Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki

mgr Lidia Typańska

Krata rozszerzeń logiki relewantnej **E**

Rozprawa doktorska z nauk matematycznych w zakresie matematyki
napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Kazimierza Świrydowicza

Poznań 2018

Spis treści

Wstęp

Praca niniejsza poświęcona jest logice relewantnej **E**, która po raz pierwszy została przedstawiona w roku 1958 przez Alana Rosa Andersona oraz Nuela D. Belnapa na konferencji *Twenty-Third Annual Meeting of the Association for Symbolic Logic.*

W przeciwieństwie do mocniejszych systemów – logiki **R** i logiki **RM** – logika **E** jest raczej słabo zbadana. Źródłem jest być może fakt, że nie jest algebraizowalna w sensie Bloka-Pigozziego. W szczególności prawie nic nie wiadomo o kracie rozszerzeń tej logiki, zwłaszcza o rozszerzeniach pre-maksymanych, tzn. takich, które znajdują się bezpośrednio pod logiką klasycznaą.

Celem poniższej pracy jest opis struktury kraty rozszerzeń logiki relewantnej **E**, dokładniej – opis górnej części (koatomów) tej kraty. Stosowane są tu metody algebraiczne: zamiast kraty rozszerzeń logiki **E** badamy izomorficzną z nią kratę podrozmaitości rozmaitości $V_{\mathbf{E}}$, generującej logikę **E**.

W pierwszym rozdziale rozprawy skupiłam się na intuicjach, początkach i podstawowych faktach dotyczących syntaktyki logiki **E**. Obok pierwszej aksjomatyzacji przedstawiłam inne, równoważne aksjomatyzacje logiki relewantnej **E**, między innymi aksjomatyzacje zaproponowane przez L. Maksimową i R. Meyera. Dla porównania przedstawiłam krótką charakterystykę innych logik relewantnych – **R** oraz **RM**. Osobny podrozdział poświęcony został metodzie dowodzenia twierdzeń dla logik relewantnych – metodzie Fitcha.

Kolejna część pracy skupia się na semantyce algebraicznej i matrycowej logiki **E**. Zdefiniowałam pojęcie **E**-algebry i podałam dowód twierdzenia o pełności względem **E**-algebr. Zdefiniowałam pojecie **E**-matrycy oraz opisałam rolę zbioru elementów wyróżnionych, w szczególności jego funkcję w definiowaniu relacji kongruencji. Rozdział ten kończą ważne dla zrozumienia **E**-algebr przykłady i kontrprzykłady.

Badania górnej części kraty rozszerzeń logiki **E** zaczęłam od poszukiwania skończonych prostych **E**-algebr. Okazało się, że jest ich nieskończenie wiele. Potem spytałam o nieskończone proste **E**-algebry: tych, jak się okazuje, jest nieprzeliczalnie wiele.

Tak więc rozdział trzeci prezentuje pierwszy wynik rozprawy: *Istnieją dwa przeliczalne nieskończone ciągi pre-maksymalnych rozszerzeń logiki* **E**, *generowane przez algebry skończone.* Twierdzenie to mówi, że istnieje nieskończenie wiele rozszerzeń logiki **E** znajdujących się bezpośrednio pod logiką klasyczną, generowanych przez skończone algebry.

Natomiast ostatnia część pracy prezentuje drugi podstawowy wynik rozprawy: *Logika* **E** *ma nieprzeliczalnie wiele rozszerzeń znajdujących się bezpośrednio pod logiką klasyczną, generowanych przez algebry nieskończone.*

Rozdział 1

Syntaktyka

1.1 Historia logiki E

Po raz pierwszy system **E** pojawia się w roku 1958. Przedstawiony został przez Alana Rossa Andersona oraz Nuela D. Belnapa na *Twenty-Third Annual Meeting of the Association for Symbolic Logic*. Na konferencji tej wygłosili oni referat *A modification of Ackermann's "rigorous implication"*.

Zaczniemy więc od systemu Wilhelma Ackermanna: założeń i aksjomatyzacji.

Po zaksjomatyzowaniu dwuwartościowej logiki klasycznej (G. Frege, B. Russell, J. Łukasiewicz i inni) okazało się, że implikacja, występująca w logice klasycznej nie odtwarza znaczenia okresu warunkowgo „jeśli . . . , to . . . ” występującego w języku potocznym, tzn. że logika klasyczna nie jest formalnym ujęciem pojęcia wynikania. Niektóre bowiem podstawienia w tautologiach (twierdzeniach) logiki klasycznej są wyraźnie nieintuicyjne, gdy implikację traktować jako formalizację okresu warunkowego. Wynikanie bowiem wymaga istnienia jakiegoś związku między racją a następstwem.

Pierwszą powszechnie znaną próbą bardziej precyzyjnego ujęcia wynikania w ramach logiki formalnej była próba C.I. Lewisa – systemy implikacji ścisłej (*strict implication*)[1].

Niektórzy logicy uznali ją jednak za niezadawalającą. Za następną ważną próbę ujęcia wynikania w logice formalnej należy uznać system „mocnej implikacji” (*strenge Implikation*)[2].

W. Ackermann opisał, jak twierdził, węższe niż u Lewisa ujęcie implikacji, które miało być lepszym przybliżeniem pojęcia wynikania. Odrzucił niektóre z twierdzeń systemów Lewisa, uznając je za nieintuicyjne. Intuicje W. Ackermanna były następujące. Implikacja $\phi \to \psi$ jest akceptowalna, gdy między ϕ i ψ istnieje „logiczny związek”; treść ψ jest częścią treści ϕ, albo nieco podobnie[3]. W każdym razie, powiada Ackermann, prawdziwość czy fałszywość ϕ i ψ nie jest tu istotna.

W szczególności na przykład odrzucał formułę $\phi \to (\psi \to \phi)$, ponieważ pozwala ona wyprowadzić z ϕ formułę $\psi \to \phi$, a przecież prawdziwość ϕ nie musi mieć wpływu na to, czy istnieje logiczny związek pomiędzy ψ oraz ϕ. Z podobnych powodów, zdaniem

[1] por. C.I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley: University of California Press, 1918: Lewis, C.I., Langford, C.H., *Symbolic Logic*, New York 1932.

[2] por. W. Ackermann, *Begründung einer strengen Implikation*, JSL vol. 21, No 2, 1965, s. 113-128.

[3] W. Ackermann, op. cit., s. 113.

Ackermanna, należy odrzucić np. formuły $\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$, $\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$, czy $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$.

Podobny zarzut dotyczy formuły $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$ (jest to twierdzenie systemów implikacji ścisłej), bo prawdziwość formuły $\psi \rightarrow \psi$ przecież nie zależy od ϕ. Implikacja ta powinna być odrzucona także z tego powodu, że głosi ona, iż istnieje taka formuła, która implikuje (z której wynikają) wszystkie formuły, a to nie jest intuicyjne. Podobnie nieintuicyjne jest prawo Dunsa Szkota – formuła $(\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$, ponieważ głosi, iż istnieje formuła, implikująca wszystkie formuły[4].

Ostatecznie, W. Ackermann zaproponował system Π', ujmujący opisane tu intuicje. Zaczął od przedstawienia go w postaci systemu Gentzena, ale zademonstrował także postać hilbertowską, i ona będzie przedmiotem naszego zainteresowania.

System Π' opierał się na następujących aksjomatach:

(1) $\phi \rightarrow \phi$,
(2) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$,
(3) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \phi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$,
(4) $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$,
(5) $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$,
(6) $\phi \wedge \psi \rightarrow \psi$,
(7) $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi \wedge \chi)$,
(8) $\phi \rightarrow \phi \vee \psi$,
(9) $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$,
(10) $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \chi)$,
(11) $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee \chi)$,
(12) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$,
(13) $\phi \wedge \neg\psi \rightarrow (\neg(\phi \rightarrow \psi))$,
(14) $\phi \rightarrow \neg\neg\phi$,
(15) $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$

oraz był zamknięty na reguły

(α) $\phi \rightarrow \psi, \phi/\psi$,
(β) $\phi, \psi/\phi \wedge \psi$,
(γ) $\phi, \neg\phi \vee \psi/\psi$,
(δ) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi/\phi \rightarrow \chi$.

Ponieważ W. Ackermann inspirował się pracami C.I. Lewisa, postanowił wprowadzić pojęcie konieczności, przez dodanie dodatkowej stałej f; nie wiązał tej stałej z negacją. Ostatecznie definicja konieczności przyjęła postać $\Box\phi = \neg\phi \rightarrow \phi$ a powyższy system został uzupełniony przez aksjomaty

(16) $(\phi \rightarrow f) \rightarrow \neg\phi$,
(17) $\phi \wedge \neg\phi \rightarrow f$

oraz regułę

[4] W. Ackermann, op. cit., s. 113.

(ϵ)

$$\frac{\phi \to \psi,\ \ (\phi \to \psi) \wedge \chi \to f}{\chi \to f}.$$

Okazało się jednak, że można się tu obyć bez pojęcia konieczności.

A.R. Anderson i N.D. Belnap[5] pokazali, że reguły (δ) oraz (γ), w przeciwieństwie do reguł (α) i (β), nie mają swoich odpowiedników w systemie Π'. Pokazali również, że regułę (γ) można zastąpić przez prawo Peirce'a

$(1')$. $(((\phi \to \phi) \wedge (\psi \to \psi)) \to \chi) \to \chi$

a reguła (γ) daje się udowodnić jako reguła pochodna.

Ostatecznie pojawiła się logika oparta na aksjomatach $(1'), (2)-(15)$ oraz regułach (α) oraz (β). Logikę tę A.R. Anderson i N.D. Belnap nazwali logiką **E** (od słowa *entailment*).

Efektem pracy W. Ackermanna, potem A.R. Andersona i N.D. Belnapa, było opracowanie stosunkowo prostego systemu, który był próbą formalizacji pojęcia wynikania, różną od logiki klasycznej i ujmującą intuicję *następstwo zależy od racji.*

Ostatecznie intuicja W. Ackermanna *następstwo zależy od racji* uzyskała jasne sformułowanie jako *zasada relewancji.* Implikacjami formalizującymi pojęcie wynikania są implikacje, w których w poprzedniku i następniku pojawia się ta sama zmienna. Można udowodnić, że logika **E** ma własność relewancji. Wystarczy zauważyć, że modelem dla logiki **E** jest w szczególności matryca Belnapa.

Dodajmy, że w języku angielskim o zależności pomiędzy ϕ i ψ w formule $\phi \to \psi$ mówi się, że ϕ jest *relevant* dla ψ. Stąd też nazwa *relevance logic,* do których zalicza się między innymi logikę **E** czy **R.**

1.2 Aksjomatyzacje logiki E

Istnieje wiele alternatywnych akjomatyzacji logiki **E**. Jako bazową przyjmiemy aksjomatyzację zaproponowaną przez A.R. Andersona i N.D. Belnapa.

Niech FOR będzie zbiorem wszystkich formuł logiki $\boldsymbol{E}$ zbudowanych ze zmiennych zdaniownych $p, q, r, s, t, \ldots$ połączonych spójnikami $\neg$, $\wedge$, $\vee$ oraz $\to$. Logika $\boldsymbol{E}$ z relewantną implikacją A.R. Andersona i N.D. Belnapa jest definiowana jako podzbiór zbioru FOR formuł wyprowadzalnych z poniższych aksjomatów :

[5]por. A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,*Entailment. The Logic of relevance and necessity,* Princeton University Press, vol. I (1975).

$E1.\ \ \phi \to \phi,$
$E2.\ \ (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)),$
$E3.\ \ ((\phi \to \phi) \to \psi) \to \psi,$
$E4.\ \ (\phi \to (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi),$
$E5.\ \ \phi \wedge \psi \to \phi,$
$E6.\ \ \phi \wedge \psi \to \psi,$
$E7.\ \ (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \wedge \chi),$
$E8.\ \ \phi \to \phi \vee \psi,$
$E9.\ \ \psi \to \phi \vee \psi,$
$E10.\ \ (\phi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\phi \vee \chi \to \psi),$
$E11.\ \ (\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \vee \chi),$
$E12.\ \ (\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi),$
$E13.\ \ \neg\neg\phi \to \phi,$

za pomocą reguł

(**MP**) *Modus Ponens* $\frac{\phi\to\psi,\phi}{\psi}$;

(**AD**) *reguła koniunkcji* $\frac{\phi,\psi}{\phi\wedge\psi}$.

Pojęcie dowodu formalnego pomijamy jako oczywiste; napis $\vdash_{\mathbf{E}} \phi$ będzie oznaczał, że formuła ϕ jest tezą rachunku **E**, tzn. ϕ ma dowód formalny w oparciu o aksjomaty rachunku **E**.

Robert K. Meyer logikę **E** zdefiniował podając następujące aksjomaty:

$E1.\ \ \phi \to \phi,$
$E2.\ \ (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)),$
$E3.\ \ (\phi \to (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi),$
$E4.\ \ ((\phi_1 \to \phi_2) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to \chi)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to ((\phi_1 \to \phi_2) \to \chi)),$
$E5.\ \ \phi \wedge \psi \to \phi,$
$E6.\ \ \phi \wedge \psi \to \psi,$
$E7.\ \ (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \wedge \chi),$
$E8.\ \ \phi \to \phi \vee \psi,$
$E9.\ \ \psi \to \phi \vee \psi,$
$E10.\ \ (\phi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\phi \vee \chi \to \psi),$
$E11.\ \ (\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \vee \chi),$
$E12.\ \ \neg\neg\phi \to \phi,$
$E13.\ \ (\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi),$
$E14.\ \ (\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi$

oraz reguły MP i AD. Nowym aksjomatem jest $E4$ - komutacja ograniczona do formuł w postaci implikacji.

W **E**-algebrze zdefiniowanej przez R.K. Meyera w pracy **E** *and* **S4** [6] spełnione są

[6] por. R.K. Meyer, **E** *and* **S4**, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XI, 2 (1970), pp.181-199.

wszystkie aksjomaty $E1.$ – $E14.$ oraz reguły MP i AD. Zatem **E** jest niesprzeczna.

Logikę relewantną **E** badała także L. Maksimowa, która poświęciła jej sporo prac.[7] L. Maksimowa użyła w aksjomatyzacji pojęcia konieczności definiowanego następująco: $\Box\phi =_{df} (\phi \to \phi) \to \phi$. Dla logiki **E** przyjęła następujące aksjomaty i reguły:

$E1.$ $((\phi \to \phi) \to \psi) \to \psi$,
$E2.$ $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$,
$E3.$ $(\phi \to (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi)$,
$E4.$ $\phi \wedge \psi \to \phi$,
$E5.$ $\phi \wedge \psi \to \psi$,
$E6.$ $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \wedge \chi)$,
$E7.$ $\Box\phi \wedge \Box\psi \to \Box(\phi \wedge \psi)$,
$E8.$ $\phi \to \phi \vee \psi$,
$E9.$ $\psi \to \phi \vee \psi$,
$E10.$ $(\phi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\phi \vee \chi \to \psi)$,
$E11.$ $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \vee \chi)$,
$E12.$ $(\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi$,
$E13.$ $(\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)$,
$E14.$ $\neg\neg\phi \to \phi$,

ER1. *(Modus Ponens)* $\frac{\phi \to \psi, \phi}{\psi}$;

ER2. *(regułę koniunkcji)* $\frac{\phi, \psi}{\phi \wedge \psi}$.

Wszystkie opisane wyżej systemy były formułowane za pomocą schematów aksjomatów; nie występuje w nich reguła podstawiania. Dla każdego z tych systemów istnieje oczywiście wersja, w której istnieje skończenie wiele aksjomatów, która jest zamknięta na regułę podstawiania.

Poniżej dowodzić będziemy metodą Fitcha formuł zbudowanych ze zmiennych, tzn. dla „konkretnych" zmiennych, a nie dla schematów.

1.3 Inne logiki relewantne – R i RM

Praca niniejsza poświęcona jest logice **E**. Koniecznie trzeba jednak wspomnieć o innych ważnych logikach relewantnych.

Bardzo dobrze zbadana została logika relewantna **R** *(relevance logic)*, która jest rozszerzeniem logiki **E** o aksjomat

$$(\phi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\phi \to \chi)).$$

[7] Lista tych prac znajduje się w bibliografii artykułu *Larisa Maksimova's early contributions to relevance logic* por. K.Bimbó, J.M. Dunn *Larisa Maksimova's early contributions to relevance logic* in S.Odintsov(ed.)*Larisa Maksimowsa on Implication, Interpolation, and Definability*, Springer, 2018, pp.30-60

Jeśli natomiast logikę **R** rozszerzymy o aksjomat

$$\phi \to (\phi \to \phi),$$

to otrzymamy dobrze znaną logikę relewantną **RM** *(***R***-mingle).*

Pomiędzy wspomnianymi logikami zachodzą następujące inkluzje: $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{RM}$.

Bardzo dokładnie została zbadana logika **RM** (aczkolwiek ściśle biorąc nie jest ona relewantna); szereg wyników osiągniętą w badaniach nad logiką **R**. Najmniej jednak wiadomo o logice **E**.

Większość matematycznie istotnych wyników dotyczących logik relewantnych, to wyniki związane z kratą rozszerzeń.

W tabeli poniżej zestawione zostały podstawowe własności logik relewantnych

	RM	**R**	**E**
zasada relewancji	nie spełnia	spełnia	spełnia
strukturalna pełność	tak	nie	nie
algebraizowalność	tak	tak	nie

W. Dziobiak[8] pokazał, że między **R** a **RM** jest $2^{\aleph_0}$ logik. Logika **R** nie jest strukturalnie pełna[9], a jej rozszerzenia (z wyjątkiem logiki klasycznej) też nie są strukturalnie pełne[10]. W.J. Blok i D. Pigozzi udowodnili, że logika **R** jest algebraizowalna [11], tzn. kraty kongruencji tych logik są izomorficzne z kratami filtrów dedukcyjnych. K. Świrydowicz udowodnił, że logikę **R** można rozszerzyć tylko do dwóch systemów, które spełniają zasadę relewancji[12]. Ponadto, istnieją tylko trzy pre-maksymalne rozszerzenia logiki **R**, a A. Urquhart pokazał, że **R** nie jest rozstrzygalna[13].

Znacznie mniej wiadomo o logice **E**. Udało się ustalić, że nie jest algebraizowalna, nie jest strukturalnie pełna. Prawie nic, jak dotąd, nie wiadomo o strukturze kraty rozszerzeń logiki **E**; wiadome jest tylko, że największym jej rozszerzeniem jest logika klasyczna **CL**.

1.4 Metoda Fitcha

Gerhard Gentzen podał system dedukcji naturalnej dla logiki klasycznej, który jego zdaniem dobrze odwzorowuje strukturę rozumowań matematyków. System ten miał reguły

[8] por. W. Dziobiak, *There are* $2^{\aleph_0}$ *Logics with the Relevance Principle Between* **R** *and* **RM***,* Studia Logica, vol.XLII (1983), pp. 49-61.

[9] por. J.M. Dunn, R.K. Meyer, $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ *and* γ*,* Journal of Symbolic Logic, vol. 34,3 (1969), pp. 460-474.

[10] por. J.G. Raftery, K. Swirydowicz, *Structural Completeness in Relevance Logics,* Studia Logica, vol.104, 3 (2016), pp. 381-387.

[11] por. W.J. Blok, D. Pigozzi, *Alebrbaizable logics,* Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 396, American Mathematical Society, Providence (1989).
J.M. Font, G.B. Rodriguez, *Note on algebraic models for relevance logic,* Zeitschrift f**ü**r Matematische Logik und Grundlagen der Mathematic, vol. 36, 6 (1990), pp. 535–540.

[12] por. K. Swirydowicz, *There exists exactly two maximal strictly relevant extensions of the relevant logic* **R***,* The Journal of Symbolic Logic, vol.64, 3 (1999), pp. 1125-1154.

[13] por. A. Urquhart, *The Undecidability of Entailment and Relevant Implication,* Journal of Symbolic Logic, vol. 49, 4 (1984), pp. 1059-1073.

dotyczące spójników $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$; dla każdego spójnika istnieją dwie reguły: wprowadzania spójnika i eliminacji spójnika. Dla rachunku **R** i dla rachunku **E** dedukcję naturalną opracował F. Fitch, A.R. Anderson i N.D. Belnap w książce *Entailment* [14]. Wzorowali się oni na notacji Frederica Fitcha do objaśnienia intuicji stojący u podstaw logiki relewantnej. Ostatecznie system Fitcha został poprawnie opisany przez Marka Tokarza[15].

Każdy z dowodów w notacji F. Fitcha ma następującą postać

$$\begin{array}{r|l}
1. & \phi_{(1)} \\
2. & \underline{\psi_{(1)}} \\
\vdots & \vdots \\
i & \chi \\
\vdots & \quad \vdots
\end{array}$$

gdzie ϕ, ψ to formuły, a indeks (liczba, zbiór liczb) wskazują na miejsce w dowodzie.

Reguły konstrukcji dowodu:

(*hyp.*) Pierwszy krok w dowodzie jest nazywany *hipotezą (hyp.).* Każdy dowód ma tylko jedną hipotezę, ale każdy dowód może mieć dowolną liczbę poddowodów, a każdy poddowód może mieć poddowody itd. Każdą nową hipotezę (w dowodzie lub poddowodzie) oznaczamy kolejnymi liczbami naturalnymi $k (k \in \mathbb{N})$.

(*rep.*) Dowolną formułę w dowodzie można powtórzyć w dalszej części dowodu. Regułę repetycji oznacza się skrótem *rep.*.

(*reit.*) W poddowodzie można także powtórzyć formułę, która wystąpiła wcześniej. Krok ten nosi nazwę reiteracji i można go zastosować tylko wtedy, gdy formuła ma postać implikacji.

Poniższy przykład najlepiej zilustruje powyższe uwagi do metody Fitcha

$$\begin{array}{r|l|l c}
1. & \phi_{(1)} & & hyp \\
2. & \chi_{(1)} & & hyp \\
3. & \underline{\phi_{(1)}} & & 1\ rep. \\
4. & & \underline{\quad \psi_{(2)}} & hyp \\
5. & & \quad \psi_{(2)} & 4\ rep. \\
6. & & \quad \chi_{(1)} & 2\ reit. \\
\vdots & & \quad \vdots & \vdots
\end{array}$$

W poniższych regułach indeksy a, b oznaczają zbiory, k- oznacza liczbę, $(a - k)$ - zbiór a pozbawiony liczby k.

Dalsze reguły kostrukcji dowodu są następujące:

[14]por. A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,*Entailment. The Logic of relevance and necessity,* Princeton University Press, vol. I (1975).
A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,J. Michael Dunn, *Entailment. The Logic of relevance and necessity,* Princeton University Press, vol. II (1922).

[15]M. Tokarz, *Essays in matrix semantics of relevant logics,* The Institute of Philosophy and Sociology of the Polish Academy of Sciences, Warsaw 1980.

$\to I$ Z dowodu formuły $\psi_{(a)}$ przy założeniu $\phi_{(k)}$ otrzymać można formułę $(\phi \to \psi)_{(a-k)}$

$\to E$ Jeśli w dowodzie występuję formuła $\phi_{(a)}$ oraz formuła $(\phi \to \psi)_{(b)}$, to możemy dołączyć do dowodu formułę $\psi_{(a\cup b)}$

$\wedge I$ Jeśli w dowodzie występuje formuła $\phi_{(a)}$ oraz $\psi_{(b)}$, to do dowodu można dopisać formułę $(\phi \wedge \psi)_{(a)}$

$\wedge E$ Jeśli w dowodzie występuje formuła $(\phi \wedge \psi)_{(a)}$, to możemy dołączyć formułę $\phi_{(a)}$ (odpowiednio $\psi_{(a)}$)

$\vee I$ Jeśli w dowodzie występuje formuła $\phi_{(a)}$, to do dowodu możemy dołączyć formułę $(\phi \vee \psi)_{(a)}$ (odpowiednio, mając formułę $\psi_{(a)}$ można do dowodu dołączyć formułę $(\phi \vee \psi)_{(a)}$)

$\vee E$ Jeśli w dowodzie występuje formuła $(\phi \vee \psi)_{(a)}$, $(\phi \to \chi)_{(b)}$ oraz $(\psi \to \chi)_{(b)}$, to można dołączyć do dowodu formułę $\chi_{(a\cup b)}$

dist. Jeśli w dowodzie występuje formuła $((\phi \wedge (\psi \vee \chi)))_{(a)}$, to można dołączyć formułę $((\phi \wedge \psi) \vee \chi)_{(a)}$

$\neg I$ Jeśli z założenia $\phi_{(k)}$ otrzymamy formułę $(\neg\phi)_{(a)}$, to do dowodu można dołączyć formułę $(\neg\phi)_{(a-k)}$

contrap. Z formuły $\psi_{(a)}$ oraz z dwodu formuły $\neg\psi_{(b)}$ przy założeniu $\phi_{(k)}$ można dołączyć do dowodu formułę $(\neg\phi)_{((a\cup b)-k)}$

$\neg\neg E$ Jeśli w dowodzie występuje formuła $(\neg\neg\phi)_{(a)}$, to można dołączyć do dowodu formułę $\phi_{(a)}$

Oznaczmy przez $F(\mathbf{E})$ zbiór formuł, które mają dowody założeniowe w stylu Fitcha.

Twierdzenie 1. [16]
$$\vdash_{\mathbf{E}} \phi \iff \vdash_{\mathbf{F(E)}} \phi.$$

Poniżej będziemy używać metody Fitcha jako metody dowodzenia.

Lemat 2. *Twierdzeniami logiki **E** są formuły:*

$$
\begin{array}{ll}
(t1) & ((p \to q) \wedge p) \to q, \\
(t2) & ((p \to p) \to p) \wedge ((q \to q) \to q) \to ((p \wedge q \to p \wedge q) \to p \wedge q), \\
(t3) & (p_1 \to p_2) \wedge (q_1 \to q_2) \to (p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2), \\
(t4) & (p_1 \to p_2) \wedge (q_1 \to q_2) \to (p_1 \vee p_2 \to q_1 \vee q_2), \\
(t5) & (p \to q) \to ((r \to s) \to ((s \to p) \to (r \to q))), \\
(t6) & (p \to q) \to (\neg q \to \neg p),
\end{array}
$$

[16]Dowód: M. Tokarz, *Essays in matrix semantics of relevant logics,* The Institute of Philosophy and Sociology of the Polish Academy of Sciences, Warsaw 1980.

(t7) $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (q \vee r))$, *gdzie* $\leftrightarrow$ *to koniunkcja dwóch implikacji,*
(t8) $(p \to \neg\neg p)$,
(t9) $(p \to \neg p) \to \neg p$,
(t10) $(\neg p \to p) \to p$,
(t11) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$,
(t12) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q)$.

Dowód. Metoda Fitcha. □

Lemat 3. *Twierdzeniem logiki* **E** *jest formuła*

$$[(p \to p) \wedge (q \to q) \to r] \to r$$

Dowód. Metodą Fitcha dowodzimy, że $[(p \to p) \wedge (q \to q)] \to [((p \to p) \wedge (q \to q) \to r) \to r]$; twierdzenie uzyskujemy odrywając $(p \to p) \wedge (q \to q)$. Twierdzenie to można uogólnić i dowieść twierdzeń postaci: $[(p_1 \to p_1) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p_n) \to q] \to q$.

□

Jak wspomnieliśmy wcześniej w logice **E** nie ma prawa komutacji. Jednak można udowodnić ograniczoną komutację. Poniższe twierdzenie będzie dla nas ważne, ponieważ będziemy go używać w dowodach.

Lemat 4. *Twierdzeniem logiki* **E** *jest formuła*

(t12) $(p \to ((q_1 \to q_2) \to r)) \to ((q_1 \to q_2) \to (p \to r))$, *gdzie p ma postać implikacji.*

Dowód. Dowód tej formuły jest następujący:

1.	$(p \to ((q_1 \to q_2) \to r))_{(1)}$	*hyp*
2.	$(q_1 \to q_2)_{(2)}$	*hyp*
3.	$p_{(3)}$	*hyp*
4.	$(p \to ((q_1 \to q_2) \to r))_{(1)}$	1 *reit*
5.	$((q_1 \to q_2) \to r))_{(1,3)}$	$3, 4 \to E$
6.	$(q_1 \to q_2)_{(2)}$	2 *reit*
7.	$r_{(1,2,3)}$	$5, 6 \to E$
8.	$(p \to r)_{(1,2)}$	$2, 3 \to I$
9.	$((q_1 \to q_2) \to (p \to r))_{(1)}$	$2, 8 \to I$
10.	$(p \to ((q_1 \to q_2) \to r)) \to ((q_1 \to q_2) \to (p \to r))$	$1, 9 \to I$

□

Niech $Sb(X)$ oznacza zbiór $X \subseteq FOR$ zamknięty na regułę podstawiania w FOR. Niech ϕ będzie formułą, a $Var(\phi)$ zbiorem wszystkich zmiennych, występujących w ϕ.

Podstawową wagę mieć będzie dalej twierdzenie:

Twierdzenie 5. $\vdash_{\mathbf{E}} \phi \iff \vdash_{\mathbf{E}} (p_1 \to p_1) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p_n) \to \phi$,
gdzie $Var(\phi) \subseteq \{p_1, \ldots p_n\}$.

Dowód. Indukcja po budowie dowodu formuły ϕ.

Używając metody Fitcha pokazujemy najpierw, że każdy aksjomat logiki **E**, wyrażony jako formuła, a nie schemat, jest równoważny aksjomatowi poprzedzonemu koniunkcją formuł postaci $p_i \rightarrow p_i$; np. aksjomatowi sylogizmu $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ odpowiada formuła $(p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ itd.

Krok indukcyjny. Pokażemy, że omawiana własność jest zachowywana przez reguły dowodowe.

Rozważmy regułę DK. Załóżmy, że w dowodzie zastosowano regułę DK do formuł D_i i D_j uzyskując formułę $D_i \wedge Dj$. Załóżmy, że twierdzeniem **E** są formuły: $t_i \rightarrow D_i$ oraz $t_j \rightarrow D_j$. Pokażemy, że istnieje koniunkcja t_s formuł postaci $(p_i \rightarrow p_i)$, taka że $t_j \rightarrow D_i \wedge Dj$.

Wiadomo, że $\vdash_{\mathbf{E}} (p \rightarrow q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$; wobec tego
$\vdash_{\mathbf{E}} (t_i \rightarrow D_i) \wedge (t_j \rightarrow D_j) \rightarrow ((t_i \wedge t_j) \rightarrow (D_i \wedge D_j))$;
stosujemy więc DK do formuł $t_i \rightarrow D_i$ oraz $t_j \rightarrow D_j$ i odrywamy.

Rozważmy regułę MP. Przyjmijmy, że stosowano ją w dowodzie do formuł D_i i do $D_i \rightarrow D_j$, uzyskując D_j. Jako założenie indukcyjne przyjmijmy, że $\vdash_{\mathbf{E}} t_i \rightarrow D_i$ oraz $\vdash_{\mathbf{E}} t_s \rightarrow (D_i \rightarrow D_j)$, gdzie $Var(D_i) \subseteq Var(t_i)$ oraz $Var(D_i \rightarrow D_j) \subseteq Var(t_s)$.

Wobec tego z $(t12)$ lematu 2 $((t_i \wedge t_s) \rightarrow D_i)$ oraz $((t_i \wedge t_s) \rightarrow (D_i \rightarrow D_j))$.

Zatem $(t11)$ lematu 2:
$\vdash_{\mathbf{E}} ((t_i \wedge t_s) \rightarrow (D_i \rightarrow D_j)) \rightarrow ((t_i \wedge t_s) \rightarrow D_i) \rightarrow ((t_i \wedge t_s) \rightarrow D_k))$.

Odrywając dostajemy $\vdash_{\mathbf{E}} ((t_i \wedge t_s) \rightarrow D_k)$, co kończy dowód. $\square$

Rozdział 2

Semantyka algebraiczna i matrycowa

Istnieje wiele prac poświęconych semantyce logiki relewantnej **E**, między innymi prace L. Maksimowej [1], która rozważała semantykę dla logiki **E** na grupoidach. Badaniem logiki **E** zajmowali się także A.R Anderson i N.D. Belnap [2].

Z punktu widzenia niniejszej pracy wystarczająca jest semantyka maksymalnie bliska językowi logiki **E**. Pierwotnie rozważana była semantyka matrycowa. J.M. Font i G.B. Rdriguez[3] dowiedli, że logika **R** jest definiowana równościowo; pojęcie zbioru wartości wyróżnionych ∇ jest definiowane w każdej **R**-algebrze. Zaczniemy tu od **E**-algebr.

2.1 Pełność logiki E względem E-algebr

Definicja 1. Struktura $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow \neg\rangle$ jest **E**-*algebrą*, gdy spełnia następujące warunki
1. Redukt $\langle \mathbf{A}, \wedge, \vee\rangle$ jest kratą dystrybutywną.
2. W **A** spełnione są nierówności:

---

[1] por. L. Maksimowa, *Struktury s implikacjiej,* Algebra and Logic, vol. 12, 4 (1973), pp. 445-467.
L. Maksimowa, *O Modeljach iscislenija E,* Algebra and Logic, vol. 6, 6 (1967), pp. 5-20.

[2] por. A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,*Entailment. The Logic of relevance and necessity,* Princeton University Press, vol. I (1975).
A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,J. Michael Dunn, *Entailment. The Logic of relevance and necessity,* Princeton University Press, vol. II (1922).

[3] por. J.M. Font, G.B. Rodriguez, *Note on algebraic models for relevance logic,* Zeitschrift f**ü**r Matematische Logik und Grundlagen der Mathematic, vol. 36, 6 (1990), pp. 535–540.

1) $(x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (z \to) \leqslant ((x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)))$,
2) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant ((x \to x) \to y) \to y$,
3) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (x \to (x \to y) \to (x \to y)$,
4) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (x \wedge y \to x)$,
5) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (x \wedge y \to y)$,
6) $(x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (z \to z) \leqslant (x \to y) \wedge (x \to z) \to (x \to y \wedge z)$,
7) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (x \to x \vee y)$,
8) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (y \to x \vee y)$,
9) $(x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (z \to z) \leqslant (x \to z) \wedge (y \to z) \leqslant (x \vee y) \to z)$,
10) $(x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (z \to z) \leqslant (x \wedge (y \vee z) \to (x \wedge y) \vee z)$,
11) $(x \to x) \wedge (y \to y) \leqslant (\neg x \to \neg y) \wedge (y \to x)$,
12. $(x \to x) \leqslant (\neg\neg x \leqslant x)$,
13. $(x \to y) \wedge x \leqslant y$.

Nierówności definiujące **E**-algebry są postaci $\mathbf{t_i} \leqslant t(Ax_i)$, gdzie $t(Ax_i)$ jest termem, odpowiadającym aksjomatowi Ax_i. Taka definicja **E**-algebr ułatwi nam pokazanie twierdzenia o pełności.

Twierdzenie 6. (o pełności logiki E)

$$\vdash_{\mathbf{E}} \phi \iff \mathbf{t_i} \leqslant h(\phi)$$

dla pewnego iloczynu termów $\mathbf{t_i}$ *mających postać* $(x \to x)$*, dowolnej* **E***-algebry* **A** *i dowolnego wartościowania* $h \longrightarrow \mathbf{A}$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Indukcja po długości dowodu formuły ϕ w **E**.

Niech $\vdash_{\mathbf{E}} \phi$. Zatem formuła ϕ posiada dowód $D = \langle D_1, \ldots D_n \rangle$. Każdy człon D_i dowodu D jest twierdzeniem logiki **E**, wobec czego[4] spełnia warunek: $\vdash_{\mathbf{E}} D_i \iff \vdash_{\mathbf{E}} t_i \to D_i$ dla pewnej koniunkcji t_i formuł postaci $(p_i \to p_i)$. Pokażemy przez indukcję po długości dowodu, że każdy człon dowodu spełnia warunek $\mathbf{t_i} \leqslant h(\phi)$, tzn. $\mathbf{t_i} \leqslant h(D_i)$ dla każdego D_i z dowodu D. Ustalmy więc E-algebrę **A** i homomorfizm h.

1. Każdy z aksjomatów Ax_i spełnia warunek $\mathbf{t_i} \leqslant h(Ax_i)$.

a) Rozważmy aksjomat A1, tj. formułę postaci $\phi \to \phi$. Jasne, że $\vdash_{\mathbf{E}} (\phi \to \phi) \to (\phi \to \phi)$. Ale algebra **A** jest kratą, więc $x \leqslant x$, wobec czego $(x \to x) \leqslant (x \to x)$, toteż $\mathbf{t_1} \leqslant t(Ax_1)$.

b) Jeśli D_i jest aksjomatem Ax_i, gdzie $i \geqslant 2$, to z definicji **E**-algebry, $\mathbf{t_j} \leqslant t(Ax_j)$.

2. Jeśli D_i powstaje z formuł wcześniejszych przez zastosowanie reguł, to $\mathbf{t_i} \leqslant h(D_i)$ dla pewnego $\mathbf{t_i}$.

Przypadek 1. Niech D_j powstaje z D_{j_1} i D_{j_2} przez zastosowanie reguły DK.

Ponieważ $\vdash_{\mathbf{E}} D_{j_1}$ oraz $\vdash_{\mathbf{E}} D_{j_2}$, więc $\vdash_{\mathbf{E}} t_{j_1} \to D_{j_1}$ oraz $\vdash_{\mathbf{E}} t_{j_2} \to D_{j_2}$. Z założenia indukcyjnego wiadomo, że $\mathbf{t_{j_1}} \leqslant h(D_{j_1})$ oraz $\mathbf{t_{j_2}} \leqslant h(D_{j_2})$. Ponieważ w kratach mamy zależność: jeśli $x_1 \leqslant y_1$ oraz $x_2 \leqslant y_2$, to $x_1 \wedge x_2 \leqslant y_1 \wedge y_2$, więc wnosimy stąd, że $\mathbf{t_{j_1}} \wedge \mathbf{t_{j_2}} \leqslant h(D_{j_1}) \wedge h(D_{j_2})$, tzn. $\mathbf{t_{j_1}} \wedge \mathbf{t_{j_2}} \leqslant h(D_j)$.

Przypadek 2. Niech D_j powstaje z D_k i $D_k \to D_j$ przez MP.

[4] por. Twierdzenie 4 z poprzedniego rozdziału

Zatem $\vdash_{\mathbf{E}} D_k$ oraz $\vdash_{\mathbf{E}} D_k \to D_j$, Wobec tego $\vdash_{\mathbf{E}} t_k \to D_k$ oraz $\vdash_{\mathbf{E}} t_{kj} \to (D_k \to D_j)$. Z założenia indukcyjnego wnosimy, że $\mathbf{t_k} \leqslant h(D_k)$ oraz $\mathbf{t_{kj}} \leqslant h(D_k) \to h(D_j)$. Rozumując, jak w poprzednim przypadku, wnosimy, że $\mathbf{t_k} \wedge \mathbf{t_{kj}} \leqslant [h(D_k) \wedge h(D_k) \to h(D_j)]$, a następnie z punktu 13 definicji **E**-algebry i z przechodności relacji $\leqslant$ wnioskujemy, że $\mathbf{t_k} \wedge \mathbf{t_{kj}} \leqslant h(D_j)$.

($\Leftarrow$) Konstrukcja algebry Lindenbauma **E** (oznaczmy ją przez $Lind_{\mathbf{E}}$).

Na zbiorze FOR definiujemy algebrę Lindenbauma dla logiki **E**. Na zbiorze FOR definiujemy relację

$$\psi \sim \phi \iff \vdash_{\mathbf{E}} \psi \to \phi \ \wedge \ \vdash_{\mathbf{E}} \phi \to \psi.$$

Relacja ta jest relacją równoważności i wyznacza podział zbioru FOR; zbiór klas abstrakcji względem $\sim$ oznaczmy przez $FOR/_{\sim}$. Na zbiorze $FOR/_{\sim}$ definujemy relację $\leqslant$ równoważnością:

$$(*) \qquad \phi/_{\sim} \leqslant \psi/_{\sim} \iff \ \vdash_{\mathbf{E}} (\phi \to \psi).$$

Relacja ta jest relacją częściowego porządku, a dzięki aksjomatom $E5 - E11$ struktura $\langle FOR/_{\sim}, \sup, \inf\rangle$, tzn. $\langle FOR/_{\sim}, \wedge, \vee\rangle$ jest kratą dystrybutywną.

Wreszcie definiujemy operację $\to$ na klasach abstrakcji następująco:

$$(\phi/_{\sim}) \to (\psi/_{\sim}) =_{df} (\phi \to \psi)/_{\sim}.$$

Definicja tej operacji nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji[5].

Podobnie, operację $\neg$ na klasach abstrakcji zdefiniujemy równością:

$$\neg(\phi/_{\sim}) =_{df} (\neg\phi/_{\sim})$$

Aby pokazać, że algebra $Lind_{\mathbf{E}}$ jest **E**-algebrą w sensie wyżej zdefiniowanym, wystarczy teraz zauważyć, że konstrukcja algebry $Lind_{\mathbf{E}}$ była następująca. Podstawą konstrukcji była relacja $\leqslant$, definiowana, jak pamiętamy, następująco:

$$(*) \qquad \phi/_{\sim} \leqslant \psi/_{\sim} \iff \ \vdash_{\mathbf{E}} (\phi \to \psi).$$

Ponieważ, jak wiemy, $\vdash_{\mathbf{E}} \phi \iff \vdash_{\mathbf{E}} t_i \to \phi$, więc $\vdash_{\mathbf{E}} Ax_i \iff \vdash_{\mathbf{E}} t_i \to Ax_i$. Zatem $\mathbf{t_i} \leqslant (Ax_i)/_{\sim}$, czyli nierówności 1) – 12) są tu spełnione.

Aksjomat 13. jest też spełniony, bo $\vdash_{\mathbf{E}} [(\phi \to \psi) \wedge \phi] \to \psi$ jest równoważny $[(\phi/_{\sim} \to \psi/_{\sim}) \wedge \phi/_{\sim}] \leqslant \psi_{\sim}$ w algebrze Lindenbauma.

Zatem algebra $\langle Lind_{\mathbf{E}}, \wedge, \vee. \to, \neg\rangle$ jest **E**-algebrą.

Niech teraz $\nvdash_{\mathbf{E}} \phi$. Wtedy dla dowolnego zbioru formuł t_i, $\nvdash_{\mathbf{E}} t_i \to \phi$. Wobec tego nie może być prawdą, że $\mathbf{t_i} \leqslant \phi/_{\sim}$, czyli istnieje taka algebra i taki homomorfizm h, że nie jest prawdą, iż $\mathbf{t_i} \leqslant h(\phi)$ dla żadnego $\mathbf{t_i}$. To kończy dowód pełności logiki E. □

Fakt 7. *Zbiór wszyskich* **E**-*algebr tworzy rozmaitość (jest definiowalny równościowo), więc algebra Lindenbauma* $Lind_{\mathbf{E}}$ *jest algebrą wolną w klasie* **E**-*algebr.*

Ponieważ $\vdash_{\mathbf{E}} \phi \to \psi \iff \phi/_{\sim} \leqslant \psi/_{\sim} \iff t_i \leqslant ((\phi/_{\sim}) \to (\psi/_{\sim}))$, więc dla dowolnej klasy abstrakcji x, tzn. elementu algebry wolnej, mamy równoważność:

$$x \leqslant y \iff \mathbf{t_i} \leqslant (x \to y)$$

[5] por. poprzedni rozdział, Lemat 2, ($t5$)

dla pewnego iloczynu termów t_i.

Wobec tego definicję **E**-algebry, podaną w poprzednim paragrafie, można zastąpić przez następującą wygodniejszą definicję.

Definicja 8. Algebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \to, \neg \rangle$ jest E-algebrą, jeśli $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą dystrybutywną, a ponadto w **A** spełnione są następujące równości i nierówności dla wszystkich $x, y, z \in \mathbf{A}$:

$$
\begin{array}{ll}
(e1) & (x \to y) \leqslant ((y \to z) \to (x \to z)), \\
(e2) & ((x \to x) \to y) \leqslant y, \\
(e3) & (x \to (x \to y)) \leqslant (x \to y), \\
(e4) & (x \to y) \wedge (v \to s) \leqslant ((x \wedge v) \to (y \wedge s)), \\
(e5) & (x \to y) \wedge (v \to s) \leqslant ((x \vee v) \to (y \vee s)), \\
(e6) & (x \to \neg y) \leqslant (y \to \neg x), \\
(e7) & x = \neg\neg x, \\
(e8) & (x \to y) \wedge x \leqslant y.
\end{array}
$$

Tą definicją będziemy się dalej posługiwać.

Mamy następujące dalsze wnioski:

Wniosek 9. Każdemu twierdzeniu logiki **E**, mającemu postać implikacji, odpowiada prawdziwa nierówność w algebrze Lindenbauma.

Wniosek 10. $Lind_{\mathbf{E}}$ jest algebrą wolną w klasie **E**-algebr, a homomorfizmy przenoszą prawdziwe równości, więc każdemu twierdzeniu logiki **E**, mającemu postać implikacji, odpowiada prawdziwa nierówność w dowolnej **E**-algebrze.

2.2 Pojęcie E-matrycy logicznej, rola zbioru elementów wyróżnionych

Twierdzenie o pełności uzyskaliśmy względem rozmaitośći **E**-algebr. Oczywiście będzie nam potrzebne pojęcie zbioru wartości wyróżnionych (chociażby do zdefiniowana kongruencji).

Definicja 11. Niech A będzie **E**-algebrą. Zbiór $\nabla_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{A}$ nazwiemy *zbiorem elementów wyróżnionych* algebry **A**, jeśli spełnia warunek:

$$x \in \nabla_{\mathbf{A}} \Longleftrightarrow (x_1 \to x_1) \wedge \ldots \wedge (x_n \to x_n) \leqslant x,$$

dla pewnych $(x_1 \to x_1), \ldots, (x_n \to x_n)$.

Definicja 12. Parę $\langle \mathbf{A}, \nabla_{\mathbf{A}} \rangle$ nazwiemy **E**-*matrycą*, jeśli **A** jest **E**-algebrą, a $\nabla_{\mathbf{A}}$ zbiorem wartości wyróżnionych.

Lemat 13. *Zbiór $\nabla_{\mathbf{A}}$ jest filtrem w algebrze* **A**.

Dowód. Niech $t_i := (x_1 \to x_1) \wedge \ldots \wedge (x_n \to x_n)$.

Załóżmy, że $x \in \nabla_{\mathbf{A}}$ i $y \in \nabla_{\mathbf{A}}$, tzn. istnieją t_i i t_j także, że $t_i \leqslant x$ i $t_j \leqslant y$. Mnożąc stronami obie te nierówności stwierdzamy, że $t_i \wedge t_j \leqslant x \wedge y$. Zatem $x \wedge y \in \nabla_{\mathbf{A}}$.

Niech $x \wedge y \in \nabla_{\mathbf{A}}$. Chcemy pokazać, że $x \in \nabla_{\mathbf{A}}$ oraz $y \in \nabla_{\mathbf{A}}$. Skoro $x \wedge y \in \nabla_{\mathbf{A}}$, więc z definicji 11 $t_i \leqslant x \wedge y$ dla pewnych t_i. Ponadto, $x \wedge y \leqslant x$ oraz $x \wedge y \leqslant y$. Z przechodniości relacji $\leqslant$ mamy $t_i \leqslant x$ i $t_i \leqslant y$. Zatem $x \in \nabla_{\mathbf{A}}$ oraz $y \in \nabla_{\mathbf{A}}$. □

Wniosek 14. $x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad (x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$.

Dowód. Niech $x \leqslant y$. Wobec tego $x \to x \leqslant x \to y$, a to znaczy $(x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$. □

Definicja 15. Niech $\mathbf{A}$ będzie $\mathbf{E}$-algebrą. *Logika* $L(\mathbf{A})$ generowana przez matrycę $\langle \mathbf{A}, \nabla_{\mathbf{A}} \rangle$ jest zbiorem formuł spełniających poniższy warunek:

$$\phi \in L(\mathbf{A}) \iff \forall_{h:FOR \to A} \quad (h(\phi) \in \nabla_{\mathbf{A}}).$$

A w pierwszym paragrafie udowodniliśmy twierdzenie o pełności, nie korzystając z pojęcia matrycy i wartości wyróżnionej.

Konieczne jest tu poczynienie kilku ważnych uwag o pojęciu zbioru wartości wyróżnionych w algebrze dla logiki relewantnej. Tradycyjne ujęcie twierdzenia o pełności ma postać:

$$\vdash_L \phi \iff h(\phi) \in \nabla_{\mathbf{A}}$$

dla każdej L-algebry $\mathbf{A}$ i dowolnego homomorfizmu h.

Wymaga to jakichś założeń o zbiorze $\nabla_{\mathbf{A}}$. Zwykle (L. Maksimowa, W. Dziobiak, J.M. Font i G.B. Rodriguez) przyjmowano, że

$$(x \leqslant y) \iff (x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$$

dla dowolnej L-matrycy $\langle \mathbf{A}, \nabla_A \rangle$; relacja $\leqslant$ to częściowy porządek z kraty algebry $\mathbf{A}$.

Ponieważ np. klasa R-matryc tworzy quasi-rozmaitość, to sukcesem (J.M. Font i G.B. Rodriguez) było wykazanie, że jest ona rozmaitością. Poksazano, że, powyższą równoważność da się wyprowadzić z aksjomatów $\mathbf{R}$-algebry.

Nasze ujęcie wychodzi od pojęcia $\mathbf{E}$-algebry. Pełność, jak widzimy, dało sie udowodnić wzgledem $\mathbf{E}$-algebr; nigdzie w sposób istotny nie ingerowało pojęcie zbioru wartości wyróżnionych, więc pojęcie matrycy i zbiór $\nabla_{\mathbf{A}}$ są tu definiowalne.

Co więcej, okazuje się, że zależność

$$(x \leqslant y) \iff (x \to y) \in \nabla_A$$

co prawda zachodzi dla algebry $Lind_{\mathbf{E}}$, ale dla innych $\mathbf{E}$-algebr wcale nie musi zachodzić.

2.3 Kongruencje a filtry

Lemat 16. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie* $\boldsymbol{E}$*-algebrą,* $\nabla_A = \{x \in A : \exists t_k (t_k \leqslant x)\}$*, gdzie* $t_k = \bigwedge_{1<i<k} (a_i \to a_i)$ *dla dowolnych elementów postaci* $a_i \in \boldsymbol{A}$ *oraz niech* $\nabla_{\mathbf{A}} \subseteq \nabla$*. Wtedy relacja* $\theta(\nabla)$ *:*

$$(x \equiv y)\theta(\nabla) \iff ((x \to y), (y \to x) \in \nabla)$$

jest relacją kongruencji na $\boldsymbol{A}$*.*

Dowód. 1. $\theta(\nabla)$ jest relacją równoważności

(a) zwrotność: $(x \equiv x)\,\theta(\nabla) \iff (x \to x) \in \nabla$.

(b) symetria: $(x \equiv y)\,\theta(\nabla) \iff (x \to y), (y \to x) \in \nabla \iff (y \equiv x)\theta(\nabla)$.

(c) przechodniość: $(x \equiv y)\,\theta\,(\nabla) \wedge (y \equiv z)\theta\,(\nabla) \Rightarrow (x \equiv z)\,\theta(\nabla)$ Załóżmy, że $(x \equiv y)\,\theta\,(\nabla)$ i $(y \equiv z)\theta\,(\nabla)$, czyli $(x \to y), (y \to x) \in \nabla$ oraz $(y \to z), (z \to y) \in \nabla$. Wiemy, że $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \in \nabla$. Zatem z MP mamy $(y \to z) \to (x \to z) \in \nabla$. Po raz kolejny z założenia i z reguły MP mamy $x \to z \in \nabla$ czyli $(x \equiv z)\,\theta(\nabla)$.

2. Relacja $\theta\,(\nabla)$ jest zgodna z działaniami.

(a) $(x \equiv y)\,\theta(\nabla) \Rightarrow (z \to x) \equiv (z \to y)\,\theta(\nabla)$
Załóżmy, że $(x \equiv y)\,\theta(\nabla)$ czyli $x \to y, y \to x \in \nabla$.
Korzystając z $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) \in \nabla$ i MP mamy, że $(z \to x) \to (z \to y) \in \nabla$. Zatem $(z \to x) \equiv (z \to y)\,\theta(\nabla)$.

(b) $(x \equiv y)\,\theta(\nabla) \Rightarrow (x \to z) \equiv (y \to z)\,\theta(\nabla)$
Załóżmy, że $(x \equiv y)\,\theta(\nabla)$ czyli $x \to y, y \to x \in \nabla$. Z sylogizmu $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \in \nabla$ i reguły MP mamy, że $(y \to z) \to (x \to z) \in \nabla$. Zatem $(y \to z) \equiv (x \to z)\,\theta(\nabla)$.

(c) $(x_1 \equiv y_1)\,\theta(\nabla) \wedge (x_2 \equiv y_2)\,\theta(\nabla) \Rightarrow (x_1 \wedge x_2) \equiv (y_1 \wedge y_2)\,\theta(\nabla)$
Załóżmy, że $(x_1 \equiv y_1)\,\theta(\nabla)$ i $(x_2 \equiv y_2)\,\theta(\nabla)$ czyli $x_1 \to y_1 \in \nabla$ oraz $x_2 \to y_2 \in \nabla$. Twierdzeniem logiki E jest formuła $(x_1 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2) \to (x_1 \wedge x_2 \to y_1 \wedge y_2)$ Zatem z założenia i reguły MP mamy $(x_1 \wedge x_2 \to y_1 \wedge y_2) \in \nabla$. Zatem $(x_1 \wedge x_2) \equiv (y_1 \wedge y_2)\,\theta(\nabla)$.

(d) $(x_1 \equiv y_1)\theta(\nabla) \wedge (x_2 \equiv y_2)\theta(\nabla) \Rightarrow (x_1 \vee x_2) \equiv (y_1 \vee y_2)\theta(\nabla)$
Załóżmy, że $(x_1 \equiv y_1)\,\theta(\nabla)$ i $(x_2 \equiv y_2)\,\theta(\nabla)$ czyli $x_1 \to y_1 \in \nabla$ oraz $x_2 \to y_2 \in \nabla$. Twierdzeniem logiki E jest formuła $(x_1 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2) \to (x_1 \vee x_2 \to y_1 \vee y_2)$ Zatem z założenia i reguły MP mamy $(x_1 \vee x_2 \to y_1 \vee y_2) \in \nabla$ Zatem $(x_1 \vee x_2) \equiv (y_1 \vee y_2)\theta(\nabla)$.

□

Wniosek 17. Każdy filtr rozszerzający filtr $\nabla_{\mathbf{A}}$ wyznacza kongruencję.

Lemat 18. *Niech θ będzie relacją kongruencji na $\boldsymbol{E}$-algebrze $\boldsymbol{A}$. Wtedy zbiór $\nabla(\theta) = \{x : \exists y(y \in \nabla_{\mathbf{A}}) \wedge (x \equiv_\theta y)\}$ jest filtrem oraz $\nabla_{\mathbf{A}} \subseteq \nabla(\theta)$.*

Dowód: Oczywisty.[6]

Niech dany będzie filtr $\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{A}}) = \{\nabla : \nabla \text{ oraz } \nabla_{\mathbf{A}} \subseteq \nabla\}$. Jeśli **A** jest **R**-algebrą, wtedy krata $Con(\mathbf{A})$ i $\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{A}})$ są izomorficzne. Ponadto, jeśli **A** jest **E**-algebrą, wtedy $Con(\mathbf{A})$ i $\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{A}})$ nie muszą być izomorficzne[7]. W.J. Blok i D. Pigozzi wykazali to posługując się ogólnymi rozumowaniami dotyczącymi logiki **E**. Można to jednak udowodnić biorąc

[6]por. definicja 2.1

[7]por. W.J.Blok, D.Pigozzi, *Algbebraizable logics,* Memoirs of the American Mathematical Society, 1989.

przykład konkretnej **E**-algebry[8].

Ten brak izomorfizmu nie utrudni jednak dalszych rozważań.

Definicja 19. Jeśli $Con(\mathbf{A})$ zawiera dokładnie dwa elementy, to algebra $\mathbf{A}$ jest *algebrą prostą,*

Na podstawie wniosku 10 i definicji 2.1 **E**-algebry otrzymujemy następujący lemat:

Lemat 20. *W każdej **E**-algebrze prawdziwe są następujące nierówności:*
(1) $x \wedge (x \to y) \leqslant y$,
(2) $(\neg x \to x) \leqslant x$,
(3) $(x \to ((y_1 \to y_2) \to z)) \leqslant ((y_1 \to y_2) \to (x \to z))$.

Dowód. Oczywisty $\square$

Lemat 21. *Ponadto:*
(i) $x \in \nabla \Longrightarrow x \to y \leqslant y$,
(ii) *Niech* $y \to y = a$. *Zatem* $(x \to y) \leqslant a \to (x \to y)$.

Dowód. (i) Niech $x \in \nabla_{\mathbf{A}}$. Zatem $\mathbf{t_i} \leqslant x$. Zauważmy najpierw, że jeśli $x \leqslant y$, to $y \to z \leqslant x \to z$. Wobec tego $x \to y \leqslant \mathbf{t_i} \to y$, ale z lematu 3 poprzedniego rozdziału, $\mathbf{t_i} \to y \leqslant y$. Zatem $x \to y \leqslant y$. $\square$

Lemat 22. *Niech w **A** spełniona będzie nierówność* $((x \to x) \to (y \to z)) \leqslant (y \to ((x \to x) \to z))$. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*
$(*)$ $x \leqslant y \iff (x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$
$(**)$ $(x \to x) \leqslant (y \to z) \iff y \leqslant ((x \to x) \to z)$

Dowód. Niech $\mathbf{A} \models (t \to (y \to z)) \leqslant (y \to (t \to z))$, gdzie $t := \bigwedge_i (x_i \to x_i)$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$.

Wówczas:
$(*)$ $x \leqslant y \iff (x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$
$(**)$ $t \leqslant (y \to z) \iff y \leqslant (t \to z)$

$(*) \Rightarrow (**)$ Niech $x \leqslant y \iff (x \to y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$.
Niech $t \leqslant y \to z$, tzn. $t \to (y \to z) \in \nabla$, ale $t \to (y \to z) \leqslant y \to (t \to z)$.
Więc $y \to (t \to z) \in \nabla$. Z $(*)$ mamy $y \leqslant t \to z$.
Załóżmy, że $y \leqslant t \to z$. Należy pokazać, że $t \leqslant y \to z$.
Niech $y \leqslant t \to z$, tzn. $y \to (t \to z) \in \nabla$, ale $y \to (t \to z) \leqslant t \to (y \to z)$
czyli $t \to (y \to z) \in \nabla$. Zatem $t \leqslant y \to z$.

$(**) \Rightarrow (*)$ Niech $t \leqslant (y \to z) \iff y \leqslant (t \to z)$.
Niech $x \to y \in \nabla$.
Wówczas istnieje t takie, że $t \leqslant x \to y$ czyli $x \leqslant t \to y \leqslant y$,
Zatem $x \leqslant y$.

[8]Por. paragraf następny.

□

Wniosek 23. Jeśli w **A** spełniona jest nierówność

$$(x \to x) \to (y \to z) \leqslant (y \to ((x \to x) \to z)),$$

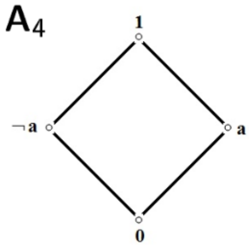
to **A** spełnia

$$(x_1 \to x_2) \to ((y_1 \to y_2) \to z) \leqslant ((y_1 \to y_2) \to ((x_1 \to x_2) \to z)).$$

2.4 Przykłady, kontrprzykłady

Przykład 1. Zależność: $x \leqslant y \iff x \to y \in \nabla_{\mathbf{A}}$ nie musi zachodzić.

Rozważmy następującą **E**-algebrę $\mathbf{A_4}$ wraz z działaniem $\to$ określonym w poniższej tabeli:

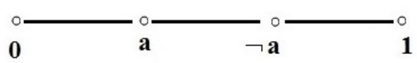


$\to$	0	a	$\neg a$	1
0	1	1	1	1
a	0	a	0	1
$\neg a$	0	a	a	1
1	0	0	0	1

Mamy $(\neg a \to a) \in \nabla$, ale nie jest prawdą, że $\neg a \leqslant a$.

Przykład 2. Kraty $Con(\mathbf{A})$ i $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ nie muszą być izomorficzne. Przykład ten wskazuje, że dwa filtry mogą wyznaczać tę samą kongruencję.

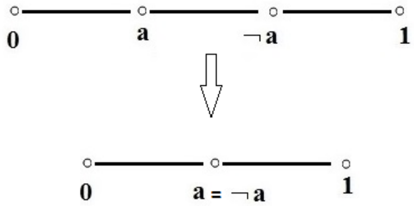
Rozważmy następującą **E**-algebrę, gdzie $\nabla_{\mathbf{A}} = [a)$



Operacja $\to$ dla tej algebry zdefiniowana jest w następujacy sposób:

$\to$	0	a	$\neg a$	1
0	1	1	1	1
a	0	a	a	1
$\neg a$	0	a	a	1
1	0	0	0	1

Zatem

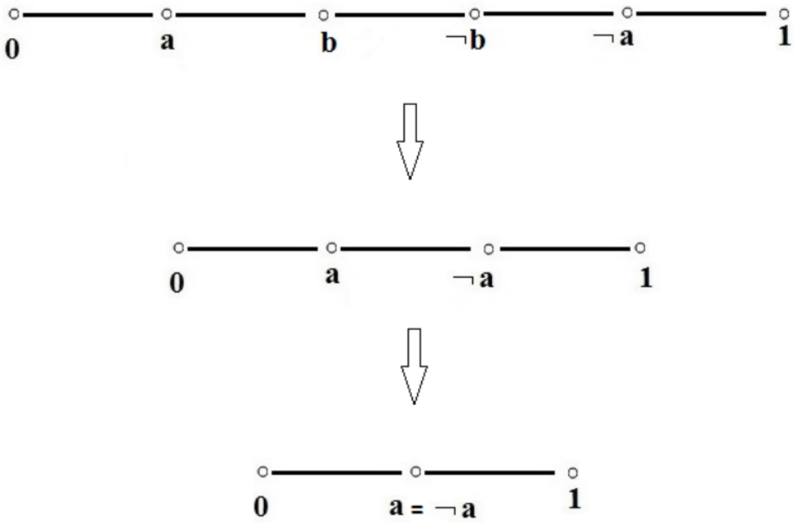


Przykład 3. Inny przykład braku izomorfizmu między $Con(\mathbf{A})$ i $\mathcal{F}(A)$.
Weźmy następujący łańcuch, gdzie $\nabla_{\mathbf{A}} = [a)$

$\to$	0	a	b	$\neg b$	$\neg a$	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	a	a	$\neg b$	$\neg b$	1
b	0	a	a	$\neg b$	$\neg b$	1
$\neg b$	0	0	0	a	a	1
$\neg a$	0	0	0	a	a	1
1	0	0	0	0	0	1

$\to$	0	a	b	$\neg b$	$\neg a$	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	a	a	a	a	1
b	0	a	a	a	a	1
$\neg b$	0	a	a	a	a	1
$\neg a$	0	a	a	a	a	1
1	0	0	0	0	0	1

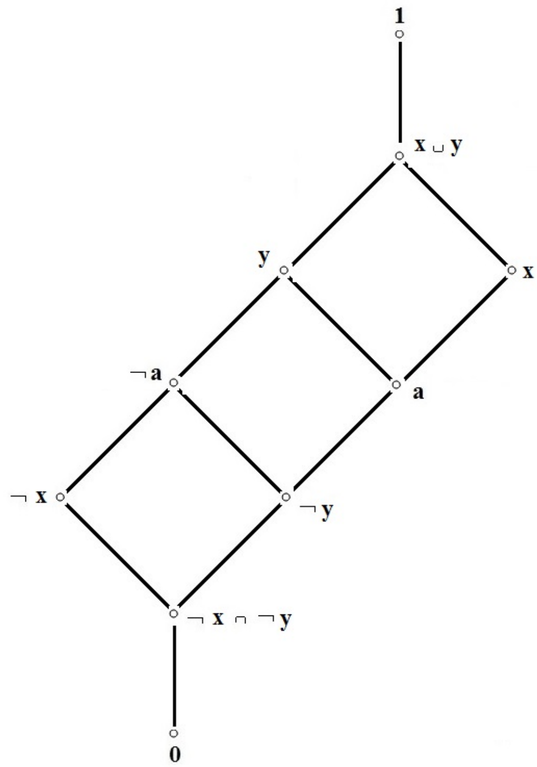
Zatem



Przykład 4. Ostatni przykład jest kontrprzykładem dla dwóch stwierdzeń zachodzących dla logiki $\mathbf{R}$:

1. Jeśli przez $\leqslant_{\nabla_\mathbf{A}}$ oznaczyć relację $x \leqslant_{\nabla_\mathbf{A}} y \Longleftrightarrow (x \to y) \in \nabla_\mathbf{A}$, to relacja $\leqslant_{\nabla_\mathbf{A}}$ nie musi być częściowym porządkiem, ponieważ nie musi być antysymetryczna. Poniżej mamy przykład $\mathbf{E}$-algebry, w której $x \leqslant_{\nabla_\mathbf{A}} y$, $\;y \leqslant_{\nabla_\mathbf{A}} x$, ale $x \neq y$.

2. W logice $\mathbf{R}$, gdy $\mathbf{A}$ jest $\mathbf{R}$-algebrą, to $\mathbf{A}/_{\nabla_\mathbf{A}} \cong \mathbf{A}$. Natomiast ta $\mathbf{E}$-algebra pokazuje, że dla $\mathbf{E}$-algebr $\mathbf{A}/_{\nabla_\mathbf{A}}$ nie jest izomorficzna z $\mathbf{A}$.



Niech $z := \neg x \cap \neg y$

$\to$	0	z	$\neg x$	$\neg a$	y	$\neg z$	x	a	$\neg y$	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
z	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
$\neg x$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
$\neg a$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
y	0	z	z	z	a	a	a	a	z	1
$\neg z$	0	z	z	z	a	a	a	a	z	1
x	0	z	z	z	a	a	a	a	z	1
a	0	z	z	z	a	a	a	a	z	1
$\neg y$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\to$	0	z	$\neg x$	$\neg a$	y	$\neg z$	x	a	$\neg y$	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
z	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
$\neg x$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
$\neg a$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
y	0	0	0	0	a	a	a	a	0	1
$\neg z$	0	0	0	0	a	a	a	a	0	1
x	0	0	0	0	a	a	a	a	0	1
a	0	0	0	0	a	a	a	a	0	1
$\neg y$	0	a	a	a	a	a	a	a	a	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Mamy nawet dwie algebry o wskazanych wyżej własnościach, dla których tabelka działań dla operacji $\to$ jest zdefiniowana jak wyżej.

Rozdział 3

Problem skończonych algebr generujących logiki pre-maksymalne

Jednym z najważniejszych problemów badawczych związanych z daną logiką nieklasyczną jest badanie jej kraty rozszerzeń (rozszerzenia danej logiki zwykle tworzą kratę, w której elementem najmniejszym jest sama logika, infimum dwóch rozszerzeń danej logiki to przekrój; a supremum dwóch rozszerzeń to najmniejsza logika zawierająca wszystkie twierdzenia obu logik).

Na ogół logikę nieklasyczną wyznacza klasa algebr, która jest rozmaitością – klasą zamkniętą na branie obrazów homomorficznych, podalgebr i produktów (HSP), a nadlogiki danej logiki L są wyznaczane przez podrozmaitości danej rozmaitości .

Niech L będzie logiką, a V_L klasą algebr wyznaczającą logikę L. V_L jest rozmaitością.

Związki są tu następujące. Podrozmitości rozmiatości V_L tworzą kratę. Każda z nadlogik logiki L jest wyznaczona przez pewną klasę algebr (mniejszą niż V_L). Krata rozszerzeń danej logiki L okazuje się izomorficzna z kratą podrozmaitości rozmaitości V_L. Izomorfizm ten jest dualny, tzn. największa logika to najmniejsza podrozmaitość z V_L.

Ponieważ przyjęto w literaturze nazywac logikę klasyczną maksymalnym rozszerzeniem logiki **E**, logiki rozszerzające **E**, leżące bezpośrednio pod logiką klasyczną nazywamy *pre-maksymalnymi.*

W rozdziale tym pokażamy konstrukcję dwóch nieskończonych ciągów **E**-algebr, których kraty są łańcuchami.

3.1 Uwagi wstępne

Łańcuchy wszystkich rozważanych niżej **E**-algebr są skończone; mają element najmniejszy (oznaczony przez 0) oraz element największy (oznaczony przez 1). We wszystkich tych algebrach filtr elementów wyróżnionych jest generowany przez atom (będący bezpośrednio nad 0) oznaczony niżej przez a, tzn. $\nabla = [a)$.

Już przy tych założeniach można udowodnić poniższy fakt

Lemat 24. *W dowolnej **E**-algebrze spełnione są następujące równości:*

$$1 \to 1 = 1, \quad 0 \to x = 1, \quad 1 \to 0 = 0, \quad 0 \to 1 = 1.$$

*Ponadto, jeśli **E**-algebra* **A** *jest łańcuchem,* $\nabla_{\mathbf{A}} = [a)$ *i* a *jest atomem, to* $x \to 0 = 0, x \neq 0, x \in \nabla_{\mathbf{A}}$.

Dowód. Równości $1 \to 1 = 1, 1 \to 0 = 0, 0 \to 1 = 1, 0 \to 0 = 1$ są oczywiste.

Dla dowolnego elementu x mamy $0 \leqslant x$. Zatem $0 \to 0 \leqslant 0 \to x$, więc $1 \leqslant 0 \to x$, czyli $0 \to x = 1$.

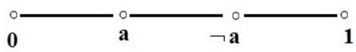
Jeśli $x \in \nabla$, to $x \to 0 \leqslant 0$. Tak więc $x \to 0 = 0$ dla dowolnego elementu $x \in \nabla$. □

Lemat 25. *Algebra* **2** *jest podalgebrą każdej nietrywialnej **E**-algebry.*

3.2 Konstrukcja $\mathrm{A_n}$-algebr

A_0-algebry

Rozważmy następujący łańcuch:



Jeśli kratą **E**-algebry jest łańcuch 4-elementowy (działanie ¬ jest oczywiste), to tabelka działań dla operacji → ma postać:

$\to$	0	a	$\neg a$	1
0	1	1	1	1
a	0	a		1
$\neg a$	0	a	a	1
1	0	0	0	1

Zauważmy, że $a \leqslant \neg a$. Zatem $(a \to \neg a) \in \nabla$, tzn. $(a \to \neg a) \in [a)$, czyli $a \leqslant a \to \neg a$. Z drugiej strony, z prawa Claviusa, mamy $a \to \neg a \leqslant \neg a$. Podsumowując,
$a \leqslant (a \to \neg a) \leqslant \neg a$.

Tak więc, funkcja → dla $(a \to \neg a)$ może być zdefiniowana na trzy sposoby:

1. $a \to \neg a = a$,

2. $a \to \neg a = \neg a$,

3. $a \to \neg a \neq a, a \to \neg a \neq \neg a$, tzn. $a \to \neg a$ jest nowym elementem różnym od $a, \neg a$.

Jeśli założymy, że $a \to \neg a = a$ lub $a \to \neg a = \neg a$, to otrzymujemy dwie **E**-algebry, w których funkcja $\to$ może być zdefiniowana w następujących sposób:

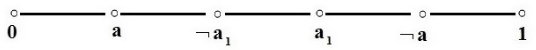
$\to$	0	a	$\neg a$	1
0	1	1	1	1
a	0	a	a	1
$\neg a$	0	0	a	1
1	0	0	0	1

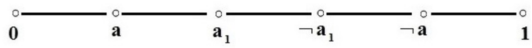
$\to$	0	a	$\neg a$	1
0	1	1	1	1
a	0	a	$\neg a$	1
$\neg a$	0	0	a	1
1	0	0	0	1

Łatwo można sprawdzić, że operacja $\to$ spełnia wszystkie nierówności, które definiują **E**-algebrę.

A_1-algebry

Niech $a \to \neg a \neq a$ oraz $a \to \neg a \neq \neg a$; niech $(a \to \neg a) =: a_1$. Załóżmy, że $a_1 \leqslant \neg a_1$ lub $\neg a_1 \leqslant a_1$, zatem mamy 6-elementowy łańcuch. Tak więc mamy dwie możliwości:

1.


2.


Zauważmy, że gdyby $a_1 \to a_1 = a_1$, to algebra ma podalgebrę różną od 2. Niech więc $a_1 \to a_1 = a$. Ponadto, wartości niektórych elementów można wyznaczyć niezależnie od porządku a_1 i $\neg a_1$.

1. Oczywiście $a \leqslant a \to a_1 \leqslant a_1$. Z sylogizmu $a \to \neg a \leqslant (\neg a \to \neg a) \to (a \to \neg a)$. Zatem $a_1 \leqslant a \to a_1$. Tak więc $a \to a_1 = a_1$.

2. Podobnie, $a \leqslant a \to \neg a_1 \leqslant \neg a_1$. Z sylogizmu, $a \to \neg a_1 \leqslant (\neg a_1 \to \neg a) \to (a \to \neg a)$. Zatem $a \to \neg a_1 \leqslant a_1 \to a_1$ więc $a \to \neg a_1 \leqslant a$. Mamy $a \to \neg a_1 = a$

3. Załóżmy, że $\neg a_1 \leqslant a_1$ (pierwszy łańcuch). Jest oczywistym, że $a \leqslant \neg a_1 \to a_1 \leqslant a_1$. Mamy $\neg a_1 \to a_1 \leqslant a \to (\neg a_1 \to a_1)$. Jeśli a oraz a_1, to otrzymujemy $\neg a_1 \to a_1 = a$ lub $\neg a_1 \to a_1 = a_1$, ponieważ w pozostałych przypadkach mamy sprzeczność.

Uwaga. Załóżmy, że $a_1 \leqslant \neg a_1$. Oczywiście $a \leqslant a_1 \to \neg a_1$. Z sylogizmu, $a_1 \to \neg a_1 \leqslant (\neg a_1 \to \neg a) \to (a_1 \to \neg a)$, więc $a_1 \to \neg a_1 \leqslant a_1 \to a$, tzn. $a_1 \to \neg a_1 \leqslant 0$ - sprzeczność. Zatem taka algebra nie istnieje.

W rezultacie bazą dla 6-elementowej algebry jest pierwszy łańcuch, tzn. łańcuch, w którym $\neg a_1 \leqslant a_1$. Oznaczmy taką algebrę przez $\mathbf{A_1}$. Dla ułatwienia rozważań pominiemy pierwszą i ostatnią kolumnę oraz pierwszy i ostatni wiersz w tabeli działań dla operacji $\to$.

Zatem dla algebry $\mathbf{A_1}$ mamy następujące tabelki dla działania $\to$:

$\to$	a	$\neg a_1$	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a_1
a_1	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	a

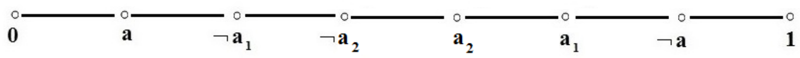
$\to$	a	$\neg a_1$	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a_1	a_1
a_1	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	a

Algebrę, w której $\neg a_1 \to a_1 = a$ oznaczymy przez $\mathbf{A_{1,a}}$. Gdy $\neg a_1 \to a_1 = a_1$, to $\mathbf{A_{1,a_1}}$.
Łatwo można sprawdzić, że $\mathbf{A_1}$-algebry są $\mathbf{E}$-algebrami, tzn. dla tak określonego działania $\to$ spełnione są wszystkie aksjomaty $\mathbf{E}$-algebry.

Algebry $\mathbf{A_{1,a}}$ oraz $\mathbf{A_{1,a_1}}$ będziemy nazywać $\mathbf{A_1}$-*algebrami.*

A_2-algebry

Oczywiście $a \leqslant \neg a_1 \to a_1 \leqslant a_1$. Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_1 \neq a$ i $\neg a_1 \to a_1 \neq a_1$. Rozważmy nowy element $\neg a_1 \to a_1 =: a_2$. Zatem rozważamy 8-elementowy łańcuch, w którym $\neg a_2 \leqslant a_2$ (przypadek $a_2 \leqslant \neg a_2$ jest niemożliwy):



Wyznaczmy teraz wartości dla operacji $\to$ dla elementów powyższej kraty.

Mamy:

1. Wiadomo, że $a \leqslant a \to a_2 \leqslant a_2$. Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_1 \leqslant (a_1 \to a_1) \to (\neg a_1 \to a_1)$ mamy $a_2 \leqslant a \to a_2$. Zatem $a \to a_2 = a_2$.

2. Łatwo zauważy, że $a \leqslant a \to \neg a_2 \leqslant \neg a_2$. Z sylogizmu $a \to \neg a_2 \leqslant (\neg a_2 \to \neg a_2) \to (a \to \neg a_2)$ mamy $a \to \neg a_2 \leqslant a \to (a \to \neg a_2)$. Zatem $a \to \neg a_2 = a$ lub $a \to \neg a_2 = \neg a_2$.

Niech $a \to \neg a_2 = \neg a_2$. Wtedy z sylogizmu $a \to \neg a_2 \leqslant (\neg a_2 \to \neg a) \to (a \to \neg a)$ mamy $\neg a_2 \leqslant a_2 \to a_1$ $(*)$ czyli $\neg a_2 \leqslant \neg a_1 \to \neg a_2 \leqslant \neg a_2$. Zatem $a_2 \to a_1 = \neg a_2$. Dalej, z $(*)$ mamy $a_2 \leqslant \neg a_2 \to a_1$ czyli $a_2 \leqslant \neg a_1 \to a_2 \leqslant a_2$. Zatem $\neg a_1 \to a_2 = a_2$.
Jednak z sylogizmu $\neg a_1 \to \neg a_2 \leqslant (\neg a_2 \to a_1) \to (\neg a_1 \to a_1)$ mamy $\neg a_2 \leqslant a_2 \to a_2$ czyli $\neg a_2 \leqslant a$ - sprzeczność.
Zatem $a \to \neg a_2 = a$.

3. Wiadomo, że $a \leqslant \neg a_1 \to \neg a_2 \leqslant \neg a_2$. Z sylogizmu $a \to \neg a_1 \leqslant (\neg a_1 \to \neg a_2) \to (a \to \neg a_2)$ mamy $a \leqslant (\neg a_1 \to \neg a_2) \to a$ czyli $\neg a_1 \to \neg a_2 \leqslant a \to a$ a więc $\neg a_1 \to \neg a_2 \leqslant a$. Zatem $\neg a_1 \to \neg a_2 = a$.

4. Wiadomo, że $a \leqslant \neg a_2 \to a_2 \leqslant a_2$. Z sylogizmu $\neg a_2 \to a_2 \leqslant (a_2 \to a_2) \to (\neg a_2 \to a_2)$ mamy $\neg a_2 \to a_2 \leqslant a \to (\neg a_2 \to a_2)$. Biorąc kolejno zmienne między a a a_2 okazuje się,

że $\neg a_2 \to a_2 = a$ lub $\neg a_2 \to a_2 = a_2$.

5. Wiadomo, że $a \leqslant \neg a_1 \to a_2 \leqslant a_2$. Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_2 \leqslant (a_2 \to a_2) \to (\neg a_1 \to a_2)$ mamy $\neg a_1 \to a_2 \leqslant a \to (\neg a_1 \to a_2)$. Podstawiając kolejno zmienne między a a a_2 dostajemy, że $\neg a_1 \to a_2 = a$ lub $\neg a_1 \to a_2 = a_2$.

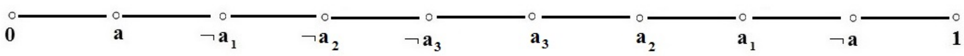
Zatem zdefiniowane zostały dwie $\mathbf{A_2}$-algebry bazujące na 8-elementowej kracie (patrz rysunek powyżej). W pierwszej algebrze, $\mathbf{A_{2,a}}$ mamy $\neg a_1 \to a_2 = a$ oraz w $\mathbf{A_{2,a_2}}$ mamy $\neg a_1 \to a_2 = a_2$.

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	a	a	a_2
a_2	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	a

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	a	a_2	a_2
a_2	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	a

A_3-algebry

Przypomnijmy, że $a \leqslant \neg a_1 \to a_2 \leqslant a_2$. W $\mathbf{A_2}$-algebrach: $\neg a_1 \to a_2 = a$ oraz $\neg a_1 \to a_2 = a_2$. Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_2 \neq a$ i $\neg a_1 \to a_2 \neq a_2$. W ten sposób otrzymamy $\mathbf{A_3}$-algebry: do algebr $\mathbf{A_2}$ „dodajemy” nowy element $\neg a_1 \to a_2$ oznaczony przez a_3, tzn. $\neg a_1 \to a_2 =: a_3$. Założymy, że $\neg a_3 \leqslant a_3$. Okazuje się, że kratą $\mathbf{A_3}$-algebr jest poniższy łańcuch:



a działanie $\to$ jest scharakteryzowane następująco:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\neg a_3$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a			a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a			a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a			a	a_3	a_2
$\neg a_3$	0	0	0	a				
a_3	0	0	0	0	a			
a_2	0	0	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	0	0	a

Aby wyznaczyć brakujące wartości w powyższej tabelce przeprowadzimy następujące rozumowanie:

1. Wiadomo, że $a \leqslant a \to a_3 \leqslant a_3$. Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_2 \leqslant (a_2 \to a_2) \to (\neg a_1 \to a_2)$ mamy $a_3 \leqslant a \to a_3$. Zatem $a \to a_3 = a_3$.

2. Z częściowego porządku $\neg a_2 \leqslant \neg a_3$ mamy $\neg a_3 \to a_2 \leqslant \neg a_2 \to a_2$, czyli $\neg a_3 \to a_2 \leqslant a$. Zatem $\neg a_3 \to a_2 = a$.

3. Z częściowego porządku $\neg a_2 \leqslant a_3$ mamy $a_3 \to a_2 \leqslant \neg a_2 \to a_2$, czyli $a_3 \to a_2 \leqslant a$. Zatem $a_3 \to a_2 = a$.

4. Z częściowego porządku $\neg a_2 \leqslant \neg a_3$ mamy $\neg a_3 \to a_3 \leqslant \neg a_2 \to a_3$, czyli $\neg a_3 \to a_3 \leqslant a$. Zatem $\neg a_3 \to a_3 = a$.

5. Wiadomo, że $a \leqslant a \to \neg a_3 \leqslant \neg a_3$. Z sylogizmu $a \to \neg a_3 \leqslant (\neg a)3 \to \neg a_3) \to (a \to \neg a_3)$ mamy $a \to \neg a_3 \leqslant a \to (a \to \neg a_3)$, czyli $a \to \neg a_3 = a$ lub $a \to \neg a_3 = \neg a_3$.

Niech więc $a \to \neg a_3 = \neg a_3$.

Wtedy z sylogizmu $a \to \neg a_3 \leqslant (\neg a_3 \to \neg a) \to (a \to \neg a)$ mamy $\neg a_3 \leqslant a_3 \to a_1$, czyli $\neg a_3 \leqslant \neg a_1 \to \neg a_3$, ale $\neg a_1 \to \neg a_3 \leqslant \neg a_3$ więc $\neg a_1 \to \neg a_3 = \neg a_3$.

Dalej, skoro $\neg a_3 \leqslant a_3 \to a_1$ więc $a_3 \leqslant \neg a_3 \to a_1$, czyli $a_3 \leqslant \neg a_1 \to a_3$, ale $\neg a_1 \to a_3 \leqslant a_3$. Zatem $\neg a_1 \to a_3 = a_3$
Z sylogizmu $\neg a_1 \to \neg a_3 \leqslant (\neg a_3 \to a_1) \to (\neg a_1 \to a_1)$ mamy $\neg a_3 \leqslant a_3 \to a_3 \to a_2$, czyli $\neg a_3 \leqslant a$ - sprzeczność.

Zatem $a \to \neg a_3 = a$.

6. Z częściowego porządku $a \leqslant \neg a_1$ mamy $\neg a_1 \to \neg a_3 \leqslant a \to \neg a_3$, czyli $\neg a_1 \to \neg a_3 \leqslant a$ czyli $\neg a_1 \to \neg a_3 = a$.

7. Wiadomo, że $a \leqslant \neg a_1 \to a_3 \leqslant a_3$. Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_3 \leqslant (a_3 \to a_3) \to (\neg a_1 \to a_3)$ mamy $\neg a_1 \to a_3 \leqslant a \to (\neg a_1 \to a_3)$. Podstawiając kolejne zmienne pomiędzy a a a_3 dostajemy, że $\neg a_1 \to a_3 = a$ lub $\neg a_1 \to a_3 = a_3$.

Dla elementu $\neg a_1 \to a_3$ operacja $\to$ może być zdefiniowana na trzy sposoby:

1. $\neg a_1 \to a_3 = a$,
2. $\neg a_1 \to a_3 = a_3$,
3. $\neg a_1 \to a_3$ jest nowym elementem, który nie pojawa się w 8 - elementowym łańcuchu.

Tak więc w $\mathbf{A_3}$-algebrze operacja $\to$ może być zdefiniowana w następujący sposób:

$\mathbf{A_{3,a}}$

$\rightarrow$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\neg a_3$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a	a	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	a	a	a	a_3	a_2
$\neg a_3$	0	0	0	a	a	a	a	a_3
a_3	0	0	0	0	a	a	a	a
a_2	0	0	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	0	0	a

oraz $\mathbf{A_{3,a_3}}$

$\rightarrow$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\neg a_3$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a	a_3	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	a	a	a	a_3	a_2
$\neg a_3$	0	0	0	a	a	a	a_3	a_3
a_3	0	0	0	0	a	a	a	a
a_2	0	0	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	0	0	a

A_n-Algebry

Wszystkie łańcuchy rozważane w tym rozdziale mają parzystą liczbę elementów. Ponadto, każdy z nich ma element najmniejszy, największy oraz a i $\neg a$. Wszystkie definiowane elementy są postaci a_k i $\neg a_k$. Tak więc każdy łańcuch ma $2+2+2k$ elementów. Jeśli zatem łańcuch ma $2+2+2k$ elementów, to algebrę generowaną przez taki łańcuch oznaczać będziemy przez $\mathbf{A_k}$. Na przykład: algebra $\mathbf{A_3}$ ma $2+2+2\cdot 3$ elementów.

Uogólnijmy procedurę definiowania operacji $\rightarrow$ dla A_n-łańcuchów.

Rozważmy $\mathbf{A_n}$-łańcuch. Można powiedzieć, że algebra $\mathbf{A_n}$ jest „rozszerzeniem” algebry $\mathbf{A_{n-1}}$, tzn. wartości operacji $\rightarrow$ dla elementów algebry $\mathbf{A_n}$ oraz algebry $\mathbf{A_{n-1}}$ są prawie takie same z wyjątkiem elementów $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1}$ oraz ich negacji; $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1}$ w $\mathbf{A_n}$ równa się a lub a_{n-1}, ale $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1} = a_n$ w $\mathbf{A_n}$. Podsumowując:

1. $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1} = a$ w $\mathbf{A_{n-1,a}}$,

2. $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1} = a_{n-1}$ w $\mathbf{A_{n-1,a_{n-1}}}$,

3. $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1} = a_n$ w $\mathbf{A_n}$.

Innymi słowy, w algebrze $\mathbf{A_n}$ element $\neg a_1 \rightarrow a_{n-1} = a_n$ jest różny od a i a_{n-1}. Zatem musimy rozważyć A_n-łańcuchy, gdzie $\neg a_n \leqslant a_n$ (przypadek, gdy $a_n \leqslant \neg a_n$ jest niemożliwy):

Otrzymujemy dwie $\mathbf{A_n}$-algebry, tzn. pierwszą, $\mathbf{A_{n,a}}$, w której $\neg a_1 \to a_n = a$:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\dots$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	$\dots$	a	a	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	$\dots$	a	a	a	a_n	$\dots$	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a	$\dots$	a	a_3	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	0	0	0	$\dots$	a	a	a	a	$\dots$	a	a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	0	0	$\dots$	0	a	a	a	$\dots$	a	a	a_n
a_n	0	0	0	$\dots$	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	$\dots$	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_2	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	a	a	a
a_1	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	a

oraz drugą, $\mathbf{A_{n,a_n}}$, w której $\neg a_1 \to a_n = a_n$:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\dots$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	$\dots$	a	a	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	$\dots$	a	a	a_n	a_n	$\dots$	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a	$\dots$	a	a_3	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	0	0	0	$\dots$	a	a	a	a	$\dots$	a	a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	0	0	$\dots$	0	a	a	a	$\dots$	a	a_n	a_n
a_n	0	0	0	$\dots$	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	$\dots$	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_2	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	a	a	a
a_1	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	a

A_{n+1}-algebry

Konstrukcja algebr $\mathbf{A_{n+1}}$ jest dokładanie taka sama. Podobnie jak w przypadku $\mathbf{A_n}$-algebr zauważmy, że $\to$ spełnia następujące warunki:

1. $\neg a_1 \to a_{n+1} = a$,

2. $\neg a_1 \to a_{n+1} = a_{n+1}$,

3. $\neg a_1 \to a_{n+1} \neq a$ oraz $\neg a_1 \to a_{n+1} \neq a_{n+1}$.

Zatem nasz A_{n+1}-łańcuch jest następujący (przypadek $a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1}$ jest niemożliwy):

Poszczególne wartości tabeli dla działania $\to$ można wyznaczyć w następujacy sposób:

1. Wiadomo, że $a \leqslant a \to a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_n \leqslant (a_n \to a_n) \to (\neg a_1 \to a_n)$ mamy $a_{n+1} \leqslant a \to a_{n+1}$. Zatem $a \to a_{n+1} = a_{n+1}$.

2. Z częściowego porządku $\neg a_n \leqslant \neg a_{n+1}$ mamy $\neg a_{n+1} \to a_n \leqslant \neg a_n \to a_n$, czyli $\neg a_{n+1} \to a_n \leqslant a$. Zatem $\neg a_{n+1} \to a_n = a$.

3. Z częściowego porządku $\neg a_i \leqslant \neg a_{n+1}$ dla $i \in \{2, \ldots, n\}$ mamy $\neg a_{n+1} \to a_i \leqslant \neg a_i \to a_i$, czyli $\neg a_{n+1} \to a_i \leqslant a$. Zatem $\neg a_{n+1} \to a_i = a$ dla $i \in \{2, \ldots, n\}$.

4. Z częściowego porządku $\neg a_i \leqslant a_{n+1}$ dla $i \in \{2, \ldots, n\}$ mamy $a_{n+1} \to a_i \leqslant a_i \to a_i$, czyli $a_{n+1} \to a_i \leqslant a$. Zatem $a_{n+1} \to a_i = a$ dla $i \in \{2, \ldots, n\}$.

5. Wiadomo, że $a \leqslant a \to \neg a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1}$.
Z sylogizmu $a \to \neg a_{n+1} \leqslant (\neg a_{n+1} \to \neg a_{n+1}) \to (a \to \neg a_{n+1})$ mamy $a \to \neg a_{n+1} \leqslant a \to (a \to \neg a_{n+1})$. Podstawiając kolejne zmienne między a a $\neg a_{n+1}$ dostaniemy, że $a \to \neg a_{n+1} = a$ lub $a \to \neg a_{n+1} = \neg a_{n+1}$.

Załóżmy, że $a \to \neg a_{n+1} = \neg a_{n+1}$.

Z sylogizmu $a \to a_{n+1} \leqslant (a_{n+1} \to \neg a) \to (a \to \neg a)$ mamy $a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1} \to a_1$, czyli $a_{n+1} \leqslant \neg a_1 \to a_{n+1}$, ale $\neg a_1 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Zatem $\neg a_{n+1} \to a_1 = a_{n+1}$.

Dalej: skoro $a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1} \to a_1$, więc $\neg a_{n+1} \leqslant a_{n+1} \to a_1$, więc $a_{n+1} \to a_1 = \neg a_1 \to \neg a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1}$. Zatem $a_{n+1} \to a_1 = \neg a_{n+1}$.

Wtedy z sylogizmu $\neg a_1 \to a_{n+1} \leqslant (a_{n+1} \to a_1) \to (\neg a_1 \to a_1)$ mamy $a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1} \to a_2$, czyli $a_{n+1} \leqslant a$ - sprzeczność.

Zatem $a \to \neg a_{n+1} = a$.

6. Z częściowego porządku $a \leqslant \neg a_1$ mamy $\neg a_1 \to \neg a_{n+1} \leqslant a \to \neg a_{n+1}$, czyli $\neg a_1 \to \neg a_{n+1} \leqslant a$. Zatem $\neg a_1 \to \neg a_{n+1} = a$.

7. Wiadomo, że $a \leqslant \neg a_1 \to a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.
Z sylogizmu $\neg a_1 \to a_{n+1} \leqslant (a_{n+1} \to a_{n+1}) \to (\neg a_1 \to a_{n+1})$ mamy

$\neg a_1 \to a_{n+1} \leqslant a \to (\neg a_1 \to a_{n+1})$. Gdyby $\neg a_1 \to a_{n+1} = \neg a_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, to z powyższego sylogizmu mielibyśmy, że $\neg a_i \leqslant a \to \neg a_i$, czyli $\neg a_i \leqslant a$ dla $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ - sprzeczność. Powyższy sylogizm jest prawdziwy gdy $\neg a_1 \to a_{n+1} = a$
lub $\neg a_1 \to a_{n+1} = a_{n+1}$.

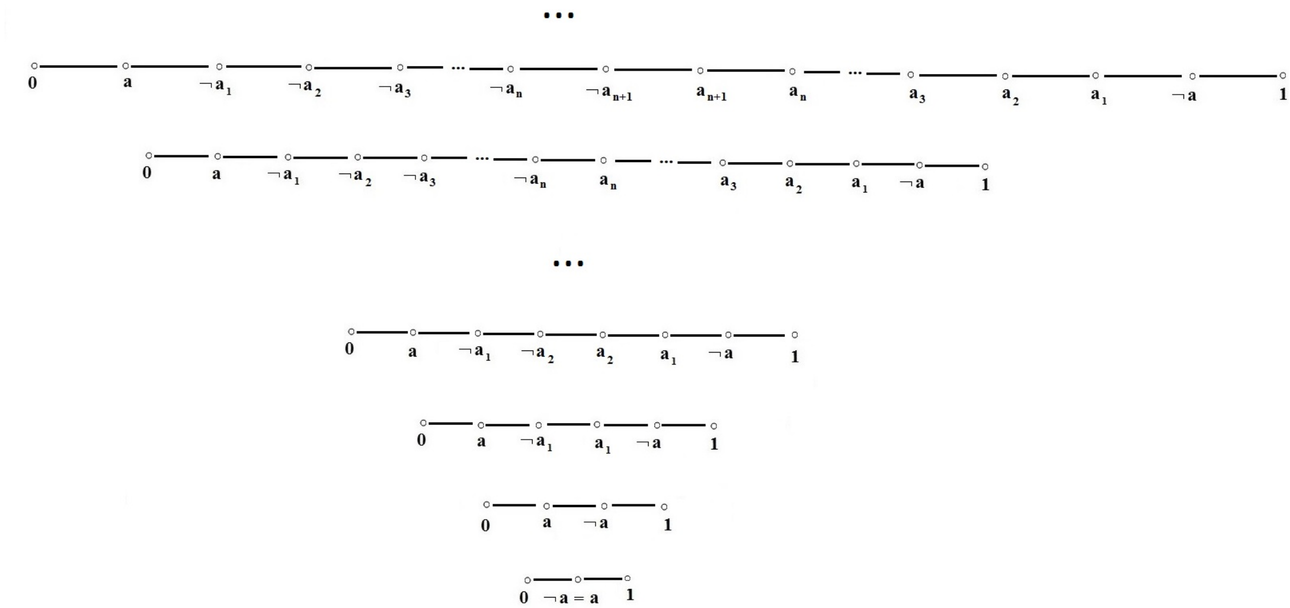
Mamy zatem dwie $\mathbf{A_{n+1}}$-algebry, tzn. pierwszą, $\mathbf{A_{n+1,a}}$, w której $\neg a_1 \to a_{n+1} = a$:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\ldots$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	$\ldots$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	$\ldots$	a	a	a_{n+1}	a_{n-1}	$\ldots$	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	$\ldots$	a	a	a	a_{n+1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	$\ldots$	a	a	a	a	$\ldots$	a	a_3	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_n$	0	0	0	$\ldots$	a	a	a	a	$\ldots$	a	a_{n+1}	a_{n-1}
$\neg a_{n+1}$	0	0	0	$\ldots$	0	a	a	a	$\ldots$	a	a	a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	$\ldots$	0	0	a	a	$\ldots$	a	a	a
a_n	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	a	$\ldots$	a	a	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_2	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	a	a	a
a_1	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	a

oraz drugą, $\mathbf{A_{n+1,a_{n+1}}}$, w której $\neg a_1 \to a_{n+1} = a_{n+1}$:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\ldots$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	$\ldots$	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	$\ldots$	a	a	a_{n+1}	a_{n-1}	$\ldots$	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	$\ldots$	a	a	a_{n+1}	a_{n+1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	$\ldots$	a	a	a	a	$\ldots$	a	a_3	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_n$	0	0	0	$\ldots$	a	a	a	a	$\ldots$	a	a_{n+1}	a_{n-1}
$\neg a_{n+1}$	0	0	0	$\ldots$	0	a	a	a	$\ldots$	a	a_{n+1}	a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	$\ldots$	0	0	a	a	$\ldots$	a	a	a
a_n	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	a	$\ldots$	a	a	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_2	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	a	a	a
a_1	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	a

Uwaga. $\mathbf{A_n}$-algebry można przedstawić w następujący sposób:



3.3 Twierdzenie podstawowe

Twierdzenie 26. *Każda* $\mathbf{A_n}$*-algebra jest* $\boldsymbol{E}$*-algebrą.*

Zauważmy, że mamy dwa nieskończone ciągi algebr, tzn. ciąg $\mathbf{A_{n,a}}$ oraz ciąg $\mathbf{A_{n,a_n}}$. Ponadto, żadna z tych algebr nie ma nietrywialnej podalgebry z wyjątkiem podalgebry dwuelementowej.

Każda z tych algebr jest generowana przez element a. Co więcej, żadna z $\mathbf{A_n}$-algebr nie ma nietrywialnego obrazu homomorficznego.

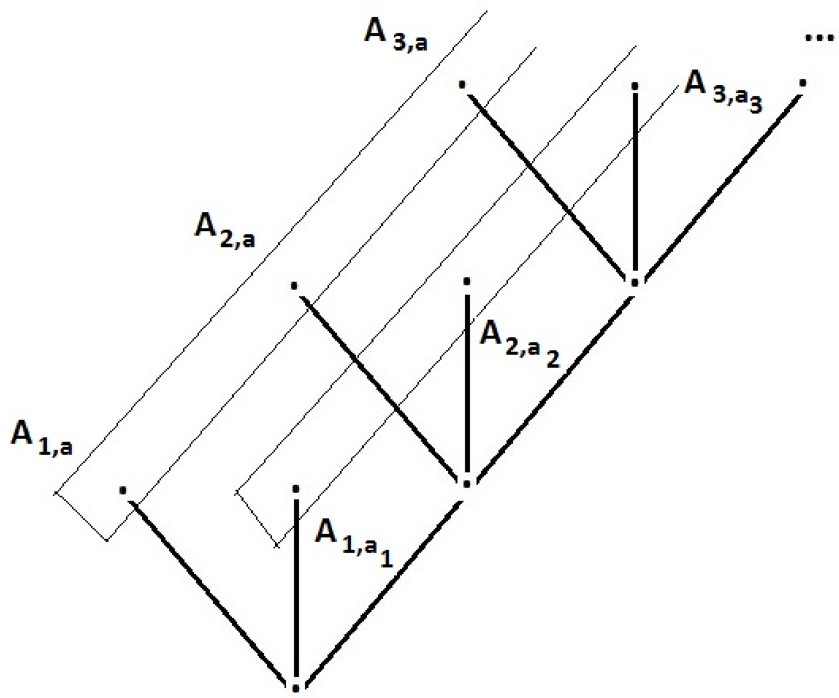
Mamy następujące główne twierdzenie:

Twierdzenie 27. *Istnieją dwa nieskończone ciągi skończonych prostych* $\boldsymbol{E}$*-algebr takich, że jedyną właściwą podalgebrą jest* $\mathbf{2}$*.*

Wniosek 28. Interwał $[\mathbf{E}, \mathbf{2}]$ ma nieskończenie wiele koatomów.

Uwaga. Istnieje dokładnie jedno pre-maksymalne rozszerzenie logiki **RM**. Logika **R** ma trzy pre-maksymalne rozszerzenia.

Uwaga. Schemat dwóch nieskończonych ciągów algebr skończonych można przedstawić w następujący sposób:


A 3,a
A 3,a3
...
A 2,a
A 2,a 2
A 1,a
A 1,a1

Rozdział 4

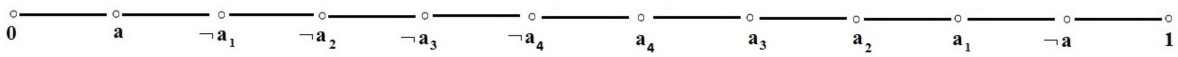
Nieskończone algebry proste generujące logiki pre-maksymalne

Niech $\nabla = [a)$. Rozważać będziemy tylko te algebry, których kratami są łańcuchy. Dla przejrzystości pracy przedstawione zostały tylko najważniejsze fragmenty tabel dla działania $\to$.

4.1 Konstrukcja drzewa binarnego

Poziom 0

Rozważmy następującą **E**-algebrę:



gdzie operacja $\to$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	a	$\neg a_1$	$\neg a_2$	$\neg a_3$	$\neg a_4$	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a	a	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	0	a	a	a	a	a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	0	0	a	a	a	a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	0	0	0	a	a	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	0	0	0	0	a	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_4	0	0	0	0	0	a	a	a	a	a
a_3	0	0	0	0	0	0	a	a	a	a
a_2	0	0	0	0	0	0	0	a	a	a
a_1	0	0	0	0	0	0	0	0	a	a
$\neg a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

Zauważmy, że jeśli $x \leqslant y$, to $x \to y = a$ oraz jeśli $x > y$, to $x \to y = 0$ dla $x \in \{a, \neg a_1, \ldots, \neg a_i\}$, $y \in \{a_i, \ldots, a_1, a\}$. Dla ułatwienia pominięte zostają kolumny dla

$a, \neg a_1, \ldots, \neg a_i$ oraz wiersze dla $a_i, \ldots, a_1, a$. Zatem zamiast powyższej tabeli rozważać będziemy jej najważniejszą część:

$\to$	$\neg a_4$	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_4	0	a	a	a	a	a

Jeśli $\neg a_i \leqslant a_4$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$, to $(\neg a_i \to a_4) \in \nabla$, tzn. $a \leqslant (\neg a_i \to a_4)$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$.

Z drugiej strony $a \leqslant \neg a_i$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$, czyli $(\neg a_i \to a_4) \leqslant (a \to a_4)$. Zatem $(\neg a_i \to a_4) \leqslant a_4$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$.

Z sylogizmu $(\neg a_i \to a_4) \leqslant (a_4 \to a_4) \to (\neg a_i \to a_4)$ mamy $(\neg a_i \to a_4) \leqslant a \to (\neg a_i \to a_4)$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$. Jeśli $\neg a_i \to a_4 = \neg a_j$ dla $j \in \{1,2,3,4\}$ to $\neg a_j \leqslant a \to \neg a_j$ dla $j \in \{1,2,3,4\}$. Zatem $\neg a_j \leqslant a$ dla $j \in \{1,2,3,4\}$ – sprzeczność.

Zatem operacja $\to$ dla elementów $\neg a_i \to \neg a_4$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$ może być zdefiniowana w następujący sposób:

1. $\neg a_i \to a_4 = a$,
2. $\neg a_i \to a_4 = a_4$,
3. $\neg a_i \to a_4 \neq a, \neg a_i \to a_4 \neq a_4$, tzn. $\neg a_i \to a_4$ jest nowym elementem różnym od a, a_4.

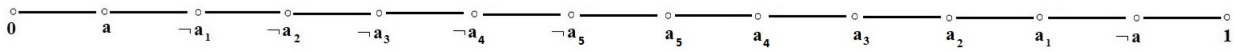
Jeśli $\neg a_i \to a_4 = a$ lub $\neg a_i \to a_4$ dla $i \in \{1,2,3,4\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Najbardziej interesująca jest trzecia możliwość, gdy $\neg a_i \to a_4$ jest nowym elementem różnym a, a_4, ale tylko dla $i = 1$ i $i = 4$.

Poziom 1

Przypadek $\mathbf{A_0^1}$

Rozważmy trzeci przypadek dla $i = 1$, tzn. $\neg a_1 \to a_4 \neq a$ i $\neg a_1 \to a_4 \neq a_4$. Oznaczmy $\neg a_1 \to a_4$ przez a_5 (tzn. $\neg a_1 \to a_4 := a_5$). Załóżmy, że a_5 oraz $\neg a_5$ są porównywalne, tzn. $\neg a_5 \leqslant a_5$ (ponieważ nie jest możliwe by $a_5 \leqslant \neg a_5$). Zatem mamy 14-elementowy łańcuch:



a operacja $\to$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_4$	$\neg a_5$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a			a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a			a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a					a_5	a_4
$\neg a_5$	0	a						a_4
a_5	0	0	a	a	a	a	a	a
a_4	0	0	0	a	a	a	a	a

Dla powyższej tabeli mamy następujące rozważania:

1. Mamy $a \leqslant \neg a_j \to a_4 \leqslant a_4$ dla $j \in \{2,3,4\}$. Jeśli $\neg a_1 \leqslant \neg a_j$ dla $j \in \{2,3,4\}$, to $\neg a_j \to a_4 \leqslant \neg a_1 \to a_4$ więc $\neg a_j \to a_4 \leqslant a_5$ dla $j \in \{2,3,4\}$. Zatem $a \leqslant \neg a_j \to a_4 \leqslant a_5$ dla $j \in \{2,3,4\}$. Z sylogizmu $(\neg a_j \to a_4) \leqslant (a_4 \to a_4) \to (\neg a_j \to a_4)$ dla $j \in \{2,3,4\}$ mamy $(\neg a_j \to a_4) \leqslant a \to (\neg a_j \to a_4)$ dla $j \in \{2,3,4\}$. Łatwo można zauważyć, że ta nierówność jest spełniona tylko gdy $\neg a_j \to a_4 = a$ lub $\neg a_j \to a_4 = a_5$ dla $j \in \{2,3,4\}$.

   Ostatecznie: $\neg a_j \to a_4 = a$ lub $\neg a_j \to a_4 = a_5$ dla $j \in \{2,3,4\}$.

2. Jest oczywistym, że $a \leqslant \neg a_i \to a_5$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Z sylogizmu $\neg a_i \to a_5 \leqslant (a_5 \to a_5) \to (\neg a_i \to a_4)$ mamy $(*)$ $\neg a_i \to a_5 \leqslant a \to (\neg a_i \to a_5)$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Załóżmy, że $\neg a_i \to a_5 = \neg a_k$ dla $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Wtedy $(*)$ $\neg a_k \leqslant a \to a_k$ więc $\neg a_k \leqslant a$ dla $k \in \{1,2,3,4,5\}$ - sprzeczność.

   Tak więc $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Niech $\neg a_j \to a_4 = a_5$ dla $j \in \{2,3,4\}$.

W ten sposób otrzymujemy następującą tabelę dla działania $\to$

$\to$	$\neg a_4$	$\neg a_5$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_5	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_5	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_5	a_5	a_5	a_5	a_4
$\neg a_5$	0	a						a_4
a_5	0	0	a	a	a	a	a	a
a_4	0	0	0	a	a	a	a	a

Gdy $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$, to wtedy wszystkie algebry z tak określonym działaniem $\to$ są $\mathbf{E}$-algebrami.

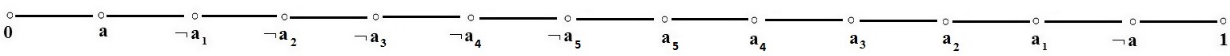
Oznaczmy takie algebry przez $\mathbf{A_0^1}$, tzn. takie algebry, w których nowy element jest zdefiniowny w następujący sposób: $\neg a_1 \to a_4 = a_5$.

Przypadek $\mathbf{A_1^1}$

Przypomnijmy, że w algebrze $\mathbf{A^0}$ dla elementu $\neg a_i \to a_4$, gdzie $i \in \{1,2,3,4\}$, operacja $\to$ może być zdefiniowania na trzy sposoby:

1. $\neg a_i \to a_4 = a$,
2. $\neg a_i \to a_4 = a_4$,
3. $\neg a_i \to a_4$ jest nowym elementem różnym od a, a_4.

Załóżmy teraz, że $\neg a_4 \to a_4 \neq a$ i $\neg a_4 \to a_4 \neq a_4$. Rozważmy zatem nowy element $\neg a_4 \to a_4$ i oznaczmy go przez a_5 (tzn. $\neg a_4 \to a_4 =: a_5$). Ponownie musimy rozważyć 14-elementowy łańcuch, w którym $\neg a_5 \leqslant a_5$ (przypadek, gdy $a_5 \leqslant \neg a_5$ jest niemożliwy):



Działanie $\to$ jest zdefiniowanie w następujacy sposób:

$\to$	$\neg a_5$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a		a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a		a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a		a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a		a_5	a_4	a_4	a_4	a_4
$\neg a_5$	a						a_4
a_5	0	a	a	a	a	a	a

Uwaga. Jeśli rozważamy przypadek $\neg a_4 \to a_4 =: a_5$, wtedy $\neg a_i \to a_4 = a_4$ dla $i \in \{1,2,3\}$.

Określmy działanie $\to$ dla brakujących elementów w tabeli.

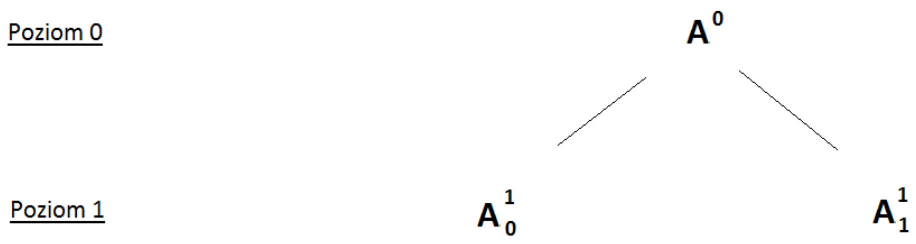
Oczywistym jest, że $a \leqslant \neg a_i \to a_5$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Z sylogizmu $\neg a_i \to a_5 \leqslant (a_5 \to a_5) \to (\neg a_i \to a_4)$ mamy $(*)$ $\neg a_i \to a_5 \leqslant a \to (\neg a_i \to a_5)$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Załóżmy, że $\neg a_i \to a_5 = \neg a_k$ dla $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Mamy $(*)$ $\neg a_k \leqslant a \to a_k$ więc $\neg a_k \leqslant a$ dla $k \in \{1,2,3,4,5\}$, co daje sprzeczność.

Tak więc $\neg a_i \to a_5 = a$ albo $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Jeśli $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Oznaczmy powyższą algebrę przez $\mathbf{A_1^1}$, to znaczy taką, w której $\neg a_4 \to a_4 = a_5$.

Zależności pomiędzy algebrami możemy wyrazić w następujący sposób:



Poziom 2

Część 1. Przypomnijmy algebrę $\mathbf{A_0^1}$, gdzie tabela dla działania $\to$ ma postać:

$\to$	$\neg a_4$	$\neg a_5$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_5	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_5	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_5	a_5	a_5	a_5	a_4
$\neg a_5$	0	a						a_4
a_5	0	0	a	a	a	a	a	a
a_4	0	0	0	a	a	a	a	a

Jeślic $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Przypadek $\mathbf{A_{000}^2}$

Zastanówmy się nad wartością elementu $\neg a_1 \to a_5$. Oczywiste jest, że $\neg a_1 \to a_5 = a$ lub $\neg a_1 \to a_5 = a_5$. Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_5 \neq a$ oraz $\neg a_1 \to a_5 \neq a_5$, tzn. $\neg a_1 \to a_5$ jest nowym elementem różnym od a, a_5; oznaczmy go przez a_6. Ponadto załóżmy, że a_6 i $\neg a_6$ są porównywalne, tzn. $\neg a_6 \leqslant a_6$ więc mamy 14 elementenowy łańcuch:

$$0 < a < \ldots < \neg a_5 < \neg a_6 < a_6 < a_6 < \ldots < \neg a < 1$$

Operacja $\to$ może być zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_6	a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a			a_5	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a			a_5	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a			a_5	a_5	a_5	a_5	a_4
$\neg a_5$	a	a						a_6	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Z łatwością można wyznaczyć wartości elementów w powyższej tabeli. Mamy $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_6$ dla $i \in \{2, \ldots, 5\}$ oraz $\neg a_j \to a_6 = a$ lub $\neg a_j \to a_6 = a_6$ dla $j \in \{1, \ldots, 6\}$.

Załóżmy, że $\neg a_i \to a_5 = a_6$ dla $i \in \{2, \ldots, 5\}$.

Otrzymujemy w ten sposób następującą tabelę dla operacji $\to$

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_6	a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_6	a_5	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_6	a_5	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_6	a_5	a_5	a_5	a_5	a_4
$\neg a_5$	a	a		a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Jeśli $\neg a_j \to a_6 = a$ lub $\neg a_j \to a_6 = a_6$ dla $j \in \{1, \ldots, 6\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Przypadek $\mathbf{A}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{001}}$

Rozważmy teraz wartość elementu $\neg a_5 \to a_5$. Oczywiste jest, że $\neg a_5 \to a_5 = a$ lub $\neg a_5 \to a_5 = a_5$. Załóżmy, że $\neg a_5 \to a_5$ jest nowym elementem i oznaczmy go przez a_6, tzn. $\neg a_5 \to a_5 = a_6$. Otrzymujemy w ten sposób 14-elementowy łańcuch:

$$0 < a < \ldots < \neg a_5 < \neg a_6 < a_6 < a_6 < \ldots < \neg a < 1$$

Operacja $\to$ może być zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_5	a_5	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_5	a_5	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_5	a_5	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_5	a_5	a_5	a_5	a_5	a_4
$\neg a_5$	a	a		a_6	a_5	a_5	a_5	a_5	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Okazuje się, że $\neg a_i \to a_6 = a$ lub $\neg a_i \to a_6 = a_6$ dla $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Dla każdej wartości elementu $\neg a_i \to a_6$ dla $i \in \{1, \ldots, 6\}$ otrzymujemy **E**-algebry.

Część 2. Przypomnijmy algebrę $\mathbf{A_1^1}$, gdzie operacja $\to$ była zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_5$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a		a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a		a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a		a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a		a_5	a_4	a_4	a_4	a_4
$\neg a_5$	a						a_4
a_5	0	a	a	a	a	a	a

Jeśli $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_5$ dla $i \in \{1, \ldots, 5\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Przypadek $\mathbf{A^2_{110}}$

Rozważmy element $\neg a_1 \to a_5$. Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_5$ jest nowym elementem (tzn. $\neg a_1 \to a_5 \neq a$ oraz $\neg a_1 \to a_5 \neq a_5$) i oznaczmy go przez a_6. Otrzymujemy w ten sposób łańcuch 14 elementowy:

$$0 < a < \ldots < \neg a_5 < \neg a_6 < a_6 < a_6 < \ldots < \neg a < 1$$

gdzie operacja $\to$ jest zdefiniowana w natępujący sposób:

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_6	a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a			a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a			a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a			a_5	a_4	a_4	a_4	a_4
$\neg a_5$	a	a						a_6	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Oczywiście łatwo można uzupełnić wartości w powyższej tabeli. Okazuje się, że $\neg a_i \to a_5 = a$ lub $\neg a_i \to a_5 = a_6$ dla $i \in \{2, \ldots, 5\}$ oraz $\neg a_j \to a_6 = a$ lub $\neg a_j \to a_6 = a_6$ dla $j \in \{1, \ldots, 6\}$.

Załóżmy, że $\neg a_i \to a_5 = a_6$ dla $i \in \{2, \ldots, 5\}$.

Zatem tabela dla działania $\to$ ma postać:

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_6	a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_6	a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_6	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_6	a_5	a_4	a_4	a_4	a_4
$\neg a_5$	a	a		a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Jeśli $\neg a_j \to a_6 = a$ lub $\neg a_j \to a_6 = a_6$ dla $j \in \{1, \ldots, 6\}$, wszystkie algebry są **E**-algebrami.

Przypadek $\mathbf{A^2_{111}}$

Rozważmy teraz element $\neg a_5 \to a_5$. Wiadomo, że $\neg a_5 \to a_5 = a$ lub $\neg a_5 \to a_5 = a_5$. Załóżmy, że $\neg a_5 \to a_5$ jest nowym elementem i oznaczmy go przez a_6, tzn. $\neg a_5 \to a_5 = a_6$. Po raz kolejny otrzymujemy 14 elementowy łańcuch:

$$0 < a < \ldots < \neg a_5 < \neg a_6 < a_6 < a_6 < \ldots < \neg a < 1$$

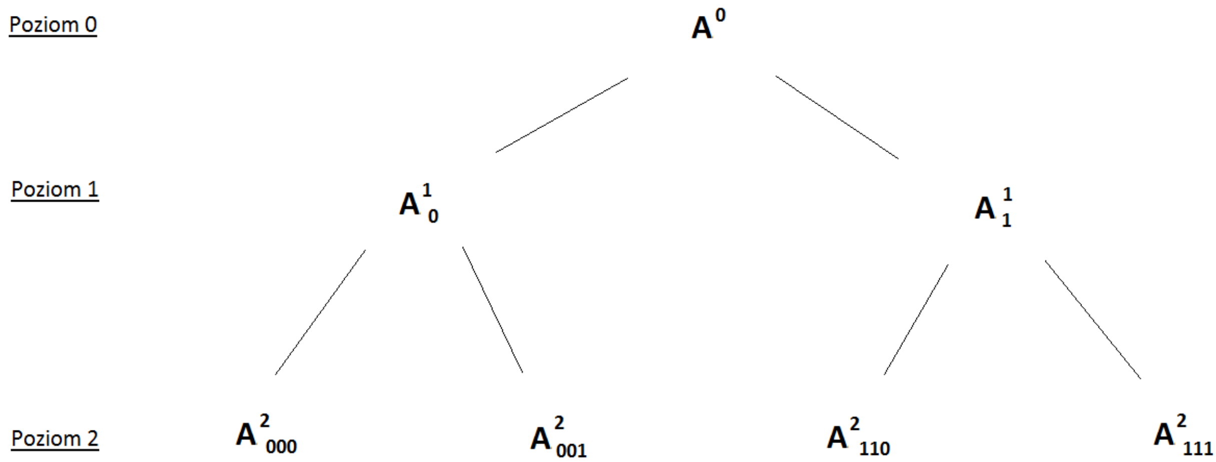
Jednak tabela dla operacji $\to$ ma postać:

$\to$	$\neg a_5$	$\neg a_6$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_5	a_4	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_5	a_4	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_5	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3
$\neg a_4$	a	a		a_5	a_5	a_4	a_4	a_4	a_4
$\neg a_5$	a	a		a_6	a_5	a_5	a_5	a_5	a_5
$\neg a_6$	0	a							a_6
a_6	0	0	a	a	a	a	a	a	a
a_5	0	0	0	a	a	a	a	a	a

Okazuje się, że $\neg a_i \to a_6 = a$ lub $\neg a_i \to a_6 = a_6$ dla $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Dla każdej wartości elementu $\neg a_i \to a_6$, gdzie $i \in \{1, \ldots, 6\}$ otrzymujemy **E**-algebry.

Zależności pomiedzy algebrami z poziomu 0,1 i 2 przedstawić można na następującym schemacie:



Poziom n

Wszystkie łańcuchy rozważane w tym rozdziale mają parzystą liczbę elementów. Bazą do rozważań stał się łańcuch 12-elementowy, a wszystkie nowe elementy są postaci a_m i $\neg a_m$. Tak więc każdy kolejny łańcuch ma $(12 + 2m)$ elementów. Zatem algebrę generowaną przez łańcuch $(12 + 2m)$ elementowy będziemy oznaczać przez $\mathbf{A^n}$, gdzie $n = 12 + 2m, m \in \mathbb{N}$. Jednocześnie n informuje na jakim poziomie jest dana algebra.

Rozważmy $(12 + 2m)$ elementowy łańuch. Algebra $\mathbf{A^n}$ jest „rozszerzeniem" algebry $\mathbf{A^{n-1}}$, tzn. wartości operacji $\to$ dla elementów algebry $\mathbf{A^n}$ i $\mathbf{A^{n-1}}$ są takie same z wyjątkiem następujących przypadków:

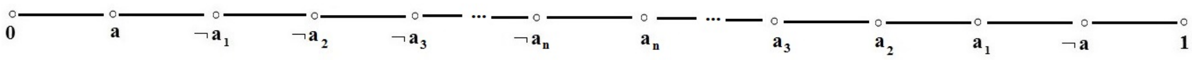
1. (a) $\neg a_1 \to a_{n-1} = a$ lub $\neg a_1 \to a_{n-1} = a_{n-1}$ w $\mathbf{A^{n-1}}$,
$\neg a_i \to a_{n-1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n-1} = a_{n-1}$ dla $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ w $\mathbf{A^{n-1}}$,

(b) $\neg a_1 \to a_{n-1} = a_n$ i $\neg a_i \to a_{n-1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n-1} = a_n$ w $\mathbf{A^n}$,

2. (a) $\neg a_i \to a_{n-1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n-1} = a_{n-1}$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ w $\mathbf{A^{n-1}}$,

   (b) $\neg a_i \to a_{n-1} = a_{n-1}$ dla $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ i $\neg a_{n-1} \to a_{n-1} = a_n$ w $\mathbf{A^n}$.

Zatem rozważmy $\mathbf{A^n}$, gdzie $\neg a_n \leqslant a_n$ (przypadek gdy $a_n \leqslant \neg a_n$ jest niemożliwy):



Niech dana będzie algebra $\mathbf{A^{n-1}_k}$, gdzie $n-1$ oznacza poziom (= liczebność algebry), a indeks k oznacza dowolną algebrę z poziomu n.

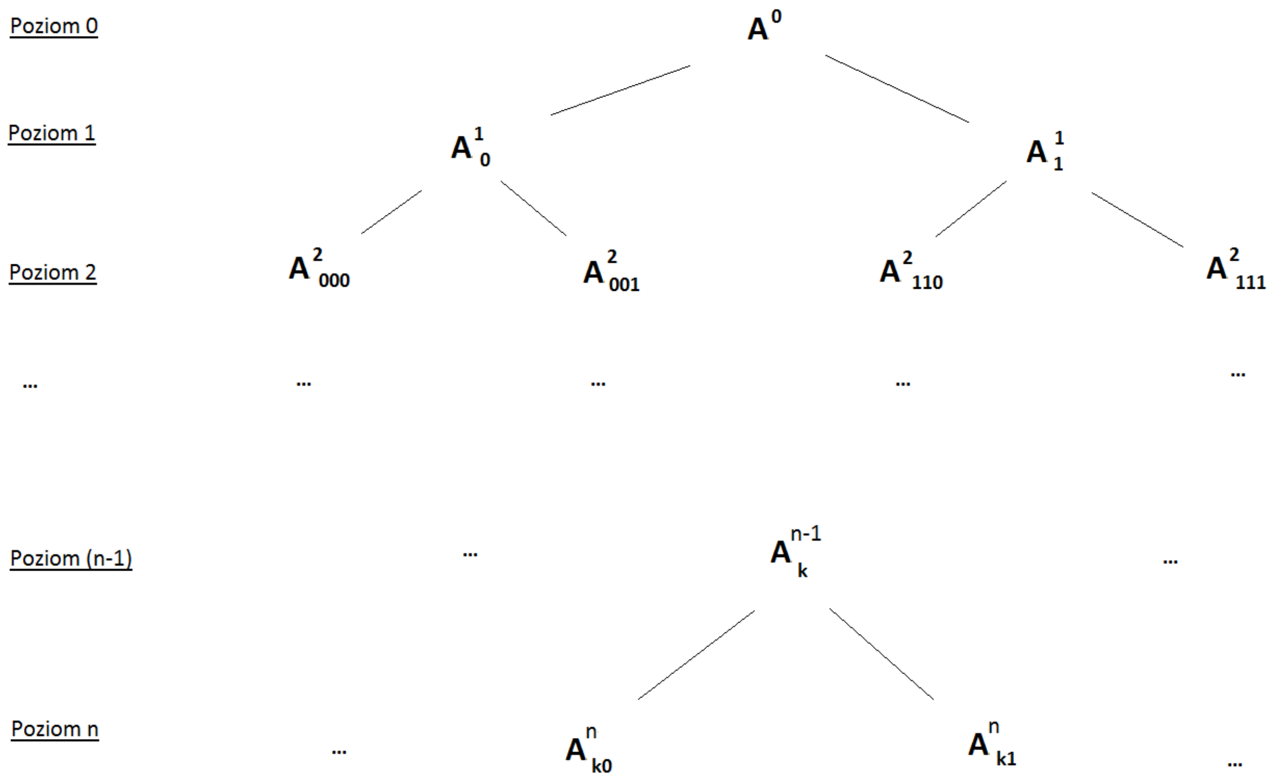
Zatem istnieją dwie **E**-algebry $\mathbf{A^n}$, tzn.

pierwsza **E**-algebra $\mathbf{A^n_{k0}}$, w której $\neg a_1 \to a_{n-1} = a_n$; $\neg a_i \to a_{n-1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n-1} = a_n$ dla $i \in \{2, \ldots, n-1\}$; $\neg a_j \to a_n = a$ lub $\neg a_j \to a_n = a_n$ dla $j \in \{1, \ldots, n\}$

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_n	$\ldots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a			$\ldots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a			$\ldots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a			$\ldots$			a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a			$\ldots$				a_n
a_n	0	0	a	a	$\ldots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	a	$\ldots$	a	a	a	a

druga **E**-algebra $\mathbf{A^n_{k1}}$, w której $\neg a_{n-1} \to a_{n-1} = a_n$; $\neg a_i \to a_n = a$ lub $\neg a_i \to a_n = a_n$ dla $j \in \{1, \ldots, n\}$

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a		a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a		a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a		a_{n-1}	$\ldots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a		a_n	$\ldots$	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a			$\ldots$				a_n
a_n	0	0	a	a	$\ldots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	a	$\ldots$	a	a	a	a



Poziom $(n+1)$

Konstrukcja algebr $\mathbf{A^{n+1}}$ jest dokładnie taka sama.

Rozważymy przypadek $\mathbf{A^n_{k0}}$ i $\mathbf{A^n_{k1}}$ oddzielnie.

Przypomnijmy, że jeśli definiujemy nowy element jako $\neg a_1 \to a_k$, to dodajemy 0 (kolor czerwony w tabeli) w prawym dolnym indeksie; jeśli natomiast definiujemy element przez $\neg a_k \to a_k$, to w indeksie dodajemy 1 (kolor niebieski w tabeli).

Część 1. Rozważmy przypadek $\mathbf{A^n_{k0}}$.

Załóżmy, że $\neg a_i \to a_{n-1} = a_n$ dla $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Zauważmy, że element $\neg a_1 \to a_n$ może być zdefiniowany na trzy sposoby:

1. $\neg a_1 \to a_n = a$,
2. $\neg a_1 \to a_n = a_n$,
3. $\neg a_1 \to a_n \neq a$ i $\neg a_1 \to a_n \neq a_n$.

Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_n$ jest nowym elementem, tzn. $\neg a_1 \to a_n =: a_{n+1}$. Zakładamy, że $\neg a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$ (ponieważ $a_{n+1} \leqslant \neg a_{n+1}$ jest niemożliwe). W konsekwencji kratą tej algebry jest następujący łańcuch:

a operacja $\to$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a	a		a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a	a			a_n	$\dots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a	a			a_n	$\dots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a				a_n	$\dots$	a_n	a_n	a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a	a				$\dots$			a_{n+1}	a_n
$\neg a_{n+1}$	0	0	a				$\dots$				a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	a	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_n	0	0	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a

Okazuje się, że $\neg a_i \to a_n = a_n$ lub $\neg a_i \to a_n = a_{n+1}$ dla $i \in \{1,\dots,n\}$ oraz $\neg a_j \to a_{n+1} = a$ lub $\neg a_j \to a_{n+1} = a_{n+1}$ dla $j \in \{1,\dots,n+1\}$.

Załóżmy, że $\neg a_i \to a_n = a_{n+1}$ dla $i \in \{1,\dots,n\}$.

Tabela działania dla operacji $\to$ ma wtedy postać:

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a	a		a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a	a		a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a	a		a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a			a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_n	a_n	a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a	a		a_{n+1}	a_{n+1}	$\dots$	a_{n+1}	a_{n+1}	a_{n+1}	a_n
$\neg a_{n+1}$	0	0	a				$\dots$				a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	a	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_n	0	0	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a

Jeśli $\neg a_j \to a_{n+1} = a$ lub $\neg a_j \to a_{n+1} = a_{n+1}$, gdzie $j \in \{a,\dots,n+1\}$, to wszystkie algebry są **E**-algebrami.

W ten sposób otrzymujemy algebrę $\mathbf{A^{n+1}_{k00}}$.

Załóżmy teraz, że $\neg a_n \to a_n$ jest nowym elementem, tzn. $\neg a_n \to a_n := a_{n+1}$. Oczywiście $\neg a_{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Operacja $\to$ jest określona w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a	a		a_n	a_n	$\dots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a	a		a_n	a_n	$\dots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a	a		a_n	a_n	$\dots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a			a_n	a_n	$\dots$	a_n	a_n	a_n	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a	a		a_{n+1}	a_n	$\dots$	a_n	a_n	a_n	a_n
$\neg a_{n+1}$	0	0	a				$\dots$				a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	a	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_n	0	0	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a

Łatwo można pokazać, że $\neg a_i \to a_{n+1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n+1} = a_{n+1}$ dla $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Każda taka algebra jest **E**-algebrą. Taką algebrę oznaczymy przez $\mathbf{A^n_{k01}}$.

Część 2. Rozważmy teraz algebrę $\mathbf{A^n_{k1}}$. Załóżmy, że $\neg a_1 \to a_n$ jest nowym elementem, tzn. $\neg a_1 \to a_n := a_{n+1}$. Wtedy operacja $\to$ jest określona w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a	a		a_{n+1}	a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a	a			a_{n-1}	$\dots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a	a			a_{n-1}	$\dots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a				a_n	$\dots$	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a	a				$\dots$			a_{n+1}	a_n
$\neg a_{n+1}$	0	0	a				$\dots$				a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	a	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_n	0	0	0	0	a	a	$\dots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	0	0	a	$\dots$	a	a	a	a

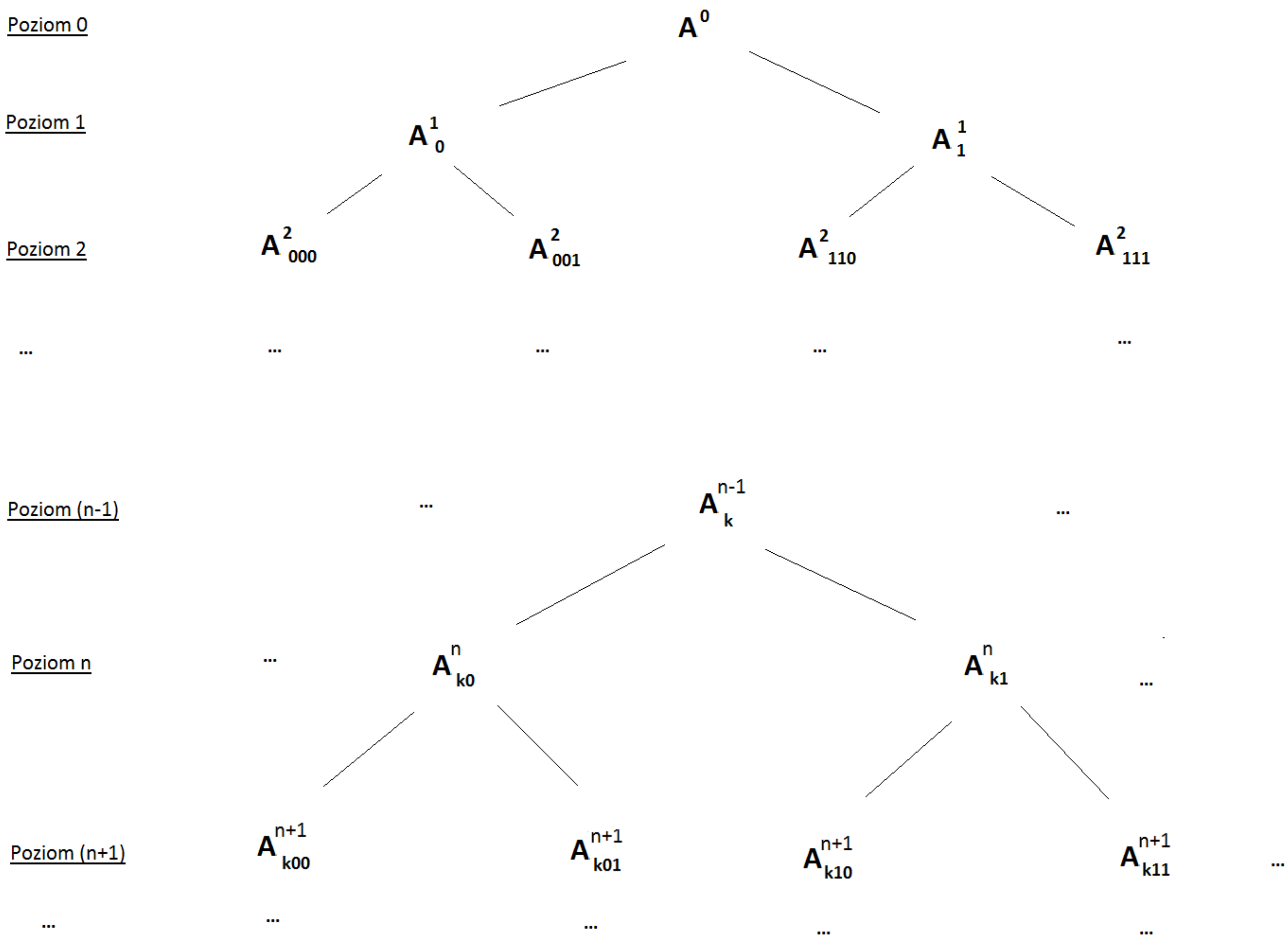
Okazuje się, że $\neg a_i \to a_n = a_n$ lub $\neg a_i \to a_n = a_{n+1}$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $\neg a_j \to a_{n+1} = a$ lub $\neg a_j \to a_{n+1} = a_{n+1}$ dla $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Każda taka algebra jest **E**-algebrą. Oznaczymy takie **E**-algebry przez $\mathbf{A^n_{k10}}$.

Załóżmy teraz, że $\neg a_n \to a_n =: a_{n+1}$; tabela dla operacji $\to$ określona jest w następujący sposób:

$\to$	$\neg a_{n-1}$	$\neg a_n$	$\neg a_{n+1}$	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	$\neg a$
a	a	a	a	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	a_1
$\neg a_1$	a	a	a		a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_2	a_1
$\neg a_2$	a	a	a		a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_3	a_2	a_2
$\neg a_3$	a	a	a		a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_4	a_3	a_3	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg a_{n-1}$	a	a			a_n	a_n	$\ldots$	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-1}
$\neg a_n$	0	a	a		a_{n+1}	a_n	$\ldots$	a_n	a_n	a_n	a_n
$\neg a_{n+1}$	0	0	a				$\ldots$				a_{n+1}
a_{n+1}	0	0	0	a	a	a	$\ldots$	a	a	a	a
a_n	0	0	0	0	a	a	$\ldots$	a	a	a	a
a_{n-1}	0	0	0	0	0	a	$\ldots$	a	a	a	a

Łatwo pokazać, że dla $\neg a_i \to a_{n+1} = a$ lub $\neg a_i \to a_{n+1} = a_{n+1}$, gdzie $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ otrzymamy **E**-algebrę. Powstałe w ten sposób algebry oznaczymy przez $\mathbf{A^n_{k11}}$.

Uwaga. Powyższą konstrukcję można przedstwić w następujący sposób:



4.2 Twierdzenie podstawowe

Każda gałąź tego drzewa wyznacza pewną **E**-algebrę nieskończoną.

Twierdzenie 29. *1. Każda z algebr na dowolnym poziomie n jest* **E***-algebrą.*

2. Każda gałąź generuje nieskończoną **E***-algebrę.*

Mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 30. *Istnieje $2^{\aleph_0}$ pre-maksymalnych podrozmaitości rozmaitości* **E***-algebr.*

Dowód. Udowodniliśmy powyżej, że istnieje $2^{\aleph_0}$ nieporównywalnych między sobą nieskończonych algebr prostych.

Należy udowodnić, że rozmaitość generowana przez każdą z nieskończonych **E**- algebr nie należy do rozmaitości generowanej przez żadną nieskończoną **E**-algebrę tego zbioru. Z twierdzenia Jónssona wszystkie podprosto nieredukowalne algebry rozmaitości $HSP(\mathbf{A})$ należą do $HSP_U(\mathbf{A})$.

Ustalmy więc nieskończoną **E**-algebrę $\mathbf{A_i}$ i rozpatrzmy zbiór $SP_U(\mathbf{A_i})$. Niech więc **B** będzie nieskończona, przeliczalna i należy do $SP_U(\mathbf{A})$. Algbery $\mathbf{A_i}$ będą opisywane przez następujące zdania pierwszego rzędu:

- $\mathbf{A_i}$ ma element najmniejszy i największy;
- nad elementem 0 i pod elementem 1 znajduje się dokładnie jeden element ; oznaczmy go przez a_0;
- bezpośrednio nad a_0 znajduje się negacja elementu a_0; oznaczmy ją przez $\neg a_0$;
- pod elementem $\neg a_0$ i nad elementem a znajduje się dokładnie jeden element; oznaczmy go przez a_1;
- bezpośrednio nad elementem a i pod elementem a_1 znajduje się negacja elementu a_1; oznaczmy ją przez $\neg a_1$, itd.

Ostatecznie algebra $\mathbf{A_i}$ będzie oparta na łańuchu.

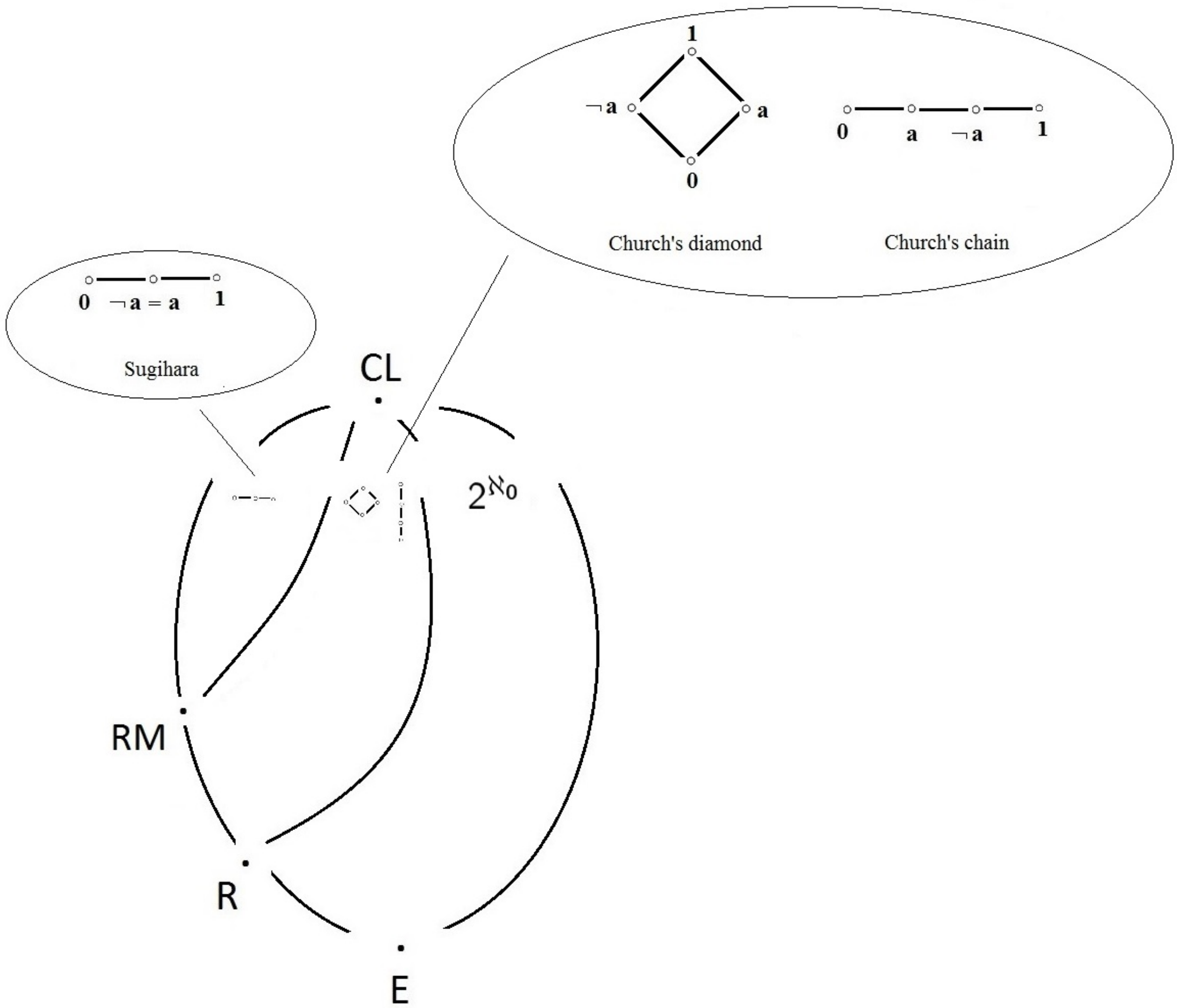
Związki między elementami tej algebry są opisywane przez równości biorące się z tabeli działań dla operacji $\rightarrow$. Z konstrukcji działania $\rightarrow$ wynika też, że generatorem tej algebry jest element oznaczony przez a_0. W związku z tym, każda nieskończona algebra należąca do $P_U(\mathbf{A_i})$ musi być izomorficzna z $\mathbf{A_i}$.

□

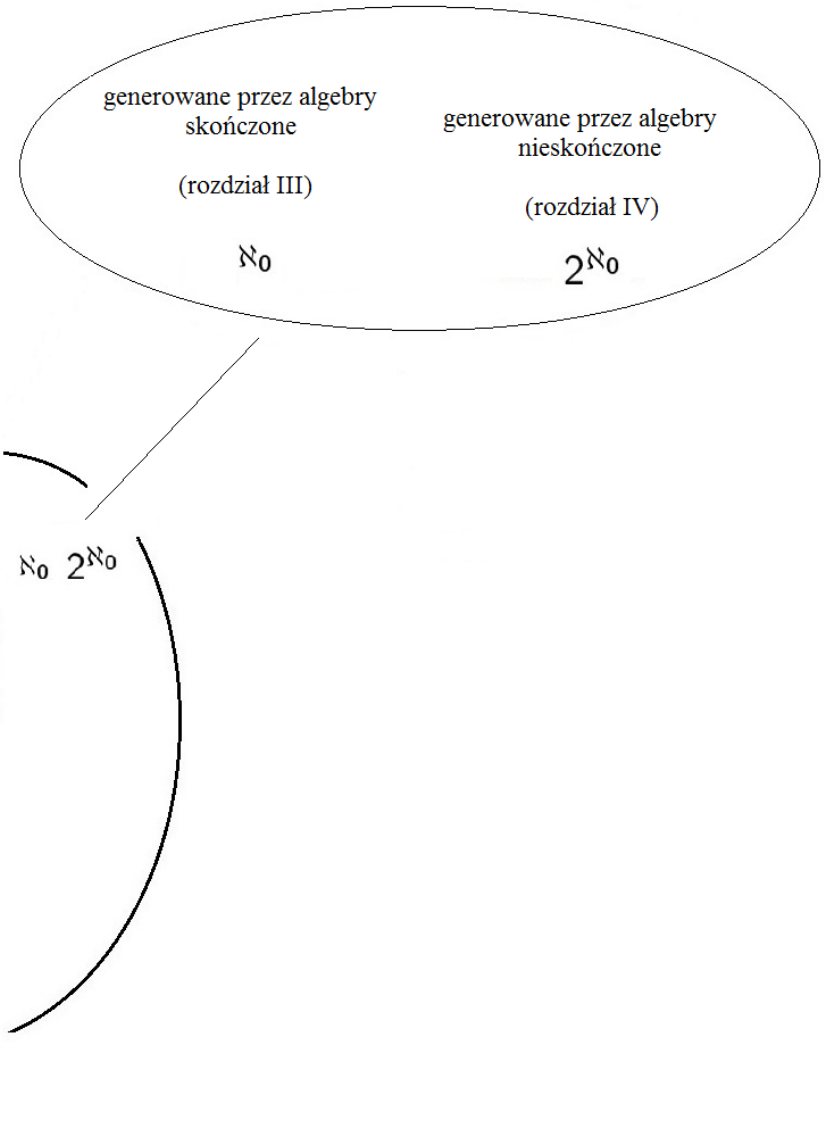
Zakończenie

A oto ilustracja wyników uzyskanych w rozprawie.

Wiadomo było, że logika **RM** ma jedno pre-maksymalne rozszerzenie, logika **R** ma trzy pre-maksymalne rozszerzenia (logiki **R** i **RM** są oczywiście rozszerzeniami logiki **E**). W rozprawie pokazano, że logika **E** ma nieskończenie wiele rozszerzeń pre-maksymanych:



Nieco dokładniej:



Bibliografia

[1] W. Ackermann, *Begründung Einer Strengen Implikation,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol.21, 2 (1956), pp. 113-128.

[2] A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,*Entailment. The Logic of relevance and necessity,* **Princeton University Press,** vol. I (1975).

[3] A.R. Anderson, N.D. Belnap, Jr.,J. Michael Dunn, *Entailment. The Logic of relevance and necessity,* **Princeton University Press,** vol. II (1922).

[4] N.D. Belnap, Jr.,*Intesional Models for First Degree Formula,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol.32, 1 (1967), pp. 1-22.

[5] K.Bimbó, J.M. Dunn, *Larisa Maksimova's early contributions to relevance logic* in: S.Odintsov(ed.) *Larisa Maksimowsa on Implication, Interpolation, and Definability,* **Springer**, 2018, pp.30-60.

[6] W.J.Blok, D.Pigozzi, *Algbebraizable logics,* **Memoirs of the American Mathematical Society,** 1989.

[7] J.M. Font, G.B. Rodriguez, *Note on algebraic models for relevance logic,* **Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematic,** vol. 36, 6 (1990), pp. 535–540.

[8] W. Dziobiak, *There are* $2^{\aleph_0}$ *Logics with the Relevance Principle Between* **R** *and* **RM***,* **Studia Logica,** vol.XLII (1983), pp. 49-61.

[9] L. Maksimowa, *Struktury s implikacjiej,* **Algebra and Logic,** vol. 12, 4 (1973), pp. 445-467.

[10] L. Maksimowa, *O Modeljach iscislenija E,* **Algebra and Logic,** vol. 6, 6 (1967), pp. 5-20.

[11] R.M. Martin, *Twenty-Third Annual Meeting of the Association for Symbolic Logic,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol.23, 4 (1958), pp. 456-461.

[12] R.K. Meyer, **E** *and* **S4***,* **Notre Dame Journal of Formal Logic,** vol. XI, 2 (1970), pp.181-199.

[13] K. Swirydowicz, *There exists exactly two maximal strictly relevant extensions of the relevant logic* **R***,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol.64, 3 (1999), pp. 1125-1154.

[14] K. Swirydowicz, *A Remark on the Maximal Extensions of the Relevant Logic* $\boldsymbol{R}$, **Reports on Mathematical Logic,** 29 (1995), 19-33.

[15] M. Tokarz, *Essays in matrix semantics of relevant logics,* **The Institute of Philosophy and Sociology of the Polish Academy of Sciences,** Warsaw 1980.