Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

**Rozprawa doktorska**
**dziedzina: NAUKI MATEMATYCZNE**
**dyscyplina: MATEMATYKA**

# Operatory kompozycji i miary Carlesona w teorii przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na obszarach

Michał Rzeczkowski

promotor
prof. dr hab. Mieczysław Mastyło

promotor pomocniczy
dr Paweł Mleczko

Poznań 2016

*Składam serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Mieczysławowi Mastyle za rozliczne uwagi, inspiracje matematyczne oraz okazaną życzliwość. Słowa podziękowania kieruję również do mojego Wspaniałego Kolegi i promotora pomocniczego dra Pawła Mleczki. Nade wszystko pragnę podziękować Mojej Żonie i Córkom.*

*Niniejsza rozprawa została przygotowana w okresie, gdy autor był stypendystą Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w subsydium profesorskim programu MISTRZ 7/2012.*

# Spis treści

# Wstęp

*A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.*

G. H. Hardy

Nic tak trafnie nie oddaje istoty matematycznych poszukiwań, jak powyższe słowa G. H. Hardy'ego. Niewątpliwie tymi trwałymi ideami z przytoczonego cytatu, są przestrzenie wprowadzone przez autora tych słów. Mimo upływu przeszło stu lat, tematyka przestrzeni Hardy'ego jest nadal aktualna i znajduje się w centrum badań teorii przestrzeni funkcji analitycznych. W niniejszej rozprawie rozwijając powstałe na przestrzeni lat idee, badać będziemy pewne naturalne uogólnienia klas wprowadzonych przez tego angielskiego matematyka.

Przypomnijmy, że dla funkcji $f$ holomorficznej na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$ płaszczyzny zespolonej ($f \in H(\mathbb{D})$) definiuje się następujące monotonicznie rosnące funkcje zmiennej $r$ w przedziale $[0, 1)$

$$M_p(f,r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt, \quad p \in (0,\infty),$$
$$M_\infty(f,r) := \sup_{0\leqslant t<2\pi} |f(re^{it})|.$$

*Przestrzeń Hardy'ego* $H^p(\mathbb{D})$, $p \in (0, +\infty]$, składa się z takich funkcji $f \in H(\mathbb{D})$, że

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \sup_{0\leqslant r<1} \big(M_p(f,r)\big)^{1/p} < +\infty,$$
$$\|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} := \sup_{0\leqslant r<1} M_\infty(f,r) < +\infty.$$

Przestrzeń $(H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})})$ jest przestrzenią Banacha, jeśli $p \in [1, +\infty]$, natomiast dla $p \in (0, 1)$ – przestrzenią quasi-Banacha.

Przestrzenie Hardy'ego po raz pierwszy pojawiły się w pracy G. H. Hardy'ego [19]. Analiza tych klas kontynuowana była przez F. Riesza [52] czy Hardy'ego i J. E. Littlewooda [20, 21]. Stopniowy rozkwit analizy funkcjonalnej i harmonicznej pozwolił z czasem na rozwój tej teorii w różnych kierunkach – przestrzenie Hardy'ego pojawiają się np. w zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi (badania zagadnień brzegowych eliptycznych równań różniczkowych), przy opisie przestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia na $\ell^2$ oraz wielu innych istotnych problemach analizy harmonicznej oraz teorii operatorów między przestrzeniami quasi-Banacha.

Z czasem zaczęto zastępować dysk jednostkowy bardziej skomplikowanymi obszarami na płaszczyźnie zespolonej. Naturalnym zbiorem wydawał się być pierścień – po pierwsze jest to obszar dwuspójny, więc nie jest on konforemnie równoważny z dyskiem, a po drugie funkcje na pierścieniu rozwijają się w szeregi Laurenta (w przypadku dysku mamy rozwinięcie w szereg Taylora). Badaniom przestrzeni Hardy'ego na pierścieniu poświęcone są prace D. Sarasona [58] i D. M. Boyda [3, 2, 4]. Fundamentalną rolę odegrał jednak dopiero artykuł W. Rudina [54], w którym autor zaproponował następującą definicję przestrzeni Hardy'ego $H^p(\Omega)$, dla dowolnego $p \in (0, +\infty)$, gdzie $\Omega$ jest obszarem: *przestrzeń $H^p(\Omega)$ zawiera takie funkcje analityczne $f$ na obszarze $\Omega$, dla których istnieje harmoniczna majoranta funkcji subharmonicznej $|f|^p$.*

Jeśli taka harmoniczna majoranta istnieje, to z twierdzenia Harnacka wynika również istnienie najmniejszej harmonicznej majoranty $v_f$ funkcji $|f|^p$. Wówczas dla ustalonego punktu $z_0 \in \Omega$ następujący wzór

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} := v_f(z_0)^{1/p}$$

definiuje normę w przestrzeni $H^p(\Omega)$, jeśli $p \in [1, +\infty)$ (odpowiednio quasi-normę, gdy $p \in (0, 1)$). Dodajmy, że z nierówności Harnacka wynika, że biorąc w powyższej formule inny punkt obszaru $\Omega$ dostajemy równoważne (quasi-) normy. Ponadto, jeśli $\Omega = \mathbb{D}$, a $z_0 = 0$, to otrzymany wzór pokrywa się z pierwotną formułą na normę w przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{D})$. Należy podkreślić, że z definicji Rudina wynika jeszcze inny ważny fakt – odwzorowania konforemne generują izometryczne izomorfizmy między klasami Hardy'ego na różnych (ale konforemnie równoważnych) obszarach Dirichleta. Fakt ten uzasadnia zatem motywację do badań przestrzeni Hardy'ego na obszarach wielospójnych płaszczyzny.

Wielospójność obszaru $\Omega$ w znaczący sposób zmienia naturę tych przestrzeni (w stosunku do pierwotnie rozpatrywanych klas Hardy'ego na dysku). Dla przykładu klasyczne twierdzenie Riesza głosi, że jeśli $u \in h^p(\mathbb{D})$ ($h^p(\mathbb{D})$ oznacza przestrzeń takich funkcji harmonicznych $u\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, dla których $\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt < +\infty$), to istnieje sprzężenie harmoniczne $v \in h^p(\mathbb{D})$ funkcji $u$ oraz dla dowolnego $0 \leqslant r < 1$ mamy

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{it})|^p dt \leqslant A_p \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt,$$

przy pewnej stałej $A_p$ zależnej jedynie od wykładnika $p$. W przypadku $H^p(\Omega)$ analogon tego twierdzenia jest niemożliwy. Opisana sytuacja nie jest niczym osobliwym – przestrzeń

$H^p(\Omega)$ nie posiada wielu własności, które ma przestrzeń $H^p(\mathbb{D})$. Więcej informacji o przestrzeniach Hardy'ego na obszarach można znaleźć w monografii [14]. Obecnie badania przestrzeni Hardy'ego na obszarach i operatorów na tych przestrzeniach prowadzone są m.in. przez I. Chalendar i J. R. Partingtona (patrz [5, 6]).

Współcześnie obok klas Hardy'ego bada się również pewne uogólnienia tych przestrzeni. Jako przykład należy wymienić tu chociażby *mieszane przestrzenie Hardy'ego* $H^{p,q,\alpha}(\mathbb{D})$, gdzie $0 < p \leqslant +\infty$, $0 < q$, $\alpha < +\infty$, które definiuje się jako zbiór tych funkcji holomorficznych $f$ na $\mathbb{D}$, dla których

$$\int_0^1 (1-r)^{q\alpha-1} M_p(f,r)^q dr < +\infty.$$

Przestrzenie te pojawiają się w kontekście badań związanych z teorią multiplikatorów (patrz [23, 24]). Innymi przykładami są przestrzenie *Hardy'ego–Lorentza* (patrz [25]), czy tzw. przestrzenie $HX(\mathbb{D})$, generowane za pomocą przestrzeni symetrycznych $X$ na odcinku $[0,2\pi)$ (patrz [43, 45]).

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku poznański matematyk R. Leśniewicz badał klasy *Hardy'ego–Orlicza* na dysku jednostkowym (patrz [34, 35, 36, 37, 38]). Studia nad tymi przestrzeniami kontynuowane były m.in. w pracach [10, 22, 26]. Współcześnie rozważania dotyczące przestrzeni Hardy'ego–Orlicza prowadzone są głównie w kontekście badań operatorów – głównie operatora kompozycji (porównaj [32] czy [31]).

Przypomnijmy, że fundamentalnym wynikiem w teorii przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{D})$, $p \geqslant 1$, jest twierdzenie Fatou–Riesza, które orzeka, że granica radialna $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f_r(e^{it})$ istnieje dla p.w. $t \in \mathbb{T} := [0,2\pi)$ oraz $\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}$. Ponadto współczynniki Fouriera $\widehat{f^*}(n)$ funkcji $f^*$ są równe zeru, gdy $n < 0$. Prawdziwa jest także implikacja odwrotna, tzn. dla dowolnej funkcji $g \in L^p(\mathbb{T})$, $p \geqslant 1$, której współczynniki Fouriera $\widehat{g}(n) = 0$ dla $n < 0$, analityczne rozszerzenie $P[g]\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, zdefiniowane wzorem

$$P[g](z) := \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

należy do $H^p(\mathbb{D})$, ponadto $g$ jest granicą radialną $(P[g])^*$ funkcji $P[g]$.

Powyższe twierdzenie ma swój analogon w przypadku obszaru wielospójnego $\Omega$, o „odpowiednio gładkim" brzegu $\partial\Omega$. Wówczas nie mówimy o granicy radialnej $f^*$ funkcji $f \in H^p(\Omega)$, ale o funkcji brzegowej, która jak się okazuje należy do pewnej domkniętej podprzestrzeni przestrzeni $L^p(\partial\Omega,\omega)$ z miarą harmoniczną $\omega$ na $\partial\Omega$ (patrz [54] lub [14]). Dodajmy, że w pewnych przypadkach, np. gdy $\Omega = \mathbb{A}$ jest pierścieniem, podprzestrzeń tę można opisać w terminach współczynników Fouriera (patrz [58]).

W 1932 roku Hardy i Littlewood udowodnili słynną nierówność (patrz [21]) zwaną w literaturze *nierównością Hardy'ego–Littlewooda*: *istnieje taka stała* $C_p > 0$, *że dla dowolnego* $f \in H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < 1$ *mamy*

$$\|f\|_{B^{1/p-2}(\mathbb{D})} := \int_0^1 (1-r)^{1/p-2} M_1(f,r) dr \leqslant C_p \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

Innymi słowy operator inkluzji działający z przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < 1$, w *wagową przestrzeń Bergmana* $B^{1/p-2}(\mathbb{D})$ jest ograniczony. Niemal czterdzieści lat później P. L. Duren, B. W. Romberg i A. L. Shields w pracy [13] badali przestrzenie dualne obydwu przestrzeni i udowodnili, że $(H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{B^{1/p-2}(\mathbb{D})})^* = (H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})})^*$ dla dowolnego $0 < p < 1$. W dowodzie tego faktu kluczową rolę odgrywa opis topologii Mackey'a na przestrzeni $H^p(\mathbb{D})$. Niech $(X, \tau)$ będzie przestrzenią liniowo-topologiczną, której przestrzeń dualna $(X, \tau)^*$ oddziela punkty w $X$. Przypomnijmy, że *topologią Mackey'a* na przestrzeni liniowo-topologicznej $(X, \tau)$ nazywamy najsilniejszą lokalnie wypukłą topologię $\mu$ taką, że

$$(X, \tau)^* = (X, \mu)^*.$$

Zagadnienie badania topologii Mackey'a przestrzeni Hardy'ego na obszarach oraz uogólnień przestrzeni Hardy'ego kontynuowane było w kolejnych latach. W artykule [3] D. M. Boyd znalazł analogiczny opis w przypadku przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{A})$ na pierścieniu oraz opis przestrzeni dualnych $H^p(\mathbb{A})^*$. W pracy [48] zagadnienie to badane było dla przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na dysku, zaś w pracy [46] w przypadku wektorowych przestrzeni Hardy'ego.

Jednym z najważniejszych kierunków badań w teorii przestrzeni Hardy'ego jest badanie specjalnych klas operatorów, których dziedziną są przestrzenie $H^p(\mathbb{D})$. Szczególna rola w tym kontekście przypada operatorowi kompozycji. Przypomnijmy, że gdy $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficznym odwzorowaniem dysku w siebie operator $C_\varphi$ definiujemy wzorem:

$$C_\varphi f := f \circ \varphi, \quad f \in H(\mathbb{D}).$$

Studia nad operatorem kompozycji w zadziwiający sposób łączą elementarne zagadnienia teorii operatorów z pięknymi klasycznymi wynikami teorii funkcji holomorficznych. W przypadku bardziej skomplikowanych obszarów aniżeli obszary jednospójne uwidaczniają się także związki z analizą harmoniczną.

Studia nad operatorem złożenia sięgają początków teorii przestrzeni Hardy'ego. Pierwszym znaczącym wynikiem była *Zasada podporządkowania Littlewooda* z 1925 roku (patrz [40]), z której wynikał wniosek o ciągłości tegoż operatora dla dowolnej funkcji generującej. Stopniowo pojawiały się bardziej wyrafinowane pytania, na przykład dotyczące zwartości operatora kompozycji na $H^p(\mathbb{D})$. Problem zwartości badał H. J. Schwartz (patrz [59]). Sformułował on użyteczne kryterium do badania operatorów kompozycji: *operator kompozycji* $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ograniczonego w* $H^p(\mathbb{D})$ *ciągu* $\{f_n\}$ *zbieżnego niemal jednostajnie do* 0, *mamy* $\|C_\varphi f_n\|_{H^p(\mathbb{D})} \to 0$.

Z powyższego kryterium zwanego *kryterium Schwartza* łatwo wywnioskować (biorąc za $f_n(z) = z^n$, $z \in \mathbb{D}$), że symbole zwartych operatorów kompozycji $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ spełniają zależność $|\varphi^*| < 1$ p.w. na $\partial\mathbb{D}$, przy czym jeśli $\|\varphi\|_{H^\infty(\mathbb{D})} < 1$, to $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ jest zwarty. Ponadto, okazuje się (por. [63]), że dla dowolnych $p, q \in [1, +\infty)$ zwartość operatora $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ jest równoważna zwartości operatora $C_\varphi : H^q(\mathbb{D}) \to H^q(\mathbb{D})$. Stąd badania kontynuowano w szczególnym przypadku $p = 2$ (jak wiadomo przestrzeń $H^2(\mathbb{D})$ jest przestrzenią Hilberta). Z czasem formułowano nowe twierdzenia, których istotą było ilościowe ujęcie tego, jak w otoczeniu brzegu dysku musi zachowywać się funkcja $\varphi$, aby operator kompozycji był zwarty. Przykładowo w pracy [63] pokazano, że jeśli obraz $\varphi(\mathbb{D})$ zawiera się w wielokącie wpisanym w dysk $\mathbb{D}$, to operator kompozycji $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ jest zwarty (co więcej, jest operatorem Hilberta–Schmidta). W rozprawie doktorskiej [59] Schwartz udowodnił, że jeśli $\varphi(\mathbb{D})$ zawiera dysk styczny do $\mathbb{D}$, to taki operator kompozycji nie jest zwarty na $H^2(\mathbb{D})$. W 1986 roku B. D. MacCluer i J. H. Shapiro podali charakteryzację zwartych operatorów kompozycji generowanych przez różnowartościowe funkcje $\varphi$ (patrz [42]). Opis był następujący: *jeśli* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *jest różnowartościowa, to* $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = +\infty.$$

Problem charakteryzacji zwartych operatorów kompozycji, przez wiele lat eksplorowany, udało się ostatecznie rozwiązać w latach osiemdziesiątych XX wieku. J. H. Shapiro (patrz [61]) podał pełną charakteryzację zwartych operatorów kompozycji w terminach funkcji Nevanlinny: *Operator* $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = +\infty.$$

B. D. MacCluer [41] podała analogiczną charakteryzację przy użyciu miar Carlesona: *operator* $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy miara* $\mu_\varphi$ *jest znikającą miarą Carlesona*. Przypomnijmy, że miarę borelowską $\mu$ na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$ nazywamy *miarą Carlesona* jeśli dla dowolnego okna Carlesona o środku w punkcie $\xi \in \partial\mathbb{D}$ i promieniu $0 < h < 1$, tj. zbioru

$$W(\xi,h) = \left\{z \in \mathbb{D} : |z| > 1-h,\ |\arg(z\overline{\xi})| < h\right\}$$

zachodzi warunek

$$\mu(W(\xi,h)) = O(h), \quad h \to 0.$$

Jeśli zaś spełniony jest warunek

$$\mu(W(\xi,h)) = o(h), \quad h \to 0,$$

to miarę $\mu$ nazywamy *znikającą miarą Carlesona*. Wyniki z pracy J. H. Shapiro [61] zostały uogólnione przez S. D. Fishera i J. E. Shapiro na przypadek przestrzeni $H^p(\Omega)$, gdzie $\Omega$ jest obszarem wielospójnym, przy użyciu analogonu funkcji Nevanlinny (patrz [15]). Miary Carlesona w kontekście przestrzeni Hardy'ego $H^p(\Omega)$ na obszarach wielospójnych studiowane były w pracach [49, 50]. Z wyników tych w szczególności otrzymać można opis ograniczonych operatorów kompozycji. Badania te nie były jednak kontynuowane w kierunku opisu innych własności operatora kompozycji (np. zwartości, słabej zwartości, porządkowej ograniczoności) na przestrzeniach Hardy'ego $H^p(\Omega)$ na obszarach.

Praca MacCluer (w połączeniu ze znanym lematem Carlesona) doprowadziła do studiowania innej klasy operatorów – operatorów inkluzji działających z klasy Hardy'ego do przestrzeni quasi-Banacha. Stosując odpowiednie miary przy badaniu takiego operatora otrzymujemy w szczególności wyniki dla operatora kompozycji. Tego typu podejście często stosuje się współcześnie do badań operatora złożenia, a zainteresowanie tą tematyką nie słabnie – problemy dotyczące opisu zwartości, słabej zwartości, nuklearności czy absolutnej $p$-sumowalności studiowane są dla różnego typu wariantów przestrzeni Hardy'ego (jak np. Hardy'go–Orlicza czy Hardy'ego–Lorentza) z użyciem różnych narzędzi analizy funkcjonalnej. Odsyłamy tu do prac [15, 29, 31, 33, 41, 45, 53, 61] oraz monografii [9, 62], a także [32].

W niniejszej rozprawie, rozszerzając koncepcję W. Rudina, w rozdziale 2 zdefiniujemy i badać będziemy przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na ogólnych obszarach płaszczyzny zespolonej. Naszym zadaniem będzie przedstawienie pewnych izomorficznych i izometrycznych charakteryzacji tych przestrzeni. Pokażemy między innymi analogon twierdzenia Riesza–Fatou oraz twierdzenia o reprezentacji przestrzeni Hardy'ego–Orlicza w postaci pewnych sum prostych. Rozważać będziemy także przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu – podamy opis (w terminach współczynników Fouriera) domkniętej podprzestrzeni przestrzeni Orlicza $L^{\Phi}(\partial\mathbb{A})$ na brzegu pierścienia, izomorficznej z przestrzenią $H^{\Phi}(\mathbb{A})$. Studiować będziemy również pewne własności przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na obszarach kołowych, istotne przy badaniu operatora kompozycji działającego między tymi przestrzeniami.

Rozdział 3 rozprawy opisuje wyniki dotyczące powłok Banacha w przypadku przestrzeni Hardy'ego–Orlicza $H^{\Phi}(\mathbb{A})$ na pierścieniu $\mathbb{A}$, generowanych przez funkcje Orlicza $\Phi$, dające się dobrze przybliżać (wklęsłymi) funkcjami potęgowymi. W szczególności w przypadku funkcji potęgowych otrzymujemy wyniki Boyda z pracy [3] dla przestrzeni Hardy'ego $H^{p}(\mathbb{A})$ $(0 < p < 1)$. Stosując uzyskaną w pierwszej części rozdziału 3 izomorficzną charakteryzację wagowych przestrzeni Bergmana udowodnimy analogon nierówności Hardy'ego–Littlewooda. Następnie rozszerzając pewne metody z pracy J. H. Shapiro [60] otrzymamy opis powłok Banacha za pomocą, którego wyznaczymy opis przestrzeni dualnych do przestrzeni $H^{\Phi}(\mathbb{A})$.

W rozdziale 4 badane są operatory kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na obszarach kołowych. Na początku rozdziału pokażemy, że dla dowolnej funkcji holomorficznej $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ operator $C_{\varphi}\colon H^{\Phi}(\Omega) \to H^{\Phi}(\Omega)$ jest ograniczony. Zasadnicza część rozdziału poświęcona jest rozważaniom dotyczącym zwartości tegoż operatora na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na obszarach kołowych. W celu uzyskania opisu zwartych operatorów złożenia w terminach miar Carlesona, badać będziemy operatory inkluzji działające z przestrzeni $H^{\Phi}(\Omega)$ w przestrzeń $L^{\Phi}(\overline{\Omega},\mu)$ nad przestrzenią mierzalną $(\overline{\Omega},\mathscr{B},\mu)$ z miarą borelowską $\mu$. Udowodnimy również, że funkcja Carlesona oraz funkcja licząca Nevanlinny są równoważne, skąd wynikać będzie charakteryzacja zwartych operatorów kompozycji w terminach funkcji liczącej Nevanlinny. Pokażemy także, że w przypadku skończenie wartościowych funkcji generujących istnieje prostsza charakteryzacja zwartych operatorów kompozycji. Ponadto w rozdziale 4 prowadzone są także badania innych własności operatorów złożenia. Podane zostaną m.in. pewne opisy i charakteryzacje słabo zwartych, zupełnie ciągłych oraz porządkowo ograniczonych operatorów kompozycji.

Rozdział 1

# Preliminaria

Celem niniejszego rozdziału jest ustalenie notacji oraz przypomnienie podstawowych pojęć i faktów używanych w dalszej części pracy.

Niech $X$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). *Quasi-normą* w $X$ nazywamy funkcjonał $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ spełniający warunki

(i) Jeśli $\|x\| = 0$, to $x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ dla dowolnych $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

(iii) Istnieje taka stała $C \geqslant 1$, że dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|).$$

W przypadku, gdy $C > 1$ przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy quasi-unormowaną, natomiast gdy $C = 1$ funkcjonał $\|\cdot\|$ nazywamy normą, a $(X, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną. Przestrzeń quasi-unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią quasi-Banacha, gdy jest zupełna, to znaczy gdy każdy ciąg Cauchy'ego (w sensie $\|\cdot\|$) jest ciągiem zbieżnym (w sensie $\|\cdot\|$) do pewnego elementu przestrzeni $X$.

Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią quasi-unormowaną, $x \in X$ i $r > 0$, to przez $B(x, r)$ oznaczamy zbiór $B(x, r) := \{y \in X : \|y - x\| \leqslant r\}$ i nazywamy kulą (domkniętą) o promieniu $r$ i środku w $x$. Jeśli $x = 0$ i $r = 1$, to piszemy $B_X$ zamiast $B(0, 1)$.

Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ oznacza przestrzeń z zupełną i $\sigma$-skończoną miarą na $\Sigma$, natomiast $L^0(\Omega) := L^0(\mu) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ niech będzie przestrzenią (klas równoważności względem równości $\mu$–prawie wszędzie) rzeczywistych funkcji mierzalnych na $\Omega$ z topologią zbieżności według miary na $\mu$–skończonych zbiorach. Mówimy, że $X \subset L^0(\Omega)$ jest *kratą quasi-Banacha* z częściowym porządkiem „$\leqslant$" ($x \leqslant y$ $\mu$-p.w.), jeżeli istnieje $u \in X$ takie, że $u > 0$ $\mu$-p.w. na $\Omega$ oraz dla każdego $x \in L^0$ i $y \in X$ z warunku $|x| \leqslant |y|$ wynika, że $x \in X$ oraz $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Jeżeli $(X,\tau)$ jest przestrzenią liniowo-topologiczną taką, że $(X,\tau)^*$ oddziela punkty w $X$, to *topologią Mackey'a* w $X$ nazywamy najsilniejszą lokalnie wypukłą topologię $\mu$ w $X$, dla której $(X,\mu)^* = (X,\tau)^*$. Gdy $(X,\|\cdot\|)$ jest przestrzenią quasi–Banacha, której dual $X^*$ oddziela punkty w $X$, wówczas topologia Mackey'a jest generowana przez normę $\|\cdot\|_c$, która jest funkcjonałem Minkowskiego wypukłej powłoki kuli jednostkowej $B_X$ przestrzeni $X$. Uzupełnienie $(X,\|\cdot\|_c)$ nazywamy *powłoką Banacha* i oznaczamy przez $\widehat{X}$.

Niech $X, Y$ będą przestrzeniami liniowo-topologicznymi. Odwzorowanie $T: X \to Y$ nazywamy *operatorem*, gdy jest ciągłe. Przestrzeń wszystkich operatorów liniowych z $X$ w $Y$ oznaczamy $\mathscr{L}(X,Y)$. Jeśli $X \subset Y$, to $X \hookrightarrow Y$ wskazuje na to, że odwzorowanie liniowe $j: X \to Y$ dane wzorem $j(x) = x$ dla $x \in X$ jest operatorem. Operator $j$ nazywamy operatorem *inkluzji* lub *włożenia*. Przypomnijmy, że gdy $X$, $Y$ są przestrzeniami quasi-Banacha, to odwzorowanie liniowe $T: X \to Y$ jest operatorem wtedy i tylko wtedy, gdy $T$ jest ograniczony, tzn. istnieje taka stała $C > 0$, że $\|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X$, dla wszystkich $x \in X$. W tym przypadku funkcjonał $\|\cdot\|: \mathscr{L}(X,Y) \to \mathbb{R}_+$ określony wzorem

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leqslant 1\right\}, \quad T \in \mathscr{L}(X,Y),$$

nazywać będziemy *normą* operatora. Wiadomo, że $(\mathscr{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ jest przestrzenią quasi--Banacha (Banacha, gdy $Y$ jest przestrzenią Banacha). W szczególności $X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{K})$ przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\|_X \leqslant 1\}, \quad x^* \in X^*.$$

Jeżeli $X$ i $Y$ są przestrzeniami unormowanymi, a $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, to dla każdego $y^* \in Y^*$ funkcjonał $T^*y^*$ określony na $X$ wzorem $T^*y^*(x) := y^*(Tx)$, $x \in X$ jest liniowy i ciągły. W konsekwencji $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$. Wiadomo, że $\|T^*\| = \|T\|$. Zdefiniowany powyżej operator $T^*$ nazywamy *operatorem sprzężonym* do $T$.

W rozprawie rozważać będziemy różne klasy operatorów. Niech $X, Y$ będą dowolnymi przestrzeniami Banacha. Operator $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ nazywamy *operatorem zwartym*, gdy $T(B_X)$ jest warunkowo zwartym zbiorem w $Y$. Operatory zwarte między przestrzeniami Banacha tworzą domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $\mathscr{L}(X,Y)$. Operator $T: X \to Y$ nazywamy *słabo zwartym*, gdy obrazem dowolnego ograniczonego podzbioru $X$ jest warunkowo słabo zwarty podzbiór $Y$, tzn. jego domknięcie w słabej topologii $Y$ jest zwarte. Operator $T: X \to Y$ nazwiemy *zupełnie ciągłym*, jeżeli przekształca ciągi słabo zbieżne w $X$ w ciągi normowo zbieżne w $Y$. Operator $T: X \to Z$, gdzie $X$ jest przestrzenią Banacha, a $Z$ podprzestrzenią kraty Banacha $Y$ nazywamy *porządkowo ograniczonym*, jeśli istnieje takie $y \in Y$, że $|Tx| \leqslant y$ dla wszystkich $x \in B_X$.

Operator $T$ z niepustego podzbioru $X_0$ przestrzeni $S(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ wszystkich funkcji prostych $\mu_1$-całkowalnych do $L^s(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ nazywamy *quasi-liniowym*, gdy istnieje taka stała $K > 0$, że $T(x+y) \leqslant K(|Tx| + |Ty|)$ dla wszystkich $x, y \in X_0$ takich, że $x + y \in X_0$. Jeżeli $K = 1$, to operator $T$ nazywamy *subliniowym* (w $X_0$).

Operator quasi-liniowy $T: L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L^q(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ nazywamy *operatorem mocnego typu* $(p,q)$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, gdy istnieje takie $C > 0$, że dla każdego $f \in L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ zachodzi nierówność

$$\|Tf\|_q \leqslant C\|f\|_p.$$

Mówimy, że $T$ jest *operatorem słabego typu* $(p,q)$, gdy istnieje takie $C>0$, że dla każdego $f \in L^p(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ oraz dla każdego $\lambda>0$ zachodzi nierówność

$$\mu_2(E_\lambda(Tf)) \leqslant \left(\frac{M}{\lambda}\|f\|_p\right)^q,$$

gdzie $E_\lambda(Tf) := \{\nu \in \Omega_2 : |Tf(\nu)| > \lambda\}$ dla $\lambda>0$. W powyższych definicjach symbole $\|\cdot\|_p$ oraz $\|\cdot\|_q$ oznaczają normy w przestrzeniach $L^p(\mu_1)$ i $L^q(\mu_2)$ odpowiednio.

## 1.1. Funkcje Orlicza i przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na dysku

Funkcję $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nazywać będziemy *funkcją Orlicza*, jeśli jest ona niemalejąca, ciągła, $\Phi(u)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u=0$ oraz $\lim_{u\to+\infty}\Phi(u)=+\infty$. W pracy często będziemy zakładać, że $\Phi$ jest wypukła. Z wypukłości funkcji $\Phi$ wynika istnienie pochodnych lewostronnych tej funkcji, ponadto spełniony jest wzór

$$\Phi(x)=\int_0^x \Phi'(t)\mathrm{d}t, \quad x>0,$$

gdzie $\Phi'$ oznacza pochodną lewostronną $\Phi$.

Funkcję $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to [0,+\infty]$ określoną wzorem

$$\Psi(x)=\sup_{y\geqslant 0}\{yx-\Phi(y)\}, \quad x\geqslant 0,$$

nazywamy *funkcją dopełniającą* w sensie Younga do $\Phi$. Fakt ten zapisujemy $\Psi=\Phi^*$.

Nasze rozważania dotyczące przestrzeni Hardy'ego–Orlicza będziemy często prowadzić przy dodatkowych warunkach na funkcje Orlicza, które opisane są poniżej. Warunki te pojawiły się wcześniej m.in. w monografiach [27, 51] oraz pracy [32].

**Warunki umiarkowanego wzrostu.** Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta_1$ ($\Phi\in\Delta_1$), jeśli istnieją takie $x_0>0$, $c>0$, że dla dowolnych $x,y\geqslant x_0$

$$\Phi(xy)\leqslant c\Phi(x)\Phi(y).$$

Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta_2$ ($\Phi\in\Delta_2$), jeśli istnieją takie $x_0>0$, $K>1$, że dla dowolnego $x\geqslant x_0$

$$\Phi(2x)\leqslant K\Phi(x).$$

**Warunki szybkiego wzrostu.** Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta^0$ ($\Phi\in\Delta^0$), jeśli istnieje takie $\beta>1$, że

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Phi(\beta x)}{x}=+\infty.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $\Phi$ określona wzorem $\Phi(x)=\exp[(\log(x+1))^{3/2}]-1$ spełnia warunek $\Delta^0$.

Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta^1$ ($\Phi \in \Delta^1$), jeśli istnieje takie $\beta > 1$, że nierówność

$$x\Phi(x) \leqslant \Phi(\beta x)$$

zachodzi dla dużych $x$. Warunek $\Phi \in \Delta^1$ implikuje $\Phi(x) \geqslant \exp(\alpha(\log x)^2)$ dla pewnego $\alpha > 0$ i dostatecznie dużych $x$ (patrz [51, Proposition 2]). Przykładem funkcji Orlicza $\Phi \in \Delta^1$ jest funkcja $\Phi(x) = \exp[(\log(x+1))^2] - 1$ dla $x \geqslant 0$.

Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta^2$ ($\Phi \in \Delta^2$), jeśli istnieje takie $\alpha > 1$, że

$$(\Phi(x))^2 \leqslant \Phi(\alpha x)$$

dla dużych $x$. Warunek $\Phi \in \Delta^2$ implikuje, że $\Phi(x) \geqslant \exp(x^\alpha)$ dla pewnego $\alpha > 0$ i odpowiednio dużych $x$ patrz [51, Proposition 6]). Można sprawdzić, że $\Phi(x) = \exp(x^2) - 1$ spełnia $\Delta^2$.

**Warunki regularnego wzrostu.** Mówimy, że $\Phi \in \nabla_2$, jeśli funkcja $\Phi^*$ spełnia warunek $\Delta_2$ (równoważnie: istnieją takie $\beta > 1$ oraz $x_0 > 0$, że $\Phi(\beta x) \geqslant 2\beta\Phi(x)$ dla $x \geqslant x_0$). Łatwo sprawdzić, że jeśli $\Phi \in \nabla_2$, to $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, gdy $x \to +\infty$.

Mówimy, że $\Phi$ spełnia warunek $\nabla_1$ ($\Phi \in \nabla_1$), jeśli funkcja $\Phi^*$ spełnia warunek $\Delta_1$. Równoważnie $\Phi(x)\Phi(y) \leqslant \Phi(bxy)$ dla pewnego $b > 0$ i dużych $x, y$. Zauważmy, że na przykład $x \mapsto x^p \in \nabla_1$, ale $x \mapsto x^p \log(x+1) \notin \nabla_1$. Zachodzą następujące zależności (patrz [51], str. 43):

$$(\Phi \in \Delta^2) \Rightarrow (\Phi \in \Delta^1) \Rightarrow (\Phi \in \Delta^0) \Rightarrow (\Phi \in \nabla_2),$$
$$(\Phi \in \Delta^2) \Rightarrow (\Phi \in \nabla_1) \Rightarrow (\Phi \in \nabla_2).$$

Ponadto $\Phi \in \Delta^1$ nie pociąga za sobą $\Phi \in \nabla_1$, a $\Phi \in \nabla_1$ nie implikuje $\Phi \in \Delta^0$ – jeśli $\Phi(x) = x^p$, $x \geqslant 0$ i $p \geqslant 1$, to $\Phi \in \nabla_1$, ale $\Phi \notin \Delta^0$.

**Klasa $\boldsymbol{\Delta}(\alpha, \beta)$.** Niech $\alpha, \beta$ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha \leqslant \beta$. Mówimy, że funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta(\alpha, \beta)$, jeśli istnieją takie $t_0 \geqslant 0$ oraz $C > 0$, że dla dowolnego $t \geqslant t_0$ oraz dowolnego $\lambda \geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$\Phi(\lambda t) \leqslant C^{-1}\lambda^\beta \Phi(t),$$
$$\Phi(\lambda t) \geqslant C\lambda^\alpha \Phi(t).$$

Ponadto, jeśli $t_0 = 0$, $C = 1$ i $t \mapsto \Phi(t^{1/\alpha})$ jest funkcją wypukłą na $\mathbb{R}_+$, to będziemy pisać $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$. Podklasa $\overline{\Delta(\alpha, \beta)} \subset \Delta(\alpha, \beta)$ klasy $\Delta(\alpha, \beta)$ została wprowadzona z technicznych względów. W pracy [48] pokazano, że dla każdej funkcji $\Phi \in \Delta(\alpha, \beta)$ istnieje funkcja $\Psi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$ równoważna do $\Phi$, co oznacza, że nierówność

$$K^{-1}\Psi(t) \leqslant \Phi(t) \leqslant K\Psi(t), \quad t \geqslant t_0$$

zachodzi dla pewnej stałej $K$ oraz pewnego $t_0 \geqslant 0$. W szczególności $L^\Psi = L^\Phi$ z równoważnością norm. Łatwo również sprawdzić, że dla $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$ mamy

$$\Phi(x+y) \leqslant 2^\beta(\Phi(x) + \Phi(y)), \quad x, y \geqslant 0.$$

**Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza.** Dla dowolnej funkcji Orlicza $\Phi$ symbolem $\rho_\Phi$ oznaczać będziemy *modular*, czyli następujący funkcjonał $\rho_\Phi \colon L^0(\Omega,\Sigma,\mu) \to [0,+\infty]$

$$\rho_\Phi(f) := \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu, \quad f \in L^0(\Omega,\Sigma,\mu).$$

*Przestrzenią Orlicza* $L^\Phi(\Omega) := L^\Phi(\Omega,\Sigma,\mu)$ nazywamy przestrzeń (klas równoważności) $\Sigma$-mierzalnych funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dla których istnieje taka stała $\varepsilon > 0$, że

$$\rho_\Phi(\varepsilon f) < +\infty.$$

Będziemy również pisać krótko $L^\Phi(\mu)$, gdy wiadomo jaką przestrzeń mierzalną rozpatrujemy. Łatwo sprawdzić, że jeśli istnieje takie $K > 0$, że $\Phi(t/2K) \leqslant \Phi(t)/2$ dla wszystkich $t > 0$, to $L^\Phi(\Omega)$ jest kratą quasi-Banacha z quasi-normą $\|\cdot\|_{L^\Phi(\Omega)}$ określoną wzorem

$$\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} := \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \rho_\Phi(f/\varepsilon) \leqslant 1\Big\}, \quad f \in L^\Phi(\Omega).$$

Jak wiadomo $\|\cdot\|_\Phi$ jest normą (nazywaną *normą Luxemburga*), gdy $\Phi$ jest funkcją wypukłą.

Zauważmy, że jeśli $\mu(\Omega) < +\infty$ oraz $\Phi \in \Delta_2$, to $L^\Phi(\Omega) = M^\Phi(\Omega) = E^\Phi(\Omega)$, gdzie

$$\begin{aligned} L^\Phi &:= \Big\{f \in L^0(\Omega) : \rho_\Phi(\lambda f) < +\infty, \text{ dla pewnego } \lambda > 0\Big\}, \\ M^\Phi &:= \Big\{f \in L^0(\Omega) : \rho_\Phi(\lambda f) < +\infty, \text{ dla dowolnego } \lambda > 0\Big\}, \\ E^\Phi &:= \Big\{f \in L^0(\Omega) : \rho_\Phi(f) < +\infty\Big\}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy również, że jeśli funkcje Orlicza $\Phi, \Psi$ są wypukłe oraz $\Psi \in \Delta_2$, to zachodzą następujące izomorficzne zależności między przestrzeniami i przestrzeniami sprzężonymi (patrz [51])

$$L^\Phi \cong (L^\Psi)^*, \quad (M^\Phi)^* \cong L^\Psi,$$

gdzie $\Phi$ i $\Psi$ są funkcjami sprzężonymi w sensie Younga.

W dalszym ciągu $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ będzie oznaczać dysk jednostkowy, zaś $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$. Dla $f \in H(\mathbb{D})$ oraz $r \in (0,1)$ oznaczmy przez $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *dylatację* funkcji $f$ daną wzorem

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Przestrzenią *Hardy'ego–Orlicza* na dysku jednostkowym $H^\Phi(\mathbb{D})$ nazywamy przestrzeń wszystkich takich funkcji $f \in H(\mathbb{D})$, że

$$\|f\|_{H^\Phi(\mathbb{D})} := \sup_{0 \leqslant r < 1} \|f_r\|_{L^\Phi(\mathbb{T})} < +\infty.$$

Zauważmy, że jeśli istnieje takie $K > 0$, że $\Phi\big(t/2K\big) \leqslant \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla $t > 0$, to funkcjonał $\|\cdot\|_{H^\Phi(\mathbb{D})}$ jest quasi-normą w $H^\Phi(\mathbb{D})$ $\big(\|\cdot\|_{L^\Phi(\mathbb{T})}$ jest quasi-normą w $L^\Phi(\mathbb{T})\big)$ spełniającą nierówność

$$\|f + g\|_{H^\Phi((\mathbb{D})} \leqslant K\Big(\|f\|_{H^\Phi((\mathbb{D})} + \|g\|_{H^\Phi((\mathbb{D})}\Big), \quad f,\ g \in H^\Phi(\mathbb{D}),$$

zatem jest normą, gdy $\Phi$ jest wypukłą funkcją Orlicza. Zauważmy również, że dla $p \in (0, +\infty)$ i $\Phi(t) = t^p$, $t \geqslant 0$, przestrzeń $H^\Phi(\mathbb{D})$ jest identyczna z klasyczną przestrzenią Hardy'ego $H^p(\mathbb{D})$.

Następujące twierdzenie (patrz [32, Proposition 3.1]) jest uogólnieniem twierdzenia Riesza–Fatou dla klasycznych przestrzeni Hardy'ego.

**Twierdzenie 1.1.** *Niech $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Dla każdej wypukłej funkcji Orlicza $\Phi$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $\sup_{0\leqslant r<1} \|f_r\|_{L^\Phi(\mathbb{T})} < +\infty$, *gdzie* $f_r(t) = f(re^{it})$, $t \in \mathbb{T}$.

(ii) *Istnieje funkcja* $f^* \in L^\Phi(\mathbb{T})$, *której współczynniki Fouriera* $\widehat{f^*}(n) = 0$ *dla* $n < 0$ *oraz* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \widehat{f^*}(n) z^n$, $z \in \mathbb{D}$.

*Jeśli warunki te są spełnione, to* $\|f^*\|_{L^\Phi(\mathbb{T})} = \sup_{0\leqslant r\leqslant 1} \|f_r\|_{L^\Phi(\mathbb{T})}$.

W dalszym ciągu $HM^\Phi(\mathbb{D})$ oznaczać będzie domknięcie $H^\infty(\mathbb{D})$ w normie $H^\Phi(\mathbb{D})$.

**Twierdzenie 1.2** ([32, Proposition 3.4])**.** *Dla dowolnego* $f \in HM^\Phi(\mathbb{D})$ *mamy*

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|_{H^\Phi(\mathbb{D})} = 0.$$

*Ponadto, przestrzeń wielomianów określonych na* $\mathbb{D}$ *stanowi gęsty podzbiór w* $HM^\Phi(\mathbb{D})$.

## 1.2. Obszary i odwzorowania konforemne

W rozprawie będziemy korzystać z pewnych twierdzeń z monografii [14, 18]. Dowody tych twierdzeń w wielu miejscach w istotny sposób opierają się na fakcie, że płaszczyzna zespolona rozszerzona $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ jest przestrzenią topologiczną zwartą. Przypomnijmy, że w $\mathbb{C}^*$ otoczenia punktów zdefiniowane są następująco: otoczeniem otwartym punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ jest każdy zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}$, $r > 0$, a otoczeniem otwartym punktu $\infty$, zbiór postaci $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > r\} \cup \{\infty\}$, $r > 0$. Wiadomo, że $\mathbb{C}^*$ jest homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową (rzut stereograficzny jest homeomorfizmem), a zatem $\mathbb{C}^*$ jest zwarta i metryzowalna. Przez sąsiedztwo punktu $a \in \mathbb{C}$ rozumieć będziemy zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - a| < r\}$, $r > 0$, a przez sąsiedztwo punktu $\infty$ – zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > r\}$, $r > 0$.

Zbiory otwarte i spójne w $\mathbb{C}^*$ nazywać będziemy obszarami. Maksymalne podzbiory spójne danego zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ nazywamy *składowymi*. Mówimy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ *nie rozcina płaszczyzny*, gdy $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ jest zbiorem spójnym.

Jeśli $\Omega$ jest obszarem, to ilość składowych dopełnienia ($\mathbb{C} \setminus \Omega$ względnie $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$) nazywamy *rzędem spójności*. W szczególności obszar, który nie rozcina płaszczyzny, nazywamy *jednospójnym*. Oczywiście rząd spójności zależy od tego czy punkt $\infty$ należy do obszaru $\Omega$, czy nie oraz od tego, czy rozpatrujemy dany obszar w płaszczyźnie $\mathbb{C}$, czy też w $\mathbb{C}^*$. W dalszym ciągu przez obszar jednospójny rozumieć będziemy obszar jednospójny względem $\mathbb{C}^*$.

Obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ nazywamy *obszarem Jordana*, jeżeli jego brzeg $\partial\Omega$ jest sumą skończonej ilości rozłącznych krzywych Jordana. *Łukiem analitycznym* w $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór $\gamma \subset \mathbb{C}$, jeżeli istnieje otoczenie otwarte $V$ w $\mathbb{C}$ zawierające przedział $(-1, 1)$ oraz różnowartościowa funkcja analityczna $\psi \colon V \to \mathbb{C}$ taka, że $\gamma = \psi((-1, 1))$. Krzywą Jordana nazywamy *analityczną krzywą Jordana* jeśli jest skończoną sumą (otwartych) łuków analitycznych.Obszar Jordana $\Omega$ nazywamy *analitycznym obszarem Jordana* jeśli każda krzywa opisująca brzeg obszaru $\Omega$ jest krzywą analityczną.

Zauważmy, że zbiór punktów krzywej Jordana jest zbiorem domkniętym i spójnym, zawierającym więcej niż jeden punkt. Zbiór domknięty i spójny, zawierający więcej niż jeden element, nazywamy *kontinuum*. Przypomnijmy, że słynne *twierdzenie Riemanna* głosi, że dwa dowolne obszary jednospójne płaszczyzny domkniętej są konforemne, jeżeli ich dopełnienia (względem $\mathbb{C}^*$) są kontinuuami.

Przypomnijmy, że gdy $\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{C}$, to spójny podzbiór $\Gamma \subset \partial\Omega$ nazywamy *analitycznym łukiem swobodnym* w $\Omega$ jeśli dla dowolnego $\xi \in \Gamma$, istnieje otoczenie $U$ punktu $\xi$ oraz takie odwzorowanie konforemne $h\colon \mathbb{D} \to \Omega$, że

(i) $h(0) = \xi$,

(ii) $h((-1,-1)) = \Gamma \cap U$,

(iii) $h(\mathbb{D}_+) = \Omega \cap U$,

gdzie $\mathbb{D}_+ := \{z \in \mathbb{D} :\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ będzie takim obszarem, że jego dopełnienie względem $\mathbb{C}^*$ składa się z $m+1$ (domkniętych) składowych przy czym każda z nich jest nietrywialna. Wówczas, stosując $(m+1)$-razy twierdzenie Riemanna, otrzymujemy konforemne odwzorowanie $\psi$ zbioru $\Omega$ na obszar $\Omega^*$, którego brzeg składa się z $m+1$ rozłącznych analitycznych krzywych Jordana. Wówczas odwzorowanie

$$H^p(\Omega^*) \ni f \mapsto f \circ \psi$$

jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $H^p(\Omega^*)$ na $H^p(\Omega)$ dla $0 < p < \infty$. W związku z tym w teorii przestrzeni Hardy'ego zakłada się, bez zmniejszania ogólności, że $\Omega$ jest obszarem posiadającym te same własności co obszar $\Omega^*$. W naszych rozważaniach również zastosujemy opisany wyżej fakt (patrz dowód twierdzenie 2.3) Obszary tego typu nazywać będziemy *uogólnionymi obszarami kołowymi*. Zatem są to takie obszary $\Omega$, dla których

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \cdots \cup \Gamma_m,$$

gdzie $\Gamma_j$ jest analityczną krzywą Jordana, $0 \leqslant j \leqslant m$. Zakładamy ponadto $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$, gdy $j \neq k$. Załóżmy, że $\Gamma_0$ jest brzegiem nieograniczonej składowej dopełnienia (względem $\mathbb{C}^*$) obszaru $\Omega$. Przez $E_0$ oznaczmy ograniczoną składową $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma_0$, zaś przez $E_j$ nieograniczoną składową $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma_j$, gdzie $1 \leqslant j \leqslant m$. Szczególnym przykładem takich obszarów są tzw. *obszary kołowe* – dysk jednostkowy z usuniętymi zeń mniejszymi nieprzecinającymi się domkniętymi dyskami. Wówczas

$$\begin{aligned} &E_0 = \mathbb{D}, \\ &E_i = \mathbb{C}^* \setminus \overline{\{a_i + r_i\mathbb{D}\}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{aligned}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{D}$, oraz promienie $0 < r_1, \ldots, r_m < 1$, są odpowiednio dobrane. Szczególnym przypadkiem obszaru kołowego jest pierścień

$$\mathbb{A} := \mathbb{A}(r_0, 1) = \{z \in \mathbb{C} :\ r_0 < |z| < 1\},$$

gdzie $0 < r_0 < 1$. Wtedy $E_0 = \mathbb{D}$ oraz $E := E_1 = \mathbb{C}^* \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$.

Ponieważ obszary $E_i$ są jednospójne, więc istnieją konforemne odwzorowanie między nimi. Będziemy oznaczać je następująco: $\eta_i : \mathbb{D} \to E_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$. Łatwo sprawdzić, że w przypadku obszarów kołowych mamy

$$\eta_i(z) = \begin{cases} \frac{r_i}{z} + a_i & \text{dla } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{dla } z = 0, \end{cases}$$

$$\eta_i^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{r_i}{z-a_i} & \text{dla } z \in E_i \setminus \{\infty\}, \\ 0 & \text{dla } z = \infty. \end{cases}$$

Ponadto, $\eta_0(z) = z$ dla $z \in \mathbb{D}$.

Niech $\Omega$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^*$. *Regularnym wyczerpaniem* obszaru $\Omega$ nazywamy ciąg obszarów $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ w $\mathbb{C}^*$ spełniający warunki:

(i) $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$,

(iii) każda składowa brzegu $\partial\Omega_n$ obszaru $\Omega_n$ jest nietrywialna dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Odnotujmy, że dowolny obszar ma regularne wyczerpanie (patrz [14, Proposition 5.3, str. 18]).

Ze względu na zastosowania ważnym jest problem dotyczący rozszerzania odwzorowań konforemnych Riemanna obszarów jednospójnych do homeomorfizmów domknięć brzegów tych obszarów. Istotną rolę odgrywa tu rodzaj brzegów konforemnych obszarów. Przytoczymy twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań konforemnych. W tym celu przypomnijmy, że punkt $\beta$ jednospójnego obszaru $\Omega$ w $\mathbb{C}$ nazywa się *prostym* punktem brzegowym, gdy dla każdego ciągu $\{z_n\} \subset \Omega$ takiego, że $z_n \to \beta$, gdy $n \to +\infty$, istnieje krzywa $\gamma$ o przedziale parametru $[0,1]$ i taki rosnący ciąg $\{t_n\} \subset (0,1)$, że $\gamma(t_n) = \alpha_n$ oraz $\gamma(t) \in \Omega$ dla $t \in [0,1)$.

**Twierdzenie 1.3** ([55, Twierdzenie 14.19])**.** *Jeżeli $\Omega$ jest ograniczonym obszarem jednospójnym w $\mathbb{C}$ i każdy punkt brzegowy obszaru $\Omega$ jest prosty, to każde odwzorowanie konforemne $\Omega$ na dysk $\mathbb{D}$ można rozszerzyć do homeomorfizmu zbioru $\overline{\Omega}$ na zbiór $\overline{\mathbb{D}}$.*

Korzystając z twierdzenia Riemanna można konstruować odwzorowania konforemne dysku $\mathbb{D}$ w obszar $\Omega$ płaszczyzny zespolonej, których nie da się przedłużyć analitycznie poza dysk $\mathbb{D}$. Pokażemy, że przy pewnych założeniach o brzegu obszaru odwzorowanie konforemne można przedłużyć analitycznie poza obszar (lemat 1.5). Ważny w dalszym ciągu będzie fakt, że w przypadku analitycznego obszaru Jordana $G$, każdy łuk brzegu obszaru $G$ jest analitycznym łukiem swobodnym (patrz [8, str. 20]).

W dowodzie skorzystamy z następującego interesującego twierdzenia z monografii T. W. Gamelina [16, str. 286].

**Twierdzenie 1.4.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $\gamma \subset \partial\Omega$ będzie swobodnym łukiem analitycznym. Jeżeli funkcja $\varphi \in H(\Omega)$ spełnia warunek*

$$\lim_{z \to \xi} |\varphi(z)| = 1$$

*dla wszystkich $\xi \in \gamma$, to istnieje zbiór otwarty $W \supset \gamma \cup \Omega$ oraz przedłużenie analityczne $\widetilde{\varphi} \in H(W)$ funkcji $\varphi$.*

W rozprawie korzystać będziemy z następującego lematu. Nie znaleźliśmy sformułowania tego rezultatu w literaturze, więc dla kompletności podajemy dowód.

**Lemat 1.5.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem ograniczonym analityczną krzywą Jordana i niech $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{D}$ będzie konforemnym odwzorowaniem $\Omega$ na dysk $\mathbb{D}$. Wówczas istnieje zbiór otwarty $W \supset \overline{\Omega}$ oraz przedłużenie analityczne $\widetilde{\varphi} \in H(W)$ odwzorowania $\varphi$. Ponadto istnieją takie stałe $M, m > 0$, że*

$$m|z_1 - z_2| \leqslant |\widetilde{\varphi}(z_1) - \widetilde{\varphi}(z_2)| \leqslant M|z_1 - z_2|,$$

*dla wszystkich $z_1, z_2 \in \overline{\Omega}$.*

*Dowód.* Załóżmy, że $\varphi \in H(\Omega)$, $\varphi(\Omega) = \mathbb{D}$ i $\varphi$ jest funkcją różnowartościową. Z założenia wynika, że $\gamma := \partial\Omega$ jest swobodnym łukiem analitycznym, zatem każdy punkt z $\gamma$ jest prostym punktem brzegowym. Wówczas z twierdzenia 1.3 wynika, że istnieje taki homeomorfizm $\psi\colon \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ zbioru $\overline{\Omega}$ na $\overline{\mathbb{D}}$, że $\varphi|_{\Omega} = \psi$. Jasne, że $\psi(\partial\Omega) = \partial\mathbb{D}$, zatem (z ciągłości $\psi$)

$$\lim_{z\to\xi} |\varphi(z)| = \lim_{z\to\xi} |\psi(z)| = |\psi(\xi)| = 1$$

dla każdego $\xi \in \gamma$. Ponieważ $\gamma$ jest zbiorem zwartym, więc z twierdzenia 1.4 wynika istnienie otoczeń $U_1, \ldots, U_n$ i takich funkcji $\widetilde{\varphi}_j \in H(\Omega \cup U_j)$, że środki otoczeń $U_j$, leżą na $\gamma$, $\gamma \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$ i $\widetilde{\varphi}_j|_{\Omega} = \varphi$ (w szczególności $\widetilde{\varphi}_j(z) = \varphi(z)$ dla $z \in \Omega \cap U_j$), $1 \leqslant j \leqslant n$. Brzeg $\gamma$ jest skończoną sumą łuków (otwartych), istnieją zatem takie $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, że $U_i \cap U_j \cap \Omega \neq \emptyset$. Wtedy $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ oraz $\widetilde{\varphi}_j = \widetilde{\varphi}_i = f$ w $U_{i,j}$. Przypomnijmy, że $U_{i,j}$ jest obszarem, więc z twierdzenia o jednoznaczności mamy $\widetilde{\varphi}_i = \widetilde{\varphi}_j$ w $U_{i,j}$. Zatem funkcja $\widetilde{\varphi}$ określona w zbiorze $W := \Omega \cup U_1 \cup, \cdots \cup U_n$ wzorem

$$\widetilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{dla } z \in \Omega, \\ \widetilde{\varphi}_j(z) & \text{dla } z \in U_j \end{cases}$$

jest holomorficzna w $W \supset \Omega \cup \gamma = \overline{\Omega}$. Zauważmy, że $\widetilde{\varphi}(\xi) \neq 0$ w dostatecznie małych otoczeniach każdego punktu $\xi \in \gamma$. Wynika to z faktu, że $|\widetilde{\varphi}(\xi)| = |\psi(\xi)| = 1$ dla $\xi \in \partial\Omega$. Z holomorficzności $\widetilde{\varphi}$ otrzymujemy ze znanego faktu z analizy zespolonej, (patrz [55, Twierdzenie 10.33]), że w szczególności $\widetilde{\varphi}'(\xi) \neq 0$ dla wszystkich $\xi \in \gamma$. Ze zwartości $\overline{\Omega}$ otrzymujemy (gdyż $\widetilde{\varphi}'$ jest różne od stałej)

$$0 < m = \inf_{w\in\overline{\Omega}} |\widetilde{\varphi}'| \leqslant |\widetilde{\varphi}'(z)| \leqslant \sup_{w\in\overline{\Omega}} |\widetilde{\varphi}'(w)| = M < +\infty$$

dla wszystkich $z \in \overline{\Omega}$. Ustalmy $z_1, z_2 \in \overline{\Omega}$, $z_1 \neq z_2$. Wtedy (gdyż $\widetilde{\varphi}' = \psi$ na $\overline{\Omega}$) mamy

$$\psi(z_2) - \psi(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \widetilde{\varphi}'(\xi)d\xi = \int_0^1 \widetilde{\varphi}'(z_1 + t(z_2 - z_1))dt.$$

Stosując twierdzenie Weierstrassa o wartości średniej (patrz [28, 3.1.13, str. 33]) wnioskujemy, że istnieje taki $\xi \in \operatorname{conv}\Gamma$, gdzie $\operatorname{conv}\Gamma$ oznacza otoczkę wypukłą zbioru $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : \widetilde{\varphi}'(z_1 + t(z_2 - z_1)),\ t \in [0,1]\}$, że

$$\psi(z_2) - \psi(z_1) = (z_2 - z_1)\xi.$$

Stąd otrzymujemy wymaganą nierówność

$$m|z_1 - z_2| \leqslant |\psi(z_1) - \psi(z_2)| \leqslant M|z_1 - z_2|.$$

□

## 1.3. Miary harmoniczne

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Funkcję $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *harmoniczną* (w $\Omega$), gdy jest ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi do drugiego rzędu włącznie w $\Omega$ i spełnia w tym zbiorze równanie Laplace'a

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Jeżeli $\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{C}^*$, to mówimy że funkcja $u$ jest harmoniczna w $\Omega$, gdy $u$ jest harmoniczna w $\Omega \setminus \{\infty\}$ i $u$ jest harmoniczna w punkcie $\infty$, (z definicji oznacza to, że $u$ jest ograniczona w sąsiedztwie punktu $\infty$, równoważnie, istnieje skończona granica $\lim_{z\to\infty} u(z)$). Zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji harmonicznych w $\Omega$ oznaczamy $Har(\Omega)$. Podobnie, jeśli $f \in H(\Omega \setminus \{\infty\})$ i $f$ jest holomorficzna w $\infty$ (z definicji oznacza to, że $f$ jest ograniczona w sąsiedztwie punktu $\infty$) to również mówimy, że $f$ jest holomorficzna w $\Omega$ i piszemy $f \in H(\Omega)$ jak w klasycznym przypadku.

Funkcje harmoniczne pojawiają się w naturalny sposób w teorii funkcji holomorficznych. Z równań Cauchy'ego–Riemanna wynika, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ oraz $f \in H(\Omega)$, to części rzeczywista $\mathrm{Re} f$ i urojona $\mathrm{Im} If$ funkcji $f$ są funkcjami harmonicznymi na $\Omega$. Ponadto każda funkcja harmoniczna jest (lokalnie) częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej.

Funkcje harmoniczne posiadają tzw. *własność wartości średniej*

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt,$$

o ile tylko $\{z : |z - a| \leqslant r\} \subset \Omega$ oraz prawdziwa jest dla nich *zasada maksimum*. Z własność wartości średniej wynika ważna nierówność zwana *nierównością Harnack'a* jeśli $u\colon \overline{B}(a,R) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, harmoniczną w $B(a,R)$ oraz $u \geqslant 0$, to dla dowolnego $0 \leqslant r < R$ i dla dowolnego $\theta \in \mathbb{T}$ mamy

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \leqslant u(a + re^{it}) \leqslant \frac{R+r}{R-r} u(a).$$

Z nierówności tej wynika równie ważne twierdzenie Harnacka (patrz [55, Twierdzenie 11.14])

**Twierdzenie 1.6.** *Niech $\{u_n\}$ będzie ciągiem funkcji harmonicznych w obszarze $\Omega$.*

(i) *Jeżeli $u_n \to u$ niemal jednostajnie w $\Omega$, to $u$ jest funkcją harmoniczną w $\Omega$.*

(ii) *Jeśli $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots$, to albo ciąg $u_n$ jest niemal jednostajnie zbieżny w $\Omega$ albo $u_n(z) \to +\infty$ dla każdego $z \in \Omega$.*

W dalszym ciągu jeśli $K$ jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, to $C(K)$ oznacza przestrzeń Banacha ciągłych funkcji rzeczywistych $f : K \to \mathbb{R}$ z normą $\|f\|_{C(K)} = \sup_{t\in K} |f(t)|$.

Niech $\Omega$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^*$. Ważnym zagadnieniem w teorii funkcji jest *problem Dirichleta* ściśle związany z teorią funkcji harmonicznych. Problem ten formułuje się następująco: dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ wyznaczyć taką funkcję ciągłą $\widetilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, że $\widetilde{f}$ jest harmoniczna w $\Omega$ i $\widetilde{f}|_{\partial\Omega} = f$. Obszar $\Omega$, dla którego istnieje rozwiązanie problemu Dirichleta nazywamy *obszarem Dirichleta* ($\Omega \in (SDP)$). Następujące twierdzenie pokazuje, że klasa obszarów Dirichleta jest dość szeroka.

**Twierdzenie 1.7** ([14, Corollary 4.5, str. 16])**.** *Jeśli każda składowa brzegu $\partial\Omega$ obszaru $\Omega$ jest nietrywialna, to $\Omega$ jest obszarem Dirichleta.*

Wynika stąd, że jeśli $\Omega$ jest uogólnionym obszarem kołowym, to $\Omega \in (SDP)$.

Niech $\Omega \in (SDP)$ oraz niech $p \in \Omega$. Jeśli $u \in C(\partial\Omega)$, to funkcjonał $u \mapsto \tilde{u}(p)$ jest liniowy. Z zasady maksimum wynika, że

$$|\widetilde{u}(p)| \leqslant \|u\|_{C(\partial\Omega)} = \sup\left\{|u(z)| : z \in \partial\Omega\right\}.$$

Stosując twierdzenie Riesza o reprezentacji wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedna, regularne miara borelowska $\omega_p$ na $\partial\Omega$ taka, że

$$\tilde{u}(p) = \int_{\partial\Omega} u \, d\omega_p.$$

Miarę tę nazywamy *miarą harmoniczną* na $\partial\Omega$ względem punktu $p$. Zauważmy, że

$$\int_{\partial\Omega} 1 d\omega_p = \widetilde{1}(p) = 1,$$

zatem $\omega_p$ jest miarą probabilistyczną. Miara harmoniczna $\omega_p$ jest miarą bezatomową (patrz [14, Theorem 6.3, str. 22]). Poniżej zamieszczamy ważne własności miar harmonicznych. Więcej informacji o miarach harmonicznych można znaleźć w monografii J. B. Garnetta i D. E. Marshalla [18]. Na wstępie zauważmy, że $\omega_p$ zależy od wyboru punktu $p \in \Omega$. Można jednak pokazać (patrz [14, Theorem 6.1, str. 19]), że dla $p, q \in \Omega$, miary $\omega_p$ oraz $\omega_q$ są *wzajemnie ograniczenie absolutnie ciągłe*. Ponadto, jeśli $K$ jest zwartym podzbiorem $\Omega$, to istnieje taka stała $M > 0$, że $\omega_q(E) \leqslant M\omega_p(E)$ dla wszystkich $q \in K$ i dla dowolnego podzbioru borelowskiego $E \subset \partial\Omega$. Przypuśćmy dalej, że $\Omega_1$ i $\Omega_2$ są konforemnie równoważne, tzn. istnieje holomorficzna bijekcja $f$, która odwzorowuje $\Omega_1$ na $\Omega_2$. Jeśli $\Omega_1 \in (SDP)$, to również $\Omega_2 \in (SDP)$. Niech $p_1 \in \Omega_1$, przy czym $p_2 = f(p_1)$. Oznaczmy przez $\omega_1$ miarę harmoniczną na $\partial\Omega_1$ względem $p_1$ i zdefiniujmy miarę $\mu$ na podzbiorach borelowskich $\partial\Omega_2$ następująco:

$$\mu(E) = \omega_1(f^{-1}(E))$$

dla dowolnego zbioru borelowskiego $E$ w $\partial\Omega_2$. Wówczas $\mu$ jest miarą harmoniczną na $\partial\Omega_2$ względem $p_2$. Niech $\Omega_1, \Omega_2 \in (SDP)$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Niech ponadto $p \in \Omega_1$. Oznaczmy przez $\omega_1$ i $\omega_2$ miary harmoniczne na $\partial\Omega_1$ oraz na $\partial\Omega_2$ odpowiednio względem $p$. Wówczas dla dowolnego zbioru borelowskiego $E$, jeśli $E \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, to $\omega_1(E) \leqslant \omega_2(E)$.

Do dalszych rozważań potrzebować będziemy pojęcia funkcji Greena. Niech $\Omega$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^*$, niech ponadto $\Omega \in (SDP)$, $p \in \Omega$. Funkcję $g(\cdot, p)$ nazywamy *funkcją Greena* (patrz [14, str. 16]) obszaru $\Omega$, posiadającą biegun w punkcie $p$, $p \neq \infty$, jeśli

(i) $z \mapsto g(z, p)$ jest harmoniczna na $\Omega \setminus \{p\}$,

(ii) $g(z, p) + \log|z - p|$ jest harmoniczna w sąsiedztwie puntu $p$,

(iii) $\lim_{z\to\zeta} g(z, p) = 0$ dla wszystkich $\zeta \in \partial\Omega$.

Jeżeli $p = \infty$, to warunek (ii) zamieniamy na następujący: $z \mapsto g(z, \infty) - \log|z|$ jest harmoniczna w sąsiedztwie punktu $\infty$.

Przypuśćmy, że $\Omega$ jest uogólnionym obszarem kołowym Wówczas $\partial\Omega$ składa się z $m + 1$ rozłącznych krzywych Jordana. Niech $p \in \Omega$ oraz niech $g(\cdot, p)$ będzie funkcją Greena obszaru $\Omega$ z biegunem w $p$. Oznaczmy przez $h(\cdot) = h(\cdot, p)$ sprzężenie harmoniczne funkcji $g(\cdot, p)$. Zauważmy, że lokalnie funkcja $Q = g + ih$ jest analityczna, a jej pochodna jest funkcją jednowartościową na $\Omega$. Następujące twierdzenia pokazują zależności między miarami harmonicznymi i funkcją Greena.

**Twierdzenie 1.8** ([18, Corollary 2.6])**.** *Załóżmy, że $\Omega$ jest uogólnionym obszarem kołowym. Wówczas dla każdego $z \in \Omega$ mamy*

$$d\omega_z(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta} g(\zeta, z)ds, \quad \zeta \in \partial\Omega,$$

*gdzie $g(\cdot, z)$ jest funkcją Greena obszaru $\Omega$ posiadającą biegun w punkcie $z$, zaś $n_\zeta$ jednostkowym wektorem normalnym (skierowanym na zewnątrz $\Omega$). Ponadto miara harmoniczna $\omega_z$ jest absolutnie ciągła względem miary łukowej na $\partial\Omega$, gęstość*

$$\frac{d\omega_z(\zeta)}{ds} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta} g(\zeta, z) =: P_z(\zeta), \quad \zeta \in \partial\Omega$$

*jest rzeczywistą funkcją analityczną na $\partial\Omega$ oraz istnieją takie stałe $c_1, c_2 > 0$, że*

$$c_1 < \frac{d\omega_z(\zeta)}{ds} < c_2, \quad \zeta \in \partial\Omega.$$

Funkcję $P_z$ zdefiniowaną w twierdzeniu 1.8 nazywamy *jądrem Poissona*. Zauważmy, że z definicji miary harmonicznej $\omega_z$ oraz twierdzenia 1.8 otrzymujemy reprezentację dla dowolnej funkcji ciągłej $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ i harmonicznej w $\Omega$

$$u(z) = P[u](z), \quad z \in \Omega,$$

gdzie w dalszym ciągu dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\partial\Omega, ds)$

$$P[f](z) := \int_{\partial\Omega} P_z(\zeta) f(\zeta) ds(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

Funkcję $P[f] \colon \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy całką *Poissona funkcji $f$*. Przytoczmy teraz twierdzenie, z którego wynika, że funkcja Greena na uogólnionych obszarach kołowych rozszerza się na pewne otoczenie brzegu obszaru.

**Twierdzenie 1.9** ([18, Lemat 2.4, str. 44]). *Przypuśćmy, że $\Omega$ jest uogólnionym obszarem kołowym oraz niech $\gamma \subset \partial\Omega$ będzie analitycznym łukiem. Przypuśćmy, że $u \in Har(\Omega)$ dla wszystkich $\zeta \in \gamma$ spełnia warunek*

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0.$$

*Wówczas istnieje taki otwarty podzbiór $W \supset \gamma\cup\Omega$, że $u$ rozszerza się do funkcji harmonicznej na $W$. Jeśli dodatkowo $u(z) > 0$ dla wszystkich $z \in \Omega$, to dla wszystkich $\zeta \in \gamma$*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) < 0.$$

Przytoczmy jeszcze jedno ważne twierdzenie dotyczące miar harmonicznych.

**Twierdzenie 1.10** ([14, Proposition 6.5, str. 23]). *Niech $\Omega$ będzie uogólnionym obszarem kołowym. Wówczas*

$$d\omega_p(\zeta) = \frac{i}{2\pi} Q'(\zeta) d\zeta, \quad \zeta \in \partial\Omega.$$

W teorii przestrzeni Hardy'ego ważną rolę odgrywają *funkcje subharmoniczne* i *funkcje superharmoniczne*. Niech $G$ będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Funkcję $u\colon G \to [-\infty, +\infty)$ będziemy nazywać subharmoniczną jeśli ma ona cztery następujące własności:

(i) $-\infty \leqslant u(z) < +\infty$, dla wszystkich $z \in G$,

(ii) $u$ jest półciągła z góry,

(iii) jeśli $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$, to $u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt$,

(iv) żadna z całek w punkcie (iii) nie jest równa $-\infty$.

Zbiór wszystkich funkcji subharmonicznych na $G$ oznaczać będziemy symbolem $subh(G)$. Następujące twierdzenie opisuje własności funkcji subharmonicznych, z których korzystać będziemy w dalszej części pracy (patrz [14, Theorem 3.5, str. 9]).

**Twierdzenie 1.11.** *Niech $G$ będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Funkcja $u\colon G \to [-\infty, +\infty)$ półciągła z góry na $G$ jest subharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset G$ i dla dowolnej funkcji $h$ ciągłej w $K$ i harmonicznej we wnętrzu $\operatorname{int} K$ oraz $h \geqslant u$ na brzegu $\partial K$ mamy również $h(z) \geqslant u(z)$ dla wszystkich $z \in K$.*

Funkcję $v\colon G \to [-\infty, +\infty)$ nazwiemy *superharmoniczną*, jeśli istnieje funkcja subharmoniczna $u\colon G \to [-\infty, +\infty)$ i taka, że $u = -v$. Do dalszych rozważań potrzebna nam będzie następująca wersja zasady maksimum (patrz [7, str. 264]).

**Twierdzenie 1.12.** *Niech $G$ będzie obszarem oraz niech $\varphi$ i $\psi$ będą ograniczonymi funkcjami rzeczywistymi na $G$, przy czym $\varphi$ jest funkcją subharmoniczną, a $\psi$ superharmoniczną. Jeśli dla dowolnego punktu $a \in \partial G$*

$$\limsup_{z\to a} \varphi(z) \leqslant \liminf_{z\to a} \psi(z),$$

*to albo $\varphi(z) < \psi(z)$ dla wszystkich $z \in G$ albo $\varphi = \psi$ i $\varphi$ jest harmoniczna.*

Rozdział 2

# Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na obszarach

Celem niniejszego rozdziału jest podanie definicji oraz zbadanie wybranych własności przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na uogólnionych obszarach kołowych. Definicja przestrzeni Hardy'ego–Orlicza, podobnie jak przestrzeni $H^p$ na obszarach (patrz [14, 54]), oparta jest o pojęcie harmonicznych majorant. Wyniki tej części pracy zawarliśmy w pracach [56, 57]. Pod koniec tego fragmentu rozprawy rozważamy szczególny przypadek obszaru kołowego – pierścień – i przedstawimy rezultaty dotyczące przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu.

## 2.1. Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na uogólnionych obszarach kołowych

Załóżmy, że funkcja Orlicza $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest logarytmicznie wypukła (tzn. funkcja $t \mapsto \Phi(e^t)$ jest wypukłą funkcją na zbiorze $\mathbb{R}$). Wówczas stosując dobrze znany wynik (patrz [55, Twierdzenie 17.2]) wnioskujemy, że jeśli $f$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $\Omega$ i $f$ nie jest tożsamościowo równą zeru, to funkcja

$$u(z) = \Phi(e^{\log|f(z)|}) = \Phi(|f(z)|), \quad z \in \Omega$$

jest subharmoniczna w $\Omega$ (rozumiemy, że $\log 0 := -\infty$, tzn. $\log|f(z)| = -\infty$, gdy $f(z) = 0$ dla pewnego $z \in \Omega$).

Powyższa obserwacja pozwala na zdefiniowanie przestrzeni Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\Omega)$ na obszarze $\Omega$. Zatem, jeśli $\Phi$ jest logarytmicznie wypukłą funkcją Orlicza, to *przestrzenią Hardy'ego–Orlicza* na obszarze $\Omega$ nazywać będziemy przestrzeń takich funkcji $f \in H(\Omega)$, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ i harmoniczna majoranta $v \in Har(\Omega)$ funkcji subharmonicznej $\Phi\big(|f|/\varepsilon\big)$ na $\Omega$, tzn.

$$\Phi\big(|f(z)|/\varepsilon\big) \leqslant v(z), \quad z \in \Omega.$$

Przy badaniu przestrzeni Hardy'ego–Orlicza kluczową rolę odgrywa następujące twierdzenie o charakteryzacji funkcji subharmonicznych za pomocą miar harmonicznych. Nie znaleźliśmy w literaturze dowodu tego rezultatu, zamieszczamy więc go poniżej. Metoda dowodu opiera się na pewnych ideach z teorii przestrzeni Hardy'ego $H^p(\Omega)$, $p \in (0, \infty)$ (porównaj [14, str. 52]).

**Twierdzenie 2.1.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem i niech $u \in subh(\Omega)$ będzie funkcją ciągłą w $\Omega$. Wówczas funkcja $u$ ma harmoniczną majorantę na $\Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego regularnego wyczerpania $\{\Omega_n\}$ zbioru $\Omega$ istnieje taka stała $C$, że*

$$\int_{\partial\Omega_n} u\, d\omega_{n,p} \leqslant C, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

*gdzie $\omega_{p,n}$ jest miarą harmoniczną na $\partial\Omega_n$ względem dowolnego punktu $p \in \Omega_1$.*

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że istnieje funkcja $v \in Har(\Omega)$ spełniająca nierówność $u(z) \leqslant v(z)$ dla wszystkich $z \in \Omega$. Niech $\{\Omega_n\}$ będzie regularnym wyczerpaniem obszaru $\Omega$. Stosując twierdzenie 1.7 wnioskujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje harmoniczne rozszerzenie $\widetilde{u}_n$ funkcji $u_n = u|_{\partial\Omega_n}$ do obszaru $\Omega_n$. Wówczas dla dowolnych liczb naturalnych $k \leqslant n$ nierówność $\widetilde{u}_k(z) \leqslant \widetilde{u}_n(z)$ zachodzi dla wszystkich $z \in \Omega_k$. W konsekwencji ciąg $\{\widetilde{u}_n\}$ jest niemalejący, zatem z twierdzenia Harnacka jest on zbieżny niemal jednostajnie w $\Omega$ do pewnej funkcji harmonicznej w $\Omega$ lub $\widetilde{u}_n(z) \to +\infty$ dla $z \in \Omega$. Zauważmy, że drugi z przypadków nie jest możliwy. Istotnie, jeśli $v$ jest harmoniczną majorantą funkcji $u$, to dla dowolnego $p \in \Omega_1$ mamy

$$\widetilde{u}_n(p) = \int_{\partial\Omega_n} \widetilde{u}_n d\omega_{n,p} = \int_{\partial\Omega_n} u_n d\omega_{n,p} \leqslant \int_{\partial\Omega_n} v_n d\omega_{n,p} = v(a).$$

Odwrotnie, przypuśćmy, że nierówność (2.1) jest prawdziwa dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas zdefiniowany wyżej ciąg $\{\widetilde{u}_n\}$ jest niemalejącym ciągiem funkcji harmonicznych oraz nierówność $u(z) \leqslant \widetilde{u}_n(z)$ zachodzi dla wszystkich $z \in \Omega_n$. Ponadto nierówność (2.1) implikuje, że ciąg ten jest ograniczony. Ostatecznie granica ciągu $\{\widetilde{u}_n\}$ jest najmniejszą harmoniczną majorantą funkcji $u$. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli $\Omega$ jest obszarem i $z_0 \in \Omega$ jest ustalonym punktem, to dla każdej funkcji $f \in H^\Phi(\Omega)$ istnieje stała $\varepsilon$ i najmniejsza harmoniczna majoranta $v_{f,\varepsilon}$ funkcji $\Phi(|f|/\varepsilon)$ na $\Omega$. Załóżmy, że istnieje takie $K > 0$, że logarytmicznie wypukła funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Phi\big(t/2K\big) \leqslant \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla każdego $t > 0$. Wówczas następujący funkcjonał $\|\cdot\|_{H^\varphi_{z_0}(\Omega)}$ na przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ jest poprawnie zdefiniowany

$$\|f\|_{H^\varphi_{z_0}(\Omega)} := \inf\big\{\varepsilon > 0 : \, v_{f,\varepsilon}(z_0) \leqslant 1\big\}, \quad f \in H^\varphi_{z_0}(\Omega).$$

Łatwo pokazujemy, że funkcjonał ten jest quasi-normą (normą, gdy $\Phi$ jest wypukła) i spełnia nierówność

$$\|f + g\|_{H^\Phi_{z_0}(\Omega)} \leqslant K\big(\|f\|_{H^\Phi_{z_0}(\Omega)} + \|g\|_{H^\Phi_{z_0}(\Omega)}\big), \quad f,\ g \in H^\Phi(\Omega).$$

Zauważmy, że w szczególności, jeśli $p \in (0, \infty)$ i $\Phi(t) = t^p$, $t \geqslant 0$, to $H^\Phi(\Omega)$ pokrywa się z przestrzenią $H^p(\Omega)$ z quasi-normą (normą dla $p \in [1, \infty)$) daną wzorem

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = v_f^{1/p}(z_0), \quad f \in H^p(\Omega),$$

gdzie $v_f$ jest najmniejszą harmoniczną majorantą funkcji $|f|^p$. Ponadto zachodzi nierówność

$$\|f+g\|_{H^p(\Omega)} \leqslant 2^{1/p-1}\big(\|f\|_{H^p(\Omega)} + \|g\|_{H^p(\Omega)}\big), \quad f,\ g \in H^p(\Omega).$$

Warto odnotować, że przestrzenie $H^p(\Omega)$ były niezależnie zdefiniowane przez M. Parreau [47] w roku 1951 i W. Rudina [54] w 1955 roku.

Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na obszarze $\Omega$ można zdefiniować stosując miary harmoniczne na $\partial\Omega$ przez regularne wyczerpania obszaru $\Omega$. Dokładniej, niech $\Omega$ będzie obszarem i niech $\{\Omega_n\}$ będzie regularnym wyczerpaniem $\Omega$. Ponadto, załóżmy, że $z_0 \in \Omega_1$. W dalszym ciągu dla logarytmicznie wypukłej funkcji Orlicza $\Phi$ spełniającej warunek $\Phi\big(t/K\big) \leqslant \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla pewnego $K > 0$ i wszystkich $t > 0$, będziemy pisać $L^\Phi(\omega_{n,z_0})$ zamiast $L^\Phi(\Omega_n)$, gdzie $\{\omega_{n,z_0}\}_n$ jest ciągiem miar harmonicznych na $\partial\Omega_n$, względem $z_0 \in \Omega_1$. Dla dowolnej funkcji $g : \Omega \to \mathbb{C}$ oznaczmy $g_n := g|_{\partial\Omega_n}$. Przestrzenią *Hardy'ego–Orlicza* nazywamy następującą przestrzeń quasi-unormowaną

$$\mathscr{H}^\Phi(\Omega) := \{f \in H(\Omega) : \|f\|_{\mathscr{H}^\Phi_{z_0}(\Omega)} < +\infty\},$$

gdzie

$$\|f\|_{\mathscr{H}^\Phi(\Omega)} := \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^\Phi(\omega_{n,z_0})} = \lim_{n\to\infty} \inf\left\{\varepsilon > 0 : \int_{\partial\Omega_n} \Phi\Big(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\Big)\, d\omega_{n,z_0} \leqslant 1\right\}.$$

Standardowy dowód pokazuje, że $(\mathscr{H}^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_{\mathscr{H}^\Phi_{z_0}(\Omega)})$ jest przestrzenią quasi-Banacha (Banacha, gdy $\Phi$ jest wypukłą funkcją Orlicza).

Symbolem $\mathscr{H}M^\Phi(\Omega)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń elementów skończonych przestrzeni $\mathscr{H}^\Phi(\Omega)$, równoważnie, domknięcie $H^\infty(\Omega)$ w topologii $\mathscr{H}^\Phi(\Omega)$.

Analiza rezultatów dotyczących przestrzeni $H^($$\Omega)$ dla $p \in (0,\infty)$ zamieszczona w książce Fishera [14] (patrz [14, str. 52–55]) uzasadnia, że analogiczne stwierdzenia zachodzą dla przestrzeni Hardy'ego–Orlicza generowanych przez funkcje Orlicza $\Phi$ spełniających warunek $\Phi(t/2K) \leqslant \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla $t > 0$. Reasumując, sformułujemy twierdzenie, wskazujące na relacje między zdefiniowanymi powyżej przestrzeniami Hardy'ego–Orlicza. Ze względu na drobne techniczne modyfikacje zawarte w [14, str. 52–55], opuszczamy dowód.

**Twierdzenie 2.2.** *Niech $\Phi$ będzie logarytmicznie wypukłą funkcją Orlicza. Załóżmy, że istnieje taka stała $K > 0$, że $\Phi\big(t/2K\big) \leqslant \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla $t > 0$. Wówczas*

$$\mathscr{H}^\Phi_{z_0}(\Omega) = H^\Phi_{z_0}(\Omega)$$

*z równością (quasi-)norm. Ponadto, $H^\Phi_{z_0}(\Omega) = H^\Phi_{z_1}(\Omega)$ z równoważnością (quasi-)norm dla dowolnych $z_0, z_1 \in \Omega$, gdzie stałe równoważności zależą od $z_0$ i $z_1$. Co więcej, dowolne wyczerpanie obszaru $\Omega$ generuje tą samą przestrzeń $\mathscr{H}^\Phi(\Omega)$ z równoważnością (quasi-)norm.*

Powyższe twierdzenie uzasadnia oznaczenie jednym symbolem $H^\Phi(\Omega)$ zdefiniowanych przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na obszarze $\Omega$. Podobnej konwencji używać będziemy dla oznaczenia przestrzeni $MH^\Phi(\Omega)$.

Warto odnotować interesujący rezultat (patrz [22, Lemma 5.1]), że jeśli $\Phi$ jest taką funkcją Orlicza, że $\Phi(|f|)$ jest subharmoniczna na $\mathbb{D}$ dla dowolnej funkcji $f \in H(\mathbb{D})$, to $\Phi$ jest logarytmicznie wypukła.

## 2.2. Twierdzenie o reprezentacji dla przestrzeni Hardy'ego–Orlicza

W podrozdziale będziemy rozważać banachowskie przestrzenie Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\Omega)$ na uogólnionym obszarze kołowym $\Omega$. W związku z tym w dalszym ciągu zakładamy, że funkcja Orlicza $\Phi$ jest wypukła. Przypomnijmy, że przez $\Gamma_0$ oznaczamy brzeg nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \Omega$, zaś $E_0$ jest ograniczoną składową $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma_0$. Natomiast $E_j$ jest nieograniczoną składową $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma_j$, gdzie $\Gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ są pozostałymi składowymi brzegu $\partial\Omega$.

Oznaczmy przez $H_0^\Phi(E_k)$ podprzestrzeń przestrzeni $H^\Phi(E_k)$ zawierającą funkcje znikające w punkcie $\infty$. W pierwszym twierdzeniu pokażemy, że przestrzeń $H^\Phi(\Omega)$ ma reprezentację w postaci sum prostych.

**Twierdzenie 2.3.** *Niech $\Phi$ będzie wypukłą funkcją Orlicza i niech $\Omega$ będzie uogólnionym obszarem kołowym. Wówczas dowolna funkcja $f \in H^\Phi(\Omega)$ daje się przedstawić w następującej postaci*

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_m(z), \quad z \in \Omega, \tag{2.2}$$

*gdzie $f_0 \in H^\Phi(E_0)$ oraz $f_k \in H_0^\Phi(E_k)$ dla dowolnego $k \in \{1, \ldots, m\}$. Ponadto odwzorowanie $f \mapsto f_0$ jest ograniczoną projekcją $H^\Phi(\Omega)$ na $H^\Phi(E_0)$. Podobnie, $f \mapsto f_k$ jest ograniczoną projekcją $H^\Phi(\Omega)$ na $H_0^\Phi(E_k)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

*Dowód.* Ustalmy $f \in H^\Phi(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Niech $C_0, \ldots, C_m$ będą gładkimi krzywymi Jordana, we wnętrzu których zawarte są odpowiednio składowe $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_m$ brzegu $\partial\Omega$ i położonymi tak blisko tych składowych, że punkt $z$ znajduje się „na zewnątrz" $C_1, \ldots, C_m$ oraz „wewnątrz" $C_0$. Oznaczmy przez $W$ podzbiór $\Omega$ ograniczony krzywymi $C_0, \ldots, C_m$. Dla $k \in \{0, \ldots, m\}$ zdefiniujmy

$$f_k(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in W.$$

Jest jasne, że $z_0 \in W$ i że równość (2.2) jest spełniona w punkcie $z_0$. Ponadto dla $k \in \{0, \ldots, m\}$ wartość $f_k(z_0)$ nie zależny od wyboru krzywej $C_k$, więc warunek (2.2) spełniony będzie dla wszystkich $z \in \Omega$. Zauważmy, że funkcje $f_k|_{E_k \setminus \{\infty\}}$ są analityczne w $E_k \setminus \{\infty\}$ dla $k \in \{0, \ldots, m\}$ oraz $f_l(\infty) = 0$ dla $l \in \{1, \ldots, m\}$. Jasne, że odwzorowane $f \mapsto f_k$ jest liniowe dla $k \in \{0, \ldots, m\}$. Łatwo widać, że $f \in H^\Phi(E_k)$ dla pewnego $k$ implikuje $f_l = 0$ dla $l \neq k$. Zatem $f = f_k$. Pozostaje udowodnić, że $f_k \in H^\Phi(E_k)$ dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $k = 0$ oraz $\Gamma_0 = \partial\mathbb{D}$. Z założenia $f \in H^\Phi(\Omega)$ wynika, że istnieją $\varepsilon > 0$ oraz taka funkcja $v_{f,\varepsilon} \in Har(\Omega)$, że $\Phi\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) \leqslant v_{f,\varepsilon}$. Wówczas z wypukłości funkcji $\Phi$ otrzymujemy

$$\Phi\left(\frac{|f_0|}{\varepsilon(m+2)}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{|f| + \sum_{k=1}^m |f_k|}{\varepsilon(m+2)}\right) \leqslant \frac{1}{m+2}\left(\Phi\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^m \Phi\left(\frac{|f_k|}{\varepsilon}\right)\right).$$

Stąd wynika, że nierówność $\Phi\left(\frac{|f_0|}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{m+2} v_{f,\varepsilon} + C$, gdzie $C$ jest pewną stałą, zachodzi w pewnym pierścieniu $A(s, 1) \subset \Omega$, przy pewnym $0 < s < 1$. Ponieważ $v_{f,\varepsilon} \in Har(A(s, 1))$, więc $v_{f,\varepsilon} = v_1 + v_2$, przy czym $v_1 \in Har(\mathbb{D})$, zaś $v_2 \in Har(E_s)$, gdzie $E_s = \{z \in \mathbb{C} :$

$|z| > s\}$. Zauważmy, że $v_2$ jest ograniczona w $E_s$, zaś $\Phi\big(\frac{|f_0|}{\varepsilon(m+2)}\big)$ jest ograniczona w $s\overline{\mathbb{D}}$. Z subharmoniczności funkcji $\Phi\big(\frac{|f_0|}{\varepsilon(m+2)}\big)$ w $\mathbb{D}$ wnioskujemy, że istnieje taka funkcja $u \in Har(\mathbb{D})$, że

$$\Phi\left(\frac{|f_0|}{\varepsilon(m+2)}\right) \leqslant u,$$

co daje, że $f_0 \in H^{\Phi}(\mathbb{D})$. □

Przypomnijmy, że wielomiany są gęstym podzbiorem przestrzeni $HM^{\Phi}(\Omega)$ w przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{D}$. Oznaczmy przez $R(\Omega)$ zbiór tych wszystkich funkcji wymiernych, które mają bieguny poza zbiorem $\overline{\Omega}$. Sformułujemy i udowodnimy teraz analogon tego rezultatu dla przestrzeni $HM^{\Phi}(\Omega)$, gdzie $\Omega$ jest uogólnionym obszarem kołowym.

**Stwierdzenie 2.4.** *$R(\Omega)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $HM^{\Phi}(\Omega)$.*

*Dowód.* Ustalmy $k \in \{0, \dots, m\}$. Ponieważ $\Omega \subset E_k$ więc $\omega_{z,\Omega}(A) \leqslant \omega_{z,E_k}(A)$ dla dowolnego punktu $z \in \Omega$ oraz dowolnego podzbioru $A \subset \Gamma_k$. Stąd norma przestrzeni $H^{\Phi}(E_k)$ dominuje normę $H^{\Phi}(\Omega)$. Wystarczy więc pokazać, że $f_k$ jest granicą w $HM^{\Phi}(E_k)$ ciągu funkcji holomorficznych na otoczeniu $\overline{E_k}$. Niech $\eta_k^{-1}$ będzie odwzorowaniem Riemanna zbioru $E_k$ na $\mathbb{D}$. Ponieważ $\Gamma_k$ jest analityczny, więc odwzorowane $\eta_k^{-1}$ rozszerza się do funkcji holomorficznej na pewnym otoczeniu $\overline{E_k}$. Połóżmy $g_k := f_k \circ \eta_k$, wówczas $g_k \in HM^{\Phi}(\mathbb{D})$ a stąd, na mocy twierdzenia Rungego (patrz [55, Twierdzenie 14.6]), istnieje taka funkcja $G$ holomorficzna na otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$, że $\|G - g_k\|_{H^{\Phi}(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Ostatnia nierówność dzięki konforemności odwzorowań jest równoważna nierówności

$$\|G \circ \eta_k^{-1} - f_k\|_{H^{\Phi}(E_k)} < \varepsilon,$$

gdzie $G \circ \eta_k^{-1}$ jest holomorficzna na otoczeniu $\overline{E}_k$. Stosując ponownie twierdzenie Rungego dostajemy, że funkcja $G \circ \eta_k^{-1}$ daje się jednostajnie aproksymować na $\overline{E}_k$ przez funkcje ze zbioru $R(\Omega)$. □

W dalszym ciągu potrzebować będziemy następującego twierdzenia.

**Stwierdzenie 2.5** ([14, Proposition 4.4.3.]). *Jeśli $u \in L^1(\partial\Omega, ds)$ oraz*

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \notin \partial\Omega,$$

*to $u = 0$ s-p.w. na $\partial\Omega$.*

Posiadamy wystarczające narzędzia, aby sformułować i udowodnić główny wynik tego podrozdziału. W dalszym ciągu w rozprawie dla uogólnionych obszarów kołowych $\partial\Omega$ rozważana jest z miarą harmoniczną $\omega$ na $\partial\Omega$.

**Twierdzenie 2.6.** *Niech $\Phi$ będzie wypukłą funkcją Orlicza i niech $\Omega$ będzie uogólnionym obszarem kołowym. Dla dowolnego $f \in H^\Phi(\Omega)$ istnieje funkcja brzegowa $f^*(\zeta)$ dla $\omega$-p.w. $\zeta \in \partial\Omega$ oraz $f^* \in L^\Phi(\partial\Omega,\omega)$. Ponadto prawdziwe są równości*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f^*(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{f^*(w)}{w-z}dw, \quad z \notin \overline{\Omega}, \tag{2.4}$$

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} f^*(\zeta)\,d\omega_z(\zeta), \quad z \in \Omega. \tag{2.5}$$

*Odwzorowanie $f \mapsto f^*$ jest izometrycznym izomorfizmem z $H^\Phi(\Omega)$ na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega,\omega)$ oraz jest izometrią z $HM^\Phi(\Omega)$ na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega,\omega)$.*

*Dowód.* Na mocy twierdzenia 2.3 wystarczy udowodnić, że $f_k$ posiada funkcję brzegową $f_k^*$ $s$-p.w. na $\partial\Omega$ oraz że $f_k^* \in L^\Phi(\partial\Omega,\omega)$. Ustalmy $k$, wówczas dla $l \neq k$ funkcja $f_k$ jest analityczna na $\Gamma_l$. Stąd równości (2.3), (2.4) i (2.5) w sposób oczywisty są spełnione. Niech $\eta_k^{-1}$ będzie odwzorowaniem Riemanna z $E_k$ na $\mathbb{D}$. Ponieważ składowa brzegu $\Gamma_k$ jest analityczna, więc odwzorowanie $\eta_k^{-1}$ rozszerza się do odwzorowania konforemnego na $\overline{E}_k$. Ponadto $g_k = f_k \circ \eta_k \in H^\Phi(\mathbb{D})$, więc $g_k^*$ istnieje prawie wszędzie na $\mathbb{T}$ oraz $g_k^* \in L^\Phi(\mathbb{T})$. Wówczas dla $f_k = g_k \circ \eta_k^{-1}$ istnieje funkcja brzegowa $f_k^*$ na $\Gamma_k$ przy czym $f_k^*(\zeta) = g_k^* \circ \eta_k^{-1}(\zeta)$ dla $s$-prawie wszystkich $\zeta$ oraz $f_k^* \in L^\Phi(\Gamma_k, ds)$. Ostatecznie $f_k^* \in L^\Phi(\partial\Omega,\omega)$. Dla $z \in \Omega$ mamy

$$f_k(z) = g_k(\eta_k^{-1}(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{g_k^*(\xi)}{\xi - \eta_k^{-1}(z)}\,d\xi.$$

Połóżmy $\xi = \eta_k^{-1}(\zeta)$, wówczas

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{f_k^*(\zeta)}{\eta_k^{-1}(\zeta) - \eta_k^{-1}(z)}(\eta_k^{-1})'(\zeta)\,d\zeta.$$

Zauważmy, że

$$\frac{(\eta_k^{-1})'(\zeta)}{\eta_k^{-1}(\zeta) - \eta_k^{-1}(z)} = \frac{1}{\zeta - z} + S(z),$$

gdzie $S$ jest holomorficzna na otoczeniu $\overline{\Omega}$, gdyż funkcja po lewej stronie powyższej równości posiada biegun w punkcie $z$ przy czym residuum wynosi 1. Mamy zatem

$$\int_{\Gamma_k} S(\zeta) f_k^*(\zeta) = 0.$$

Jeśli $k \neq l$, to $\int_{\Gamma_l} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$ a zatem warunki (2.3) oraz (2.4) są spełnione. Aby udowodnić równości (2.5) przypomnijmy, że $d\omega_z(\zeta) = \frac{i}{2\pi}Q_z'(\zeta)d\zeta$, gdzie $Q_z(\zeta) =$

$g(\zeta;z)+ih(\zeta;z)$, $\zeta\in\partial\Omega$. Stąd $Q'_z(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}+R(\zeta)$, gdzie $R$ jest funkcją holomorficzną na $\overline{\Omega}$, a zatem $\int_{\partial\Omega} f_k^*(\zeta)R(\zeta)\,d\zeta=0$. W konsekwencji

$$\int_{\partial\Omega} f^*(\zeta)\,d\omega_z(\zeta)=-\frac{i}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{f^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{i}{2\pi}\int_{\partial\Omega} f^*(\zeta)R(\zeta)\,d\zeta=f(z).$$

Aby udowodnić, że odwzorowanie $f\mapsto f^*$ jest izomorfizmem z $H^{\Phi}(\Omega)$ w $L^{\Phi}(\partial\Omega,\omega)$ wystarczy zastosować twierdzenia 2.3, z którego wynika, że odwzorowania $f_k\mapsto f_k^*$ są izomorfizmami z $H^{\Phi}(E_k)$ w $L^{\Phi}(\Gamma_k,\omega)$. To kończy dowód, gdyż dla $l\neq k$ funkcja $f_k$ jest analityczna na składowej $\Gamma_l$ brzegu $\partial\Omega$.

Pokażemy, że operator $f\mapsto f^*$ jest izometrycznym izomorfizmem z przestrzeni $HM^{\Phi}(\Omega)$ w przestrzeń $L^{\Phi}(\partial\Omega,\omega)$. Niech $q\in R(\Omega)$ oraz niech $u$ będzie funkcją harmoniczną na $\Omega$ daną następująco

$$u(z)=\int_{\partial\Omega}\Phi\Big(\frac{|q(\zeta)|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)\,d\omega_z(\zeta),\quad z\in\Omega. \tag{2.6}$$

Wówczas, jako że funkcja $\Phi\Big(\frac{|q(\cdot)|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)$ jest subharmoniczna na $\Omega$, mamy

$$\Phi\Big(\frac{|q(z)|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)\leqslant u(z),\quad z\in\Omega.$$

Jeśli $v$ jest harmoniczną majorantą funkcji $\Phi\Big(\frac{|q|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)$ w $\Omega$, to

$$\widetilde{u}(\zeta)=\Phi\Big(\frac{|q(\zeta)|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)\leqslant\liminf_{z\to\infty}v(z),\quad \zeta\in\partial\Omega.$$

Powyższa nierówność implikuje, że funkcja harmoniczna $\widetilde{v}-\widetilde{u}$ jest nieujemna na $\partial\Omega$, a stąd funkcja $u-v$ jest nieujemna dla $z\in\Omega$. Ostatecznie funkcja $u$ określona wzorem (2.6) jest najmniejszą harmoniczną majorantą funkcji $\Phi\Big(\frac{|q|}{\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}}\Big)$, skąd wnioskujemy, że $\|q\|_{H^{\Phi}(\Omega)}=\|q\|_{L^{\Phi}(\partial\Omega,\omega)}$ dla $q\in R(\Omega)$. Niech $f\in HM^{\Phi}(\Omega)$. Na mocy stwierdzenia 2.4 istnieje ciąg funkcji wymiernych $\{q_n\}$, których bieguny znajdują się poza $\overline{\Omega}$ taki, że $q_n\to f$ w $H^{\Phi}(\Omega)$. Stąd $q_n\to f$ niemal jednostajnie na $\Omega$. Ponieważ

$$\|q_n-q_m\|_{H^{\Phi}(\Omega)}=\|q_n-q_m\|_{L^{\Phi}(\partial\Omega)},$$

więc $\{q_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^{\Phi}(\partial\Omega)$. Jeśli więc $q_n\to g$ w $L^{\Phi}(\partial\Omega,\omega)$, to

$$f(z)=\int_{\partial\Omega} g(\zeta)\,d\omega_z(\zeta),\quad z\in\Omega,$$

gdyż wszystkie miary harmoniczne są wzajemnie ograniczenie absolutnie ciągłe. Ponadto

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\Omega$$

oraz

$$0=\int_{\partial\Omega}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial\Omega}\frac{f^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\notin\overline{\Omega}.$$

Na mocy stwierdzenia 2.5 mamy $g = f^*$ $\omega$–p.w. W konsekwencji otrzymujemy

$$\|q_n - f^*\|_{L^\Phi(\partial\Omega,\omega)} \to 0$$

oraz

$$\|f^*\|_{L^\Phi(\partial\Omega,\omega)} = \lim_{n\to\infty} \|q_n\|_{L^\Phi\partial\Omega,\omega)} = \lim_{n\to\infty} \|q_n\|_{H^\Phi(\Omega)} = \|f\|_{H^\Phi(\Omega)}.$$

□

Zauważmy, że w przypadku gdy funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta_2$, mamy $H^\Phi(\Omega) = HM^\Phi(\Omega)$. Zatem twierdzenie 2.6 rozszerza wynik otrzymany przez Rudina [54, Theorem 3.2] dla przestrzeni Hardy'ego $H^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, gdyż jak wiadomo, dowolna funkcja potęgowa $\Phi(t) = t^p$ spełnia warunek $\Delta_2$.

Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym. Wprowadzimy teraz ważną rodzinę funkcji, istotną w dalszych rozważaniach. Przypomnijmy, że w przypadku $\Omega = \mathbb{D}$ (patrz [32]) dla $p \in \partial\mathbb{D}$ oraz $s \in (0,1)$

$$u_{p,s}(z) = \left(\frac{1-s}{1-\bar{p}sz}\right)^2,$$

jest funkcją analityczną w $\mathbb{D}$ spełniającą warunki $\|u_{p,s}\|_{H^1(\mathbb{D})} \leqslant 1-s$, $\|u_{p,s}\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = 1$ oraz $\|u_{p,s}\|_{H^\Phi(\mathbb{D})} \approx \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{1-s})}$. Dla $1 \leqslant i \leqslant m$ niech $p \in \partial\mathbb{D}$ oraz $s \in (0,1)$ definiujemy

$$u^i_{p,s}(z) := (u_{p,s} \circ \eta_i^{-1})(z) = \left(\frac{1-s}{1-\frac{\bar{p}sr_i}{z-a_i}}\right)^2, \quad z \in \Omega,$$

oraz $u^0_{p,s} := u_{p,s}|_\Omega$. Zauważmy, że dla $0 \leqslant i \leqslant m$ funkcja $u^i_{p,s}$ rozszerza się do funkcji analitycznej na $E_i$. Z faktu, że odwzorowanie

$$f \mapsto g \circ \eta_i^{-1}$$

jest izometrią z $H^\Phi(\mathbb{D})$ na $H^\Phi(E_i)$ wynika, że prawdziwe są oszacowania

$$\begin{aligned} \|u^i_{p,s}\|_{H^1(E_i)} &\leqslant 1-s, \\ \|u^i_{p,s}\|_{H^\infty(E_i)} &= 1, \\ \|u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(E_i)} &\approx \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{1-s})}. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 2.3 otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \|u^i_{p,s}\|_{H^\infty(\Omega)} &\approx 1, \\ \|u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} &\approx \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{1-s})}, \\ \|u^i_{p,s}\|_{H^1(\Omega)} &\leqslant C(1-s), \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie $C > 0$ jest pewną stałą.

Do dalszych rozważań potrzebować będziemy oszacowania normy funkcjonału ewaluacji. Przypomnijmy, że dla $z \in \Omega$ funkcjonał $\delta_z : H^\Phi(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ zdefiniowany wzorem

$$\delta_z f = f(z), \quad f \in H^\Phi(\Omega)$$

nazywamy *funkcjonałem ewaluacji*.

W przypadku $\Omega = \mathbb{D}$ (patrz [32]) prawdziwa jest zależność:

$$\|\delta_z\|_{H^\Phi(\mathbb{D})^*} \approx \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.8}$$

Podobny fakt jest prawdziwy dla przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$, gdzie $\Omega$ jest obszarem kołowym.

**Stwierdzenie 2.7.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, zaś $\Phi$ wypukłą funkcją Orlicza. Wówczas dla dowolnego $z \in \Omega$ prawdziwa jest równoważność*

$$\|\delta_z\|_{H^\Phi(\Omega)^*} \approx \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\right). \tag{2.9}$$

*Dowód.* Zauważmy najpierw, że jeśli $w \in E_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, to dla dowolnego $g \in B_{H^\Phi(E_i)}$ mamy

$$|g(w)| \leqslant C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w, \partial E_i)}\right), \tag{2.10}$$

przy pewnej stałej $C > 0$. Istotnie, kładąc $f = g \circ \eta_i$, mamy $\|f\|_{H^\Phi(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^\Phi(E_i)}$, jeśli więc $z = \eta_i^{-1}(w) = \frac{r_i}{w-a_i}$, to

$$|g(w)| = |(f \circ \eta_i^{-1})(w)| = \left| f\left(\frac{r_i}{w-a_i}\right)\right|.$$

Z oszacowania (2.8) dostajemy

$$\begin{aligned} |g(w)| \leqslant C_1\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-|\frac{r_i}{w-a_i}|}\right) &= C_1\Phi^{-1}\left(\frac{|w-a_i|}{|w-a_i|-r_i}\right) \\ &\leqslant 2C_1\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w, \partial E_i)}\right). \end{aligned}$$

Ustalmy teraz $z \in \Omega$. Z twierdzenia 2.3 oraz nierówności (2.10) dla dowolnego $f \in B_{H^\Phi(\Omega)}$ mamy

$$\begin{aligned} |f(z)| \leqslant |f_0(z)| + \cdots + |f_m(z)| &\leqslant C\sum_{i=0}^{m} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial E_i)}\right) \\ &\leqslant C\sum_{i=0}^{m} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial \Omega)}\right), \end{aligned}$$

co daje górne oszacowanie w formule (2.9). Aby pokazać drugą nierówność zauważmy, że jeśli $z \in \Omega$ i spełnia nierówność $|z-p| \leqslant 1-s$, gdzie $s \in (0,1)$ i $p\partial \in \mathbb{D}$, to

$$|u^0_{p,s}(z)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Istotnie,

$$|1-\bar{p}sz| = |p-sz| \leqslant |p-z| + (1-s)|z| \leqslant 2(1-s).$$

Dla $1 \leqslant i \leqslant m$ mamy $u^i_{p,s} = u^0_{p,s} \circ \eta_i^{-1}$, więc nierówność

$$|u^i_{p,s}(w)| \geqslant \frac{1}{4}$$

jest spełniona, gdy $w \in A^i_{p,s} := \{z \in \Omega \colon |a_i + r_i\overline{p} - z| \leqslant (1-s)r\}$, gdzie $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i$. Zapisując $z \in \Omega$ w postaci $z = a_i + ((1-s)r + r_i)\bar{p}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{4} \leqslant |u^i_{p,s}(z)| \leqslant \|\delta_z\|_{H^\Phi(\Omega)^*} \|u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} \leqslant \frac{\|\delta_z\|_{H^\Phi(\Omega)^*}}{\Phi^{-1}(\frac{1}{1-s})}.$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) &= \Phi^{-1}\left(\frac{r}{(1-s)r}\right) \\
&= \Phi^{-1}\left(\frac{r}{|a_i + r_i\overline{p} - z|}\right) \\
&\geqslant r\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial E_i)}\right).
\end{aligned}$$

Stąd już łatwo wynika druga z nierówności. □

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha $X$ funkcji analitycznych na $\Omega \subset \mathbb{C}$ posiada własność Fatou, jeśli inkluzja $j \colon X \mapsto H(\Omega)$ jest ciągła, gdzie $H(\Omega)$ wyposażona jest w naturalną topologię zbieżności niemal jednostajnej oraz jeśli posiada następującą własność: dla dowolnego ciągu $\{f_n\}$ ograniczonego w $X$ zbieżnego niemal jednostajnie na $\Omega$ do funkcji $f$, mamy $f \in X$.

**Stwierdzenie 2.8.** *Niech $\Phi$ będzie wypukłą funkcją Orlicza. Wówczas przestrzeń $H^\Phi(\Omega)$ ma własność Fatou.*

*Dowód.* Teza łatwo wynika z twierdzenia 2.3 i faktu, że przestrzeń $H^\Phi(\mathbb{D})$ ma własność Fatou. □

## 2.3. Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu

Rozdział 3 niniejszej rozprawy opisuje wyniki badań dotyczących powłok Banacha przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu. Istotną rolę w prowadzonych tam rozumowaniach pełnić będą wyniki reprezentacyjne (analogon twierdzenia 2.3 w przypadku przestrzeni quasi-Banacha) dla przestrzeni Hardy'ego–Orlicza przedstawione w tej części rozprawy.

Na wstępie podamy definicję przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} \colon r_0 < |z| < 1\}$, gdzie $0 < r_0 < 1$. Chociaż jest ona równoważna ogólnej definicji z poprzedniego podrozdziału, to wydaje się być bardziej naturalna. Nie używamy tu pojęcia miar harmonicznych, normę tej przestrzeni definiujemy radialnie, analogicznie, jak w pracy Sarasona [58], w której badane były klasy Hardy'ego na pierścieniu.

Przypomnijmy, że dowolna funkcja holomorficzna $f \in H(\mathbb{A})$ posiada rozwinięcie w szereg Laurenta $f = f_1 + f_2$, gdzie $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n \in H(\mathbb{D})$ zaś $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)z^{-n} \in H(E)$, gdzie $E = \mathbb{C}^* \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$. Funkcja $\eta\colon \mathbb{D} \to E$ zdefiniowana wzorem

$$\eta(z) = \begin{cases} \frac{r_0}{z} & \text{dla } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{dla } z = 0 \end{cases}$$

jest konforemnym odwzorowaniem dysku $\mathbb{D}$ na zbiór $E$. Dla $f \in H(E)$ zdefiniujmy funkcję

$$\widetilde{f} = f \circ \eta.$$

Przestrzenią Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\mathbb{A})$ jest zbiór tych wszystkich funkcji analitycznych $f \in H(\mathbb{A})$, dla których $\|f\|_{H^\Phi(\mathbb{A})} < +\infty$, gdzie

$$\|f\|_{H^\Phi(\mathbb{A})} := \sup_{r_0<r<1} \|f_r\|_{L^\Phi(\mathbb{T})}.$$

W podobny sposób zdefiniować możemy przestrzeń $H^\Phi(E)$. Oznaczmy przez $H_0^\Phi(E)$ podprzestrzeń przestrzeni $H^\Phi(E)$ zawierającą funkcje znikające w nieskończoności. Jest oczywiste, że $f \in H^\Phi(E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{f} \in H^\Phi(\mathbb{D})$. Ponadto odwzorowanie $f \mapsto \widetilde{f}$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $H^\Phi(E)$ na $H^\Phi(\mathbb{D})$.

Przypomnijmy, że gdy $\Phi$ jest wypukłą funkcją Orlicza, to przestrzeń $H^\Phi(\mathbb{D})$, jest izometryczna z podprzestrzenią przestrzeni Orlicza $L^\Phi(\mathbb{T})$, zawierającą te funkcje $f^* \in L^\Phi(\mathbb{T})$, których współczynniki Fouriera $\widehat{f^*}(n) = 0$ dla $n < 0$. W przypadku uogólnionych obszarów kołowych $\Omega$ opis podprzestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ (gdzie $\omega$ jest miarą harmoniczną na $\partial\Omega$) izomorficznej do $H^\Phi(\Omega)$ (patrz twierdzenie 2.6) może być trudny do uzyskania. Sytuacja upraszcza się jednak dla $\Omega = \mathbb{A}$. Przypomnijmy, wynik uzyskany przez Sarasona [58].

**Twierdzenie 2.9** ([58, Theorem 1]). *Załóżmy, że $f \in H^p(\mathbb{A})$, $p \in [1, \infty)$ i niech $f^*$ będzie funkcją brzegową funkcji $f$. Jeśli $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ jest rozwinięciem $f$ w szereg Laurenta w $\mathbb{A}$, to $f^*|_{\partial\mathbb{D}}$ ma rozwinięcie w szereg Fouriera postaci*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{T},$$

*zaś funkcja $f^*|_{r_0\partial\mathbb{D}}$ ma następujące rozwinięcie w szereg Fouriera*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r_0^n e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Korzystając z powyższego twierdzenia (dla $p = 1$) ciągłości inkluzji $L^\Phi(\mu) \hookrightarrow L^1(\mu)$ dla miary skończonej oraz równoważności miary harmonicznej i miary łukowej otrzymujemy rozszerzenie powyższego rezultatu Sarasona dla przestrzeni Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\mathbb{A})$.

**Twierdzenie 2.10.** *Załóżmy, że $f \in H^\Phi(\mathbb{A})$, gdzie $\Phi$ jest wypukłą funkcją Orlicza i niech $f^*$ będzie funkcją brzegową funkcji $f$. Jeśli $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ jest rozwinięciem $f$ w szereg Laurenta w $\mathbb{A}$, to $f^*|_{\partial\mathbb{D}}$ ma rozwinięcie w szereg Fouriera postaci*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{T},$$

*zaś funkcja* $f^*|_{r_0\partial\mathbb{D}}$ *ma następujące rozwinięcie w szereg Fouriera*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r_0^n e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

### 2.3.1. Przypadek $\Phi \in \Delta(\alpha, \beta)$

Niech $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Przypomnijmy, że funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta(\alpha, \beta)$, jeśli istnieją $t_0 \geqslant 0$ i stała $C > 0$ takie, że dla dowolnego $t \geqslant t_0$ oraz $\lambda \geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$\Phi(\lambda t) \leqslant C^{-1}\lambda^{\beta}\Phi(t),$$
$$\Phi(\lambda t) \geqslant C\lambda^{\alpha}\Phi(t).$$

Ponadto, gdy $t_0 = 0$, $C = 1$ i funkcja $t \mapsto \Phi(t^{1/\alpha})$ jest wypukła, to piszemy $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$. Przypomnijmy także, że dla dowolnej funkcji z klasy $\Delta(\alpha, \beta)$ istnieje równoważna jej funkcja z klasy $\overline{\Delta(\alpha, \beta)}$, skąd wynika, że przestrzenie Orlicza generowane przez te funkcje będą równoważne. Zauważmy, że dla $f \in H(\mathbb{A})$, funkcja $\Phi(|f|)$ jest subharmoniczna, gdy $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$. Łatwo również sprawdzić, że dla $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$ prawdziwa jest nierówność

$$\Phi(x + y) \leqslant 2^{\beta}(\Phi(x) + \Phi(y)), \quad x, y \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Jeśli $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$, to $H^{\Phi}(\mathbb{A}) \subset H^{\alpha}(\mathbb{A})$, zatem granice radialne $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ i $f^*(r_0e^{it}) = \lim_{r\to r_0^+} f(re^{it})$ istnieją dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{T} = [0, 2\pi)$, przy dowolnym $f \in H^{\Phi}(A)$ (patrz [3]).

**Twierdzenie 2.11.** *Jeżeli funkcja Orlicza* $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha, \beta)}$*, to następujące zbiory są równe*

$$H = H^{\Phi}(\mathbb{A}) = \left\{f \in H(\mathbb{A}) : \ \|f\|_{H^{\Phi}(\mathbb{A})} < +\infty\right\},$$
$$K = \left\{f \in H(\mathbb{A}) : \ \Phi(|f|) \text{ posiada harmoniczną majorantę na } \mathbb{A}\right\},$$
$$L = \left\{f \in H(\mathbb{A}) : \ f = f_1 + f_2, f_1 \in H^{\Phi}(\mathbb{D}), f_2 \in H_0^{\Phi}(E)\right\}.$$

*Dowód.* ($L \subset H$). Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy dla $\lambda_j = \|f_j\|_{H^{\Phi}} + \varepsilon$, $(j = 1, 2)$ oraz $r \in (r_0, 1)$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f(re^{it})|}{2^{(1+\beta)/\alpha}(\lambda_1+\lambda_2)}\right)dt &\leqslant 2^{-(1+\beta)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f(re^{it})|}{(\lambda_1+\lambda_2)}\right)dt\\ &\leqslant \frac{2^{\beta}}{2^{\beta+1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f_1(re^{it})|}{\lambda_1}\right)dt\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f_2(re^{it})|}{\lambda_2}\right)dt\right) \leqslant 1.\end{aligned}$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy

$$\|f\|_{H^{\Phi}(\mathbb{A})} \leqslant 2^{(1+\beta)/\alpha}(\|f_1\|_{H^{\Phi}(\mathbb{D})} + \|f_2\|_{H_0^{\Phi}(E)}).$$

$(H \subset L)$. Z założeń wynika, że funkcja $\Phi(|f_1|)$ jest subharmoniczna na $\mathbb{D}$ oraz $H^\Phi(\mathbb{A}) \subset H^\alpha(\mathbb{A})$, więc granice radialne $f_1(r_0e^{it})$ i $f_1(e^{it})$ istnieją p.w. na $\mathbb{T}$. Z drugiej strony $f_2 \in H(E)$, w szczególności jest ona ciągła na $\partial\mathbb{D}$. Stąd nierówność

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f_1(re^{it})|}{\varepsilon}\right)dt &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f_1(e^{it})|}{\varepsilon}\right)dt \\ &\leqslant 2^\beta\Bigg(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f(e^{it})|}{\varepsilon}\right)dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(\frac{|f_2(e^{it})|}{\varepsilon}\right)dt\Bigg) \leqslant 1\end{aligned}$$

jest spełniona dla wszystkich $r \in (0,1)$, gdy liczba $\varepsilon$ spełnia warunek

$$\varepsilon \geqslant 2^{(1+\beta)/\alpha}\max\left\{\|f\|_{H^\Phi(\mathbb{A})}, \max_{t\in\mathbb{T}}\frac{|f_2(e^{it})|}{\Phi^{-1}(1)}\right\}.$$

Zatem $f_1 \in H^\Phi(\mathbb{D})$. W podobny sposób pokazujemy, że $f_2 \in H_0^\Phi(E)$.
$(L \subset K)$. Z założenia wynika, że harmoniczne majoranty funkcji $\Phi(|f_1|)$ i $\Phi(|f_2|)$ istnieją na $\mathbb{D}$ oraz na $E$, odpowiednio. Oznaczmy te funkcje przez $u_{f_1}$ oraz $u_{f_2}$. Wobec tego, dowodzona inkluzja wynika z nierówności (2.11). Istotnie,

$$\Phi(|f(z)|) \leqslant 2^\beta(\Phi(|f_1(z)|) + \Phi(|f_2(z)|)), \quad \text{dla } z \in \mathbb{A} = \mathbb{D}\cap E,$$

co pokazuje, że harmoniczną majorantą funkcji $\Phi(|f|)$ na pierścieniu $\mathbb{A}$ jest funkcja

$$u_f = 2^\beta(u_{f_1} + u_{f_2}).$$

$(K \subset L)$. Niech $f = f_1 + f_2 \in K$, gdzie $f_1 \in H(\mathbb{D})$ i $f_2 \in H_0(E)$. Jeśli $u_f$ jest harmoniczną majorantą funkcji $\Phi(|f|)$, a $s$ ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(r_0, 1)$, to z (2.11) oraz faktu, że $f_2$ jest ograniczona dla $|z| > s$ dostajemy nierówność

$$\Phi(|f|) \leqslant 2^\beta u_f + C,$$

gdzie $C \geqslant 0$ jest pewną stałą. Zauważmy, że $u_f = u_1 + u_2$, gdzie $u_1$ jest harmoniczna w $\mathbb{D}$ zaś $u_2$ jest harmoniczna w $E$. Ponieważ $u_2$ jest ograniczona dla $|z| \geqslant s$, więc

$$\Phi(|f_1|) \leqslant 2^\beta u_1 + C_1 \tag{2.12}$$

dla $s \leqslant |z| < 1$ i dla pewnej nieujemnej stałej $C_1$. Z drugiej strony $\Phi(|f_1|)$ jest subharmoniczna na $\mathbb{D}$, więc nierówność (2.12) zachodzi dla wszystkich $z \in \mathbb{D}$. Ostatecznie $f_1 \in H^\Phi(\mathbb{D})$. Podobne rozważania pokazują, że $f_2 \in H_0^\Phi(E)$, a zatem $f \in L$. □

Zauważmy, że odwzorowanie $(f_1, f_2) \mapsto f$ jest bijekcją liniową z $H^\Phi(\mathbb{D}) \oplus H_0^\Phi(E)$ na $H^\Phi(A)$. W dowodzie pierwszej inkluzji $L \subset H$ udowodniliśmy, że operator ten jest ograniczony. Stąd, z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym otrzymujemy następujący wynik.

**Wniosek 2.12.** *Niech $\Phi$ będzie taką funkcją Orlicza, że $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha,\beta)}$. Wówczas $H^\Phi(\mathbb{A}) \cong H^\Phi(\mathbb{D}) \oplus H_0^\Phi(E)$ z równoważnością norm.*

Rozdział 3

# Powłoki Banacha przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu

W tej części rozprawy przedstawimy opis powłok Banacha przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu, generowanych przez wklęsłe funkcje Orlicza, należące do klasy $\overline{\Delta(\alpha,\beta)}$. W podrozdziale 3.1 badane będą wagowe przestrzenie Bergmana – celem będzie uzyskanie reprezentacji w postaci sumy prostej, z którego w szczególności wynikać będzie uogólnienie nierówności Hardy'ego–Littlewooda na przypadek przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu. W podrozdziale 3.2, metody z prac [60] oraz [48], przedstawimy główne twierdzenie rozdziału. Opisane wyniki pochodzą z pracy [56].

## 3.1. Wagowe przestrzenie Bergmana

Niech $\varphi, \omega\colon [0,1) \to (0,+\infty)$ będą funkcjami ciągłymi spełniającymi następujące warunki

$$\lim_{r\to 1^-} \omega(r) = 0, \tag{3.1}$$

oraz

$$\int_0^1 \varphi(r)dr < +\infty. \tag{3.2}$$

Funkcję $\omega$ nazywamy *normalną*, jeśli istnieją takie liczby $k > \varepsilon > 0$ oraz $0 < s < 1$, że

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^\varepsilon} \searrow 0, \quad \frac{\omega(r)}{(1-r)^k} \nearrow +\infty, \qquad r \geqslant s, \quad r \to 1^-.$$

Mówimy, że zbiór $\{\omega, \varphi\}$ funkcji określonych na przedziale $[0,1)$ jest *parą normalną*, gdy $\omega$ jest funkcją normalną i dla pewnego $k$ spełniającego powyższy warunek istnieje takie $\alpha > k-1$, że

$$\omega(r)\varphi(r) = (1-r^2)^{\alpha}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Zauważmy, że gdy $\omega$ jest funkcją normalną, wówczas istnieje taka funkcja $\varphi$, że para $\{\omega, \varphi\}$ jest normalna.

Dla funkcji $\omega$, $\varphi$ spełniających warunki (3.1) i (3.2) A. L. Shields i D. L. Williams zdefiniowali w [64] następujące przestrzenie funkcji holomorficznych

$$B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{D}) \,:\, \|f\|_{B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D})} := \sup_{0 \leqslant r < 1} M_{\infty}(f,r)\omega(r)dr < +\infty \Big\},$$
$$B_{1}^{\varphi}(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{D}) \,:\, \|f\| := 2\int_0^1 M_1(f,r)\varphi(r)rdr < +\infty \Big\},$$

gdzie $M_1(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt$, $M_{\infty}(f,r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Przestrzenie tego typu nazywamy *wagowymi przestrzeniami Bergmana*.
W pracy [64] udowodnili oni m.in., że $B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D})$ i $B_1^{\varphi}(\mathbb{D})$ są przestrzeniami Banacha oraz $B_1^{\varphi}(\mathbb{D})^* \cong B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D})$. Ściślej, dla pary normalnej $\{\omega, \varphi\}$ i $f \in B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D})$ funkcjonał określony wzorem

$$x_f^*(g) = \int_{\mathbb{D}} g(z)f(\overline{z})\varphi(|z|)\omega(|z|)d\lambda_2, \quad g \in B_1^{\varphi}(\mathbb{D}),$$

jest ciągły, zatem $x_f^* \in B_1^{\varphi}(\mathbb{D})^*$. Odwrotnie, dla dowolnego $x^* \in B_1^{\varphi}(\mathbb{D})^*$ istnieje taka jedyna funkcja $f \in B_{\infty}^{\omega}(\mathbb{D})$, że $x^* = x_f^*$.

Łatwo sprawdzić, że

$$B_1^{\varphi}(\mathbb{D}) = \Big\{ f \in H(\mathbb{D}) \,:\, \|f\|_{B_1^{\varphi}(\mathbb{D})} := \int_0^1 M_1(f,r)\varphi(r)dr < +\infty \Big\},$$

oraz normy $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{B_1^{\varphi}(\mathbb{D})}$ są równoważne.

Niech funkcje $\varphi, \omega$ spełniają (3.1) i (3.2) i niech $r_0 \in (0,1)$. Załóżmy, że funkcje $\psi, \upsilon \colon (r_0, +\infty) \to (0, +\infty)$ są ciągłymi funkcjami spełniającymi warunki

$$\lim_{r \to r_0^+} \upsilon(r) = 0, \quad \lim_{r \to +\infty} \upsilon(r) < \infty, \tag{3.3}$$

oraz

$$\int_{r_0}^{\infty} \psi(r)dr < +\infty. \tag{3.4}$$

Przestrzenie $B_1^{\psi}(E)$ i $B_{\infty}^{\upsilon}(E)$ definiujemy następująco:

$$B_1^{\psi}(E) := \Big\{ f \in H(E) \,:\, \|f\|_{B_1^{\psi}(E)} := \int_{r_0}^{\infty} M_1(f,r)\psi(r)dr < +\infty \Big\},$$
$$B_{\infty}^{\upsilon}(E) := \Big\{ f \in H(E) \,:\, \|f\|_{B_{\infty}^{\upsilon}(E)} := \sup_{r_0 < r < \infty} M_{\infty}(f,r)\upsilon(r)dr < +\infty \Big\}.$$

Przez $B^{\psi}_{1,0}(E)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń przestrzeni $B^{\psi}_{1}(E)$ zawierającą funkcje znikające w nieskończoności. Podobnie definiujemy $B^{\upsilon}_{\infty,0}(E) \subset B^{\upsilon}_{\infty}(E)$. Dla $f \in B^{\psi}_{1}(E)$ odwzorowanie $f \mapsto \widetilde{f}$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $B^{\psi}_{1}(E)$ na $B^{\varphi}_{1}(\mathbb{D})$, gdzie

$$\psi(|z|) = \varphi(\eta(|z|))\frac{r_0}{|z|^2}, \quad z \in E.$$

Niech $\varphi, \psi, \omega, \upsilon$ będą zdefiniowane jak wcześniej. Definiujemy

$$B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A}) := \left\{ f \in H(\mathbb{A}) : \|f\|_{B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})} := \int_{r_0}^{1} M_1(f,r)\varphi(r)\psi(r)dr < +\infty \right\},$$
$$B^{\omega,\upsilon}_{\infty}(\mathbb{A}) := \left\{ f \in H(\mathbb{A}) : \|f\|_{B^{\omega,\upsilon}_{\infty}(\mathbb{A})} := \sup_{r_0<r<1} M_{\infty}(f,r)\omega(r)\upsilon(r)dr < +\infty \right\}.$$

Jest oczywiste, że $B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})$ oraz $B^{\omega,\upsilon}_{\infty}(\mathbb{A})$ są unormowanymi przestrzeniami wektorowymi.

**Stwierdzenie 3.1.** *Funkcja $f \in B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $f_1 \in B^{\varphi}_{1}(\mathbb{D})$ i $f_2 \in B^{\psi}_{1,0}(E)$, że $f = f_1 + f_2$.*

*Dowód.* Załóżmy, że $f_1 \in B^{\varphi}_{1}(\mathbb{D})$ i $f_2 \in B^{\psi}_{1,0}(E)$. Niech $s \in (r_0, 1)$. Wówczas $f = f_1 + f_2$ jest funkcją holomorficzną w $\mathbb{A}$, a ponadto

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{1} \varphi(r)\psi(r)M_1(f,r)dr \leqslant \int_{r_0}^{s} \varphi(r)\psi(r)M_1(f_1,r)dr + \int_{s}^{1} \varphi(r)\psi(r)M_1(f_1,r)dr \\ + \int_{r_0}^{s} \varphi(r)\psi(r)M_1(f_2,r)dr + \int_{s}^{1} \varphi(r)\psi(r)M_2(f_1,r)dr.\end{aligned}$$

Zauważmy, że każda z powyższych całek jest skończona, zatem $f \in B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})$.

Odwrotnie, jeśli $f = f_1 + f_2 \in B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})$, to

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \varphi(r)M_1(f_1,r)dr \leqslant \int_{0}^{s} \varphi(r)M_1(f_1,r)dr + \int_{s}^{1} \varphi(r)M_1(f,r)dr \\ + \int_{s}^{1} \varphi(r)M_1(f_2,r)dr.\end{aligned}$$

Łatwo widać, że pierwsza i trzecia całka są skończone. Aby udowodnić, że również druga całka jest skończona, połóżmy $q := \inf\{\psi(r) : s < r < 1\}$. Wówczas

$$\int_{s}^{1} \varphi(r)M_1(f,r)dr \leqslant q^{-1}\|f\|_{B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})},$$

skąd wynika prawdziwość drugiej implikacji. □

**Stwierdzenie 3.2.** *Jeśli $F$ jest ograniczonym podzbiorem w przestrzeni $B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})$, to funkcje należące do $F$ są niemal jednostajnie ograniczone w $\mathbb{A}$.*

*Dowód.* Dla $0 < r < s$, niech $\overline{A}(r,s) = \{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z| \leqslant s\}$. Bez straty ogólności załóżmy, że $F \subset B_{B^{\varphi,\psi}_{1}(\mathbb{A})}$. Niech $\overline{A}(r', r'')$ będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{A}$. Podobnie zdefiniujmy

$\overline{A}(s', s'')$ oraz $\overline{A}(t', t'')$, przy czym o liczbach $s', s'', r', r'', t', t''$ założmy dodatkowo, że spełniają one nierówności

$$r_0 < s' < s'' < r' < r'' < t' < t'' < 1.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $f \in F$ możemy znaleźć takie $\hat{t}, \hat{s}$, że $\hat{t} \in [t', t'']$, $\hat{s} \in [s', s'']$ oraz $M_1(f, \hat{t}) \leqslant M_1(f, r)$ dla wszystkich $r \in [t', t'']$, a także $M_1(f, \hat{s}) \leqslant M_1(f, r)$ dla wszystkich $r \in [s', s'']$. Ponieważ $F \subset B_{B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})}$, więc dla $f \in F$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_1(f, \hat{t}) \int_{t'}^{t''} \psi(r)\varphi(r) dr \leqslant 1, \\ M_1(f, \hat{s}) \int_{s'}^{s''} \psi(r)\varphi(r) dr \leqslant 1. \end{aligned}$$

Jeśli $z = re^{it} \in \overline{A}(r', r'')$, to reprezentując $f(z)$ za pomocą wzoru całkowego Cauchy'ego na okręgach $|z| = \hat{t}$ i $|z| = \hat{s}$, otrzymujemy (gdyż $0 < \hat{s} < r < \hat{t}$)

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\hat{t}e^{iw})\hat{t}e^{iw}}{\hat{t}e^{iw} - re^{it}} dw - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\hat{s}e^{iw})\hat{s}e^{iw}}{\hat{s}e^{iw} - re^{it}} dw \right| \\ &\leqslant \frac{M_1(f, \hat{t})}{\hat{t} - r} + \frac{M_1(f, \hat{s})}{r - \hat{s}}. \end{aligned}$$

Stosując powyższe oszacowania dla $M_1(f, \hat{t})$ i $M_1(f, \hat{s})$ dostajemy

$$|f(z)| \leqslant \left[ (t' - r'') \int_{t'}^{t''} \psi(r)\varphi(r) dr \right]^{-1} + \left[ (r' - s'') \int_{s'}^{s''} \psi(r)\varphi(r) dr \right]^{-1}.$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższej nierówności jest stałą zależną od wyboru zwartego podzbioru $\overline{A}(r', r'')$ pierścienia $\mathbb{A}$. Pokazaliśmy zatem, że rodzina $F$ jest niemal jednostajnie ograniczona w $\mathbb{A}$. □

**Stwierdzenie 3.3.** *Przestrzeń $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ jest przestrzenią Banacha. Zbieżność w $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ implikuje zbieżność niemal jednostajną w $\mathbb{A}$.*

*Dowód.* Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$. Zauważmy, że $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ zawiera się w przestrzeni $L^1(\mathbb{A}, \mu)$ z miarą $\mu = \frac{1}{2\pi}\varphi(r)\psi(r)\, dr\, dw$. Z zupełności przestrzeni $L^1(\mathbb{A}, \mu)$ wnioskujemy, że $f_n \to f$ dla pewnego $f \in L^1(\mathbb{A}, \mu)$. Stąd istnieje podciąg $\{f_{n_k}\}$ ciągu $\{f_n\}$ zbieżny p.w. do $f$. Ponieważ $\{f_{n_k}\}$ jest ograniczony w $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$, z poprzedniego stwierdzenia i twierdzenia Montela wnioskujemy, że $\{f_{n_k}\}$ jest rodziną normalną. Zatem istnieje podciąg ciągu $\{f_{n_k}\}$ zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $g \in H(\mathbb{A})$. Zauważmy, że $f = g$ p.w., a ponieważ $g$ jest holomorficzna oraz $g \in L^1(\mathbb{A}, \mu)$, więc $g \in B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ oraz $f_n \to g$ w $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$. Stąd $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ jest przestrzenią Banacha. Zauważmy, że z zastosowanej argumentacji wynika również, że ciąg $\{f_n\}$ dąży do $g$ niemal jednostajnie w $\mathbb{A}$. □

Zauważmy, że podobna reprezentacja do tej ze stwierdzenia 3.1 zachodzi w przypadku przestrzeni $B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})$.

**Stwierdzenie 3.4.** *Funkcja $f \in B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $f_1 \in B_\infty^{\omega}(\mathbb{D})$ i $f_2 \in B_{\infty,0}^{v}(E)$, że $f = f_1 + f_2$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że $f_1 \in B^{\omega}_{\infty}(\mathbb{D})$. Wówczas $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_1(z)|\omega(|z|) < +\infty$, a stąd

$$\sup_{z\in\mathbb{A}} |f_1(z)|\upsilon(|z|)\omega(|z|) < +\infty.$$

Analogicznie w przypadku, gdy $f_2 \in B^{\upsilon}_{\infty,0}(E)$ dostajemy, że $\sup_{z\in\mathbb{A}} |f_2(z)|\upsilon(|z|)\omega(|z|) < +\infty$, skąd łatwo wynika, że $\sup_{z\in\mathbb{A}} |f(z)|\upsilon(|z|)\omega(|z|) < +\infty$.

Niech $f = f_1 + f_2 \in B^{\omega,\upsilon}_{\infty}(\mathbb{A})$. Ustalmy $s \in (r_0, 1)$, wówczas

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_1(z)|\omega(|z|) = \sup_{|z|<1} |f_1(z)|\omega(|z|) &\leqslant \sup_{|z|\leqslant s} |f_1(z)|\omega(|z|) \\ &+ \max_{|z|\geqslant s} \upsilon(|z|) \sup_{s\leqslant|z|<1} |f(z)|\omega(|z|) \\ &+ \sup_{s\leqslant z\leqslant 1} |f_2(z)|\omega(|z|) < +\infty.\end{aligned}$$

W podobny sposób dowodzimy, że $f_2 \in B^{\upsilon}_{\infty,0}(E)$. □

**Twierdzenie 3.5.** *Załóżmy, że funkcje* $\varphi, \psi, \omega, \upsilon$ *spełniają warunki* (3.1)–(3.4). *Wówczas prawdziwe są następujące izomorfizmy między odpowiednimi przestrzeniami Banacha*:

(i) $B^{\varphi,\psi}_1(\mathbb{A}) \cong B^{\varphi}_1(\mathbb{D}) \oplus B^{\psi}_{1,0}(E)$,

(ii) $B^{\omega,\upsilon}_{\infty}(\mathbb{A}) \cong B^{\omega}_{\infty}(\mathbb{D}) \oplus B^{\upsilon}_{\infty,0}(E)$.

*Dowód.* (i). Odwzorowanie $B^{\varphi}_1(\mathbb{D}) \oplus B^{\psi}_{1,0}(E) \ni (f_1, f_2) \mapsto f := f_1 + f_2 \in B^{\varphi,\psi}_1(\mathbb{A})$ jest liniową bijekcją. Z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym wynika, że jeśli jest ono ciągłe, to również odwzorowanie odwrotne jest ciągłe, zatem problem redukuje się do udowodnienia nierówności

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{B^{\varphi,\psi}_1(\mathbb{A})} &\leqslant C\|f_1\|_{B^{\varphi}_1(\mathbb{D})}, \quad f_1 \in B^{\varphi}_1(\mathbb{D}),\\ \|f_2\|_{B^{\varphi,\psi}_1(\mathbb{A})} &\leqslant C'\|f_2\|_{B^{\psi}_{1,0}(E)}, \quad f_2 \in B^{\psi}_{1,0}(E),\end{aligned}$$

gdzie $C, C'$ są pewnymi stałymi zależnymi jedynie od $\varphi, \psi$.

Niech $f_1 \in B^{\varphi}_1(\mathbb{D})$. Ustalmy $t, s \in (r_0, 1)$ przy czym $s < t$, wówczas

$$\int_{r_0}^{s} \varphi(r)\psi(r)dr \leqslant \max_{r\in[r_0,s]} \varphi(r) \int_{r_0}^{s} \psi(r)dr =: K.$$

Zauważmy, że funkcja $M_1(g,\cdot)$ jest niemalejąca na $[0,1)$, zatem dla dowolnego $g \in H(\mathbb{D})$ mamy

$$\int_{r_0}^{s} M_1(f_1, r)\varphi(r)\psi(r)dr \leqslant KM_1(f_1, s),$$

a stąd (gdyż $s < t$)

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^t M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr &= \int_{r_0}^s M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr + \int_s^t M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr\\ &\leqslant KM_1(f_1,s) + \max_{r\in[s,t]}\psi(r)\int_s^t M_1(f_1,r)\varphi(r)dr\\ &\leqslant \frac{K}{t-s}\int_s^t M_1(f_1,r)dr\\ &\quad+\max_{r\in[s,t]}\psi(r)\int_s^t M_1(f_1,r)\varphi(r)dr\\ &\leqslant \frac{K}{t-s}(\inf_{r\in[s,t]}\varphi(r))^{-1}\int_s^t M_1(f_1,r)\varphi(r)dr\\ &\quad+\max_{r\in[s,t]}\psi(r)\int_s^t M_1(f_1,r)\varphi(r)dr.\end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że

$$\int_{r_0}^t M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr \leqslant C_1\|f_1\|_{B_1^\varphi(\mathbb{D})}, \tag{3.5}$$

gdzie $C_1 = \max\left\{(\frac{K}{t-s}(\inf_{r\in[s,t]}\varphi(r))^{-1}, \max_{r\in[s,t]}\psi(r)\right\} > 0$. Z drugiej strony

$$\int_t^1 M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr \leqslant \sup_{r\in[t,1)}\psi(r)\int_t^1 M_1(f_1,r)\varphi(r)dr,$$

implikuje

$$\int_t^1 M_1(f_1,r)\varphi(r)\psi(r)dr \leqslant C_2\|f_1\|_{B_1^\varphi(\mathbb{D})}, \tag{3.6}$$

gdzie $C_2 = \sup_{r\in[t,1)}\psi(r)$. Dodając stronami (3.5) i (3.6), otrzymujemy żądaną nierówność ze stałą $C = \max\{C_1, C_2\}$.

Drugą z nierówności dowodzimy używając tej samej techniki.

(ii). Podobnie jak w poprzednim podpunkcie, problem redukuje się do nierówności

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})} &\leqslant C\|f_1\|_{B_\infty^\omega(\mathbb{D})}, \quad f_1\in B_\infty^\omega(\mathbb{D}),\\ \|f_2\|_{B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})} &\leqslant C\|f_2\|_{B_{\infty,0}^v(E)}, \quad f_2\in B_{\infty,0}^v(E),\end{aligned}$$

które w tym przypadku są oczywiste. □

Zauważmy, że twierdzenie 3.5 można udowodnić także w inny sposób. Z poprzednich rozważań wynika, że topologie przestrzeni $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$, $B_1^\varphi(\mathbb{D})$ oraz $B_{1,0}^\psi(E)$ są mocniejsze niż topologie zbieżności niemal jednostajnej. Ten fakt jest oczywisty także dla przestrzeni $B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})$, $B_\infty^\omega(\mathbb{D})$ i $B_{\infty,0}^v(E)$. Łatwo pokazać, że odwzorowanie $(f_1,f_2)\mapsto f_1+f_2$ między badanymi przestrzeniami ma domknięty wykres w topologii zbieżności niemal jednostajnej. Zatem z twierdzenia o domkniętym wykresie dostajemy ciągłość tego operatora.

## 3.2. Powłoki Banacha przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu

W podrozdziale tym zaprezentujemy główny wynik rozdziału – opis powłok Mackeya w przypadku przestrzeni Hardy'ego–Orlicza na pierścieniu generowanych przez funkcje Orlicza, które można „dobrze przybliżać" wklęsłymi funkcjami potęgowymi. Twierdzenie to zastosujemy do wyznaczenia przestrzeni dualnych do przestrzeni Hardy'ego–Orlicza. Zauważmy, że rezultat ten rozszerza w znaczny sposób wynik Boyda z pracy [3], w której zaprezentowany został opis powłok Mackeya w przypadku przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{A})$ dla $0 < p < 1$.

**Twierdzenie 3.6.** *Niech funkcja Orlicza $\Phi \in \overline{\Delta(\alpha,\beta)}$, $\beta < 1$ oraz niech $\varphi(r) = (1-r)^{-2}/\Phi^{-1}(\frac{1}{1-r})$, $\psi(r) = (\varphi \circ \eta^{-1})(r)\frac{r_0}{r^2}$ dla $r \in (r_0, 1)$. Wówczas powłoka Banacha przestrzeni $H^\Phi(\mathbb{A})$ jest izomorficzna z przestrzenią Banacha $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$.*

Aby udowodnić twierdzenie 3.6 należy pokazać, że topologia indukowana przez normę $\|\cdot\|_{B_1^{\varphi,\upsilon}(\mathbb{A})}$ jest słabsza niż topologia przestrzeni $H^\Phi(\mathbb{A})$ oraz że $H^\Phi(\mathbb{A})$-domknięcie absolutnie wypukłej powłoki każdego $H^\Phi(\mathbb{A})$-otoczenia zera zawiera pewne $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$-otoczenie zera. Pierwszy warunek jest spełniony. Istotnie, z wniosku 2.12 oraz twierdzenia 3.5 otrzymujemy, że $H^\Phi(\mathbb{A}) \cong H^\Phi(\mathbb{D}) \oplus H_0^\Phi(E)$ oraz $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A}) \cong B_1^\varphi(\mathbb{D}) \oplus B_{1,0}^\psi(E)$. Ponieważ $H^\Phi(\mathbb{D}) \hookrightarrow B_1^\varphi(\mathbb{D})$ (patrz [48, Lemma 5]), więc

$$H^\Phi(\mathbb{A}) \cong H^\Phi(\mathbb{D}) \oplus H_0^\Phi(E) \hookrightarrow B_1^\varphi(\mathbb{D}) \oplus B_{1,0}^\psi(E) \cong B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A}).$$

Dowód drugiego z warunków jest oparty na metodach z pracy [60] (w przypadku $H^p(\mathbb{D})$, gdzie $0 < p < 1$). Udowodnimy, że dla dowolnego $f \in H^\Phi(\mathbb{A})$ spełniającego warunek $\|f\|_{B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})} \leqslant C$ istnieje zespolona miara borelowska $\mu$ na $\mathbb{A}$ oraz rodzina $\{F^\xi\}$ funkcji holomorficznych $F^\xi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, gdzie $\xi \in \mathbb{A}$, dla których następujące warunki są spełnione:

$$f(z) = \int_{\mathbb{A}} F^\xi(z)\,d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{A}, \tag{3.7}$$

$$\|F^\xi\|_{H^\Phi(\mathbb{A})} \leqslant M, \tag{3.8}$$

$$|\mu|(\mathbb{A}) \leqslant 1. \tag{3.9}$$

przy pewnej stałej $M > 0$. Zauważmy, że warunki (3.7)–(3.9) wyrażają $f$ jako „uogólnioną kombinację wypukłą" funkcji $F^\xi$.

*Dowód twierdzenia 3.6.* Niech $\gamma > \frac{1}{\alpha} - 2$ oraz niech $\xi \in A$. Zdefiniujmy funkcję $K(\xi,\cdot) := K_1(\xi,\cdot) + K_2(\xi,\cdot)$, gdzie

$$K_1(\xi,z) := \sum_{n=0}^{\infty}(1-|\xi|^2)^\gamma (B_{r_0}^1(n+1,\gamma+1))^{-1}(\overline{\xi})^n z^n,$$

$$K_2(\xi,z) := \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1-\frac{r_0^2}{|\xi|^2}\Big)^\gamma (B_{r_0}^1(n+1,\gamma+1))^{-1} r_0^{2n+2}|\xi|^{-4}(\overline{\xi})^{-n} z^{-n},$$

dla dowolnego $z \in \mathbb{A}$ oraz

$$B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1) := \int_{r_0^2}^1 u^n(1-u)^\gamma du,$$
$$B(n+1,\gamma+1) := \int_0^1 u^n(1-u)^\gamma du.$$

Dla ustalonego $\xi \in \mathbb{A}$, odwzorowanie $\mathbb{A} \ni z \mapsto K(\xi,z)$ jest funkcją holomorficzną na $\mathbb{A}$. Istotnie, funkcja ta jest analityczna na większym pierścieniu, gdyż promienie zbieżności funkcji $K_1$ i $K_2$ są odpowiednio równe $\frac{1}{|\xi|} > 1$ i $\frac{r_0^2}{|\xi|} < r_0$. Ponadto dla $f \in B_1^{\varphi,\upsilon}(\mathbb{A})$ mamy

$$f(z) = \int_{\mathbb{A}} K(\xi,z)f(\xi)d\lambda(\xi), \quad z \in \mathbb{A},$$

gdzie $\lambda = \frac{1}{\pi}\lambda_2$ ($\lambda_2$ oznacza dwuwymiarową miarę Lebesgue'a na $\mathbb{A}$). Dla dowolnego $\xi \in \mathbb{A}$ definiujemy funkcję $F^\xi = F_1^\xi + F_2^\xi$, gdzie dla $z \in \mathbb{A}$

$$F_1^\xi(z) = (1-|\xi|)^2\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-|\xi|}\Big)K_1(\xi,z),$$
$$F_2^\xi(z) = \Big(1-\frac{r_0}{|\xi|}\Big)^2\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-\frac{r_0}{|\xi|}}\Big)\frac{|\xi|^2}{r_0}K_2(\xi,z),$$
$$d\mu(\xi) = (\varphi(|\xi|)f_1(\xi) + \psi(|\xi|)f_2(\xi))d\lambda(\xi).$$

Udowodnimy, że $F^\xi$ i $\mu$ spełniają warunki (3.7)–(3.9) dla takiego dowolnego $f \in H^\Phi(A)$, że $\|f\|_{B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})} \leqslant C$. Istotnie

$$\begin{aligned}
|\mu|(\mathbb{A}) &= \int_{\mathbb{A}} |\varphi(|\xi|)f_1(\xi)d\lambda(\xi) \\
&\quad + \psi(|\xi|)f_2(\xi)|d\lambda(\xi) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{A}} \varphi(|\xi|)|f_1(\xi)|d\lambda(\xi) \\
&\quad + \int_{\mathbb{A}} \psi(|\xi|)|f_2(\xi)|)d\lambda(\xi) \\
&\leqslant 2\int_{r_0}^1 M_1(f_1,r)\varphi(r)rdr \\
&\quad + 2\int_{r_0}^1 M_1(f_2,r)\psi(r)rdr \\
&\leqslant C_1\int_0^1 M_1(f_1,r)\varphi(r)dr \\
&\quad + C_2\int_{r_0}^\infty M_1(f_2,r)\psi(r)dr \\
&\leqslant \frac{1}{C}\|f\|_{B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})},
\end{aligned}$$

dla $C^{-1} = \max\{C_1, C_2\}$. Stąd $\|f\|_{B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})} \leqslant C$ implikuje $|\mu|(\mathbb{A}) \leqslant 1$. Zauważmy, że następujące równości

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}} F^{\xi}(z)d\mu(\xi) &= \int_{\mathbb{A}} (1-|\xi|)^2 \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-|\xi|}\Big)K_1(\xi,z)d\mu(\xi) \\
&\quad + \int_{\mathbb{A}} \Big(1-\frac{r_0}{|\xi|}\Big)^2 \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-\frac{r_0}{|\xi|}}\Big)\frac{|\xi|^2}{r_0}K_2(\xi,z)d\mu(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{A}} \frac{1}{\varphi(|\xi|)}K_1(\xi,z)d\mu(\xi) + \int_{\mathbb{A}} \frac{1}{\psi(|\xi|)}K_2(\xi,z)d\mu(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{A}} K_1(\xi,z)f_1(\xi)d\lambda(\xi) + \int_{\mathbb{A}} K_2(\xi,z)f_2(\xi)d\lambda(\xi) \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

pokazują, że warunek (3.7) jest również spełniony. Aby udowodnić nierówność (3.8) pokażemy, że $\|F_1^{\xi}\|_{H^{\Phi}(\mathbb{A})} \leqslant C$ dla pewnej stałej $C$ (niezależnej od $\xi$). Analogicznie pokazuje się $\|F_2^{\xi}\|_{H^{\Phi}(\mathbb{A})} \leqslant C'$. Następnie stosując twierdzenie 2.12 dostajemy oszacowanie (3.8). Z pracy [60] wiemy, że funkcja $I^{\xi}$ określona na $\mathbb{A}$ wzorem

$$I^{\xi}(z) = \frac{1}{(1-\overline{\xi}z)^{\gamma+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(B(n+1,\gamma+1))^{-1}(\overline{\xi})^n z^n, \quad z \in \mathbb{A},$$

spełnia nierówność

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |I^{\xi}(z)|^{\alpha} \leqslant \kappa(1-|\xi|)^{(\gamma+2)\alpha} \tag{3.10}$$

dla pewnej stałej $\kappa > 0$. Zauważmy, że dla pewnych stałych $C_1$, $C_2$, $C_3$ (zależnych jedynie od $r_0$ oraz $\gamma$) i $n \geqslant 1$ prawdziwe są zależności

$$\Big|B(n+1,\gamma+1) - B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1)\Big| \leqslant C_1\frac{r_0^{2n+2}}{n+1} \tag{3.11}$$

$$\frac{C_2}{(n+1)^{\gamma+1}} \leqslant B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1) \leqslant B(n+1,\gamma+1) \tag{3.12}$$

$$B(n+1,\gamma+1) \leqslant C_3 B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1). \tag{3.13}$$

Jedynie pierwsza nierówność w formule (3.12) oraz nierówność (3.13) są nietrywialne. Przypuśćmy, że $\gamma \leqslant 0$. Wówczas $(1-u)^{\gamma}$ jest niemalejącą funkcją na przedziale $[0,1)$, skąd wynika, że

$$\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0^2} u^n(1-u)^{\gamma}du \leqslant \frac{1}{1-r_0^2}\int_{r_0^2}^1 u^n(1-u)^{\gamma}du.$$

Mnożąc nierówność stronami przez $r_0^2$ oraz dodając obustronnie $\int_{r_0^2}^1 u^n(1-u)^{\gamma}du$ otrzymujemy nierówność (3.13) ze stałą $\frac{r_0^2}{1-r_0^2}+1$. Jeśli $\gamma > 0$ wówczas funkcja $(1-u)^{\gamma}$ jest ciągła na przedziale $[0,1]$ oraz dodatnia dla $u \in [0,1)$. Istnieje więc taka stała $c$, że

$$\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0^2} u^n(1-u)^{\gamma}du \leqslant \frac{c}{1-r_0^2}\int_{r_0^2}^1 u^n(1-u)^{\gamma}du.$$

Używając tych samych argumentów, jak w poprzednim przypadku, dostajemy nierówność (3.13). Przypomnijmy, że

$$B(n+1,\gamma+1)=\Gamma(\gamma+1)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\gamma+1)}.$$

Korzystając z zależności $\frac{\Gamma(z+k)}{k^z\Gamma(k)}\to 1$, gdy $k\to\infty$ dla $z=\gamma+1$ oraz dla $k=n+1$ otrzymujemy nierówność (3.12).

Z warunków (3.11) i (3.13) otrzymujemy

$$\left|I^{\xi}(re^{it})-\sum_{n=0}^{\infty}(B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1))^{-1}(\overline{\xi})^n z^n\right|=$$
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n+1,\gamma+1)-B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1)}{B(n+1,\gamma+1)(B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1)}(\overline{\xi})^n z^n\right|\leqslant c_1<+\infty, \tag{3.14}$$

więc z oszacowania (3.10) możemy założyć, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1))^{-1}(\overline{\xi})^n e^{int}\right|^{\alpha}dt\leqslant\frac{(1-|\xi|)\kappa'}{(1-|\xi|)^{(\gamma+2)\alpha}}. \tag{3.15}$$

Aby zakończyć dowód rozważmy funkcje $h,h_1\colon\mathbb{A}\to\mathbb{C}$ określone wzorami

$$h(z)=(1-|\xi|)^{\gamma+2}\sum_{n=0}^{\infty}(B^1_{r_0}(n+1,\gamma+1))^{-1}(\overline{\xi})^n z^n,$$
$$h_1(z)=(1-|\xi|)^{\gamma+2}I^{\xi}(z),\quad z\in\mathbb{A}.$$

Nierówność (3.14) implikuje $|h_1(z)|\approx|h(z)|$ dla $z\in\mathbb{A}$. Z faktu $|h_1(z)|\leqslant 1$ dla każdego $z\in\mathbb{A}$ wynika, że istnieje taka stała $c_2>0$, że $c_2|h(z)|\leqslant 1$ dla każdego $z\in\mathbb{A}$. Kładąc $t=\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-|\xi|}\right)$ oraz stosując przybliżenie $1-|\xi|\approx 1-|\xi|^2$ dostajemy $|F_1^{\xi}(z)|\leqslant c_3t|h(z)|$ dla $z\in\mathbb{A}$ oraz

$$\Phi(|F_1^{\xi}(z)|)\leqslant c_4\Phi(t|h(z)|)\leqslant\kappa''|h(z)|^{\alpha}(1-|\xi|)^{-1},\quad z\in\mathbb{A}.$$

Całkując ostatnią nierówność stronami otrzymujemy

$$\rho_{\Phi}(F_1^{\xi})\leqslant\kappa''\|h\|_{\alpha}^{\alpha}(1-|\xi|)^{-1},\quad \xi\in\mathbb{A},$$

gdzie przez $\rho_{\Phi}$ oznaczamy modular. Z oszacowania (3.15) wnioskujemy, że $\|h\|_{\alpha}^{\alpha}\leqslant\kappa'(1-|\xi|)$, $\xi\in\mathbb{A}$. Ostatecznie dostajemy $\rho_{\Phi}(F_1^{\xi})\leqslant\kappa'\kappa''$ dla każdego $\xi\in\mathbb{A}$, co dowodzi nierówności (3.8). □

Twierdzenie 3.6 możemy zastosować do opisu przestrzeni dualnych do $H^{\Phi}(\mathbb{A})$.

**Twierdzenie 3.7.** *Niech funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Phi\in\overline{\Delta(\alpha,\beta)}$ dla $\beta<1$. Wówczas $H^{\Phi}(\mathbb{A})^*\cong B_{\infty}^{\omega,\upsilon}(\mathbb{A})$, gdzie*

$$\omega(|z|)=(1-|z|)^{\gamma+2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad |z|<1,$$

*oraz*

$$\upsilon(|z|)=\left(1-\frac{r_0}{|z|}\right)^{\gamma+2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{r_0}{|z|}}\right),\quad |z|>r_0,\quad \gamma>1/\alpha-2.$$

*Dokładniej, jeśli* $f \in B_\infty^{\omega,\upsilon}(\mathbb{A})$*, to funkcjonał* $x_f^* \in B^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})^*$*, gdzie*

$$x_f^*(g) = \int_{\mathbb{A}} g(z) f(\overline{z}) \varphi(|z|)\psi(|z|)\omega(|z|)\upsilon(|z|) d\lambda_2(z), \quad g \in H^{\Phi}(\mathbb{A}).$$

*Odwrotnie, jeśli* $x^* \in H^{\Phi}(\mathbb{A})^*$*, to istnieje jedyna funkcja* $f \in B_\infty^{\omega,\upsilon}(\mathbb{A})$*, że* $x^* = x_f^*$.

*Dowód.* Na mocy twierdzenia 3.6 mamy $H^{\Phi}(\mathbb{A})^* = B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})^*$. Łatwo sprawdzić, że $x_f^* \in B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$. Przypuśćmy więc, że $x^* \in B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})^*$. Wówczas na mocy twierdzenia 3.5 istnieją takie jedyne funkcjonały $x_1^* \in B_1^{\varphi}(\mathbb{D})^*$ oraz $x_2^* \in B_{1,0}^{\psi}(E)^*$, że $x^* = x_1^* + x_2^*$. Korzystając z opisu przestrzeni dualnych do $B_1^{\varphi}(\mathbb{D})$ oraz $B_{1,0}^{\psi}(E)$ wnioskujemy istnienie funkcji $f_1 \in B_\infty^{\omega}(\mathbb{D})$ i $f_2 \in B_{\infty,0}^{\upsilon}(E)$, które odpowiadają funkcjonałom $x_1^*$ i $x_2^*$ odpowiednio. Korzystając ponownie z twierdzenia 3.5 otrzymujemy $f = f_1 + f_2 \in B_\infty^{\omega,\upsilon}(\mathbb{A})$. Stąd wynika, że $x^* = x_f^*$. □

Rozdział 4

# Operatory kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza

W rozdziale tym zaprezentujemy wyniki badań dotyczących operatorów kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na obszarach kołowych. Część rezultatów zawarta jest w pracy [57]. W tym celu zastosujemy pewne metody z prac [32, 29, 31, 33, 53] do badania operatorów kompozycji między przestrzeniami Banacha funkcji holomorficznych za pomocą operatorów inkluzji z przestrzeni funkcji holomorficznych do przestrzeni funkcji mierzalnych nad przestrzeniami miar borelowskich na obszarach w $\mathbb{C}$. W związku z tym będziemy badać zwartość operatora inkluzji $j_\mu \colon H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$, gdzie $\mu$ jest miarą borelowską na domknięciu $\overline{\Omega}$ obszaru kołowego $\Omega$ płaszczyzny zespolonej. Podana zostanie charakteryzacja porządkowo ograniczonych operatorów generowanych przez operatory kompozycji. Ponadto udowodnimy twierdzenia o słabej zwartości i zupełnej ciągłości operatorów kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na obszarach kołowych.

Termin funkcja Orlicza zarezerwowany będzie w tym rozdziale dla wypukłych funkcji Orlicza. Ponadto symbol $\Omega$ oznaczać będzie obszar kołowy, choć w przypadku kilku twierdzeń ograniczenie to nie będzie konieczne. Przypomnijmy, że gdy $\varphi$ jest holomorficznym odwzorowaniem obszaru $\Omega$ w siebie, tj. $\varphi \colon \Omega \to \Omega$ (fakt ten zapisywać będziemy następująco: $\varphi \in \Upsilon_\Omega$), wówczas dla $f \in H(\Omega)$ operator $C_\varphi$ definiujemy wzorem:

$$(C_\varphi f)(z) := (f \circ \varphi)(z), \quad z \in \Omega.$$

Na wstępie uzasadnimy, że $C_\varphi \colon H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest operatorem liniowym. Liniowość jest oczywista. Aby udowodnić, że $C_\varphi$ jest ograniczony, niech $f \in H^\Phi(\Omega)$, przy czym $\|f\|_{H^\Phi(\Omega)} = \lambda$, gdzie $\lambda = \inf\{\varepsilon > 0 : v_{f,\varepsilon}(z_0) \leqslant 1\}$ oraz $v_{f,\varepsilon}$ jest najmniejszą harmoniczną majorantą funkcji $\Phi\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right)$ w zbiorze $\Omega$. Wówczas mamy

$$\Phi\left(\frac{|f\circ\varphi|}{\varepsilon}\right) \leqslant v_{f,\varepsilon}\circ\varphi$$

oraz $v_{f,\varepsilon}\circ\varphi$ jest funkcją harmoniczną w $\Omega$. Ponadto $\Phi\left(\frac{|f(\varphi(z_0))|}{\varepsilon}\right) \leqslant v_{f,\varepsilon}(\varphi(z_0))$. Połóżmy $w_0=\varphi(z_0)$, wówczas z nierówności Harnacka istnieje taka stała $c>0$, że $v_{f,\varepsilon}(w_0) \leqslant c v_{f,\varepsilon}(z_0)$. Stąd dla $C=\max\{c,1\}$ mamy

$$\|C_\varphi f\|_{H^\Phi(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^\Phi(\Omega)}, \quad f\in H^\Phi(\Omega).$$

Ograniczoność operatora kompozycji $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ została wykazana przez Littlewooda w 1925 roku (patrz [40]). Klasyczne metody można zastosować także w przypadku klas Hardy'ego–Orlicza na dysku. Okazuje się jednak, że w przypadku przestrzeni na obszarach wielospójnych pojawia się istotny problem wynikający z braku pewnych narzędzi (np. lematu Schwarza). Aby zobaczyć, jak użyteczna jest terminologia „harmonicznych majorant" przytoczmy wynik Boyda [3], który w kilkustronicowym dowodzie wykazał, że norma operatora kompozycji $C_\varphi : H^p(\mathbb{A}) \to H^p(\mathbb{A})$, gdy $p\geqslant 1$, spełnia nierówność

$$\|C_\varphi\| \leqslant \left[\frac{1+\operatorname{tgh}(\pi|t|/(2q))+\operatorname{tg}(\pi|\log(|w|/\sqrt{r_0})|/(2q))[1-\operatorname{tgh}(\pi|t|/(2q))]}{1-\operatorname{tgh}(\pi|t|/(2q))-\operatorname{tg}(\pi|\log(|w|/\sqrt{r_0})|/(2q))[1+\operatorname{tgh}(\pi|t|/(2q))]}\right]^{1/p},$$

gdzie $\varphi(\sqrt{r_0})=w=|w|e^{it}$ i $q=-\log r_0$, $0<r_0<1$.

Nasze dalsze rozważania dotyczyć będą opisu zwartych operatorów kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na obszarach.

## 4.1. Zwarte operatory kompozycji

Studia dotyczące zwartych operatorów kompozycji rozpoczniemy od przypomnienia znanego twierdzenia, którego dowód znaleźć można w pracy [32, Proposition 3.8]. Dodajmy, że w klasycznym przypadku (dla $X=Y=H^p$) twierdzenie to nosi nazwę kryterium Schwartza.

**Stwierdzenie 4.1.** *Niech $X,Y$ będą przestrzeniami Banacha funkcji analitycznych na obszarze $\Omega\subset\mathbb{C}$, przy czym o $X$ załóżmy, że ma własność Fatou. Niech $\varphi\in\Upsilon_\Omega$ będzie takie, że $C_\varphi f\in Y$, o ile $f\in X$. Wówczas $C_\varphi : X\to Y$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $\{f_n\}$ ograniczonego w $X$ i zbieżnego niemal jednostajnie do 0, mamy $\|C_\varphi f_n\|_Y \to 0$.*

Stosując stwierdzenie 4.1 dla $X=Y=H^\Phi(\Omega)$ (o których wiemy, że mają własność Fatou), otrzymujemy warunek konieczny na zwartość operatora $C_\varphi$.

**Stwierdzenie 4.2.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym i niech $\varphi\in\Upsilon_\Omega$. Jeśli $C_\varphi : H^\Phi(\Omega)\to H^\Phi(\Omega)$ jest operatorem zwartym, to dla każdego $0\leqslant i\leqslant m$ mamy*

$$\lim_{s\to 1^-}\sup_{p\in\mathbb{T}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right)\|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0. \tag{4.1}$$

*Dowód.* Niech $\{p_n\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów z $\partial\Omega$, zaś $\{s_n\} \subset (0,1)$ oraz $s_n \to 1$. Korzystając z faktu, że $\|u^i_{p,s}\|_{H^\Phi} \approx \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{1-s})}$ dla każdego $s \in (0,1)$, wnioskujemy, że ciąg $\{f^i_n\}$ zdefiniowany wzorem

$$f^i_n(z) = \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-s_n}\Big)u^i_{p_n,s_n}(z), \quad z \in \Omega,$$

jest ograniczony w $H^\Phi(\Omega)$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant m$. Ponieważ $\Phi^{-1}$ jest wklęsłą funkcją oraz $\Phi^{-1}(0) = 0$, zatem $\Phi^{-1}(x) \leqslant Cx$ dla $x \geqslant 1$, gdzie $C = \Phi^{-1}(1)$. Stąd wynika, że

$$|f^i_n(z)| \leqslant \frac{C}{1-s_n}\left|\frac{(1-s_n)^2}{\big(1-\frac{p_n s_n r_i}{z-a_i}\big)^2}\right|, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

oraz

$$|f^0_n(z)| \leqslant \frac{C}{1-s_n}\left|\frac{(1-s_n)^2}{(1-|z|)^2}\right|.$$

Zatem dla $0 \leqslant i \leqslant m$

$$f^i_n \to 0,$$

na zwartych podzbiorach $\Omega$. Na mocy stwierdzenia 4.1 otrzymujemy

$$\left\|C_\varphi f_n\right\|_{H^\Phi(\Omega)} \to 0,$$

co kończy dowód. □

### 4.1.1. Miary Carlesona i operatory inkluzji

Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym w $\mathbb{C}$ oraz niech $\varphi \in \Upsilon_\Omega$. Ponieważ $\varphi$ jest odwzorowaniem ograniczonym więc z twierdzenia 2.6 wynika, że istnieje funkcja brzegowa $\varphi^* \in L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ $(= L^\Phi(\partial\Omega, ds))$. W dalszym ciągu dla ustalonego $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ definiujemy miarę $\mu_\varphi$ na $\sigma$-algebrze $\mathscr{B}(\overline{\Omega})$ zbiorów borelowskich w $\overline{\Omega}$ wzorem

$$\mu_\varphi(B) := s((\varphi^*)^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}(\overline{\Omega}).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|_{H^\Phi(\Omega)} \approx \|(f\circ\varphi)^*\|_{L^\Phi(\partial\Omega,\omega)} &= \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \int_{\partial\Omega} \Phi\Big(\frac{|f\circ\varphi^*|}{\varepsilon}\Big)\, d\omega \leqslant 1\Big\} \\
&\approx \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \int_{\partial\Omega} \Phi\Big(\frac{|f\circ\varphi^*|}{\varepsilon}\Big)\, ds \leqslant 1\Big\} \\
&= \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \int_{\bar\Omega} \Phi\Big(\frac{|f|}{\varepsilon}\Big)\, d\mu_\varphi \leqslant 1\Big\} \\
&= \|f\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu_\varphi)}.
\end{aligned}$$

Powyższa zależność pokazuje, że pewne własności operatora kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ mogą być wyrażone w terminach operatora inkluzji $j_{\mu_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega}, \mu_\varphi)$.

W szczególności możemy zastosować ten operator do badania zwartych operatorów kompozycji, gdyż jak wiadomo operatory zwarte mają własność ideału. Operatory inkluzji badać będziemy także w ogólnym przypadku – nie tylko w przypadku miar $\mu_\varphi$, ale również dla skończonych miar borelowskich.

**Lemat 4.3.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\Phi$ funkcją Orlicza i niech $\mu$ będzie skończoną miarą borelowską. Załóżmy, że $j_\mu\colon H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)$ jest operatorem zwartym. Wówczas $\mu(\partial\Omega) = 0$.*

*Dowód.* Zauważmy, że lemat jest prawdziwy w przypadku $\Omega = \mathbb{D}$ (patrz [32, Lemma 4.8]). Aby otrzymać przypadek ogólny, rozważmy odwzorowania $T_i\colon H^\Phi \to H^\Phi(\Omega)$, zdefiniowane dla $i \in \{0,\dots,m\}$ następująco

$$T_i f = f \circ \eta_i^{-1}|_\Omega.$$

Jest jasne, że $T_i$ jest ograniczonym operatorem dla każdego $0 \leqslant i \leqslant m$. Zauważmy, że ciąg $\{e_n\}$, gdzie $e_n(z) := z^n$, dla $z \in \mathbb{D}$ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera w $HM^\Phi(\mathbb{D})$. Wynika stąd, że $T_i e_n \to 0$ słabo w $HM^\Phi(\Omega)$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant m$. Ze zwartości operatora $j_\mu$ wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i odpowiednio dużych $n$

$$\int_{\overline{\Omega}} \Phi\Big(\frac{r_i^n}{|z-a_i|^n}\Big)\, d\mu < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

oraz

$$\int_{\overline{\Omega}} \Phi(|z^n|)\, d\mu < \varepsilon.$$

W konsekwencji

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(1)\, d\mu \leqslant (m+1)\varepsilon.$$

Stąd $\mu(\partial\Omega) = 0$. □

Niech $\{\Omega_n\}$ będzie regularnym wyczerpaniem obszaru $\Omega$ oraz niech $\mu$ będzie miarą borelowską na $\overline{\Omega}$. Operator $I_n\colon H^\Phi(\Omega) \to L^\Phi(\Omega,\mu)$ definiujemy następująco

$$I_n(f) := f\,\chi_{\overline{\Omega}\setminus\Omega_n}.$$

**Twierdzenie 4.4.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym. Niech $\mu$ będzie skończoną miarą borelowską na $\overline{\Omega}$ i niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Operator inkluzji $j_\mu\colon H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)$ jest zwarty.*

(ii) *Dla dowolnego ograniczonego ciągu $\{f_n\}$ w $H^\Phi(\Omega)$ zbieżnego niemal jednostajnie do 0, mamy $\|f_n\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} \to 0$.*

(iii) *Operator $j_\mu\colon H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)$ jest ciągły oraz dla dowolnego regularnego wyczerpania $\{\Omega_n\}$ zbioru $\Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \|I_n\|_{H^\Phi(\Omega)\to L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} = 0.$$

*Dowód.* W dowodzie faktu, że warunek (ii) implikuje warunek (i) korzystamy ze standardowych technik, które można znaleźć np. w pracy [53]. Pokażemy, że (i) implikuje (ii). Z lematu 4.3 wiemy, że $\mu(\partial\Omega) = 0$. Weźmy taki ciąg $\{f_n\} \subset B_{H^\Phi(\Omega)}$, że $f_n \to 0$ jednostajnie na zwartych podzbiorach $\Omega$. W szczególności $f_n(z) \to 0$ dla każdego $z \in \Omega$, a ponieważ $\mu(\partial\Omega) = 0$ mamy więc $f_n \to 0$ $\mu$-p.w. na $\overline{\Omega}$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\{f_n\}$ nie jest zbieżny do zera w $L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)$. Ze zwartości operatora inkluzji $j_\mu$ wnioskujemy, że istnieje taki podciąg $\{f_{n_k}\}$, że $f_{n_k} \to g \neq 0$ w $L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)$. Z drugiej strony $f_{n_k} \to g$ $\mu$-p.w. co daje sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi warunek (iii). Mamy

$$\|j_\mu\| = \lim_{n\to\infty} \|j_\mu - I_n\|.$$

Zauważmy, że $j_\mu - I_n$ jest operatorem inkluzji z $H^\Phi(\Omega)$ do $L^\Phi(\overline{\Omega}, \nu)$ dla skończonej miary borelowskiej $\nu$, której nośnikiem jest $\overline{\Omega}_n$. Stosując równoważność warunków (i) i (ii) do $I^n_\nu := j_\mu - I_n$ otrzymujemy, że $I^n_\nu$ jest operatorem zwartym przy dowolnym $n \in \mathbb{N}$, a stąd $j_\mu$ jest zwarty jako granica operatorów zwartych.

Przypuśćmy, że spełniony jest warunek (ii). Zauważmy, że ciąg $\{\|I_n\|\}$ jest malejący, więc jeśli warunek (iii) nie byłby prawdziwy, wówczas istniałaby stała $\varepsilon_0 > 0$, ciąg $\{f_n\}$ elementów z kuli jednostkowej $H^\Phi(\Omega)$ oraz takie regularne wyczerpanie $\{\Omega_n\}$ zbioru $\Omega$, że $\|I_n f_n\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} > \varepsilon_0$, dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie ograniczony na zwartych podzbiorach $\Omega$. Na mocy twierdzenia 2.3 możemy rozłożyć $f_n$ następująco

$$f_n(z) = f_{0,n}(z) + f_{1,n}(z) + \cdots + f_{m,n}(z), \quad z \in \Omega,$$

gdzie $f_{i,n} \in H^\Phi_0(E_i)$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ definiujemy

$$g_{i,n}(z) := \Big(\frac{r_i}{z - a_i}\Big)^n f_{i,n}(z), \quad z \in E_i,$$

oraz $g_{0,n}(z) := z^n f_{0,n}(z)$ dla $z \in E_0$. Jest oczywiste, że $\{g_{i,n}\}_n$ jest ograniczony w $H^\Phi_0(E_i)$ dla $0 \leqslant i \leqslant m$ oraz $g_{i,n} \to 0$ jednostajnie na zwartych podzbiorach $E_i$, więc ciąg $\{g_n\}$, $g_n = g_{0,n} + \cdots + g_{m,n}$ jest ograniczony w $H^\Phi(\Omega)$ oraz $g_n \to 0$ jednostajnie na zwartych podzbiorach $\Omega$. Wykażemy, że z warunku (ii) wynika $\|g_n\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} \to 0$. Rzeczywiście, zauważmy, że jeśli $\operatorname{dist}(\Gamma_i, z) \leqslant \frac{1}{n}$, tzn. $z \in A^n_i$, gdzie dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $n \in \mathbb{N}$

$$A^n_i = \big\{z \in E_i : \ z = a_i + r_i(1+\varepsilon)e^{i\theta}, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}, \theta \in \mathbb{T}\big\},$$
$$A^n_0 = \mathbb{D} \setminus \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\mathbb{D},$$

to wówczas dla $i = 1, \ldots, m$

$$|g_{i,n}(z)| = \Big|\frac{r_i}{z - a_i}\Big|^n |f_{i,n}(z)| \geqslant \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n} |f_{i,n}(z)| \geqslant \frac{1}{4}|f_{i,n}(z)|, \quad z \in A^n_i.$$

Podobnie uzasadniamy, że $|g_{0,n}(z)| \geqslant \frac{1}{4}|f_{0,n}(z)|$ dla $z \in A^n_0$. Jeśli przenumerujemy $\{\Omega_n\}$ tak, aby mieć $\Omega \setminus \Omega_n \subset A_n = \bigcup_{i=0}^m A^n_i$ i to samo zrobimy z ciągiem $\{f_n\}$, wówczas dla odpowiednio dużych $n$

$$4\|g_n\|_{L^\Phi(\Omega,\mu)} \geqslant \|I_n f_n\|_{L^\Phi(\Omega,\mu)} \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Otrzymujemy zatem sprzeczność, gdyż $\|g_n\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} \to 0$. □

Oknem Carlesona na $i$-tej składowej brzegu $\Gamma_i \subset \Gamma = \partial\Omega$ o środku w punkcie $\xi \in \Gamma_i$ i promieniu $0 < h < \min_{i\neq j} \operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$ nazywać będziemy zbiór

$$W_0(\xi, h) = \Big\{z \in \overline{\Omega} : \ 1 - h < |z|, |\arg(\overline{\xi}z)| < h\Big\},$$
$$W_i(\xi, h) = \Big\{z \in \overline{\Omega} : \ |z - a_i| < \frac{r_i}{1-h}, |\arg(\overline{\xi}z)| < h\Big\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Łatwo sprawdzić, że $z \in W_0(\xi, h)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\eta_i(z) \in W_i\big(\eta_i(\xi), h\big)$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$. Zauważmy także, że dwuwymiarowa miara Lebesgue'a $\lambda_2$ okna Carlesona $W_i\big(\eta_i(\xi), h\big)$ spełnia zależność

$$\lambda_2\big(W_i(\xi, h)\big) \approx 2r_i^2 h^2,$$

przy czym stała $2r_i^2$ jest optymalna dla małych $h$.

Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\mu$ skończoną miarą na $\overline{\Omega}$ i niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Dla $0 < h < \min_{i\neq j} \operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$ oraz $A > 0$ zdefiniujmy następujące funkcje:

(i) $\rho_\mu(h) := \max_{0\leqslant i\leqslant m} \sup_{\xi\in\Gamma_i} \mu\big(W_i(\xi, h)\big)$,

(ii) $K_\mu(h) := \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\rho_\mu(t)}{t}$,

(iii) $\gamma_A(h) := \frac{1}{\Phi(A\Phi^{-1}(\frac{1}{h}))}$.

Funkcję $\rho_\mu$ nazywamy funkcją Carlesona. Zdefiniujmy także następujące warunki:

$(R_0)$ $\lim_{h\to0^+} \frac{\rho_\mu(h)}{\gamma_A(h)} = 0$ dla każdego $A > 0$.

$(K_0)$ $\lim_{h\to0^+} \frac{K_\mu(h)h}{\gamma_A(h)} = 0$ dla każdego $A > 0$.

$(C_0)$ Operator inkluzji $j_\mu : H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega}, \mu)$ jest zwarty.

Pokażemy, że prawdziwe są następujące implikacje

$$(K_0) \Rightarrow (C_0) \Rightarrow (R_0).$$

W tym celu skorzystamy z następującego rezultatu [53, Lemma 3.3.].

**Stwierdzenie 4.5.** *Warunek $(R_0)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{h\to0^+} \frac{\Phi^{-1}\big(\frac{1}{h}\big)}{\Phi^{-1}\big(\frac{1}{\rho_\mu(h)}\big)} = 0.$$

Zauważmy, że w [32] (por. [53]) udowodniono, że warunek $(C_0)$ implikuje $(R_0)$ w przypadku $\Omega = \mathbb{D}$. Stosując twierdzenie 4.4 udowodnimy, że wynik ten jest prawdziwy także w przypadku obszarów kołowych.

**Twierdzenie 4.6.** *Warunek $(C_0)$ implikuje warunek $(R_0)$.*

*Dowód.* Rozumując podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 4.2, pokazujemy (stosując twierdzenie 4.4), że dla $0 \leqslant i \leqslant m$ mamy

$$\lim_{r\to1^-} \sup_{p\in\partial\mathbb{D}} \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-r}\Big) \|u_{p,r}^i\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} = 0. \tag{4.2}$$

Łatwo sprawdzić, że $|u^0_{p,r}(z)| \geqslant \frac{1}{9}$, gdy $z \in W_0(p,h)$ oraz $r = 1-h$. Stąd

$$\frac{1}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(W_0(p,h))}\Big)} \leqslant 9\|u^0_{p,r}\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)}.$$

Nierówność

$$\frac{1}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(W_i(\eta_i(p),h))}\Big)} \leqslant 9\|u^i_{p,r}\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)},$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$, otrzymujemy analogicznie, korzystając z faktu, że $z \in W_0(p,h)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\eta_i(z) \in W_i\big(\eta_i(p),h\big)$. Z powyższej nierówności oraz oszacowania (2.7) wynika, że

$$\max_{0\leqslant i\leqslant m} \sup_{p\in\partial\mathbb{D}} \frac{\Phi^{-1}\big(\frac{1}{h}\big)}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(W_i(\eta_i(p),h))}\Big)} \leqslant C\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{h}\Big)\|u^i_{p,1-h}\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)}.$$

Stosując równość (4.2) otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi^{-1}\big(\frac{1}{h}\big)}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\rho_\mu(h)}\Big)} = 0.$$

□

Dla $\xi \in \partial\Omega$ i $\alpha > 1$ rozważmy rodzinę zbiorów

$$G^\alpha_\xi := \{z \in \Omega : |z-\xi| < \alpha \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)\}.$$

Przyjmijmy $G_\xi := G^3_\xi$. Dla dowolnej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *maksymalną* (niestyczną) *funkcję* $M_f : \partial\Omega \to [0,+\infty]$ definiujemy następująco:

$$M_f(\xi) := \sup\big\{|f(z)| : z \in G_\xi\big\}, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Przypomnijmy, że *operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda* $M : L^1(\partial\Omega, ds) \to L^0(\partial\Omega, ds)$ określony jest wzorem

$$(Mf)(\zeta) := \sup_{\gamma\ni\zeta} \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma |f|ds, \quad \zeta \in \partial\Omega, \quad f \in L^1(\partial\Omega, ds),$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich łukach $\gamma$ zawartych w $\partial\Omega$, natomiast $\ell(\gamma)$ oznacza długość $\gamma$. W dalszej części pracy będziemy korzystali z ważnego twierdzenia, które orzeka, że $M$ jest operatorem słabego typu $(1,1)$ i mocnego typu $(p,p)$ dla $p \in (1,\infty]$ (patrz [18, str. 49]).

W dalszych rozważaniach istotny będzie następujący fakt: istnieje taka stała $C(\Omega) > 0$, że dla dowolnej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi następująca nierówność:

$$M_f(\xi) \leqslant C(\Omega)Mf^*(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega,$$

gdzie $f^* \in L^1(\partial\Omega, ds)$ jest funkcją brzegową funkcji $f$. Uzasadnijmy krótko tę nierówność. Podobnie, jak w klasycznym przypadku ($\Omega = \mathbb{D}$) dowodzi się, że istnieje taka stała $C(\Omega) > 0$, że dla dowolnej funkcji $g \in L^1(\partial\Omega, ds)$ zachodzi oszacowanie:

$$M_{P[g]}(\xi) \leqslant C(\Omega)Mg(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega,$$

gdzie $P[g]$ jest całką Poissona funkcji $g$,

$$P[g](z) = \int_{\partial\Omega} P_z(\xi)g(\xi)ds(\xi), \quad z \in \Omega.$$

Dyskusję tego faktu można znaleźć w monografii [18, str. 49 oraz Lemma 2.2, str. 9] . Stosując twierdzenie 2.6 otrzymujemy

$$P[f^*](z) = f(z), \quad z \in \Omega,$$

skąd wynika żądana nierówność.

W przypadku uogólnionych obszarów kołowych funkcja maksymalna jest porządkowo ograniczona przez operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda $M : L^1(\partial\Omega, ds) \to L^0(\partial\Omega, ds)$ (patrz [18, str. 47–49]). Zatem odwzorowanie $f \mapsto M_f$ jest operatorem słabego typu $(1,1)$ oraz mocnego typu $(+\infty, +\infty)$. Stosując analogiczne rozumowanie możemy rozszerzyć wynik z pracy [32, Proposition 3.5] na przypadek wielospójny.

**Stwierdzenie 4.7.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym. Przypuśćmy, że funkcja Orlicza $\Phi \in \nabla_2$. Wówczas każdy subliniowy operator słabego typu $(1,1)$ oraz mocnego typu $(+\infty, +\infty)$ jest ograniczony na $L^\Phi$. W szczególności, dla dowolnego $f \in L^\Phi(\partial\Omega, ds)$, funkcja maksymalna $M_f \in L^\Phi(\partial\Omega, ds)$.*

**Twierdzenie 4.8.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym oraz niech $\mu$ będzie skończoną miarą borelowską na $\overline{\Omega}$, natomiast $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą. Wówczas dla każdego $t > 0$ oraz dla dowolnego $0 < h < \frac{1}{4}\min_{i\neq j} \operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$ mamy*

$$\mu\Big(\big\{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leqslant h, |f(z)| > t\big\}\Big) \leqslant C' K_\mu(h) s\Big(\big\{\xi \in \partial\Omega : M_f(\xi) > t\big\}\Big). \tag{4.3}$$

Dowód powyższego twierdzenia w przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{D}$ można znaleźć w pracy [32] (ze stałą $C' = 1$). Używając identycznych metod można pokazać warunek (4.3) w przypadku obszarów kołowych.

Przypomnijmy, że jeśli $z \in \Omega$, to norma funkcjonału ewaluacji $\delta_z : H^\Phi(\Omega) \to \mathbb{C}$ spełnia nierówność (patrz (2.9))

$$\|\delta_z\|_{H^\Phi(\Omega)^*} \leqslant C\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\Big),$$

gdzie $C$ jest pewną stałą (niezależną od $z$). W następującym lemacie stałe $c_0$ i $c_1$ są określone wzorami

$$c_0 = \max\{1, C\}, \quad c_1 = \max\{1, C'\},$$

gdzie $C'$ jest stałą z twierdzenia 4.8.

**Lemat 4.9.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym oraz niech $\mu$ będzie skończoną miarą borelowską na $\overline{\Omega}$. Załóżmy, że funkcja Orlicza $\Phi \in \nabla_2$ oraz że istnieją takie $A > 0$ i $0 < h_A < \frac{1}{4}\min_{i\neq j} \operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$, że dla dowolnego $h \in (0, h_A)$ mamy*

$$K_\mu(h) \leqslant \frac{1}{h}\gamma_A(h).$$

*Wówczas dla dowolnego $f \in B_{H^\Phi(\Omega)}$ oraz dla dowolnego borelowskiego zbioru $E \subset \overline{\Omega}$ zachodzi*

$$\int_E \Phi\Big(\frac{A}{2c_0}|f|\Big)\,d\mu \leqslant \mu(E)\Phi(x_A) + \frac{c_1}{c_0}\int_{\partial\Omega}\Phi(M_f)\,ds,$$

*gdzie* $x_A = \frac{A}{2}\Phi^{-1}\big(\frac{1}{h_A}\big)$.

*Dowód.* Dla dowolnego $s > 0$ nierówność $|f(z)| > s$ implikuje, że

$$s < c_0\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\Big), \quad z \in \Omega.$$

Zatem $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) < \frac{1}{\Phi(s/c_0)}$. Z twierdzenia 4.8 otrzymujemy

$$\mu\Big(\big\{z \in \Omega : \ |f(z)| > s\big\}\Big) \leqslant c_1 K_\mu\Big(\frac{1}{\Phi(s/c_0)}\Big)s\Big(\big\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > s\big\}\Big),$$

o ile $\Phi(s/c_0) \geqslant \frac{1}{4}\min_{i\neq j}\operatorname{dist}(\Gamma_i,\Gamma_j)$. Ponadto

$$\int_E \Phi\Big(\frac{A}{2c_0}|f|\Big)\,d\mu = \int_0^\infty \Phi'(t)\mu\Big(\{|f| > 2c_0 t/A\} \cap E\Big)\,dt.$$

Z założenia $\Phi(s/c_0) > 1/h_A$ dostajemy:

$$K_\mu\Big(\frac{1}{\Phi(s/c_0)}\Big) \leqslant \frac{\Phi(s/c_0)}{\Phi(As/c_0)}.$$

Wówczas

$$\mu\bigg(\bigg\{z \in \Omega : \ |f(z)| > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg) \leqslant c_1\frac{\Phi(2t/A)}{\Phi(2t)}s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg)$$

oraz

$$\begin{aligned}\int_E \Phi\Big(\frac{A}{2c_0}|f|\Big)\,d\mu &= \int_0^{x_A}\Phi'(t)\mu(E)dt + \int_{x_A}^\infty \Phi'(t)s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg)\\ &\leqslant \Phi(x_A)\mu(E) + c_1\int_{x_A}^\infty \frac{\Phi(2t/A)}{\Phi(2t)}\Phi'(t)s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg).\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnej funkcji Orlicza $\Phi$ prawdziwe są nierówności $\Phi(t) \leqslant t\Phi'(t) \leqslant \Phi(2t)$ dla każdego $t > 0$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{x_A}^\infty &\frac{\Phi(2t/A)}{\Phi(2t)}\Phi'(t)s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg)dt\\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{\Phi(2t/A)}{t}s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg)dt\\ &\leqslant \frac{2}{A}\int_0^\infty \Phi'(2t/A)s\bigg(\bigg\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > \frac{2c_0 t}{A}\bigg\}\bigg)dt\\ &\leqslant \frac{2}{A}\int_0^\infty \Phi'(x)s\Big(\big\{\xi \in \partial\Omega : \ M_f(\xi) > c_0 x\big\}\Big)dx\\ &= \int_{\partial\Omega}\Phi\Big(\frac{1}{c_0}M_f\Big)\,ds \leqslant \frac{1}{c_0}\int_{\partial\Omega}\Phi\big(M_f\big)\,ds,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

**Twierdzenie 4.10.** *Jeśli $\Phi \in \nabla_2$, to warunek $(K_0)$ implikuje $(C_0)$.*

*Dowód.* Niech $\varepsilon > 0$ oraz niech $C_f := \|M_f\|_{L^\Phi(\partial\Omega)}$, dla $f \in H^\Phi(\Omega)$. Połóżmy $A = \frac{4C_f c_0 c_1}{\varepsilon}$, gdzie $c_0$ i $c_1$ są stałymi zdefiniowanymi przed lematem 4.9. Z warunku $(K_0)$ wynika istnienie takiego $0 < h_A < \frac{1}{4}\min_{i\neq j}\operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$, że nierówność

$$K_\mu(h) \leqslant \frac{1}{2h}\gamma_A(h)$$

zachodzi, dla $h \leqslant h_A$. Jeśli $f \in B_{H^\Phi(\Omega)}$, to z lematu 4.9 dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}\setminus\Omega_n} \Phi\Big(\frac{|f|}{\varepsilon}\Big)\,d\mu &= \int_{\overline{\Omega}\setminus\Omega_n} \Phi\Big(\frac{A|f|}{4C_f c_0 c_1}\Big)\,d\mu \leqslant \frac{1}{2}\int_{\overline{\Omega}\setminus\Omega_n} \Phi\Big(\frac{A|f|}{2C_f c_0 c_1}\Big)\,d\mu \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(\mu(\overline{\Omega}\setminus\Omega_n)\Phi(x_A) + \frac{c_1}{c_0}\int_{\partial\Omega}\Phi\Big(\frac{M_f}{C_f c_1}\Big)\,ds\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(\mu(\overline{\Omega}\setminus\Omega_n)\Phi(x_A) + \frac{1}{c_0}\Big),\end{aligned}$$

dla dowolnego regularnego wyczerpania $\{\Omega_n\}$ zbioru $\Omega$. Ponieważ $c_0 \geqslant 1$ oraz $\mu(\partial\Omega) = 0$, więc nierówność $\frac{1}{2}(\mu(\overline{\Omega}\setminus\Omega_n)\Phi(x_A) + \frac{1}{c_0}) \leqslant 1$ zachodzi dla odpowiednio dużych $n$. W konsekwencji z twierdzenia 4.4 otrzymujemy, że operator $j_\mu$ jest zwarty, co oznacza, że warunek $(C_0)$ jest spełniony. □

Zauważmy, że warunek $(K_0)$ nie jest w ogólności konieczny, aby operator inkluzji był zwarty. Podobnie $(C_0)$ nie jest warunkiem dostatecznym dla $(R_0)$. Odpowiednie kontrprzykłady, gdy $\Omega = \mathbb{D}$, można znaleźć w [32] na str. 55–58.

Załóżmy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta_2$. Mamy

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $A > 0$ istnieje takie $C_A > 0$, że $\Phi(Ax) \leqslant C_A\Phi(x)$ dla odpowiednio dużych $x$. Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy, że $\gamma_A(h) \geqslant \frac{h}{C_A}$ dla małych $h$, co oznacza, że warunek $(K_0)$ jest równoważny temu, że $\mu$ jest zanikającą miarą Carlesona, tzn.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\rho_\mu(h)}{h} = 0.$$

Stosując stwierdzenie 4.5 można również pokazać, że warunek $(R_0)$ także jest równoważny temu, że $\mu$ jest zanikającą miarą Carlesona. Ostatecznie dla $\Phi$ spełniającego $\Delta_2$ operator inkluzji $j_\mu\colon H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\Omega,\mu)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu$ jest znikającą miarą Carlesona (w szczególności dla skończonego $p \geqslant 1$ otrzymujemy pełną charakteryzację zwartych inkluzji $j_\mu\colon H^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega,\mu)$).

Zauważmy, że $\Phi \in \Delta_2$ nie jest jedynym warunkiem zapewniającym równoważność warunków $(R_0)$, $(K_0)$ i $(C_0)$. Pokażemy, że jeśli $\Phi \in \nabla_0$ to te trzy warunki są równoważne.

Przypomnijmy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\nabla_0$ ($\Phi \in \nabla_0$), jeśli istnieją takie $x_0 > 0$ oraz $C \geqslant 1$, że nierówność

$$\frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} \leqslant \frac{\Phi(2Cy)}{\Phi(y)}$$

jest spełniona dla wszystkich $x, y \geqslant x_0$, $x \leqslant y$.

Warunek ten możemy zapisać równoważnie w następującej postaci: dla dowolnego $A > 1$ istnieje takie $C_A \geqslant 1$, że dla $x, y \geqslant x_0$, $x \leqslant y$

$$\frac{\Phi(Ax)}{\Phi(x)} \leqslant \frac{\Phi(C_A y)}{\Phi(y)}.$$

Zauważmy, że dla małych $h$ oraz $0 < t < h$, przyjmując $x = \Phi^{-1}(1/h)$, $y = \Phi^{-1}(1/t)$, z powyższego warunku dostajemy nierówność

$$\frac{\gamma_{C_A}(t)}{t} \leqslant \frac{\gamma_A(h)}{h}.$$

Warunek $\lim_{t\to 0^+} \frac{\rho_\mu(t)}{\gamma_{C_A}(t)} = 0$ pociąga $\lim_{h\to 0^+} \frac{K_\mu(h)h}{\gamma_A(h)} = 0$, co z kolei oznacza, że $(R_0)$ implikuje $(K_0)$.

Dla $\Phi \in \nabla_2$ równoważność warunków $(C_0)$, $(R_0)$ i $(K_0)$ zachodzi w przypadku miary $\mu = \mu_\varphi$. Główną rolę w dowodzie tego faktu odgrywa poniższe twierdzenie, z którego otrzymujemy kompletną charakteryzację zwartych operatorów kompozycji na przestrzeni Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\Omega)$.

**Twierdzenie 4.11.** *Istnieje taka stała $k > 0$, że dla dowolnych $\varphi \in \Upsilon_\Omega$, $0 \leqslant i \leqslant m$ oraz $\xi_i \in \Gamma_i$ nierówność*

$$\mu_\varphi(W_i(\xi_i, \varepsilon h)) \leqslant k\varepsilon\mu_\varphi\big(W_i(\xi_i, h)\big), \tag{4.4}$$

*zachodzi dla $\varepsilon \in (0,1)$ i dostatecznie małego $h$.*

*Dowód.* Zauważmy, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku $\Omega = \mathbb{D}$, $\varphi \in \Upsilon_\mathbb{D}$ (patrz [32, Theorem 4.19], w tym przypadku $h < 1 - |\varphi(0)|$). Aby udowodnić twierdzenie w przypadku ogólnym wybierzmy $0 \leqslant i \leqslant m$. Niech $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i \subset \Omega$ będzie skończoną rodziną obszarów spełniającą następujące warunki:

(i) dla dowolnego $1 \leqslant j \leqslant n_i$ zbiór $U_j^i$ jest jednospójny,

(ii) dla dowolnego $1 \leqslant j \leqslant n_i$ brzeg $\partial U_j^i$ obszaru $U_j^i$ jest wyznaczony przez analityczną krzywą Jordana,

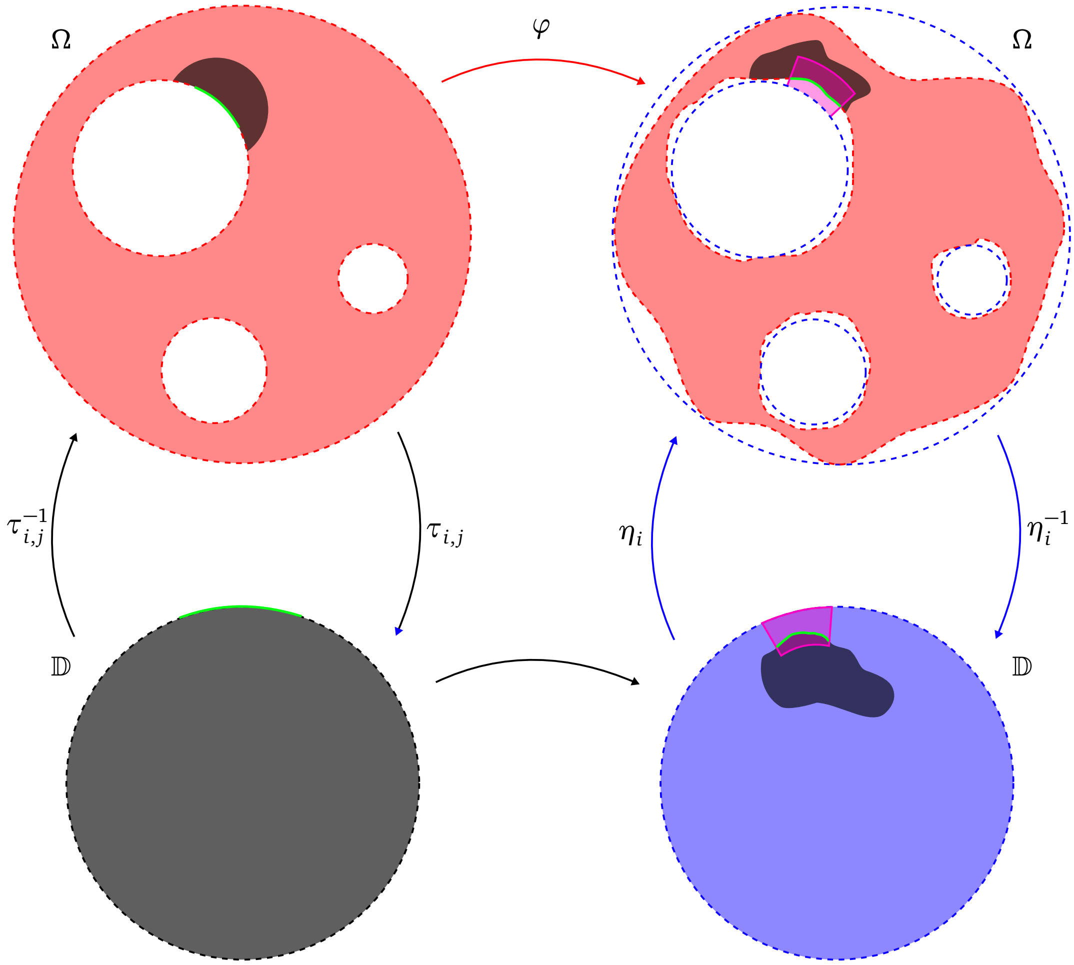
(iii) $\Gamma_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} \partial U_j^i$ oraz dowolny zwarty podzbiór zbioru $\Gamma_i \cap \partial U_j^i$ jest analitycznym łukiem swobodnym dla $1 \leqslant j \leqslant n_i$,

(iv) dla dowolnego $0 \leqslant l \leqslant m$ i $l \neq i$ mamy $\Gamma_l \cap \bigcup_{j=1}^{n_i} \partial U_j^i = \emptyset$.

Niech $\tau_{i,j} \colon U_j^i \mapsto \mathbb{D}$ będzie odwzorowaniem konforemnym $U_j^i$ na $\mathbb{D}$. Wówczas na mocy lematu 1.5, dla $0 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n_i$ funkcja $\tau_{i,j}$ ma przedłużenie analityczne na zbiór otwarty zawierający domknięcie $U_j^i$ (dla prostoty oznaczmy to przedłużenie tym samym symbolem $\tau_{i,j}$). Niech $\tau_{i,j}^{-1}$ będzie funkcją odwrotną do $\tau_{i,j}$. Wówczas istnieją takie stałe $C_{i,j}, c_{i,j} > 0$, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$

$$c_{i,j}|z_1 - z_2| \leqslant |\tau_{i,j}^{-1}(z_1) - \tau_{i,j}^{-1}(z_2)| \leqslant C_{i,j}|z_1 - z_2|. \tag{4.5}$$

Niech $c = \max_{0\leqslant i\leqslant m} \max_{1\leqslant j\leqslant n_i} c_{i,j}$ zaś $C = \min_{0\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n_i} C_{i,j}$. Ustalmy $\xi \in \Gamma_k \subset \partial\Omega$. Niech $h$ będzie tak małe, aby brzeg przeciwobrazu $\varphi^{*-1}(W_k(\xi, h))$ okna $W_k(\xi, h)$ pokrywał się z brzegiem pewnego łuku $\partial U_j^i$ dla pewnych $0 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n_i$.




Rysunek 4.1. Rysunek objaśniający twierdzenie 4.11

Dla $0 \leqslant k \leqslant m$ definiujemy funkcję $\psi_{i,j,k} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, następująco:

$$\psi_{i,j,k}(z) = (\eta_k^{-1} \circ \varphi \circ \tau_{i,j}^{-1})(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Z faktu $\psi_{i,j,k} \in \Upsilon_{\mathbb{D}}$ wynika, że miara $\mu_{\psi_{i,j,k}}$ spełnia warunek (4.4). Wówczas dla dostatecznie małych $h > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\mu_{\psi_{i,j,k}}\big(W_0(\eta^{-1}(\xi),h)\big) &= s\big(\{z \in \partial\mathbb{D} : \ \psi_{i,j,k}^*(z) \in W_0(\eta^{-1}(\xi),h)\}\big)\\ &= s\big(\{z \in \partial\mathbb{D} : \ \varphi^* \circ \tau_{i,j}^{-1}(z) \in W_k(\xi,h)\}\big).\end{aligned}$$

Stosując nierówności (4.5) z uniwersalnymi stałymi $C, c$ łatwo widać, że ostatnie wyrażenie jest porównywalne do

$$s\big(\{z \in \Gamma_i : \ \varphi^*(z) \in W_k(\xi,h)\}\big) = \mu_\varphi\big(W_k(\xi,h)\big),$$

dla wszystkich $0 \leqslant k \leqslant m$ oraz $\xi \in \Gamma_k$ przy dostatecznie małych $h > 0$. Zatem dla pewnych stałych i dostatecznie małych okien Carlesona zależność

$$\mu_{\psi_{i,j,k}}(W_0(\eta^{-1}(\xi),h)) \approx \mu_\varphi(W_k(\xi,h))$$

jest prawdziwa przy dowolnym $0 \leqslant k \leqslant m$. Stąd dla $0 \leqslant k \leqslant m$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_\varphi(W_k(\xi, \varepsilon h)) &\leqslant K_1 \mu_{\psi_{i,j,k}}\big(W_0(\eta_k^{-1}(\xi), h)\big) \\ &\leqslant CK_1 \varepsilon \mu_{\psi_{i,j,k}}\big(W_0(\eta_k^{-1}(\xi), h)\big) \leqslant CK_1K_2\varepsilon\mu_\varphi\big(W_k(\xi, h)\big),\end{aligned}$$

dla dostatecznie małych $h$, co kończy dowód. □

Powyższe twierdzenie zastosujemy do znalezienia charakteryzacji zwartych operatorów kompozycji.

**Twierdzenie 4.12.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym. Niech ponadto $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech $\Phi \in \nabla_2$ będzie funkcją Orlicza. Operator kompozycji $C_\varphi$ jest zwarty na $H^\Phi(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $A > 0$*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\rho_\varphi(h)}{\gamma_A(h)} = 0, \tag{4.6}$$

*gdzie $\rho_\varphi := \rho_{\mu_\varphi}$. Równoważnie $C_\varphi$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\rho_\varphi(h)}\right)} = 0. \tag{4.7}$$

*Dowód.* Równoważność warunków (4.6) i (4.7) została udowodniona w stwierdzeniu 4.5.

Dla małych $h$ oraz $0 < t < h$ z (4.4) przy $\varepsilon = t/h$ mamy

$$\mu_\varphi(W_i(\xi_i, t)) \leqslant k\frac{t}{h}\mu_\varphi(W_i(\xi_i, h))$$

dla każdego $\xi_i \in \partial\Omega$, $i \in \{0, \dots, m\}$. Biorąc supremum po $\xi \in \partial\Omega$ dostajemy $\rho_\varphi(t) \leqslant k\frac{t}{h}\rho_\varphi(h)$. Stąd dla $\mu = \mu_\varphi$ dostajemy

$$K_\mu(h) = \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\rho_\mu(t)}{t} \approx \frac{\rho_\mu(h)}{h},$$

więc na mocy twierdzenia 4.6 oraz twierdzenia 4.10 warunki $(R_0)$, $(K_0)$ i $(C_0)$ są równoważne. □

Pokażemy teraz, że warunek (4.1) ze stwierdzenia 4.2 jest także warunkiem dostatecznym na to by operator kompozycji był zwarty.

**Wniosek 4.13.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ i niech $\Phi \in \nabla_2$ będzie funkcją Orlicza. Operator kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $0 \leqslant i \leqslant m$ spełniony jest następujący warunek*

$$\lim_{s\to 1^-} \sup_{p\in\mathbb{T}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right)\|C_\varphi u_{p,s}^i\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0. \tag{4.8}$$

*Dowód.* W stwierdzeniu 4.2 pokazaliśmy, że warunek (4.8) jest konieczny do tego, aby $C_\varphi$ był zwarty. W dowodzie twierdzenia 4.6 pokazaliśmy, że równość (4.7) wynika z zależności

$$\lim_{r\to 1^-} \sup_{p\in\mathbb{T}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)\|u_{p,r}^i\|_{L^\Phi(\overline{\Omega},\mu)} = 0,$$

co jest równoważne równości (4.8) dla $\mu = \mu_\varphi$. Zatem na mocy twierdzenia 4.12 teza wniosku jest prawdziwa. □

### 4.1.2. Funkcja licząca Nevanlinny

Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym i niech $\varphi \in \Upsilon_\Omega$. Celem niniejszego paragrafu jest pokazanie, że (uogólniona) funkcja licząca Nevanlinny jest równoważna funkcji Carlesona. Otrzymany rezultat umożliwi nam znalezienie charakteryzacji zwartych operatorów kompozycji na $H^\Phi(\Omega)$, będących znaczącymi rozszerzeniami wyników z prac [61] w przypadku $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$, [15] w przypadku $C_\varphi : H^p(\Omega) \to H^p(\Omega)$ czy [33] dla $C_\varphi : H^\Phi(\mathbb{D}) \to H^\Phi(\mathbb{D})$.

Niech $p \in \Omega$ będzie ustalonym punktem. Przypomnijmy, że dla $w \in \Omega \setminus \{\varphi(p)\}$ *funkcją* (*liczącą*) *Nevanlinny* nazywamy następującą funkcję

$$N_\varphi(w) := N_\varphi^\Omega(w) = \sum_{\varphi(z)=w} g_\Omega(z,p),$$

gdzie $g_\Omega(\cdot, p)$ jest funkcją Greena obszaru $\Omega$ z biegunem w punkcie $p$. Zauważmy, że w przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{D}$ i $p = 0$ powyższa definicja pokrywa się z klasyczną, tzn.

$$N_\varphi(w) = \sum_{\varphi(z)=w} -\log|z|, \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Głównym wynikiem tego rozdziału jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.14.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym. Istnieje taka stała $K > 0$, że dla dowolnego $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ nierówność*

$$1/K\ \rho_\varphi(h/K) \leqslant \sup\left\{N_\varphi^\Omega(w) :\ \mathrm{dist}(w, \partial\Omega) < h\right\} \leqslant K\rho_\varphi(Kh),$$

*jest spełniona dla małych $h$.*

Dla wygody wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\nu_\varphi(h) := \sup\{N_\varphi^\Omega(w) :\ \mathrm{dist}(w, \partial\Omega) < h\}.$$

Do dowodu twierdzenia 4.14 będziemy potrzebowali następującego lematu.

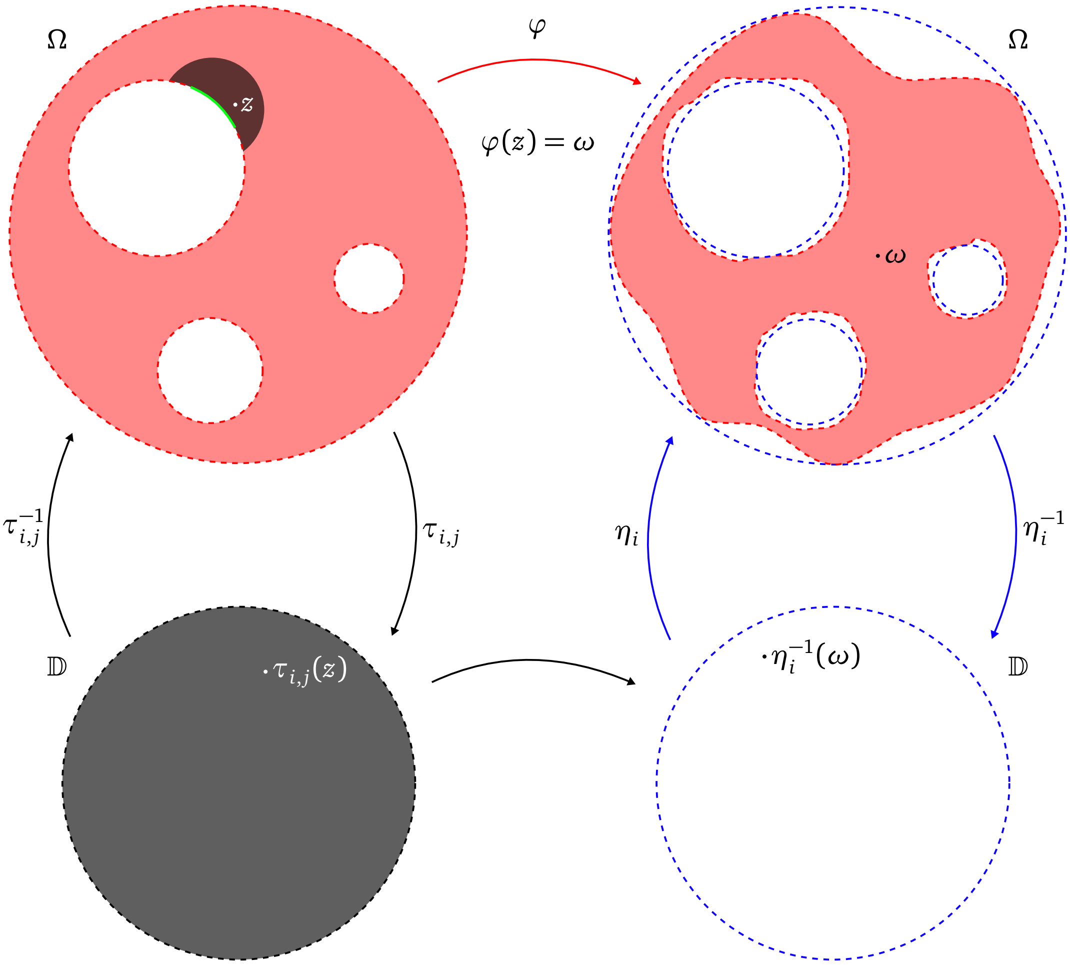
**Lemat 4.15.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym i niech $p \in \Omega$. Wówczas dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant m$ istnieją takie stałe $C_i, c_i > 0$, że dla wszystkich $z \in U_i$ zachodzą następujące nierówności dla funkcji Greena*

$$c_i\ g_{E_i}(z,p) \leqslant g_\Omega(z,p) \leqslant C_i\ g_{E_i}(z,p), \tag{4.9}$$

*gdzie $U_i \subset \Omega$ jest pewnym zbiorem otwartym, którego domknięcie zawiera $\Gamma_i$.*

*Dowód.* Łatwo pokazać, że stała $C_i$ w nierównościach (4.9) wynosi 1. Istotnie $g_\Omega(z,p) \leqslant g_{E_i}(z,p)$ dla $z \in \partial\Omega$. Z zasady maksimum dla funkcji subharmonicznych i superharmonicznych wynika, że $g_\Omega(z,p) \leqslant g_{E_i}(z,p)$ dla $z \in \Omega$.

Zauważmy teraz, że na mocy twierdzenia 1.9 funkcja $g_{E_i}(z) = g_{E_i}(z,p)$ rozszerza się do funkcji harmonicznej na pewnym otoczeniu $V_i$ zawierającym brzeg $E_i$. Podobnie




Rysunek 4.2. Rysunek objaśniający dowód twierdzenia 4.14

$g_\Omega(\cdot) = g_\Omega(\cdot, p)$ rozszerza się do funkcji harmonicznej na pewnym otoczeniu $V$ zawierającym brzeg $\partial\Omega$. Ponieważ $g_{E_i}(\cdot, p) = 0$ dla $z \in \Gamma_i$, więc na mocy twierdzenia 1.8 wzrost funkcji $g_{E_i}(\cdot, p)$ w otoczeniu brzegu nie jest szybszy niż wzrost pewnej funkcji afinicznej. Ściślej, istnieje takie $t > 0$, że dla dowolnego punktu $\xi \in \Gamma_i$ oraz dla dowolnego $z = \xi - hn_\xi$ należącego do odcinka łączącego punkty $\xi$ oraz $\xi - tn_\xi$, gdzie $n_\xi$ jest jednostkowym wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz obszaru $\Omega$ mamy

$$k_i h \leqslant g_{E_i}(z, p) \leqslant K_i h.$$

Podobne nierówności zachodzą dla funkcji $g_\Omega(z, p)$, zatem dobierając odpowiednio stałą $c_i$ otrzymujemy pierwszą z nierówności (4.9). $\square$

*Dowód twierdzenia 4.14.* Zauważmy najpierw, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\Omega = \mathbb{D}$ (patrz [33, Theorem 1.1]). Ustalmy $0 \leqslant i \leqslant m$ i niech $U_1^i, \ldots, U_{n_i}^i$ będzie rodziną obszarów zawartych w $\Omega$ spełniającą następujące warunki:

(i) dla dowolnego $1 \leqslant j \leqslant n_i$ zbiór $U_j^i$ jest jednospójny,

(ii) dla dowolnego $1 \leqslant j \leqslant n_i$ brzeg $\partial U_j^i$ obszaru $U_j^i$ jest wyznaczony przez analityczną krzywą Jordana,

(iii) $\Gamma_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} \partial U_j^i$ oraz dowolny zwarty podzbiór zbioru $\Gamma_i \cap \partial U_j^i$ jest analitycznym łukiem swobodnym dla $1 \leqslant j \leqslant n_i$,

(iv) dla dowolnego $0 \leqslant l \leqslant m$ i $l \neq i$ mamy $\Gamma_l \cap \bigcup_{j=1}^{n_i} \partial U_j^i = \emptyset$,

(v) $\bigcup_{i=0}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} U_j^i = \Omega$,

(vi) dla dowolnych trzech różnych zbiorów z tej rodziny $U_{j_1}^{i_1} \cap U_{j_2}^{i_2} \cap U_{j_3}^{i_3} = \emptyset$.

Ustalmy $h > 0$ i przypuśćmy, że $w \in \Omega$ spełnia warunek $\operatorname{dist}(w, \partial\Omega) < h$. Mamy

$$N_\varphi^\Omega(w) = \sum_{\varphi(z)=w} g_\Omega(z,p) \leqslant \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\substack{z \in U_j^i \\ \varphi(z)=w}} g_\Omega(z,p). \tag{4.10}$$

Niech $\tau_{i,j} : U_j^i \mapsto \mathbb{D}$ będzie odwzorowaniem konforemnym $U_j^i$ na $\mathbb{D}$. Na mocy lematu 1.5 istnieją takie stałe $C'_{i,j}, c'_{i,j} > 0$, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in U_j^i$

$$c'_{i,j}|z_1 - z_2| \leqslant |\tau_{i,j}(z_1) - \tau_{i,j}(z_2)| \leqslant C'_{i,j}|z_1 - z_2|.$$

Analogiczne nierówności prawdziwe są także dla odwzorowania odwrotnego $\tau_{i,j}^{-1}$. Dla $0 \leqslant k \leqslant m$ zdefiniujmy funkcję $\psi_{i,j} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ wzorem

$$\psi_{i,j}(z) = (\eta_i^{-1} \circ \varphi \circ \tau_{i,j}^{-1})(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ponieważ $\psi_{i,j} \in \Upsilon_{\mathbb{D}}$, więc teza dowodzonego twierdzenia jest spełniona dla tego odwzorowania:

$$1/C\rho_{\psi_{i,j}}(h/C) \leqslant \nu_\varphi(h) \leqslant C\rho_{\psi_{i,j}}(Ch),$$

przy czym możemy założyć, że stałą $C > 0$ jest odpowiednia dla wszystkich indeksów $0 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Ostatnią sumę w nierówności (4.10) możemy zapisać w postaci

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\substack{z \in U_j^i \\ \psi_{i,j}(\tau_{i,j}(z)) \\ =\eta_i^{-1}(w)}} g_\Omega(z,p). \tag{4.11}$$

Korzystając z faktu, że $g_{E_i}(\cdot, p)$ jest równoważna funkcji $g_{E_i}(\cdot, p_{i,j})$ w sąsiedztwach punktów $p$ i dowolnego punktu $p_{i,j} \in U_j^i$ (fakt ten wynika z nierówności Harnacka) na mocy lematu 4.15 dostajemy, że suma (4.11) jest nie większa od sumy

$$K'\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(\tau_{i,j}(z))=\\=\eta_i^{-1}(w)\\ z\in U_j^i}} g_{E_i}(z,p_{i,j}) = K'\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(\tau_{i,j}(z))=\\=\eta_i^{-1}(w)\\ z\in U_j^i}} g_{E_i}(z,p_{i,j}) =$$

$$K'\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(v)=\\=\eta_i^{-1}(w)\\ v\,\in\mathbb{D}}} g_{\mathbb{D}}(v,\tau_{i,j}(p_{i,j})) = K'\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(v)=t\\ v\,\in\mathbb{D}}} g_{\mathbb{D}}(v,u_{i,j}) \leqslant$$

$$K''\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(v)=t\\ v\,\in\mathbb{D}}} \log\frac{1}{|v|} = K''\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} N^{\mathbb{D}}_{\psi_{i,j}}(t). \tag{4.12}$$

gdzie $v = \tau_{i,j}(z)$, $t = \eta_i^{-1}(w)$ i $u_{i,j} = \tau_{i,j}(p_{i,j})$ $0 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Funkcja $\eta^{-1}$ odwzorowuje punkty znajdujące się w pobliżu brzegu $\Gamma_i$ w odległości $h$ (dla małych $h$) w te punkty dysku jednostkowego $\mathbb{D}$, których odległość od brzegu $\partial\mathbb{D}$ jest bliska liczbie $\frac{h}{r_i}$. Stąd ostatnia wielkość z (4.12) nie przekracza liczby

$$CK''\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\rho_{\psi_{i,j}}(Ch/r_i).$$

Zatem korzystając z twierdzenia 4.11 oraz z zależności $\mu_{\psi_{i,j}}(W_0(\xi,h)) \approx \mu_\varphi(W_i(\xi_i,h))$ (patrz przedostatnia linia dowodu twierdzenia 4.11), łatwo dostajemy pierwszą z żądanych nierówności.

Aby pokazać drugą z nierówności, tj.

$$1/K\ \rho_\varphi(h/K) \leqslant \nu_\varphi(h),$$

zauważmy najpierw, że dla małych $h$

$$N^{\Omega}_{\varphi}(w) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\varphi(z)=w\\ z\in U_j^i}} g_\Omega(z,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\substack{\psi_{i,j}(\tau_{i,j}(z))=\\=\eta_i^{-1}(w)\\ z\in U_j^i}} g_\Omega(z,p).$$

Stosując analogiczne rozumowania jak w przypadku pierwszej nierówności oraz dolne oszacowania w nierównościach $\mu_{\psi_{i,j}}(W_0(\xi,h)) \approx \mu_\varphi(W_i(\xi_i,h))$,

$$1/C\rho_{\psi_{i,j}}(h/C) \leqslant \sup\{N^{\mathbb{D}}_{\psi_{i,j}}(w):\ \mathrm{dist}(w,\partial\Omega) < h\} \leqslant C\rho_{\psi_{i,j}}(Ch),$$

$g_{E_i}(z,p) \approx g_{E_i}(z,p_{i,j})$ oraz nierówności z lematu 4.15 dostajemy tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 4.14 zastosujemy do opisu zwartych operatorów $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$.

**Twierdzenie 4.16.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza spełnia warunek $\Phi \in \nabla_2$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ *jest operatorem zwartym.*

(ii)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\nu_\varphi(h)}\right)}=0.$$

(iii)

$$\lim_{w\to\partial\Omega}\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w,\partial\Omega)}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{N_\varphi^\Omega(w)}\right)}=0.$$

*Dowód.* Równoważność warunków (ii) i (iii) jest oczywista. Pokażemy, że warunek (i) oraz (ii) są równoważne. Przypuśćmy najpierw, że zachodzi (i), tzn. operator kompozycji jest zwarty. Przypomnijmy, że z twierdzenia 4.12 wynika, iż zwartość operatora $C_\varphi$ jest równoważna warunkowi (4.7), tj.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\rho_\varphi(h)}\right)}=0.$$

Na mocy twierdzenia 4.14 funkcja $h\mapsto \nu_\varphi(h)$ jest równoważna funkcji Carlesona $\rho_\varphi(h)$ dla małych $h$. Zauważmy, że z wklęsłości $\Phi^{-1}$ dla $K\geqslant 1$ i $t>0$ mamy $\Phi^{-1}(Kt)\leqslant K\Phi^{-1}(t)$ oraz $\Phi^{-1}(t/K)\geqslant (1/K)\Phi^{-1}(t)$. Zatem $\Phi^{-1}(1/t)\leqslant K\Phi^{-1}(1/Kt)$, dla $t>0$. Z drugiej strony używając drugiej nierówności z twierdzenia 4.14 dostajemy

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\nu_\varphi(h)}\right)\geqslant \Phi^{-1}\left(\frac{1}{K\rho_\varphi(Kh)}\right)\geqslant \frac{1}{K}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\rho_\varphi(h)}\right),$$

dla małych $h>0$. Stąd wynika, że dla małych $h$ zachodzi nierówność

$$\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\nu_\varphi(h)}\right)}\leqslant K^2\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{Kh}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\rho_\varphi(Kh)}\right)}.$$

Stosując do otrzymanej nierówności warunek (4.7) dostajemy tezę.

Używając podobnych argumentów pokazujemy, że warunek (ii) implikuje (4.7), zatem na mocy twierdzenia 4.12 otrzymujemy zwartość operatora kompozycji $C_\varphi$. □

Przypomnijmy, że dla zwartych operatorów kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego–Orlicza na dysku jednostkowym, generowanych przez symbole skończenie wartościowe w pracy [33] uzyskano nieco prostsze opisy niż te z twierdzenia 4.14 i twierdzenia 4.12. Wynik ten możemy rozszerzyć również dla przypadku wielospójnego. Przypomnijmy, że funkcję $\varphi\in\Upsilon_\Omega$ nazywać będziemy *skończenie wartościową* , jeśli istnieje taka liczba naturalna $M$, że dla dowolnego $w\in\Omega$ moc zbioru $\varphi^{-1}(\{w\})$ nie przekracza liczby $M$.

**Twierdzenie 4.17.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi\in\Upsilon_\Omega$ oraz niech $\Phi\in\nabla_2$ będzie funkcją Orlicza. Załóżmy, że operator kompozycji $C_\varphi: H^\Phi(\Omega)\to H^\Phi(\Omega)$ jest zwarty. Wówczas*

$$\lim_{z\to\partial\Omega}\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi(z),\partial\Omega)}\right)}=+\infty. \tag{4.13}$$

*Jeśli zaś $\varphi$ jest skończenie wartościowa, to warunek* (4.13) *jest wystarczający do tego, aby operator $C_\varphi: H^\Phi(\Omega)\to H^\Phi(\Omega)$ był zwarty.*

*Dowód.* Załóżmy, że $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest operatorem zwartym. Przypomnijmy, że $H^\Phi(\Omega)$ jest przestrzenią biduałną do $HM^\Phi(\Omega)$ (domknięcia $H^\infty(\Omega)$ w $H^\Phi(\Omega)$). Ponieważ $C_\varphi$ jest ograniczony na $H^\infty(\Omega)$, więc

$$C_\varphi\big(HM^\Phi(\Omega)\big) \subset HM^\Phi(\Omega).$$

Ponadto operator $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest biduałny do $C_\varphi : HM^\Phi(\Omega) \to HM^\Phi(\Omega)$. Z oszacowania normy ewaluacji dostajemy, że dla dowolnego takiego ciągu $\{z_n\} \subset \Omega$, że $z_n \to \xi \in \partial\Omega$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)}\Big)} \delta_{z_n}(f) \to 0,$$

dla dowolnego $f \in HM^\Phi(\Omega)$, czyli ciąg

$$\left\{ \frac{1}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)}\Big)} \delta_{z_n} \right\}_n$$

jest $^*$-słabo zbieżny w $(H^\Phi(\Omega))^*$. Operator $C_\varphi$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $C_\varphi^*$ jest zwarty. Ponadto łatwo widać, że $C_\varphi^* \delta_z = \delta_{\varphi(z)}$ dla każdego $z \in \Omega$. Dostajemy więc k

$$\lim_{z\to\xi} \frac{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi(z),\partial\Omega)}\Big)}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\Big)} = 0, \quad \xi \in \partial\Omega,$$

co oznacza, że warunek (4.13) jest spełniony.

Odwrotnie, załóżmy, że zachodzi równość (4.13). Niech $\{w_n\}$ będzie takim ciągiem, że $w_n \to \xi \in \partial\Omega$. Przypuśćmy, że $N_\varphi^\Omega(w_n) \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\{z_n\}$ taki ciąg punktów $\Omega$, że $\varphi(z_n) = w_n$. Zauważmy, że $w_n \to \xi \in \partial\Omega$ pociąga $z_n \to \zeta \in \partial\Omega$. Jest jasne, że ciąg $\{z_n\}$ możemy „podzielić” na podciągi „zbieżne” do poszczególnych składowych (z założenia $z_n \to \zeta \in \partial\Omega$ wynika, iż istnieje co najmniej jeden taki podciąg). Oznaczmy przez $I$ podzbiór zbioru $\{0,\dots,m\}$, zawierający tylko te indeksy $i$, dla których istnieje podciąg ciągu $\{z_n\}$ zbieżny do $\Gamma_i$. Ustalmy $k \in I$. Niech $\{z_n^k\}_n$ będzie takim ciągiem punktów $\Omega$, że spełnione są warunki:

$$\varphi(z_n^k) = w_n, \qquad |z_n^k| = \max\big\{|z-a_k| :\ z \in \Omega, \varphi(z) = w_n\big\}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} N_\varphi^\Omega(w_n) = \sum_{\varphi(z)=w_n} g_\Omega(z,p) \leqslant \sum_{\varphi(z)=w_n} g_{E_k}(z,p) &= \sum_{\varphi(z)=w_n} g_{\mathbb{D}}\left(\frac{r_k}{z-a_k}, \frac{r_k}{p-a_k}\right) \\ &\leqslant C \sum_{\varphi(z)=w_n} \log\left(\frac{|z-a_k|}{r_k}\right). \end{aligned}$$

Z założenia wiemy, iż istnieje taka liczba naturalna $M$, że dla dowolnego $w \in \Omega$ moc zbioru $\varphi^{-1}(\{w\})$ nie przekracza $M$. Stąd ostatnia suma nie jest większa niż

$$CM \log\left(\frac{|z_n^k - a_k|}{r_k}\right).$$

Jeśli $s_n^k = \operatorname{dist}(z_n^k, \Gamma_k)$, to

$$CM \log\left(\frac{|z_n^k - a_k|}{r_k}\right) = CM \log\left(1 + \frac{s_n^k}{r_k}\right),$$

Przypomnijmy, że jeśli $|z| < \frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2}|z| \leqslant |\log(1+z)| \leqslant \frac{3}{2}|z|$. Wówczas dla dostatecznie dużych $n$, mamy $\frac{s_n^k}{r_k} < \frac{1}{2}$, a stąd

$$CM \log\left(1 + \frac{s_n^k}{r_k}\right) \leqslant CM \frac{3}{2r_k} s_n^k$$

oraz

$$N_\varphi^\Omega(w_n) \leqslant K \operatorname{dist}(z_n^k, \Gamma_k).$$

Podstawiając $\varphi(z_n^k) = w_n$ i korzystając z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w_n, \partial\Omega)}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{N_\varphi^\Omega(w_n)}\right)} \leqslant K \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w_n, \partial\Omega)}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z_n^k, \partial\Omega)}\right)} \leqslant K \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi(z_n^k), \partial\Omega)}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z_n^k, \partial\Omega)}\right)} \to 0$$

dla $n \to \infty$ i $k \in I$. W konsekwencji teza wynika z twierdzenia 4.18. □

## 4.2. Słabo zwarte, porządkowo ograniczone i zupełnie ciągłe operatory kompozycji.

W podrozdziale tym przedstawimy twierdzenia opisujące słabo zwarte, porządkowo ograniczone i zupełnie ciągłe operatory kompozycji.

Rozpoczniemy od przedstawienia wyników badań porządkowo ograniczonych operatorów $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to L^\Phi(\partial\Omega)$ (gdzie $\omega$ jest miarą harmoniczną na $\partial\Omega$), generowanych przez operatory kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$. Podamy m.in. charakteryzację takich operatorów. Ponadto pokażemy, że dla szybko rosnących funkcji Orlicza klasa porządkowo ograniczonych operatorów $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M\Phi(\partial\Omega)$ pokrywa się z klasą zwartych operatorów kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$. $M^\Phi(\partial\Omega, \omega)$, gdzie $\omega$ jest miarą harmoniczną na $\partial\Omega$, pokrywa się z klasą operatorów zwartych.

### 4.2.1. Porządkowo ograniczone operatory kompozycji

Przypomnijmy, że operator $T : X \to Z$, gdzie $X$ jest przestrzenią Banach, a $Z$ podprzestrzenią kraty Banacha $Y$ nazywamy *porządkowo ograniczonym*, jeśli istnieje takie $y \in Y$, że $|Tx| \leqslant y$ dla wszystkich $x \in B_X$.

**Twierdzenie 4.18.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Operator kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ indukuje operator $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to L^\Phi(\partial\Omega)$ dany równością $\widetilde{C_\varphi} f = (C_\varphi f)^*$, który jest porządkowo ograniczony w $L^\Phi(\partial\Omega)$ (odpowiednio w $M^\Phi(\partial\Omega)$) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega) > 0$ *$\omega$-p.w. oraz funkcja $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)}\right)$ należy do $L^\Phi(\partial\Omega)$ $\left(\text{odpowiednio } \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)}\right) \in M^\Phi(\partial\Omega)\right)$.*

*Dowód.* Ponieważ uzasadnienia są podobne zaprezentujemy dowód w przypadku $M^{\Phi}(\partial\Omega)$. Załóżmy, że funkcja $g \in M^{\Phi}(\partial\Omega)$, gdzie

$$g(\xi) := \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega)}\Big), \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Korzystając z oszacowania normy funkcjonału ewaluacji (2.9) otrzymujemy, że istnieje takie $C > 0$, że dla wszystkich $f \in B_{H^{\Phi}(\Omega)}$ nierówność

$$\big|(C_\varphi f)^*(\xi)\big| = |f(\varphi^*(\xi))| \leqslant \|\delta_{\varphi^*(\xi)}\|_{(H^{\Phi}(\Omega))^*} \leqslant Cg(\xi),$$

jest spełniona dla $\omega$–prawie wszystkich $\xi \in \partial\Omega$. Innymi słowy $C_\varphi$ jest porządkowo ograniczony w $M^{\Phi}(\partial\Omega)$.

Załóżmy, że $C_\varphi$ jest porządkowo ograniczony w $M^{\Phi}(\partial\Omega)$. Wówczas z definicji wynika, że istnieje taka funkcja $g \in M^{\Phi}(\partial\Omega)$, że $|C_\varphi f| \leqslant g$. Wówczas mamy

$$|\delta_{\varphi(z)} f| = \big|f(\varphi(z))\big| = \big|P[(C_\varphi f)^*](z)\big| \leqslant P[g](z),$$

dla dowolnego $f \in B_{H^{\Phi}(\Omega)}$, gdzie $P[g]$ oznacza całkę Poissona funkcji $g$. Biorąc supremum po $f \in B_{H^{\Phi}(\Omega)}$ z oszacowania (2.9) dostajemy

$$CP[(C_\varphi f)^*](z) \geqslant C\|\delta_{\varphi^*(z)}\|_{(H^{\Phi}(\Omega))^*} \geqslant \Phi^{-1}\bigg(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)}\bigg), \quad z \in \Omega.$$

Zauważmy, że funkcją brzegową $P[g]$ jest funkcja $g$ dla $\omega$–prawie wszystkich $\xi \in \partial\Omega$. Ponieważ $\Phi^{-1}(t) \to +\infty$, gdy $t \to +\infty$, więc wnioskujemy, że $\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega) > 0$ dla $\omega$-prawie wszystkich $\xi \in \partial\Omega$ oraz

$$\left|\Phi^{-1}\bigg(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)}\bigg)\right| \leqslant Cg, \quad \omega\text{–p.\,w.},$$

zatem $\Phi^{-1}\big(1/\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)\big) \in M^{\Phi}(\partial\Omega)$. □

Zauważmy, że gdy $\Phi(t) = t^2$ oraz $\Omega = \mathbb{D}$, to $H^{\Phi}(\Omega) = H^2(\mathbb{D})$ i operator $C_\varphi$ jest porządkowo ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\big(\frac{1}{1-|\varphi^*|}\big)^{1/2} \in L^2(\mathbb{T})$, czyli

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-|\varphi^*|} dm < +\infty.$$

Ten ostatni warunek jest równoważny warunkowi twierdzenia 4.18, mamy bowiem

$$1 - |\varphi^*| \leqslant 1 - |\varphi^*|^2 \leqslant 2(1 - |\varphi^*|).$$

Prawdziwe jest twierdzenie ogólniejsze (patrz [53, str. 108]).

**Twierdzenie 4.19.** *Dla dowolnej przestrzeni Hilberta $H$, operator $T : H \to L^2(\mathbb{T})$ jest operatorem Hilberta–Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy jest on porządkowo ograniczony na $L^2(\mathbb{T})$.*

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku $\Phi(t) = t^2$ oraz $\Omega = \mathbb{A}$, czyli dla przestrzeni $H^2(\mathbb{A})$ na pierścieniu. Przypomnijmy, że w swojej rozprawie doktorskiej D. M. Boyd [2] rozważał przestrzeń Hilberta $H^2(A)$ z następującym iloczynem skalarnym:

$$\begin{aligned}[f,g] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_0e^{it})\overline{g(r_0e^{it})}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\overline{b}_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0^2 a_n\overline{b}_n,\end{aligned}$$

gdzie $f,g \in H^2(\mathbb{A})$ oraz $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ i $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ są rozwinięciami Laurenta tych funkcji. Łatwo sprawdzić, że ciąg $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, gdzie dla $n \in \mathbb{Z}$

$$g_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{1+r_0^{2n}}}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

jest bazą ortonormalną w tej przestrzeni. Uzyskał on następującą charakteryzację:

**Twierdzenie 4.20.** *Operator kompozycji $C_\varphi : H^2(\mathbb{A}) \to H^2(\mathbb{A})$ jest operatorem Hilberta–Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-|\varphi(e^{it})|^2}dt < +\infty,\\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2}{|\varphi(e^{it})|^2 - r_0^2}dt < +\infty,\\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-|\varphi(r_0e^{it})|^2}dt < +\infty,\\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2}{|\varphi(r_0e^{it})|^2 - r_0^2}dt < +\infty.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że warunek skończoności powyższych całek jest równoważny z tym, że $\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*,\partial\mathbb{A})}\right)^{1/2} \in L^2(\partial\Omega)$, co oznacza, że klasy Hilberta–Schmidta oraz porządkowo ograniczonych (w $L^2(\partial\mathbb{A})$) operatorów kompozycji się pokrywają. Poniżej wykażemy, że klasa porządkowo ograniczonych operatorów kompozycji $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M^\Phi(\partial\Omega)$ jest zawarta w klasie zwartych operatorów kompozycji.

**Twierdzenie 4.21.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Załóżmy, że $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M^\Phi(\partial\Omega)$ jest porządkowo ograniczony. Wówczas $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest zwarty.*

*Dowód.* Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji z kuli jednostkowej przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ zbieżnym niemal jednostajnie do funkcji zerowej, zaś $g \in M^\Phi(\partial\Omega)$ taką funkcją, że $|\widetilde{C_\varphi}h| \leqslant g$, dla dowolnego $h \in B_{H^\Phi(\Omega)}$. Z twierdzenia 4.18 wynika, że $\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega) > 0$ $\omega$–p.w. na $\partial\Omega$, a stąd $|f_n \circ \varphi^*| \to 0$ $\omega$–p.w. na $\partial\Omega$. Ponieważ mamy również $|\widetilde{C_\varphi}f_n| \leqslant g$, więc $f_n \circ \varphi^* \to 0$ w $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$, co na mocy stwierdzenia 4.1 oznacza, że $C_\varphi$ jest zwarty. □

Pokażemy, że przy pewnych warunkach wzrostu nałożonych na funkcję Orlicza $\Phi$ pojęcia zwartości i porządkowej ograniczoności operatora $C_\varphi$ się pokrywają.

**Twierdzenie 4.22.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta^2$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ *jest operatorem zwartym.*

(ii) $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M^\Phi(\partial\Omega)$ *jest operatorem porządkowo ograniczonym.*

*Dowód.* Implikacja (ii)⇒ (i) jest prawdziwa na mocy poprzedniego twierdzenia. Pokażemy implikację odwrotną. Ściślej udowodnimy, że warunek (4.1) ze stwierdzenia 4.2 pociąga za sobą (przy dodatkowym założeniu $\Phi \in \Delta^2$) porządkową ograniczoność operatora kompozycji. Załóżmy więc, że $C_\varphi$ jest operatorem zwartym. W szczególności spełniona jest zależność (4.1), tzn. dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant m$

$$\lim_{s\to 1^-} \sup_{p\in\partial\mathbb{D}} \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-s}\Big)\|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0.$$

Powyższa równość oznacza, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie $s_0 \in (0,1)$, że dla dowolnych $s_0 < s < 1$, $p \in \mathbb{T}$ oraz $0 \leqslant i \leqslant m$

$$\int_{\partial\Omega} \Phi\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-s}|u^i_{p,s} \circ \varphi^*|\Big)\bigg) \leqslant 1. \tag{4.14}$$

Zauważmy, że nierówność $|u^0_{p,s}(z)| \geqslant \frac{1}{4}$ zachodzi dla tych $z \in \Omega$, które spełniają zależność $|z-p| \leqslant 1-s$. Korzystając z faktu, że dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $u^i_{p,s} = u^0_{p,s} \circ \eta_i^{-1}$, dla $z \in \{z \in \Omega\colon |a_i + r_i\overline{p} - z| \leqslant (1-s)r_i\}$ otrzymujemy

$$|u^i_{p,s}(z)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Niech $r = \min_{0\leqslant i\leqslant m} r_i$. Zdefiniujmy następującą rodzinę zbiorów:

$$\begin{aligned} D_i^{p,s} &= \big\{\xi \in \partial\Omega\colon\ |a_i + r_i\overline{p} - \varphi^*(\xi)| \leqslant (1-s)r\big\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,\\ D_0^{p,s} &= \big\{\xi \in \partial\Omega\colon\ |p - \varphi^*(\xi)| \leqslant (1-s)r\big\}. \end{aligned}$$

Dla $s$ bliskich 1 rodzina $\{D_i^{p,s}\}_{i=0}^m$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych. Zatem z oszacowania (4.14) dostajemy

$$1 \geqslant \omega(D_i^{p,s})\,\Phi\bigg(\frac{1}{4\varepsilon}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-s}\Big)\bigg).$$

Niech $\Omega_h = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z,\partial\Omega) < h\}$. Zbiór $\Omega_h$ można pokryć kulami o promieniu $2h$ i środkach należących do $\partial\Omega$, których ilość (dla małych $h$) jest nie większa od $c/h$ dla pewnej stałej $C$ (można przyjąć $C = \frac{2\pi}{h}\sum_{i=0}^m \frac{r_i}{r}$). Stąd i z faktu, że miara harmoniczna $\omega$ jest równoważna mierze łukowej, przyjmując $2h = (1-s)r$ dostajemy

$$\frac{C'}{h} \geqslant \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega\colon\ \operatorname{dist}(\varphi^*(\xi),\partial\Omega) < h\Big\}\Big)\,\Phi\Big(\frac{1}{4\varepsilon}\Phi^{-1}\Big(\frac{r}{2h}\Big)\Big).$$

Korzystając teraz z wklęsłości $\Phi^{-1}$ mamy

$$\frac{C'}{h} \geqslant \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega\colon\ \frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi),\partial\Omega)} > \frac{1}{h}\Big\}\Big)\,\Phi\Big(\frac{r}{8\varepsilon}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{h}\Big)\Big).$$

Niech $g(\xi) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi),\partial\Omega)}\right)$ dla $\xi \in \partial\Omega$ oraz $x = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)$. Wówczas podstawiając do powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} C'\Phi(x) &\geqslant \omega\Big(\{\xi \in \partial\Omega: \ g(\xi) > x\}\Big)\Phi\left(\frac{rx}{8\varepsilon}\right) \\ &\geqslant \omega\big(\{\xi \in \partial\Omega: \ g(\xi) > x\}\big)\left[\Phi\left(\frac{rx}{8\alpha^2\varepsilon}\right)\right]^4, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności dwukrotnie użyliśmy warunku $\Delta^2$. Dla pewnego $B > 1$ możemy znaleźć takie $\varepsilon > 0$, że $B = \frac{r}{8\alpha^2\varepsilon^2}$. Wtedy dla dużych $x$ powyższą nierówność możemy zapisać w postaci

$$\omega\big(\{\xi \in \partial\Omega: \ \Phi(Bg(\xi)) > \Phi(Bx)\}\big)\big[\Phi(Bx)\big]^4 \leqslant C'\Phi(x) \leqslant \Phi(Bx),$$

a zatem dla odpowiednio dużego $\lambda$ mamy

$$\omega\big(\big\{\xi \in \partial\Omega: \ \Phi(Bg(\xi)) > \lambda\big\}\big) \leqslant \frac{2\pi}{\lambda^3}.$$

Stąd wynika, że funkcja $\Phi(Bg) \in L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ dla każdego $B > 1$. Na mocy twierdzenia 4.18, jako, że $g \in M^\Phi(\partial\Omega)$, otrzymujemy porządkową ograniczoność operatora $C_\varphi$. □

Niech $(\mathbb{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Przestrzeń takich funkcji mierzalnych $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, że dla pewnego $c > 0$ i przy dowolnym $t > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(\{|f| > t\}) \leqslant \frac{1}{\Phi(ct)},$$

nazywamy *słabą-$L^\Phi$ przestrzenią* i oznaczamy przez $L^{\Phi,\infty}(\mathbb{S})$.

Zauważmy, że dla dowolnego $f \in L^\Phi(\mathbb{S})$ oraz dla $t > 0$ mamy

$$\|f\|_\Phi \geqslant \frac{t}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mathbb{P}(|f|>t)}\right)}. \tag{4.15}$$

Istotnie, z nierówności Markowa dla $t > 0$ otrzymujemy

$$\Phi\left(\frac{t}{\|f\|_\Phi}\right)\mathbb{P}(|f| > t) \leqslant \int_X \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mathbb{P} \leqslant 1.$$

Stąd już łatwo widzimy nierówność (4.15). Zauważmy, że warunek (4.15) możemy zapisać w następującej postaci

$$\mathbb{P}(|f| > t) \leqslant \frac{1}{\Phi\left(\frac{t}{\|f\|_\Phi}\right)}.$$

Stąd wynika, że $L^\Phi(\mathbb{S}) \subseteq L^{\Phi,\infty}(\mathbb{S})$.

Przytoczymy dwa istotne dla dalszych rozważań wyniki, pochodzące z pracy [32]

**Lemat 4.23.** *Następujące warunki są równoważne*

(i) $L^\Phi(\mathbb{S}) = L^{\Phi,\infty}(\mathbb{S})$.

(ii) $\int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{\Phi(Bu)}du = \int_{\Phi(1)}^\infty \frac{1}{\Phi(B\Phi^{-1}(x))}dx < \infty$ *dla pewnego* $B > 1$.

**Lemat 4.24.** *Niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza.*

(i) *Jeżeli $\Phi \in \Delta^1$, to $L^\Phi(\mathbb{S}) = L^{\Phi,\infty}(\mathbb{S})$.*

(ii) *Jeżeli $L^\Phi(\mathbb{S}) = L^{\Phi,\infty}(\mathbb{S})$, to $\Phi \in \Delta^0$.*

**Twierdzenie 4.25.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech $\Phi$ będzie funkcją Orlicza. Załóżmy, że $L^\Phi(\partial\Omega) = L^{\Phi,\infty}(\partial\Omega)$. Wówczas jeśli dla pewnego $A > 0$ spełniony jest warunek*

$$\lim_{\lambda\to 0} \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega : \operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega) < \lambda\Big\}\Big)\Phi\Big(A\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big) < +\infty, \tag{4.16}$$

*to operator kompozycji $C_\varphi$ jest porządkowo ograniczony w $L^\Phi(\partial\Omega)$. Jeśli zaś dla wszystkich $A > 0$ spełniony jest warunek*

$$\lim_{\lambda\to 0} \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega : \operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega) < \lambda\Big\}\Big)\Phi\Big(A\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big) < +\infty,$$

*to operator kompozycji $\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M^\Phi(\partial\Omega)$ jest porządkowo ograniczony.*

*Dowód.* Załóżmy, że $L^\Phi(\partial\Omega) = L^{\Phi,\infty}(\partial\Omega)$ oraz, że warunek (4.16) jest spełniony dla pewnego (odpowiednio dla wszystkich) $A > 0$. Z lematu 4.23 wynika istnienie takiego $B > 1$, że funkcja $\frac{1}{\Phi(B\Phi^{-1}(\cdot))}$ jest całkowalna na przedziale $(1, \infty)$. Korzystając z założenia przy $C = A/B$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \Phi\Big(C\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*, \partial\Omega)}\Big)\Big)d\omega \\
&\quad = \int_0^\infty \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega : \frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega)} > t\Big\}\Big)(\Phi(C\Phi^{-1}(t)))'dt \\
&\quad = \int_0^\infty \omega\Big(\Big\{xi \in \partial\Omega : \operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega) < \frac{1}{t}\Big\}\Big)(\Phi(C\Phi^{-1}(t)))'dt \\
&\quad \leqslant \Phi(C\Phi^{-1}(1)) + K\int_1^\infty \frac{\Phi(C\Phi^{-1}(t))'}{\Phi(A\Phi^{-1}(t))}dt.
\end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy $u = \Phi(C\Phi^{-1}(t))$, wówczas $\Phi^{-1}(u) = C\Phi^{-1}(t)$. Stąd $\Phi(A\Phi^{-1}(t)) = \Phi(B\Phi^{-1}(u))$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{\partial\Omega} \Phi\Big(C\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega)}\Big)\Big)d\omega(\xi) \leqslant \Phi(C\Phi^{-1}(1)) + K\int_{\Phi(C\Phi^{-1}(1))}^\infty \frac{du}{\Phi(B\Phi^{-1}(u))},$$

przy czym suma występująca po prawej stronie powyższej nierówności na mocy przyjętych założeń jest skończona. Z twierdzenia 4.18 dostajemy, że $C_\varphi$ jest porządkowo ograniczony w $L^\Phi(\partial\Omega)$ (odpowiednio w $M^\Phi(\partial\Omega)$). □

**Wniosek 4.26.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta^1$. Wówczas jeśli warunek*

$$\lim_{\lambda\to 0} \omega\Big(\Big\{\xi \in \partial\Omega : \operatorname{dist}(\varphi^*(\xi), \partial\Omega) < \lambda\Big\}\Big)\Phi\Big(A\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big) < +\infty$$

*jest spełniony dla pewnego $A > 0$, to $\widetilde{C_\varphi}: H^\Phi(\Omega) \to L^\Phi(\partial\Omega)$ jest porządkowo ograniczony (w $L^\Phi(\partial\Omega)$). Jeśli zaś zachodzi on przy dowolnym $A > 0$, to operator kompozycji $\widetilde{C_\varphi}: H^\Phi(\Omega) \to L^\Phi(\partial\Omega)$ jest porządkowo ograniczony. W obu przypadkach spełnione są również implikacje odwrotne.*

*Dowód.* Warunek konieczny jest natychmiastowym następstwem poprzedniego twierdzenia 4.25 oraz lematu 4.24. Pokażemy implikację odwrotną. Z twierdzenia 4.18 i nierówności Markowa otrzymujemy

$$\omega\left(\left\{\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*,\partial\Omega)} > t\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\Phi(A\Phi^{-1}(t))}\int_{\partial\Omega}\Phi\left(A\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi^*,\partial\Omega)}\right)\right)d\omega$$

co uzasadnia tezę. □

Zauważmy, że w dowodzie dostateczności nie korzystaliśmy z faktu, że $\Phi \in \Delta^1$.

### 4.2.2. Słaba zwartość i zupełna ciągłość operatora kompozycji.

Na początku przypomnijmy, że operator $T: X \to Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami Banacha nazywamy *słabo zwartym*, gdy obrazem dowolnego ograniczonego podzbioru $X$ jest warunkowo słabo zwarty podzbiór $Y$, tzn. taki, że jego domknięcie w słabej topologii $Y$ jest zwarte. Zauważmy, że jeśli w zbiorze $Z$ określone są dwie topologie $\tau_1$ i $\tau_2$, przy czym $\tau_1$ jest mocniejsza od $\tau_2$, to każdy zbiór zwarty w topologii $\tau_1$ jest również zwarty w topologii $\tau_2$. Zatem dowolny operator zwarty jest też słabo zwarty. Twierdzenie odwrotne nie jest w ogólności prawdziwe; jeśli $\dim(X) = \infty$ i $X$ jest refleksywna, to $j: X \to X$ jest słabo zwartym operatorem, który nie jest zwarty.

Operator $T: X \to Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami Banacha nazywamy *zupełnie ciągłym*, jeżeli przekształca ciągi słabo zbieżne w $X$ w ciągi normowo zbieżne w $Y$.

Operatory zupełnie ciągłe (nazywane też operatorami Dunforda–Pettisa) podobnie jak operatory zwarte tworzą domkniętą podprzestrzeń przestrzeni wszystkich ciągłych operatorów liniowych działających między przestrzeniami $X$ i $Y$. Mają one także (jak w przypadku operatorów zwartych) własność ideału. Ponadto każdy zwarty operator jest zupełnie ciągły. Implikacja odwrotna nie musi jednak zachodzić – nie jest tak m.in. w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, w których słaba zbieżność pociąga zbieżność w normie (o takich przestrzeniach mówimy, że mają własność Schura, np. $\ell^1$). Jednak w przypadku przestrzeni refleksywnych pojęcia te pokrywają się.

Mówimy, że przestrzeń Banacha $X$ ma *własność Dunforda–Pettisa*, jeśli każdy słabo zwarty operator na $X$ jest zupełnie ciągły (właśnie z tego powodu operatory zupełnie ciągłe nazywane bywają operatorami Dunforda–Pettisa).

Ważnym wynikiem, którego nie można pominąć rozważając operatory zupełnie ciągłe jest twierdzenie Eberleina–Smuliana (patrz [11]). Dostarcza ono pożytecznego kryterium zupełnej ciągłości – operator $T$ jest zupełnie ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza zbiory słabo zwarte w normowo zwarte.

W dalszym ciągu zastosujemy następujący interesujący rezultat z pracy [30].

**Lemat 4.27** ([30, Theorem 4]). *Niech $(\mathbb{S}, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Załóżmy, że funkcja Orlicza $\Phi$ spełnia warunek $\Delta^0$, zaś $X$ jest podprzestrzenią przestrzeni $M^\Phi$. Wówczas* *dowolny operator liniowy odwzorowujący $X$ w pewną podprzestrzeń przestrzeni Banacha $Y$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $p \in [1, \infty)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $C_\varepsilon > 0$, że*

$$\|Tf\| \leqslant C_\varepsilon \|f\|_p + \varepsilon \|f\|_{L^\Phi(\mu)}, \quad f \in X.$$

**Twierdzenie 4.28.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta^0$. Wówczas jeżeli $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest słabo zwarty, to zachodzi warunek* (4.1), *tzn. dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant m$*

$$\lim_{s \to 1^-} \sup_{p \in \partial \mathbb{D}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0.$$

*Dowód.* Wystarczy wykorzystać fakt, że obcięcie $C_\varphi$ do przestrzeni $HM^\Phi(\Omega)$ jest operatorem słabo zwartym. Z lematu 4.27 oraz twierdzenia 2.6 wiemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy taką stałą $K_\varepsilon$, że dla dowolnego $f \in HM^\Phi(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|C_\varphi f\|_{H^\Phi(\Omega)} \leqslant K_\varepsilon \|f\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|f\|_{H^\Phi(\Omega)}.$$

Z oszacowania (2.7) oraz faktu, że dla $0 \leqslant i \leqslant m$ mamy $\|u^i_{p,s}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(1-s)$ dla $\varepsilon > 0$, podstawiając $f = u^i_{p,s}$ otrzymujemy

$$\|C_\varphi u^i_{p,s}\|_\Phi \leqslant K_\varepsilon (1-s) + \varepsilon \frac{C_1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right)}.$$

Ponieważ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$, więc $(1-s)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \to 0$, gdy $s \to 1^-$. Stąd wynika teza. $\square$

Z twierdzenia 4.28 oraz wniosku 4.13 otrzymujemy następującą równoważność.

**Wniosek 4.29.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$. Jeżeli funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta^0$, to operator $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo zwarty.*

Zauważmy, że warunek $\Phi \in \Delta^2$ pociąga $\Phi \in \Delta^1$, który z kolei pociąga $\Phi \in \Delta^0$. W konsekwencji stosując twierdzenie 4.28, twierdzenie 4.22 oraz wniosek 4.13 otrzymujemy następujący rezultat.

**Twierdzenie 4.30.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \Delta^2$. Wówczas następujące warunki są równoważne*:

(i) *$C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest operatorem zwartym.*

(ii) *$\widetilde{C_\varphi} : H^\Phi(\Omega) \to M^\Phi(\partial\Omega)$ jest porządkowo ograniczony.*

(iii) *$C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ jest operatorem słabo zwartym.*

(iv) *Dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant m$ mamy*

$$\lim_{s \to 1^-} \sup_{p \in \partial \mathbb{D}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0.$$

Następujące twierdzenie opisuje związek między pojęciami zwartości i słabej zwartości operatora kompozycji określonego na przestrzeniach Hardy'ego $H^2(\Omega)$ i Hardy'ego–Orlicza $H^\Phi(\Omega)$.

**Twierdzenie 4.31.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \nabla_2$. Jeżeli któryś z poniższych warunków jest spełniony*

(i) $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ *jest zwarty,*

(ii) $\Phi \in \Delta^0$ *oraz* $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ *jest słabo zwarty,*

*to* $C_\varphi : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ *jest zwarty.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że operator $C_\varphi$ nie jest zwarty na $H^2(\Omega)$. Stąd, na podstawie charakteryzacji uzyskanej w twierdzeniu 4.12 (przypomnijmy, że jeśli $\Psi(t) = t^2$ dla $t \geqslant 0$, to $H^\Psi(\Omega) = H^2(\Omega)$) istnieją $\beta \in (0,1)$ oraz takie ciągi $\{\xi_n\} \subset \partial\Omega$ i $\{h_n\} \subset (0,1)$, że $h_n \to 0$, a także $\mu_\varphi(S(\xi_n, rh_n)) \geqslant \beta h_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $r = \min_{0 \leqslant i \leqslant m} r_i$.

Dla $0 \leqslant i \leqslant m$ będziemy wybierać podciągi $\{\xi_n^i\}_n$ ciągu $\{\xi_n\}$ takie, że $\{\xi_n^i\}_n \in \Gamma_i$, dla $0 \leqslant i \leqslant m$. Niech $p_n^i = \frac{r_i}{\xi_n^i - a_i}$, gdy $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $p_n^0 = \xi_n^0$. Jest jasne, że $p_n^i \in \partial\mathbb{D}$ dla wszystkich $0 \leqslant i \leqslant m$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech $v_n^i(z) := u^i_{p_n^i, h_n}$, $z \in \Omega$. Wówczas z oszacowania (2.7) mamy

$$\|v_n^i\|_{H^\Phi(\Omega)} \approx \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wynika stąd, że ciąg $\{g_n^i\}_n$ zdefiniowany wzorem $g_n^i := \Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right) v_n^i$, $n \in \mathbb{N}$, jest ograniczony w $HM^\Phi(\Omega)$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant m$. Z założenia o funkcji Orlicza $\Phi$ wynika, że $\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{x} = 0$ czyli

$$h_n^2 \Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right) \to 0.$$

Zatem ciąg $\{g_n^i\}$ dąży do zera w topologii zbieżności niemal jednostajnej oraz $\|g_n^i\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, gdyż $\|g_n^i\|_{H^1(\Omega)} \leqslant h_n \Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)$. Przy każdym z założeń (i) lub (ii) powinniśmy więc otrzymać, że $\|C_\varphi g_n^i\|_{H^\Phi(\Omega)} \to 0$. W przypadku (i) jest to konsekwencją stwierdzenia 4.1, zaś w przypadku (ii) – lematu 4.27. Pokażemy jednak, że nie jest to prawdą, otrzymując sprzeczność. Istotnie

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \Phi\left(\frac{4}{\beta}|g_n^i \circ \varphi^*|\right) d\omega &\geqslant \int_\Omega \Phi\left(\frac{4}{\beta}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)|v_n^i(z)|\right) d\mu_\varphi \\ &\geqslant \int_{S(\xi_n, rh_n)} \Phi\left(\frac{4}{\beta}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)|v_n^i(z)|\right) d\mu_\varphi.\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $z \in S(\xi_n, rh_n)$ mamy $|v_n^i(z)| > \frac{1}{4}$. Z wypukłości funkcji $\Phi$ oraz faktu, że $\beta \in (0,1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \Phi\left(\frac{4}{\beta}|g_n^i \circ \varphi^*|\right) d\omega &\geqslant \int_\Omega \frac{4}{\beta}\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)|v_n^i(z)|\right) d\mu_\varphi \\ &\geqslant \frac{1}{\beta h_n}\mu_\varphi(S(\xi_n, rh_n)) \geqslant 1.\end{aligned}$$

Ostatecznie $\|C_\varphi g_n^i\|_{H^\Phi(\Omega)} \geqslant \beta/4$, co kończy dowód. □

Na zakończenie zajmijmy się zupełną ciągłością operatora kompozycji. Pokażemy, że dla pewnych funkcji Orlicza pojęcie zwartości i zupełnej ciągłości (własności Dunforda–Pettisa) się pokrywają.

**Twierdzenie 4.32.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \nabla_2$. Wówczas każdy operator kompozycji $C_\Phi \colon H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ mający własność Dunforda-Pettisa spełnia warunek* (4.1)*, tzn. dla dowolnego* $0 \leqslant i \leqslant m$ *mamy*

$$\lim_{s\to 1^-} \sup_{p\in\mathbb{T}} \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{1-s}\Big)\|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0.$$

*Dowód.* Niech $g^i_{p,s} = \Phi^{-1}\big(\frac{1}{1-s}\big)u^i_{p,s}$ dla $0 \leqslant i \leqslant m$. Jeżeli warunek (4.1) nie byłby spełniony, to istniałby ciąg $\{p_n\}$ punktów należących do brzegu $\partial\Omega$ obszaru $\Omega$ oraz taki ciąg liczb $\{s_n\} \subset (0,1)$, że $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ oraz $\|C_\varphi g^i_{p_n,s_n}\|_{H^\Phi(\Omega)} \geqslant \delta > 0$ dla $n \geqslant 1$, przy pewnym $0 \leqslant i \leqslant m$. Mamy jednak $(1-s)^2\Phi^{-1}\big(\frac{1}{1-s}\big) \to 0$, gdy $s \to 1^-$. Zatem $g^i_{p_n,s_n} \to 0$ niemal jednostajnie w $\Omega$.

Ponadto ciąg $\{g^i_{p_n,s_n}\}_n$ jest ograniczony w $H^\Phi(\Omega)$. W konsekwencji ciąg $\{g^i_{p_n,s_n}\}_n$ jest słabo zbieżny do 0. Korzystając z faktu, że $C_\varphi$ ma własność Dunforda–Pettisa otrzymujemy $\|C_\varphi g^i_{p_n,s_n}\|_{H^\Phi(\Omega)} \to 0$, co prowadzi do sprzeczności. □

**Wniosek 4.33.** *Niech $\Omega$ będzie obszarem kołowym, $\varphi \in \Upsilon_\Omega$ oraz niech funkcja Orlicza $\Phi \in \nabla_2$. Wówczas operator kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ ma własność Dunforda–Pettisa wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty.*

*Dowód.* Z powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ ma własność Dunforda–Pettisa, to spełnia on warunek (4.1), który jest równoważny zwartości $C_\varphi$ na mocy wniosku 4.13. Implikacja odwrotna jest oczywista. □

# Bibliografia


[1] A. Alexiewicz, Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1969.

[2] D. M. Boyd, *Composition operators on the Bergman space and analytic function spaces on the annulus*, rozprawa doktorska, Chapel Hill 1973.

[3] D. M. Boyd, *Composition operators on $H^p(A)$*, Pacific J. Math. 62 (1976), no. 1, 55–60.

[4] D. M. Boyd, *The metric space $H^p(A)$, $0 < p < 1$, and its containing Banach space*, Colloq. Math. 40 (1978/79), no. 1, 119–129.

[5] I. Chalendar i J. R. Partington *Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains*, Studia Math. 136, no. 3, (1999), 255–269.

[6] I. Chalendar i J. R. Partington *Interpolation between Hardy spaces on circular domains with applications to approximation*, Arch. Math. 78, no. 3, (2002), 223–232.

[7] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer New York, 1978.

[8] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] C. Cowen i B. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, CRC Press, Boca Raton 1995.

[10] W. Deeb i M. Marzug, *$H(\varphi)$ spaces*, Canad. Math. Bull. 29 (1986), no. 3, 295–301.

[11] N. Dunford i J. T. Schwartz *Linear operators*, Wiley – Interscience, część I, New York 1958.

[12] P. Duren, *Theory of $H^p$ spaces*, Academic Press, New York 1970.

[13] P. L. Duren, B. W. Romberg i A. L. Shields, *Linear functionals on $H^p$ spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math. 238 (1969), 32–60.

[14] S. D. Fisher, *Function theory on planar domains*, Wiley, New York 1983.

[15] S. D. Fisher, J. E. Shapiro, *The essential norm of composition operators on a planar domain*, Illinois J. Math. 43 (1999), no. 1, 113–130.

[16] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer New York 2001.

[17] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Springer, San Diego 2007.

[18] J. B. Garnett, D. E. Marshall, *Harmonic measure*, Cambridge, Cambridge University Press 2005.

[19] G. H. Hardy, *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proc. London Math. Soc. 14 (1915) no. 2, 269–277.

[20] G. H. Hardy i J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals I*, Math. Z. 27 (1928) no. 1, 565–606.

[21] G. H. Hardy i J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals II*, Math. Z. 34 (1932) no. 1, 403–439.
[22] M. Hasumi i S. Kataoka, *Remarks on Hardy–Orlicz spaces*, Arch. Math. 51 (1988), 455–463.
[23] M. Jevtić i M. Pavlović, *Coefficient multipliers on space of analytic functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) 64 (1998), 531–545.
[24] M. Jevtić i M. Pavlović, *On the solid hull of the Hardy Space $H^p$,* $0 < p < 1$, Mischigan. Math. J. 54 (2006), 439–446.
[25] M. Jevtić i M. Pavlović, *On the solid hull of the Hardy Space–Lorentz space $H^p$*, Publ. Inst. Math. 85 (2009), 55–61.
[26] R. Khalil, *Inclusions of Hardy–Orlicz spaces*, J. Math. Sci. 9 (1986), no. 3, 429–434.
[27] M. A. Krasnosielski i Ja. B. Rutycki *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
[28] J. Krzyż *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.
[29] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec i L. Rodríguez-Piazza, *Some examples of compact composition operators on $H^2$*, J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 11, 3098–3124.
[30] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec i L. Rodríguez-Piazza, *A criterion of weak compctness for operators on subspaces of Orlicz spaces*, J. Funct. Spaces Appl. 6 (2008), nr 3, 277–292.
[31] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec i L. Rodríguez-Piazza, *Compact composition operators on $H^2$ and Hardy-Orlicz spaces*, J. Math. Anal. Appl. 354 (2009), no. 1, 360–371.
[32] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec i L. Rodríguez-Piazza, *Composition operators on Hardy–Orlicz spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 207 (2010), no. 94.
[33] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec i L. Rodríguez-Piazza, *Nevanlinna counting function and Carleson function of analytic maps*, Math. Ann. 351 (2011), 305–326.
[34] R. Leśniewicz *On Hardy–Orlicz spaces. I.*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 145–150.
[35] R. Leśniewicz *On Hardy–Orlicz spaces. II.*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 277–281.
[36] R. Leśniewicz *On Hardy–Orlicz spaces. I.*, Comment. Math. Prace Mat. 15 (1971), 3–56.
[37] R. Leśniewicz *On linear functionals in Hardy–Orlicz spaces. I.,II.*, Studia Math. 46 (1973), 53–77; *ibid*. 46 (1973), 259–295.
[38] R. Leśniewicz *On linear functionals in Hardy–Orlicz spaces. III.*, Studia Math. 47 (1973), 53–77; ibid. 46 (1973), 261–284.
[39] J. Lindenstrauss i L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979.
[40] J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions*, Proc. London Math. Soc. 23 (1925), 481–519
[41] B. D. MacCluer, *Compact composition operators on $H^p(B_N)$*, Michigan Math. J. 32 (1985), 237–248.
[42] B. D. MacCluer i J. H. Shapiro, *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Canadian J. Math. 38 (1986), 878–906.
[43] M. Mastyło i P. Mleczko, *Absolutely summing multipliers on abstract Hardy spaces*, Acta Math. Sin. 25 (2009), no. 6, 883–902.
[44] M. Mastyło i P. Mleczko, *Solid hulls of quasi-Banach spaces of analytic functions and interpolation*, Nonlinear Anal. 73 (2010), nr. 1, 84–98.
[45] M. Mastyło i L. Rodríguez-Piazza, *Carleson measures and embeddings of abstract Hardy spaces into function lattices*, J. Funct. Anal. (2014),
[46] A. Michalak i M. Nawrocki, *Banach envelopes of vector valued $H^p$ spaces*, Indag. Math. (N.S.) 13 (2002), no. 2, 185–195.
[47] M. Parreau, *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann*, Ann. l'Inst. Fourier 3 (1951), 103–197
[48] M. Pavlović, *On the Banach envelope of Hardy–Orlicz spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. 20 (1992), 9–19.
[49] Z. Qiu, *Carleson Measures on Circular domains*, Houston J. Math., 25, nr 11 (2005), 1199–1206.

[50] Z. Qiu, *Carleson Measures on Planar Sets*, Acta Math. Sin., 25, (2009), no. 11, 1881–1892.
[51] M. M. Rao i Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Pure and Applied Mathematics 146, Marcel Dekker, Inc. (1991)
[52] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion.*. Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46–66.
[53] L. Rodríguez-Piazza, *Composition operators on Hardy-Orlicz spaces*, Contemporary Mathematics 561 (2012), 91–133.
[54] W. Rudin, *Analytic functions of class $H_p$*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46–66.
[55] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.
[56] M. Rzeczkowski, *Composition operators on Hardy–Orlicz spaces on planar domains* , Ann. Pol. Math. (2016), s. 12, w druku.
[57] M. Rzeczkowski, *On the Banach envelope of Hardy–Orlicz spaces of an annulus* (2016), s. 24, złożona do druku.
[58] D. Sarason, *The $H^p$ spaces of an annulus*, Mem. Amer. Math. Soc. 56 (1965), 1–78.
[59] H. J. Schwartz, *Composition operators on $H^p$*, rozprawa doktorska, Univ. of Toledo, 1968.
[60] J. H. Shapiro, *Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces*, Duke Math. J. 43 (1976), 187–202.
[61] J. H. Shapiro, *The essential norm of a composition operator*, Ann. of Math. 125 (1987), 375–404.
[62] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, New York 1991.
[63] J. H. Shapiro i P. D. Taylor, *Compact, nuclear, and Hilbert–Schmidt composition operators on $H^2$*, Indiana Univ. Math. J. 125 (1973), 479–496.
[64] A. L. Shields i D. L. Williams, *Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 287–305.

# Skorowidz