_0, pożądany jej przyrost jest Δx, a zakłada się koszt działania k; czas realizacji wybranego wariantu działania ze względu na tę zmienną będzie mniejszy od u jednostek czasu. Wyrażenie

$$E(\tau|x_0, \Delta x, k) = \int_0^\infty u \cdot dF(u\,;\, x_0, \Delta x, k) \tag{6}$$

jest oczekiwaną długością czasu realizacji. Jak się przy tym wydaje, można sądzić, że $E(\tau|x_0,\, \Delta x,\, k)$ jest rosnącą funkcją x oraz malejącą funkcją k. Jeżeli wartość oczekiwana (6) istnieje, wówczas wyrażenie

$$\Phi x = \frac{1}{E(\tau|x_0, \Delta x, k)} \tag{7}$$

nazywać będziemy *giętkością*[26] zmiennej decyzyjnej.

Niech teraz u_0 ma ustaloną wartość, równą $T—t_2$. Wielkość tę nazywać będziemy *wyprzedzeniem czasowym działań sterujących.* Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie $1—F(u_0|x_0,\Delta x,\, k)$, czyli prawdopodobieństwa pomyślnego zakończenia działań skierowanych na zmienną x później niż przed nastaniem okresu T[27] i niech a będzie z góry dobraną liczbą z przedziału (0, 1). Jeżeli zachodzi nierówność

$$1 - F(u_0\,;\, x_0, \Delta x, k) \geqslant \alpha, \tag{8}$$

wówczas — przy ustalonym k — uznać trzeba, że zmienna X jest za mało giętka, to znaczy istnieje zbyt duże ryzyko tego, że nie uda się osiągnąć odpowiednio wcześnie pożądanej zmiany poziomu tej zmiennej.

Niezawodność $F(u_0;\, x_0,\, \Delta x,\, k)$ zależy między innymi od u_0 oraz od k, przeto istotnego znaczenia nabiera znalezienie pochodnych

$$F_{u_0} = \frac{\partial F(u_0\,;\, x_0, \Delta x, k)}{\partial u_0}, \tag{9}$$

[24] To znaczy poziom odpowiadający okresowi t_1 w którym — z założenia — dokonuje się predykcji dyskryminacyjnej. Alternatywnie x_0 może odpowiadać okresowi t_2 (późniejszemu w stosunku do t_1), w którym rozpoczyna się działania skierowane na osiągnięcie w okresie T właściwego poziomu zmiennych decyzyjnych.

[25] To znaczy, gdy jest $P\{\Delta x_1 \in D_{x_1}\} = 1$.

[26] Jeżeli natomiast $E(\tau|x_0,\, \Delta x,\, k)$ nie istnieje, to przyjmować będziemy, że giętkość jest równa zero.

[27] Natomiast wartość liczbowa $F(u_0;x_0,\, \Delta x,\, k)$ jest niezawodnością zmiennej decyzyjnej X.

$$F_k = \frac{\partial F(u_0\,;\ x_0,\, \Delta x,\, k)}{\partial k}. \tag{10}$$

Pierwsza z nich może znaleźć zastosowanie w rozważaniach dotyczących możliwości podniesienia niezawodności przez zwiększenie wyprzedzenia czasowego działań sterujących. Druga z pochodnych natomiast informuje, w jakiej mierze wyższą niezawodność można osiągnąć przez przeznaczenie większych środków finansowych.

V. MIERNIKI WPŁYWU ZMIENNYCH W MODELU EKONOMETRYCZNYM

Aby być praktycznie przydatnym dla dokonywania predykcji dyskryminacyjnej, model ekonometryczny musi być dostatecznie adekwatny do opisywanego systemu ekonomicznego. Jak wiadomo, teoria ekonometrii zna wiele różnych mierników rzędu zgodności modelu z próbą, na podstawie której został on zbudowany, a także znanych jest wiele miar umożliwiających ocenę stopnia dokładności opartej na modelu predykcji bezpośredniej[28]. Także i w tych sytuacjach, gdy model ekonometryczny ma być wykorzystany dla predykcji dyskryminacyjnej, mierniki ex post zgodności modelu z próbą zachowują swe znaczenie. Ponieważ trudno byłoby utrzymywać, że model dobrze będzie opisywać przyszłe zachowanie się systemu, gdy wykazuje on już słabą zgodność z danymi wyjściowymi, uznać można, że zadowalające wartości klasycznych mierników zgodności modelu z próbą statystyczną są warunkiem koniecznym operacyjnej sprawności modelu. Formułując taką tezę kładziemy jednocześnie akcent na konieczność warunku, nie twierdząc jednocześnie bynajmniej, że jest to także warunek dostateczny.

Dobry model powinien nie tylko dobrze opisywać przeszłość, ale powinien także zawierać sprawne zmienne decyzyjne, na podstawie których można z powodzeniem wywoływać pożądane zmiany odpowiednich zmiennych celu. Prowadzi to z kolei do wniosku, że powinna istnieć metoda umożliwiająca pomiar przyszłego wpływu na zmienną celu pewnych grup zmiennych występujących w modelu. W szczególności, jak się wydaje, ważne jest móc ocenić, jaki — na odcinku czasu od t_2 do T — będzie wpływ zmiennych decyzyjnych, zmiennych czysto egzogenicznych oraz czynników przypadkowych[29]. Zaproponujemy w związku z tym obecnie ciąg prostych mierników dających odpowiedź na postawione pytanie w odniesieniu do ustalonego i oszacowanego modelu.

Niech $\partial Y_j/\partial x_l$ oznacza dla t=1, 2, ..., n_j pochodną j-tej zmiennej celu obliczoną na podstawie równania tej zmiennej[30] względem zmiennej objaśniającej x_l i utwórzmy 3 zbiory wartości indeksów l, które oznaczymy odpowiednio przez I, I_2, I_3.

[28] To znaczy predykcji tej zmiennej, która jest wyjaśniona przez dane równanie modelu.

[29] Dodać tu nawiasem należy, że także przy opisie zgodności modelu z próbą wysoce wskazane jest badać, w jakiej mierze poszczególne bloki zmiennych objaśniających przyczyniają się do opisu prawidłowości zmian zmiennej wyjaśnianej przez model. Przydatne są to tego celu np. mierniki zaproponowane przez T. Marszałkowicza (por. T. Marszałkowicz, *Uogólniona postać współczynnika determinacji,* Przegląd Statystyczny 1972).

[30] To znaczy pochodne zmiennej Y- są liczone na podstawie j-tego równania modelu.

Zbiór I_1 będzie zbiorem indeksów zmiennych objaśniających o charakterze decyzyjnym, I_2 będzie zbiorem indeksów zmiennych objaśniających o charakterze czysto egzogenicznym i wreszcie I_3 będzie zbiorem indeksów opóźnionych zmiennych endogenicznych[31]. Niech dalej Δx_l oznacza przyrost zmiennej X_l na odcinku czasu $(t_2, T]$. O przyrostach tych zakładamy, że gdy $l \in I_1$, to są one równe założonym (wynikającym z wyboru wariantu działania) zmianom zmiennych decyzyjnych; gdy $l \in I_2$, to wynikają te przyrosty z prognoz kształtowania się zmiennych czysto egzogenicznych, a jeśli $l \in I_3$, to przyrosty są określone przez poprzednie kroki predykcji dyskryminacyjnej.

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenia

$$\lambda_{ij} = \frac{\sum\limits_{l \in I_i} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right|}{\sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{l \in I_i} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right|} \cdot 100 \tag{11}$$

oraz

$$\Lambda_{ij} = \frac{\sum\limits_{l \in I_i} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right|}{\sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{l \in I_i} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right| + \sigma_{jT}} \cdot 100, \tag{12}$$

a także

$$\Lambda_{ej} = \frac{\sigma_{jT}}{\sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{l \in I_i} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right| + \sigma_{jT}} 100. \tag{13}$$

We wzorach (12) i (13) symbol σ_{jT} oznacza odchylenie standardowe składnika losowego j-tego równania modelu w okresie T.

Łatwo jest zauważyć, że mierniki λ_{ij} dla $i=1,2,3$ mierzą procentowy udział zmian wywołanych przez wektor x_i w łącznej zmianie zmiennej Y_j wywołanej przez uwzględnione w modelu zmienne objaśniające. Ponieważ jest

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_{ij} = 100, \tag{14}$$

przeto wystarczy obliczyć dwa takie mierniki, a trzeci otrzymuje się automatycznie przez odjęcie sumy od 100. Jeżeli dominuje λ_{ij}, to oznacza, że w rozpatrywanym przyszłym odcinku czasu decydującą rolę odgrywają zmienne decyzyjne. Jeżeli największą wartość ma λ_{2j}, to uznać trzeba, że zasadnicze znaczenie mają czynniki czysto egzogeniczne[32] i wreszcie gdy λ_{3j} jest największe, to uznać trzeba, że o zmianach zmiennej Y_j decyduje w głównej mierze mechanizm jej dynamicznych powiązań własnych i powiązań z innymi zmiennymi celu.

[31] Wtedy jednak model taki jest mało przydatny dla celów sterowania.

[32] Zauważmy, że w modelu nie występują opóźnione zmienne endogeniczne, a więc tym samym nie pojawia się wektor x_3.

Bardzo zbliżoną interpretację mają mierniki Λ_{ij} oraz Λ_{ej}, a jedyną rzeczą, która je różni od wielkości λ_{ij}, jest to, że uwzględnia się teraz rząd wahań losowych reprezentowanych tu przez σ_{jT}. Widać też natychmiast, że zachodzi związek

$$\sum_{i=1}^{3} \Lambda_{ij} + \Lambda_{ej} = 100. \tag{15}$$

Mierniki λ_{ij} określone wzorem (11) nazywać będziemy deterministycznymi miernikami relatywnego wpływu zmiennych objaśniających modelu. Mierniki Λ_{ij} oraz Λ_{ej} nazywać natomiast odpowiednio będziemy pełnymi miernikami relatywnego wpływu zmiennych.

Z porównania wzorów (11) i (12) wynika bezpośrednio, że zawsze jest

$$\Lambda_{ij} < \lambda_{ij},$$

a więc mierniki deterministyczne są zawsze większe od pełnych mierników relatywnego wpływu określonego typu zmiennych objaśniających.

Rozważania ogólne o miernikach λ_{ij}, Λ_{ij} oraz Λ_{ej} uzupełnimy prostym przykładem. Załóżmy mianowicie, że dany jest model

$$Y = 0{,}6X_1 - 0{,}4X_2 + 4{,}0 + \xi,$$

w którym X_1 jest zmienną decyzyjną a X_2 zmienną czysto egzogeniczną i wiadomo że σ jest stałe w czasie i równe 4. Zakłada się na odcinku (t_1, T) przyrost zmiennej X_1 równy 5, a prognozy dają podstawy sądzić, że na tymże odcinku czasu będzie $\Delta x_2 = 3$. Ponieważ w modelu liniowym poszczególne pochodne są równe współczynnikom przy odpowiednich zmiennych, obliczenie mierników relatywnego wpływu jest szczególnie proste. Na przykład mamy:

$$\lambda_{11} = \frac{0{,}6 \cdot 5}{0{,}6 \cdot 5 + 0{,}4 \cdot 3} \cdot 100 = 71{,}4\%,$$

a więc λ_{21}=100—71,4=28,6%. Czytelnik zechce sprawdzić, że jest $\Lambda_{11}=36{,}6\%$, $\Lambda_{21}=14{,}6\%$ oraz $\Lambda_{e1}=48{,}8\%$. Miernik λ_{11} wskazuje wprawdzie, że zmienna decyzyjna odgrywa w zamierzonej zmianie poziomu Y znacznie większą rolę niż zmienna czysto egzogeniczna, ale jednocześnie wysoka i bliska 50% wartość Λ_{ei} informuje, że wahania losowe mogą być — przeciętnie rzecz biorąc — tego samego rzędu, co i wpływ obu zmiennych objaśniających. Być może, byłoby więc celowe poprawić model, w celu obniżenia rzędu jego zmienności przypadkowej.

CHOICE OF ECONOMETRIC MODEL FOR THE DISCRIMINATIVE PREDICTION

Summary

The author occupies himself in the article with conditions that should be fulfilled by an econometric model that is supposed to serve a purpose of the discriminative prediction. After brief remarks on the subject of discrimination prediction (para 1) six fundamental conditions are

discussed in the next part that should be fulfilled by a good model. In turn, Section 3 is devoted to discussion of the notions of efficiency and reliability of decisive variables. Efficiency is understood as intensity of stochastis connection of these variables with goal variables, and reliability of decisive variables — as probability of actual reaching the desired values in the predicted time by them. Section 4 is devoted to considerations on economic effectiveness of decisive variables changes of which are combined with cost of action and with reliability. Section 5 concerns elasticity of decisive variables (understood as a degree of ability to show significant changes values from time period to time period). Then, in the sixth part of the article proposals are presented of some aggregate measures enabling the analysis of the extent in which changes of goals variables, designed for the future, result from changes in decisive variables level, purely exogeneous variables, delayed endogeneous variables and from random factors.