ANTONI SKWARCZYŃSKI

PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE W ZASTOSOWANIU DO ROZDZIAŁU ŚRODKÓW FINANSOWYCH W PRODUKCJI ROLNICZEJ

W dotychczasowych badaniach wiele miejsca poświęcono problematyce programowania matematycznego, większość jednak prac dotyczyła programowania liniowego lub nieliniowego. Za mało, jak dotychczas, wykazywano zainteresowania programowaniem dynamicznym. Poza nielicznymi pracami z tego zakresu i to przeważnie obejmujących raczej rozważania teoretyczne, do rzadkości należą opracowania traktujące o zastosowaniach praktycznych programowania dynamicznego, które mogą oddać wielkie usługi dla planowania i polityki gospodarczej, zwłaszcza w dłuższych okresach.

Mając to na uwadze podjęto niniejszą pracę tytułem próby, w której chciano wykazać dużą przydatność praktyczną programowania dynamicznego w badaniach rolniczych, zwłaszcza przy podejmowaniu pewnych decyzji gospodarczych. Badania te oparto na konkretnym materiale danych empirycznych uzyskanych z 80 gospodarstw rolnych, podległych Wojewódzkiemu Zarządowi Państwowych Gospodarstw Rolnych w Lublinie. [1]

Rozważania rozpoczęte zostaną od przedstawienia pewnych ogólniejszych teoretycznych zagadnień, co niewątpliwie ułatwi czytelnikowi dalszy ciąg rozumowań.

*

Programowanie matematyczne liniowe lub nieliniowe pozwala rozwiązać w sposób optymalny dany problem ekonomiczno-techniczny statycznie, tzn. w pewnym określonym momencie czasowym przy określonych i niezmiennych parametrach bez uwzględnienia czynnika czasowego. Jeżeli jednak żąda się rozwiązań optymalnych problemu w ciągu pewnego okresu, w którym zmieniają się warunki poprzez zmianę odpo-

[1] Por. A. Skwarczyński, *Zastosowanie programowania nieliniowego do ustalenia optimum produkcji rolnej* (praca doktorska), Kraków 1965.

wiednich parametrów, to problem taki można rozwiązać przy pomocy programowania uwzględniającego właśnie między innymi ten czynnik czasowy. Programowanie takie określone jest jako programowanie dynamiczne, które wyznacza w końcu rozważanego okresu ekstremum pewnego kryterium występującego w każdym programowaniu. Jeżeli rozważany okres składa się z pewnej ilości np. *m* lat, to każdy poszczególny rok uważa się za kolejny etap optymalizacji danego kryterium.

Optymalizację tego kryterium rozpatruje się pod kątem:

1. optymalizacji kryterium w danym roku (etapu),
2. optymalizacji łącznego kolejnego okresu liczonego od początku.

Wymaganie to pociąga za sobą pewne dalsze konsekwencje stanowiące specyfikę programowania dynamicznego.

Optymalizacja kryterium w danym, np. pierwszym, roku nie musi pociągać za sobą optymalnego rozwiązania w następnym roku, a tym samym całego okresu złożonego z dwóch pierwszych lat. Należy więc tak planować, aby nie być uzależnionym od przyszłych etapów. Takim etapem jest oczywiście ostatni rok danego okresu, który to rok można zaprogramować optymalnie w odniesieniu do danego kryterium bez uwzględnienia przyszłości. Po ustaleniu warunków optymalnego rozwiązania problemu w ostatnim roku, określa się optymalne warunki rozwiązania w roku przedostatnim tak, aby cały okres roku przedostatniego i ostatniego był zaprogramowany optymalnie. Z kolei programuje się rok wcześniejszy biorąc pod uwagę optymalne rozwiązanie dwóch ostatnich lat. W ten sposób optymalizację okresów pod kątem danego kryterium prowadzi się od końca okresu do jego początku. W pracy niniejszej przedstawiona jest powyższa metoda do optymalnego rozwiązania pewnego zagadnienia związanego ze zjawiskami rolniczymi.

*

Analiza dotyczy produkcji ziemniaków, buraków cukrowych i rzepaku. Jak wiadomo, produkcja ta zależy od wielu czynników, między innymi od nakładów wyrażonych w formie pieniężnej w tys. zł na 1 ha danej uprawy.

Na podstawie danych empirycznych uzyskanych ze wspomnianych we wstępie Państwowych Gospodarstw Rolnych, rozważono zależność pomiędzy plonem danej uprawy a czynnikami produkcji, którymi były ilości: nawozów sztucznych, obornika, pracy ludzkiej, pracy maszynowej oraz wysokość nakładów finansowych w tys. zł w przeliczeniu na 1 ha uprawy. Wyliczono następnie regresje wielorakie liniowe pomiędzy wielkością plonu danej uprawy a nakładami wymienionych czynników produkcji[2]. Z tych regresji wielorakich uwzględniono w niniejszej pracy

[2] Ibidem.

tylko regresje pomiędzy wielkością plonów uprawy a nakładami wyrażonymi w formie pieniężnej.

Wprowadzono następujące oznaczenia:

dla ziemniaków:

q_1 — plon w q z 1 ha,
X_1 — ilość nakładów pieniężnych w tys. zł na 1 ha;

dla buraków:

q_2 — plon w q z 1 ha,
x_2 — ilość nakładów pieniężnych w tys. zł na 1 ha;

dla rzepaku:

q_3 — plon w q z 1 ha,
x_3 — ilość nakładów pieniężnych w tys. zł na 1 ha.

Przy takich oznaczeniach regresje mają postać następującą:

$$\begin{aligned} q_1 &= 6{,}2x_1+121{,}9 \\ q_2 &= 13{,}7x_2+159{,}0 \\ q_3 &= 0{,}9x_3+13{,}5. \end{aligned} \tag{1}$$

Wypada zaznaczyć, że wzięto pod uwagę same przyrosty plonów w zależności od nakładów pieniężnych

$$dq_1=6{,}2x_1 \qquad dq_2=13{,}7x_2 \qquad dq_3=0{,}9x_3. \tag{2}$$

Przyjęto dochód jednostkowy brutto:

dla ziemniaków	0,09	tys. zł
dla buraków	0,06	,, ,,
dla rzepaku	0, 8	,, ,, (3)

Uwzględniając (3) i (2) otrzymuje się dla poszczególnych produkcji, w zależności od nakładów pieniężnych przyrost dochodu brutto *Di*, a mianowicie:

dla ziemniaków	$D_1=0{,}558x_1$	
dla buraków	$D_2=0{,}822x_2$	(4)
dla rzepaku	$D_3=0{,}702x_3$	

łączny zaś przyrost dochodu brutto D w danym roku z produkcji trzech upraw wyrazić jako

$$D=0{,}558x_1+0{,}822x_2+0{,}702x_3. \tag{5}$$

Zakłada się, że na początku każdego następnego roku przeznacza się do ogólnego funduszu środków pieniężnych 10% uzyskanego dochodu brutto w roku poprzednim.

Jeżeli więc środki pieniężne w ilości x_1 przeznaczone na produkcję ziemniaków dają przyrost dochodu brutto 0,558 x_1 zł, to z ilości tej 10% czyli 0,056 x_1 dodaje się w następnym roku do podstawowej sumy x_1 tak,

że ilość środków pieniężnych S_1 przeznaczonych w następnym roku dla produkcji ziemniaków wynosi $S_1 = 1{,}056x_1$.
Analogiczne rachunki dają ilość środków pieniężnych przeznaczonych w następnym roku:

dla produkcji buraków $S_2 = 1{,}082x_2$
dla produkcji rzepaku $S_3 = 1{,}070x_3$

W ten sposób określona została funkcja ilości środków pieniężnych S przeznaczonych na ogólną produkcję na początku następnego roku w ilości:

$$S = 1{,}056x_1 + 1{,}082x_2 + 1{,}070x_3 \tag{6}$$

W zasadzie dla produkcji rolnej przyjmuje się okres 3-letni, jako podstawowy okres planowania i taki przyjęto w przedstawionych rozumowaniach, co oczywiście nie ma zasadniczego znaczenia dla prezentowanych zastosowań matematycznych.

Dalszym założeniem jest umowa, że w przyjętym okresie 3-letnim funkcja dochodu brutto z produkcji, jak również warunki tworzenia środków pieniężnych czyli funkcje (5) i (6) nie zmieniają się w swej postaci. Oczywiście można przyjąć inne założenia o zmienności funkcji dochodu i środków pieniężnych. Przez j oznaczono wskaźnik roku okresu 3-letniego czyli j = 1, 2, 3. Przy tak wprowadzonym wskaźniku otrzymuje się:
funkcję dochodu brutto w j-tym roku

$$D_j = 0{,}558x_{1j} + 0{,}822x_{2j} + 0{,}702x_{3j} \tag{7_1}$$

funkcję ilości środków pieniężnych w j-tym roku

$$S_j = 1{,}056x_{1j} + 1{,}082x_{2j} + 1{,}070x_{3j} \tag{7_2}$$

Ze względu na ograniczoną wysokość plonów, użyteczność powyższych funkcji określono tylko dla $x_{ij} \leq 10{,}0$ tys. zł.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia oraz funkcje (7_1) i (7_2) postawiono następujący problem:

Na początku 3-letniego okresu otrzymuje rolnik do dyspozycji kwotę K_1 tys. zł jako jeden ze środków przeznaczonych na produkcję ziemniaków, buraków cukrowych i rzepaku. Kwotę tę powinien tak rozdzielić w poszczególnych latach tego 3-letniego okresu pomiędzy wymienione 3 uprawy, aby łączny przyrost dochodu brutto z całej produkcji na koniec okresu był maksymalny.

*

Dla ułatwienia zrozumienia wywodów wprowadzono następujące oznaczenia:

K_j — ilość środków pieniężnych na początku $j=1,2,3$ roku
x_{1j} — „ „ „ przydzielona produkcji ziemniaków
x_{2j} — „ „ „ „ „ buraków
x_{3j} — „ „ „ „ „ rzepaku
w $j=1,2,3$ roku

Rozdział środków pieniężnych na początku j-tego roku można wyrazić

$$K_j = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} \quad j=1,2,3 \tag{8}$$

Zgodnie z (6) ilość środków pieniężnych wyniesie:

$$\begin{aligned} &\text{na początku 2 roku} \quad K_2 = 1{,}056x_{11} + 1{,}082x_{21} + 1{,}070x_{31} \\ &\text{„ „ 3 „} \quad K_3 = 1{,}056x_{12} + 1{,}082x_{22} + 1{,}070x_{32} \end{aligned} \tag{9}$$

Zestawiając razem będziemy mieli:

na początku 1 roku
ilość środków pieniężnych K_1
rozdział środków $K_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$

na początku 2 roku
ilość środków pieniężnych $K_2 = 1{,}056x_{11} + 1{,}082x_{21} + 1{,}070x_{31}$
rozdział środków $K_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32}$

na początku 3 roku
ilość środków pieniężnych $K_3 = 1{,}056x_{12} + 1{,}082x_{22} + 1{,}070x_{32}$
rozdział środków $K_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33}$

Przy powyższych określeniach funkcją kryterium będzie funkcja wyrażająca łączny przyrost dochodu brutto danej produkcji w całym okresie 3 letnim, którą to funkcję oznaczamy przez D_{123}.
Należy wyznaczyć optymalne rozwiązanie dające maksimum wartości D_{123} przy uwzględnieniu optymalnych rozwiązań w poszczególnych latach całego okresu 3-letniego.

Zgodnie ze specyfiką programowania dynamicznego, o której wspomniano na początku, optymalizację przyrostu brutto zaczyna się od ostatniego tj. 3 roku.
Przyrost ten oznaczono przez D_3 i na podstawie 7_1 wynosi

$$D_3 = 0,\ 58x_{13} + 0{,}822x_{23} + 0{,}702x_{33} \tag{10}$$

Należy dobrać tak wielkości środków pieniężnych x_{13}, x_{23} X_{33}, aby uzyskać maksimum funkcji (10).

Do funkcji kryterium (10) należą warunki ograniczające, wynikające z rozdziału środków pomiędzy uprawy. Ilość środków pieniężnych na każdą uprawę nie może przekroczyć 10 tys. zł, wobec tego na początku 3 roku określone zostają następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
x_{13}+x_{23}+x_{33} &\leqslant K_3 \leqslant 30{,}0 \\
x_{13} \qquad\qquad &\leqslant 10{,}0 \\
x_{23} \qquad &\leqslant 10{,}0 \\
x_{33} &\leqslant 10{,}0
\end{aligned} \tag{11}
$$

Optymalny rozdział środków K_3 w 3 roku pomiędzy produkcję trzech upraw przynoszący maksymalny przyrost dochodu brutto uzyska się rozwiązując program matematyczny składający się z funkcji kryterium (10) przy warunkach ograniczających (11).

Program ten jest liniowy i został rozwiązany metodą simpleks przy uwzględnieniu programowania parametrycznego, w którym zmiennym parametrem jest wielkość K_3 ograniczona od góry kwotą 30 tys. zł. Metoda parametrycznego programowania liniowego została dokładniej omówiona w innych[3] pracach autora. Optymalne rozwiązanie programu (10) i (11) przedstawione jest w tabeli 1.

Tabela 1

Optymalny rozdział środków pieniężnych K_3 w 3 roku pomiędzy produkcję ziemniaków buraków cukrowych i rzepaku

	$K_3 \leqslant$	10 tys. zł	$\leqslant K_3 \leqslant$	20 tys. zł	$\leqslant K_3 \leqslant$	30 tys. zł
x_{23}	K_3	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
x_{33}			$K_3-10{,}0$	10,0	10,0	10,0
x_{13}					$K_3-20{,}0$	10,0
D_3^m	$0{,}822K_3$	8,22	$0{,}702K_3+1{,}20$	15,24	$0{,}558K_3+4{,}08$	20,82

Z tabeli 1 można odczytać, że środki pieniężne K_3 do wysokości 10 tys. zł należy skierować w 3 roku całkowicie do produkcji buraków cukrowych, która przyniesie maksymalny przyrost dochodu brutto, oznaczony przez D_3^m w ilości 0,822 K_3 tys. zł. Jeżeli kwota środków K_3 będzie większa od 10 tys. zł, to owe 10 tys. zł należy przeznaczyć na produkcję buraków, resztę zaś na produkcję rzepaku. Odpowiedni przyrost dochodu brutto z produkcji wynosi $D_3^m =$ 0,702 K_3+1,20. Jeżeli suma środków pieniężnych mieści się w granicach od 20 do 30 tys. zł, to po 10 tys. zł otrzymuje produkcja buraków cukrowych i rzepaku, resztę zaś produkcja ziemniaków, która, jak z tego wynika, jest najmniej dochodowa. Ogólny maksymalny przyrost dochodu brutto z łącznej produkcji wynosi: $D_3^m =$ 0,558 K_3+4,08.

*

[3] A. Skwarczyński, *O zastosowaniu parametrycznego programowania liniowego,* cz. 1, Przegląd Statystyczny 1964, z. 3; cz. 2, Przegląd Statystyczny 1965, z. 3.

Optymalizacja w okresie 2 i 3 roku. Po wyznaczeniu warunków optymalnego rozwiązania w ostatnim 3 roku planowanego okresu należy, zgodnie z zasadą programowania dynamicznego, cofnąć się do roku poprzedniego i wyznaczyć warunki optymalizacji okresu dwuletniego. Optymalizacja ta musi uwzględniać optymalizację trzeciego roku, przedstawioną w tabeli 1. Przyrost dochodu brutto z łącznej produkcji w okresie drugiego i trzeciego roku, oznaczony przez D_{23}, składać się będzie z przyrostu dochodu w drugim roku oraz optymalnego przyrostu dochodu w roku trzecim. Uwzględniając więc 7_1 otrzymuje się:

$$D_{23}=0{,}558x_{12}+0{,}822x_{22}+0{,}702x_{32}+D_3^m \tag{12}$$

Jak już omówiono powyżej przyrost dochodu D_3^m zależy od ilości środków pieniężnych K_3 na początku trzeciego roku, dlatego też funkcję D_{23} według (12) należy rozważyć dla poszczególnych przedziałów K_3 przedstawionych w tabeli 1. Dla przejrzystości tok rozumowania zostanie przedstawiony tylko dla pierwszego przedziału tj. dla $0 \leq K_3 \leq 10{,}0$. Dla pozostałych przedziałów K_3 rachunek będzie podobny i dlatego ograniczono się do podania ostatecznych wyników.

Dla wymienionego pierwszego przedziału funkcja (12) przyjmie postać:

$$D_{23}=0{,}5\ 8x_{12}+0{,}822x_{22}+0{,}702x_{32}+0{,}822K_3 \tag{13}$$

Zgodnie z warunkiem (9) ilość środków pieniężnych na początku trzeciego roku wynosi:

$$K_3=1{,}0\ 6x_{12}+1{,}082x_{22}+1{,}070x_{32}. \tag{14}$$

Po wstawieniu (14) do (13) i wyliczeniu, otrzymuje się funkcję przyrostu dochodu brutto z produkcji łącznej w okresie drugiego i trzeciego roku w postaci:

$$D_{23}=1{,}426x_{12}+1{,}711x_{22}+1{,}582x_{32}. \tag{15}$$

Warunki ograniczające wynikają z ustalonych limitów, wyrażone w następującej postaci:

rozważane środki pieniężne w 3 roku $K_3 \leq 10{,}0$, w 2 roku $K_2 \leq 30{,}0$, nakłady pieniężne na poszczególną produkcję $x_{ij} \leq 10{,}0$. Uwzględniając (14) oraz podział K_2 w drugim roku zgodnie z (9) uzyskuje się warunki ograniczające w postaci:

$$\begin{array}{llll}
1{,}056x_{12}= & 1{,}082x_{22}+ & 1{,}070x_{32} & \leqslant 10{,}0 \\
x_{12}+ & x_{22}+ & x_{32} & \leqslant K_2 \\
x_{12} & & & \leqslant 10{,}0 \\
 & x_{22} & & \leqslant 10{,}0 \\
 & & x_{32} & \leqslant 10{,}0
\end{array} \tag{16}$$

Otrzymuje się w ten sposób program liniowy (15) i (16) rozwiązany metodą simpleks. Zupełnie podobnie ustawia się program liniowy dla przyrostu dochodu brutto w okresie 2 i 3 roku dla pozostałych przedziałów K_3 według tabeli 1.

Wyliczone w ten sposób optymalne rozwiązania dla okresu złożonego z drugiego i trzeciego roku zestawione są w tabeli 2.

Tabela 2

Optymalny rozdział środków pieniężnych K_2 w okresie 2 i 3 roku pomiędzy produkcję ziemniaków, buraków cukrowych i rzepaku

	$K_2 \leqslant$	9,242	$\leqslant K_2 \leqslant$	10,0	$\leqslant K_2 \leqslant$	18,58
x_{22}	K_2	9,242	K_2	10,0	10,0	10,0
x_{32}					$K_2-10,0$	8,58
x_{12}						
D^m_{23}	$1,711K_2$	15,82	$1,582K_2+1,20$	17,02	$1,453K_2+2,49$	29,50

c. d. tab. 2

	$\leqslant K_2 \leqslant$	20,0	$\leqslant K_2$	28,03
x_{22}	10,0	10,0	10,0	10,0
x_{32}	$K_2-10,0$	10,0	10,0	10,0
x_{12}			$K_2-20,0$	8,03
D^m_{23}	$1,299K_2+5,35$	31,32	$1,147K_2+8,38$	40,53

Jak widać z tabeli 2 warunki optymalizacji przyrostu dochodu brutto z produkcji za okres 2 i 3 roku zależą od ilości środków pieniężnych K_2 pozostających do dyspozycji na początku tegoż okresu w sposób następujący: środki pieniężne do 10 tys. zł przeznacza się całkowicie na produkcję buraków cukrowych z tym jednak, że środki te do wysokości 9.242 tys. zł dają maksymalny przyrost dochodu $D^m_{23} = 1,711K_2$, natomiast środki K_2 od 9,242 do 10 tys. zł dają już inny maksymalny przyrost dochodu $D^m_{23} = 1,582\ K_2 + 1,20$. Ze środków pieniężnych K_2 w granicach od 10 do 20 tys. zł część, tj. 10 tys. zł przeznacza się na produkcję buraków, resztę zaś na produkcję rzepaku. W granicach tych maksymalny przyrost dochodu brutto zmienia się również i wynosi:

dla 10,0 K_2 18,58 tys. zł $D^m_{23}=1,453K_2+2,49$
18,58 K_2 20,0 tys. zł $D^m_{23}=1,299K_2+5,35$

Środki pieniężne K_2 w ilości od 20,0 do 28,03 tys. zł rozdzielone są na produkcję buraków i rzepaku po 10,0 tys. zł, reszta przeznaczona jest na uprawę ziemniaków. Maksymalny przyrost dochodu z łącznej produkcji w tym przedziale wynosi $D^m_{23} = 1,147K_2 + 8,38$.

O p t y m a l i z a c j a w c a ł y m o k r e s i e t r z y l e t n i m. Łączny przyrost dochodu brutto z produkcji w całym okresie trzyletnim D_{123} składa się z przyrostu dochodu w pierwszym roku oraz optymalnego przyrostu dochodu w rozważanym uprzednio okresie drugiego i trzeciego roku. Można więc przyrost tego dochodu przedstawić jako funkcję:

$$D_{123} = 0{,}558x_{11} + 0{,}822x_{21} + 0{,}702x_{31} + D^m_{23} \tag{17}$$

Należy więc wyznaczyć maksimum funkcji (17) przy odpowiednich warunkach ograniczających. Ponieważ, zgodnie z tabelą 2, przyrost dochodu D_{23} zmienia się w zależności od 5 przedziałów, należy ustawić i rozwiązać 5 programów liniowych z odpowiednimi ograniczeniami dla K_2, K_1 oraz x_{ij}. Ustawienie tych programów, nie nastręczających większych trudności, zostało pominięte i przedstawione ostateczne rozwiązanie optymalne dla całego okresu trzyletniego w tabeli 3.

Tabela 3

Optymalny rozdział środków pieniężnych K_1 w okresie 3 letnim pomiędzy produkcję ziemniaków, buraków cukrowych i rzepaku

	$K_1 \leqslant$	8,542	$\leqslant K_1 \leqslant$	9,242	$\leqslant K_1 \leqslant$	10,0	$\leqslant K_1 \leqslant$	17,252
x_{21}	K_1	8,542	K_1	9,242	K_1	10,0	10,0	10,0
x_{31}							$K_1-10{,}0$	7,252
x_{11}								
D^m_{123}	$2{,}673K_1$	22,84	$2{,}534K_1+1{,}20$	24,62	$2{,}394K_1+2{,}49$	26,43	$2{,}257K_1+3{,}86$	42,80

c. d. tab. 3

	$\leqslant K_1 \leqslant$	18,58	$\leqslant K_1 \leqslant$	20,0	$\leqslant K_1 \leqslant$	26,135
x_{21}	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
x_{31}	$K_1-10{,}0$	8,58	$K_1-10{,}0$	10,0	10,0	10,0
x_{11}					$K_1-20{,}0$	6,135
D^m_{123}	$2{,}092K_1+6{,}71$	45,58	$1{,}929K_1+9{,}72$	48,30	$1{,}769K_1+12{,}92$	59,15

Tabele 1, 2, 3 zestawiono razem w tabeli 4, która przedstawia optymalne przyrosty dochodu brutto z produkcji chronologicznie tj. za okres jednego roku, dwóch lat i całego okresu trzyletniego. Tabela ta pokazuje również przedziały środków pieniężnych K_2 na początku drugiego roku oraz K_3 na początku trzeciego roku w zależności od początkowych środków K_1. Tabelę 4 przedstawiono graficznie na ryc. 1.

U w a g i k o ń c o w e. Zarówno rozważania wstępne jak i uzyskane konkretne wyniki z przeprowadzonych badań empirycznych potwierdzają postawioną na początku tezę, że programowanie dynamiczne daje wszechstronniejsze narzędzie kierowania produkcją. W omawianym konkretnym problemie programowanie dynamiczne pozwoliło określić:

1. optymalny rozdział środków pieniężnych pomiędzy poszczególne gałęzie produkcji w kolejnych latach,

2. optymalny przyrost dochodu brutto z łącznej produkcji w poszczególnych latach i całego okresu trzyletniego.

3. zależność wielkości przyrostu dochodu z produkcji od ilości środków pieniężnych w danym roku oraz całym trzyletnim okresie.

Ponieważ Ggólna ilość środków pieniężnych na wszystkie wymienione 3 uprawy została ograniczona do 30 tys. zł, licząc maksymalnie po 10 tys. zł na każdą uprawę, przeto z tabeli 3 widać, że maksymalna suma środków pieniężnych K_I na początku okresu trzyletniego nie może przekroczyć kwoty 26,135 tys. zł. Kwota ta daje na początku trzeciego roku środki w ilości 30 tys. zł, przynoszące w końcu całego okresu maksymalny przyrost dochodu D^m_{123} = 59,15 tys. zł.

Na ryc. 1 przedstawiono graficznie zależność optymalnego przyrostu dochodu brutto od początkowej wielkości środków pieniężnych K_I za poszczególne okresy tj. za pierwszy rok, okres dwóch pierwszych lat i cały okres trzyletni. Widać z wykresu, że przyrosty są funkcjami liniowymi o zmniejszającym się przyroście krańcowym. Tabela 3 przedstawia po-

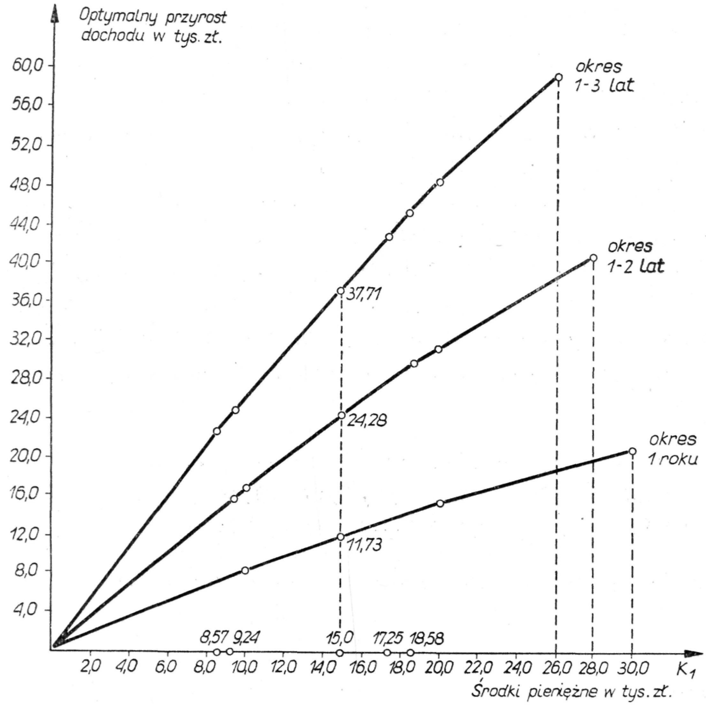
Tabela 4

Optymalny przyrost dochodu brutto z łącznej produkcji buraków cukrowych, rzepaku i ziemniaków w zależności od nakładów środków pieniężnych za okresy jednego roku, dwóch lat i całego okresu trzyletniego

okres 1 roku	$0\leqslant K_3\leqslant$	10,0	$\leqslant K_3\leqslant$					20,0
D^m_3	$0{,}822K_3$	8,22	$0{,}702K_3+1{,}20$					15,24
okres 2 lat	$0\leqslant K_3\leqslant$	9,242	$\leqslant K_2\leqslant$	10,0	$\leqslant K_2\leqslant$			18,58
D^m_{23}	$1{,}711K_2$	15,82	$1{,}582K_2+1{,}20$	17,02	$1{,}453K_2+2{,}49$			29,50
okres 3 lat	$0\leqslant K_1\leqslant$	8,542	$\leqslant K_1\leqslant$	9,242	$\leqslant K_1\leqslant$	10,0	$\leqslant K_1\leqslant$	17,252
D^m_{123}	$2{,}673K_1$	22,84	$2{,}534K_1+1{,}20$	24,62	$2{,}394K_1+2{,}49$	26,43	$2{,}257K_1+3{,}86$	42,80

c. d. tab. 4

okres 1 roku	20,0	$\leqslant K_3\leqslant$					30,0
D^m_1	15,24	$0{,}558K_3+4{,}08$					20,82
okres 2 lat	18,58	$\leqslant K_2\leqslant$	20,0	$\leqslant K_2\leqslant$			28,03
D^m_{23}	29,50	$1{,}299K_2+5{,}35$	31,32	$1{,}147K_2+8{,}38$			40,53
okres 3 lat	17,252	$\leqslant K_1\leqslant$	18,58	$\leqslant K_1\leqslant$	20,0	$\leqslant K_1\leqslant$	26,135
D^m_{123}	42,80	$2{,}092K_1+6{,}71$	45,58	$1{,}929K_1+9{,}72$	48,30	$1{,}769K_1+12{,}92$	59,15



Ryc. 1. Zależność optymalnego przyrostu dochodu brutto z łącznej produkcji od ilości środków pieniężnych K_I za poszczególne okresy

szczególne przedziały zmienności wyjściowych środków pieniężnych K_I, od których zależy optymalna wielkość przyrostu dochodu, a mianowicie:

1. Środki K_I do 8,542 tys. zł należy całkowicie przeznaczyć na produkcję buraków cukrowych; przyrost dochodu $D^m_{123} = 2{,}673K_I$. Kwota 8,542 tys. zł daje w trzecim roku środki pieniężne w ilości 10 tys. zł(ryc. 1)

2. Środki K_I w granicach od 8,542 do 9,242 tys. zł przeznaczone są na produkcję buraków cukrowych; przyrost dochodu $D^m_{123} = 2{,}534K_I + 1{,}20$. Kwota 9,242 tys. zł daje już na początku drugiego roku środki w ilości 10 tys. zł.

3. Środki K_I w granicach od 9,242 do 10 tys. zł przeznaczone są w dalszym ciągu na produkcję buraków; maksymalny przyrost dochodu $D^m_{123} = 2{,}394K_I + 2{,}49$.

4. Środki K_I w zakresie od 10 do 17,252 tys. zł; 10 tys. zł przeznacza się na produkcję buraków, resztę zaś na produkcję rzepaku. Przyrost optymalny dochodu wynosi $D^m_{123} = 2{,}257K_I + 3{,}86$. Kwota 17,252 tys. zł daje w trzecim roku środki pieniężne w ilości 20 tys. zł.

5. Środki K_I w zakresie od 17,252 do 18,58 tys. zł rozdział na produkcję podobnie jak w punkcie 4. Przyrost dochodu $D1^m_{23} = 2{,}092K_I +$ $+ 6{,}71$. Kwota 18,58 tys. zł daje już w drugim roku środki w ilości 20 tys. zł.

6. Środki K_I od 18,58 do 20 tys. zł rozdzielone są podobnie jak w punkcie 4. Optymalny przyrost dochodu $D^m_{123}=1,929K_I+9,72$.

7. Środki K_I od 20,0 do 26,135 tys. zł rozdzielone są po 10 tys. zł na produkcję buraków i rzepaku, reszta zaś na produkcję ziemniaków. Maksymalny przyrost dochodu brutto wynosi $D^m_{123}=1,769K_I+12,92$. Środki pieniężne K_I w ilości 26,135 tys. zł dają w trzecim roku działalności kwotę 30 tys. zł, która zostaje rozdzielona równo po 10 tys. zł na każdą z upraw. Przynosi ona maksymalny przyrost dochodu $D^m_{123}=59,15$ tys. zł.

Tabela 4 pozwala obliczyć przyrost dochodu z łącznej produkcji dla jakiejkolwiek kwoty wyjściowej środków pieniężnych K_I. Dla przykładu niech $K_I=15$ tys. zł. Odpowiedni przyrost dochodu wyliczony z tabeli 4 wynosi:

za okres 1 roku $D^m_3=0,702.15,0+1,2=11,73$ tys. zł
„ „ 2 lat $D^m_{23}=1,453\cdot15,0+2,49=24,28$ „ „
„ „ 3 lat $D^m_{123}=2,257\cdot15,0+3,86=37,71$ „ „

Te same ilości przyrostu dochodu można bezpośrednio odczytać z wykresu 1.

*

Na podstawie powyższych wyników łatwo zauważyć, że programowanie dynamiczne nie tylko pozwoliło na stworzenie pewnego modelu ekonomiczno-matematycznego jako ilościowej formy opisu nader złożonej rzeczywistości gospodarczej w rolnictwie, lecz uzyskano coś więcej, mianowicie zastosowany sposób analizy zezwolił na przeprowadzenie pewnych rozważań związków przyczynowych formułujących proces masowy. Bez tego ujęcia byłaby niemożliwa tak wszechstronna interpretacja badanego problemu, a nasze wnioskowanie nie pozwoliłoby na głębsze i bardziej szczegółowe spojrzenie na właściwy wybór decyzji co do rodzaju i warunków produkcji rolniczej. Zastosowanie metod statystyczno-matematycznych pozwoliło na przeprowadzenie rachunku ekonomicznego tak istotnego i ważkiego środka dla oceny naszej działalności gospodarczej.

Na zakończenie należy podkreślić, że w pracy ograniczono się do przedstawienia raczej prostego modelu kierując się zasadą, by przy pomocy prostych narzędzi, łatwych i dostępnych ogółowi, prawidłowo rozważać problem merytoryczny.

THE APPLICATION OF DYNAMIC PROGRAMMING IN THE ALLOCATION OF RESOURCES IN AGRICULTURAL PRODUCTION

Summary

A State Agricultural Farm which, besides other agricultural products, grows potatoes, sugar beets and rape, gets at the beginning of the planned three-year period substantial financial credit for the three, agricultural products mentioned

above. A State Farm can add part of its income to the financial funds at the end of every year. A State Agricultural Farm wants to use its financial credit in the optimum way by dividing it relatively between the three agricultural products during the three connective years in order to get the total gross income from these products at the end of the planned year (three-year period).

This problem has been solved by mean of dynamic programming, taking also into consideration both linear and parametrical programming in which variable parameter is the amount of financial credit.