

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki

Halina Wiśniewska

Ortomorfizmy w F-kratach

Praca doktorska napisana
pod kierunkiem
dra hab. Marka Wójtowicza

Poznań 2014

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi,
Panu dr hab. Markowi Wójtowiczowi
za życzliwość, wszechstronną pomoc
oraz cenne wskazówki udzielone w trakcie
pisania pracy doktorskiej.

Spis treści

Wstęp	4
1 Podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze	8
1.1 F -przestrzenie i przestrzenie unormowane	8
1.2 Kraty liniowo-topologiczne, F -kraty i kraty Banacha	9
1.3 Operatory porządkowo ograniczone	18
1.4 Przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza	22
1.4.1 Własność σ -Fatou	28
1.5 Rozłączne rozdrobnienia ciągów elementów pewnych algebr Boole'a	30
2 Ortomorfizmy w kratach liniowych i F-kratach	38
2.1 Podstawowe własności ortomorfizmów	38
2.2 Klasyczne przykłady ortomorfizmów	46
2.3 Przykłady ortomorfizmów w oparciu o twierdzenie Wicksteada	48
2.4 Ortomorfizmy na kracie rzeczywistych funkcji całkowitych	51
3 Problem ortomorfizmów centralnych w F-kratach niebanachowskich	54
3.1 Wprowadzenie	54
3.2 Ogólne warunki wystarczające na istnienie ortomorfizmów niecentralnych na danej F -kracie	55
3.3 Ortomorfizmy w F -kratach zawierających izomorficzną kopię ω .	59
3.3.1 Twierdzenie Bessagi-Pełczyńskiego-Rolewicza i parametr $\delta(E)$	59
3.3.2 Ogólna charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$	60
3.3.3 Charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$ dla F -krat dyskretnych	64
3.3.4 Charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$ dla bezatomowych F -krat funkcyjnych	68
3.4 Ortomorfizmy w F -kratach niezawierających izomorficznej kopii ω	72

4	Ortomorfizmy w niebanachowskich F-kratach Musielaka-Orlicza	80
4.1	Ortomorfizmy w F -kratach Musielaka-Orlicza zawierających kopię ω	80
4.1.1	Przypadek ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza	80
4.1.2	Ortomorfizmy na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ dla miary μ bezatomowej	84
4.2	Ortomorfizmy w F -kratach Musielaka-Orlicza niezawierających kopii ω	89
4.2.1	Ogólne warunki wystarczające na istnienie i nieistnienie ortomorfizmów niecentralnych na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$	89
4.2.2	Przypadek ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza - warunek jednostajny (Δ_n)	98
4.2.3	Przykłady ciągów funkcji Orlicza spełniających jednostajny warunek (Δ_n)	104
5	Ortomorfizmy w F-kratach z quasi-jedynką	110
5.1	Wprowadzenie – problem nietrywialnych ortomorfizmów	110
5.2	Podstawowe własności F -krat z quasi-jedynką	111
5.3	Twierdzenia główne	114
5.3.1	Topologiczna pełność	116
5.3.2	Własności rozdzielania elementów ortogonalnych	120
	Bibliografia	122

Wstęp

Przedmiotem mojej rozprawy są ortomorfizmy, czyli endomorfizmy porządkowo ograniczone danej kraty archimedesowej E , które zachowują pasma. Zbiór wszystkich takich operatorów oznaczamy symbolem $Orth(E)$. Zatem $T \in Orth(E)$, jeśli $T(B) \subset B$, gdy B jest pasmem kraty E ; równoważnie warunek $|x| \wedge |y| = 0$, dla $x, y \in E$, implikuje $|Tx| \wedge |y| = 0$. Zbiór $Orth(E)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{L}_b(E)$ wszystkich porządkowo ograniczonych endomorfizmów kraty E . Okazuje się, że chociaż $\mathcal{L}_b(E)$ nie jest na ogół kratą liniową (z porządkiem punktowym), to przestrzeń $Orth(E)$ jest archimedesową kratą z działaniami punktowymi:

$$(T \wedge S)x = Tx \wedge Sx \text{ oraz } (T \vee S)x = Tx \vee Sx, \quad S, T \in Orth(E), \quad x \in E^+.$$

W szczególności, $T^\pm x = (Tx)^\pm$ oraz $|T|(x) = |Tx|$. Badanie struktury ortomorfizmów zapoczątkował w 1941 roku H. Nakano [38] i były one kontynuowane w latach 70-tych ubiegłego wieku (m.in. A. Bigard, I. E. Keimel [6], M. Meyer [35], A. W. Wickstead [51], S. Kutateladze [25]).

Na dobre kariery tych operatorów rozpoczęła się od artykułu W. A. J. Luxemburga i A. R. Schepa [32] opublikowanego w 1978 roku, w którym autorzy poddali głębokiej analizie klasyczne twierdzenie Radona-Nikodyma badając następujący problem:

Jeśli E, G są kratami liniowymi (np. Banacha), oraz jeśli $R : E \rightarrow G$ jest dodatnim operatorem, przy czym R ma pewną własność (P) , to czy tę samą (lub podobną) własność mają wszystkie elementy S przedziału porządkowego $[0, R]$?

Przykładowo, wiadomo, że

- jeśli kraty E, G są zupełne w sensie Dedekinda oraz R ma tzw. własność Maharam, to istnieje ortomorfizm $T \in Orth(E)$ taki, że $S = R \circ T$ ([32, Theorem 3.1]; por. [59, Theorem 145.2]);
- jeśli E, G są kratami archimedesowymi, przy czym G jest zupełna w sensie Dedekinda oraz R jest homomorfizmem, to istnieje ortomorfizm $T \in Orth(E)$ taki, że $S = T \circ R$ ([32, Theorem 4.3], S. Kutateladze [25]);

- jeśli E, G są kratami Banacha, to przy pewnych założeniach na te kraty każdy operator $S \in [0, R]$ można aproksymować kombinacjami operatorów postaci $T_1 \circ R \circ T_2$, gdzie $T_1 \in Orth(G)$, $T_2 \in Orth(E)$ [4, str. 254-263];
- jeśli E jest kratą Banacha oraz R jest zwartym endomorfizmem kraty E , to dla każdego $S \in [0, R]$ operator S^3 jest zwarty [4, Theorem 16.3].

Wyniki podobnego typu zostały uzyskane również dla przypadku, gdy S jest elementem pasma głównego $\{T\}^{dd} \subset \mathcal{L}_b(E, G)$ oraz G jest zupełna w sensie Dedekinda [32, Theorem 4.2]. Dalsze badania w tym kierunku prowadzili między innymi C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, G. Dods, D. H. Fremlin [4, str. 275-280] oraz S. Kutateladze [25] i W. Feldman [12] koncentrując się głównie na przypadku, gdy E jest kratą Banacha.

Badania ortomorfizmów w szerszym zakresie (tj. gdy o kracie E zakładamy tylko, że jest archimedesowa) prowadzili A. C. Zaanen, W. A. J. Luxemburg, A. Schep, C. Huijsmans oraz B. de Pagter (szkoła holenderska), Yu. Abramovich, A. V. Koldunov, A. I. Veksler, S. Kutateladze (szkoła radziecka) oraz A. W. Wickstead, M. Meyer, M. Duhoux.

Ważnym podzbiorem kraty $Orth(E)$ jest jej ideał $Z(E)$ generowany przez identyczność:

$$Z(E) = \{T \in Orth(E), \exists \lambda > 0 |T| \leq \lambda I_E\}.$$

Jednym z istotniejszych wyników dotyczących ortomorfizmów jest twierdzenie Luxemburga mówiące, że *jeśli E jest kratą Banacha, to zachodzi równość:*

$$Orth(E) = Z(E). \tag{1}$$

W przypadku, gdy E nie jest Banacha, inkluzja $Z(E) \subset Orth(E)$ może być ostra: tak jest np. gdy $E = \omega$ (krata wszystkich ciągów liczb rzeczywistych) lub $E = C(\mathbb{R})$ (krata wszystkich funkcji ciągłych na \mathbb{R}).

Należy podkreślić, że równość (1) znakomicie upraszcza teorię ortomorfizmów: w 1975 roku A. C. Zaanen [58] wykazał, że jeśli E jest kratą funkcyjną (tj. ideałem porządkowym kraty $L_0(\mu)$), to każdy element $T \in Z(E)$ jest postaci $Tx = u \cdot x$, gdzie $u \in L_\infty(\mu)$.

Stąd wynika, że problem równości (1) jest problemem najbardziej naturalnym, i w tym kierunku rozpoczęłam swoje badania naukowe. W postaci jawnej problem ten został postawiony w roku 2012 w artykule P. Meyera i E. Chila [8], opublikowanym w *Indagationes Mathematicae*.

Niniejsza rozprawa dotyczy przeniesienia głównych wyników teorii ortomorfizmów z przypadku, gdy E jest kratą Banacha na przypadek, gdy E jest F -kratą.

Jest jasne, że pewne wyniki powinny zachodzić z formalnie identycznymi dowodami, a innych nie da się przenieść bez dodatkowych założeń o F -kracie E . Rzeczywiście, w rozdziale piątym wykazuję, nie zmieniając prawie dowodów, że kraty Banacha i F -kraty z quasi-jedynką posiadają identyczne własności aproksymacyjne. Z kolei w rozdziałach

trzecim i czwartym, które są głównymi rozdziałami tej pracy, analizuję równość (1) podając warunki wystarczające dla F -kraty E na to, aby równość ta zachodziła (twierdzenie 3.18, 3.28), i nie zachodziła (twierdzenia 3.16, 4.21 oraz 4.27).

Praca jest podzielona na pięć rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera zbiór pojęć oraz znanych faktów, z których korzystam w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale drugim podaję szereg podstawowych przykładów ortomorfirmów w kratkach Banacha i F -kratach, przedstawionych po raz pierwszy w 1975 roku przez A. C. Zanana [58], a także wynikających z twierdzenia Wicksteada o rozszerzaniu ortomorfirmów (twierdzenie 2.25 oraz wniosek 2.26). W przykładzie 2.32 wyznaczam postać elementów $Orth(E_0)$, gdzie E_0 oznacza kratę (porządkowo izomorficzną z kratą) funkcji całkowitych reprezentowanych przez szeregi o współczynnikach rzeczywistych.

W rozdziale trzecim analizuję najpierw ogólny przypadek, gdy F -krata dyskretna E zawiera liniowo-topologiczną kopię kraty ω (twierdzenia 3.11, 3.12) i następnie (twierdzenie 3.13) dowodzę, że jeśli tak jest, to $Orth(E) \neq Z(E)$. W twierdzeniu 3.18 podaję warunek wystarczający - (\star) - na to, aby zachodziła równość (1).

W rozdziale czwartym stosuję wyniki rozdziału trzeciego do krat Musielaka-Orlicza. Podaję w nim kluczową charakteryzację (nie)zawierania przez takie kraty izomorficznej kopii F -kraty ω :

- jeśli $\Phi = (\varphi_n)$ jest ciągiem funkcji Orlicza, to ℓ^Φ nie zawiera kopii ω wtedy i tylko wtedy, gdy $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\infty) > 0$, gdzie $\varphi_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ (twierdzenie 4.2);
- jeśli przestrzeń miary (S, Σ, μ) jest bezatomowa oraz \mathcal{M} oznacza funkcję Musielaka-Orlicza na $R^+ \times S$, to $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera kopii ω wtedy i tylko wtedy, gdy $M_\infty = \infty$ μ -p.w. na S , gdzie $M_\infty(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} M(t, s)$.

Jeśli krata Musielaka-Orlicza nie zawiera kopii ω , to badanie dla niej relacji (1) można zredukować do badania jednakowej ciągłości pewnej rodziny funkcji wyznaczonej przez funkcję Musielaka-Orlicza (twierdzenie 4.15, wniosek 4.19).

Opierając się na przykładzie 4.5 kraty ℓ^{Φ_0} , gdzie Φ_0 oznacza ciąg wklęsłych funkcji Orlicza postaci $\varphi_n(t) = \sqrt[n]{t}$, w którym $Orth(\ell^{\Phi_0}) \neq Z(\ell^{\Phi_0})$ oraz ℓ^{Φ_0} nie zawiera izomorficznej kopii ω , wprowadzam w podrozdziale 4.2.2 jednostajny warunek (Δ_n) dla ciągu Φ i dowodzę (twierdzenie 4.26), że jeśli Φ spełnia ten warunek, to $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$. W przykładzie 4.43 wykazuję, że wspomniany wyżej warunek (\star) nie jest warunkiem koniecznym na to, aby zachodziła równość $Orth(E) = Z(E)$.

Rozdział piąty poświęcony jest strukturze odcinków porządkowych $[0, x]$, $x \in E^+$, gdy E jest F -kratą z quasi-jedynką e . Okazuje się, że każdy element $y \in [0, x]$ można aproksymować porządkowo-topologicznie elementami postaci Sx , gdzie $0 \leq S \in Z(E)$:

- $[0, x] = \overline{Z_+^1(E)(x)}$, gdzie $Z_+^1(E) = \{T \in Z(E), 0 \leq T \leq I_E\}$ oraz $Z_+^1(E)(x) = \{Tx, T \in Z_+^1(E)\}$ (twierdzenia 5.10 oraz 5.15);

- krata $Z(E)$ posiada tzw. mocną własność rozdzielania:

jeśli $x \wedge y = 0$, to istnieje ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z_+^1(E)$ taki, że $S_n y \uparrow y$ (zbieżność porządkowa i topologiczna) oraz $S_n x = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (twierdzenie 5.17).

W przypisach podaję komentarze oraz krótkie dowody faktów, które powinny być powszechnie znane, ale zazwyczaj są pomijane w dostępnej literaturze jako 'oczywiste', albo 'intuicyjnie jasne'.

Rozdział 1

Podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze

1.1 F -przestrzenie i przestrzenie unormowane

Cytowane w tym podrozdziale definicje i twierdzenia pochodzą z monografii A. Alexiewicza [2], S. Rolewicza [41] oraz J. Lindenstraussa i L. Tzafririego [28], [29] .

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} liczb rzeczywistych.

Definicja 1.1 [19, str. 3] F -**normą** na przestrzeni liniowej X , nazywamy funkcję $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$ spełniającą następujące warunki:

- (i) $\|x\|_X = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\|_X \leq \|x\|_X$ dla każdego $x \in X$ oraz $|\alpha| \leq 1$ (w szczególności, $\|-x\|_X = \|x\|_X$),
- (iii) $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\|_X = 0$ dla każdego $x \in X$,
- (iv) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$, dla każdych $x, y \in X$.

Z aksjomatów (i), (ii) oraz (iv) wynika, że funkcja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ postaci $d(x, y) = \|x - y\|_X$ jest metryką niezmienniczą (ze względu na przesunięcia) na X wyznaczającą pewną metryzowalną topologię τ na przestrzeni X ([19, str. 2-3]).

Z warunku (ii) wynika, że F -norma $\|\cdot\|_X$ jest **monotoniczna**, tj. jeśli $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ oraz $|s_1| \leq |s_2|$, to dla każdego $x \in X$ mamy $\|s_1 x\|_X \leq \|s_2 x\|_X$.

F -normę $\|\cdot\|_X$ na X nazywamy **normą**, jeżeli spełnia warunki (i),(iv), a warunek (ii) zastąpimy warunkiem:

$$(v) \|tx\|_X = |t| \cdot \|x\|_X.$$

Jeśli posługujemy się jedną ustaloną F -normą na X , to zamiast $\|\cdot\|_X$ będziemy pisać $\|\cdot\|$.

F^* -przestrzeń definiujemy jako parę $(X, \|\cdot\|_X)$ rozumiejąc, że na X wprowadzamy topologię generowaną przez metrykę $(x, y) \mapsto \|x - y\|_X$; jeśli X jest zupełna w tej metryce, to nazywamy ją przestrzenią Frécheta lub krótko, F -przestrzenią.

Przestrzeń unormowaną i zupełną nazywamy **przestrzenią Banacha**.

Niech X będzie F^* -przestrzenią z F -normą $\|x\|_X$.

Typowym przykładem F -przestrzeni, która nie jest przestrzenią Banacha, jest przestrzeń $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ z F -normą określoną wzorem $\|x\|_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, gdzie $x = (x_n) \in \omega$. Dalsze przykłady F -przestrzeni będą podane w kolejnych rozdziałach tej pracy.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów F^* -przestrzeni X nazywamy absolutnie zbieżnym, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$.

Na to, aby F^* -przestrzeń X była zupełna, potrzeba i wystarcza, by każdy absolutnie zbieżny szereg jej elementów był zbieżny [2, Twierdzenie 1.2].

Zbiór $D \subset X$ w F^* -przestrzeni X nazywamy **ograniczonym**, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n x_n\|_X = 0$ dla dowolnych ciągów $(x_n) \subset D$ oraz $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ takich, że $\lambda_n \rightarrow 0$.

Niech $T : X \rightarrow Y$ będzie operatorem liniowym, gdzie X, Y są F^* -przestrzeniami.

Operator T jest ciągły w jednym punkcie (w szczególności - w zerze) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w każdym punkcie [2, Twierdzenie 2.1] wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca każdy zbiór ograniczony w zbiór ograniczony [2, Twierdzenie 2.2].

Mówimy, że przestrzenie X, Y są **izomorficzne**, jeśli istnieje liniowy, ciągły i różnowartościowy operator T odwzorowujący X na Y .

Definicja 1.2 Rodzinę $\{f_\xi\}_{\xi \in A}$ funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $[a, b]$ nazywamy **jednakowo ciągłą** (odp., w punkcie $x_0 \in [a, b]$), jeśli

$$\sup_{\xi \in A} |f_\xi(t) - f_\xi(s)| \rightarrow 0, \text{ przy } t - s \rightarrow 0$$

(odp., $\sup_{\xi \in A} |f_\xi(t) - f_\xi(x_0)| \rightarrow 0, \text{ przy } t \rightarrow x_0$).

1.2 Kraty liniowo-topologiczne, F -kraty i kraty Banacha

Cytowane w tym podrozdziale definicje i twierdzenia pochodzą z monografii C. Aliprantisa i O. Burkinshawa [4], W.A.J. Luxemburga i A. C. Zaanena [33] oraz P. Meyera-Nieberga [39].

Niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} i niech " \leq " oznacza relację częściowego porządku w E . Parę (E, \leq) nazywamy **kratą liniową (przestrzenią Riesz)**, jeśli relacja " \leq " jest zgodna z algebraiczną strukturą E , tj.

- (1) dla dowolnych elementów $x, y, z \in E$ warunek $x \leq y$ implikuje nierówność $x+z \leq y+z$,
- (2) dla każdego $x \in E$ i każdego $r \in \mathbb{R}$ takich, że $x \geq 0$ i $r \geq 0$ mamy $r \cdot x \geq 0$,

oraz każdy zbiór $\{x, y\} \subset E$ posiada kres górny (patrz niżej) $\sup\{x, y\} = x \vee y$. Istnienie $\sup\{x, y\}$ oznacza istnienie $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, gdyż $\inf\{x, y\} = -\sup\{-x, -y\}$. Zazwyczaj piszemy krótko E zamiast (E, \leq) .

Zapis $x < y$ oznacza koniunkcję warunków $x \leq y$ oraz $x \neq y$.

Niech $E = (E, \leq)$ będzie kratą liniową.

Stosujemy następujące oznaczenia:

Jeśli $x \in E$, to elementy:

$x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x^+ \vee x^-$ nazywamy, odpowiednio, **częścią dodatnią**, **częścią ujemną i modułem elementu x** .

Element $x \in E$ nazywamy dodatnim, jeżeli $0 \leq x$. Zbiór wszystkich elementów dodatnich kraty E oznaczamy symbolem E^+ .

Jeżeli $x, y, z \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$x = x^- - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad |\alpha x| = |\alpha||x|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Elementy $x, y \in E$ nazywamy **ortogonalnymi** (lub rozłącznymi), jeśli

$$|x| \wedge |y| = 0.$$

Piszemy wówczas $x \perp y$. Dla dowolnego $x \in E$ mamy $x^+ \perp x^-$.

Zbiory $A, B \subset E$ nazywamy **ortogonalnymi**, jeżeli warunek $x \perp y$ jest spełniony dla każdego $x \in A$, $y \in B$. Piszemy wówczas $A \perp B$.

Niech A będzie *niepustym* podzbiorem kraty liniowej E . **Dopełnieniem ortogonalnym** (rozłącznym dopełnieniem) **zbioru A** nazywamy zbiór

$$A^d = \{x \in E : x \perp a \text{ dla wszystkich } a \in A\}.$$

Zamiast $(A^d)^d$ piszemy A^{dd} ; symbol a^d oznacza zbiór $\{a\}^d$. Mamy $A \subset A^{dd}$, oraz warunek $A \subset B$ implikuje inkluzję $B^d \subset A^d$.

Kresem górnym zbioru $A \subset E$ (jeśli istnieje) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A w kracie liniowej E . Kres górny zbioru A oznaczamy symbolem $\sup A$.

Kresem dolnym zbioru $A \subset E$ (jeśli istnieje) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A w kracie liniowej E . Kres dolny zbioru A oznaczamy symbolem $\inf A$.

Kratę E nazywamy **archimedesową**, jeśli dla każdego $u \in E^+$ warunek

$$u \geq n \cdot a \geq 0, \text{ gdzie } a \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots \text{ implikuje } a = 0.$$

Zbiór częściowo uporządkowany A przez relację \leq nazywamy **skierowanym** [23, Def. 2, str. 92], jeśli dla każdej pary x, y jego elementów istnieje element $z \in A$ taki, że $x \leq z$ oraz $y \leq z$. Przykładem może być rodzina $\mathcal{A} = 2^T$ z częściowym porządkiem jako inkluzją.

Niech $A = (A, \leq)$ będzie zbiorem skierowanym. Dowolną funkcję $A \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in E$ nazywamy ciągiem uogólnionym i oznaczamy symbolem $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ciąg uogólniony $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ w kracie E jest **malejący** - co oznaczamy $x_\alpha \downarrow$ (**rosnący** - co oznaczamy $x_\alpha \uparrow$), jeżeli dla $\alpha_1 \leq \alpha_2$ mamy $x_{\alpha_1} \geq x_{\alpha_2}$ (*odp.*, $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$).

Z kolei zapis $x_\alpha \downarrow x$ oznacza, że $x_\alpha \downarrow$ oraz $\inf\{x_\alpha : \alpha \in A\} = x$.

Uwaga 1.3 Luxemburg i Zaanen [33, Definition 15.7] posługują się pojęciem zbioru skierowanego w kracie liniowej E nie wymagając, aby zbiór ten był indeksowany zbiorem skie-

rowanym: podzbiór $\{x_t, t \in T\}$ kraty liniowej E nazywamy skierowanym w górę ($x_t \uparrow$), jeśli dla dowolnej pary $t_1, t_2 \in T$ istnieje element $t_3 \in T$ taki, że $x_{t_3} \geq x_{t_1}$ oraz $x_{t_3} \geq x_{t_2}$. Podobnie definiowany jest zbiór skierowany w dół.

Ciąg uogólniony $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ w kratce E jest **porządkowo zbieżny** (**zbieżny w sensie porządku**) do elementu x , co oznaczamy $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieje ciąg uogólniony $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ w E taki, że $y_\alpha \downarrow 0$ oraz $|x - x_\alpha| \leq y_\alpha$ dla wszystkich $\alpha \in A$. Element x nazywamy wtedy **granicą porządkową** (granicą w sensie porządku) ciągu uogólnionego $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

W szczególności, ciąg (x_n) w kratce E jest **porządkowo zbieżny** do elementu x , co oznaczamy $x_n \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieje ciąg $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w E taki, że $y_n \downarrow 0$ oraz $|x - x_n| \leq y_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $x, y \in E$ oraz $x \leq y$, to symbolem $[x, y]$ oznaczamy przedział porządkowy o końcach x, y , tj. $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$.

Podzbiór $A \subset E$ kraty E nazywamy **porządkowo ograniczonym**, jeżeli istnieją $x, y \in E$ takie, że $x \leq a \leq y$ dla każdego $a \in A$. Innymi słowy, istnieją $x, y \in E$ takie, że $A \subset [x, y]$.

Podzbiór S kraty E nazywamy **solidnym**, jeśli warunki $|u| \leq |v|$ oraz $v \in S$ implikują, że $u \in S$.

Liniową podprzestrzeń F kraty wektorowej E nazywamy:

- **podkratą**, jeśli warunek $x, y \in F$ implikuje $x \wedge y \in F$ (równoważnie, $x \vee y \in F$, lub $|x| \in F$),
- **ideałem**, jeśli F jest solidnym podzbiorem E ,
- **pasmem**, jeśli F jest ideałem w E takim, że jeśli $A \subset F$ oraz istnieje $\sup(A)$ w E , to $\sup(A) \in F$.

Każde pasmo jest ideałem w E , a każdy ideał jest podkratą E .

Podkratę G kraty liniowej E nazywamy **porządkowo gęstą** w E , jeżeli dla każdego $x \in E^+ \setminus \{0\}$ istnieje $y \in G \setminus \{0\}$ takie, że $0 \leq y \leq x$ (tj. dla każdego $x \in E^+ \setminus \{0\}$ spełniony jest warunek $(0, x] \cap G^+ \neq \emptyset$).

Najmniejszy (ze względu na inkluzję) ideał zawierający niepusty zbiór T nazywamy **ideałem generowanym przez T** i oznaczamy symbolem A_T . Mamy

$$A_T = \{x \in E : \exists_{x_1, \dots, x_n \in T, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|\}.$$

Jeżeli $T = \{x\}$, to $A_x = A_{\{x\}}$ nazywamy **ideałem głównym** generowanym przez x ; wtedy

$$A_x = \{y \in E : \exists_{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda |x|\}.$$

Pasmem generowanym przez niepusty podzbiór T kraty liniowej E nazywamy najmniejsze (w sensie inkluzji) pasmo B_T zawierające zbiór T .

Lemat 1.4 [33, Theorem 17.2 (ii), Theorem 22.3] *Niech J oznacza ideał kraty liniowej E oraz niech B_J oznacza pasmo w E generowane przez J .*

- (i) *Mamy: $0 \leq x \in B_J$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg skierowany $(v_\alpha) \subset J^+$ taki, że $v_\alpha \uparrow x$.*
- (ii) *Jeśli E jest kratą archimedesową, to $B_J = J^{dd}$; w szczególności, jeśli T jest niepustym podzbiorem E , to $B_T = (A_T)^{dd} = T^{dd}$.*

Jeżeli $T = \{x\}$, to piszemy B_x zamiast $B_{\{x\}}$; jest to **pasmo główne** generowane przez element x . Jeżeli krata E jest archimedesowa, to

$$B_x = x^{dd} = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|, n = 1, 2, \dots\}.$$

Zbiór wszystkich pasm $\mathcal{B}(E)$ w kratce archimedesowej E z operacjami $\vee, \wedge, ' '$ zdefiniowanymi niżej tworzy algebrę Boole'a [33, Theorem 22.7]:

$$\begin{aligned} B_1 \wedge B_2 &:= B_1 \cap B_2, \\ B_1 \vee B_2 &:= (B_1 \cup B_2)^{dd}, \\ B' &:= B^d. \end{aligned}$$

Element $e \in E^+$ nazywamy **jedynką porządkową** (lub **silną jedynką**, lub po prostu **jedynką**), jeżeli $A_e = E$.

Element $e \in E^+$ nazywamy **slabą jedynką porządkową**, jeżeli $e^{dd} = E$.

Element $0 < e \in E$ nazywamy:

- **dyskretnym**, jeśli ideał generowany przez e pokrywa się z podprzestrzenią generowaną przez e , tj. $A_e = \{\lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{e\}$.
- **atomem**, jeśli warunki $x \wedge y = 0$ oraz $x, y \in [0, e]$ implikują, że $x = 0$ lub $y = 0$.

Lemat 1.5 [33, Theorem 26.4 (iii)] *Jeśli E jest kratą archimedesową, to element $x \in E^+$ jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy jest elementem dyskretnym.*

Kratę E nazywamy **dyskretną**, jeżeli każdy element $0 < x \in E$ majoryzuje element dyskretny, tj. dla każdego $x \in E^+ \setminus \{0\}$ istnieje element dyskretny $y_x \in E^+$ taki, że $x \geq y_x$.

Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie w każdej kratce **maksymalnego układu ortogonalnego**, tj. rodziny $\{e_t, t \in T\} \subset E \setminus \{0\}$ o następujących własnościach:

- $e_{t_1} \wedge e_{t_2} = 0$ dla $t_1 \neq t_2$,
- jeśli $|x| \wedge e_t = 0$ dla wszystkich $t \in T$, to $x = 0$;

układ taki nazywamy **zupełnym**.

Dyskretność kraty E jest równoważna istnieniu w niej zupełnego układu ortogonalnego $\{e_t, t \in T\}$ złożonego z elementów dyskretnych e_t [3, str. 40].

Częścią dyskretną kraty E nazywamy pasmo

$$\{e \in E, e - \text{jest elementem dyskretnym}\}^{dd}.$$

Jeśli w kratce E istnieje jednoelementowy zupełny układ ortogonalny, to tworzący go element jest z definicji słabą jedynką w E .

Projekcję (rzutowanie) P w kratce E , (tj. liniowy endomorfizm przestrzeni E taki, że $P^2 = P$) nazywamy **porządkową**, jeśli spełnia warunek:

$$0 \leq P(x) \leq x \text{ dla wszystkich } x \in E^+.$$

Zbiór $\mathcal{P}(E)$ wszystkich projekcji porządkowych kraty liniowej E jest algebrą Boole'a z działaniami $\vee, \wedge, ^c$ zdefiniowanymi wzorami:

$$\begin{aligned} P_1 \wedge P_2 &= P_1 \circ P_2, \\ P_1 \vee P_2 &= P_1 + P_2 - P_1 \circ P_2 = P_1 + P_2 - P_1 \wedge P_2, \\ P^c &:= I - P. \end{aligned}$$

W szczególności, każde dwie projekcje porządkowe komutują:

$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1.$$

Pasmo B w kratce liniowej E nazywamy **projekcyjnym**, jeżeli $E = B + B^d$. Dla dowolnego pasma $B \subset E$ mamy $B \cap B^d = \{0\}$, oraz $B + B^d$ jest ideałem porządkowo gęstym w E .

Jeśli B jest pasmem projekcyjnym w E , to istnieje projekcja porządkowa $P_B : E \rightarrow B$ taka, że $B = P_B(E)$ oraz $B^d = P_B^c(E)$, gdzie $P_B^c = I - P_B$.

Projekcja P_B ma postać:

$$P_B(x) = \sup(B \cap [0, x]), \text{ dla } x \in E^+. \quad (1.1)$$

Mówimy, że krata E posiada **własność (PP)** (*projection property*), jeśli każde pasmo w tej kratce jest pasmem projekcyjnym.

Jeśli krata E posiada własność (PP), to algebry $\mathcal{B}(E)$ oraz $\mathcal{P}(E)$ są izomorficzne. Izomorfizm jest postaci $B \mapsto P_B$, dla każdego pasma $B \in \mathcal{B}(E)$.

Mówimy, że krata E posiada **własność projekcji głównej (PPP)** (*principal projection property*), jeśli każde pasmo główne w tej kratce jest pasmem projekcyjnym.

Kratę E nazywamy **σ -zupełną w sensie Dedekinda**, jeżeli każdy niepusty i ograniczony z góry *przeliczalny* podzbiór kraty E ma kres górny w E .

Jeśli krata E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, to dla każdego $x \in E$ zbiór x^{dd} jest pasmem projekcyjnym w E : istnieje projekcja porządkowa $P_x : E \rightarrow E$ taka, że $P_x(E) = x^{dd}$.

Projekcja P_x jest postaci:

$$P_x(y) = \sup_n \{y \wedge n|x| : n = 1, 2, \dots\} \text{ dla dowolnego } y \geq 0.$$

Jeśli krata E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, to algebra Bolle'a $\mathcal{P}(E)$ też jest σ -zupełna w sensie Dedekinda: dla każdego ciągu $(P_n) \subset \mathcal{P}(E)$ istnieje kres górny $\sup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ w $\mathcal{P}(E)$: dla każdego $x \geq 0$ mamy $(\sup_{n \in \mathbb{N}} P_n)x = \sup_{n \in \mathbb{N}} (P_n x)$.

Twierdzenie 1.6 (twierdzenie Freudenthala [4, Theorem 6.8, str. 82]) *Niech E będzie kratą archimedesową, oraz niech $\mathcal{P}(E)$ oznacza algebrę Boole'a projekcji porządkowych na E . Połóżmy $\mathcal{P}e = \{Pe : P \in \mathcal{P}(E)\}$. Jeśli krata E ma własność projekcji głównej (PPP) (w szczególności, gdy E jest kratą σ -zupelną w sensie Dedekinda), to dla każdego $x \in E^+$ krata $\text{lin}\mathcal{P}x$ jest porządkowo gęsta w paśmie głównym x^{dd} .*

Kratę E nazywamy **zupelną w sensie Dedekinda**, jeżeli każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór kraty E ma kres górny.

Jeśli krata E jest ideałem w przestrzeni $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, to E jest zupełna w sensie Dedekinda; wtedy każdy element $y \in E$ można interpretować jako funkcję działającą ze zbioru liczb naturalnych \mathbb{N} do \mathbb{R} , co pozwala zdefiniować nośnik $\text{supp}(y)$ elementu y wzorem:

$$\text{supp}(y) = \{n \in \mathbb{N} : y(n) = a_n \neq 0\},$$

gdzie $y = (a_n) \in E$ oraz ciąg (a_n) jest wyznaczony jednoznacznie.

Jeśli e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy, czyli $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, $n = 1, 2, \dots$, to nośnik elementu $y \in E$ można również przedstawić następująco:

$$\text{supp}(y) = \{n \in \mathbb{N} : |y| \geq \lambda e_n \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}; \quad (1.2)$$

tu $|y| = (|a_n|) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^m |a_n| e_n$, gdzie kres 'sup' jest brany w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (lub E).

Jeśli E jest kratą zupełną w sensie Dedekinda, to każde pasmo w E jest projekcyjne [39, Twierdzenie 1.2.9]. W tym przypadku algebra Boole'a $\mathcal{P}(E)$ jest zupełna i izomorficzna z $\mathcal{B}(E)$.

Własność przedstawioną w poniższym lemacie będziemy wielokrotnie wykorzystywać w dalszej części pracy.

Lemat 1.7 *Niech E będzie porządkowo gęstym ideałem kraty $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, oraz niech M będzie pasmem projekcyjnym w E . Wówczas istnieje dokładnie jeden podzbiór $K \subset \mathbb{N}$ taki, że*

$$M = \{x \in E, \text{supp } x \subset K\} = \chi_K \cdot E,$$

gdzie χ_K oznacza funkcję charakterystyczną zbioru K .

Dowód. Podaję dowód ogólniejszego faktu, z którego jednak nie korzystam w sposób jawny w mojej pracy. Niech E oznacza ideał archimedesowej kraty $G = \mathbb{R}^{\Gamma}$, gdzie Γ jest zbiorem nieskończonym, a M pasmo w E . Na podstawie lematu 1.4 (ii) mamy

$$M = M^{dd}, \quad (1.3)$$

gdzie H^d oznacza ortogonalne dopełnienie w E niepustego podzbioru H kraty E . Ponieważ M jest ideałem w E oraz E jest ideałem w G , to

$$M \text{ jest ideałem w } G. \quad (1.4)$$

Niech A^D oznacza dopełnienie ortogonalne w G niepustego podzbioru $A \subset G$. Wykażemy najpierw, że zachodzi równość

$$B = M^{DD} \cap E. \quad (1.5)$$

Mamy oczywistą inkluzję $M \subset M^{DD} \cap E$. Dowód inkluzji $M^{DD} \cap E \subset M$ jest następujący. Jeśli $0 \leq x \in M^{DD} \cap E$, to z własności (1.4) wynika, że istnieje ciąg uogólniony $(w_\alpha) \subset E$ taki, że $w_\alpha \uparrow x$ (patrz lemat (1.4), a ponieważ $x \in E$, to x jest elementem pasma M^{dd} w E (generowanego przez M (patrz lemat 1.4 (i)). Na podstawie równości (1.3) mamy $x \in M$. Z dowolności $x \geq 0$ oraz faktu, że M jest podkratą (bo ideałem) w E otrzymujemy żadaną inkluzję $M^{DD} \cap E \subset M$.

Pamiętając, że $G = \mathbb{R}^\Gamma$, połóżmy $K = \bigcup_{f \in M} \text{supp } f$ oraz

$$L(K) = \{g \in \mathbb{R}^\Gamma : \text{supp } g \subset K\}.$$

Przestrzeń $L(K)$ jest pasmem projekcyjnym w \mathbb{R}^Γ (obrazem projekcji porządkowej $P_K(x) = x \cdot \chi_K$, $x \in \mathbb{R}^\Gamma$), a jego rozłącznym dopełnieniem jest $L(K^c)$, gdzie $K^c = \Gamma \setminus K$. Zatem $(L(K))^D = L(K^c)$. Z definicji zbioru K otrzymujemy natychmiast inkluzję $(L(K))^D \subset M^D$. Z drugiej strony, jeśli $h \in M^D$, to $\text{supp } h \subset (\bigcup_{f \in M} \text{supp } f)^c = K^c$. Zatem $h \in L(K^c) = (L(K))^D$. Stąd otrzymujemy inkluzję $M^D \subset (L(K))^D$, a więc $M^D = (L(K))^D$. Stąd $M^{DD} = (L(K))^{DD} = L(K)$. Z ostatniej równości oraz (1.5) otrzymujemy $M = L(K) \cap E = \chi_K \cdot E$. ■

Kratę liniową E nazywamy *super zupełną w sensie Dedekinda* (super-DC), jeśli E jest zupełna w sensie Dedekinda oraz jeśli każdy niepusty podzbiór $D \subset E$ posiadający supremum w E zawiera co najwyżej *przeliczalny* podzbiór D_0 taki, że $\sup D_0 = \sup D$.

Topologię liniową Hausdorffa τ zadaną na kracie liniowej E nazywamy *lokalnie solidną*, jeśli w E istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów solidnych. Wówczas parę (E, τ) nazywamy *kratą lokalnie solidną*.

Kratę E z topologią lokalnie solidną τ nazywamy *kratą liniowo-topologiczną*.

F -normę $\|\cdot\|_E$ na przestrzeni Riesz E nazywamy *kratową*, jeśli warunek $|u| \leq |v|$ w E implikuje $\|u\|_E \leq \|v\|_E$.

Niech E będzie kratą liniową i τ topologią liniową na E . Wtedy następujące warunki są równoważne [3, Theorem 6.1]:

- (i) τ jest lokalnie wypukłą solidną topologią na E ,
- (ii) istnieje rodzina $\{p_\alpha\}$ kratowych pół-norm, która generuje topologię τ^1 .

Kratę E wyposażoną w F -normę kratową nazywamy *F^* -kratą* (lub *kratą unormowaną*, jeśli F -norma $\|\cdot\|_E$ jest normą). Topologicznie zupełną F^* -kratę nazywamy *F -kratą* (odpowiednio, kratą Banacha).

¹Zbiory postaci $V_{(p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}; \epsilon)} = \{x \in E : p_{\alpha_i}(x) \leq \epsilon, i = 1, 2, \dots, n, \epsilon > 0\}$ stanowią bazę otoczeń zera kraty E .

Monotoniczną F -normę $\|\cdot\|_E$ na F -kracie E nazywamy **porządkowo ciągłą** (σ -porządkowo ciągłą), jeśli warunek $x_\alpha \downarrow 0$ (tu $\alpha \in A$ oraz A jest zbiorem skierowanym) implikuje, że $\inf_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_E = 0$ (warunek $x_n \downarrow 0$ implikuje, że $\|x_n\|_E \downarrow 0$); oznacza to, że liczba 0 jest punktem skupienia zbioru $\{\|x_\alpha\|_E, \alpha \in A\}$.

Kratę Banacha $E = (E, \|\cdot\|)$ nazywamy: **AM-przestrzenią**, jeśli dla każdych $x, y \in E^+$ zachodzi równość $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$.

Krata Banacha E jest **AM-przestrzenią z jedyneką**, jeśli jest AM-przestrzenią i posiada jedynekę porządkową.

Jeśli E jest AM-przestrzenią z jedyneką e , to wzór

$$\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0; |x| \leq \lambda e\}$$

określa równoważną normę kratową w E ; wtedy krata E z nową normą $\|\cdot\|_\infty$ jest również AM-przestrzenią, a jej domknięta kula jednostkowa jest równa przedziałowi $[-e, e]$.

Twierdzenie 1.8 (*Kakutani [4, Theorem 12.28]*) *Krata Banacha jest AM-przestrzenią z jedyneką e wtedy i tylko wtedy, gdy jest kratowo-izometryczna z przestrzenią $C(K)$ wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na pewnej przestrzeni zwartej Hausdorffa K .*

Jeśli E jest AM-przestrzenią (bez jedynek), to jest ona kratowo izometrycznie izomorficzna z pewną podkratą kraty $C(K)$, gdzie K jest pewną przestrzenią zwartą Hausdorffa.

Przykład 1.9 Niech K będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa oraz niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą σ -skończoną i zupełną. Podstawowymi przykładami krat liniowych są:

- (1) krata $C(K)$ wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na K z porządkiem punktowym;
- (2) krata $C_b(K)$ wszystkich ciągłych i ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na K ; jest to podkrata kraty $C(K)$;
- (3) krata $\mathcal{L}_0(\mu)$ - wszystkich rzeczywistych μ -mierzalnych funkcji określonych na zbiorze S z działaniami punktowymi;
- (4) krata $L_0(\mu)$ - wszystkich klas abstrakcji elementów $\mathcal{L}_0(\mu)$ względem równości μ -prawie wszędzie; tu funkcje równe μ -prawie wszędzie identyfikujemy (innymi słowy $L_0(\mu)$ jest przestrzenią ilorazową $\mathcal{L}_0(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$, gdzie $\mathcal{N}(\mu)$ jest σ -ideałem kraty $\mathcal{L}_0(\mu)$ funkcji równych zero μ -prawie wszędzie, a elementy $L_0(\mu)$ są postaci $[f] = f + \mathcal{N}(\mu)$, gdzie $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$);
- (5) $L_\infty(S, \Sigma, \mu) = L_\infty(\mu)$ - ideał w $L_0(\mu)$ wszystkich ograniczonych funkcji rzeczywistych na S z operacjami punktowymi (funkcje równe μ -prawie wszędzie identyfikujemy);

- (6) ω - krata wszystkich ciągów liczb rzeczywistych: $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ z porządkiem po współrzędnych; podobnie $\omega(\Gamma) = \mathbb{R}^{\Gamma}$, tj. krata wszystkich funkcji z Γ do \mathbb{R} z porządkiem punktowym, gdzie Γ jest dowolnym zbiorem niepustym;
- (7) ℓ_{∞} - ideał w ω wszystkich rzeczywistych ciągów ograniczonych; podobnie, $\ell_{\infty}(\Gamma)$ - ideał w $\omega(\Gamma)$ wszystkich funkcji ograniczonych z Γ do \mathbb{R} z porządkiem punktowym;
- (8) $\ell^p = \{x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, gdzie $0 < p < \infty$, - ideał w ω wszystkich ciągów liczb rzeczywistych absolutnie p -sumowalnych.

Kraty wymienione w punktach (4) - (8) są zupełne w sensie Dedekinda, krata z punktu (3) jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, a jeśli K jest przestrzenią zwartą, to krata $C(K)$ jest zupełna w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy K jest przestrzenią Stone'a (ekstremalnie niespójną²) [33, Theorem 43.11].

Lemat 1.10 (a) Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary, przy czym miara μ jest σ -skończona i zupełna. Wtedy krata $L_0(\mu)$ jest super-DC.

(b) Własność super-DC kraty liniowej E jest dziedziczona przez jej ideały. W szczególności, każdy ideał kraty $L_0(\mu)$ jest super-DC.

Dowód. (a) Fakt, że krata $L_0(\mu)$ jest σ -zupełna w sensie Dedekinda jest niemal oczywisty³.

Na podstawie [45, Theorem 4.9 p. 78], wystarczy teraz wykazać, że istnieje ściśle rosnące odwzorowanie $k : L_0^+(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy najpierw, że miara μ jest skończona, tj. $\mu(S) < \infty$. Połóżmy $k(x) = \int_S \xi(x) d\mu$, gdzie $\xi(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$. Oczywiście $k(x) \leq \int_S 1 d\mu = \mu(S) < \infty$. Łatwo sprawdzić, że $\xi(y) - \xi(x) > 0$ dla $x < y$. Stąd $k(x) = \int_S \xi(x) d\mu < \int_S \xi(y) d\mu = k(y)$, więc funkcja k jest ściśle rosnąca na $L_0^+(\mu)$, a zatem krata $L_0(\mu)$ jest super-DC w przypadku, gdy $\mu(S) < \infty$.

Założmy teraz, że miara μ jest σ -skończona, tj. $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, gdzie $\mu(S_n) < \infty$ oraz $S_n \subset S_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Połóżmy

$$k_n(x) = \frac{1}{n^2 \mu(S_n)} \int_{S_n} \xi(x) d\mu \text{ oraz } k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x).$$

Jeśli $x < y$ dla $x, y \in L_0^+(\mu)$, to $k_n(x) < k_n(y)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x) < \sum_{n=1}^{\infty} k_n(y) = k(y)$, więc funkcja k jest ściśle rosnąca. Korzystając ponownie z twierdzenia [45, Theorem 4.9 p. 78] otrzymujemy, że $L_0(\mu)$ jest super zupełna w sensie Dedekinda.

²tzn. domknięcie każdego otwartego podzbioru K jest otwarte; przykładowo, uzwarcenie Čecha-Stone'a $\beta\mathbb{N}$ przestrzeni dyskretnej \mathbb{N} jest przestrzenią ekstremalnie niespójną [11, str. 445]

³Jeśli $[f_n] \leq [f]$, $n = 1, 2, \dots$, to dla zbioru $A = \{s \in S : f_n(s) > f(s), \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}$ mamy $\mu(A) = 0$. Definiując funkcję g postaci $g(s) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(s)$, gdy $s \in S \setminus A$ oraz $g(s) = 0$, gdy $s \in A$ otrzymujemy, że $g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ oraz $[g] = \sup_{n \in \mathbb{N}} [f_n]$.

(b) Jeśli $\emptyset \neq A \subset J$ oraz $a \leq x$ dla każdego $a \in A$ oraz pewnego $x \in J$, to relacje te zachodzą również w E , zatem istnieje przeliczalny podzbiór $A_0 \subset A$ taki, że $\sup A = \sup A_0 = y \in E$ (oba kresy są brane w E). Ponieważ jednak $y \leq x \in J$, to $y \in J$, co dowodzi że ideał J jest super-DC. ■

Topologię τ na kracie lokalnie solidnej E nazywamy topologią **Lebesgue'a**, jeśli warunek $0 \leq x_\alpha \downarrow 0$ w E implikuje, że $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. Mówimy wówczas, że krata (E, τ) ma własność Lebesgue'a.

Jeśli topologia normowa w kracie Banacha E jest topologią Lebesgue'a, to zwykle mówi się, że norma na E jest porządkowo ciągła.

Symbolem E_a będziemy oznaczać ideał Lebesgue'a kraty lokalnie solidnej (E, τ) , tj. największy porządkowy ideał w kracie E taki, że topologia $\tau|_{E_a}$ jest topologią Lebesgue'a [52]:

$$E_a = \{x \in E : |x| \geq x_\alpha \downarrow 0 \text{ implikuje } x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0\}.$$

Ideał E_a jest τ -domknięty w E (patrz [54, str. 60]).

Jeśli E jest F -kratą, to ideał E_a jest nazywany **ideałem elementów z F -normą porządkowo ciągłą** (por. [59, Definition 88.5]). Przykładowo, $(\ell_\infty)_a = c_0$.

Położmy

$$E_a^\sigma = \{x \in E : |x| \geq x_n \downarrow 0 \text{ implikuje } \|x_n\|_E \rightarrow 0\}.$$

Oczywiście, mamy $E_a \subset E_a^\sigma$ (por [59, Definition 88.5] zastosowana do operatora identycznościowego).

Bez zmiany dowodu można przenieść na przypadek F -krat następujący, użyteczny wynik zawarty w [59, Corollary 103.7]:

Lemat 1.11 *Niech E będzie F -kratą. Jeśli E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, to σ -porządkowa ciągłość elementu $x \in E$ implikuje jego porządkową ciągłość, tj. zachodzi inkluzja $E_a^\sigma \subset E_a$. W tym przypadku (tj., gdy E jest σ -porządkowo zupełna w sensie Dedekinda) mamy $E_a^\sigma = E_a$.*

1.3 Operatory porządkowo ograniczone

Niech E, G oznaczają archimedesowe kraty liniowe.

Ważną klasę operatorów liniowych między kratami liniowymi tworzą operatory porządkowo ograniczone.

Operator liniowy $T : E \rightarrow G$ nazywamy **porządkowo ograniczonym**, jeśli dla każdego porządkowo ograniczonego podzbioru A kraty E zbiór $T(A)$ jest porządkowo ograniczony (tj. dla każdego elementu $a, b \in E$ takich, że $a \leq b$ istnieją elementy $c, d \in G$ takie, że $c \leq d$ oraz $T[a, b] \subset [c, d]$).

Symbolem $\mathcal{L}_b(E, G)$ oznaczamy przestrzeń liniową wszystkich liniowych porządkowo ograniczonych operatorów działających z E do G .

Przestrzeń wszystkich porządkowo ograniczonych funkcjonałów liniowych na E nazywamy **duałem porządkowym** i oznaczamy symbolem E^\sim

Przestrzeń $E^\sim = \mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$ jest kratą zupełną w sensie Dedekinda względem standardowego porządku punktowego, tzn. $f \leq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E^+$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$. Jeśli E jest kratą Banacha (ogólniej, F -kratą), to $E^\sim = E^*$.

Operator liniowy $T : E \rightarrow G$ nazywamy **dodatnim**, jeśli $T(E^+) \subset G^+$.

Z operatorem dodatnim wiąże się poniższe twierdzenie Kantorowicza o rozszerzaniu:

Twierdzenie 1.12 *Jeżeli E, G są kratami liniowymi, a $T : E^+ \rightarrow G^+$ jest operatorem addytywnym, to T ma jednoznaczne rozszerzenie do operatora liniowego dodatniego $\tilde{T} : E \rightarrow G$, przy czym $\tilde{T} = T(x^+) - T(x^-)$.*

Zauważmy, że operatorem dodatnim jest każdy **homomorfizm kratowy** (Riesza), tj. operator liniowy $T : E \rightarrow G$ spełniający warunek $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ dla dowolnych $x, y \in E$.

Lemat 1.13 [4, Twierdzenie 7.2] *Jeśli E, G są kratami liniowymi, to dla operatora $T : E \rightarrow G$ następujące warunki są równoważne:*

- operator T jest homomorfizmem kratowym,
- dla każdego $x \in E$ zachodzi równość: $T(x^+) = (T(x))^+$,
- jeśli $x \wedge y = 0$ w E , to $T(x) \wedge T(y) = 0$ w G ,
- dla każdego $x \in E$ zachodzi równość: $|T(x)| = T(|x|)$.

Homomorfizm kratowy $T : E \rightarrow G$, będący równocześnie bijekcją między kratami E oraz G , nazywamy **izomorfizmem kratowym** (porządkowym), natomiast przestrzenie E, G między którymi działa jakikolwiek izomorfizm kratowy nazywamy kratowo izomorficznymi.

Operator liniowy $T : E \rightarrow G$ nazywamy **regularnym**, gdy T jest różnicą dwóch operatorów dodatnich.

Symbolem $\mathcal{L}_r(E, G)$ oznaczamy przestrzeń liniową wszystkich operatorów regularnych działających z E do G .

Każdy dodatni operator jest oczywiście porządkowo ograniczony, stąd każdy operator regularny jest porządkowo ograniczony. Wobec tego prawdziwa jest inkluzja

$$\mathcal{L}_r(E, G) \subseteq \mathcal{L}_b(E, G).$$

Powyższa inkluzja może być właściwa, jak pokazuje przykład Lotza [4, Example 1.11].

Jeśli E, G są kratami liniowymi, przy czym G jest kratą zupełną w sensie Dedekinda, to $\mathcal{L}_r(E, G)$ jest kratą liniową zupełną w sensie Dedekinda oraz zachodzi równość

$$\mathcal{L}_r(E, G) = \mathcal{L}_b(E, G),$$

a operacje kratowe w $\mathcal{L}_b(E, G)$, określone są następująco:

$$(S \vee T)(x) = \sup\{S(y) + T(z), \quad y, z \in E^+, \quad y + z = x\},$$

$$(S \wedge T)(x) = \inf\{S(y) + T(z), \quad y, z \in E^+, \quad y + z = x\},$$

dla każdych $S, T \in \mathcal{L}_b(E, G)$, $x \in E^+$.

W szczególności, w $\mathcal{L}_b(E, G)$ istnieją kresy $T \vee 0$ oraz $(-T) \vee 0$; oznaczamy je, odpowiednio, symbolami T^+ oraz T^- , przy czym

$$T^+x = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\},$$

$$T^-x = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\},$$

$$|T|x = \sup\{Ty : |y| \leq x\},$$

dla $x \in E^+$ [4, Theorem 1.13].

Twierdzenie 1.14 [39, Twierdzenie 1.3.5] *Jeśli E, G są F -kratami (w szczególności, kratami Banacha), to każdy dodatni operator liniowy $T : E \rightarrow F$ jest ciągły. Ponadto, jeśli E, G są kratami unormowanymi, to*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \geq 0, \quad \|x\| = 1\}.$$

Jeśli E, G są kratami Banacha, to dla każdego $T \in \mathcal{L}_r(E, G)$ definiujemy tzw. r -normę $\|\cdot\|_r$ (normę regularną) operatora T wzorem:

$$\|T\|_r := \inf\{\|S\| : S \in \mathcal{L}_r(E, G)^+, \quad |Tx| \leq Sx \text{ dla każdego } x \in E^+\}.$$

Wtedy, dla każdego $T \in \mathcal{L}_r(E, G)$ mamy $\|T\| \leq \|T\|_r$.

Operator liniowy $T : E \rightarrow G$, między kratami liniowymi E, F nazywamy:

- **porządkowo ciągłym** (odp., σ -porządkowo ciągłym), jeśli warunek $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ (odp., $x_n \xrightarrow{o} 0$) w E implikuje, że $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ (odp., $Tx_n \xrightarrow{o} 0$) w G .

Symbolem $\mathcal{L}_n(E, G)$ oznaczamy przestrzeń liniową wszystkich porządkowo ciągłych operatorów działających z E do G .

Jeśli E, G są kratami liniowymi, przy czym G jest kratą zupełną w sensie Dedekinda, to przestrzeń $\mathcal{L}_n(E, G)$ jest pasmem w $\mathcal{L}_b(E, G)$ [4, Theorem 4.4].

Symbolem $E_n^* = \mathcal{L}_n(E, \mathbb{R})$ oznaczamy przestrzeń liniową wszystkich porządkowo ciągłych funkcjonałów określonych na kracie E .

W poniższym lemacie podajemy pewną charakteryzację porządkowo ciągłej części F -kraty dyskretnej. Charakteryzacja ta jest z pewnością znana, ale jej jawnego dowodu nie mogłam znaleźć w dostępnej literaturze (por. [45, Proposition 1.9], [54, Proposition 0.1.4]).

Lemat 1.15 *Jeśli E jest F -kratą dyskretną oraz D oznacza ustalony zbiór elementów dyskretnych krat E , to D jest liniowo (topologicznie) gęsty w ideale E_a elementów porządkowo ciągłych kraty E , tj. $E_a = \overline{\text{lin}D}$.*

Dowód. Inkluzja $\overline{\text{lin}D} \subset E_a$ wynika z faktu, że każdy element dyskretny kraty E jest porządkowo ciągły. Istotnie, niech $e \in D$ oraz niech $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie zbiorem skierowanym w dół takim, że $e \geq x_\alpha \downarrow 0$. Na podstawie definicji elementu dyskretnego, dla każdego $\alpha \in A$ istnieje liczba $\lambda_\alpha \geq 0$ taka, że $x_\alpha = \lambda_\alpha e$. Warunek $x_\alpha = \lambda_\alpha e \downarrow 0$ jest oczywiście równoważny warunkowi $\lambda_\alpha \downarrow 0$. Na podstawie definicji F -normy otrzymujemy $\|x_\alpha\| \rightarrow 0$. Powyższy warunek implikuje, że $e \in E_a$, więc $\text{lin}D \subset E_a = \overline{E_a}$.

Niech teraz $x \in E^+$ oraz niech P_e oznacza projekcję porządkową z E na e^{dd} ; jest ona postaci $P_e(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge ne)$. Projekcja P_e jest dobrze zdefiniowana, bo pasmo e^{dd} jest podprzestrzenią jednowymiarową E . Stąd, istnieje dokładnie jedna liczba $\lambda_e(x)$ taka, że

$$P_e(x) = \lambda_e(x)e. \quad (1.6)$$

Wiadomo, że

$$x = \sup_{e \in D} P_e(x) \quad (1.7)$$

(patrz [54, Proposition 0.1.4], por [45, Proposition 1.9]).

Dla skończonego podzbioru F zbioru D zdefiniujemy element x_F wzorem

$$x_F = \sup_{e \in F} P_e(x) = \sup_{e \in F} \lambda_e(x)e = \sum_{e \in F} \lambda_e(x)e. \quad (1.8)$$

Z równości (1.7) oraz (1.8) otrzymujemy $x_F \leq x$, zatem zbiór

$$\mathcal{F}_x = \{x_F, F \text{ jest skończonym podzbiorem } D\}$$

jest zbiorem skierowanym w górę: jeśli $y_i = x_{F_i}$, $i = 1, 2$, to

$$y_1 \vee y_2 = \sum_{e \in D} \max\{\mu_e^1(x) \vee \mu_e^2(x)\}e,$$

gdzie liczba $\mu_e^i(x)$ jest postaci $\mu_e^i(x) = \lambda_e^i(x)$, gdy $e \in F_i$, oraz $\mu_e^i(x) = 0$, gdy $e \notin F_i$, $i = 1, 2$. Ponieważ $y_1 \vee y_2 \leq x$ oraz zbiór $F = \{e : \lambda_e(y_1 \vee y_2) \neq 0\}$ jest skończony, to element $y_1 \vee y_2$ jest postaci (1.8), więc $y_1 \vee y_2 \in \mathcal{F}_x$, a zatem zbiór \mathcal{F}_x jest skierowany w górę, jak twierdziliśmy.

Stąd i z (1.7) wynika, że $x = \sup \mathcal{F}_x$, oraz że zbiór $\{x - x_F : x_F \in \mathcal{F}_x\}$ jest skierowany w dół do 0. Jeśli teraz $x \in E_a$, to 0 jest punktem skupienia zbioru $\{\|x - x_F\|, x_F \in \mathcal{F}_x\}$, zatem istnieje ciąg (F_n) skończonych podzbiorów D taki, że $\|x - x_{F_n}\| \rightarrow 0$. Na podstawie (1.8), oznacza to, że $x \in \overline{\text{lin}D}$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $E_a \subset \overline{\text{lin}D}$, co łącznie z wykazaną wcześniej inkluzją $\overline{\text{lin}D} \subset E_a$ daje żadaną równość. ■

1.4 Przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza

Niniejszy podrozdział poświęcony jest ustaleniu oznaczeń oraz podstawowych pojęć z teorii przestrzeni modularnych i przestrzeni Orlicza. Podane tu definicje pochodzą z monografii J. Lindenstraussa i L. Tzafriri'ego [28, 29] oraz J. Musielaka [37].

W wielu przypadkach w przestrzeni liniowej X dana jest z góry nie norma ani F -norma, ale pewien funkcjonal zwany **modularem**, pozwalający w przestrzeni X wyodrębnić podprzestrzeń typu F^* lub unormowaną.

Modularem na przestrzeni liniowej X nazywamy funkcjonal $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ taki, że dla dowolnych $x, y \in X$ spełnione są następujące warunki:

- (i) $\rho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- (ii) $\rho(-x) = \rho(x)$ w przypadku, gdy X jest przestrzenią rzeczywistą, oraz $\rho(e^{it}x) = \rho(x)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, gdy X jest przestrzenią zespoloną,
- (iii) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, dla dowolnych $\alpha, \beta \geq 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$; jeśli warunek (iii) zastąpimy warunkiem:
 - (iii)' $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$, dla dowolnych $\alpha, \beta \geq 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$, to ρ nazywamy **modularem wypukłym**.

Przykład 1.16 Niech $X = L^p([0, 1], \mu)$, gdzie $0 < p < \infty$ oraz μ jest miarą Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$; wtedy funkcja ρ określona wzorem

$$\rho(x) = \int_0^1 |x(t)|^p d\mu, \quad x \in X,$$

jest modularem na X .

Niech ρ będzie modularem na przestrzeni liniowej rzeczywistej X . Wtedy zbiór

$$X_\rho = \{x \in X, \rho(\lambda x) \rightarrow 0, \text{ gdy } \lambda \rightarrow 0\}$$

nazywamy **przestrzenią modularną**. X_ρ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X .

W przestrzeni modularnej X_ρ funkcja określona wzorem:

$$x \mapsto \|x\|_\rho = \inf\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \lambda\} \quad (1.9)$$

jest F -normą, przy czym, przy ustalonym $x \in X_\rho$, odwzorowanie $a \mapsto |ax|_\rho$ jest niemalejącą funkcją zmiennej $a \geq 0$ oraz warunek $|x|_\rho \leq 1$ pociąga $\rho(x) \leq |x|_\rho$.

Ponadto, jeśli modular ρ jest wypukły, to funkcja

$$x \mapsto \|x\|_\rho = \inf\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\} \quad (1.10)$$

jest **normą na X_ρ** , zwaną też normą Luxemburga; w tym przypadku norma $\|\cdot\|_\rho$ jest funkcjonalem Minkowskiego zbioru absolutnie wypukłego i pochłaniającego

$$V_\rho = \{x \in X_\rho : \rho(x) \leq 1\}.$$

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy funkcja $\rho(x) = \|x\|$, $x \in X$, jest modułarem wypukłym na X i zachodzi równość $X_\rho = X$.

Inne przykłady modularów podaję niżej.

Określmy teraz przestrzeń \overline{X}_ρ następująco:

$$\overline{X}_\rho = \{x \in X, \rho(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}.$$

Na podstawie definicji łatwo zauważyć, że $X_\rho \subset \overline{X}_\rho$. Ponadto, jeśli modular ρ jest wypukły, to zachodzi równość $X_\rho = \overline{X}_\rho$.

Opiszę teraz dobrze znaną metodę wyznaczania modularu na przestrzeni $L_0(\mu)$ za pomocą tzw. funkcji Musielaka-Orlicza.

Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą σ -skończoną i zupełną. Przypomnijmy, że $L_0(\mu)$ oznacza przestrzeń klas równoważności względem równości μ -prawie wszędzie, rzeczywistych funkcji Σ -mierzalnych na S .

Funkcję $\mathcal{M} : [0, \infty) \times S \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy **funkcją Musielaka-Orlicza**, jeśli:

- dla każdego $s \in S$ funkcja $\mathcal{M}(\cdot, s) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest niemalejąca, lewostronnie ciągła, ciągła w zerze i taka, że $\mathcal{M}(t, s) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 0$,
- dla każdego $t \in [0, \infty)$ funkcja $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}(t, \cdot) : S \rightarrow [0, \infty)$ jest Σ -mierzalna.

Uwaga 1.17 Aby wyeliminować trywialne przypadki, warto założyć, że:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}(t, s) > 0$ dla każdego $s \in S$,
- (ii) dla każdego $t > 0$ funkcja \mathcal{M}_t przyjmuje wartości skończone na pewnym zbiorze $A \in \Sigma$ miary dodatniej.

Jeśli $\mathcal{M}(r, s_1) = \mathcal{M}(r, s_2)$ dla wszystkich $s_1, s_2 \in S$, to funkcję \mathcal{M} nazywamy **funkcją Orlicza**. Funkcje Orlicza będziemy oznaczać literą φ lub M .

Uwaga 1.18 Jeśli $S = \mathbb{N}$, to wygodniej jest przedstawić \mathcal{M} , jako ciąg funkcji Orlicza

φ_n , $n = 1, 2, \dots$, tj. $\mathcal{M} = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$. W tym przypadku, zamiast symbolu \mathcal{M} będziemy standardowo używać symboli Φ oraz Ψ .

Poniżej podaję przykłady wypukłych oraz niewypukłych funkcji Musielaka-Orlicza.

- Funkcja $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, określona wzorem:

$$\Phi(t, n) = \varphi_n(t) := t^{p_n}, \text{ gdzie } p_n > 0 \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

jest funkcją Musielaka-Orlicza (tu: $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$). Funkcja φ_n jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $p_n \geq 1$; dla $p_n \in (0, 1)$ funkcja φ_n jest wklęsła.

- Funkcja $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, określona wzorem:

$$\mathcal{M}(t, s) = M_s(t) := t^s, \text{ dla każdego } t \geq 0 \text{ oraz } s > 0,$$

jest przykładem funkcji Musielaka-Orlicza. M_s jest wypukła dla $s > 1$ i wklęsła dla $s \in (0, 1)$. $M_1(t)$ jest funkcją liniową.

Funkcja Musielaka-Orlicza \mathcal{M} wyznacza modular $\rho_{\mathcal{M}}$, określony na $L^0(\mu)$, zdefiniowany wzorem:

$$\rho_{\mathcal{M}}(f) = \int_S \mathcal{M}(|f(s)|, s) d\mu;$$

$\rho_{\mathcal{M}}$ nazywamy **modularem całkowym**.

Podprzestrzeń modularną $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ przestrzeni $L^0(\mu)$ określoną następująco:

$$L_{\mathcal{M}}(\mu) = \{g \in L^0(\mu), \exists \lambda > 0 \quad \rho_{\mathcal{M}}(\lambda g) < \infty\}$$

nazywamy **przestrzenią Musielaka-Orlicza**.

W szczególności, jeśli $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ oraz $\mu(\{n\}) = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz $\Phi = (\varphi_n)$, gdzie φ_n jest funkcją Orlicza dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to modular ρ_{Φ} na przestrzeni ω - wszystkich ciągów rzeczywistych $x = (x_n)$ - przyjmuje postać:

$$\rho_{\Phi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|x_n|).$$

Przestrzeń

$$\ell^{\Phi} = \{x = (x_n) \in \omega, \exists \lambda > 0 \quad \rho_{\Phi}(\lambda x) < \infty\}$$

nazywamy **ciągową przestrzenią Musielaka-Orlicza**.

Jeśli $\varphi_n = \varphi$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to piszemy $\ell^{\Phi} = \ell^{\varphi}$, a przestrzeń ℓ^{φ} nazywamy **ciągową przestrzenią Orlicza**.

Przestrzeń Musielaka-Orlicza $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ z F - normą $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ Luxemburga-Nakano określoną wzorem (1.9), tj.

$$\|g\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\lambda > 0, \quad \rho_{\mathcal{M}}\left(\frac{g}{\lambda}\right) \leq \lambda\} \quad (1.11)$$

jest F - przestrzenią [41, Twierdzenie 1.5.1]. Jeśli wszystkie funkcje $\mathcal{M}(\cdot, s)$, $s \in S$, są wypukłe, to modular $\rho_{\mathcal{M}}$ jest wypukły i wtedy przestrzeń $L_{\mathcal{M}}$ wyposażona w normę (1.10) jest przestrzenią Banacha [37, Twierdzenie 10.14].

Przestrzeń Musielaka-Orlicza $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest ideałem porządkowym w $L^0(\mu)$: jeśli $x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$ oraz $y \in L^0(\mu)$, przy czym $|y| \leq |x|$, to $y \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$; ponadto, $\|y\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{M}}$ (tj. F -norma w przestrzeni $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest monotoniczna). Z lematu 1.10 (b) wynika, że $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest super- DC .

Określmy teraz ideał $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ następująco:

$$E_{\mathcal{M}}(\mu) = \{g \in L_{\mathcal{M}}(\mu), \forall \lambda > 0 \quad \rho_{\mathcal{M}}(\lambda g) < \infty\}.$$

Jeśli $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$, $\mu\{n\} = 1$ oraz $\mathcal{M} = \Phi = (\varphi_n)$, to zamiast $E^{\Phi}(S, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ piszemy h^{Φ} .

Ideał $E_{\mathcal{M}} = E_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest topologicznie domknięty w $L_{\mathcal{M}} = L_{\mathcal{M}}(\mu)$ oraz F -norma określona wzorem (1.10) jest porządkowo ciągła na $E_{\mathcal{M}}$ [53]; w szczególności $E_{\mathcal{M}}$ jest super- DC .

Jeśli funkcja \mathcal{M} przyjmuje tylko skończone wartości, to podprzestrzeń $E_{\mathcal{M}}$ jest częścią porządkowo ciągłą przestrzeni $L_{\mathcal{M}}$ tj.

$$E_{\mathcal{M}}(\mu) = (L_{\mathcal{M}}(\mu))_a, \quad (1.12)$$

gdzie $(L_{\mathcal{M}}(\mu))_a = \{g \in L_{\mathcal{M}}(\mu) : |g| \geq g_\alpha \downarrow 0 \text{ implikuje } \|g_\alpha\|_{\mathcal{M}} \rightarrow 0\}$. Z lematu 1.11 wynika, że $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest postaci

$$(L_{\mathcal{M}}(\mu))_a = \{g \in L_{\mathcal{M}}(\mu) : |g| \geq g_n \downarrow 0 \text{ implikuje } \|g_n\|_{\mathcal{M}} \rightarrow 0\}. \quad (1.13)$$

Dla funkcji Musielaka-Orlicza \mathcal{M} przyjmującej wartości $+\infty$ warunek (1.13) nie musi być spełniony, co pokazuje przykład zamieszczony w pracy [53].

Przestrzenie Musielaka-Orlicza opisane w tym rozdziale są typowymi przykładami krat zupełnych w sensie Dedekinda.

Ważnym pojęciem w teorii przestrzeni Musielaka-Orlicza jest warunek (Δ_2) . Mówimy, że funkcja Musielaka-Orlicza \mathcal{M} spełnia warunek (Δ_2) , jeśli istnieją: liczba $k > 0$, funkcja $g \in L_1(\mu)$ oraz zbiór A miary zero takie, że dla każdego $t \geq 0$ oraz dla każdego $s \in S \setminus A$ mamy

$$\mathcal{M}(2t, s) \leq k\mathcal{M}(t, s) + g(s). \quad (1.14)$$

Jeśli funkcje Musielaka-Orlicza spełniają warunek (Δ_2) , to $L_{\mathcal{M}}(\mu) = E_{\mathcal{M}}(\mu)$ [53, p. 17].

Mówimy, że funkcja Orlicza φ spełnia warunek:

Δ_2^0 (dla małych u), jeśli istnieją liczby $k > 0$ oraz $u_0 > 0$ takie, że dla każdego $u \in [0, u_0]$ zachodzi warunek $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$;

Δ_2^∞ (dla dużych u), jeśli istnieją liczby $k > 0$ i $u_0 > 0$ takie, że $\varphi(u_0) < \infty$ oraz dla wszystkich $u \geq u_0$ zachodzi warunek $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$

Δ_2 (dla wszystkich u), jeśli istnieje liczba $k > 0$ taka, że dla wszystkich $u \geq 0$ zachodzi nierówność $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$.

Jeśli funkcja Orlicza φ spełnia warunek Δ_2^0 to, wektory jednostkowe tworzą bazę bezwarunkową przestrzeni ℓ^φ (por. [28, p. 138], [10, p. 2]). Ponadto, jeśli funkcja Orlicza φ spełnia warunek Δ_2 , to $h^\varphi = \ell^\varphi$.

Definicja 1.19 *Mówimy, że ciąg funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$ spełnia jednostajny warunek (Δ_2) , jeśli istnieją: stała $c > 0$ oraz $t_0 > 0$ takie, że dla każdego $t \in [0, t_0]$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\varphi_n(2t) \leq c \cdot \varphi_n(t) + d_n$, gdzie $d_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $d := \sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$.*

Jeśli $\Phi = (\varphi_n)$ jest ciągiem funkcji Orlicza, to podzbiór k^Φ przestrzeni Musielaka-Orlicza ℓ^Φ definiujemy następująco:

$$k^\Phi = \{x \in \omega, \rho_\Phi(x) < \infty\}.$$

W poniższym lemacie podaję użyteczne własności funkcji Orlicza.

Lemat 1.20

- (i) Każda wklęsta funkcja Orlicza φ jest subaddytywna, więc w szczególności spełnia warunek Δ_2 dla wszystkich $t > 0$ ze stałą $c = 2$.
- (ii) Jeśli ciąg funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$ spełnia jednostajny warunek (Δ_2) (w szczególności, jeśli wszystkie funkcje φ_n są subaddytywne), to zachodzi równość $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$ oraz wektory jednostkowe (e_n) tworzą bazę bezwarunkową w przestrzeni ℓ^Φ : dla każdego $x \in \ell^\Phi$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów (x_n) taki, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (zbieżność topologiczna);
- (iii) wówczas każde (nieskończenie wymiarowe) pasmo projekcyjne B w $\ell^\Phi = h^\Phi$ jest postaci $B = B_A = [e_{n_k}] = \overline{\text{lin}}\{e_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A = (n_k)$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych i B jest porządkowo izometryczne z kratą Orlicza ℓ^Ψ , gdzie $\Psi = (\varphi_{n_k})$; przy tym projekcja porządkowa $P_A : \ell^\Phi \rightarrow B_A$ jest postaci

$$P_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n \in A} x_{n_k} e_{n_k} \quad (\text{zbieżność topologiczna}).$$

- (iv) Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej, oraz niech \mathcal{M} będzie funkcją Musielaka-Orlicza. Jeśli modular $\rho_{\mathcal{M}}$ - na $L_0(\mu)$ - jest subaddytywny, to jest on F -normą na $L_{\mathcal{M}}(\mu) = E_{\mathcal{M}}(\mu)$, równoważną wyjściowej F -normie na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$.
- W szczególności, jeśli modular ρ_{Φ} - na $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ - jest subaddytywny, to jest on równoważną F -normą na ℓ^Φ .

Dowód. Własność (i) jest oczywista.

(ii) Dowód równości $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$ jest podobny⁴ do przypadku, gdy funkcje φ_n są wypukłe ([18, str. 254]; por. [10, Corollary 3.6]).

(iii) Niech (f_k) oznacza k -ty wektor jednostkowy w ℓ^Ψ . Oczywiście Ψ spełnia jednostajny warunek Δ_2 , więc na podstawie warunku (ii) mamy $\ell^\Psi = h^\Psi$. Ponieważ baza w ℓ^Ψ jest bezwarunkowa, to element $x = (x_k)$ leży w h^Ψ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$ jest topologicznie (bezwarunkowo) zbieżny w h^Ψ . Zatem dla każdego $\lambda > 0$ warunek $m_{\Psi}(\lambda x) < \infty$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_k}(\lambda |x_k|) < \infty. \quad (1.15)$$

⁴ Jeśli $x \in \ell^\Phi$, to istnieje liczba $\lambda_0 > 0$ taka, że $\rho_{\Phi}(\lambda x) < \infty$. Ponieważ dla dowolnego $\lambda > \lambda_0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\lambda \leq \lambda_0 2^k$, to stosując k -krotnie warunek (Δ_2) otrzymujemy $\rho_{\Phi}(\lambda x) \leq \rho_{\Phi}(\lambda_0 2^k x) \leq c^k \rho_{\Phi}(\lambda_0 x) + f_k$, gdzie $f_k = d(c^{k-1} + c^{k-2} + \dots + 1)$ oraz $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ (patrz def. 1.19). Stąd wynika, że $\rho_{\Phi}(\lambda x) < \infty$ dla wszystkich $\lambda > 0$. Zatem $x \in h^\Phi$, więc $\ell^\Phi = h^\Phi$. Kładąc teraz w tym dowodzie $\lambda_0 = 1$ otrzymujemy dla $\lambda > 0$ oraz $x \in \omega$ nierówność $\rho_{\Phi}(\lambda x) \leq c^k \rho_{\Phi}(x) + f_k$, stąd warunek $x \in k^\Phi$ implikuje $x \in \ell^\Phi (= h^\Phi)$. Zatem $k^\Phi \subset \ell^\Phi = h^\Phi$. Ponieważ inkluzja $h^\Phi \subset k^\Phi$ jest oczywista, to dostajemy żadaną równość $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$.

Korzystamy teraz z warunku, że $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{n_k} \in h^{\Phi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda > 0$ mamy $\rho_{\Phi}(\lambda y) < \infty$. W naszym przypadku (patrz (1.15)) ostatni warunek jest równoważny z warunkiem $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_k}(\lambda |y_{n_k}|) < \infty$ dla każdego $\lambda > 0$, zatem warunek (1.15) jest równoważny warunkowi $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k} \in h^{\Phi}$.

Otrzymaliśmy równoważność

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \in h^{\Psi} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k} \in h^{\Phi}.$$

Stąd wynika, że operator $h : \ell^{\Psi} \rightarrow \ell^{\Phi}$ postaci

$$h \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k}$$

jest dobrze określony (i ciągły jako dodatni).

Wykażemy teraz, że h jest izometrią. Ponieważ

$$\rho_{\Psi} \left(\lambda \cdot h \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \right) \right) = \rho_{\Psi} \left(\lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_k}(\lambda \cdot |x_k|) = \rho_{\Psi} \left(\lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \right),$$

to dla każdego $x \in \ell^{\Psi}$ mamy

$$\rho_{\Phi}(\lambda \cdot h(x)) = \rho_{\Psi}(\lambda \cdot x). \quad (1.16)$$

Korzystając z równości (1.16) otrzymujemy

$$\|h(x)\|_{\Phi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\Psi}(h(x)/\lambda) \leq \lambda\} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\Psi}(x/\lambda) \leq \lambda\} = \|x\|_{\Psi},$$

więc h jest izometrią. Z równoważności (1.15) wynika, że h jest izomorfizmem porządkowym na pasmo projekcyjne B_A w ℓ^{Φ} postaci $B_A = [e_{n_k}] = \overline{\text{lin}\{e_{n_k}\}}$, a projekcja porządkowa P_A z ℓ^{Ψ} na B_A jest postaci

$$P_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{n_k} e_{n_k}$$

(patrz lemat 1.7).

(iv) Z założenia, że $\rho_{\mathcal{M}}$ jest subaddytywny wynika, że $\rho_{\mathcal{M}}(\lambda x) \leq (\lambda + 1)\rho_{\mathcal{M}}(x)$ dla każdego $\lambda > 0$, skąd $L_{\mathcal{M}}(\mu) = E_{\mathcal{M}}(\mu)$. W szczególności, $\rho_{\mathcal{M}}(x) < \infty$ dla każdego $x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$.

Wykażemy najpierw, że modular $\rho_{\mathcal{M}}$ jest F -normą na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$.

(1) modular $\rho_{\mathcal{M}}$ spełnia oczywiście nierówność trójkąta.

Ponadto, z definicji modularu $\rho_{\mathcal{M}}$ oraz z definicji przestrzeni $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ otrzymujemy

(2) $\rho_{\mathcal{M}}(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

(3) dla każdego $x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$ mamy $\rho_{\mathcal{M}}(\lambda x) \rightarrow 0$, przy $\lambda \rightarrow 0$,

Z monotoniczności modularu $\rho_{\mathcal{M}}$ wynika, że jest on F -normą kratową:

$$\rho_{\mathcal{M}}(|x|) = \int_S \mathcal{M}(|x|(s), s) d\mu(s) = \int_S \mathcal{M}(x(s), s) d\mu(s) = \rho_{\mathcal{M}}(x).$$

Niech (x_n) będzie ciągiem elementów F -kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$.

Na podstawie [37, twierdzenia 10.4, str. 81] mamy $\|x_n\|_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\rho_{\mathcal{M}}(\lambda x_n) \rightarrow 0, \tag{1.17}$$

a w przypadku, gdy modular $\rho_{\mathcal{M}}$ jest subaddytywny warunek (1.17) jest równoważny z warunkiem $\rho_{\mathcal{M}}(x_n) \rightarrow 0$ (por. dowód twierdzenia 10.17 w [37]).

Z wykazanej wyżej równoważności wynika, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest ciągiem Cauchy'ego w wyjściowej F -normie $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w F -normie $\rho_{\mathcal{M}}$. Zatem $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest F -kratą w obu F -normach.

Z faktu, że identyczność - jako odwzorowanie dodatnie między F -kratami jest ciągle oraz z twierdzenia [3, Theorem 16.6, 16.7, 16.8] wynika, że F -normy $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ oraz $\rho_{\mathcal{M}}$ są równoważne.

Druga część punktu (iv) wynika z części pierwszej zastosowanej do przypadku, gdy $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ oraz μ jest miarą liczącą. ■

Uwaga 1.21 Zauważmy, że jeśli funkcje Orlicza φ_n są wklęsłe, to są subaddytywne, więc

dla ciągu $\Phi = (\varphi_n)$ modular ρ_{Φ} jest też subaddytywny. Z warunków (ii) oraz (iv) lematu 1.20 wynika, że wtedy $\ell^{\Phi} = h^{\Phi} = k^{\Phi}$ i modular ρ_{Φ} jest równoważną F -normą kratową na ℓ^{Φ} .

1.4.1 Własność σ -Fatou

W tym podrozdziale opisujemy pewną własność F -normy, którą będziemy wykorzystywać w dowodzie twierdzeń 3.16 oraz 4.10.

Niech $\|\cdot\|_E$ będzie *ustaloną* F -normą na kracie liniowej E . Mówimy, że $\|\cdot\|_E$ (albo, że E - wyposażona w tę ustaloną F -normę) ma własność σ -Fatou, jeśli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E^+$ oraz $x \in E^+$ warunek $x_n \uparrow x$ implikuje $\|x_n\| \uparrow \|x\|$.

Przykładowo, F -krata $L_p(\mu)$, dla $0 < p < \infty$, wyposażona w naturalną p -normę, posiada własność σ -Fatou [33, p. 42]. Kolejnymi przykładami F -krat z własnością σ -Fatou są następujące AM -przestrzenie z ich naturalnymi normami supremalnymi: przestrzeń $L_{\infty}(\mu)$ [3, Example 12.12] oraz $C[0, 1]$ [3, Example 11.2]. Nieco ogólniej, F -krata $C(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, również posiada własność σ -Fatou (w przeciwnym

przypadku istniałby ciąg (f_n) funkcji nieujemnych taki, że $f_n \uparrow f$ (tj. f jest najmniejszym ograniczeniem górnym niemalejącego ciągu (f_n)) oraz $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| = a < \|f\|$; stąd $f_n \leq a$ oraz funkcja $g := a \wedge f$ spełniałaby nierówność $g \geq f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przy czym dla elementu $k_0 \in K$ takiego, że $f(k_0) = \|f\|$ mielibyśmy $g(k_0) = a < f(k_0)$, a zatem funkcja g byłaby mniejszym ograniczeniem ciągu (f_n) , co przeczy własności funkcji f .

Mówimy, że modular ρ określony na kracie liniowej X ma **własność σ -Fatou**, jeśli dla $0 \leq x, x_n \in X$ warunek $x_n \uparrow x$ implikuje $\rho(x_n) \uparrow \rho(x)$.

Poniższy fakt, pokazujący związek między własnością σ -Fatou modularu a F -normy wyznaczonej przez ten modular, jest z pewnością dobrze znany [52], [53]). Ponieważ nie miałam dostępu do literatury zawierającej dowód tego faktu, to podaję go z pełnym uzasadnieniem.

Twierdzenie 1.22 *Jeśli modular ρ określony na kracie liniowej X ma własność σ -Fatou, to F -norma wyznaczona przez ten modular (postaci (1.9) lub (1.10)) ma również własność σ -Fatou.*

Dowód. Rozważmy tylko (interesujący nas) przypadek, gdy modular ρ jest niewypukły; wtedy F -norma wyznaczona przez ρ jest postaci (1.9).

Ustalmy $0 < x \in X_\rho$ oraz ciąg $(x_n) \subset X_\rho$ taki, że $0 \leq x_n \uparrow x$ w X_ρ . Połóżmy $A = \{a > 0, \rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq a\}$. Wprost z definicji F -normy $\|\cdot\|_\rho$ mamy: $\xi \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho\left(\frac{x}{\xi}\right) \leq \xi$. Ponieważ ta nierówność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x\|_\rho \leq \xi$, to

$$\rho\left(\frac{x}{\xi}\right) > \xi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \|x\|_\rho > \xi. \quad (1.18)$$

Stąd i z nierówności $\xi = \|x\|_\rho - \varepsilon < \|x\|_\rho$, dla każdego $\varepsilon \in (0, \|x\|_\rho)$, dostajemy

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|_\rho - \varepsilon}\right) > \|x\|_\rho - \varepsilon. \quad (1.19)$$

Korzystając teraz z własności σ -Fatou dla ρ , z założenia, że $x_n \uparrow x$ oraz nierówności (1.19) otrzymujemy

$$\rho\left(\frac{x_n}{\|x\|_\rho - \varepsilon}\right) \uparrow \rho\left(\frac{x}{\|x\|_\rho - \varepsilon}\right) > \|x\|_\rho - \varepsilon,$$

a zatem istnieje liczba naturalna n_ε taka, że dla każdego $n > n_\varepsilon$ mamy

$$\rho\left(\frac{x_n}{\|x\|_\rho - \varepsilon}\right) > \|x\|_\rho - \varepsilon. \quad (1.20)$$

Z nierówności (1.18) oraz (1.20) otrzymujemy $\|x_n\|_\rho > \|x\|_\rho - \varepsilon$, dla $n > n_\varepsilon$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\rho \geq \|x\|_\rho - \varepsilon$. Przechodząc teraz z ε do zera dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\rho \geq \|x\|_\rho, \quad (1.21)$$

lecz z monotoniczności F -normy $\|\cdot\|_\rho$ oraz z warunku $x_n \uparrow x$ wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\rho \leq \|x\|_\rho, \quad (1.22)$$

więc łącząc nierówności (1.21) oraz (1.22) otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\rho = \|x\|_\rho$. Dowód przypadku, gdy modular ρ jest wypukły jest niemal identyczny. ■

Wniosek 1.23 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej oraz niech \mathcal{M} będzie funkcją Musielaka-Orlicza. Wówczas przestrzeń Musielaka-Orlicza $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ ma własność σ -Fatou.*

Dowód. Z twierdzenia Lebesgue'a ([34, twierdzenie 5, str. 129], por [16, Theorem B, p. 112]) wynika, że modular $\rho_{\mathcal{M}}$, określony na $X = L_0(\mu)$, ma własność σ -Fatou: jeśli $(x_n) \subset L_0(\mu)^+$, $x \in L_0(\mu)^+$, przy czym $x_n \uparrow x$ w $L_0(\mu)$ (tj. $x_n(s) \uparrow x(s)$ μ -p.w.), to z ciągłości każdej funkcji $\mathcal{M}(\cdot, s)$, $s \in S$, wynika, że $\mathcal{M}(x_n(s), s) \uparrow \mathcal{M}(x(s), s)$ μ -p.w., zatem $\rho_{\mathcal{M}}(x_n) = \int_S \mathcal{M}(x_n(s), s) d\mu(s) \uparrow \int_S \mathcal{M}(x(s), s) d\mu(s) = \rho_{\mathcal{M}}(x)$. Teraz stosujemy twierdzenie 1.22. ■

1.5 Rozłączne rozdrobnienia ciągów elementów pewnych algebr Boole'a

W tym podrozdziale podaję dowody istnienia rozłącznych rozdrobnień ciągów elementów algebr Boole'a. Własność tę będą stosować w dowodach twierdzeń rozdziału trzeciego oraz czwartego.

Wynik przedstawiony w poniższym twierdzeniu jest znany [5, Example 1.5, p. 338], autorzy nie zamieszczają jednak dowodu, powołując się jedynie na twierdzenie [5, Proposition 1.4] opisujące znacznie ogólniejszą sytuację. Dowód twierdzenia 1.24 jest konstruktywny i opiera się na elementarnej wersji twierdzenia Lapunowa [42, Theorem 5.5]:

(L) *Niech μ będzie miarą σ -skończoną określoną na σ -algebrze Σ podzbiorów niepustego zbioru S . Jeśli μ jest bezatomowa, to $\mu(\Sigma) = [0, \mu(S)]$.*

Twierdzenie 1.24 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą μ -bezatomową. Jeśli $(A_k) \subset \Sigma$ jest ciągiem zbiorów miary μ -dodatniej i skończonej, to istnieje ciąg $(D_k) \subset \Sigma$ zbiorów miary μ -dodatniej taki, że*

- (i) $D_k \subset A_k$, $k = 1, 2, \dots$,
- (ii) $D_k \cap D_l = \emptyset$, dla $k \neq l$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Uwaga 1.25 Ciąg (D_k) spełniający warunki (i) oraz (ii) powyższego twierdzenia

nazywamy *rozłącznym rozdrobieniem* ciągu (A_k) . Pojęciu rozłącznych rozdrobnień poświęcony jest artykuł przeglądowy [5].

Dowód twierdzenia 1.24. Niech $(A_k) \subset \Sigma$ będzie ciągiem zbiorów miary dodatniej.

Na podstawie twierdzenia Lapunowa (L) zastosowanego do przestrzeni miar (A_k, Σ_k, μ_k) , gdzie $\Sigma_k = \Sigma \cap A_k = \{E \cap A_k, E \in \Sigma\}$ oraz $\mu_k = \mu|_{\Sigma_k}$ możemy skonstruować ciąg podzbiorów $B_k \subset A_k, k = 1, 2, \dots$ taki, że

$$0 < \mu(B_{k+1}) \leq \frac{1}{3}\mu(B_k). \quad (1.23)$$

Zbiory B_k konstruujemy indukcyjnie w następujący sposób. Dla $k = 1$ kładziemy $B_1 := A_1$ oraz definiujemy dodatnią liczbę a_1 wzorem $a_1 = \min\{\frac{1}{3}\mu(B_1), \mu(A_2)\} \in (0, \mu(A_2)] = (0, \mu_2(A_2)]$. Ponieważ $0 < a_1 \leq \mu(A_2)$, to na podstawie twierdzenia Lapunowa oraz postaci Σ_2 istnieje zbiór $F_2 \in \Sigma$ taki, że dla $B_2 := F_2 \cap A_2 \in \Sigma_2$ mamy

$$\mu(B_2) = \mu(F_2 \cap A_2) = \mu_2(B_2) = a_1 \leq \frac{1}{3}\mu(B_1),$$

gdzie $F_2 \in \Sigma$; oczywiście $B_2 \subset A_2$ oraz $B_2 \in \Sigma$.

Załóżmy teraz, że skonstruowaliśmy skończony ciąg zbiorów B_1, \dots, B_k o żądanych własnościach. Połóżmy $a_k = \min\{\frac{1}{3}\mu(B_k), \mu(A_{k+1})\} \in (0, \mu(A_{k+1})]$. Korzystając ponownie z twierdzenia Lapunowa zastosowanego (jak wyżej) do przestrzeni (A_k, Σ_k, μ_k) otrzymujemy, że istnieje zbiór $B_{k+1} \subset A_{k+1}$ taki, że $a_k = \mu(B_{k+1}) \leq \frac{1}{3}\mu(B_k)$. Na podstawie indukcji matematycznej dostajemy nieskończony ciąg zbiorów $(B_k) \subset \Sigma$ spełniających nierówność (1.23).

Z nierówności (1.23) otrzymujemy indukcyjnie

$$\mu(B_{k+l}) \leq \frac{1}{3^k}\mu(B_l), \quad k, l = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.24)$$

Położmy $D_1 = B_1 \setminus C_2$, gdzie $C_2 = \bigcup_{k=2}^{\infty} B_k$.

Stosując nierówność (1.24) do przypadku $l = 1$ dostajemy

$$\mu(C_2) = \mu\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{k+1}) \stackrel{(1.24)}{\leq} \mu(B_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\mu(B_1),$$

skąd $\mu(B_1) = \mu(B_1 \setminus C_2) + \mu(C_2) \leq \mu(D_1) + \frac{1}{2}\mu(B_1)$, więc

$$\mu(D_1) \geq \frac{1}{2}\mu(B_1) > 0, \quad (1.25)$$

oraz oczywiście $D_1 \subset B_1$.

Niech teraz l będzie liczbą naturalną taką, że $l \geq 2$, oraz połóżmy $D_l := B_l \setminus C_{l+1}$, gdzie $C_{l+1} = \bigcup_{k=l+1}^{\infty} B_k$. Stosując nierówność (1.24) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu(C_{l+1}) &= \mu\left(\bigcup_{k=l+1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{k+l}) \stackrel{(1.24)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \mu(B_l) = \\ &= \mu(B_l) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \mu(B_l), \end{aligned}$$

stąd $\mu(B_l) = \mu(B_l \setminus C_{l+1}) + \mu(C_{l+1}) \leq \mu(D_l) + \frac{1}{2} \mu(B_l)$, więc

$$\mu(D_l) \geq \frac{1}{2} \mu(B_l) > 0, \quad (1.26)$$

oraz oczywiście $D_l \subset B_l \subset A_l$. Ponadto, jeśli $p, r \in \mathbb{N}$, to kładąc $l = p + r$ dostajemy

$$\begin{aligned} D_l \cap D_p &= D_{p+r} \cap D_p = \left(B_{p+r} \setminus \bigcup_{k=p+r+1}^{\infty} B_k \right) \cap \left(B_p \setminus \bigcup_{k=p+1}^{\infty} B_k \right) = \\ &= \left(B_{p+r} \cap \bigcap_{k=p+r+1}^{\infty} B'_k \right) \cap \left(B_p \cap \bigcap_{k=p+1}^{\infty} B'_k \right) = \\ &= (B_{p+r} \cap B'_{p+r}) \cap \bigcap_{k=p+r+1}^{\infty} B'_k \cap \left(B_p \cap \bigcap_{k=p+1}^{p+r-1} B'_k \cap \bigcap_{k=p+r+1}^{\infty} B'_k \right) = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Na podstawie relacji (1.25), (1.26), (1.27) skonstruowany ciąg zbiorów (D_k) spełnia żądane warunki (i) oraz (ii) naszego twierdzenia. ■

Kolejne twierdzenie jest dyskretną wersją twierdzenia 1.24 i wydaje się być nowe (autorzy artykułu przeglądowego [5] nie podają takiej wersji); jego dowód ma charakter kombinatoryczny i różni się istotnie od dowodu poprzedniego twierdzenia.

Twierdzenie 1.26 *Niech (A_k) będzie ciągiem niepustych podzbiorów ustalonego nieskończonego zbioru S (ciąg (A_k) może być interpretowany jako ciąg elementów algebry Boole'a 2^S). Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) *istnieje podciąg (A_{k_j}) posiadający rozłączne rozdrobnienie,*
- (ii) *istnieje podciąg (A_{k_j}) posiadający rozłączne rozdrobnienie zbiorami jednoelementowymi, tj. stnieją: ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (k_j) oraz ciąg (x_j) parami różnych elementów zbioru S takie, że $x_j \in A_{k_j}$, $j = 1, 2, \dots$*

(iii)

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \aleph_0. \quad (1.28)$$

Uwaga 1.27 Ponieważ ciąg (D_j) , gdzie $D_j = \{x_j\}$ oraz $x_j \in A_{k_j}$, jest rozłącznym

rozdrobieniem ciągu (A_{k_j}) elementów algebry Boole'a 2^S , to twierdzenie 1.26 ma równoważną formę w języku algebr Boole'a:

- Niech S będzie zbiorem nieskończonym, oraz niech (A_k) będzie nieskończonym ciągiem elementów algebry Boole'a 2^S . Wówczas istnieje nieskończony podciąg (A_{k_j}) ciągu (A_k) posiadający rozłączne rozdrobienie wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (A_k) spełnia warunek (1.28).

Twierdzenie 1.26 można również próbować wyrazić w języku przestrzeni (S, Σ, μ) , gdzie μ jest miarą czysto atomową. Jeśli żądamy *dodatkowo*, aby przestrzeń (S, Σ, μ) była przestrzenią miary σ -skończonej, to zbiór S musi być przeliczalny i nieskończony, a zatem możemy rozważyć przypadek, gdy $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$, oraz μ jest dowolną miarą atomową na $2^{\mathbb{N}}$ (np. liczącą). Wtedy twierdzenie 1.26 ma formę podobną do twierdzenia 1.24 (z miarą bezatomową), lecz z dowodu twierdzenia 1.26 wynika tym razem, że (nie cały ciąg (A_k) , lecz pewien jego) podciąg (A_{k_j}) posiada rozłączne rozdrobienie.

Uwaga 1.28 W przypadku, gdy zbiory A_k są nieskończone, to twierdzenie 1.26 posiada

mocniejszą tezę wynikającą z twierdzenia Bernsteina-Kuratowskiego-Sierpińskiego [5, str. 335]:

Ciąg (A_k) posiada rozłączne rozdrobienie ciągiem (D_n) takim, że $\text{card}(D_k) = \aleph_0$.

Dowód twierdzenia 1.26. Równoważność $(i) \Leftrightarrow (ii)$, oraz implikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ są oczywiste. Wyjaśnięn wymaga jedynie implikacja $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Niech (A_k) będzie ciągiem podzbiorów zbioru S takim, że $\text{card}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \aleph_0$.

Rozważmy trzy przypadki:

(a) **Przypadek $\text{card}(A_k) \geq \aleph_0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.**

Wybierając kolejno elementy

$$x_1 \in A_1,$$

$$x_2 \in A_2 \setminus \{x_1\},$$

.....

$$x_k \in A_k \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

.....

otrzymujemy ciąg zbiorów $D_k = \{x_k\}$ spełniający tezę twierdzenia. Alternatywny dowód - ze znacznie mocniejszą tezą - można otrzymać powołując się wprost na twierdzenie Bernsteina-Kuratowskiego-Sierpińskiego (uwaga 1.28).

(b) **Zbiory A_k są skończone dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \text{card}(A_k) = \infty$.**

Z założenia wynika, że istnieje podciąg (A_{k_j}) , $j = 1, 2, \dots$ ciągu (A_k) taki, że ciąg liczbowy $(\text{card}(A_{k_j}))$ jest ściśle rosnący (do ∞).

Bez straty ogólności możemy założyć, że $k_1 = 1$. Dla uproszczenia oznaczeń połóżmy

$$d_j := \text{card}(A_{k_j}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Ponieważ ciąg (d_j) jest ściśle rosnący, to bez straty ogólności można założyć, że spełnia on nierówność

$$d_{j+1} > d_1 + d_2 + \dots + d_j. \quad (1.29)$$

Wykażemy, że istnieje ciąg zbiorów jednoelementowych $(D_j)_{j=1}^\infty$ taki, że

$$D_j \subset A_{k_j} \setminus (A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_{j-1}}) \subset A_{k_j} \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_{j-1}). \quad (1.30)$$

Wybermy teraz ustalony element $x_1 \in A_1$ (oczywiście, tu i niżej stosujemy pewną formę pewnika wyboru) oraz połóżmy $D_1 = \{x_1\}$.

Dla $j = 1$ nierówność (1.29) ma postać $d_2 > d_1$, tj. $\text{card}(A_{k_2}) > \text{card}(A_{k_1})$, a zatem

$$\text{card}(A_{k_1}) < \text{card}(A_{k_2}) = \text{card}(A_{k_2} \setminus A_{k_1}) + \text{card}(A_{k_1}), \quad (1.31)$$

więc $\text{card}(A_{k_2} \setminus A_{k_1}) > 0$. Stąd, zbiór $A_{k_2} \setminus A_{k_1}$ jest niepusty.

Wybermy ustalony element $x_2 \in A_{k_2} \setminus A_{k_1} \subset A_{k_2} \setminus D_1 = A_{k_2} \setminus \{x_1\}$. Wówczas $D_2 := \{x_2\} \subset A_{k_2} \setminus \{x_1\}$, więc $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ oraz $D_j \subset A_{k_j}$, $j = 1, 2$.

Dalej postępujemy indukcyjnie.

Przypuśćmy, że relacja (1.30) zachodzi dla $j = m$; w szczególności, skonstruowaliśmy ciąg zbiorów jednoelementowych $D_j = \{x_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, taki, że $x_j \neq x_l$ (tj. $D_j \cap D_l = \emptyset$), dla $j \neq l$, $j, l = 1, 2, \dots, m$, przy czym $D_j \subset A_{k_j}$ dla $j \leq m$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $j = m + 1$. Ponieważ liczba $d_{m+1} = \text{card}(A_{k_{m+1}})$ spełnia nierówność (1.29) (dla $j = m$), to

$$\text{card}(A_{k_{m+1}}) > d_1 + d_2 + \dots + d_m \geq \text{card}(A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_m}),$$

więc, stosując argumentację jak w rozumowaniu po nierówności (1.31), otrzymujemy

$$A_{k_{m+1}} \setminus (A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_m}) \neq \emptyset, \quad (1.32)$$

co pozwala nam wybrać element $x_{m+1} \in A_{k_{m+1}} \setminus (A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_m})$.

Położmy $D_{m+1} = \{x_{m+1}\}$. Ponieważ z założenia indukcyjnego mamy

$$D_1 \cup \dots \cup D_m \subset A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_m},$$

to z relacji (1.32) otrzymujemy dwie inkluzje:

$$D_{m+1} \subset A_{k_{m+1}} \setminus (A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_n}) \subset A_{k_{m+1}} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m), \quad (1.33)$$

a zatem $D_{m+1} \cap D_j = \emptyset$ dla $j = 1, 2, \dots, m$.

W ten sposób wykazaliśmy, że z inkluzji (1.30) dla $j = m$ wynika inkluzja (1.33), tj. inkluzja (1.30) dla $j = m + 1$.

Na podstawie indukcji matematycznej otrzymujemy, że istnieje nieskończony ciąg (D_j) , dla którego spełniona jest relacja (1.30). W szczególności, ciąg (D_j) jest rozłącznym rozdrobieniem ciągu (A_{k_j}) .

(c) **Przypadek** $\sup_{k \in \mathbb{N}} \text{card}(A_k) \leq \infty$.

Położmy $B_m = \bigcup_{k=1}^m A_k$, $m = 1, 2, \dots$. Wówczas ciąg (B_m) jest szczególnym przypadkiem ciągu rozpatrywanego w punkcie (b): dla każdego $m = 1, 2, \dots$ mamy:

- $B_m \subset B_{m+1}$,
- $\text{card}(B_m) < \infty$, oraz
- $\overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \text{card}(B_m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{card}(B_m) = \infty$.

Na podstawie udowodnionego przypadku (b), istnieje podciąg (B_{m_j}) ciągu (B_m) oraz zbiory jednoelementowe $D_j = \{x_j\}$ takie, że

$$\text{ciąg } (D_j) \text{ jest rozłącznym rozdrobieniem ciągu } (B_{m_j}), \quad (1.34)$$

przy czym, na podstawie inkluzji (1.30), dla każdego $j = 1, 2, \dots$ mamy

$$D_j \subset B_{m_j} \setminus \bigcup_{r=1}^{j-1} B_{m_r}, \quad (1.35)$$

Dalsze obliczenia będziemy prowadzić dla *ustalonej* liczby $j \in \mathbb{N}$.

Wyznamy najpierw dokładnie postać zbioru po prawej stronie inkluzji (1.35). Zgodnie z definicją zbiorów B_{m_j} mamy

$$\bigcup_{r=1}^{j-1} B_{m_r} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left(\bigcup_{k=1}^{m_r} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{m_{j-1}} A_k,$$

zatem

$$\underbrace{B_{m_j} \setminus \bigcup_{r=1}^{j-1} B_{m_r}} = \left(\bigcup_{k=1}^{m_j} A_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} A_k \right) \setminus \bigcup_{k=1}^{m_j} A_k = \underbrace{\bigcup_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} A_k} \setminus \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m_j} A_k}. \quad (1.36)$$

Wstawiając tożsamość (1.36) do inkluzji (1.35) otrzymujemy

$$D_j \subset \bigcup_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{m_j} A_k, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.37)$$

Z inkluzji (1.37) wynika, że istnieje zbiór A_{k_j} , gdzie

$$m_j < k_j \leq m_{j+1} \quad (1.38)$$

taki, że

$$D_j \subset A_{k_j}, \quad (1.39)$$

(z dowodu punktu (b) wynika, że można przyjąć $k_0 = 1$, bo $B_1 = A_1$).

Nierówność (1.38) otrzymaliśmy dla ustalonego $j \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że dla kolejnych liczb naturalnych $j = 1, 2, \dots$ istnieją liczby naturalne k_1, k_2, \dots , takie, że

$$m_1 < k_1 \leq m_2 < k_2 \leq m_3 < k_3 \leq m_4 < \dots,$$

a zatem ciąg (k_j) jest ściśle rosnący, oraz $D_j \subset A_{k_j}$, przy czym, na podstawie warunku (1.34) ciąg (D_j) składa się ze zbiorów jednoelementowych parami rozłącznych. Oznacza to, że ciąg (D_j) jest rozłącznym rozdrobnieniem ciągu (A_{k_j}) . Wykazaliśmy więc, że implikacja (iii) \Rightarrow (ii) zachodzi również w przypadku (c). ■

Z powyższego twierdzenia wynikają następujący dwa wnioski, z których będę korzystać w dowodach twierdzeń 3.11 oraz 4.21.

Wniosek 1.29 *Niech S będzie niepustym zbiorem oraz niech $h : 2^S \rightarrow [0, \infty]$ będzie dowolną ustaloną funkcją. Jeśli istnieje ciąg (A_n) niepustych podzbiorów zbioru S taki, że $h(A_n) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n) = 0, \quad (1.40)$$

to ciąg (A_n) zawiera podciąg (A_{n_k}) posiadający rozłączne rozdrobnienie zbiorami jednoelementowymi.

Dowód. Zauważmy najpierw, że ciąg (A_n) nie zawiera podciągu stałego: gdyby $A_{n_k} = B$ dla pewnego ciągu $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, to mielibyśmy $h(A_{n_k}) = h(B) = c > 0$, więc z założenia wynikałoby, że $c = \lim_{n_k \rightarrow \infty} h(A_{n_k}) = 0$, sprzeczność.

Wykażemy teraz, że $\text{card}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \aleph_0$. Gdyby - przeciwnie - zbiór $S_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ był skończony, to elementy ciągu (A_n) przyjmowałyby wartości ze zbioru skończonego 2^{S_0} , a zatem zbiór $\{h(A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ również posiadałby skończoną ilość wartości: $\{h(A_{n_k}), n \in \mathbb{N}\} = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$, więc istniałaby liczba c_s , gdzie $1 \leq s \leq r$, taka, że zbiór $\{n : h(A_n) = c_s\}$ byłby nieskończony, zatem na podstawie założenia (1.40) mielibyśmy $c_s = 0$, co jest sprzeczne z założeniem $h(A_n) > 0$. Musi zatem być $\text{card}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \aleph_0$, jak twierdziliśmy. Teraz stosujemy równoważność warunków (ii) oraz (iii) w twierdzeniu 1.26. ■

Drugi wniosek jest szczególną wersją wniosku 1.29.

Wniosek 1.30 Niech (A_n) będzie ciągiem niepustych podzbiorów pewnego zbioru S , oraz niech f będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze S taką, że

$$0 < f|_{A_n} \leq \frac{1}{n}, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}, \quad (1.41)$$

tj. dla każdego $x \in A_n$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności $0 < f(x) \leq \frac{1}{n}$. Wtedy istnieje podciąg (A_{n_k}) ciągu (A_n) zawierający rozłączne rozdrobnienie zbiorami jednoelementowymi.

Dowód. Połóżmy $S_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz określmy funkcję $h : 2^{S_0} \rightarrow [0, \infty]$ wzorem

$$h(A) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Z definicji funkcji h mamy $h(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \neq \emptyset$ oraz $h(A) > 0$ dla każdego zbioru $A \in 2^{S_0} \setminus \{\emptyset\}$, bo $f(x) > 0$ dla każdego $x \in S_0$.

Z założenia (1.41) wynika, że $0 < h(A_n) \leq \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n) = 0$. Teraz stosujemy wniosek 1.29. ■

Rozdział 2

Ortomorfizmy w kratkach liniowych i F -kratach

2.1 Podstawowe własności ortomorfizmów

Niniejszy rozdział poświęcony jest ustaleniu oznaczeń oraz podstawowych pojęć z teorii ortomorfizmów. Podane poniżej definicje pochodzą z monografii Ch. D. Aliprantisa, O. Burkinshawa [4], W. A. J. Luxemburga, A. C. Zaanena [33] oraz P. Meyera-Nieberga [39].

Niech E, G będą archimedesowymi kratkami liniowymi.

Mówimy, że operator $T : E \rightarrow E$ **zachowuje pasma**, jeśli dla każdego pasma $B \subset E$ spełniony jest warunek $T(B) \subset B$, tj. B jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora T . W szczególności $T(x^{dd}) \subset x^{dd}$ dla każdego $x \in E$.

Twierdzenie 2.1 [39, Proposition 3.1.2] *Dla operatora $T : E \rightarrow E$, określonego na archimedesowej kratce liniowej E , następujące warunki są równoważne:*

- (i) *operator T zachowuje pasma,*
- (ii) *dla dowolnych $x, y \in E$ warunek $x \perp y$ implikuje, że $Tx \perp y$,*
- (iii) *dla każdego $x \in E$ mamy $Tx \in B_x = x^{dd}$.*

Mówimy, że operator $T : E \rightarrow G$ pomiędzy dwiema kratkami liniowymi E, G **zachowuje rozłączność**, jeśli dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $x \perp y$ spełniony jest warunek $Tx \perp Ty$.

Operator porządkowo ograniczony i zachowujący pasma nazywamy **ortomorfizmem**. Klasę wszystkich ortomorfizmów określonych na kratce liniowej E będziemy oznaczać symbolem $Orth(E)$.

Uwaga 2.2 Operatory zachowujące pasma nie muszą być porządkowo ograniczone.

Odpowiedni przykład jest podany w monografii Aliprantisa i Burkinshawa [4, Example 8.4]. Z drugiej strony, Abramovich, Veksler i Koldunov [4, Theorem 15.4] wykazali, że każdy operator na kracie Banacha zachowujący pasma jest porządkowo ograniczony. Stąd wynika, że na kracie Banacha operator jest ortomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje pasma.

Z twierdzenia 2.1 wnioskujemy, że porządkowo ograniczony operator $T : E \rightarrow E$ jest ortomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów $x, y \in E$ warunek $x \perp y$ implikuje, że $Tx \perp y$. W szczególności, każdy ortomorfizm zachowuje rozłączność.

Zachowujące rozłączność operatory nie stanowią przestrzeni liniowej, ale zbiór wszystkich ortomorfizmów określonych na kracie archimedesowej E , wyposażony w działania punktowe na E , jest kratą liniową [4, Theorem 8.6 oraz Theorem 8.9]:

Twierdzenie 2.3 *Niech E będzie kratą archimedesową. Dla dowolnego ortomorfizmu $T \in Orth(E)$ istnieje jego moduł*

$$|T| = T^+ + T^-, \quad (2.1)$$

będący ortomorfizmem (więc homomorfizmem kratowym), gdzie elementy $T^+ = T \vee 0$ oraz $T^- = (-T) \vee 0$ istnieją w zbiorze częściowo uporządkowanym $\mathcal{L}_b(E)$ i są również ortomorfizmami spełniającymi równość

$$T = T^+ - T^-, \quad (2.2)$$

przy czym

$$T^+ \wedge T^- = 0 = T^+ \circ T^-, \quad (2.3)$$

gdzie symbol \circ oznacza składanie operatorów.

Ortomorfizmy $|T|$, T^+ , T^- są zdefiniowane punktowo: dla każdego $x \in E^+$ zachodzą równości

$$|T|x = |Tx|, \quad T^+x = (Tx)^+, \quad T^-x = (Tx)^-, \quad (2.4)$$

stąd $Orth(E)$ z porządkiem punktowym jest archimedesową kratą liniową. W szczególności, dla każdego $x \in E^+$ oraz dowolnych $S, T \in Orth(E)$ mamy

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x) \quad \text{oraz} \quad (S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x).$$

Uwaga 2.4 Z relacji (2.4) wynika, że rozpatrując własności topologiczne oraz

algebraiczne ortomorfizmów, a także ich rozszerzeń, możemy bez straty ogólności zawęzić nasze rozważania tylko do ortomorfizmów dodatnich. Przykładowo, konstruując izomorfizm działający między odpowiednimi kratami ortomorfizmów możemy zawęzić jego konstrukcję do odpowiednich stożków dodatnich. Powyższa własność wynika wprost z warunków (2.1), (2.2) oraz (2.4).

Jeśli T jest operatorem działającym z kraty liniowej E do kraty liniowej G oraz A jest niepustym podzbiorem E , to symbolem $T|_A$ oznaczamy obcięcie operatora T do zbioru A .

Twierdzenie 2.5 (*A. C. Zaanen*, [39, Proposition 3.1.6]) *Niech A będzie niepustym podzbiorem kraty archimedesowej E . Jeśli $S, T \in Orth(E)$ oraz $S|_A = T|_A$, to $S|_{A^{dd}} = T|_{A^{dd}}$. W szczególności, jeśli $S(x) = T(x)$ dla pewnego $x \in E$, to ortomorfizmy $S, T \in Orth(E)$ pokrywają się na paśmie x^{dd} .*

Wynika stąd użyteczny wniosek, który często pozwala efektywnie wyznaczyć postać ortomorfizmów na konkretnej kratce E .

Wniosek 2.6 *Jeśli krata archimedesowa E ma jedynekę porządkową e oraz $Te = Se$, to $T = S$.*

Ważnym podzbiorem klasy $Orth(E)$ jest ideał $Z(E)$ **ortomorfizmów centralnych** generowanych przez identyczność, tj.

$$Z(E) = \{T \in \mathcal{L}_b(E) : \exists \lambda > 0 \forall x \geq 0 \quad |Tx| \leq \lambda x\}.$$

Twierdzenie 2.7 (*W. A. J. Luxemburg*, [39, Theorem 3.1.11]) *Jeśli E jest kratą Banacha, to*

- (i) $Orth(E) = Z(E)$,
- (ii) dla każdego $T \in Orth(E)$ mamy,
 $\|T\| = \|T\|_r = \|T\|_\infty = \inf\{\lambda > 0, \quad |T| \leq \lambda I\}$,
- (iii) $Z(E)$ z normą $\|\cdot\|_r$ jest kratą Banacha z mocną jedyneką I , więc (na podstawie twierdzenia Kakutaniego 1.8) $(Z(E), \|\cdot\|_r)$ jest porządkowo izometryczna z pewną $C(K)$ -przestrzenią, gdzie K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.

Lemat 2.8 *Niech E będzie kratą archimedesową oraz niech J będzie ideałem w E . Jeśli $T \in Z(E)$, to $T(J) \subset J$. Innymi słowy, ideały są podprzestrzeniami niezmienniczymi ortomorfizmów centralnych.*

Ważną klasę przestrzeni w teorii ortomorfizmów stanowią f -algebry.

Kratę liniową E wyposażoną w działanie mnożenia (z prawem rozdzielności) nazywamy **f -algebrą**, jeśli spełnione są następujące warunki:

- (1) $xy \geq 0$ dla wszystkich $x, y \in E^+$,
- (2) warunek $x \wedge y = 0$ implikuje $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ dla wszystkich $z \in E^+$.

Przykład 2.9 F -kraty \mathbb{R}^Γ , gdzie Γ jest niepustym zbiorem, c, c_0 , F -krata E_0 opisana w przykładzie 2.32, $\mathcal{L}_0(\mu)$, $L_0(\mu)$, L_∞ oraz $C(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, są f -algebrami (z działaniami algebraicznymi odp. po współrzędnych, μ -prawie wszędzie punktowymi).

Twierdzenie 2.10 ([39, Theorem 3.1.13], [59, Theorem 142.1 (ii)]) *Niech E będzie f -algebrą z jednością e , oraz niech A_e oznacza ideał kraty E generowany przez element e . Wtedy dla każdych $x, y \in E$ mamy $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. Ponadto,*

- (a) *dla każdego $T \in \text{Orth}(E)$ istnieje dokładnie jeden element $u \in E$ taki, że dla każdego $x \in E$ mamy*

$$T(x) = u \cdot x, \quad (2.5)$$

gdzie $u = Te$. Innymi słowy, kratę $\text{Orth}(E)$ możemy identyfikować z kratą E , tj. krata $\text{Orth}(E)$ jest porządkowo izomorficzna z E , gdzie izomorfizm porządkowy h z $\text{Orth}(E)$ na E jest postaci

$$h(T) = Te; \quad (2.6)$$

- (b) *dla każdego $T \in Z(E)$ istnieje dokładnie jeden element $u \in A_e$ taki, że T jest postaci (2.5). Stąd, operator h zdefiniowany wzorem (2.6) przekształca porządkowo $Z(E)$ na A_e . Innymi słowy, operator $h|_{Z(E)}$ jest izomorfizmem kratowym z $Z(E)$ na A_e .*

W szczególności, jeśli $E \neq A_e$, to $\text{Orth}(E) \neq Z(E)$.

Twierdzenie 2.11 [39, Theorem 3.1.10] *Niech E będzie kratą archimedesową. Klasa $\text{Orth}(E)$ jest f -algebrą z identycznością $I \in \mathcal{L}_b(E)$ jako słabą jedyneką porządkową.*

Bezpośrednio z twierdzenia 2.10 otrzymujemy

Wniosek 2.12 *Jeśli krata archimedesowa E jest f -algebrą z jednością e , to każda projekcja porządkowa P na E jest postaci: $Px = p \cdot x$, dla dowolnego $x \in E$, gdzie $p = P(e) = p^2$. Mamy więc $0 \leq p \leq e$ oraz $p^2 = p$.*

W szczególności, ponieważ krata $\text{Orth}(E)$ jest f -algebrą z identycznością I w roli jedności multiplikatywnej, to każda projekcja porządkowa \mathbf{P} w $\text{Orth}(E)$ jest postaci: $\mathbf{P}(T) = T \circ P$, gdzie $T \in \text{Orth}(E)$ oraz $P = \mathbf{P}(I)$ jest projekcją porządkową w E .

Kratę zupełną w sensie Dedekinda, w której każdy zbiór parami rozłącznych dodatnich elementów posiada supremum, nazywamy **uniwersalnie zupełną**. Typowymi przykładami takich krat są $\omega(\Gamma) = \mathbb{R}^\Gamma$ oraz $L_0(\mu)$.

Kolejne twierdzenie mówi o możliwości rozszerzania ortomorfizmów z podkraty na całą kratę. Będzie ono wykorzystywane w kilku dowodach twierdzeń następujących rozdziałów.

Twierdzenie 2.13 (A. W. Wickstead, [49, Theorem 1]) *Niech E będzie kratą archimedesową oraz niech H będzie podkratą kraty E .*

- (a) *Jeśli krata E jest porządkowo zupełna w sensie Dedekinda, to każdy ortomorfizm $T \in Z(H)$ posiada rozszerzenie $\bar{T} \in Z(E)$, tj. $\bar{T}|_H = T$.*
- (b) *Jeśli krata E jest uniwersalnie zupełna, to każdy ortomorfizm $T \in Orth(H)$ posiada rozszerzenie $\bar{T} \in Orth(E)$.*

Poniższy lemat mówi, że jeśli dwie kraty są porządkowo izomorficzne, to ich kraty ortomorfizmów centralnych (z odpowiednimi $\|\cdot\|_\infty$ -normami) są porządkowo izometryczne.

Lemat 2.14 *Niech E, G będą archimedesowymi kratami liniowymi. Jeśli h jest izomorfizmem kratowym z E na G , to odwzorowanie $\hat{h} : Orth(E) \rightarrow Orth(G)$ postaci*

$$\hat{h}(S) = h \circ S \circ h^{-1}, \quad S \in Orth(E), \quad (2.7)$$

jest izomorfizmem kratowym.

Odwzorowanie odwrotne $\hat{h}^{-1} : Orth(G) \rightarrow Orth(E)$ jest postaci

$$\hat{h}^{-1}(S) = h^{-1} \circ S \circ h, \quad S \in Orth(G).$$

Ponadto, $\hat{h}|_{Z(E)}$ jest izometrią kratową z $(Z(E), \|\cdot\|_\infty)$ na $(Z(G), \|\cdot\|_\infty)$.

Dowód. Dowód pierwszej części twierdzenia jest standardowy. Wykażemy tylko, że odwzorowanie $\hat{h}|_{Z(E)}$ jest izometrią.

Z definicji, dla dowolnego $T \in Z(E)$ mamy

$$\|\hat{h}(T)\|_\infty = \inf\{\mu > 0; |\hat{h}(T)| \leq \mu I_G\}.$$

Ponieważ $|\hat{h}(T)| \leq \|T\|_\infty I_G$, więc $\|\hat{h}(T)\|_\infty \leq \|T\|_\infty$. Podobnie, dla dowolnego $S \in Z(G)$ mamy $\|\hat{h}^{-1}(S)\|_\infty \leq \|S\|_\infty$, zatem

$$\|\hat{h}(T)\|_\infty \leq \|T\|_\infty = \|\hat{h}^{-1}(\hat{h}(T))\|_\infty \leq \|\hat{h}(T)\|_\infty,$$

a więc dla dowolnego $T \in Z(E)$ zachodzi równość $\|\hat{h}(T)\|_\infty = \|T\|_\infty$. ■

Niech E będzie kratą archimedesową oraz niech e oznacza ustalony element $E^+ \setminus \{0\}$.

Symbol $\|\cdot\|_\infty^e$ oznacza normę na ideale głównym A_e , generowanym przez element e w E , postaci

$$\|x\|_\infty^e = \inf\{\lambda > 0, \quad |x| \leq \lambda e\}.$$

Uwaga 2.15 Użycie symbolu $\|\cdot\|_\infty^e$ zamiast $\|\cdot\|_\infty$ dla konkretnego elementu¹ jest na

ogół konieczne, ponieważ w przypadku, gdy $g \neq e$ oraz $A_e = A_g$, to normy wyznaczone przez e i g mogą być różne.

Uwaga ta dotyczy w szczególności głównych twierdzeń rozdziału piątego. W pewnych przypadkach, gdy z treści zagadnienia wynika, że nie może zajść nieporozumienie (np. gdy e jest konkretną słabą jedyneką) będziemy używać symbolu $\|\cdot\|_\infty$ (patrz np. wniosek 2.18).

Nierówność (2.8) w poniższym lemacie podaje dokładną zależność między elementami $|x|$ oraz e i pokazuje, że infimum wyznaczające normę $\|\cdot\|_\infty$ jest osiągalne w przypadku, gdy krata E jest archimedesowa.

Lemat 2.16 *Jeśli E jest archimedesową kratą liniową oraz $e \in E^+ \setminus \{0\}$, to dla każdego $x \in A_e$, gdzie A_e jest ideałem głównym generowanym przez e , zachodzi nierówność*

$$|x| \leq \|x\|_\infty^e \cdot e. \quad (2.8)$$

Ponadto, $(A_e, \|\cdot\|_\infty^e)$ jest M -przestrzenią.

Uwaga 2.17 Uzupełnieniem lematu 2.16 jest lemat 5.3, mówiący, że jeśli E jest F -kratą,

to $(A_e, \|\cdot\|_\infty^e)$ ideał A_e jest AM -przestrzenią, więc (na podstawie twierdzenia Kakutaniego 1.8) jest porządkowo-izometryczny z pewną $C(K)$ -przestrzenią.

Dowód lematu 2.16. Ponieważ $\|x\|_\infty^e = \inf\{\lambda > 0, |x| \leq \lambda e\}$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|x| \leq (\|x\|_\infty + \frac{1}{n})e. \quad (2.9)$$

Z nierówności (2.9) otrzymujemy $|x| - \|x\|_\infty^e e \leq \frac{1}{n}e \downarrow 0$. Ponieważ E jest archimedesowa, to z ostatniej nierówności wynika, że $|x| - \|x\|_\infty^e e \leq 0$. To dowodzi pierwszej części naszej tezy. Fakt, że $(A_e, \|\cdot\|_\infty^e)$ jest M -przestrzenią jest dobrze znany (patrz [39, Proposition 1.2.13]). ■

Przypomnijmy, że, z definicji, krata ortomorfizmów centralnych na kracie archimedesowej E posiada mocną jedynekę I_E .

Ponieważ dla każdego $T \in Z(E)$ wprost z definicji mamy $\|T\|_\infty^{I_E} = \|T\|_\infty$, to z lematu 2.16 (nierówność (2.8)) otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.18 *Jeśli E jest kratą archimedesową, to dla każdego $T \in Z(E)$ spełniona jest nierówność*

$$|T| \leq \|T\|_\infty \cdot I_E, \quad (2.10)$$

gdzie I_E oznacza operator identycznościowy na E .

¹tu element e jest mocną jedyneką ideału A_e

Lemat 2.19 *Jeśli B jest pasmem projekcyjnym kraty E oraz $P : E \rightarrow B$ jest projekcją porządkową, to odwzorowanie $\widehat{P} : Orth(E) \rightarrow Orth(E)$ postaci $\widehat{P}(T) = T \circ P$ jest projekcją porządkową w $Orth(E)$ na pasmo projekcyjne w $Orth(E)$ postaci $Orth(B) \circ P$, porządkowo izomorficzne z $Orth(B)$.*

Dowód. Dowód tego lematu jest niemal standardowy, a wyjaśnienie wymaga jedynie faktu, że dany operator jest ortomorfizmem.

Ponieważ złożenie dwóch ortomorfizmów jest ortomorfizmem, to odwzorowanie \widehat{P} jest dobrze określone. Ponadto $\widehat{P} \circ \widehat{P} = \widehat{P}$, więc \widehat{P} jest projekcją, a warunek $0_E \leq P \leq I_E$ natychmiast implikuje nierówność $0_{Orth(E)} \leq \widehat{P} \leq I_{Orth(E)}$, gdzie $0_{Orth(E)}$ (odp., $I_{Orth(E)}$) jest elementem zerowym (odp., identyznością) kraty $Orth(E)$; stąd, \widehat{P} jest projekcją porządkową w $Orth(E)$.

Ustalmy $T_0 \in Orth(B)$. Ponieważ $P(E) = B$ oraz $T_0(B) \subset B$, to operator $T_0 \circ P$ odwzorowuje E w E , zatem jest endomorfizmem kraty E . Ponadto, łatwo sprawdzić, że dla dowolnego pasma C kraty E mamy² $P(C) \subset C \cap B$, skąd $T_0 P(C) \subset T_0(C \cap B) \subset C \cap B$ (bo, $C \cap B$ jest pasmem w B), a stąd $(T_0 \circ P)(C) \subset C$, skąd wynika, że $T_0 \circ P \in Orth(E)$, więc odwzorowanie $h : Orth(B) \rightarrow Orth(E)$ postaci $h(T_0) = T_0 \circ P$ jest dobrze określone.

Operator h jest:

- (a) *iniekcją* (bo warunek $h(T_0) = \{0\}$ jest równoważny warunkowi $T_0(B) = \{0\}$, czyli $T_0 = 0$),
- (b) *surjekcją* na $Im \widehat{P}$: dla dowolnego $S \in \widehat{Orth}(E)$, kładąc $S_1 := \widehat{P}(S) = S \circ P$ oraz $T_0 = S_1|_B$ mamy $h(T_0) = S_1|_B \circ P = S_1 = \widehat{P}(S)$; to dowodzi jednocześnie inkluzji

$$\widehat{P}(Orth(E)) \subset Orth(B) \circ P. \quad (2.11)$$

Inkluzja $\widehat{P}(Orth(E)) \supset Orth(B) \circ P$ jest oczywista, co w połączeniu z inkluzją (2.11) daje równość:

- (c) $\widehat{P}(Orth(E)) = Orth(B) \circ P$.

Ponadto, łatwo zauważyć, że warunek $h(T_0) \geq 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $T_0 \geq 0$. Z punktów (a), (b), (c) wynika teraz, że h jest izomorfizmem porządkowym z $Orth(B)$ na pasmo postaci $Orth(B) \circ P$. ■

Lemat 2.20 [4, Exercise 6, p. 263] *Niech E będzie F -kratą. Wówczas granica punktowa T danego ciągu ortomorfizmów (T_n) określonych na E jest ortomorfizmem na E .*

²Dla dowolnego $c \in C^+$ zachodzą nierówności $0 \leq P(c) \leq c$ oraz $P(c) \in B$, zatem $P(c) \in B$. Stąd $P(C) \subset B \cap C \subset C$.

Dowód. Niech $(T_n) \subset Orth(E)$ oraz niech $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$, dla wszystkich $x \in E$. Korzystając z nierówności $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b|$ dla $a, b, c \in E$ (patrz [4, Theorem 1.6]), otrzymujemy, że jeśli $|x| \wedge |y| = 0$, to

$$|Tx| \wedge |y| = | |Tx| \wedge |y| - |T_n x| \wedge |y| | \leq | |Tx| - |T_n x| | \leq |Tx - T_n x| \rightarrow 0,$$

przy $n \rightarrow \infty$. Stąd $|Tx| \wedge |y| = 0$, a zatem $T \in Orth(E)$. ■

Własność ortomorfizmów przedstawioną w kolejnym lemacie będziemy wykorzystywać w dowodzie lematu 3.2 oraz twierdzenia 3.18. Jest ona równoważną postacią fundamentalnego wyniku Zaanena (twierdzenie 2.5).

Lemat 2.21 *Niech A będzie niepustym podzbiorem stożka E^+ archimedesowej kraty E oraz niech $T \in Orth(E)$. Jeśli $Tu \geq 0$ dla każdego $u \in A$, to $T|_{A^{dd}} \geq 0$.*

Dowód. Dla ustalonego $u \in A$ mamy

$$Tu = T^+u - T^-u \geq 0. \quad (2.12)$$

Ponieważ zakładamy, że $u \geq 0$, to z warunku (2.12) otrzymujemy $T^+u \geq T^-u \geq 0$, zatem

$$(T^+u) \wedge (T^-u) = T^-u \geq 0. \quad (2.13)$$

Przypomnijmy, że działania w kracie ortomorfizmów są punktowe (twierdzenie 2.3), więc warunek (2.13) przyjmuje postać

$$(T^+ \wedge T^-)(u) = T^-u \geq 0, \quad (2.14)$$

lecz $T^+ \wedge T^- = 0$, więc z relacji (2.14) dostajemy

$$T^-u = 0. \quad (2.15)$$

Z warunków (2.12) oraz (2.15) otrzymujemy zatem

$$Tu = T^+u. \quad (2.16)$$

Ponieważ u był dowolnie wybranym elementem zbioru A , to z (2.16) wynika, że $T|_A = T^+|_A$, więc na podstawie twierdzenia Zaanena 2.5 mamy

$$T|_{A^{dd}} = T^+|_{A^{dd}},$$

a stąd $T \geq 0$ na A^{dd} , jak twierdziliśmy. ■

2.2 Klasyczne przykłady ortomorfizmów

W tym rozdziale podaję podstawowe przykłady ortomorfizmów w kratkach Banacha i F -kratkach, które będą wykorzystywać w następnych rozdziałach pracy.

Poniższe przykłady ortomorfizmów zostały po raz pierwszy przedstawione w pracy A. C. Zaanena [58]. Symbol \cong oznacza izomorfizm porządkowy odpowiednich krat liniowych.

Przykład 2.22 Niech K będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Ponieważ kraty ω , $C(K)$ oraz $C_b(K)$ (wyposażone w naturalny porządek i mnożenie) są f -algebrami z jednością, więc z twierdzenia 2.10, na podstawie tożsamości (2.5), otrzymujemy natychmiast trzy pierwsze przykłady.

- (a) $Orth(\omega) \cong \omega$ oraz $Z(\omega) \cong \ell_\infty$: dla każdego $T \in Orth(\omega)$ (odp., $T \in Z(\omega)$) istnieje dokładnie jeden element $u \in \omega$ (odp., $u \in \ell_\infty$) taki, że $Tx = u \cdot x$ dla każdego $x \in \omega$ (odp. $x \in \ell_\infty$). Stąd $Orth(\omega) \neq Z(\omega)$.
- (b) $Orth(C(K)) \cong C(K)$: dla każdego $T \in Orth(E)$ istnieje dokładnie jeden element $u \in C(K)$ taki, że dla każdego $x \in C(K)$ mamy $Tx = u \cdot x$. Izomorfizmem porządkowym jest odwzorowanie $T \rightarrow T(\mathbf{1}_K)$. Ponadto, $Z(C(K)) \cong C_b(K)$.
- (c) Ponieważ krata $C_b(K)$ jest kratą Banacha (z normą supremalną), to na podstawie twierdzenia 2.7 (1) - otrzymujemy:

$$Orth(C_b(K)) = Z(C_b(K)) \cong C_b(K);$$

podobnie jak w punkcie (b), dla każdego ortomorfizmu $T \in Orth(C_b(K))$ istnieje dokładnie jeden element $u \in C_b(K)$ taki, że dla każdego $x \in C_b(K)$ mamy $Tx = u \cdot x$. Izomorfizm porządkowy z $Orth(C_b(K))$ na $C_b(K)$ ma taką samą postać jak w podpunkcie (b).

Dowody kolejnych dwóch przykładów są znacznie mniej elementarne.

- (d) [58, Theorem 5] Niech K będzie lokalnie zwartą, lecz niezwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, oraz niech $C_c(K)$ oznacza f -algebrę (bez jedności) wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych na K o zwartym nośniku. Mamy $Orth(C_c(K)) \cong C(K)$: dla każdego ortomorfizmu $T \in Orth(C_c(K))$ istnieje dokładnie jeden element $u \in C(K)$ taki, że $Tx = u \cdot x$ dla każdego $x \in C_c(K)$.
- (e) [58, Theorem 7] Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary, gdzie μ oznacza miarę σ -skończoną i zupełną, oraz niech $0 < p < \infty$. Wtedy $Orth(L_p(\mu)) \cong L_\infty(\mu)$: dla każdego ortomorfizmu $T \in Orth(L^p(\mu))$ istnieje dokładnie jeden element $u \in L_\infty(\mu)$ taki, że dla każdego $x \in L^p(\mu)$ mamy $Tx = u \cdot x$.

W dowodach kolejnych przykładów Zaanen wykorzystuje własności ortomorfizmów opisane w twierdzeniach 2.5 oraz 2.10. Przypomnijmy, że jeśli Γ jest zbiorem niepustym, to w zbiorze \mathbb{R}^Γ działania algebraiczne i kratowe rozumiemy punktowo.

Przykład 2.23 [58, Theorem 6] Niech E_1 oznacza podkrate kraty $\mathbb{R}^{[0,1]}$ funkcji f ciągłych i kawałkami liniowych, tj. takich, że wykres f składa się ze skończonej ilości funkcji liniowych. Wówczas $Orth(E) = Z(E) = \text{lin}\{I_{[0,1]}\}$. Zauważmy, że krata E_1 jest wymiaru continuum. Rzeczywiście, zbiór $\mathcal{F} = \{f_t : t \in (0, 1)\}$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ postaci $f_t(x) = 0$ dla $x \in [0, t]$ oraz f_t liniowa na $[t, 1]$, przy czym $f_t(1) = 1$, jest zbiorem mocy $\text{card}[0, 1] = 2^{\aleph_0}$ oraz liniowo niezależnym. Liniowa niezależność zbioru \mathcal{F} wynika z faktu, że jeśli $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$, to dla $x_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, mamy $f_{t_j}(x_k) = 0$, gdzie $j = k+1, \dots, n$; stąd równania $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_{t_j}(x_k) = 0$, dla $k = 1, \dots, n-1$ redukują się do równań:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_{t_1}(x_1) &= 0, \\ \lambda_1 f_{t_1}(x_2) + \lambda_2 f_{t_2}(x_2) &= 0, \\ \dots \\ \lambda_1 f_{t_1}(x_{n-1}) + \lambda_2 f_{t_2}(x_{n-1}) + \dots + \lambda_n f_{t_n}(x_{n-1}) &= 0, \end{aligned}$$

a ponieważ $f_{t_j}(x_j) > 0$, to $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Mamy zatem: E_1 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $C[0, 1]$ oraz $\dim(E_1) \geq 2^{\aleph_0}$, skąd $\dim(E_1) = 2^{\aleph_0} = \dim(C[0, 1])$.

Kolejny przykład pokazuje, że istnieją ciągi wstępujące (E_n) podkrat f -algebr takie, że każda podkrata E_n jest wymiaru nieskończonego i posiada tylko trywialne ortomorfizmy.

Przykład 2.24 [58, str 201] Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech E_n oznacza podkrate $\mathbb{R}^{[0,1]}$ składającą się z funkcji kawałkami wielomianowych stopnia co najwyżej n . Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $E_1 \subset E_n \subset E_{n+1}$, więc z przykładu 2.23 wynika, że $\dim(E_n) = \infty$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $Orth(E_n) = Z(E_n) = \text{lin}\{I_{[0,1]}\}$. Z drugiej strony, kładąc $E_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, otrzymujemy f -algebrę z jednością. W tym przypadku każdy ortomorfizm na E_∞ jest mnożeniem przez ustalony element $u \in E_\infty$ (twierdzenie 2.10).

2.3 Przykłady ortomorfizmów w oparciu o twierdzenie Wicksteada

W tym podrozdziale podaję szereg przykładów ortomorfizmów, których postać wynika z twierdzenia Wicksteada 2.13 o rozszerzaniu ortomorfizmów centralnych. Podstawowym wynikiem jest tu:

Twierdzenie 2.25 *Niech E będzie kratą zupełną w sensie Dedekinda oraz niech J oznacza ideał porządkowo gęsty w E . Wtedy kraty ortomorfizmów centralnych $Z(J)$ oraz $Z(E)$ są porządkowo izomorficzne.*

Żądanym izomorfizmem porządkowym jest odwzorowanie obcięcia $r : Z(E) \rightarrow Z(J)$ postaci $r(T) = T|_J$. Odwzorowaniem odwrotnym do r jest operator rozszerzania ext : dla każdego $T^0 \in Z(J)$ istnieje dokładnie jeden ortomorfizm $T = \overline{T^0} = ext(T^0)$ taki, że $T|_J = T^0$.

Dowód. Niech $0 \leq T \in Z(E)$. Na podstawie lematu 2.8 mamy $T(J) \subset J$, zatem $T|_J \in Z(J)$. Stąd otrzymujemy inkluzję

$$\{T|_J : T \in Z(E)\} \subset Z(J). \quad (2.17)$$

Niech teraz $T^0 \in Z(J)$. Na podstawie twierdzenia Wicksteada 2.13 istnieje ortomorfizm $T = \overline{T^0} \in Z(E)$ taki, że $T|_J = T^0$ (tj. $\overline{T^0}$ jest rozszerzeniem T^0 na całą kratę E). Ponieważ ideał J jest porządkowo gęsty w E , to z twierdzenia Zaanena 2.5 wynika, że ortomorfizm $\overline{T^0}$ jest wyznaczony jednoznacznie. Stąd otrzymujemy inkluzję $Z(J) \subset \{T|_J : T \in Z(E)\}$, która w połączeniu z (2.17) daje równość

$$Z(J) = \{T|_J : T \in Z(E)\}. \quad (2.18)$$

Z jednoznaczności rozszerzenia $\overline{T^0}$ wynika, że odwzorowanie $r : Z(E) \rightarrow Z(J)$ postaci $r(T) = T|_J$, gdzie $T \in Z(E)$, jest dobrze określone i jest surjekcją.

Odwzorowanie r jest liniowe. Istotnie, dla dowolnych ortomorfizmów $T, T_1, T_2 \in Z(E)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $r(T_1 + T_2) = (T_1 + T_2)|_J = T_1|_J + T_2|_J = r(T_1) + r(T_2)$ oraz $r(\alpha T) = \alpha T|_J = \alpha r(T)$.

Ponadto, r jest iniekcją: $r(T) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T|_J = 0$. Na podstawie twierdzenia Zaanena 2.5 ostatnia równość implikuje $T|_{J^{ad}} = 0$. Ponieważ ideał J jest porządkowo gęsty w E , to otrzymujemy $T|_E = 0$, więc $T = 0$.

Operator r jest homomorfizmem kratowym: dla każdego $0 \leq x \in J$ mamy

$$|r(T)|(x) = |T|_J(x) = |T(x)| \stackrel{(2.4)}{=} |T|(x) = |T|_J(x) = r(|T|)(x),$$

więc $|r(T)| = r(|T|)$, a zatem (na podstawie lematu 1.13) r jest homomorfizmem kratowym. Ostatecznie, ponieważ r jest dodatkowo bijekcją (liniową), to r jest izomorfizmem kratowym.

Z twierdzenia Wicksteada 2.13 oraz porządkowej gęstości ideału J wynika, że odwzorowanie odwrotne $ext : Z(J) \rightarrow Z(E)$ jest postaci $ext(T^0) = \overline{T^0}$, bo $r \circ ext(T^0) = \overline{T^0}|_J = T^0$. Stosując ponownie twierdzenie Zaanena 2.5 otrzymujemy, że T jest jednoznacznym rozszerzeniem ortomorfizmu $T|_J$ (bo $J^{dd} = E$), więc

$$ext \circ r(T) = ext(r(T)) = ext(T|_J) = T.$$

Z faktu, że r jest izomorfizmem porządkowym wynika, że operator odwrotny ext również jest takim izomorfizmem. ■

Niech E będzie f -algebrą z jednością multiplikatywną e . Na podstawie twierdzenia 2.10 (b), dla każdego ortomorfizmu $T \in Z(A_e)$ istnieje dokładnie jeden element $u \in A_e$ taki, że $T = T_u$, gdzie T_u jest ortomorfizmem na E postaci

$$T_u x = u \cdot x, \quad x \in A_e. \quad (2.19)$$

Ten fakt wykorzystamy we wniosku wynikającym z twierdzenia 2.25.

Wniosek 2.26 *Niech E będzie zupełną w sensie Dedekinda f -algebrą z jednością e . Jeśli J jest ideałem porządkowo gęstym w E , to krata $Z(J)$ jest porządkowo izomorficzna z ideałem A_e .*

Dokładniej, przy oznaczeniach jak wyżej, każdy element $T \in Z(J)$ jest postaci $T = T_{u|_J}$, gdzie element u jest wyznaczony jednoznacznie. Stąd, żądany izomorfizm z A_e na $Z(J)$ jest postaci $r(u) = T_{u|_J}$, a zatem

$$Z(J) = \{T_{u|_J} : u \in A_e\}. \quad (2.20)$$

Dowód. Niech r oraz ext oznaczają, odpowiednio, operator zawężania i rozszerzania zdefiniowane w dowodzie twierdzenia 2.25. Na podstawie twierdzenia 2.10 (b), odwzorowanie h działające z $Z(E)$ do A_e określone wzorem $h(T) = T(e) = u$, gdzie $T = T_u$ (patrz (2.19)), jest izomorfizmem porządkowym. Stąd odwzorowanie odwrotne $h^{-1} : A_e \rightarrow Z(E)$ jest postaci

$$h^{-1}(u) = T = T_u. \quad (2.21)$$

Niech T^0 będzie dowolnym ustalonym elementem $Z(J)$. Na podstawie twierdzenia 2.25 mamy

$$\overline{T^0} = ext(T^0) \in Z(E). \quad (2.22)$$

Z drugiej strony, na podstawie równości (2.21) mamy

$$ext(T^0) = T_u, \quad (2.23)$$

dla pewnego (jednoznacznie wyznaczonego) elementu $u \in A_e$. Z relacji (2.22) oraz (2.23) otrzymujemy

$$T_{u|_J} = r(T_u) = r(ext(T^0)) = T^0.$$

Ponieważ ideał J jest porządkowo gęsty w E , to z twierdzenia Zaanena 2.5 wynika, że również ortomorfizm T_u jest wyznaczony jednoznacznie. Stąd dostajemy ciąg izomorfizmów $A_e \xrightarrow{h^{-1}} Z(E) \xrightarrow{r} Z(J)$. Złożenie $r \circ h^{-1}$ jest żądanym izomorfizmem, skąd otrzymujemy równość (2.20). ■

W kolejnych wnioskach, które będą stosować w dalszych przykładach, literą E (a nie J) oznaczam ideał odpowiedniej f -algebry z jednością.

Wniosek 2.27 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary, gdzie μ oznacza miarę σ -skończoną i zupełną. Jeśli E jest ideałem porządkowo gęstym w $L_0(\mu)$, to krata ortomorfizmów centralnych $Z(E)$ jest izomorficzna porządkowo z kratą $L_\infty(\mu)$.*

Dokładniej, każdy ortomorfizm centralny na E jest postaci T_u , gdzie $u \in L_\infty(\mu)$, czyli $T_u x = u \cdot x$ dla każdego $x \in E$.

Dowód. Krata $L_0(\mu)$ jest f -algebrą z jednością z naturalnymi działaniami μ -prawie wszędzie (dodawanie i mnożenie elementów). Jednością multiplikatywną jest funkcja $\mathbf{1}_S$ tożsamościowo równa 1 μ -prawie wszędzie na S . Stąd, ideał $A_{\mathbf{1}_S}$ w $L_0(\mu)$ jest równy $L_\infty(\mu)$. Dalej stosujemy wniosek 2.26. ■

Wniosek 2.28 *Niech E będzie ideałem porządkowo gęstym³ w f -algebrze $\omega(\Gamma) = \mathbb{R}^\Gamma$. Wtedy $Z(E) \cong \ell_\infty(\Gamma)$. Dokładniej, każdy ortomorfizm centralny na E jest postaci T_u , gdzie $u \in \ell_\infty(\Gamma)$, czyli $T_u x = u \cdot x$ dla każdego $x \in E$.*

Dowód. Krata $\omega(\Gamma)$ jest zupełną w sensie Dedekinda f -algebrą z jednością multiplikatywną $\mathbf{1}_\Gamma$. Stąd, ideał $A_{\mathbf{1}_\Gamma}$ w $\omega(\Gamma)$ jest równy $\ell_\infty(\Gamma)$. Dalej stosujemy wniosek 2.26. ■

Przykład 2.29 Niech $E = (E, \|\cdot\|_E)$ będzie przestrzenią Banacha-Köthe'go czyli, takim ideałem porządkowo gęstym w $L_0(\mu)$, że warunek $|x| \leq |y|$, $y \in E$, $x \in L_0(\mu)$, implikuje, że $x \in E$ oraz $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. Na podstawie twierdzenia 2.7 mamy $Orth(E) = Z(E)$, a z wniosku 2.27 otrzymujemy $Z(E) \cong L_\infty(\mu)$, więc $Orth(E) \cong L_\infty(\mu)$, gdzie izomorfizm porządkowy rozumiemy jak we wniosku 2.27.

W szczególności, przykład ten stosuje się do klasycznych banachowskich przestrzeni funkcyjnych Orlicza, Musielaka-Orlicza: $L^M(\mu)$, $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, itp.

Podam teraz dwa przykłady krat dyskretnych, w których można dość łatwo wyznaczyć postać ortomorfizmów. Przykład 2.30 można otrzymać bezpośrednio z wniosku 2.27, gdy przyjmiemy $S = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ oraz μ jest miarą liczącą, ale pokazujemy, że można do niego stosować również wniosek 2.28.

³Porządkowa gęstość ideału E w $\omega(\Gamma)$ implikuje, że E jest kratą dyskretną i wszystkie wektory jednostkowe e_γ należą do E .

Przykład 2.30 Jeśli $\Phi = (\varphi_n)$ jest ciągiem wypukłych funkcji Orlicza, to ℓ^Φ jest kratą Banacha i ideałem porządkowo gęstym w ω . Na podstawie wniosku 2.28 oraz twierdzenia 2.7 mamy $Orth(\ell^\Phi) = Z(\ell^\Phi) \cong \ell_\infty$: dla każdego $T \in Orth(\ell^\Phi)$ istnieje dokładnie jeden element $u \in \ell_\infty$ taki, że dla każdego $x \in \ell^\Phi$ mamy $Tx = u \cdot x$.

Przykład 2.31 Niech $1 \leq p < \infty$, oraz niech Γ będzie dowolnym ustalonym zbiorem nieskończonym (niekoniecznie przeliczalnym) oraz niech E oznacza kratę Banacha

$$\ell_p(\Gamma) = \{x \in \omega(\Gamma) : \text{supp}(x) \text{ jest przeliczalny oraz } \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p < \infty\}$$

z normą

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Krata E jest porządkowo gęstym ideałem w $\omega(\Gamma)$, zatem na podstawie twierdzenia 2.7 oraz wniosku 2.28 otrzymujemy, podobnie jak w przykładzie 2.30, $Orth(E) \cong \ell_\infty(\Gamma)$.

2.4 Ortomorfizmy na kracie rzeczywistych funkcji całkowych

Niech E_0 będzie F -kratą dyskretną postaci

$$E_0 = \{x = (x_n) \in \omega, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0\}. \quad (2.24)$$

Kratę tę można interpretować jako przestrzeń funkcji f całkowych $H_{\mathbb{R}}$ na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

o współczynnikach rzeczywistych x_n , gdzie porządek na $H_{\mathbb{R}}$ definiujemy następująco:

$$f \leq g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0) \text{ dla każdego } n \geq 0.$$

Na $H_{\mathbb{R}}$ istnieje ciąg norm $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ postaci $p_k(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| k^{n-1}$, w których krata $H_{\mathbb{R}}$ jest zupełna (więc Frechéta). W 1948 roku G. Iyer wykazał [17], że topologia na E_0 , wyznaczona przez ciąg $(p_k)_{k=1}^{\infty}$, jest identyczna z topologią wyznaczoną przez F -normę

$$\|x\| = \sup\{\sqrt[n]{|x_n|}, n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.25)$$

W poniższym przykładzie wykażemy, że krata E_0 posiada ortomorfizmy niecentralne, czyli $Orth(E_0) \neq Z(E_0)$. Stąd wynika, że *twierdzenia Luxemburga 2.7 (że $Orth(E) = Z(E)$, gdy E jest kratą Banacha) nie można przenieść bezpośrednio na przypadek, gdy topologia kraty Frechéta (i nie Banacha) jest generowana przez ciąg norm.*

Przykład 2.32 Niech E_0 będzie F -kratą postaci (2.24) wyposażoną w F -normę określoną wzorem (2.25), oraz niech e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy. Oczywiście E_0 jest ideałem w ω . Zbiór $D = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest maksymalnym podzbiorem elementów dyskretnych i parami rozłącznych w E_0 , co implikuje porządkową gęstość ideału E_0 w ω . Stąd, na podstawie wniosku 2.28 mamy $Z(E_0) \cong \ell_\infty$.

Wykażemy, że każdy ortomorfizm T na E_0 jest postaci

$$T_u(x) = u \cdot x, \text{ gdzie } u = (u_n)_{n=1}^\infty \text{ oraz } \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|u_n|} < \infty, \quad (2.26)$$

a stąd

$$Orth(E_0) = \{T_u : u = (u_n)_{n=1}^\infty \in \omega, \text{ gdzie } \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|u_n|} < \infty\}; \quad (2.27)$$

w szczególności,

$$Orth(E_0) \neq Z(E_0).$$

Zauważmy, że jeśli $x \in E_0$ oraz ciąg $u = (u_n)_{n=1}^\infty$ spełnia warunek (2.26), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n \cdot x_n|} = 0,$$

zatem T_u jest ortomorfizmem na E_0 . To dowodzi, że prawa strona w (2.27) jest zawarta w $Orth(E_0)$.

Niech T będzie dowolnym elementem $Orth(E_0)$. Ponieważ każdy element e_n jest dyskretny, to z twierdzenia 2.1 (3) otrzymujemy, że $T(e_n) \in e_n^{dd} = \text{lin}(e_n)$, więc istnieje liczba $u_n \in \mathbb{R}$ taka, że $Te_n = u_n e_n$, $n = 1, 2, \dots$. Niech T_1 oznacza ortomorfizm na ω postaci $T_1 x = u \cdot x$, gdzie $u = (u_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem określonym jak wyżej.

Krata ω jest uniwersalnie zupełna, więc z twierdzenia Wicksteada 2.13 wynika, że istnieje rozszerzenie $\bar{T} \in Orth(\omega)$. Ponadto, dla $n = 1, 2, \dots$ mamy $\bar{T}(e_n) = u_n \cdot e_n = T_1(e_n)$, zatem z twierdzenia Zaanena 2.5 otrzymujemy $\bar{T} = T_1$ (bo $D^{dd} = \omega$). Stąd $\bar{T}x = u \cdot x$ dla wszystkich $x \in \omega$; w szczególności

$$Tx = \bar{T}x = u \cdot x \text{ dla wszystkich } x \in E_0.$$

Gdyby $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$, to istniałby ciąg (u_{n_k}) taki, że $\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \uparrow \infty$. Oczywiście można założyć, że $u_{n_1} \neq 0$. Rozważmy element $x = (x_n) \in E_0$ postaci $x_n = 0$ dla $n \neq n_k$ oraz $x_{n_k} = \frac{1}{u_{n_k}}$: mamy

$$\sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} = \frac{1}{\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|}} \rightarrow 0, \text{ przy } k \rightarrow \infty \text{ oraz } \sqrt[n]{|x_n|} = 0 \text{ dla } n \neq n_k.$$

Stąd otrzymujemy $(u \cdot x)(n_k) = u_{n_k} \cdot \frac{1}{u_{n_k}} = 1$, a zatem $\sqrt[n]{|u_n \cdot x_n|} \not\rightarrow 0$, przy $n \rightarrow \infty$, więc $u \cdot x \notin E_0$. Otrzymana sprzeczność implikuje, że musi być $\sup \sqrt[n]{|u_n|} < \infty$. Ostatecznie, $T = T_u$, gdzie $u = (u_n)_{n=1}^\infty$ spełnia warunek $\sup \sqrt[n]{|u_n|} < \infty$, a więc każdy ortomorfizm $T \in Orth(E_0)$ jest postaci (2.26), jak twierdzimy. To implikuje w (2.27) inkluzję ' \subset ', co w połączeniu z wykazaną już inkluzją ' \supset ' daje równość (2.27).

Uwaga 2.33 Niech E_0 będzie F -kreatą z przykładu 2.32, oraz niech e_n oznacza, jak w tym przykładzie, n -ty wektor jednostkowy. Połóżmy $r(e_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|te_n\|_E$. Z definicji F -normy mamy $r(e_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{t \cdot 1} = \infty$, więc $\delta(D) := \inf_{n \in \mathbb{N}} r(e_n) = \infty$. Stąd na podstawie udowodnionego w rozdziale trzecim twierdzenia 3.12, F -kreata E_0 nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni ω . Inne przykłady F -kreat nie zawierających kopii ω , a posiadających ortomorfizmy niecentralne, można znaleźć w klasie niebanachowskich ciągowych kreat Musielaka-Orlicza (przykład 4.5 oraz przykłady z podrozdziału 4.2).

Rozdział 3

Problem ortomorfizmów centralnych w F -kratach niebanachowskich

3.1 Wprowadzenie

W 2012 roku M. Meyer oraz E. Chil [8, str. 182] postawili otwarty problem wyznaczenia warunków wystarczających na to, aby dla kraty lokalnie solidnej E zachodziła równość

$$\text{Orth}(E) = Z(E), \quad (3.1)$$

tj. aby każdy ortomorfizm na E był centralny. Relacja ta była badana również przez A. Wicksteada w pracy [48] z roku 1977.

Na podstawie wyniku Luxemburga 2.7 wiadomo, że równość (3.1) zachodzi, gdy E jest kratą Banacha. Z drugiej strony, dla F -kraty ω wszystkich ciągów liczb rzeczywistych mamy

$$\text{Orth}(\omega) \cong \omega \neq \ell_\infty \cong Z(\omega)$$

(przykład 2.22 (a)). Ponadto, dla kraty unormowanej c_{00} - ciągów prawie zerowych wyposażonej w normę supremalną - mamy

$$\text{Orth}(c_{00}) \cong \omega \neq Z(E) = \ell_\infty,$$

ponieważ dla każdego $x \in c_{00}$ oraz każdego $y \in \omega$ element $x \bullet y$ leży w c_{00} (tu " \bullet " oznacza mnożenie po współrzędnych). Stąd wynika, że warunkami koniecznymi na to, aby zachodziła równość (3.1), powinny być:

- (a) zupełność topologiczna kraty lokalnie solidnej E ,
- (b) niezawieranie izomorficznej kopii ω przez kratę E .

W twierdzeniach 3.13 (przypadek dyskretny) oraz 3.16 (przypadek bezatomowy i σ -Fatou) potwierdzamy, że warunek (b) jest rzeczywiście konieczny na to, aby zachodziła równość (3.1). Na podstawie uwagi 2.33 wiemy jednak, że brak kopii ω w F -kracie E nie gwarantuje

jeszcze równości (3.1), a dalsze przykłady takich F -krat podajemy m.in. przykładzie 4.5 oraz w podrozdziale 4.2.

W twierdzeniu 3.18 podajemy użyteczny warunek (\star) *wystarczający* na zachodzenie równości (3.1). W przypadku, gdy E jest kratą dyskretną, warunek (\star) można łatwo wyznaczyć za pomocą elementów dyskretnych kraty E (twierdzenie 3.27).

Analiza równości (3.1) dzieli się na dwie zasadnicze części: gdy F -krata zawiera izomorficzną kopię F -krat ω (podrozdział 3.3) i gdy E takiej kopii nie zawiera (podrozdział 3.4). W tej analizie podstawową rolę odgrywają wyniki mówiące, że F -krata funkcyjna E zawiera izomorficzną (tj. liniowo-homeomorficzną) kopię ω wtedy i tylko wtedy, gdy E zawiera kratowo-topologiczną kopię ω : twierdzenie 3.3 (przypadek dyskretny) oraz twierdzenie 3.14 (przypadek bezatomowy), przy czym twierdzenie 3.3 ma znacznie mocniejszą tezę (tj., E zawiera pasmo projekcyjne kratowo-topologicznie izomorficzne z ω).

3.2 Ogólne warunki wystarczające na istnienie ortomorfizmów niecentralnych na danej F -kracie

W poniższym lemacie przedstawiamy prosty warunek gwarantujący istnienie niecentralnego ortomorfizmu na kracie E . Jest on szczególnie użyteczny w przypadku, gdy E jest kratą dyskretną.

Lemat 3.1 *Niech E będzie kratą archimedesową zawierającą pasmo projekcyjne B takie, że $Orth(B) \neq Z(B)$. Wtedy $Orth(E) \neq Z(E)$.*

Dokładniej, $Orth(E)$ zawiera pasmo projekcyjne izomorficzne porządkowo z $Orth(B)$.

Dowód. Z lematu 2.19 wynika, że krata $Orth(E)$ zawiera pasmo projekcyjne \mathcal{H} postaci $\mathcal{H} = Orth(B) \circ P$, gdzie P jest projekcją porządkową z E na B . Jeśli zatem $Orth(B) \neq Z(B)$, to dla każdego $0 \leq T_0 \in Orth(B) \setminus Z(B)$ zachodzi warunek $\sim (\exists_{\lambda > 0} T_0 b \leq \lambda b$ dla każdego $b \in B^+$); równoważnie,

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ istnieje element } b_n \in B^+ \text{ taki, że } \sim (T_0 b_n \leq n b_n). \quad (3.2)$$

Ustalmy $0 \leq T_0 \in Orth(B) \setminus Z(B)$. Wówczas dla ortomorfizmu $T := T_0 \circ P \in \mathcal{H}$ oraz ciągu (b_n) z warunku (3.2) otrzymujemy $\sim (T b_n \leq n b_n)$, co dowodzi, że $T \notin Z(E)$. ■

Kolejny lemat będziemy stosować w dowodach twierdzeń 3.3 oraz 3.18. Dowód tego lematu oparty jest na dowodzie Luxemburga [4, Theorem 15.5] równości $Orth(E) = Z(E)$ w przypadku, gdy E jest kratą Banacha (por. twierdzenie 2.7).

Lemat 3.2 Niech E będzie kratą archimedesową. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) istnieje $0 \leq T \in \text{Orth}(E) \setminus Z(E)$,

(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje element $y_n \in E^+ \setminus \{0\}$ taki, że dla każdego $v \in [0, y_n]$ zachodzi nierówność

$$Tv \geq n \cdot v. \quad (3.3)$$

(iii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje element $y_n \in E^+$ taki, że zachodzi nierówność

$$Ty_n \geq n \cdot y_n. \quad (3.4)$$

Dowód. Implikacja (ii) \Rightarrow (iii) jest oczywista.

(ii) \Rightarrow (i) Załóżmy warunek (ii). Kładąc w nierówności (3.3): $v = y_n$ otrzymujemy $Ty_n \geq n \cdot y_n$, $n = 1, 2, \dots$, co przeczy istnieniu stałej $\lambda > 0$ takiej, że dla każdego $y \in E^+$ zachodzi nierówność $Ty \leq \lambda y$. Istotnie, gdyby tak nie było, to mielibyśmy $\lambda y_n \geq n \cdot y_n$, tj. $(\lambda - n)y_n \geq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy $t_n = \lambda - n$. Ponieważ $y_n \geq 0$, to dla $n > [\lambda] + 1$ mielibyśmy $t_n y_n \geq 0$, przy czym $t_n < 0$. Mnożąc ostatnią nierówność przez $\frac{1}{t_n}$ otrzymalibyśmy $y_n \leq 0$, co wraz z założeniem $y_n \geq 0$, prowadzi do sprzeczności: $y_n = 0$, dla $n > [\lambda] + 1$.

(i) \Rightarrow (ii) Niech spełniony będzie warunek (i), tj. istnieje dodatni ortomorfizm $T \in \text{Orth}(E) \setminus Z(E)$, a zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\sim (T \leq k \cdot I_E)$; równoważnie, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje element $x_k \in E^+ \setminus \{0\}$ taki, że $\sim (Tx_k \leq k \cdot x_k)$, a więc $[(T - k \cdot I_E)(x_k)]^+ > 0$ dla $k = 1, 2, \dots$. Połóżmy

$$S_k = T - k \cdot I_E = S_k^+ - S_k^- \quad (3.5)$$

oraz

$$y_k = [S_k(x_k)]^+.$$

Wprost z definicji, mamy $y_k > 0$ (tj. $y_k \geq 0$ oraz $y_k \neq 0$). Dalej stosujemy własności ortomorfizmów opisane w twierdzeniu 2.3. Na podstawie relacji (2.4) oraz (2.3) rozdziału 1, mamy

$$y_k = (S_k)^+(x_k) \quad (3.6)$$

oraz

$$S_k^+ \circ S_k^- = 0. \quad (3.7)$$

Stąd otrzymujemy

$$S_k(y_k) = (S_k^+ - S_k^-)(y_k) = S_k^+(y_k) - S_k^-(y_k) \stackrel{(3.6)}{=} 0$$

$$S_k^+(y_k) - S_k^- \circ S_k^+(x_k) \stackrel{(3.7)}{=} S_k^+(y_k) \geq 0. \quad (3.8)$$

Ponadto,

$$S_k \circ S_k^+ = (S_k^+ - S_k^-) \circ S_k^+ = (S_k^+)^2 - S_k^+ \circ S_k^- \stackrel{(3.7)}{=} (S_k^+)^2,$$

a stąd

$$S_k(y_k) \stackrel{(3.6)}{=} (S_k^+)^2(x_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Z powyższej nierówności oraz z lematu 2.21 wynika, że dla każdego $v \in [0, y_k]$ mamy

$$S_k(v) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Wracając do oznaczenia (3.5), ostatni ciąg nierówności jest równoważny z warunkiem (ii) naszego lematu. Dowód implikacji (i) \Rightarrow (ii) jest zakończony. ■

Chociaż w poniższym twierdzeniu zakładamy, że F -krata E ma F -normę porządkowo ciągłą (tj. ograniczamy się do przypadku kraty z bazą bezwarunkową), to w przykładach ilustrujących problem ortomorfizmów centralnych występują ciągi $\Phi = (\varphi_n)$ wklęsłych funkcji Orlicza, co implikuje natychmiast równość $\ell^\Phi = h^\Phi$ (lemat 1.20).

Twierdzenie 3.3 *Niech E będzie F -kratą dyskretną. Załóżmy, że F -norma na E jest porządkowo ciągła i maksymalny zbiór D elementów dyskretnych i parami rozłącznych jest przeliczalny: $D = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) $Orth(E) \neq Z(E)$,
- (ii) istnieje ortomorfizm $0 \leq T \in Orth(E) \setminus Z(E)$,
- (iii) istnieją: ściśle rosnący ciąg $(n_k) \subset \mathbb{N}$ oraz ortomorfizm $0 \leq T \in Orth(E)$ takie, że

$$T(e_{n_k}) \geq k \cdot e_{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

- (iv) istnieje ściśle rosnący ciąg $(n_k) \subset \mathbb{N}$ taki, że zbieżność (topologiczna) szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k}$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} k x_k e_{n_k}$.

Dowód. Równoważność (i) \Leftrightarrow (ii) jest oczywista.

Udowodnimy teraz, że zachodzą następujące implikacje: (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv), co będzie dowodzić, że wszystkie warunki naszego twierdzenia są równoważne.

(iv) \Rightarrow (ii) Operator T_0 działający z pasma projekcyjnego $B = [e_{n_k}]$ do B postaci

$$T_0\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k x_k e_{n_k}$$

jest dobrze określony i dodatni (więc ciągły); jest on oczywiście ortomorfizmem na B . Niech P oznacza projekcję porządkową z E na B zdefiniowaną wzorem

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k} e_{n_k}.$$

Wtedy operator $T = T_0 \circ P$, jako złożenie dwóch ortomorfizmów dodatnich, jest ortomorfizmem dodatnim na E , przy czym

$$T(e_{n_k}) = T_0 \circ P(e_{n_k}) = T_0(e_{n_k}) = ke_{n_k}.$$

Teraz stosujemy implikację $(iii) \Rightarrow (i)$ z lematu 3.2. Wykazaliśmy więc, że $(iv) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Niech $0 \leq T \in Orth(E) \setminus Z(E)$. Na podstawie lematu 3.2 istnieje ciąg $(y_k) \subset E^+ \setminus \{0\}$ taki, że dla każdego $v \in (0, y_k]$ mamy $Tv \geq k \cdot v$. Ponieważ E jest dyskretna, to ostatnia nierówność implikuje, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje element dyskretny $e_{n_k} \in D$ oraz liczba $\lambda_k > 0$ takie, że $T(\lambda_k \cdot e_{n_k}) \geq k \cdot \lambda_k \cdot e_{n_k}$, a więc

$$T(e_{n_k}) \geq ke_{n_k}. \quad (3.10)$$

Rozważmy teraz ciąg indeksów (n_k) . Twierdzimy, że (n_k) zawiera podciąg ściśle rosnący. W przeciwnym przypadku, bez straty ogólności można założyć, że jest on stały, czyli $n_k = n_{k_0}$, dla $k = 1, 2, \dots$. Wtedy nierówność (3.10) przyjmuje postać $T(e_{n_{k_0}}) \geq ke_{n_{k_0}}$, dla $k = 1, 2, \dots$. Dzieliąc ostatnią nierówność obustronnie przez k otrzymujemy

$$T\left(\frac{e_{n_{k_0}}}{k}\right) \geq e_{n_{k_0}}. \quad (3.11)$$

Z własności F -normy wynika, że $\frac{e_{n_{k_0}}}{k} \rightarrow 0$, przy $k \rightarrow \infty$, więc z ciągłości T otrzymujemy $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(\frac{e_{n_{k_0}}}{k})\| = 0$, co jest sprzeczne z warunkiem (3.11), bo implikuje on nierówność $\|T(\frac{e_{n_{k_0}}}{k})\| \geq \|e_{n_{k_0}}\| = const > 0$, dla $k = 1, 2, \dots$. Stąd wynika, że ciąg (n_k) musi zawierać podciąg ściśle rosnący. Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg (n_k) jest ściśle rosnący, co dowodzi warunku (iii) .

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dla dowolnych liczb naturalnych $l \leq r$ mamy

$$\left| \sum_{k=l}^r kx_k e_{n_k} \right| = \sum_{k=l}^r k|x_k|e_{n_k} \stackrel{(3.9)}{\leq} T\left(\sum_{k=l}^r |x_k|e_{n_k}\right) = \left| T\left(\sum_{k=l}^r x_k e_{n_k}\right) \right|,$$

a stąd

$$\left\| \sum_{k=l}^r kx_k e_{n_k} \right\| \leq \|T(\sum_{k=l}^r x_k e_{n_k})\|. \quad (3.12)$$

Ponieważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k}$ jest topologicznie zbieżny w E , to spełnia warunek Cauchy'ego, więc $\|\sum_{k=l}^r x_k e_{n_k}\| \rightarrow 0$, przy $r \geq l \rightarrow \infty$. Z ciągłości T (bo E jest F -kreatą, a T jest dodatni (twierdzenie 1.14)) wynika, że $\|T(\sum_{k=l}^r x_k e_{n_k})\| \rightarrow 0$, przy $r \geq l \rightarrow \infty$, a zatem z nierówności (3.12) otrzymujemy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} kx_k e_{n_k}$ spełnia warunek Cauchy'ego w E , więc jest zbieżny. Otrzymujemy warunek (iv) . ■

Uwaga 3.4 Z dowodu powyższego twierdzenia wynika, że warunek porządkowej ciągłości

F -normy jest istotny tylko w dowodzie implikacji $(iv) \Rightarrow (ii)$. W przypadku ogólnym (zakładając tylko, że E jest F -kratą dyskretną) otrzymujemy, że warunki (i) oraz (ii) są równoważne dla E oraz zachodzą implikacje $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ (również dla E). Z warunku (iv) otrzymujemy wtedy słabszy warunek niż (ii) :

$(ii)'$ istnieje ortomorfizm $T_1 \in Orth(E_a) \setminus Z(E_a)$,

gdzie E_a jest częścią porządkowo ciągłą kraty E (tu ciąg (e_n) jest bazą dla E_a). Aby warunek $(ii)'$ implikował warunek (ii) należałoby wykazać, że każdy ortomorfizm $T_1 \in Orth(E_a)$ można rozszerzyć do elementu $\widetilde{T}_1 \in Orth(E)$, a takie twierdzenie jest mi na dzień dzisiejszy nieznane.

3.3 Ortomorfizmy w F -kratach zawierających izomorficzną kopię ω .

W tym podrozdziale analizujemy własność zawierania przez F -kratę izomorficznej kopii F -kraty ω i wykazujemy, że w typowych przypadkach, jeśli E taką kopię zawiera, to na E istnieje ortomorfizm niecentralny (twierdzenia 3.13 oraz 3.16).

3.3.1 Twierdzenie Bessagi-Pełczyńskiego-Rolewicza i parametr $\delta(E)$

Definicja 3.5 Mówimy, że F -przestrzeń X zawiera dowolnie krótkie proste [41, str. 196], jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje element $0 \neq x \in X$ taki, że

$$r(x) < \varepsilon, \tag{3.13}$$

gdzie $r(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|tx\|$. Jeśli położymy $\delta(X) = \inf_{x \neq 0} r(x)$, to zgodnie z tą definicją, X zawiera dowolnie krótkie proste, gdy $\delta(X) = 0$.

Przykład 3.6

- (1) Niech $X = L_p[0, 1]$, gdzie $0 < p < 1$ z F -normą $\|x\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$. Wtedy dla każdego $x \neq 0$ mamy $r(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|tx\|_p = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^p \cdot \|x\|_p = \infty$, zatem $\delta(L_p[0, 1]) = \infty$. Stąd, przestrzeń $L_p[0, 1]$ nie zawiera dowolnie krótkich prostych.
- (2) Niech $X = \omega$ z F -normą $\|x\|_{\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$. Niech e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy. Wtedy $r(e_n) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|te_n\|_{\omega} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|t|}{1+|t|} \right\} = \frac{1}{2^n}$, więc $\inf_{n \in \mathbb{N}} r(e_n) = 0$. Stąd $\delta(\omega) = 0$, a zatem przestrzeń ω zawiera dowolnie krótkie proste.

Powyższe przykłady sugerują, że istnieje związek między zawieraniem dowolnie krótkich prostych a przestrzenią ω . Istotnie, w 1957 roku C. Bessaga, A. Pełczyński oraz S. Rolewicz [41, Proposition 4.2.7] wykazali, że

(BPR) *F -przestrzeń X zawiera dowolnie krótkie proste (tj. $\delta(X) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy X zawiera podprzestrzeń X_0 izomorficzną z przestrzenią wszystkich ciągów ω .*

Zauważmy, że w definicji liczby $\delta(E)$ wykorzystujemy ciągi (x_n) elementów F -kraty E , a naszym celem będzie stosowanie definicji liczby $\delta(E)$ dla ciągów elementów parami rozłącznych kraty E . Wykażemy, że zawieranie przez F -kratę funkcyjną izomorficznej kopii ω jest równoważne z zawieraniem kratowej kopii ω (twierdzenia 3.12 oraz 3.14).

W dowodzie tej własności będziemy korzystać z twierdzeń mówiących o możliwości uzyskania rozłącznego rozdrobnienia ciągów odpowiednich algebr Boole'a, zastosowanych do przypadku, gdy elementami tych ciągów są nośniki elementów generujących przestrzeń ω : twierdzenie 1.24 w przypadku F -krat funkcyjnych z miarą bezzatomową oraz twierdzenie 1.26 w przypadku F -krat dyskretnych.

3.3.2 Ogólna charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$

Niech teraz E będzie F -kratą oraz niech D będzie podzbiorem E^+ o następującej własności:

$$\text{dla każdego } x \in E^+ \text{ istnieje liczba } \lambda_x > 0 \text{ oraz } t_x \in D \text{ takie, że } x \geq \lambda_x t_x. \quad (3.14)$$

Zbiory D o własności (3.14) pozwalają w wielu przypadkach efektywnie wyznaczyć liczbę $\delta(E)$ (patrz lemat 3.8).

Przykład 3.7

- (1) Jeśli zbiór D jest ideałem porządkowo gęstym w kracie E , to część dodatnia D^+ spełnia warunek (3.14). W szczególności, jeśli ideał E_a - elementów porządkowo ciągłych F -kraty E - jest porządkowo gęsty w E , to $D = E_a^+$ spełnia warunek (3.14).
- (2) Niech E będzie F -kratą σ -zupełną w sensie Dedekinda posiadającą słabą jedynkę e , oraz niech $\mathcal{P}(E)$ oznacza algebrę Boole'a projekcji porządkowych na E . Wtedy z twierdzenia aproksymacyjnego Freudenthala (twierdzenie 1.6) wynika, że zbiór

$$D = \{Pe : P \in \mathcal{P}(E)\}$$

spełnia warunek (3.14).

- (3) Jeśli E jest F -kratą funkcyjną (tzn., ideałem porządkowo gęstym w $L_0(S, \Sigma, \mu)$, gdzie miara μ jest σ -skończona), to powyższemu warunkowi (2) możemy nadać bardziej przejrzystą formę. Fundamentalnym faktem teorii funkcji mierzalnych jest możliwość aproksymacji z dołu dowolnej funkcji $0 \leq f \in \mathcal{L}_0(\mu)$ przez ciąg funkcji prostych, nieujemnych postaci

$$f_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n \chi_{A_i^n}, \quad (3.15)$$

(można oczywiście założyć, że wszystkie liczby a_i^n są ściśle dodatnie) oraz $\mu(A_i^n) < \infty$ dla $i = 1, 2, \dots$, gdzie $A_i^n \in \Sigma$ (patrz [21, wniosek z twierdzenia I.6.3, str. 54], por [21, lemat IV 3.3, str. 139]).

Z równości (3.15) oraz z założenia, że E jest ideałem wynika, jeśli $0 \neq x \in E^+$, to istnieje liczba $a > 0$ oraz funkcja $\chi_A \in E$ takie, że $x \geq a \cdot \chi_A$. Stąd otrzymujemy, że jeśli E jest F -kratą funkcyjną, to zbiór

$$D := E^0 = \{\chi_A : A \in \Sigma, \mu(A) < \infty, \chi_A \in E\}$$

spełnia warunek (3.14).

W szczególności, jeśli ideał E_a jest porządkowo gęsty w E , to z powyższego przykładu (1) wynika, że zbiór $(E_a)^0$ również spełnia warunek (3.14).

- (4) Jeśli F -krata E jest ideałem porządkowo gęstym kraty \mathbb{R}^Γ , gdzie Γ jest zbiorem nieskończonym oraz e_γ jest γ -tym wektorem jednostkowym kraty E , to zbiór $D = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, spełnia warunek (3.14).

Nieco ogólniej, jeśli E jest F -kratą dyskretną, to zbiór elementów dyskretnych F -kraty E również spełnia warunek (3.14). Wynika to wprost z definicji archimedesowej kraty dyskretnej.

Kolejny przykład zbioru z własnością (3.14) podajemy w drugiej części poniższego lematu.

Lemat 3.8 *Niech E będzie F -kratą liniową oraz niech D będzie podzbiorem E^+ , spełniającym warunek (3.14). Wtedy dla dowolnej funkcji $g : D \rightarrow (0, \infty)$ zachodzi równość*

$$\delta(E) = \delta(D) := \inf_{x \in D \setminus \{0\}} r(g(x)x); \quad (3.16)$$

w szczególności

$$\delta(E) = \delta(D) := \inf_{x \in D \setminus \{0\}} r(x), \quad (3.17)$$

gdzie funkcja r jest określona w definicji 3.5.

W przypadku, gdy E jest F -kratą dyskretną, oraz D oznacza ustalony maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych w E , to

(i) $\delta(E) = \delta(D)$,

(ii) krata E zawiera izomorficzną kopię ω wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta(D) = 0$,

(iii) jeśli istnieje stała $s > 0$ taka, że $\|x\| = s$ dla każdego $x \in D$, to E nie zawiera kopii ω , przy czym $\delta(E) \geq s$.

Dowód. Ponieważ dla każdego $x \in E$ mamy $\|x\| = \| |x| \|$, to oczywiście $\delta(E) = \delta(E^+)$, zatem w dalszej części dowodu możemy ograniczyć się do badania elementów E^+ . Z inkluzji $D \subset E$ oraz definicji funkcji δ otrzymujemy natychmiast

$$\delta(D) \geq \delta(E). \quad (3.18)$$

Z drugiej strony, na podstawie warunku (3.14), dla każdego $x \in E^+$ istnieje element $e_x \in D$ oraz liczba $\lambda_x > 0$ taka, że

$$x \geq \lambda_x \cdot e_x,$$

zatem

$$r(g(x) \cdot x) = r(x) \geq r(e_x) \geq \delta(D), \quad (3.19)$$

więc

$$\delta(E) \geq \delta(D). \quad (3.20)$$

Ostatecznie, z warunków (3.19) oraz (3.20) otrzymujemy równość (3.16). Równość (3.17) dostajemy kładąc $g(x) = 1$ dla każdego $x \in D$.

Warunek (i) lematu wynika natychmiast z definicji kraty dyskretnej:

dla każdego $x \in E^+$ istnieje liczba $\lambda_x > 0$ oraz element dyskretny e_x taki, że $x \geq \lambda_x e_x$.

Warunek (ii) lematu wynika z warunku (i) oraz z twierdzenia (BPR).

Warunek (iii): równość $\|x\| = s$ dla wszystkich $x \in D$ oraz pewnego $s > 0$ implikuje, że dla każdego elementu $x \in D$ mamy $r(x) \geq s$, a zatem z warunku (i) otrzymujemy, że $\delta(E) = \delta(D) \geq s > 0$. Korzystając teraz z twierdzenia (BPR) otrzymujemy, że krata E nie zawiera kopii ω . ■

Wynik przedstawiony w kolejnym lemacie jest istotny tylko wtedy, gdy miara μ jest bezatomowa, ponieważ w przypadku, gdy F -krata E jest dyskretna, mamy prostszą metodę wyznaczania $\delta(E)$ (twierdzenia 3.11, 3.12 oraz lemat 3.8).

Niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A względem danego zbioru S . Przypomnijmy, że jeśli funkcja $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$ ma nośnik o mierze dodatniej, to reprezentuje ona niezerowy element kraty $L_0(\mu)$, a działania na klasach abstrakcji względem równości μ -prawie wszędzie redukujemy do działań na konkretnych reprezentantach. Przykładowo, χ_A jest reprezentantem klasy funkcji równych μ -prawie wszędzie z funkcją charakterystyczną zbioru A ; wówczas symbol $r(\chi_A)$ oznacza liczbę $r([\chi_A])$.

Lemat 3.9 *Jeśli E jest F -klatą funkcyjną w $L_0(S, \Sigma, \mu)$, to dla dowolnej funkcji $g : E^0 \rightarrow (0, \infty)$ zachodzą równości*

$$\delta(E) = \delta(E^0) = \inf\{r(g(A) \cdot \chi_A) : A \in \Sigma, \chi_A \in E_a, 0 < \mu(A) < \infty\} \quad (3.21)$$

gdzie $E^0 = \{\chi_A : A \in \Sigma, \chi_A \in E, 0 < \mu(A) < \infty\}$.

W szczególności, dla $g \equiv 1$ mamy

$$\delta(E) = \delta(E^0) = \inf\{r(\chi_A) : A \in \Sigma, \chi_A \in E_a, 0 < \mu(A) < \infty\}. \quad (3.22)$$

Dodatkowo, jeśli ideał E_a (elementów porządkowo ciągłych w E) jest porządkowo gęsty w E , to

$$\begin{aligned} \delta(E) &= \delta(E_a) = \delta((E_a)^0) = \inf\{r(g(A) \cdot \chi_A) : A \in \Sigma, \chi_A \in E_a, 0 < \mu(A) < \infty\} = \\ &= \inf\{r(\chi_A) : A \in \Sigma, \chi_A \in E_a, 0 < \mu(A) < \infty\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dowód tego lematu jest oparty na następującym fakcie, będącym konsekwencją własności zbioru $(E_a)^0$ opisanej w drugiej części przykładu 3.7 (3): dla każdego $A \in \Sigma$ takiego, że $0 < \mu(A) < \infty$ oraz $\chi_A \in E$ istnieje zbiór $B \subset A$ taki, że $0 < \mu(B)$ oraz $\chi_B \in E_a$.

Dowód lematu 3.9. Kładąc $D = E^0$ oraz stosując lemat 3.8 otrzymujemy równość

$$\delta(E) = \delta(E^0). \quad (3.24)$$

Jeśli ideał E_a jest porządkowo gęsty w E , to stosując ponownie lemat 3.8 (dla $D = E_a$) dostajemy

$$\delta(E) = \delta(E_a), \quad (3.25)$$

ale E_a jest ideałem w $L_0(S, \Sigma, \mu)$ (bo ideałem w E), zatem zastępując w równości (3.24) F -klatę E przez E_a otrzymujemy

$$\delta(E_a) = \delta((E_a)^0). \quad (3.26)$$

Ponieważ dla każdego $x \in E$ oraz dla każdego $\lambda > 0$ mamy $r(\lambda x) = r(x)$, to z równości (3.25) oraz (3.26) wynika, że jeśli $g : (E_a)^0 \rightarrow (0, \infty)$ jest dowolną funkcją, to

$$\delta(E) = \delta(E_a) = \delta((E_a)^0) = \inf\{r(g(A) \cdot \chi_A) : A \in \Sigma, \chi_A \in E_a, \mu(A) < \infty\}.$$

■

Uwaga 3.10 Lemat 3.9 jest użyteczny w wyznaczaniu $\delta(E)$, gdy E jest przestrzenią

Musiela-Orlicza $L_{\mathcal{M}}(\mu)$, gdzie μ jest miarą σ -skończoną (i bezatomową). Pozwala ono posłużyć się elementami χ_A należącymi do części porządkowo ciągłej $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ F -kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$. Wówczas liczba

$$p_A := \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) \quad (3.27)$$

jest skończona dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, dzięki czemu w dowodzie twierdzenia 4.7 efektywnie wyznaczamy F -normy elementów $y_A := t \cdot p_A \cdot \chi_A$, wystarczające już do obliczenia $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu))$ za pomocą warunku (3.23) lematu 3.9.

3.3.3 Charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$ dla F -krat dyskretnych

Poniższe twierdzenie podaje charakteryzację dyskretnych F -krat zawierających dowolnie krótkie proste. Nie zakładamy w nim, że E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda.

Twierdzenie 3.11 *Niech E będzie F -kratą dyskretną, oraz niech D oznacza maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych. Jeśli E posiada dowolnie krótkie proste (tj. $\delta(E) = \delta(D) = 0$), to*

- (i) E zawiera nietrywialne pasmo projekcyjne B , przy czym
- (ii) pasmo B jest rozpięte na ciągu (f_n) elementów dyskretnych F -kraty E (tj. $B = \overline{\text{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$), oraz
- (iii) pasmo B jest porządkowo - topologicznie izomorficzne z kratą ω wszystkich ciągów.

Z twierdzenia 3.11 oraz części (ii) lematu 3.8 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 3.12 *Niech E będzie F -kratą dyskretną, oraz niech D oznacza ustalony maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych w E . Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) E zawiera dowolnie krótkie proste (tj. $\delta(E) = \delta(D) = 0$),
- (ii) E zawiera izomorficzną kopię przestrzeni (rzeczywistej) ω ,
- (iii) E zawiera pasmo projekcyjne porządkowo-topologicznie izomorficzne z F -kratą ω .

Dowód twierdzenia 3.11. Niech $D \subset E^+$ oznacza maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych F -kraty E . Dla ustalenia tezy założmy, że zbiór D jest przeliczalny¹: $D = \{e_1, e_2, \dots\}$. Na podstawie założenia oraz lematu 3.8 (i) otrzymujemy

$$\delta(D) = \delta(E) = 0.$$

To oznacza, że istnieje ciąg elementów (x_n) taki, że $x_n \neq 0$ oraz

$$r(x_n) \rightarrow 0, \text{ przy } n \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Oznaczmy $A_n = \text{supp}(x_n)$, gdzie

$$\text{supp}(x) = \{k \in \mathbb{N} : \text{istnieje liczba } \lambda > 0 \text{ taka, że } |x| \geq \lambda e_k\}$$

(patrz (1.2), rozdział 1). Połóżmy $S_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i zdefiniujmy funkcję $h : 2^{S_0} \rightarrow [0, \infty]$ wzorem

$$h(A) := \sup_{n \in A} r(e_n).$$

Z założenia, że $|x| \geq \lambda e_k$ dla każdego $k \in \text{supp}(x_n)$ wynika, że $r(x) \geq r(\lambda e_k) = r(e_k)$, więc $r(x) \geq h(\text{supp}(x))$. W szczególności, $0 < h(A_n) \leq r(x_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc z warunku (3.28) otrzymujemy

$$h(A_n) \rightarrow 0, \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

Z wniosku 1.29 wynika teraz, że ciąg (A_n) zawiera podciąg (A_{n_k}) posiadający rozłączne rozdrobienie zbiorami jednoelementowymi $D_k = \{m_k\}$, gdzie $m_k \in A_{n_k}$. Oznacza to, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\lambda_k > 0$ taka, że $|x_{m_k}| \geq \lambda_k e_{m_k}$, gdzie $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$

Połóżmy $f_k = e_{m_k}$ (mamy wtedy $f_k \wedge f_l = 0$ dla $k \neq l$). Elementy f_k są oczywiście elementami dyskretnymi F -kraty E . Ponieważ

$$r(f_k) = r(e_{m_k}) \leq r(x_{m_k}) \rightarrow 0, \text{ przy } k \rightarrow \infty,$$

to możemy dalej założyć, że $r(f_k) \leq \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$, a stąd $\sum_{k=1}^{\infty} r(f_k) \leq 1$, więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|t f_k\| < \infty.$$

Dla każdego ciągu $(t_k) \in \omega$ mamy zatem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k f_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} r(f_k) < \infty. \quad (3.29)$$

¹Podobny wynik uzyskujemy w przypadku, gdy D jest dowolnym zbiorem nieskończonym. Z dowodu twierdzenia 3.11 wynika, że posługując się definicją $\delta(X)$ wybieramy przeliczalny podzbiór zbioru D i na nim dokonujemy konstrukcji pasma B .

Ponieważ F -krata E jest topologicznie zupełna, to nierówność (3.29) implikuje, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k$ jest zbieżny (bo absolutnie zbieżny) do pewnego elementu $x \in E$. Z faktu, że elementy f_k są parami rozłączne oraz szereg $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k$ jest absolutnie zbieżny do x otrzymujemy, że element x jest jednoznacznie reprezentowany przez ciąg (t_k) : jeśli $x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} t'_k f_k$, to $t'_k = t_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Z jednoznaczności przyporządkowania ciągowi $\xi = (t_k) \in \omega$ elementu $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k$ wynika, że możemy utworzyć odwzorowanie $h : \omega \rightarrow E$ określone wzorem

$$h(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k, \quad \xi = (t_k). \quad (3.30)$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $f_k > 0$, więc h jest operatorem liniowym dodatnim działającym z F -kraty ω do F -kraty E , zatem z twierdzenia 1.14 wynika, że

$$h \text{ jest operatorem ciągłym.} \quad (3.31)$$

Wykażemy teraz, że h jest izomorfizmem kratowym.

(a) h jest iniekcją.

Mamy $h(\xi) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k = 0$. Ponieważ elementy ciągu $(t_k f_k)$ są parami rozłączne, to dla każdego $j = 1, 2, \dots$

$$|0| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \right| = \left| t_j f_j + \sum_{k \neq j} t_k f_k \right| \geq |t_j f_j|; \quad (3.32)$$

stąd $|t_j f_j| = 0$, a więc dla każdego $j \in \mathbb{N}$ mamy $t_j = 0$, czyli $\xi = 0$.

(b) h jest surjekcją na domkniętą podprzestrzeń B F -kraty E . Wynika to z dwóch faktów:

- (1) przestrzeń ω jest minimalną F -przestrzenią (tj. nie istnieje na ω istotnie słabsza - od naturalnej - topologia liniowa Hausdorffa [20, Theorem 4.1]),
- (2) każda ciągła iniekcja działająca z przestrzeni minimalnej do ustalonej F -kraty jest izomorfizmem² (tj. liniowym homomorfizmem).

Z własności (2) otrzymujemy, że $B := h(\omega)$ jest zupełną podprzestrzenią E , zatem podprzestrzenią domkniętą.

(c) Wykażemy teraz, że h jest dodatkowo izomorfizmem kratowym (stąd, B jest podkratą F -kraty E).

²Niech \mathcal{T} oznacza topologię naturalną przestrzeni ω oraz niech τ oznacza topologię F -kraty E . Z ciągłości operatora h otrzymujemy inkluzję $\mathcal{T}_i := h^{-1}(\tau|_B) \subset \mathcal{T}$, gdzie $h^{-1}(\tau|_B) = \{h^{-1}(U) : U \in \tau|_B\}$. Klasa \mathcal{T}_i jest oczywiście topologią liniową i jest ona Hausdorffa, bo h jest iniekcją. Z minimalności ω otrzymujemy $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$, zatem dla każdego $U \in \mathcal{T}$ istnieje dokładnie jeden zbiór $V \in \tau|_B$ taki, że $h^{-1}(V) = U$, tj. $(h^{-1})^{-1}(U) = h(U) = V \in \tau|_B$, zatem h^{-1} jest operatorem ciągłym, więc homeomorfizmem.

Z ortogonalności elementów ciągu (f_k) i zbieżności szeregu (3.30) dostajemy, że dla dowolnego $\xi = (t_k) \in \omega$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} |h(\xi)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \right| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m t_k f_k \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^m t_k f_k \right| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |t_k f_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |t_k f_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |t_k| |f_k| = h(|\xi|), \end{aligned}$$

a zatem, na podstawie lematu 1.13, h jest homomorfizmem kratowym.

Ostatecznie, wykazaliśmy w punktach (a), (b) i (c), że h jest izomorfizmem kratowym z kraty ω na B .

W dalszej części dowodu wykażemy, że B jest pasmem projekcyjnym w E . To, w połączeniu z faktem, że h jest izomorfizmem kratowym, da nam dowód wszystkich punktów (i) - (iii) naszego twierdzenia.

Ponieważ F -krata E jest dyskretna (a założyliśmy dla uproszczenia, że maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych w E jest przeliczalny), to dla każdego elementu $x \in E^+$ istnieje ciąg nieujemnych skalarów (λ_j) takich, że

$$x = \sup\{\lambda_j e_j, \quad j \in \mathbb{N}\},$$

tj. (na podstawie warunku $\lambda_j e_j \wedge \lambda_k e_k = 0$ dla $j \neq k$) mamy

$$x = \sup\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \quad n = 1, 2, \dots\right\}. \quad (3.33)$$

Z założenia, że każdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k}$ jest zbieżny w E dla dowolnego ciągu $(a_k) \subset \mathbb{R}$ otrzymujemy istnienie w E elementu

$$x_B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j_k} e_{j_k} \quad (= \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_{j_k} e_{j_k}) \in B. \quad (3.34)$$

Jest teraz oczywiste, że przyporządkowanie $E^+ \ni x = \sup_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j e_j \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j_k} e_{j_k} \in B^+$ definiuje operator addytywny i dodatnio jednorodny P_B taki, że $P_B^2 = P_B$ oraz $0 \leq P_B x \leq x$, który rozszerza się w sposób naturalny do projekcji porządkowej działającej z E do $B = h(\omega)$. Mamy przy tym $P_B u = u$ dla każdego $u \in B$, więc B jest pasmem projekcyjnym.

Na podstawie dowiedzionych już własności (a), (b), (c) otrzymujemy, że pasmo B spełnia warunki (i) - (iii) naszego twierdzenia. ■

Główne twierdzenie tego rozdziału, odnośnie problemu ortomorfizmów centralnych, mówi, że warunek $\delta(E) = 0$ dla dyskretnej F -kraty E pociąga istnienie ortomorfizmu niecentralnego na E . Implikacja w drugą stronę jednak nie zachodzi, co pokazuje przykład 4.5.

Twierdzenie 3.13 *Jeśli E jest F -kratą dyskretną zawierającą izomorficzną kopię ω (tj. $\delta(E) = 0$: lemat 3.8 (ii)), to krata $Orth(E)$ zawiera pasmo projekcyjne porządkowo izomorficzne z kratą ω . W szczególności $Orth(E) \neq Z(E)$.*

Dowód. Z twierdzenia 3.11 wynika, że krata E zawiera pasmo projekcyjne B izomorficzne porządkowo z kratą ω . Na podstawie przykładu 2.22 (a) mamy $Orth(\omega) \neq Z(\omega)$. Teraz stosujemy lemat 3.1. ■

3.3.4 Charakteryzacja warunku $\delta(E) = 0$ dla bezatomowych F -krat funkcyjnych

Poniższe twierdzenie jest bezatomowym odpowiednikiem twierdzenia 3.12 i będzie stosowane w części dowodu twierdzenia 3.16.

Twierdzenie 3.14 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą μ -bezatomową i σ -skończoną, oraz niech $E \subset L_0(S, \Sigma, \mu)$ będzie F -kratą funkcyjną, (tj. ideałem w $L_0(S, \Sigma, \mu)$ z F -normą $\|\cdot\|_E$ monotoniczną). Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) E zawiera izomorficzną (tj. liniowo-homeomorficzną) kopię ω ,
- (ii) E zawiera kratowo-topologiczną kopię ω .

Uwaga 3.15 Z dowodu tego twierdzenia wynika, że wystarczy przyjąć nieco słabsze

założenie: dla każdego $A \in \Sigma$ takiego, że $\mu(A) > 0$ istnieje podzbiór $A^0 \subset A$ taki, że $A^0 \in \Sigma$ oraz $0 < \mu(A^0) < \infty$.

Dowód twierdzenia 3.14. Oczywiście wystarczy wykazać implikację (i) \Rightarrow (ii).

Dla skrócenia oznaczeń, jeśli $g \in \mathcal{L}_0(S, \Sigma, \mu)$, to symbolem \bar{g} oznaczać będziemy klasę abstrakcji w $L_0(S, \Sigma, \mu)$ wyznaczoną przez funkcję g .

Warunek (i) jest równoważny z warunkiem, że krata E zawiera dowolnie krótkie proste (twierdzenie (BPR)). Z dowodu [41, Proposition 4.2.7] oraz z faktu, że E jest ideałem w $L_0(S, \Sigma, \mu)$ wynika, że istnieje ciąg $(f_n) \in \mathcal{L}_0(S, \Sigma, \mu)$ funkcji μ -mierzalnych takich, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\bar{f}_n \in E$ oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(\bar{f}_n) < \infty, \quad (3.35)$$

i ciąg (\bar{f}_n) rozpina³ podprzestrzeń domkniętą w E izomorficzną z ω : szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \bar{f}_n$ jest zbieżny w E wtedy i tylko wtedy, gdy $(t_n) \in \omega$.

³W dowodzie [41, Proposition 4.2.7] wykorzystuje się mocniejszy warunek niż (3.35), gwarantujący, że ciąg (f_n) rozpina podprzestrzeń izomorficzną z ω : $r(\bar{f}_{n+1}) < \frac{1}{4}r(\bar{f}_n)$, $n = 1, 2, \dots$

Zdefiniujmy zbiory $A_n \in \Sigma$ wzorem $A_n = \text{supp}(f_n)$, $n = 1, 2, \dots$; wtedy oczywiście $\mu(A_n) > 0$. Ponieważ przestrzeń miary jest σ -skończona, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje podzbiór $A_n^0 \subset A_n$ taki, że $0 < \mu(A_n^0) < \infty$. Z twierdzenia 1.24 wynika, że istnieje ciąg $(D_n) \subset \Sigma$ taki, że $D_n \subset A_n^0$, $\mu(D_n) > 0$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $D_k \cap D_l = \emptyset$ dla $k \neq l$.

Położmy teraz $g_n := f_n \cdot \chi_{D_n}$, $n = 1, 2, \dots$, gdzie χ_D oznacza funkcję charakterystyczną zbioru D . Wtedy $\text{supp}(g_n) = D_n$ (bo $D_n \subset A_n^0 \subset A_n$, $n = 1, 2, \dots$) oraz $|g_k| \wedge |g_l| = 0$ dla $k \neq l$, $n, k, l \in \mathbb{N}$.

Dla tak zdefiniowanego ciągu (g_n) zachodzą nierówności $|g_n| \leq |f_n|$ μ -wszędzie, więc $|\overline{g_n}| \leq |\overline{f_n}|$, a zatem $\|\overline{g_n}\|_E = \|\overline{g_n}\|_E \leq \|\overline{f_n}\|_E = \|\overline{g_n}\|_E$, skąd $r(\overline{g_n}) \leq r(\overline{f_n})$, $n = 1, 2, \dots$. Stąd oraz z warunku (3.35) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(\overline{g_n}) < \infty. \quad (3.36)$$

Dla każdego ciągu $(t_n) \in \omega$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \|t_n \overline{g_n}\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} r(\overline{g_n})$, zatem warunek (3.36) implikuje, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \overline{g_n}$ jest absolutnie zbieżny w E .

Z faktu, że funkcje g_n są parami rozłączne wynika natychmiast, że również elementy $\overline{g_n}$ są parami rozłączne, więc odwzorowanie $h : \omega \rightarrow E$ postaci $h((t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \overline{g_n}$ jest izomorfizmem kratowym, więc ciągłym. Ponieważ krata ω jest przestrzenią minimalną ([20, Theorem 4.1]), to (na podstawie własności (b) (2) w dowodzie twierdzenia 3.11) obraz $h(\omega)$ jest domknięty w E , zatem h jest homeomorfizmem [41, Theorem 2.3.2]. To oznacza, że odwzorowanie h jest izomorfizmem kratowo-topologicznym. ■

Poniższe twierdzenie jest istotne tylko w przypadku *bezatomowych* F -krat funkcyjnych, ponieważ dla F -krat dyskretnych E mamy mocniejszy wynik: $Orth(E)$ zawiera pasmo projekcyjne izomorficzne porządkowo z kratą ω (twierdzenie 3.12).

Twierdzenie 3.16 *Niech E będzie F -kratą σ -zupelną w sensie Dedekinda z własnością σ -Fatou. Jeśli E zawiera kratowo-topologiczną kopię ω w przypadku ogólnym, lub E jest F -kratą funkcyjną i zawiera (liniowo-)topologiczną kopię ω , to krata $Orth(E)$ zawiera kratowo-topologiczną kopię ω :*

- *istnieje ciąg parami ortogonalnych projekcji porządkowych (P_j) taki, że dla każdego ciągu $(t_j) \in \omega$ oraz dla każdego $x \in E$ szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x$ jest punktowo zbieżny i definiuje pewien ortomorfizm T na E ; odwzorowanie*

$$\omega \ni (t_j) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j \in Orth(E) \text{ (zbieżność punktowa w } E)$$

jest izomorfizmem kratowym z ω w $Orth(E)$. W szczególności $Orth(E) \neq Z(E)$.

Dowód Jeśli E jest F -kratą funkcyjną i zawiera liniowo-topologiczną kopię ω , to na podstawie twierdzenia 3.14 krata E zawiera *kratowo-topologiczną* kopię ω , tzn. istnieje

ciąg (y_j) dodatnich i parami rozłącznych elementów kraty ω taki, że dla każdego ciągu $(t_j) \in \omega$ szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j y_j$ jest zbieżny w E , a odwzorowanie $\Psi : \omega \rightarrow E$ określone wzorem $\Psi((t_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j y_j$ jest izomorfizmem kratowo-topologicznym.

Z założenia, że E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, (więc ma własność (PPP)) otrzymujemy, że na każde pasmo y_j^{dd} istnieje projekcja porządkowa $P_j : E \rightarrow y_j^{dd}$ postaci

$$P_j x = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge n y_j), \text{ gdzie } x \geq 0. \quad (3.37)$$

Ponieważ z założenia elementy ciągu (y_j) są parami rozłączne, więc na podstawie [33, Theorem 19.3 (ii)], mamy $y_j^{dd} \cap y_k^{dd} = \{0\}$, dla $j \neq k$. Skoro $P_j(E) = y_j^{dd}$ oraz $P_k(E) = y_k^{dd}$, to z [33, Theorem 30.1, por. str. 181] wynika, że $P_j P_k = 0$, zatem *elementy ciągu (P_j) są parami rozłączne*.

Wykażemy teraz, że ciąg (P_j) rozpina kopię kratową ω . W tym celu pokażemy najpierw, że dla każdego ciągu $(t_j) \in \omega^+$ oraz dla każdego $x \in E^+$ szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x$ jest topologicznie zbieżny w E , tj. (patrz (3.37)) szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j \sup_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge n y_j)$ jest zbieżny.

Przypuśćmy, przeciwnie, że istnieje ciąg $(t_j) \in \omega^+$ oraz element $x \in E^+ \setminus \{0\}$ takie, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x$ nie jest zbieżny, a zatem ciąg sum częściowych $S_k = \sum_{j=1}^k t_j P_j x$, $k = 1, 2, \dots$ nie spełnia warunku Cauchy'ego. Istnieje więc liczba $\varepsilon_0 > 0$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych (k_r) takie, że

$$\left\| \sum_{j=k_r+1}^{k_{r+1}} t_j P_j x \right\| > \varepsilon_0, \quad r = 1, 2, \dots; \quad (3.38)$$

równoważnie (patrz 3.37))

$$\left\| \sum_{j=k_r+1}^{k_{r+1}} t_j \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge n y_j) \right) \right\| > \varepsilon_0, \quad r = 1, 2, \dots$$

Ustalmy $r \in \mathbb{N}$ i oznaczmy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r &= \{k_r + 1, k_r + 2, \dots, k_{r+1}\}, \\ V_r &= \sum_{j \in \mathcal{A}_r} t_j P_j x, \\ W_r(n) &= \sum_{j \in \mathcal{A}_r} t_j (x \wedge n y_j), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Wprost z definicji V_r i z równości (3.37) otrzymujemy

$$V_r \geq W_r(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Ponieważ elementy x, y_j są nieujemne oraz $t_j \in \mathbb{R}^+$, to $W_r(n) \leq W_r(n+1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc z faktu, że krata E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda wynika, że ciąg $(W_r(n))_{n=1}^{\infty}$, jako rosnący i ograniczony z góry (patrz (3.39)), posiada supremum $W_r \in E$, przy czym

$$V_r \geq W_r \geq W_r(n), \quad n = 1, 2, \dots, . \quad (3.40)$$

Z nierówności (3.40) oraz definicji elementów $W_r(n)$ otrzymujemy nierówności

$$V_r \geq W_r \geq t_j(x \wedge ny_j), \text{ dla wszystkich } j \in \mathcal{A}_r \text{ oraz } n = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

Z drugiej strony, na podstawie relacji (3.37) mamy $t_j(x \wedge ny_j) \uparrow t_j P_j x$, przy $n \uparrow \infty$, zatem z nierówności (3.41) otrzymujemy

$$V_r \geq W_r \geq t_j P_j x, \quad j \in \mathcal{A}_r. \quad (3.42)$$

Z faktu, że elementy $t_j P_j x$, $j \in \mathcal{A}_r$ są parami rozłączne wynika, że

$$V_r \geq W_r \geq \sup_{j \in \mathcal{A}_r} t_j P_j x = \sum_{j \in \mathcal{A}_r} t_j P_j x = V_r,$$

a zatem

$$V_r = W_r = \sup\{W_r(n), n \in \mathbb{N}\}. \quad (3.43)$$

Stosując teraz własność σ -Fatou do nierówności (3.38) oraz równości (3.43) dostajemy

$$\varepsilon_0 < \|V_r\| = \|\sup_{n \in \mathbb{N}} W_r(n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|W_r(n)\|, r = 1, 2, \dots, \quad (3.44)$$

zatem (ponieważ ciąg liczb $(\|W_r(n)\|)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący) istnieje liczba naturalna n_r taka, że $\|W_r(n_r)\| > \varepsilon_0$, tj.

$$\left\| \sum_{j \in \mathcal{A}_r} t_j(x \wedge n_r y_j) \right\| > \varepsilon_0, \quad (3.45)$$

ale $x \wedge n_r y_j \leq n_r y_j$ dla $j \in \mathcal{A}_r$, więc z nierówności (3.45) otrzymujemy dalej nierówność

$$\left\| \sum_{j \in \mathcal{A}_r} (t_j n_r) y_j \right\| > \varepsilon_0. \quad (3.46)$$

Wykazaliśmy zatem, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $n_r \in \mathbb{N}$ taka, że zachodzi nierówność (3.46). Stąd wynika, że szereg $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{A}_r} (t_j n_r) y_j$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc nie jest zbieżny w E , co jest sprzeczne z własnością ciągu (y_j) .

W ten sposób wykazaliśmy, że dla każdego $x \in E^+$ oraz dla każdego ciągu $(t_j) \in \omega^+$ szereg $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x$ musi być zbieżny, zatem szereg ten jest zbieżny dla dowolnego $x \in E$ oraz $(t_j) \in \omega$.

Zbieżność szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x$ dla dowolnego $(t_j) \in \omega$ pozwala zdefiniować endomorfizm T kraty E wzorem

$$T(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m t_j P_j x \right), \quad x \in E. \quad (3.47)$$

Ponieważ dla każdego $m \in \mathbb{N}$ operator $\sum_{j=1}^m t_j P_j$ jest ortomorfizmem, to z lematu 2.20 otrzymujemy, że T jest również ortomorfizmem. Stąd wynika, że funkcja $f : \omega \rightarrow Orth(E)$ określona wzorem

$$f((t_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j \text{ (zbieżność punktowa szeregu w } E) \quad (3.48)$$

jest dobrze zdefiniowana. W dalszym ciągu wykazemy, że f jest izomorfizmem kratowym.

Odwzorowanie f jest homomorfizmem kratowym: dla każdego $x \geq 0$ elementy $P_j x$ są parami ortogonalne, więc

$$\begin{aligned} |f((t_j))(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j(x) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^m t_j P_j(x) \right| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m |t_j P_j(x)| = \sum_{j=1}^{\infty} |t_j| P_j(x) = f(|t_j|)(x), \end{aligned} \quad (3.49)$$

zatem $|f(t)| = f(|t|)$ dla każdego $t \in \omega$. Ponadto

$$\text{Ker}(f) = \{t = (t_j); \sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j = 0 \text{ (zbieżność punktowa)}\} = \{0\},$$

ponieważ z warunku (3.49) natychmiast wynika, że $\sum_{j=1}^{\infty} t_j P_j x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{j=1}^{\infty} |t_j| P_j x = 0$ dla każdego $x \in E^+$, a zatem $|t_j| P_j x = 0$ dla każdego $j = 1, 2, \dots$ oraz $x \in E^+$; w szczególności kładąc $x = y_j$ otrzymujemy $|t_j| P_j(y_j) = |t_j| y_j = 0$, skąd $|t_j| = 0$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$, a zatem $t = (t_j) = (0)_{j=1}^{\infty} = 0$.

Otrzymaliśmy, że f jest izomorfizmem kratowym z ω na podkratę $\text{Orth}(E)$ rozpiętą na ciągu (P_j) parami rozłącznych projekcji porządkowych w E .

Rozważmy teraz przykładowy ortomorfizm dodatni T postaci

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} j P_j$$

(zbieżność punktowa w E). Na podstawie implikacji (iii) \Rightarrow (i) w lemacie 3.2 otrzymujemy, że $T \in \text{Orth}(E) \setminus Z(E)$. ■

3.4 Ortomorfizmy w F -kratach niezawierających izomorficznej kopii ω

Z twierdzeń 3.12, 3.16 oraz (BPR) wynika, że dalsze badania równości $\text{Orth}(E) = Z(E)$ możemy ograniczyć do przypadku, gdy dana F krata E nie zawiera izomorficznej kopii ω .

W poniższym lemacie wskazujemy, że jeśli E nie zawiera izomorficznej kopii ω , to liczbę $\delta(E)$ można wyznaczyć za pomocą elementów sfer pewnych kul w E .

Lemat 3.17 *Niech E będzie F -kratą. Jeśli $\delta(E) > 0$, to dla każdej liczby $\theta \in (0, \delta(E))$ oraz dla każdego $x \in E \setminus \{0\}$ istnieje liczba $t_x > 0$ taka, że*

$$\|t_x \cdot x\|_E = \theta. \quad (3.50)$$

W szczególności, zbiór $G_\theta = \{g \in E^+ : \|g\|_E = \theta\}$ spełnia warunek (3.14): dla każdego $x \in E^+$ istnieje liczba $\lambda_x > 0$ oraz $g \in G_\theta$ takie, że $x \geq \lambda_x \cdot g$, a zatem $\delta(E) = \delta(G_\theta)$.

Dowód. Niech $x \in E \setminus \{0\}$. Rozważmy funkcję

$$f_x(t) = \|t \cdot x\|_E, \quad t \in [0, \infty).$$

Ustalmy $\theta \in (0, \delta(E))$. Funkcja f_x jest ciągła, $f_x(0) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} f_x(t) = r(x) \geq \delta(E) > \theta > 0$. Ponieważ funkcja f_x jest niemalejąca i ciągła, to istnieje liczba $t' > 0$ taka, że $f_x(t') > \theta > 0 = f_x(0)$. Z własności Darboux wynika, że istnieje liczba $t_x \in (0, t')$ taka, że $f_x(t_x) = \theta$, czyli $\|t_x \cdot x\|_E = \theta$.

Niech teraz, dla ustalonego $y \in E^+ \setminus \{0\}$, liczba t_y spełnia równanie $\|t_y \cdot y\|_E = \theta$. Wówczas, dla $g = t_y y \in G_\theta$ mamy $y = \frac{1}{t_y} \cdot g$, zatem spełniony jest warunek (3.14) dla $\lambda = \frac{1}{t_y}$. ■

Z lematu 3.17 wynika natychmiast, że możemy poszukiwać mniejszego podzbioru D zbioru G_θ , nadal spełniającego warunek (3.14), skąd otrzymalibyśmy równość $\delta(D) = \delta(E)$. Ustalony taki podzbiór będziemy oznaczać symbolem D_θ . Za jego pomocą definiujemy funkcję $\varepsilon_\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ wzorem

$$\varepsilon_\theta(t) = \sup_{t \in D_\theta} \|t \cdot x\|_E, \quad (3.51)$$

której ciągłość w zerze okazuje się ważnym elementem badania struktury kraty $Orth(E)$.

Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem tego podrozdziału. Podaję w nim warunek wystarczający - (\star) - na zachodzenie równości $Orth(E) = Z(E)$; za jego pomocą można w konkretnych przypadkach sprawdzić, czy dana F -krata posiada ortomorfizmy niecentralne (twierdzenia 3.27 oraz 4.2). Warunek ten przetestowałam zarówno na ciągłych przestrzeniach Musielaka-Orlicza (twierdzenia 3.27 4.2 (b), wniosek 4.3, stwierdzenie 4.30, przykład 4.43), jak i bezatomowych (wniosek 4.17, twierdzenie 4.21).

Twierdzenie 3.18 *Niech E będzie F -kratą. Dla ustalonej dodatniej liczby θ niech D_θ oznacza podzbiór E^+ spełniający warunek (3.14), przy czym $\|\xi\| = \theta$ dla każdego $\xi \in D_\theta$. Wtedy*

- (i) E nie zawiera izomorficznej kopii ω ; przy tym $\delta(E) = \delta(D_\theta) \geq \theta$;
- (ii) warunkiem wystarczającym na zachodzenie równości

$$Orth(E) = Z(E)$$

jest warunek:

(\star) *funkcja ε_θ określona na przedziale $[0, 1]$ wzorem*

$$\varepsilon_\theta(t) = \sup_{\xi \in D_\theta} \|\xi t\|$$

jest ciągła w zerze.

Uwaga 3.19 Warunek (\star) nie jest na ogół koniecznym na zachodzenie równości

$Orth(E) = Z(E)$, co wynika z przykładu 4.43. W stwierdzeniu 4.30 pokazujemy jednak, że warunek (\star) jest *konieczny* w pewnej (dość wąskiej) klasie przestrzeni Musielaka-Orlicza.

Uwaga 3.20 (a) Ciągłość funkcji ε_θ w zerze jest równoważna topologicznej ograniczoności

zbioru D_θ (tj. warunek $\lambda_n \rightarrow 0$ dla ciągu liczb rzeczywistych (λ_n) implikuje topologiczną zbieżność do zera ciągu $(\lambda_n \xi_n)$ dla dowolnego ciągu $(\xi_n) \subset D_\theta$).

(b) Z lematu 3.8 (ii) wynika natychmiast, że na zachodzenie warunku (i) w twierdzeniu 3.18 wystarczy, aby zbiór $D \setminus \{0\}$ spełniający warunek (3.14) był oddzielony od zera, co jest oczywiście słabszym założeniem od przyjętego w pracy.

Uwaga 3.21 Zauważmy, że gdy $\delta(E) = 0$, to rozwiązanie równania (3.50) może nie istnieć.

Przykładowo, jeśli $E = \omega$ oraz e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy przestrzeni ω , to dla każdego $\theta > 0$ oraz każdego $t \in \mathbb{R}$ równość (3.50) zachodzi tylko dla skończonej ilości elementów zbioru D , ponieważ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\|te_n\|_E = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|t|}{1+|t|} < \frac{1}{2^n}$.

Dowód twierdzenia 3.18. Warunek (i) wynika wprost z warunków (ii) oraz (iii) lematu 3.8.

Przypuśćmy, że spełniony jest warunek (ii) naszego twierdzenia, oraz że istnieje nieujemny ortomorfizm $T \in Orth(E) \setminus Z(E)$. Na podstawie lematu 3.2, istnieje ciąg $(y_n) \subset E^+ \setminus \{0\}$ taki, że $Tv \geq n \cdot v$ dla wszystkich $v \in [0, y_n]$ dla $n = 1, 2, \dots$. Z warunku (3.14) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\lambda_n > 0$ oraz $\xi_n \in D$ takie, że $\lambda_n \xi_n \in (0, y_n]$, a zatem $T(\lambda_n \xi_n) \geq n \cdot \lambda_n \xi_n$; stąd $T\xi_n \geq n \cdot \xi_n$, tj.

$$T\left(\frac{\xi_n}{n}\right) \geq \xi_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, \quad (3.52)$$

Na podstawie założenia (ii) mamy

$$\left\| \frac{1}{n} \xi_n \right\| \leq \varepsilon_s \left(\frac{1}{n} \right) \rightarrow 0, \quad (3.53)$$

więc

$$\frac{1}{n} \xi_n \rightarrow 0. \quad (3.54)$$

Wiemy, że ortomorfizm T jest ciągły (gdyż jest dodatni na F -kracie E : twierdzenie 1.14), z warunku (3.52) dostajemy jednak, że

$$\left\| T\left(\frac{\xi_n}{n}\right) \right\| \geq \|\xi_n\| = s > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.55)$$

co przeczy ciągłości ortomorfizmu T . Stąd wynika, że warunek $T \in Orth(E) \setminus Z(E)$ jest fałszywy, zatem musi być $Orth(E) \setminus Z(E) = \emptyset$, więc $Orth(E) = Z(E)$ jak twierdzimy. ■

Twierdzenie 3.18 wskazuje, że użytecznym narzędziem do badania równości

$$Orth(E) = Z(E) \quad (3.56)$$

jest funkcja ε_θ zdefiniowana dla ustalonego zbioru D_θ spełniającego warunek (3.14): *ciągłość funkcji ε_θ w zerze implikuje warunek (3.56)*. Jest jasne, że ciągłość funkcji ε_θ w zerze może zależeć zarówno od konkretnej wartości θ , jak i zbioru D_θ . Powstają zatem naturalne pytania:

- (1) *Czy wszystkie liczby $\theta \in (0, \infty)$ pozwalają poprawnie zdefiniować funkcję ε_θ ?*
- (2) *Jak mały - w stosunku do zbioru G_θ - może być zbiór D_θ ?*

Z nierówności (3.14) wynika, że zbiór D_θ powinien być porządkowo gęsty w E (tj. $D_\theta^{dd} = E$), a zatem w przypadku, gdy F -krata E jest dyskretna nie powinien być mniejszy niż zbiór atomów F -kraty E .

Poniższy lemat jest uzupełnieniem lematu 3.17 i jest odpowiedzią na pierwsze pytanie.

Dla niepustego podzbioru $A \subset E \setminus \{0\}$ definiujemy zbiór $C(A)$ 'dopuszczalnych elementów θ względem A ' jako zbiór tych $\theta > 0$, dla których istnieje rozwiązanie równania

$$\|t_x \cdot x\|_E = \theta, \quad (3.57)$$

dla wszystkich $x \in A$, tj.

$$C(A) = \bigcap_{x \in A} C(x), \quad (3.58)$$

gdzie

$$C(x) = \{\theta > 0 : \text{równanie (3.57) ma rozwiązanie } t_x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Lemat 3.22 *Niech D oznacza dowolny, ustalony podzbiór F -kraty E spełniający warunek (3.14). Przykładowo,*

- (i) *jeśli E jest F -kratą funkcyjną (tj. ideałem porządkowo gęstym pewnej kraty $L_0(S, \Sigma, \mu)$), to*

$$D = E^0 = \{\chi_A, A \in \Sigma, 0 < \mu(A) < \infty, \chi_A \in E\},$$

- (ii) *jeśli E jest F -kratą dyskretną, to D składa się z elementów dyskretnych tej kraty.*

Jeśli E nie zawiera izomorficznej kopii ω , to zbiór $C(D)$ jest niepusty. Dokładniej, zachodzą inkluzje

$$C(D) \supset C(E) \supset (0, \delta(E)),$$

przy czym $\text{int}(C(E)) = (0, \delta(E))$.

Dowód. Zbiory D z punktów (i) oraz (ii) są opisane w przykładzie 3.7, punkty (3) oraz (4). Pierwsza inkluzja jest oczywista. Ponadto, na podstawie twierdzenia (BPR) mamy $\delta(E) > 0$.

Dla $x \neq 0$, niech f_x oznacza funkcję ciągłą na \mathbb{R} postaci $f_x(t) = \|tx\|_E$.

Jeśli $\delta(E) = \infty$, to $r(x) = \infty$ dla każdego $x \neq 0$, więc z faktu, że każda funkcja f_x posiada własność Darboux wynika, że $f_x(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, a zatem równanie (3.57) posiada rozwiązanie $t_x \in (0, \infty)$ dla każdego $\theta > 0$. Stąd $C(x) = \mathbb{R}^+$ dla każdego $x \neq 0$, więc $C(E) = \mathbb{R}^+ = (0, \delta(E))$.

Jeśli $\delta(E) < \infty$, to z definicji $C(E)$ oraz powyższego opisu przypadku $r(x) = \infty$ wynika, że wystarczy rozpatrzyć tylko te $x \neq 0$, dla których $r(x) < \infty$. Ponieważ każda funkcja f_x jest niemalejąca na \mathbb{R}^+ , to z ciągłości f_x (stosując ponownie własność Darboux) otrzymujemy inkluzję $f_x(\mathbb{R}^+) \supset (0, r(x))$, więc $f_x(\mathbb{R}^+) \supset (0, \delta(E))$ (bo $r(x) \geq \delta(E)$). Stąd $C(x) \supset (0, \delta(E))$ dla każdego $x \in E \setminus \{0\}$, a zatem $C(E) \supset (0, \delta(E))$.

Rozważmy teraz przypadek $\theta > \delta(E)$. Na podstawie definicji $\delta(E)$ otrzymujemy: istnieje liczba $\gamma > 0$ oraz element $x_\gamma \in E \setminus \{0\}$ takie, że $r(x_\gamma) < \delta(E) + \gamma = \theta$, a zatem dla każdego $t > 0$ mamy $f_{x_\gamma}(t) = \|tx_\gamma\|_E \leq r(x_\gamma) < \theta$, więc równanie (3.57) nie posiada rozwiązania a_x ; stąd $\theta \notin C(E)$. Oznacza to, że wewnątrz zbioru $C(E)$ jest równe $(0, \delta(E))$ jak twierdziliśmy. ■

W twierdzeniach dotyczących spełniania warunku $Orth(E) = Z(E)$ wykorzystujemy ciągłość w zerze pewnej funkcji f definiowanej za pomocą rodziny $\mathcal{F} = \{f_\xi, \xi \in A\}$ - funkcji skalarnych budowanych na elementach dyskretnych danej kraty dyskretnej E (twierdzenia 3.18 oraz 4.2). Okazuje się, że często ciągłość w zerze funkcji f jest równoważna warunkowej zwartości rodziny \mathcal{F} . Mimo, że własności tej nie wykorzystujemy w sposób jawny (por twierdzenie 4.15 oraz wniosek 4.18), to jest ona interesująca sama w sobie i dlatego omawiamy ją w kolejnym lemacie.

Lemat 3.23 *Niech $\mathcal{F} = \{f_\xi, \xi \in A\}$ będzie rodziną funkcji parzystych określonych na odcinku $[-1, 1]$. Załóżmy, że każda z tych funkcji jest niemalejąca na $[0, 1]$, przy czym $f_\xi(0) = 0$ oraz $f_\xi(1) = 1$. Wówczas: rodzina \mathcal{F} jest jednakowo ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f określona wzorem $f(t) = \sup_{\xi \in A} f_\xi(t)$ jest ciągła w zerze.*

Ponadto, jeśli funkcje f_ξ są subaddytywne na $[0, 1]$, to następujące warunki są równoważne:

- (i) *funkcja f jest ciągła w zerze (a więc rodzina funkcji \mathcal{F} jest jednakowo ciągła w zerze),*
- (ii) *funkcja f jest ciągła na odcinku $[0, 1]$,*
- (iii) *rodzina \mathcal{F} jest jednakowo ciągła,*
- (iv) *rodzina $\mathcal{F}_0 = \{f_{\xi|_{[0,1]}}, \xi \in A\}$ jest podzbiorem relatywnie zwartym w $C[0, 1]$.*

Dowód. Z definicji 1.2 wynika, że rodzina \mathcal{F} jest jednakowo ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(t) = \sup_{\xi \in A} f_\xi(t)$ jest ciągła w zerze.

(ii) \Rightarrow (i). Ta implikacja jest oczywista.

(i) \Rightarrow (ii). Ponieważ funkcje f_ξ są subaddytywne, to funkcja f jest również subaddytywna. Stąd

$$\begin{aligned} f(t) = f(t - s + s) &= \sup_{\xi \in A} f_\xi(t - s + s) \leq \sup_{\xi \in A} (f_\xi(t - s) + f_\xi(s)) \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in A} f_\xi(t - s) + \sup_{\xi \in A} f_\xi(s) = f(t - s) + f(s). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Zamieniając teraz zmienne t oraz s rolami otrzymujemy

$$f(s) \leq f(s - t) + f(t) = f(t - s) + f(t). \quad (3.60)$$

Łącząc nierówności (3.59) oraz (3.60) otrzymujemy

$$-f(t - s) \leq f(t) - f(s) \leq f(t - s).$$

Mamy zatem

$$|f(t) - f(s)| \leq f(t - s),$$

więc przy $t \rightarrow s$ dostajemy, że $f(t) \rightarrow f(s)$, stąd funkcja f jest ciągła, co dowodzi naszej implikacji (i) \Rightarrow (ii).

(iii) \Rightarrow (i). Ta implikacja jest oczywista.

(ii) \Rightarrow (iii). Ponieważ funkcje f_ξ są subaddytywne, to prawdziwe są nierówności

$$f_\xi(t) \leq f_\xi(t - s) + f_\xi(s) \leq f(t - s) + f_\xi(s). \quad (3.61)$$

Zamieniając rolami zmienne t oraz s otrzymujemy

$$f_\xi(s) \leq f_\xi(s - t) + f_\xi(t) \leq f(s - t) + f_\xi(t). \quad (3.62)$$

Łącząc nierówności (3.61) oraz (3.62) otrzymujemy

$$|f_\xi(t) - f_\xi(s)| \leq f(t - s).$$

Zatem

$$\sup_{\xi \in A} |f_\xi(t) - f_\xi(s)| \leq f(t - s),$$

więc z ciągłości funkcji f w zerze dostajemy jednakową ciągłość rodziny \mathcal{F} .

(iii) \Leftrightarrow (iv). Ponieważ funkcje f_ξ są monotoniczne i nieujemne, to są ograniczone z góry przez 1 oraz z dołu przez 0. Na podstawie twierdzenia Arzeli-Ascoliego, warunek (iii) jest równoważny z warunkową zwartością zbioru \mathcal{F}_0 jako podzbioru $C[0, 1]$. ■

Uwaga 3.24 Niech E będzie F -kratą z F -normą $\|\cdot\|_E$, oraz niech D_θ oznacza podzbiór

E^+ spełniający warunek (3.14), przy czym dla każdego $\xi \in D_\theta$ mamy $\|\xi\|_E = \theta$. Rozważmy funkcje f_ξ postaci $f_\xi(t) = \|t\xi\|$, $t \in [0, 1]$. Ponieważ każda z tych funkcji jest subaddytywna, to z lematu 3.23 wynika, że funkcja ε_θ zdefiniowana w twierdzeniu 3.18 ($\varepsilon_\theta(t) = \sup_{\xi \in D_\theta} f_\xi(t)$) jest ciągła (w zerze) wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\mathcal{F} = \{f_\xi\}_{\xi \in D_\theta}$ jest podzbiorem relatywnie zwartym w $C[0, 1]$.

Pierwsze zastosowanie warunku (\star) twierdzenia 3.18 otrzymujemy dla tzw. krat p -banachowskich.

Niech $p \in (0, 1]$. Przypomnijmy [41, Chapter 3], że F -norma $\|\cdot\|$ na F -przestrzeni X jest p -jednorodna, jeśli warunek (iv) w definicji 1.1 zastąpimy warunkiem

$$(iv') \|tx\| = |t|^p \|x\|, \text{ dla wszystkich } x \in X, t \in \mathbb{R};$$

wtedy $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią p -banachowską. Elementarnymi przykładami są tu przestrzenie Banacha oraz przestrzenie $L_p(\mu)$. Ponadto, analizując przykłady przestrzeni p -Banacha zawarte w monografii [41] łatwo zauważyć, że są to funkcyjne F -kraty. To upoważnia do wprowadzenia następującej definicji:

Definicja 3.25 F -kratę E z F -normą p -jednorodną, gdzie $p \in (0, 1]$, nazywamy kratą p -Banacha.

Niech $E = (E, \|\cdot\|)$ będzie kratą p -Banacha, oraz niech $D = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Wtedy zbiór $D = D_1$ spełnia oczywiście warunek (3.14) oraz funkcja ε_1 wyznaczona przez D jest postaci $\varepsilon_1(t) = \sup_{x \in D} \|tx\| = t^p$, $t \in [0, 1]$, więc jest ciągła w zerze. Stąd oraz z twierdzenia 3.18 otrzymujemy natychmiast wniosek uogólniający nieco wynik Luxemburga 2.7.

Wniosek 3.26 Jeśli E jest kratą p -Banacha, gdzie $p \in (0, 1]$, to $\text{Orth}(E) = Z(E)$.

Poniższe twierdzenie jest dyskretną wersją twierdzenia 3.18.

Twierdzenie 3.27 Niech E będzie F -kratą dyskretną, przy czym $D = \{d_\xi : \xi \in A\}$ oznacza maksymalny zbiór elementów dyskretnych i parami rozłącznych F -kraty E .

Jeśli $\delta(D) > 0$ (tj. E nie zawiera izomorficznej kopii ω : lemat 3.8 (ii)), to dla każdej liczby $\theta \in (0, \delta(E))$ istnieje układ liczb dodatnich $(\alpha_\xi)_{\xi \in A}$ taki, że

$$(i) \|\alpha_\xi d_\xi\|_E = \theta \text{ dla każdego } \xi \in A.$$

Jeśli przy tym funkcja $\varepsilon_\theta(t) = \sup_{\xi \in A} \|\alpha_\xi d_\xi\|_E$, $t \in [0, 1]$, jest ciągła w zerze, to

$$(ii) \text{Orth}(E) = Z(E).$$

Dowód. Część (i) naszego twierdzenia wynika bezpośrednio z lematu 3.22.

Położmy teraz $D_\theta = \{\alpha_\xi d_\xi : \xi \in A\}$. Zbiór D_θ spełnia założenia twierdzenia 3.18, zatem warunek (ii) naszego twierdzenia jest konsekwencją warunku (ii) twierdzenia 3.18.

■

Z równoważności zaprzeczeń warunków (i) oraz (iv) twierdzenia 3.3 otrzymujemy kryterium na to, aby każdy ortomorfizm danej kraty dyskretnej był centralny.

Twierdzenie 3.28 *Niech E będzie F -kratą dyskretną. Załóżmy, że F -norma na E jest porządkowo ciągła i maksymalny zbiór D elementów dyskretnych i parami rozłącznych jest przeliczalny: $D = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\text{Orth}(E) = Z(E)$,

(ii) *dla każdego ściśle rosnącego ciągu $(n_k) \subset \mathbb{N}$ istnieje ciąg $(x_k) \in \omega$ taki, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n_k}$ jest zbieżny, ale szereg $\sum_{k=1}^{\infty} k x_k e_{n_k}$ jest rozbieżny.*

Rozdział 4

Ortomorfizmy w niebanachowskich F -kratach Musielaka-Orlicza

Wyniki otrzymane w twierdzeniach poprzedniego rozdziału zastosujemy do przestrzeni Musielaka-Orlicza. Na koniec podajemy konkretne przykłady ciągów funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$ takich, że ℓ^Φ nie zawiera kopii ω , ale $\text{Orth}(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.

4.1 Ortomorfizmy w F -kratach Musielaka-Orlicza zawierających kopię ω

Zawieranie przez daną F -kratę Musielaka-Orlicza kopii ω można wyrazić za pomocą własności funkcji Musielaka-Orlicza, co pozwala w tym przypadku łatwo zweryfikować istnienie ortomorfizmów niecentralnych na takiej kratce (twierdzenia 4.2, 4.10).

4.1.1 Przypadek ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza

Poniższe twierdzenie 4.2 jest podstawowym twierdzeniem o ortomorfizmach w klasie niebanachowskich ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza. Jego dowód oparty jest na następującej charakteryzacji parametru $\delta(\ell^\Phi)$.

Lemat 4.1 *Niech Φ oznacza ciąg (φ_n) rosnących i ciągłych funkcji Orlicza. Połóżmy $\varphi_n(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$. Wtedy*

$$\delta(\ell^\Phi) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(\infty), \quad (4.1)$$

Dowód. Niech $D = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$, gdzie e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy. Oczywiście D jest maksymalnym podzbiorem ℓ^Φ elementów dyskretnych i parami rozłącznych.

Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$r(e_n) = \varphi_n(\infty). \quad (4.2)$$

Z postaci ρ_Φ wynika, że dla dowolnych $t, \lambda > 0$ mamy

$$\rho_\Phi\left(\frac{te_n}{\lambda}\right) = \varphi_n\left(\frac{t}{\lambda}\right),$$

zatem

$$\|te_n\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0, \rho_\Phi\left(\frac{te_n}{\lambda}\right) \leq \lambda\} = \inf\{\lambda > 0, \varphi_n\left(\frac{t}{\lambda}\right) \leq \lambda\}. \quad (4.3)$$

Położmy $p_n := \rho_\Phi(te_n) = \varphi_n(t)$, oraz

$$y_n = t \cdot p_n \cdot e_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Wtedy

$$\rho_\Phi\left(\frac{y_n}{p_n}\right) = \rho_\Phi\left(\frac{tp_n e_n}{p_n}\right) = \rho_\Phi(te_n) = \varphi_n(t) = p_n, \quad (4.5)$$

zatem

$$\rho_\Phi\left(\frac{y_n}{p_n}\right) = p_n. \quad (4.6)$$

Zgodnie z definicją F -normy $\|\cdot\|_\Phi$, z warunków (4.3) oraz (4.6) otrzymujemy

$$\|y_n\|_\Phi = p_n = \varphi_n(t), \quad (4.7)$$

więc

$$\|tp_n e_n\|_\Phi = \varphi_n(t),$$

czyli

$$\|t\varphi_n(t)e_n\|_\Phi = \varphi_n(t). \quad (4.8)$$

Ponieważ funkcje φ_n są rosnące i dodatnie (dla $t > 0$), to warunek $t \uparrow \infty$ implikuje, że

$$t\varphi_n(t) \uparrow \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Stąd dostajemy żadaną równość

$$r(e_n) = \lim_{v \rightarrow \infty} \|ve_n\|_\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \|t\varphi_n(t)e_n\|_\Phi \stackrel{(4.8)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi_n(\infty). \quad (4.10)$$

Z równości (4.10) oraz warunku (3.16) lematu 3.8 otrzymujemy

$$\delta(\ell^\Phi) = \delta(D) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\varphi_n(\infty)\},$$

co dowodzi równości (4.1). ■

Twierdzenie 4.2 *Niech Φ oznacza ciąg (φ_n) rosnących i ciągłych funkcji Orlicza, przy czym co najmniej jedna z nich jest niewypukła na dowolnym otoczeniu zera. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) przestrzeń ℓ^Φ zawiera izomorficzną kopię ω ,
- (ii) przestrzeń ℓ^Φ zawiera pasmo projekcyjne porządkowo-topologicznie izomorficzne z kratą ω ,
- (iii) $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(\infty) = 0$;
w tym przypadku $\text{Orth}(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.

Dowód. Przypomnijmy (rozdział 1, wzór (1.9)), że jeśli jedna z funkcji φ_n jest niewypukła na dowolnym otoczeniu zera, to przestrzeń ℓ^Φ nie jest Banacha i wtedy topologia ℓ^Φ jest wyznaczona przez F -normę postaci

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0, \rho_\Phi(x/\lambda) \leq \lambda\},$$

gdzie $\rho_\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|x_n|)$.

Równoważność (i) \iff (ii) otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia 3.12. Ponadto, na podstawie lematu 3.8 (ii), warunek (i) jest równoważny warunkowi $\delta(\ell^\Phi) = 0$; równoważność (i) \iff (iii) wynika zatem z lematu 4.1.

Z twierdzenia 3.13 oraz z powyższych równoważności (i) - (iii) wynika teraz, że $\text{Orth}(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$. ■

Rozważmy przypadek, gdy ciąg $\Phi = (\varphi_n)$ funkcji Orlicza jest ciągiem stałym, tzn. istnieje jedna funkcja Orlicza φ taka, że $\varphi_n = \varphi$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\ell^\Phi = \ell^\varphi$ oraz oczywiście $\varphi_n(1) = \varphi(1) > 0$. Stąd $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(\infty) = \varphi(\infty) > 0$ oraz funkcje φ_n są jednakowo ciągłe w zerze, bo taka jest funkcja φ .

Z twierdzenia 4.2 (iii) otrzymujemy teraz następujący wniosek:

Wniosek 4.3 *Jeśli φ jest ciągłą i rosnącą niewypukłą funkcją Orlicza, to*

- (i) F -krata ℓ^φ nie zawiera izomorficznej (tj., liniowo-homeomorficznej) kopii ω , oraz
- (ii) $\text{Orth}(\ell^\varphi) = Z(\ell^\varphi) \cong \ell_\infty$.

Kolejny wniosek dotyczy problemu, badanego wcześniej w klasie banachowskich przestrzeni Musielaka-Orlicza [55]:

Czy dana F -przestrzeń Musielaka-Orlicza jest izomorficzna ze zwykłą przestrzenią Orlicza ?

Ponieważ zawieranie izomorficznej kopii danej F -przestrzeni W jest własnością liniowo-topologiczną, to na podstawie twierdzenia 4.2 oraz wniosku 4.3 - dla $W = \omega$ - otrzymujemy następujące, częściowe, rozwiązanie powyższego problemu w klasie ciągłych przestrzeni Musielaka-Orlicza:

Wniosek 4.4 *Niech $\Phi = (\varphi_n)$ będzie ciągiem funkcji Musielaka-Orlicza. Jeśli $\inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(\infty) = 0$, to przestrzeń ℓ^Φ jest nieizomorficzna z dowolną przestrzenią Orlicza.*

W poniższym przykładzie pokażemy, że na ogół warunek $\delta(E) > 0$ nie jest wystarczający na to, aby $Orth(E) = Z(E)$. Przykład ten uogólnimy w twierdzeniu 4.26 wskazującym klasę F -krat dyskretnych takich, że $\delta(E) > 0$, ale $Orth(E) \neq Z(E)$.

Przykład 4.5 Niech Φ oznacza ciąg wklęsłych funkcji Orlicza postaci $\varphi_n(t) = t^{p_n}$, $p_n \in (0, 1)$ oraz $p_n \downarrow 0$, np. $p_n = \frac{1}{n}$ dla $t \geq 0$, gdzie $n = 1, 2, \dots$

Rozważmy kratę Musielaka-Orlicza $E = \ell^\Phi$. Ponieważ funkcje φ_n są wklęsłe, to na podstawie uwagi 1.21 mamy

$$\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi, \quad (4.11)$$

przy czym $\varphi_n(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jak w dowodzie twierdzenia 4.2, niech symbol D oznacza zbiór wektorów jednostkowych $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ przestrzeni ℓ^Φ . Kładąc w warunku (4.8): $t = 1$, otrzymujemy $\|e_n\|_\Phi = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$; zatem $D = D_\theta$ dla $\theta = 1$. W tym przypadku, z równości (4.10) dostajemy

$$r(e_n) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|te_n\|_\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \|te_n\|_\Phi = \varphi_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{p_n} = \infty,$$

więc z równoważności warunków (i) oraz (iii) twierdzenia 4.2 wynika, że F -krata ℓ^Φ nie zawiera izomorficznej kopii ω .

Twierdzimy, że jeśli $x = (x_n) \in \ell^\Phi$, to również każdy ciąg $y = (2^{\frac{1}{p_n}} \cdot x_n)$ jest elementem ℓ^Φ . Istotnie, na podstawie (4.11) mamy: $x \in \ell^\Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho_\Phi(x) < \infty.$$

Powyższy warunek jest równoważny warunkowi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < \infty,$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $(2^{\frac{1}{p_n}})^{p_n} = 2$, to dla ciągu $u = (u_n)$ postaci $u_n = 2^{\frac{1}{p_n}} \uparrow \infty$, mamy

$$\rho_\Phi(u \bullet x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u_n |x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n) \varphi(|x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \varphi(|x_n|) < \infty, \quad (4.12)$$

więc ciąg $(u_n \cdot x_n)$ jest elementem ℓ^Φ .

Zdefiniujmy operator liniowy $T : \ell^\Phi \rightarrow \omega$ wzorem

$$Tx = u \bullet x = (u_n \cdot x_n), \quad x = (x_n) \in \ell^\Phi. \quad (4.13)$$

Wykazaliśmy (nierówność (4.12)), że dla każdego $x \in \ell^\Phi$ ciąg $(2^{\frac{1}{p_n}} \cdot x_n)$ jest elementem ℓ^Φ , zatem T jest endomorfizmem ℓ^Φ , więc z jego postaci (4.13) wynika, że jest ortomorfizmem na ℓ^Φ .

Ponieważ $Te_n = 2^{\frac{1}{p_n}} \cdot e_n$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $2^{\frac{1}{p_n}} \uparrow \infty$, to z implikacji (iii) \Rightarrow (i) lematu 3.2 wynika, że $Orth(E) \neq Z(E)$.

Uwaga 4.6 Zauważmy dodatkowo, że funkcja ε_1 dla przykładu 4.5 (zdefiniowana w

warunku (ii) twierdzenia 3.18) jest nieciągła w zerze. Istotnie, dla $t \geq 0$ mamy $\|te_n\|_\Phi = \inf\{s > 0 : (\frac{t}{s})^{p_n} \leq s\} = t^{\frac{p_n}{p_n+1}}$, zatem

$$\varepsilon_1(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|te_n\|_\Phi = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t \in (0, 1], \\ 0 & \text{gdy } t = 0. \end{cases}$$

4.1.2 Ortomorfizmy na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ dla miary μ bezatomowej

W tej części podrozdziału wykażemy najpierw, że jeśli przestrzeń miary (S, Σ, μ) jest bezatomowa, to $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu))$ może przyjmować tylko jedną z wartości: 0 lub ∞ , co wynika z równoważności warunków $(a_1) \Leftrightarrow (b_1) \Leftrightarrow (c_1)$ oraz $(a_2) \Leftrightarrow (b_2) \Leftrightarrow (c_2)$ poniższego twierdzenia. Główne wyniki dotyczące ortomorfizmów na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ są zawarte w twierdzeniu 4.10 oraz wniosku 4.12.

Twierdzenie 4.7 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej i bezatomowej, oraz niech $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza. Połóżmy¹ $\mathcal{M}_\infty(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}(n, s)$. Wówczas:*

(i) *następujące warunki są równoważne:*

(a₁) $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ zawiera (kratowo-)topologiczną kopię ω ,

(b₁) $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = 0$,

(c₁) $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) < \infty$,

(d₁) *istnieje zbiór $A \in \Sigma$ taki, że $0 < \mu(A) < \infty$ oraz*

$$0 < \mathcal{M}_{\infty|A} < \infty \quad \mu - \text{prawie wszędzie}; \quad (4.14)$$

¹Funkcja \mathcal{M}_∞ może przyjmować wartość ∞ na pewnym zbiorze $A \in \Sigma$ takim, że $\mu(A) > 0$.

dualnie

(ii) następujące warunki są równoważne:

(a₂) $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera (kratowo-)topologicznej kopii ω ,

(b₂) $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) > 0$,

(c₂) $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = \infty$,

(d₂) $\mathcal{M}_{\infty} = \infty$ μ -prawie wszędzie.

Dodatkowo, w warunkach (i) oraz (ii) F -klatę $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ można zastąpić F -klatą $E_{\mathcal{M}}(\mu)$.

Uwaga 4.8 Dowód tego twierdzenia oparty jest na lemacie 3.9 oraz pewnej własności

przedstawionej w kolejnym lemacie. Własność ta jest z pewnością dobrze znana, ale dla przejrzystości podaję szkic dowodu.

Lemat 3.9 jest użyteczny w wyznaczaniu wartości $\delta(E)$, gdy E jest przestrzenią Musielaka-Orlicza $L_{\mathcal{M}}(\mu)$, gdzie μ jest miarą σ -skończoną (i bezatomową). Pozwala on posłużyć się elementami χ_A należącymi do części porządkowo ciągłej $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ F -kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$. Wówczas liczba

$$p_A := \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) \tag{4.15}$$

jest skończona dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, dzięki czemu w dowodzie twierdzenia 4.7 efektywnie wyznaczamy F -normy elementów $y_A := t \cdot p_A \cdot \chi_A$, wystarczające już do obliczenia $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu))$ za pomocą warunku (3.23) lematu 3.9.

Lemat 4.9 Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą σ -skończoną. Jeśli funkcja $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$ przyjmuje wartości skończone i dodatnie na S , to istnieje podzbiór $S^0 \in \Sigma$ miary μ skończonej oraz istnieją stałe $0 < c_1 < c_2 < \infty$ takie, że

$$c_1 \leq f|_{S^0} \leq c_2.$$

Szkic dowodu. Wystarczy rozpatrzyć zbiory $A_n = \{s \in S : \frac{1}{n} \leq f(s) \leq n\}$, $n = 1, 2, \dots$ oraz skorzystać z faktu, że $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, gdzie $0 < \mu(S_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieją liczby $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mu(A_n \cap S_k) > 0$. Wtedy zbiór $S^0 := A_n \cap S_k$ spełnia tezę lematu. ■

Przypomnijmy, że jeśli E jest F -klatą funkcyjną (tj. ideałem w $L_0(\mu)$), to dla funkcji $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$ symbol $[f]$ oznacza klasę abstrakcji funkcji równych μ -prawie wszędzie z funkcją f , ale zamiast pisać $[f] \in E$ piszemy $f \in E$. Podobnie, symbol $\|[f]\|_E$ zastępujemy symbolem $\|f\|_E$.

Dowód twierdzenia 4.7. Oznaczmy

$$\Sigma^0 = \{A \in \Sigma : \chi_A \in (E_{\mathcal{M}}(\mu))^0\} = \{A \in \Sigma : \chi_A \in E_{\mathcal{M}}(\mu), 0 < \mu(A) < \infty\}.$$

Na podstawie [21, Corollary 2, p. 136] klasa zbiorów Σ^0 jest ideałem w Σ , tzn. dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ istnieje zbiór $B \in \Sigma^0$ taki, że $B \subset A$. Wtedy, dla każdego zbioru $A \in \Sigma^0$ liczba p_A zdefiniowana wzorem (4.15) jest dodatnia i skończona, zatem iloraz $\frac{y_A}{p_A}$, gdzie $y_A = t \cdot p_A \cdot \chi_A$ ($t \geq 0$), jest dobrze określony i zachodzą równości

$$\rho_{\mathcal{M}}\left(\frac{y_A}{p_A}\right) = \rho_{\mathcal{M}}\left(\frac{t \cdot p_A \cdot \chi_A}{p_A}\right) = \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) = p_A,$$

skąd

$$\|y_A\|_{\mathcal{M}} = p_A,$$

zatem

$$\|t \cdot \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A). \quad (4.16)$$

Korzystając teraz z monotoniczności modularu $\rho_{\mathcal{M}}$, faktu, że $t \uparrow \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \cdot \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) \uparrow \infty$ (dla $0 < \rho_{\mathcal{M}}(\chi_A) < \infty$) oraz z równości (4.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} r(\chi_A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|t \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|t \cdot \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot \chi_A) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathcal{M}}(n \cdot \chi_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathcal{M}(n, s) d\mu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na podstawie twierdzenia Lebesgue'a ([34, twierdzenie 5, str. 129], por [16, Theorem B, p. 112]) mamy

$$r(\chi_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathcal{M}(n, s) d\mu(s) = \int_A \mathcal{M}_{\infty}(s) d\mu(s). \quad (4.18)$$

Równoważność $(a_1) \Leftrightarrow (b_1)$ wynika z twierdzeń 3.14 oraz (BPR) , natomiast **implikacja** $(b_1) \Rightarrow (c_1)$ jest oczywista.

Implikacja $(d_1) \Rightarrow (a_1)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $0 < \mathcal{M}_{\infty}(a) < \infty$ dla każdego $a \in A$.

Z założenia, że funkcja \mathcal{M}_{∞} jest skończona i dodatnia na zbiorze A , oraz z lematu 4.9 zastosowanego do przestrzeni $(A, \Sigma \cap A, \mu|_A)$ wynika, że istnieją stałe $0 < c_1 < c_2 < \infty$ takie, że $c_1 < \mathcal{M}_{\infty}|_{A_0} < c_2$ dla pewnego zbioru $A_0 \in \Sigma$ takiego, że $A_0 \subset A$ oraz $0 < \mu(A_0) < \infty$.

Z faktu, że Σ_0 jest gęstym ideałem σ -algebry Σ wynika, że istnieje zbiór $B \in \Sigma^0$ taki, że $B \subset A_0$. Oznacza to, że funkcja χ_B jest elementem $E_{\mathcal{M}}(\mu)$, przy czym $\mu(B) > 0$.

Na podstawie twierdzenia Lapunowa zastosowanego do zbioru B istnieje ciąg $(A_n) \subset \Sigma$ taki, że $A_{n+1} \subset A_n \subset B$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$0 < \mu(A_n) = \frac{1}{2^n} \mu(B) \downarrow 0, \text{ przy } n \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

Ponieważ $A_n \subset B$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\chi_{A_n} \leq \chi_B$, a zatem $\chi_{A_n} \in E_{\mathcal{M}}(\mu)$ (bo $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest ideałem w $L_0(\mu)$).

Stąd, dla ciągu (x_n) elementów $E_{\mathcal{M}}(\mu) \setminus \{0\}$ postaci $x_n = \chi_{A_n}$, na podstawie (4.19) oraz (4.18) mamy

$$r(x_n) = \int_{A_n} \mathcal{M}_{\infty}(s) d\mu(s) \leq \int_{A_n} c_2 d\mu(s) = c_2 \cdot \mu(A_n) = \frac{1}{2^n} c_2 \cdot \mu(B) \downarrow 0,$$

skąd $r(x_n) \downarrow 0$, przy $n \rightarrow \infty$.

Zgodnie z definicją liczby $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu))$, na podstawie lematu 3.9 otrzymujemy

$$\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = \inf_{x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)} r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(x_n) = 0.$$

Z twierdzenia (BPR) oraz 3.14 wynika teraz, że $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ zawiera (kratowo-) izomorficzną kopię ω .

Implikacja $(c_1) \Rightarrow (d_1)$. Wykażemy implikację równoważną: $\sim (d_1) \Rightarrow \sim (c_1)$.

Z zaprzeczenia warunku (4.14) wynika, że dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ takiego, że $0 < \mu(A) < \infty$ mamy $\mathcal{M}_{\infty|A} = \infty$ μ -prawie wszędzie. Ponieważ Σ^0 jest ideałem porządkowo gęstym w Σ , to dla każdego zbioru $B \in \Sigma^0$ spełniony jest warunek $\mathcal{M}_{\infty|B} = \infty$. Stąd i z warunku (4.18) otrzymujemy

$$r(\chi_B) = \int_B \mathcal{M}_{\infty}(s) d\mu(s) = \infty, \text{ dla każdego } B \in \Sigma^0.$$

Korzystając teraz z lematu 3.9 dostajemy $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = \infty$, więc z twierdzenia (BPR) wynika, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera topologicznej kopii ω .

Dualne równoważności $(a_2) \Leftrightarrow (b_2) \Leftrightarrow (c_2) \Leftrightarrow (d_2)$ wynikają z zaprzeczeń warunków $(a_1), (b_1), (c_1), (d_1)$.

Ponieważ część porządkowo ciągła $(L_{\mathcal{M}}(\mu))_a$ F -kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest równa $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ (patrz równość 1.12), to ostatnia część twierdzenia wynika z równości $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = \delta(E_{\mathcal{M}}(\mu))$ (lemat 3.9), a równoważność własności zawierania izomorficznej i kratowo-izomorficznej kopii ω przez $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ (oraz $E_{\mathcal{M}}(\mu)$) wynika natychmiast z twierdzenia 3.14. ■

Z udowodnionego wyżej twierdzenia otrzymujemy prostą charakteryzację istnienia ortomorfizmów niecentralnych na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$.

Twierdzenie 4.10 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią σ -skończoną i bezatomową, oraz niech $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza, przy czym istnieje zbiór $A \in \Sigma$ taki, że $0 < \mu(A) < \infty$ oraz $0 < \mathcal{M}_{\infty|A} < \infty$. Wówczas $\text{Orth}(L_{\mathcal{M}}(\mu)) \neq Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$.*

Dowód. Twierdzenie to wynika bezpośrednio z twierdzeń 4.7 oraz 3.16, ponieważ $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ zawiera izomorficzną kopię ω i ma własność σ -Fatou (wniosek 1.23). ■

Przykład 4.11 Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary, gdzie $S = [0, 1]$, Σ oznacza σ -ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, oraz μ jest miarą Lebesgue'a na S . Dla funkcji Musielaka-Orlicza \mathcal{M} na $[0, \infty) \times S$ postaci

$$\mathcal{M}(t, s) = \begin{cases} \frac{t^s}{1+t^s} & \text{gdy } t \in [0, \infty), s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \ln(1+t^s) & \text{gdy } t \in [0, \infty), s \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

mamy (gdy $t \uparrow \infty$)

$$\mathcal{M}(t, s) \uparrow \mathcal{M}_\infty(s) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t = 0, s \in [0, 1], \\ 1 & \text{gdy } t \in (0, \infty), s \in (0, \frac{1}{2}], \\ \infty & \text{gdy } t \in (0, \infty), s \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

zatem $\mathcal{M}_{\infty|_{(0, \frac{1}{2}]}} = 1$. Stąd, na podstawie twierdzenia 4.7, otrzymujemy, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ zawiera izomorficzną kopię ω .

Dodatkowo, jeśli $S_1 = (\frac{1}{2}, 1]$, $\Sigma_1 = \Sigma \cap S_1$ oraz $\mu_1 = \mu|_{S_1}$, to z warunku (ii) twierdzenia 4.7 wynika, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu_1)$ nie zawiera izomorficznej kopii ω , ponieważ $\mathcal{M}_{\infty|_{S_1}} = \infty$ (μ_1 - wszędzie).

Zauważmy, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu_1)$ jest porządkowo izomorficzna z pasmem projekcyjnym B w $L_{\mathcal{M}}(\mu)$: $B = P(L_{\mathcal{M}}(\mu))$, gdzie P jest projekcją porządkową postaci $Px = x \cdot \chi_{S_1}$.

Jeśli \mathcal{M} jest funkcją Orlicza, tj. $\mathcal{M}(t, s) = \varphi(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}^+$, $s \in S$, to

$$\mathcal{M}_\infty(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}(t, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(\infty).$$

Z części (i) twierdzenia 4.7 otrzymujemy natychmiast następujący wniosek, w którym druga część jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3.16.

Wniosek 4.12 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej i bezatomowej, oraz niech φ będzie funkcją Orlicza. Wówczas: następujące warunki są równoważne:*

- (i) $L^\varphi(\mu)$ zawiera (kratowo-)topologiczną kopię ω ,
- (ii) φ jest funkcją ograniczoną;

w tym przypadku $\text{Orth}(L^\varphi(\mu)) \neq Z(L^\varphi(\mu))$; dokładniej, $\text{Orth}(L^\varphi(\mu))$ zawiera kratową kopię ω .

Przykładowo, powyższy wniosek ma zastosowanie dla przestrzeni Orlicza $L^\varphi(\mu)$, gdzie φ jest funkcją postaci $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, lub $\varphi(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że dla F -kraty bezatomowej $L^\varphi(\mu)$, nie istnieje prosty analogon sytuacji opisanej we wniosku 4.3 dla przypadku atomowego: wniosek ten orzeka, że jeśli φ jest ciągłą funkcją Orlicza, to ℓ^φ nie zawiera kopii ω oraz każdy ortomorfizm na ℓ^φ jest centralny. Jeśli F -krata Orlicza $L^\varphi(\mu)$ jest bezatomowa, to sytuacja jest bardziej złożona: niezawieranie kopii ω przez $L^\varphi(\mu)$ (a więc warunek $\varphi(\infty) = \infty$) nie implikuje automatycznie równości $\text{Orth}(L^\varphi(\mu)) = Z(L^\varphi(\mu))$.

Przykład 4.13 Niech S oznacza odcinek jednostkowy $[0, 1]$, Σ - algebrę zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na S , oraz niech μ oznacza miarę Lebesgue'a na S . Rozważmy przestrzeń Orlicza $L^\varphi(\mu)$, gdzie $\varphi(t) = \ln(1+t)$, $t \geq 0$. Ponieważ funkcja φ jest wklęsła,

to $L^\varphi(\mu) = E^\varphi(\mu)$ (oraz modular ρ_φ jest równoważną F -normą na $L^\varphi(\mu)$ - lemat 1.20). Z nierówności $(1 + ts) \leq (1 + t)(1 + s)$, $s, t \geq 0$, wynika nierówność $\varphi(ts) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$, $s, t \geq 0$; stąd $\rho_\varphi(x \cdot y) \leq \rho_\varphi(x) + \rho_\varphi(y)$ dla wszystkich $x, y \in L^\varphi(\mu)$. Oznacza to, że $L^\varphi(\mu)$ jest f -podalgebrą f -algebry $L_0(\mu)$ z jednością $e = \mathbf{1}_S$, a zatem $L^\varphi(\mu)$ jest f -algebrą z jednością. Ponieważ $L^\varphi(\mu)$ zawiera klasy funkcji wyznaczone przez funkcje h nieograniczone (np. $h(t) = |\ln t|$, $t \in (0, 1]$, $h(0) = 0$), to $L^\varphi(\mu) \neq L_\infty(\mu) = A_e$, więc z twierdzenia 1.20 otrzymujemy $Orth(L^\varphi(\mu)) \neq Z(L^\varphi(\mu))$.

4.2 Ortomorfizmy w F -kratach Musielaka-Orlicza niezawierających kopii ω

W tym podrozdziale omawiamy warunki wystarczający na to, aby w klasie przestrzeni Musielaka-Orlicza równość

$$Orth(E) = Z(E) \tag{4.20}$$

zachodziła (twierdzenie 4.7, wniosek 4.19) i nie zachodziła (twierdzenia 4.20, 4.21, 4.26). Z twierdzeń (BPR) oraz 3.16 wynika, że możemy ograniczyć nasze rozważania do przypadku, gdy $\delta(E) > 0$.

4.2.1 Ogólne warunki wystarczające na istnienie i nieistnienie ortomorfizmów niecentralnych na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$

Twierdzenie 3.18 wskazuje, że jeśli F -krata E nie zawiera izomorficznej kopii ω , to użytecznym narzędziem do badania struktury kraty $Orth(E)$ jest funkcja ε_θ . Jest jasne, że ciągłość ε_θ w zerze może zależeć od konkretnej wartości $\theta \in (0, \infty)$.

W lemacie 3.22 wykazaliśmy, że jeśli $\delta(E) > 0$, to zbiór liczb θ dobrze definiujących funkcję ε_θ zawiera przedział $(0, \delta(E))$, więc jest niepusty (może być istotnie większy niż $(0, \delta(E))$).

W poniższym twierdzeniu 4.15 będziemy używać oznaczeń z przykładu 3.7 (3). Połóżmy

$$D^0 = (E_{\mathcal{M}}(\mu))^0 = \{\chi_A \in E_{\mathcal{M}}(\mu) = (L_{\mathcal{M}}(\mu))_a : 0 < \mu(A) < \infty\}. \tag{4.21}$$

Ponieważ część porządkowo ciąglej E_a F -kraty $E =_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest równa $E_{\mathcal{M}}(\mu)$, to z przykładu 3.7 (3) wynika, że zbiór D^0 jest liniowo gęsty w $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ oraz spełnia warunek (3.14).

Uwaga 4.14 Jeśli miara μ jest bezatomowa, to zbiór D^0 jest - w pewnym sensie optymalnym zbiorem spełniającym warunek (3.14), jeśli jednak miara μ jest atomowa (np. licząca), to zbiór D^0 zawiera zbiór atomów $at(L_{\mathcal{M}}(\mu))$ F -kraty $L_{\mathcal{M}}(\mu)$, który również spełnia warunek (3.14), jest liniowo gęsty w $E_{\mathcal{M}}(\mu)$ oraz jest istotnie mniejszy niż D^0 (w tym przypadku, nawet minimalnym - w sensie inkluzji - podzbiorem D^0 spełniającym warunek (3.14)).

Niech teraz D oznacza *ustalony* podzbiór D^0 spełniający warunek (3.14). Jak wykaza-
liśmy wyżej, zbiór D może być równy D^0 - w przypadku miary μ bezaatomowej - lub równy
 $at(L_{\mathcal{M}}(\mu))$, gdy miara μ jest atomowa.

Założmy, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera izomorficznej kopii ω , tj. $\delta(E) > 0$, i ustalmy
liczbę $\theta \in C(D)$. Ponieważ $D \subset D^0$, to $\theta \in C(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego
 $\chi_A \in D$ istnieje liczba $a_A > 0$ taka, że

$$\|a_A \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \theta \quad (4.22)$$

(patrz (3.58)). Na podstawie lematu 3.22, zbiór tych $\theta > 0$, dla których zachodzi warunek
(4.22), jest niepusty. Dla tak wybranej liczby θ zdefiniujemy funkcje $\varepsilon_{\theta,D}$ oraz $\bar{\varepsilon}_{\theta,D}$, określone
na przedziale $[0, 1]$ wzorami

$$\varepsilon_{\theta,D}(t) := \sup\{\|a_A \cdot \chi_A \cdot t\|_{\mathcal{M}} : \|a_A \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \theta, a_A \in \mathbb{R}^+, \chi_A \in D\}, \quad (4.23)$$

oraz

$$\bar{\varepsilon}_{\theta,D}(t) := \sup\{F_{u_A}(t) : u_A \in U_D^\theta\}, \quad (4.24)$$

gdzie

$$F_{u_A}(t) := \int_A \mathcal{M}(u_A t, s) d\mu(s), \quad (4.25)$$

oraz

$$U_D^\theta = \{u_A \in \mathbb{R}^+, \|u_A \cdot \theta \cdot \chi_A\|_{\mathcal{M}} = \theta, \chi_A \in D\} \quad (4.26)$$

(zauważmy, że U_D^θ zależy istotnie od wielkości zbioru D : największy - w sensie inkluzji -
zbiór U_D^θ dostajemy, gdy $D = D^0$).

Twierdzenie 4.15 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej, oraz niech $L_{\mathcal{M}}(\mu)$
będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza niezawierającą izomorficznej kopii ω . Niech D ozna-
cza ustalony podzbiór zbioru D^0 , spełniający warunek (3.14), oraz niech θ będzie istaloną
liczbą należącą do zbioru $C(D)$, gdzie zbiór D^0 jest zdefiniowany wzorem (4.21). Połóżmy
 $\varepsilon_\theta := \varepsilon_{\theta,D}$, $\bar{\varepsilon}_\theta := \bar{\varepsilon}_{\theta,D}$ (patrz (4.24)) oraz*

$$\mathcal{F}_\theta = \{F_{u_A}, u_A \in U_D^\theta\}.$$

Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (i) *funkcja ε_θ jest ciągła w zerze (skąd $\text{Orth}(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$),*
- (ii) *funkcja $\bar{\varepsilon}_\theta$ jest ciągła w zerze,*
- (iii) *rodzina \mathcal{F}_θ jest jednakowo ciągła w zerze.*

W szczególności, jeśli wszystkie funkcje należące do klasy \mathcal{F}_θ są subaddytywne (wystarczy, by funkcje $\mathcal{M}(\cdot, s)$ były subaddytywne dla μ -prawie wszystkich $s \in S$), to warunek (ii) jest równoważny warunkowi

(iv) dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór funkcji obciętych $\mathcal{F}_{\theta, \varepsilon} := \{F_{u_A}|_{[0, 1/1+\varepsilon]} : F_{u_A} \in \mathcal{F}_\theta\}$ jest relatywnie zwarty w $C[0, 1/1+\varepsilon]$.

Uwaga 4.16 Struktura rodziny \mathcal{F}_θ , podobnie jak zbioru U_D^θ , zależy od 'wielkości'

zbioru D : największą - w sensie inkluzji - rodzinę \mathcal{F}_θ dostajemy, gdy $D = D^0$.

Dowód twierdzenia 4.15. Na podstawie lematu 3.22, funkcja ε_θ jest dobrze określona. Z twierdzenia 3.18 wynika, że ciągłość funkcji ε_θ w zerze implikuje równość $Orth(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$. Zamiast badać ciągłość ε_θ (w zerze) będziemy analizować *nieciągłość* tej funkcji w zerze. Przypomnijmy, że D jest ustalonym podzbiorem D^0 spełniającym warunek (3.14).

Niech f_A oznacza odwzorowanie zdefiniowane wzorem

$$f_A(t) = \|a_A \cdot \chi_A \cdot t\|_{\mathcal{M}}, \quad t \in [0, 1],$$

gdzie $a_A \in \mathbb{R}^+$ oraz $\chi_A \in D$. Przypuśćmy, że funkcja ε_θ nie jest ciągła w zerze. Z monotoniczności ε_θ wynika natychmiast, że jej nieciągłość w zerze jest *równoważna* istnieniu liczby $\xi_0 > 0$ takiej, że $\varepsilon_\theta\left(\frac{1}{n}\right) > \xi_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tj. istnieje liczba $\xi_0 > 0$ taka, że

$$\varepsilon_\theta\left(\frac{1}{n}\right) = \sup_{\chi_A \in D} f_A\left(\frac{1}{n}\right) > \xi_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.27)$$

Nierówność (4.27) zachodzi *wtedy i tylko wtedy*, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $A_n \in \Sigma^0$ taki, że $\chi_{A_n} \in D$ oraz

$$f_{A_n}\left(\frac{1}{n}\right) > \xi_0, \quad (4.28)$$

tj.

$$\left\| a_{A_n} \cdot \chi_{A_n} \cdot \frac{1}{n} \right\|_{\mathcal{M}} > \xi_0. \quad (4.29)$$

Położmy $x_n = a_{A_n} \cdot \chi_{A_n} \cdot \frac{1}{n}$. Wówczas nierówność (4.29) przyjmuje postać

$$\|x_n\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\lambda > 0, \rho_{\mathcal{M}}\left(\frac{x_n}{\lambda}\right) \leq \lambda\} = \xi_0 + \gamma_n > \xi_0, \quad (4.30)$$

dla pewnego $\gamma_n > 0$; $n = 1, 2, \dots$. *Równoważnie*, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\gamma_n > 0$ taka, że dla każdego $0 < \varepsilon < \gamma_n$ zachodzą nierówności

$$\rho_{\mathcal{M}}\left(\frac{x_n}{\xi_0 + \gamma_n + \varepsilon}\right) \leq \xi_0 + \gamma_n + \varepsilon,$$

oraz

$$\rho_{\mathcal{M}} \left(\frac{x_n}{\xi_0 + \gamma_n - \varepsilon} \right) > \xi_0 + \gamma_n - \varepsilon \quad (4.31)$$

Z nierówności (4.31), dla $\varepsilon = \gamma_n$, otrzymujemy

$$\rho_{\mathcal{M}} \left(\frac{x_n}{\xi_0} \right) > \xi_0. \quad (4.32)$$

Zauważmy przy tym, że warunek (4.32) implikuje nierówność (4.30). Wprost z definicji, nierówność $\rho_{\mathcal{M}} \left(\frac{x_n}{\xi_0} \right) > \xi_0$ implikuje, że $\xi_0 < \|x_n\|_{\mathcal{M}}$, a zatem *warunki* (4.30) oraz (4.32) są *równoważne*.

Rozpisując nierówność (4.32), otrzymujemy

$$\int_{A_n} \mathcal{M} \left(\frac{a_{A_n} \cdot \theta \cdot \frac{1}{n}}{\theta \cdot \xi_0}, s \right) d\mu(s) > \xi_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.33)$$

Pamiętając, że $u_A = \frac{a_A}{\theta}$ oraz $F_{u_A}(t) = \int_A \mathcal{M}(u_A t, s) d\mu(s)$, oraz kładąc $t = t_n = \frac{\theta}{\xi_0} \cdot \frac{1}{n}$, możemy warunek (4.33) zapisać w postaci

$$F_{u_{A_n}}(t_n) = \int_{A_n} \mathcal{M}(u_{A_n} t_n, s) d\mu(s) > \xi_0, \quad (4.34)$$

a zatem $\bar{\varepsilon}_\theta(t_n) > \xi_0$, gdzie $t_n \downarrow 0$ oraz $\bar{\varepsilon}_\theta(0) = 0$. *Równoważnie*, funkcja $\bar{\varepsilon}_\theta$ nie jest ciągła w zerze, więc zgodnie z definicją, rodzina \mathcal{F}_θ nie jest jednakowo ciągła w zerze.

Na podstawie ciągu powyższych równoważności otrzymujemy, że warunki (i), (ii) oraz (iii) są równoważne.

Dodatkowo, dla każdej funkcji $F_{u_A} \in \mathcal{F}_\theta$ oraz $\varepsilon > 0$, z monotoniczności funkcji F_{u_A} , dla każdego $t \in \left[0, \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$, otrzymujemy

$$F_{u_A}(t) \leq F_{u_A} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right) = \rho_{\mathcal{M}} \left(u_A \cdot \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \chi_A \right) = \rho_{\mathcal{M}} \left(\frac{a_A}{\theta(1+\varepsilon)} \cdot \chi_A \right) \leq \theta(1+\varepsilon),$$

(ostatnia nierówność wynika z faktu, że dla $\lambda = \theta(1+\varepsilon) > 0$ mamy $\rho_{\mathcal{M}} \left(\frac{a_A \cdot \chi_A}{\lambda} \right) \leq \lambda$).

Rodzina $\mathcal{F}_{\theta,\varepsilon}$ jest zatem wspólnie ograniczona na przedziale $\left[0, \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$.

Założmy teraz, że wszystkie funkcje z rodziny \mathcal{F}_θ są subaddytywne; wtedy również funkcja $\bar{\varepsilon}_\theta$ jest subaddytywna, a zatem ciągłość $\bar{\varepsilon}_\theta$ w zerze jest *równoważna* ciągłości $\bar{\varepsilon}_\theta$ na całym przedziale $\left[0, \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$ (patrz Lemat 3.23). To z kolei oznacza (zgodnie z definicją), że rodzina $\mathcal{F}_{\theta,\varepsilon}$ jest jednakowo ciągła na $\left[0, \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$, a ponieważ wszystkie elementy rodziny $\mathcal{F}_{\theta,\varepsilon}$ są wspólnie ograniczone przez $\theta(1+\varepsilon)$, to na podstawie twierdzenia Arzeli - Ascoliego ciągłość $\bar{\varepsilon}_\theta$ jest *równoważna* warunkowej zwartości zbioru $\mathcal{F}_{\theta,\varepsilon}$ na przedziale $\left[0, \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$. Otrzymaliśmy równoważność warunków (ii) oraz (iv). ■

Na podstawie uwag 4.14 oraz 4.16, jeśli miara μ jest bezatomowa, to 'optymalnym' zbiorem D , za pomocą którego można zdefiniować funkcję $\bar{\varepsilon}_{\theta,D}$ oraz rodzinę \mathcal{F}_θ jest cały

zbiór D^0 , przy tym, na podstawie twierdzenia 4.7, mamy $C(D) = (0, \infty)$. Stąd otrzymujemy natychmiast:

Wniosek 4.17 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą σ -skończoną i bezatomową, oraz niech $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza niezawierającą kopii ω . Wówczas tezy twierdzenia 4.15 zachodzą dla przypadku, gdy $D = D^0$ (więc θ jest elementem zbioru $C(D^0) = (0, \infty)$).*

W praktyce wniosek 4.17, weryfikujący równość $Orth(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$, trudno stosować bezpośrednio z uwagi na dość skomplikowaną strukturę zbioru funkcji \mathcal{F}_{θ} . Jeśli jednak modular $\rho_{\mathcal{M}}$ jest subaddytywny, to w pewnych przypadkach istnieje prostsza metoda sprawdzania czy każdy ortomorfizm na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest centralny; wtedy wygodniej jest posłużyć się modulem $\rho_{\mathcal{M}}$ niż F -normą $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ - patrz dowód twierdzenia 4.21.

Z drugiej strony, jeśli miara μ jest *licząca*, to stosując uwagę 4.14 do twierdzenia 4.15 otrzymujemy dość prostą wersję tego twierdzenia, którą można efektywnie stosować w wielu konkretnych przypadkach (patrz wniosek 4.18 oraz twierdzenie 4.27). Załóżmy więc, że $(S, \Sigma, \mu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ oraz μ jest miarą liczącą (tj. $\mu\{n\} = 1$, $n = 1, 2, \dots$ oraz $\mu(A) = \infty$, gdy A jest nieskończonym podzbiorem \mathbb{N}). Wówczas funkcja Musielaka-Orlicza \mathcal{M} , określona na $\mathbb{R}^+ \times S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$, jest ciągiem funkcji Orlicza (φ_n) , gdzie $\varphi_n(t) = \mathcal{M}(t, n)$, $n = 1, 2, \dots$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami (uwaga 1.18), zamiast $\ell_{\mathcal{M}}$ będziemy pisać ℓ^{Φ} , gdzie $\mathcal{M} = \Phi$ oraz $\Phi = (\varphi_n)$. W tym przypadku twierdzenie 4.15 ma dość prostą interpretację: warunek (iii) tego twierdzenia można wyrazić za pomocą pewnej formy jednakowej ciągłości zbioru funkcji $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Wniosek 4.18 *Założmy, że F -krata Musielaka-Orlicza ℓ^{Φ} nie zawiera izomorficznej kopii ω (a więc $\delta(\ell^{\Phi}) > 0$). Ustalmy liczbę $\theta \in (0, C(D))$, gdzie $D = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ oraz e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy przestrzeni ℓ^{Φ} .*

Wówczas istnieje ciąg liczb dodatnich (u_n) takich, że

$$\varphi_n(u_n) = \theta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.35)$$

oraz następujące warunki są równoważne:

(i) *funkcja ε_{θ} jest ciągła w zerze (stąd, $Orth(\ell_{\Phi}) = Z(\ell_{\Phi}) \cong \ell_{\infty}$), gdzie*

$$\varepsilon_{\theta}(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|t \cdot e_n\|_{\Phi},$$

(ii) *rodzina funkcji $\{\varphi_n(u_n \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednakowo ciągła w zerze.*

Dowód. Na podstawie uwagi 4.14, zbiór D spełnia warunek (3.14) i jest podzbiorem zbioru D^0 . Mamy zatem $\chi_A \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \{n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, tj. $\chi_A = e_n$, $n = 1, 2, \dots$

Zgodnie z definicją funkcji $\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta, D}$ oraz definicją zbioru U_D^θ , otrzymujemy

$$\varepsilon_\theta(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|t \cdot e_n\|_\Phi$$

oraz

$$U_D^\theta = \{u_n = \frac{a_n}{\theta} : \|a_n \cdot e_n\|_\Phi = \theta\},$$

skąd

$$F_{u_A} = F_{u_n}(t) = \int_{\{n\}} \Phi(u_n t, s) d\mu(s) = \varphi_n(u_n t) = \varphi_n\left(\frac{a_n}{\theta} t\right), \quad (4.36)$$

a zatem $F_{u_n} = \varphi_n(u_n \cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, więc na podstawie twierdzenia 4.15 rodzina $\{\varphi_n(u_n \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednakowo ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ε_θ jest ciągła w zerze. ■

W typowych przypadkach ilustrujących twierdzenie 4.15 ciąg funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$ spełnia warunek $\varphi_n(1) = \theta$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas otrzymujemy prostszą postać poprzedniego wniosku:

Wniosek 4.19 *Załóżmy, że F -krata Musielaka-Orlicza ℓ^Φ nie zawiera izomorficznej kopii ω . Jeśli $\varphi_n(1) = \theta$ dla pewnej liczby $\theta > 0$ oraz każdego $n \in \mathbb{N}$, to następujące warunki są równoważne:*

- (i) *funkcja ε_θ jest ciągła w zerze (stąd, $\text{Orth}(\ell_\Phi) = Z(\ell_\Phi) \cong \ell_\infty$),*
- (ii) *rodzina $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednakowo ciągła w zerze.*

Dowód. Na podstawie dowodu wniosku 4.18 mamy $D = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, zatem warunek $\varphi_n(1) = \theta$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ implikuje, że $\theta \in C(D)$.

Z założenia, że $\varphi_n(1) = \theta$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy teraz

$$\rho_\Phi\left(\frac{\theta e_n}{\theta}\right) = \rho_\Phi(e_n) = \varphi_n(1) = \theta.$$

Z monotoniczności ρ_Φ dostajemy natychmiast $\|\theta \cdot e_n\|_\Phi = \theta$, a zatem $a_n = \theta$. Stąd $u_n = \frac{a_n}{\theta} = 1$.

Wniosek 4.19 jest teraz natychmiastową konsekwencją wniosku 4.18. ■

Jeśli \mathcal{M} oznacza funkcję Musielaka-Orlicza oraz $u \in \mathcal{L}_0(\mu)$, to symbol $\mathcal{M} \circ u$ oznaczać będzie funkcję $S \ni s \mapsto \mathcal{M}(u(s), s)$.

W kolejnych dwóch twierdzeniach będziemy rozpatrywać funkcje Musielaka-Orlicza \mathcal{M} spełniające następujące warunki:

(1a) dla każdego $s \in S$ funkcje $\mathcal{M}(\cdot, s)$ są subaddytywne (np. wklęsłe),

(2a) istnieje funkcja $u \in \mathcal{L}_0(\mu) \setminus \mathcal{L}_\infty(\mu)$ taka, że $\mathcal{M} \circ u \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$, oraz dla każdego $x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$ zachodzi nierówność

$$\rho_{\mathcal{M}}(u \cdot x) \leq c \|\mathcal{M} \circ u\|_{L_\infty} \cdot \rho_{\mathcal{M}}(x) + c_1. \quad (4.37)$$

Z poniższego twierdzenia 4.21 wynika, że przykładem takiej funkcji jest funkcja $\mathcal{M}(t, s) = t^s$, $t \in \mathbb{R}^+$, $s \in [0, 1] = S$. Przypadek dyskretny, tj. gdy $\mathcal{M} = \Phi = (\varphi_n)$ jest ciągiem funkcji Orlicza postaci $\varphi_n(t) = t^{p_n}$, $p_n \in (0, 1)$, jest badany w lemacie 4.29 oraz stwierdzeniu 4.30.

Twierdzenie 4.20 *Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej, oraz niech \mathcal{M} będzie funkcją Musielaka-Orlicza spełniającą warunki (1a) oraz (2a).*

Wówczas na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ istnieje ortomorfizm niecentralny, tj. $Orth(L_{\mathcal{M}}(\mu)) \neq Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$.

Dowód. Z subaddytywności funkcji \mathcal{M} wynika, że spełniony jest warunek (Δ_2) dla funkcji $c(s) \equiv 0$, a zatem $L_{\mathcal{M}}(\mu) = E_{\mathcal{M}}(\mu)$, tj. F -norma na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ jest porządkowo ciągła (relacja 1.12).

Niech $u \in \mathcal{L}_0(\mu) \setminus \mathcal{L}_\infty(\mu)$ będzie funkcją spełniającą warunek (2a). Zdefiniujmy operator $T_u : L_{\mathcal{M}}(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ wzorem

$$T_u x = u \cdot x.$$

Z warunku (4.37) wynika, że $T_u x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$ dla każdego $x \in L_{\mathcal{M}}(\mu)$, więc operator T_u jest dobrze określonym ortomorfizmem na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ (bo ortomorfizmem na $L_0(\mu)$).

W tym przypadku mamy $T_u \in Orth(L_{\mathcal{M}}(\mu)) \setminus Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$ (bo $u \notin L_\infty(\mu)$): (patrz wniosek 2.27), więc $Orth(L_{\mathcal{M}}(\mu)) \neq Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$, jak twierdziliśmy. ■

W poniższym twierdzeniu opiszemy pewną klasę funkcji Musielaka-Orlicza spełniających warunki (1a), (2a).

Niech (S, Σ, μ) będzie przestrzenią miary σ -skończonej, przy czym miara μ jest bezatomowa lub atomowa (gdy $\Sigma = 2^S$, to dla uproszczenia przyjmujemy, że miara μ jest licząca) oraz niech \mathcal{M} będzie funkcją Musielaka-Orlicza postaci $\mathcal{M}(t, s) = t^{f(s)}$, gdzie $f : S \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją mierzalną. Z definicji funkcji \mathcal{M} wynika natychmiast, że $f(s) > 0$ dla każdego $s \in S$ (w przeciwnym przypadku istniałby element $s_0 \in S$ taki, że funkcja $\mathcal{M}(t, s_0)$ byłaby postaci $\mathcal{M}(t, s_0) = 1$ dla $t > 0$ oraz $\mathcal{M}(t, s_0) = 0$ dla $t = 0$, więc nieciągła w zerze, co przeczy przyjętej definicji funkcji Musielaka-Orlicza).

Twierdzenie 4.21 Przy oznaczeniach jak wyżej, funkcja Musielaka-Orlicza \mathcal{M} postaci $\mathcal{M}(t, s) = t^{f(s)}$ spełnia warunek (1a) oraz F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera izomorficznej kopii ω . Ponadto następujące warunki są równoważne:

(i) funkcja \mathcal{M} spełnia warunek (2a)

(ii) funkcja f spełnia warunek

$$\inf_{s \in S \setminus B} f(s) = 0, \text{ dla pewnego zbioru } B \in \Sigma \text{ takiego, że } \mu(B) = 0, \quad (4.38)$$

(iii) $\text{Orth}(L_{\mathcal{M}}(\mu)) \neq Z(L_{\mathcal{M}}(\mu))$.

(iv) dla każdego $\theta \in (0, \delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)))$ funkcja $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^{\rho_{\mathcal{M}}}$, wyznaczona przez modular $\rho_{\mathcal{M}}$, jest nieciągła w zerze.

Jeśli μ jest miarą bezatomową, to w warunku (iv) mamy $\theta \in (0, \infty)$.

Uwaga 4.22 Jeśli przestrzeń miary jest czysto atomowa, to warunek $\mu(B) = 0$ jest

równoważny z warunkiem $B = \emptyset$. Wówczas (4.38) zachodzi na całym zbiorze S . Ten przypadek omawiamy bardziej szczegółowo w stwierdzeniu 4.30.

Dowód twierdzenia 4.21. Ponieważ $f(s) \in (0, 1)$ dla każdego $s \in S$, to funkcje $\mathcal{M}(\cdot, s)$ są wklęsłe, zatem spełniają warunek (1a).

Dla funkcji $\mathcal{M}(t, s) = t^{f(s)}$ mamy

$$\mathcal{M}_{\infty}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}(n, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{f(s)} = \infty$$

dla każdego $s \in S$, zatem z części (ii) twierdzenia 4.7 otrzymujemy, że F -krata $L_{\mathcal{M}}(\mu)$ nie zawiera izomorficznej kopii ω ; równoważnie, $\delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)) > 0$.

Ponieważ funkcje \mathcal{M} są subaddytywne, to modular $\rho_{\mathcal{M}}$ również jest subaddytywny, zatem $\rho_{\mathcal{M}}$ jest F -normą na $L_{\mathcal{M}}(\mu)$, równoważną z wyjściową F -normą $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ (lemat 1.20 (iv)).

W dalszej części dowodu będziemy posługiwać się modulem $\rho_{\mathcal{M}}$, a nie F -normą $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.

(ii) \Rightarrow (i). W tej części dowodu nie wykorzystujemy formalnie założenia, że $\inf_{s \in S \setminus B} f(s) = 0$ dla pewnego zbioru B miary zero. Warunek ten w pełni wykorzystujemy w dowodzie implikacji przeciwnej.

Z warunku (4.38) wynika, że istnieje ciąg $(A_n) \subset \Sigma$ zbiorów miary dodatniej taki, że

$$0 < f|_{A_n} \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Korzystając teraz z twierdzenia 1.24 (gdy miara μ jest bezatomowa), lub z wniosku 1.30 (gdy miara μ jest atomowa) możemy bez straty ogólności założyć, że ciąg (A_n) jest parami rozłączny. Ta własność pozwala nam zdefiniować funkcję $u \in \mathcal{L}_0(\mu)$ postaci

$$u(s) = \begin{cases} e^{\frac{1}{f(s)}} & \text{gdy } s \in A_n, \\ e & \text{gdy } s \in S \setminus \bigcup A_n, \end{cases} \quad (4.39)$$

Wówczas dla $s \in A_n$ mamy oszacowanie

$$u(s) = e^{\frac{1}{f(s)}} \geq e^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

zatem funkcja u jest (istotnie) nieograniczona, więc $\|u\|_{L_\infty} = \infty$.

Z warunku (4.39) otrzymujemy

$$0 < (\mathcal{M} \circ u)(s) = \begin{cases} (u(s))^{f(s)} = (e^{\frac{1}{f(s)}})^{f(s)} = e, & \text{gdy } s \in A_n, \\ e^{f(s)} \leq e^{\sup_{s \in S} f(s)} \leq e & \text{gdy } s \in S \setminus \bigcup A_n, \end{cases}$$

zatem funkcja $\mathcal{M} \circ u$ jest ograniczona z góry przez liczbę e , skąd

$$\|\mathcal{M} \circ u\|_{L_\infty} \leq e < \infty. \quad (4.40)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{M}}(u \cdot x) &= \int_S \mathcal{M}(u(s) \cdot x(s), s) d\mu(s) = \int_S (u(s))^{f(s)} \cdot x(s)^{f(s)} d\mu(s) = \\ &= \int_S (\mathcal{M} \circ u)(s) \cdot (x(s))^{f(s)} d\mu(s) \stackrel{(4.40)}{\leq} e \int_S (x(s))^{f(s)} d\mu(s) = e \cdot \rho_{\mathcal{M}}(x), \end{aligned}$$

więc spełniony jest warunek (4.37) dla $c = 1$, $c_1 = 0$ oraz $\|\mathcal{M} \circ u\| = e$, gdzie $u \notin L_\infty$. To dowodzi warunku (2a).

Wykażemy teraz ciąg następujących implikacji, które zakończą dowód twierdzenia: $\sim (ii) \Rightarrow \sim (iv) \Rightarrow \sim (iii) \Rightarrow \sim (i)$.

$\sim (ii) \Rightarrow \sim (iv)$. Niech $B \in \Sigma$ będzie takim zbiorem, że $\mu(B) = 0$ oraz $\inf_{s \in S \setminus B} f(s) > 0$. Będziemy teraz korzystać z twierdzenia 3.18, które mówi, że jeśli funkcja ε_θ jest ciągła w zerze, to każdy ortomorfizm danej F -kraty E jest centralny.

Ustalmy liczbę $\theta \in (0, \delta(L_{\mathcal{M}}(\mu)))$ i rozpatrzmy funkcję ε_θ wyznaczoną przez modular (F -normę) $\rho_{\mathcal{M}}$. Niech $t \in [0, 1]$ oraz

$$D_\theta = \{a_A \chi_A : A \in \Sigma^0, a_A \in \mathbb{R}^+, \rho_{\mathcal{M}}(a_A \cdot \chi_A) = \theta\}.$$

Ponieważ $\mu(B) = 0$, to całkowanie funkcji mierzalnych po zbiorach A oraz $A \setminus B$ daje takie same wyniki; stąd, na podstawie definicji funkcji ε_θ , otrzymujemy

$$\varepsilon_\theta(t) = \sup_{x \in D_\theta} \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot x) = \sup_{a_A \chi_A \in D_\theta} \rho_{\mathcal{M}}(t \cdot a_A \cdot \chi_A) = \sup_{a_A \chi_A \in D_\theta} \int_{A \setminus B} (t \cdot a_A)^{f(s)} d\mu(s) =$$

$$\begin{aligned} \sup_{a_A \chi_A \in D_\theta} \int_{A \setminus B} t^{f(s)} \cdot a_A^{f(s)} d\mu(s) &\leq \sup_{s \in S \setminus B} t^{f(s)} \cdot \sup_{a_A \chi_A \in D_\theta} \int_{A \setminus B} a_A^{f(s)} d\mu(s) = \\ &t^{\inf_{s \in S \setminus B} f(s)} \cdot \sup_{a_A \chi_A \in D_\theta} \rho_{\mathcal{M}}(a_A \cdot \chi_A) = \theta \cdot t^{\inf_{s \in S \setminus B} f(s)}, \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy nierówność $\varepsilon_\theta(t) \leq \theta \cdot t^a$, gdzie z założenia liczba $a := \inf_{s \in S \setminus B} f(s)$ jest dodatnia, a zatem funkcja ε_θ jest ciągła w zerze.

$\sim (iv) \Rightarrow \sim (iii)$ Z twierdzenia 3.18 wynika, że zachodzi równość

$$\text{Orth}(L_{\mathcal{M}}(\mu)) = Z(L_{\mathcal{M}}(\mu)). \quad (4.41)$$

$\sim (iii) \Rightarrow \sim (i)$. Załóżmy, że zachodzi równość (4.41). Ponieważ funkcja \mathcal{M} spełnia warunek (1a), to z twierdzenia 4.20 wynika, że równość ta implikuje, że funkcja \mathcal{M} *nie spełnia* warunku (2a).

Ostatnia część twierdzenia wynika z warunku (c₂) twierdzenia 4.7. ■

Uwaga 4.23 Z dowodu implikacji (2a) \Rightarrow (4.38) otrzymujemy dodatkowo, że warunek

$\inf_{s \in S \setminus B} f(s) > 0$ implikuje, że funkcja ε_θ wyznaczona przez modular $\rho_{\mathcal{M}}$ jest dominowana przez funkcję potęgową ciągłą w zerze. Bezpośrednia konstrukcja i analiza funkcji ε_θ za pomocą wyjściowej F -normy $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ jest dość kłopotliwa i trudno przy jej pomocy otrzymać podobny wynik.

4.2.2 Przypadek ciągłych przestrzeni Musielaka-Orlicza - warunek jednostajny (Δ_n)

Analizując przykład 4.5 zauważamy, że warunek $\rho_\Phi(x) < \infty$ implikował nierówność $\rho_\Phi(u \bullet x) < \infty$, gdzie $u = (u_n)$ jest ciągiem postaci $u_n = 2^{\frac{1}{p_n}} \uparrow \infty$, $n = 1, 2, \dots$, gdzie $p_n \in (0, 1)$ oraz $u \bullet x = u \bullet (x_n) = (u_n x_n)$, bo funkcje φ_n spełniały nierówność

$$\varphi_n(nt) \leq 2\varphi_n(t), \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

W szczególności, z warunku (4.42) otrzymujemy, że

$$\varphi_n(2t) \leq 2\varphi_n(t), \quad \text{dla } n \geq 1, \quad (4.43)$$

więc funkcje φ_n spełniają jednostajnie warunek Δ_2 (definicja 1.19) dla wszystkich $t \geq 0$, ze stałymi $c = 2$ oraz $d_n = 0$.

Użyteczność nierówności (4.42) jest motywacją do wprowadzenia następującej definicji.

Definicja 4.24 Mówimy, że ciąg funkcji Orlicza (φ_n) spełnia **jednostajny warunek** (Δ_n) , jeśli istnieją: liczba $t_0 > 0$, ciąg $(c_n) \subset \mathbb{R}^+$ oraz stała $c > 0$ takie, że dla każdego $t \in [0, t_0]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\varphi_n(nt) \leq c \cdot \varphi_n(t) + c_n,$$

gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

Uwaga 4.25 Zgodnie z powyższą definicją otrzymujemy: jeśli ciąg funkcji Orlicza

$\Phi = (\varphi_n)$ spełnia jednostajny warunek (Δ_n) , to spełnia jednostajny warunek (Δ_2) dla $n \geq 1$, i w tym przypadku zachodzi równość $\ell^\Phi = h^\Phi$.

Postępując jak w przykładzie 4.5 i korzystając z definicji 4.24 otrzymujemy użyteczny wynik.

Twierdzenie 4.26 Niech $E = \ell^\Phi$, gdzie Φ oznacza ciąg rosnących i ciągłych funkcji Orlicza (φ_n) spełniających jednostajny warunek (Δ_n) . Wtedy:

- (i) $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$;
- (ii) jeśli, dodatkowo, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\varphi_n(1) = 1$, to krata ℓ^Φ nie zawiera izomorficznej kopii ω (tj. $\delta(\ell^\Phi) > 0$).

Dowód. Niech $\Phi = (\varphi_n)$ oznacza ciąg rosnących funkcji Orlicza spełniających jednostajny warunek (Δ_n) .

Twierdzimy, że

(v) jeśli $x = (x_n) \in \ell^\Phi$, to również ciąg $y := (n \cdot x_n)$ jest elementem ℓ^Φ .

Istotnie, jeśli $\rho_\Phi(x/\lambda) < \infty$ dla pewnego $\lambda > 0$, to dla elementu y mamy

$$\begin{aligned} \rho_\Phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{n|x_n|}{\lambda}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(c \cdot \varphi_n\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) + c_n\right) \\ &= c \cdot \rho_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty, \end{aligned} \quad (4.44)$$

więc y jest elementem ℓ^Φ , jak twierdziliśmy.

Położmy $u = (u_n)$, gdzie $u_n = n$, $n = 1, 2, \dots$. Na podstawie wykazanej własności (v), operator $T : \ell^\Phi \rightarrow \ell^\Phi$ postaci

$$Tx = u \bullet x = (n \cdot x_n), \text{ gdzie } x = (x_n) \in \ell^\Phi, \quad (4.45)$$

jest dobrze zdefiniowanym ortomorfizmem na ℓ^Φ .

Ponieważ $Te_n = n \cdot e_n$ dla $n = 1, 2, \dots$, to na podstawie lematu 3.2 otrzymujemy, że $T \in Orth(E) \setminus Z(E)$. Zatem $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$, więc spełniony jest warunek (i) naszego twierdzenia.

Niech teraz $\varphi_n(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Jak w dowodzie twierdzenia 4.2, niech symbol D oznacza zbiór wektorów jednostkowych $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ przestrzeni ℓ^Φ . Kładąc w warunku (4.8): $t = 1$, otrzymujemy $\|e_n\|_\Phi = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $D = D_\theta$ dla $\theta = 1$, zatem $\delta(\ell^\Phi) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\|_\Phi = 1 > 0$. Z twierdzenia 4.2 wynika teraz, że ℓ^Φ nie zawiera izomorficznej kopii ω . Wykazaliśmy warunek (ii) naszego twierdzenia. ■

Korzystając z lematów 1.20 oraz 3.1 otrzymujemy następujące uogólnienie twierdzenia 4.26.

Twierdzenie 4.27 *Niech $E = \ell^\Phi$, gdzie $\Phi = (\varphi_n)$ oznacza ciąg rosnących i ciągłych funkcji Orlicza. Jeśli Φ zawiera podciąg $\Psi = (\varphi_{n_k})$ spełniający jednostajny warunek (Δ_k) , to $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.*

Dowód. Jeśli ciąg Ψ spełnia jednostajny warunek (Δ_k) , to na podstawie twierdzenia 4.26 mamy $Orth(\ell^\Psi) \neq Z(\ell^\Psi)$. Ponadto, na podstawie lematu 1.20 (iii), krata ℓ^Ψ jest porządkowo izomorficzna z pasmem projekcyjnym w ℓ^Φ . Z lematu 3.1 wynika teraz, że $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$. ■

Wniosek 4.28 *Niech $\Phi = (\varphi_n)$ będzie ciągiem funkcji Orlicza, przy czym*

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(1) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(1) < \infty. \quad (4.46)$$

Wtedy ℓ^Φ nie zawiera-kratowo izomorficznej kopii ω , a warunek $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$ implikuje, że F -krata ℓ^Φ nie jest izomorficzna porządkowo² z żadną F -kratą Orlicza ℓ^φ .

W szczególności, tak jest, gdy ciąg Φ spełnia założenia twierdzenia 4.26: $\varphi_n(1) = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz ciąg (φ_n) spełnia jednostajny warunek (Δ_n) .

Dowód. Na podstawie twierdzenia 4.2 (iii), F -krata ℓ^Φ nie zawiera izomorficznej kopii ω . Wyliminowaliśmy zatem przypadek zawierania przez ℓ^Φ kopii ω .

Wykażemy nieco więcej:

(w) *jeśli $Orth(E) \neq Z(E)$, to dla każdej kraty G takiej, że $Orth(G) = Z(G)$ krata E nie jest porządkowo izomorficzna z G .*

Przypuśćmy, nie wprost, że E jest porządkowo izomorficzna z G , ale $Orth(E) \neq Z(E)$. Na podstawie lematu 2.14 mielibyśmy $Orth(E) \cong Orth(G)$ oraz $Z(E) \cong Z(G)$, zatem

$$Orth(E) \cong Orth(G) = Z(G) \cong Z(E), \quad (4.47)$$

gdzie symbol $' \cong$ oznacza odpowiedni izomorfizm porządkowy. Z warunku (4.47) wynika, że I_E jest mocną jedyką w $Orth(E)$ (bo izomorfizm porządkowy zachowuje mocne jedyki).

²Z grubsza mówiąc, ciąg Φ nie jest równoważny ciągowi stałemu.

Stąd otrzymujemy inkluzję $Orth(E) \subset Z(E)$, a zatem $Orth(E) = Z(E)$, co jest sprzeczne z wyjściowym założeniem. Nasze stwierdzenie (w) jest więc prawdziwe. Kładąc $E = \ell^\Phi$ oraz $G = \ell^\varphi$ otrzymujemy tezę wniosku. ■

W dalszej części tego podrozdziału przeanalizujemy dokładniej przykład 4.5. Niech (p_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$ oraz niech $\Phi = (\varphi_n)$ oznacza ciąg funkcji Musielaka-Orlicza postaci $\varphi_n(t) = t^{p_n}$.

Poniższy lemat jest podstawą konstrukcji kilku przykładów ciągów funkcji Musielaka-Orlicza spełniających jednostajny warunek (Δ_n) . Wykorzystamy go również do analizy związku między warunkiem jednostajnym (Δ_n) a warunkiem (\star) z twierdzenia 3.18.

Lemat 4.29 *Przy oznaczeniach jak wyżej, ciąg $\Phi = (\varphi_n)$ spełnia jednostajny warunek (Δ_n) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n \ln(n) < \infty$ (przykładowo, $p_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, lub $p_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$). W tym przypadku, $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.*

Dowód. (\Leftarrow) Jeśli $p_n \ln n \leq d < \infty$ dla pewnej liczby $d \in \mathbb{R}$ oraz wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to łatwo sprawdzić, że ciąg $\varphi_n(t) = t^{p_n}$, $n = 1, 2, \dots$ spełnia jednostajny warunek (Δ_n) ze stałymi $t_0 = 1$, $c = e^d$ oraz $c_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(\Rightarrow) Przypuśćmy teraz, że nasz ciąg Φ spełnia jednostajny warunek (Δ_n) : istnieją stałe $c, t_0 > 0$ oraz ciąg $(c_n) \subset \mathbb{R}^+$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, oraz dla każdego $t \in [0, t_0]$ zachodzi nierówność

$$(nt)^{p_n} = \varphi_n(n \cdot t) \leq c \cdot \varphi_n(t) + c_n = c \cdot t^{p_n} + c_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

Niech n_0 będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{1}{n_0} < t_0$ oraz $c_n < \frac{1}{2}$, dla $n > n_0$. Wówczas, kładąc w nierówności (4.48): $t = \frac{1}{n}$, dla $n > n_0$ dostajemy

$$1 \leq c \cdot \frac{1}{n^{p_n}} + c_n \leq c \cdot \frac{1}{n^{p_n}} + \frac{1}{2},$$

a więc $n^{p_n} \leq 2c$, skąd $p_n \ln n \leq d_0 = \ln 2c$. Definiując liczbę d wzorem

$$d := \max\{p_1 \ln 1, \dots, p_{n_0} \ln n_0, d_0\}$$

otrzymujemy $\sup_{n \in \mathbb{N}} (p_n \ln n) = d < \infty$. Ostatnią część lematu otrzymujemy z twierdzenia 4.27. ■

Wykażemy teraz, że dla powyższego ciągu funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$ warunek (\star) w twierdzeniu 3.18 jest nie tylko wystarczający, ale również konieczny na to, aby każdy ortomorfizm na ℓ^Φ był centralny. Jest to dyskretny wariant twierdzenia 4.21. Podajemy pełny dowód tej wersji, ponieważ jest on bardziej elementarny niż dowód twierdzenia 4.21.

Stwierdzenie 4.30 Niech $\Phi = (\varphi_n)$ będzie ciągiem funkcji Orlicza, gdzie $\varphi_n(t) = t^{p_n}$, dla $t \in [0, \infty)$, oraz (p_n) - ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja ε_1 wyznaczona przez naturalną F -normę $\|\cdot\|_\Phi$ F -krazy ℓ^Φ jest ciągła w zerze (tj. spełniony jest warunek (\star) twierdzenia 3.18),
- (ii) funkcja $\varepsilon_1^{\rho_\Phi}$ wyznaczona przez modular ρ_Φ jest ciągła w zerze,
- (iii) $\text{Orth}(\ell^\Phi) = Z(\ell^\Phi)$,
- (iv) $\inf\{p_n, n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Dowód. Wykażemy ciąg następujących implikacji $(iv) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. Równoważność $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iv)$. W uwadze 4.6 do przykładu 4.5 zostało wykazane, że w naturalnej F -normie F -krazy ℓ^Φ funkcja ε_1 ma postać

$$\varepsilon_1(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} t^{\frac{p_n}{1+p_n}}.$$

W przypadku, gdy rozpatrujemy F -normę równoważną wyznaczoną przez modular ρ_Φ (lemat 1.20 (iv)) funkcja $\varepsilon_1^{\rho_\Phi}$ jest postaci

$$\varepsilon_1^{\rho_\Phi}(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} t^{p_n},$$

bo $\rho_\Phi(te_n) = t^{p_n}$. Jest oczywiste, że warunki $\inf\{p_n, n \in \mathbb{N}\} = 0$ oraz $\inf\{\frac{p_n}{1+p_n}, n \in \mathbb{N}\} = 0$ są równoważne, więc funkcja ε_1 jest ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\varepsilon_1^{\rho_\Phi}$ jest ciągła w zerze. Z postaci obu funkcji wynika, że są one ciągłe w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $\inf\{p_n, n \in \mathbb{N}\} = 0$, skąd otrzymujemy żądaną równoważność warunków (i), (ii), (iv).

Podamy teraz dowód brakujących implikacji.

Implikacja (i) \Rightarrow (iii) jest treścią twierdzenia 3.18.

Implikacja (iii) \Rightarrow (i). Wykażemy implikację równoważną: $\sim (i) \Rightarrow \sim (iii)$. Załóżmy, że funkcja ε_1 jest nieciągła w zerze (czyli warunek $\sim (i)$). Oznacza to, że istnieje podciąg (p_{n_k}) ciągu (p_n) taki, że $p_{n_k} \downarrow 0$ oraz $p_{n_k} < \frac{1}{k}$. Zauważmy, że ciąg funkcji Orlicza $\Psi = (\varphi_{n_k})$ spełnia jednostajny warunek (Δ_k) ze stałą $c = 2$ oraz $c_k = 0$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{n_k}(kt) = (kt)^{p_k} = k^{p_k} \cdot \varphi_{n_k}(t) < k^{\frac{1}{k}} \cdot \varphi_{n_k}(t) \leq 2\varphi_{n_k}(t).$$

Na podstawie twierdzenia 4.27 otrzymujemy $\text{Orth}(\ell^\Psi) \neq Z(\ell^\Psi)$.

Implikacja (i) \Rightarrow (iii). Jeśli funkcja ε_1 jest ciągła w zerze, to na podstawie twierdzenia 3.18 zachodzi równość $\text{Orth}(\ell^\Phi) = Z(\ell^\Phi)$. ■

Uwaga 4.31 W przykładzie 2.32 wykazaliśmy, że jeśli E_0 jest F -kratą

rzeczywistych ciągów $x = (x_n)$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{|x_n|} = 0$ z F -normą $\|x\|_{E_0} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[r]{|x_n|}$, to $Orth(E_0) \neq Z(E_0)$. W tym przypadku mamy $\delta(E_0) = \delta(D) = \infty$, gdzie $D = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem standardowych wektorów jednostkowych kraty E_0 (tu $r(e_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|te_n\|_{E_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[r]{t} = \infty$). Stąd wynika, że na ogół mamy:

$$\delta(E) = \infty \not\Rightarrow (Orth(E) = Z(E)). \quad (4.49)$$

Korzystając z lematu 4.29 oraz stwierdzenia 4.30 otrzymujemy dalsze przykłady F -krat E (w klasie ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza) ilustrujących relację (4.49).

Twierdzenie 3.18 mówi, że zachodzi ogólna implikacja $(\star) \Rightarrow (Orth(E) = Z(E))$. Ponadto, jeśli E jest ciągową przestrzenią Musielaka-Orlicza, to na podstawie twierdzenia 4.26 warunek (\star) implikuje $Orth(E) \neq Z(E)$. Stąd, w klasie ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza zachodzi implikacja

$$(\Delta_n) \Rightarrow \sim (\star). \quad (4.50)$$

W poniższym przykładzie pokazujemy, że implikacja (4.50) (w klasie ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza) jest ścisła, tj. implikacja

$$\sim (\Delta_n) \Rightarrow (\star) \quad (4.51)$$

jest na ogół nieprawdziwa.

Przykład 4.32 Niech $\Phi = (\varphi_n)$, gdzie $\varphi_n(t) = t^{p_n}$, $p_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Na podstawie lematu 4.29 ciąg (φ_n) nie spełnia jednostajnego warunku (Δ_n) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n \ln n = \infty$. Połóżmy $p_n = \sqrt[r]{\frac{1}{1 + \ln n}}$, $n = 1, 2, \dots$. Ciąg (p_n) spełnia powyższy warunek, lecz $\inf_{n \in \mathbb{N}} p_n = 0$, zatem na podstawie warunku (x) z dowodu stwierdzenia 4.30 ciąg (φ_n) nie spełnia również warunku (\star) . Oznacza to, że implikacja (4.51) jest nieprawdziwa, jak twierdziliśmy.

4.2.3 Przykłady ciągów funkcji Orlicza spełniających jednostajny warunek (Δ_n)

W kolejnym lemacie podajemy pewną metodę konstruowania ciągów spełniających jednostajny warunek (Δ_n) .

Lemat 4.33 *Niech $E = \ell^\Phi$, gdzie Φ oznacza ciąg (φ_n) rosnących i ciągłych funkcji Orlicza spełniających jednostajny warunek (Δ_n) , przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\varphi_n(1) = 1$ oraz $c_n = 0$. Ponadto, niech $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ będzie ciągłą, wklęsłą i rosnącą funkcją taką, że $h(0) = 0$ oraz $h(1) = 1$. Połóżmy $\psi_n^{(1)} = h \circ \varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$*

Wtedy ciąg funkcji Orlicza $(\psi_n^{(1)})$ spełnia te same warunki co ciąg Φ , tj. jednostajny warunek (Δ_n) z tą samą stałą c , oraz $\psi_n^{(1)}(1) = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Z warunku $\varphi_n(1) = 1$ otrzymujemy natychmiast $\psi_n^{(1)}(0) = h(\varphi_n(0)) = h(0) = 0$ oraz $\psi_n^{(1)}(1) = h(\varphi_n(1)) = h(1) = 1$.

Ponieważ z założenia funkcja h jest wklęsła, to dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ mamy

$$h(\alpha x + \beta y) \geq \alpha h(x) + \beta h(y). \quad (4.52)$$

Kładąc w warunku (4.52) $y = 0$ oraz korzystając z założenia, że $h(0) = 0$ dostajemy

$$h(\alpha x) \geq \alpha h(x) + \beta h(0) = \alpha h(x). \quad (4.53)$$

Jeśli $c \geq 1$, to dla $\alpha = \frac{1}{c}$ mamy $0 < \alpha \leq 1$, więc z nierówności (4.53) otrzymujemy

$$h(x) = h(\alpha \cdot cx) \geq \alpha h(cx) = \frac{1}{c} h(cx),$$

stąd

$$h(cx) \leq c \cdot h(x). \quad (4.54)$$

Ponieważ, na podstawie założenia, ciąg (φ_n) funkcji Orlicza spełnia jednostajny warunek (Δ_n) , to

$$\psi_n^{(1)}(nt) = h(\varphi_n(nt)) \leq h(c \cdot \varphi_n(t)) \stackrel{(4.54)}{\leq} c \cdot h(\varphi_n(t)) = c \cdot \psi_n^{(1)}(t),$$

więc $\psi_n^{(1)}(nt) \leq c \cdot \psi_n^{(1)}(t)$, co należało pokazać. ■

Przykład 4.34 Niech $h(t) = \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$, gdzie $t \geq 0$. Funkcja h jest oczywiście ciągła, rosnąca, wklęsła i taka, że $h(0) = 0$ oraz $h(1) = 1$. Niech teraz (φ_n) oznacza *szczególny* ciąg funkcji Orlicza z przykładu 4.5: $\varphi_n(t) = \sqrt[n]{t}$, dla $n = 1, 2, \dots$ (tu $c_n = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$). Wówczas z lematu 4.33 wynika, że ciąg funkcji Orlicza $(\psi_n^{(1)})$ postaci

$$\psi_n^{(1)}(t) = \frac{\ln(1 + \sqrt[n]{t})}{\ln 2}, \quad t \geq 0$$

spełnia jednostajny warunek (Δ_n) oraz $\psi_n^{(1)}(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 4.35 Inny przykład ciągu funkcji Orlicza spełniającego jednostajny warunek (Δ_n) otrzymujemy dla funkcji g określonej wzorem

$$g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}, \text{ dla } t \geq 0.$$

Funkcja g jest oczywiście ciągła, rosnąca, wklęsła i taka, że $g(0) = 0$ oraz $g(1) = 1$.

Niech (φ_n) oznacza ciąg funkcji Orlicza określonych jak w lemacie 4.33, np. $\varphi_n(t) = \sqrt[n]{t}$, $t \geq 0$ (tu również $c_n = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$).

Położmy $\chi_n(t) = (g \circ \varphi_n)(t)$. $n = 1, 2, \dots$ Wtedy $\chi = (\xi_n)$ jest ciągiem ograniczonych funkcji Orlicza spełniającym jednostajny warunek (Δ_n) .

Korzystając z lematu 4.33 oraz iterując za pomocą funkcji h opisaną tam procedurę konstrukcji ciągu $(\psi_n^{(1)})$ dostajemy natychmiast

Wniosek 4.36 Niech $\Phi = (\varphi_n)$ będzie ciągiem rosnących i ciągłych funkcji Orlicza spełniającym jednostajny warunek (Δ_n) , przy czym $c_n = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, niech h będzie funkcją ciągłą, niemalejącą i wklęsłą na półprostej $[0, \infty)$, przy czym $h(0) = 0$ oraz $h(1) = 1$. Położmy

$$\psi_n^{(k)} = h \circ \psi_n^{(k-1)}, \text{ dla } k \geq 2 \text{ oraz } n = 1, 2, \dots, \text{ tj.}$$

$$\psi_n^{(k)} = h^k \circ \varphi_n, \text{ gdzie } h^k = h \circ h^{k-1}.$$

Jeśli ciąg (φ_n) spełnia jednostajny warunek (Δ_n) oraz $\varphi_n(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $(\psi_n^{(k)})$ również spełnia oba te warunki.

Przykład 4.37 Z powyższego wniosku wynika, że założenia twierdzenia 4.26 są spełnione dla ciągu $\Psi^{(1)} = (\psi_n^{(1)})$ określonego w przykładzie 4.34:

$$\psi_n^{(1)}(t) = \frac{\ln(1 + \sqrt[n]{t})}{\ln 2}, \text{ } t \geq 0, \text{ } n = 1, 2, \dots$$

Stąd $Orth(\ell^{\Psi^{(1)}}) \neq Z(\ell^{\Psi^{(1)}})$.

Podobnie, dla ciągu $\Psi^{(2)} = (\psi_n^{(2)})$ postaci

$$\psi_n^{(2)}(t) = h \circ \psi_n^{(1)}(t) = \frac{\ln(1 + \psi_n^{(1)}(t))}{\ln 2} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1 + \sqrt[n]{t})}{\ln 2}\right)}{\ln 2}, \text{ } n = 1, 2, \dots$$

również spełnione są założenia twierdzenia 4.26; mamy tutaj $Orth(\ell^{\Psi^{(2)}}) \neq Z(\ell^{\Psi^{(2)}})$.

Na podstawie twierdzenia 4.26 oraz wniosku 4.36, otrzymujemy

Wniosek 4.38 Niech $\Psi^{(k)} = (\psi_n^{(k)})$ oznacza ciąg zdefiniowany jak we wniosku 4.36. Połóżmy $E_k = \ell^{\Psi^{(k)}}$, $k = 1, 2, \dots$. Wtedy

(i) F -krata E_k nie zawiera izomorficznej kopii ω , ale

(ii) $\text{Orth}(E_k) \neq Z(E_k)$.

Uwaga 4.39 Jeśli funkcje f, h określone na przedziale $[0, \infty)$ są ciągłe, niemalejące,

wklęsłe i takie, że $f(1) = h(1) = 1$, $f(0) = h(0) = 0$, to ich złożenia $h \circ h$, $f \circ h$, $h \circ f$ również posiadają te same własności.

Istotnie, złożenie $f \circ h$ jest funkcją ciągłą, niemalejącą oraz

$$(f \circ h)(0) = f(h(0)) = 0, \quad (f \circ h)(1) = f(h(1)) = 1$$

Ponadto,

$$(f \circ h)(\alpha x + \beta y) = f(h(\alpha x + \beta y)) \geq f(\alpha h(x) + \beta h(y)) \geq \alpha f(h(x)) + \beta f(h(y)),$$

dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ oraz $x, y \in [0, \infty)$. Analogiczne rezultaty użyjemy dla pozostałych złożań.

Przykład 4.40 Kolejną konstrukcję ciągu funkcji Orlicza spełniającego jednostajny warunek (Δ_n) otrzymujemy posługując się funkcją $h = g \circ h_0$, przy czym funkcja h_0 jest określona jak w przykładzie 4.34 tj. $h_0(t) = \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$, dla $t > 0$, natomiast funkcja g jak w przykładzie 4.35. Stąd

$$h(t) = \frac{1 - e^{-h_0(t)}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{\ln 2}}}}{1 - e^{-1}}.$$

Funkcja h jest oczywiście ograniczona, ciągła, rosnąca i taka, że $h(0) = 0$ oraz $h(1) = 1$. Na podstawie uwagi 4.39 otrzymujemy, że h jest również funkcją wklęsłą. Niech teraz ciąg funkcji Orlicza (φ_n) spełnia jednostajny warunek (Δ_n) . Z lematu 4.33 wynika, że ciąg funkcji Orlicza (H_n) , gdzie $H_n = h \circ \varphi_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, spełnia również jednostajny warunek (Δ_n) .

Położmy $\varphi_n(t) = \sqrt[n]{t}$, $n = 1, 2, \dots$, $t \geq 0$. W przykładzie 4.5 zauważyliśmy, że taki ciąg (φ_n) spełnia jednostajny warunek (Δ_n) , zatem z powyższych uwag wynika, że ciąg ograniczonych funkcji Orlicza (H_n) postaci

$$H_n(t) = h \circ \varphi_n(t) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + \sqrt[n]{t})^{\frac{1}{\ln 2}}}}{1 - e^{-1}}.$$

również spełnia ten warunek.

W poprzednich przykładach 4.34 oraz 4.37 tworzyliśmy funkcje φ_n spełniające na odcinku $[0, 1]$ nierówność

$$\varphi_n(t) \leq c \cdot t^{p_n}, \quad p_n \in (0, 1), \quad (4.55)$$

gdzie c jest stałą niezależną od n . Wynikało, to z nierówności $\ln(1+t) \leq t$, dla $t \geq 0$.

Podamy teraz przykład takiego ciągu funkcji Orlicza $\Phi = (\varphi_n)$, że funkcje φ_n nie spełniają nierówności (4.55) z jedną stałą, lecz $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.

Przykład 4.41 Połóżmy

$$\varphi_n(t) = \frac{\ln(1+nt)}{\ln(1+n)}, \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wszystkie funkcje φ_n są *wklęsłe* oraz $\varphi_n(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd, na podstawie lematu 1.20 dla ciągu $\Phi = (\varphi_n)$ otrzymujemy $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$. Dalej, ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n'(t) = \frac{n}{\ln(1+n)} \uparrow \infty$, przy $n \rightarrow \infty$, to nie istnieją: stała $c > 0$ oraz $t_0 > 0$ takie, że $\frac{\varphi_n(t)}{t} \leq c$ dla $t \in [0, t_0]$ oraz wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rozważmy teraz podciąg (n_k) , gdzie $n_k = 2^{k^3}$, $k = 1, 2, \dots$. Połóżmy $\Psi := (\varphi_{n_k})$. Na podstawie lematu 1.20 (iii) otrzymujemy, że

krata $\ell^\Psi = k^\Psi$ jest porządkowo izomorficzna z pasmem projekcyjnym w ℓ^Φ .

Wykażemy, że $Orth(\ell^\Psi) \neq Z(\ell^\Psi)$. Pokażemy, że dla ciągów $x = (x_k) \in \omega$ oraz $u = (u_k)_{k=1}^\infty$, gdzie $u_k = k$, $k = 1, 2, \dots$ zachodzi nierówność

$$m_\Psi(u \bullet x) = m_\Psi((kx_k)) \leq m_\Psi(x) + c,$$

przy czym c jest pewną stałą niezależną od x . Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi_{n_k}(kt) &= \frac{\ln(1+k2^{k^3}t)}{\ln(1+2^{k^3})} = \frac{\ln k + \ln(\frac{1}{k} + 2^{k^3}t)}{\ln(1+2^{k^3})} \leq \\ &\leq \frac{\ln k}{\ln(1+2^{k^3})} + \frac{\ln(1+2^{k^3}t)}{\ln(1+2^{k^3})} = \frac{\ln k}{\ln(1+2^{k^3})} + \varphi_{n_k}(t) < \frac{\ln k}{k^3 \ln 2} + \varphi_{n_k}(t), \end{aligned}$$

zatem

$$\varphi_{n_k}(kt) < \frac{\ln k}{k^3 \ln 2} + \varphi_{n_k}(t). \quad (4.56)$$

Stąd

$$\begin{aligned} m_\Psi(u \bullet x) &= \sum_{k=1}^\infty \varphi_{n_k}(k|x_k|) \stackrel{(4.56)}{\leq} \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln k}{k^3 \ln 2} + \sum_{k=1}^\infty \varphi_{n_k}(|x_k|) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln k}{k^3} + m_\Psi(x). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ponieważ szereg $\sum_{k=1}^\infty \frac{\ln k}{k^3}$ jest zbieżny, to możemy przyjąć $c = \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln k}{k^3}$; z warunku (4.57) otrzymujemy teraz żadaną nierówność $m_\Psi(u \bullet x) \leq m_\Psi(x) + c$, skąd wynika, że jeśli $x \in \ell^\Psi (= k^\Psi)$, czyli $m_\Psi(x) < \infty$, to $m_\Psi(u \bullet x) < \infty$, a zatem $u \bullet x \in \ell^\Psi$. Stąd otrzymujemy, że operator $T_0 : \ell^\Psi \rightarrow \ell^\Psi$ zdefiniowany wzorem $T_0(x) = u \bullet x$ jest ortomorfizmem niecentralnym na h^Ψ . Ponieważ ℓ^Ψ jest porządkowo izomorficzna z pasmem projekcyjnym ℓ^Φ , to z twierdzenia 4.27 wynika, że $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$.

Poniższe twierdzenie jest szczególną postacią twierdzenia 3.3 o warunkach równoważnych na to aby istniał ortomorfizm niecentralny na przestrzeni Musielaka-Orlicza ℓ^Φ . Zastosujemy je w ostatnim przykładzie tego rozdziału, pokazującym, że warunek (\star) twierdzenia 3.18 nie jest na ogół konieczny na to aby zachodziła równość $Orth(E) = Z(E)$.

Twierdzenie 4.42 *Niech $E = \ell^\Phi$, gdzie $\Phi = (\varphi_n)$ oznacza ciąg rosnących i ciągłych funkcji Orlicza spełniających jednostajny warunek Δ_2 , oraz niech e_n oznacza n -ty wektor jednostkowy w ℓ^Φ . Wówczas równoważne warunki (i), (ii), (iii), (iv) twierdzenia 3.3 (dające $Orth(\ell^\Phi) \neq Z(\ell^\Phi)$) są równoważne z warunkiem:*

(v) *istnieje rosnący ciąg $(n_j) \subset \mathbb{N}$ taki, że zbieżność szeregów $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(\lambda|x_j|)$, dla każdego $\lambda > 0$, implikuje zbieżność szeregów $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(\lambda j|x_j|)$, $\lambda > 0$.*

Ponadto, jeśli wszystkie funkcje φ_n są subaddytywne (wtedy $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$), np. wklęsłe, to warunek (v) można zastąpić warunkiem równoważnym:

(v') *istnieje rosnący ciąg $(n_j) \subset \mathbb{N}$ taki, że zbieżność szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(|x_j|)$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(j|x_j|)$.*

Dowód. Ponieważ ciąg $\Phi = (\varphi_n)$ spełnia jednostajny warunek Δ_2 , to $\ell^\Phi = h^\Phi$, tj. norma na ℓ^Φ jest porządkowo ciągła; równoważność warunków (i), (ii), (iii), (iv) dla przestrzeni ℓ^Φ wynika zatem bezpośrednio z twierdzenia 3.3.

Rozważmy teraz warunek (iv) twierdzenia 3.3:

istnieje ściśle rosnący ciąg $(n_j) \subset \mathbb{N}$ taki, że zbieżność (topologiczna) szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{n_j}$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} j x_j e_{n_j}$.

Z równości $\ell^\Phi = h^\Phi$ wynika, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{n_j}$ jest zbieżny w $E = \ell^\Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda > 0$ mamy $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(\lambda|x_j|) < \infty$. Podobnie, szereg $\sum_{j=1}^{\infty} j x_j e_{n_j}$ jest zbieżny w E wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda > 0$ mamy $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(\lambda j|x_j|) < \infty$. Stąd natychmiast wynika, że warunki (iv) oraz (v) są równoważne.

Jeśli wszystkie funkcje φ_n są subaddytywne, to $h^\Phi = k^\Phi$ (patrz uwaga 1.21), a zatem zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\lambda|x_n|)$, dla każdego $\lambda > 0$, jest równoważna zbieżności jednego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|x_n|)$, więc warunki (v) oraz (v') są równoważne. ■

Poniższy przykład ilustruje drugą część twierdzenia 3.18 (tj., że warunek (\star) nie jest koniecznym na zachodzenie równości $Orth(E) = Z(E)$).

Przykład 4.43 Połóżmy

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}t & \text{gdy } t \in [0, \frac{1}{n+1}], \\ \frac{n+1}{2n}t + \frac{n-1}{2n} & \text{gdy } t \in (\frac{1}{n+1}, \infty). \end{cases}$$

Oczywiście $\varphi_n(1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Na podstawie lematu 3.23 wiemy, że ciąg $\Phi = (\varphi_n)$ jest jednakowo ciągły w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f_∞ jest ciągła w

zerze. W naszym przypadku mamy

$$f_\infty(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(t) \begin{cases} 0 & \text{gdy } t = 0, \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{gdy } t \in (0, 1), \\ t & \text{gdy } t \in [1, \infty). \end{cases}$$

zatem funkcja f_∞ nie jest ciągła w zerze, więc

ciąg (φ_n) nie jest jednakowo ciągły w zerze.

Ustalmy $x = (x_n) \in \omega$. Ponieważ warunek

$$\rho_\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|x_n|) < \infty,$$

implikuje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(|x_n|) = 0$, to istnieje liczba $n_x \in \mathbb{N}$ taka, że $\varphi_n(|x_n|) < \frac{1}{2}$ dla $n \geq n_x$. Z definicji funkcji φ_n wynika, że dla każdego $n > n_x$ mamy $\frac{n+1}{2}|x_n| < \frac{1}{2}$, dla $|x_n| < \frac{2}{n+1}$.

Ponadto, na podstawie lematu 1.20 wklęsłość funkcji φ_n implikuje, że $\ell^\Phi = h^\Phi = k^\Phi$.

Gdyby krata h^Φ miała ortomorfizm niecentralny T , to z warunku (v') twierdzenia 4.42 wynikałoby, że istnieje ściśle rosnący ciąg (n_j) taki, że dla $x = (x_j) \in \omega$ warunek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(|x_j|) < \infty \text{ implikowałoby } \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(j|x_j|) < \infty. \quad (4.58)$$

Rozważmy ciąg $x = (x_j)$, gdzie $x_1 = 0$ oraz $x_j = \frac{2}{j^2(n_j+1)}$. Mamy $0 < x_j \leq \frac{2}{(n_j+1)}$, dla $j \geq 2$.

Stąd $\varphi_{n_j}(x_1) = 0$ oraz $\varphi_{n_j}(|x_j|) = \frac{n_j+1}{2}|x_j| = \frac{1}{j^2}$, dla $j \geq 2$. Z powyższej równości wynika, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(|x_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,$$

lecz

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_j}(j|x_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Otrzymana sprzeczność implikuje, że nie istnieje ortomorfizm niecentralny na ℓ^Φ , zatem $\text{Orth}(\ell^\Phi) = Z(\ell^\Phi)$.

Rozdział 5

Ortomorfizmy w F -kratach z quasi-jedynką

5.1 Wprowadzenie – problem nietrywialnych ortomorfizmów

Wiadomo [3, Theorem 2.12], że jeśli krata liniowa E jest σ -zupełna w sensie Dedekinda, to posiada 'dużo' nietrywialnych projekcji porządkowych, więc krata $Orth(E)$ jest również nietrywialna.

Jeżeli zawężymy nasze rozważania tylko do krat Banacha (bez zakładania dodatkowych własności o częściowym porządku), to sytuacja nie jest już tak jasna: jeśli krata Banacha posiada quasi-jedynkę (w szczególności, gdy jest ośrodkowa), to zbiór ortomorfizmów jest dość bogaty ([50]; por. twierdzenie 5.10 niżej); istnieją jednak przykłady nieośrodkowych krat Banacha E , nie posiadających quasi-jedynki, takich, że $Orth(E) = \text{lin}\{I_E\}$ (patrz [15], [51])

W tym rozdziale zajmuję się problemem istnienia nietrywialnych ortomorfizmów na danej F -kracie E , w szczególności - problemem aproksymacji dowolnego elementu $y \in [0, x]$ za pomocą elementów postaci Sx , gdzie S jest ortomorfizmem centralnym na E , przy czym *nie narzucam żadnych warunków na własności porządkowe kraty E .*

Problemem takiej aproksymacji, przy założeniu, że krata liniowa E posiada wystarczająco dużo projekcji porządkowych, zajmowali się Z. Lipecki [30], B. Lavrič [26], A. I. Veksler [57] oraz M. Wójtowicz [56]. W 1994 roku Z. Lipecki wykazał, że jeśli krata liniowa E ma rozdzielające projekcje porządkowe (= krata E ma własność (δ) w sensie Lavriča¹), to dla każdego $x \in E^+$ oraz $y \in [0, x]$ istnieje ciąg projekcji porządkowych (P_n) w E takich, że

$$0 \leq y - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} P_i x \leq \frac{1}{2^n} x;$$

stąd, kładąc $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} P_i$, $n = 1, 2, \dots$, otrzymujemy niemalejący ciąg nieujemnych

¹tj. jeśli $y_1 \wedge y_2 = 0$, to istnieje projekcja porządkowa P na E taka, że $Py_1 = y_1$ oraz $Py_2 = 0$; w szczególności, jeśli krata E ma własność projekcji głównej (PPP), to ma własność (δ) .

ortomorfizmów (T_n) spełniających warunek $0 \leq y - T_n x \leq \frac{1}{2^n} x$. W szczególności, jeśli E jest F -kratą posiadającą rozdzielające projekcje, to jest topologicznie pełna (definicja 5.8): dla każdego $y \in [0, x]$ istnieje ciąg ortomorfizmów centralnych T_n takich, że $\|y - T_n x\|_E \rightarrow 0$, przy $n \rightarrow \infty$. Z nierówności Lipeckiego wynika również, że jeśli E jest dodatkowo kratą Banacha, to $y = Tx$, gdzie $T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} P_i$ (zbieżność absolutna w $L(E)$). To uogólnia klasyczne twierdzenie Kukateladze

[4, Theorem 8.16] z przypadku, gdy E jest kratą σ -zupełną w sensie Dedekinda. Wynik podobnego typu uzyskał B. de Pagter w pracy doktorskiej [40, Theorem 19.4 oraz Lemma 19.3], gdzie w roli projekcji rozdzielających P_i występują ortomorfizmy $T_i \in Z(E)$ takie, że $0 \leq T_i \leq I$ na E .

Ponadto, A. W. Wickstead [50] dowodzi, że jeśli E jest kratą Banacha oraz krata $Z(E)$ jest topologicznie pełna, to $Z(E)$ posiada tzw. własność rozdzielania (definicja 5.16), która jest nieco słabszą własnością niż własność (δ) . Stąd otrzymujemy następujące implikacje

$$(\delta) \stackrel{(F\text{-kraty})}{\Rightarrow} \text{topologiczna pełność} \stackrel{(kraty\ Banacha)}{\Rightarrow} \text{własność rozdzielania.}$$

W twierdzeniach 5.10, 5.17 oraz 5.15 przeniesione są cytowane wyniki A. W. Wicksteada na przypadek F -krat z quasi-jedynką. W twierdzeniu 5.17 dowodzimy, że F -krata E z quasi-jedynką posiada znacznie mocniejszą własność niż własność rozdzielania:

Dla dowolnych ortogonalnych elementów $x, y \in E^+ \setminus \{0\}$ istnieje ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z(E)^+$ taki, że $S_n y \rightarrow y$ oraz $S_n x = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Ponadto, w twierdzeniu 5.15 uzupełniamy i wzmacniamy tezę twierdzenia 5.10:

Dla każdego $x \in E^+ \setminus \{0\}$ oraz każdego elementu $y \in [0, x]$ istnieje niemalejący ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z(E)^+$ taki, że $S_n x \uparrow y$ oraz $\|S_n x - y\|_E \rightarrow 0$, przy czym ciąg zawężenia $S_n|_{\overline{A_x}}$ jest zbieżny punktowo do pewnego ortomorfizmu $R \in Z(\overline{A_x})$, gdzie $Rx = y$.

Wyniki uzyskane w twierdzeniach 5.17 oraz 5.15 są nowe nawet w zakresie krat Banacha.

5.2 Podstawowe własności F -krat z quasi-jedynką

W tym podrozdziale omawiamy pojęcie quasi-jedynki w F -kratach. Wyniki tu przedstawione są dobrze znane w zakresie krat unormowanych [4, str 259], [3, str. 164], lecz ich dowody różnią się nieco od klasycznych dowodów, co jest spowodowane brakiem jednorodności w definicji F -normy (por. aksjomaty (iii) oraz (iv) w definicji 1.1).

Definicja 5.1 Niech E będzie kratą liniową wyposażoną w F -normę $\|\cdot\|_E$. Dodatni element $x \in E$ nazywamy **quasi-jedynką**², jeśli ideał A_x generowany przez element x jest topologicznie gęsty w E .

²Element taki nazywany jest również punktem quasi-wewnętrzny lub jedynką topologiczną [50, str.51]

Poniższy lemat jest elementarnym uogólnieniem znanego wyniku dla przypadku, gdy E jest ośrodkową kratą Banacha [4, str. 259].

Lemat 5.2 *Niech $E = (E, \|\cdot\|_E)$ będzie F -kratą ośrodkową. Wtedy E posiada quasi-jedynkę.*

Dokładniej, jeśli ciąg (x_n) jest topologicznie gęsty w E , to istnieje ciąg liczb rzeczywistych dodatnich (α_n) taki, że element $e := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|$ jest quasi-jedynką F -kraty E .

Dowód. Niech ciąg (x_n) będzie gęsty w E .

Z własności F -normy³ wynika, że istnieje ciąg liczb dodatnich (α_n) taki, że Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n x_n\|_E < 1$, to z zupełności (topologicznej) F -kraty E otrzymujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|$ jest absolutnie zbieżny do pewnego elementu $e \in E$. Stąd, dla każdego $n = 1, 2, \dots$ mamy

$$|x_n| = \frac{\alpha_n}{\alpha_n} |x_n| = \frac{1}{\alpha_n} (\alpha_n |x_n|) \leq \frac{1}{\alpha_n} e \in A_e.$$

Ponieważ A_e jest ideałem w E , to $x_n \in A_e$, $n = 1, 2, \dots$.

Dostaliśmy zatem $\{x_n\} \subset A_e \subset E$, więc $E = \overline{\{x_n\}} \subset \overline{A_e} \subset E$. Ostatecznie $\overline{A_e} = E$, co należało pokazać. ■

Poniższy lemat, na którym oparte są główne wyniki tego rozdziału jest prostym przeniesieniem klasycznego wyniku dla krat Banacha [4, Theorem 12.20] na przypadek F -krat.

Przypomnijmy⁴, że w punkcie (a) poniższego lematu konieczne jest użycie symbolu $\|\cdot\|_{\infty}^e$ dla konkretnej quasi-jedynki e .

Lemat 5.3 *Niech E będzie F -kratą liniową z quasi-jedynką e . Wtedy*

(a) *ideał główny A_e wyposażony w normę $\|x\|_{\infty}^e = \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda e\}$ jest kratą Banacha, izometryczną porządkowo (za pomocą pewnej izometrii porządkowej h przekształcającej e na 1_{K_e}) z kratą $C(K_e)$, gdzie K_e jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, zależną od A_e ;*

(b) *AM -przestrzenie $Z(A_e)$ oraz $Z(C(K_e))$ są izometryczne porządkowo⁵:*

dla każdego $T \in Z(A_e)$ istnieje dokładnie jeden element $u_T \in C(K_e)$ postaci $u_T = h(Te)$ taki, że dla każdego $x \in A_e$ mamy

$$Tx = h^{-1}(u_T \bullet h(x)),$$

gdzie $h : A_e \rightarrow C(K_e)$ jest izomorfizmem kratowym takim, że

$h(e) = 1_{K_e}$, a symbol \bullet oznacza mnożenie w $C(K_e)$ ⁶;

³ $\lim_{t \rightarrow 0} \|tx\|_E = 0$, aksjomat (iii) w definicji 1.1

⁴patrz komentarz przed lematem 2.16, podrozdział 1.5

⁵gdy obie kraty $Z(A_e)$ oraz $Z(C(K_e))$ są wyposażone w ich naturalne M -normy $\|\cdot\|_{\infty}$, patrz podrozdział 2.1

⁶patrz podrozdział 2.1

żądaną izometrią porządkową jest odwzorowanie $\widehat{h} : Z(A_e) \rightarrow Z(C(K_e))$ postaci

$$\widehat{h}(T) = h \circ T \circ h^{-1}, \quad T \in Z(A_e),$$

gdzie h jest izometrią porządkową jak w punkcie (a) - z A_e na $C(K_e)$ - natomiast odwzorowanie odwrotne do \widehat{h} jest określone wzorem

$$\widehat{h}^{-1}(S) = h^{-1}Sh,$$

gdzie ortomorfizm $S \in Z(C(K_e))$ jest postaci $S(y) = u \bullet y$, dla pewnego $u \in C(K_e)$ i wszystkich $y \in C(K_e)$.

Uwaga 5.4 Wynik dla F -krat przedstawiony w lemacie 5.3 nie występuje w postaci

jawnej w dostępnej literaturze. Szkic dowodu podobnego twierdzenia jest zawarty w pracy [35, Théorème 1.6] M. Meyera z 1978 roku: w podpunkcie (c) podany jest warunek wystarczający na to, aby spełniony był warunek (b) naszego lematu 5.3; autor nie dowodzi jednak, że jeśli E jest F -kratą, to zachodzi teza punktu (a) naszego twierdzenia, który jest podstawą części (b) lematu 5.3.

Dowód lematu 5.3. (a) Wiadomo (lemat 2.16), że ideał główny A_e z normą $\|\cdot\|_\infty^e$ jest M -przestrzenią z mocną jedyнкą e . Ponieważ każda F -krata jest jednostajnie zupełna⁷, to dla każdego $e \in E^+$ krata unormowana $(A_e, \|\cdot\|_\infty)$ jest zupełna.

Na podstawie twierdzenia Kakutaniego 1.8, istnieje przestrzeń zwarta K_e (zależna od A_e) oraz izometria porządkowa h z kraty Banacha $(A_e, \|\cdot\|_\infty)$ na $C(K_e)$ taka, że $h(e) = 1_{K_e}$.

(b) Niech T będzie ortomorfizmem na A_e . Połóżmy $u_T = h(Te)$ i rozważmy ortomorfizm T_1 na A_e postaci

$$T_1x = h^{-1}(u_T \bullet h(x)), \quad \text{gdzie } x \in A_e.$$

Ponieważ $h(e) = 1_{K_e}$ gdzie K_e jest zwartą przestrzenią Hausdorffa określoną w punkcie (a), to

$$T_1e = h^{-1}(u_T \bullet 1_{K_e}) = h^{-1}(h(Te)) = Te.$$

Ponieważ e jest jedyнкą na A_e , to korzystając z wniosku 2.6 otrzymujemy $T = T_1$.

Pozostała część punktu (b), dotycząca izometrii porządkowej \widehat{h} , wynika wprost z lematu 2.14. ■

⁷Krata E jest *jednostajnie zupełna* (uniformly complete), jeśli dla każdego $x \in E^+$ każdy e -jednostajny ciąg Cauchy'ego posiada e -jednostajną granicę w E (patrz [33, Definition 42.1, str. 276]. Ciąg $(x_n) \subset E$ nazywamy e -jednostajnym ciągiem Cauchy'ego, jeśli istnieje element $e \in E^+$ taki, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ taka, że dla $m, n > N_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|x_n - x_m| \leq \varepsilon \cdot e$. Ciąg $(x_n) \subset E$ nazywamy e -jednostajnie zbieżnym, jeśli istnieje $x \in E$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba M_ε taka, że $|x - x_n| \leq \varepsilon \cdot e$.

5.3 Twierdzenia główne

Poniższy lemat jest przeniesieniem podobnego wyniku dla krat Banacha [1, Theorem 3.34]. Podobnie jak w lemacie 5.3, kraty $Z(E)$ oraz $Z(A_e)$ rozpatrujemy z ich naturalnymi $\|\cdot\|_\infty$ -normami.

Lemat 5.5 *Niech $E = (E, \|\cdot\|_E)$ będzie F -kratą z quasi-jedynką e . Wtedy zbiór ortomorfizmów centralnych określonych na E jest nietrywialny.*

Dokładniej, krata $Z(E)$ jest izometryczna porządkowo z $Z(A_e)$, więc również z przestrzenią $C(K_e)$, gdzie K_e jest przestrzenią reprezentacyjną dla AM -przestrzeni $(A_e, \|\cdot\|_\infty^e)$ określoną jak w lemacie 5.3.

Izometrią porządkową z $Z(A_e)$ na $Z(E)$ jest operator postaci

$$\Psi(T_0) = \bar{T}_0,$$

gdzie \bar{T}_0 jest jednoznacznym rozszerzeniem ortomorfizmu T_0 z A_e na E , a $\Psi^{-1} : Z(E) \rightarrow Z(A_e)$ jest operatorem obcięcia:

$$\Psi^{-1}(T) = T|_{A_e}, \quad T \in Z(E).$$

Dowód. Niech $T_0 \in Z(A_e)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że ortomorfizm T_0 jest dodatni (patrz uwaga 2.4).

Na podstawie lematu 5.3 (a) istnieje przestrzeń zwarta Hausdorffa K_e taka, że ideał A_e (wyposażony w normę $\|\cdot\|_\infty^e$) jest porządkowo izometryczny - za pomocą pewnej izometrii h - z kratą $C(K_e)$.

Ponadto, z lematu 5.3 (b) wynika, że istnieje element $u_T \in C(K_e)$ taki, że ortomorfizm T_0 jest postaci:

$$T_0 y = h^{-1}(u_T \bullet h(y)), \quad y \in A_e,$$

oraz spełniona jest nierówność

$$|T_0 y| \leq \lambda |y|, \quad y \in A_e, \tag{5.1}$$

gdzie $\lambda = \|T_0\|_\infty$.

Dalsza część dowodu pokrywa się z dowodem [1, Theorem 3.34] dla przypadku, gdy E jest kratą Banacha i dlatego ją pomijamy. Jednoznaczność rozszerzenia \bar{T}_0 ortomorfizmu T_0 wynika z topologicznej gęstości A_x w E . ■

Uwaga 5.6 Wynik przedstawiony w powyższym lemacie zachodzi dla szerszej klasy krat

liniowych niż F -kraty. Wystarczy założyć, że E jest kratą topologicznie zupełną, lokalnie solidną i jednostajnie zupełną (tj. ideał A_e wyposażony w normę $\|\cdot\|_\infty^e$ zdefiniowany jak w punkcie (a) lematu 5.3 jest AM -przestrzenią). Wtedy każdy ortomorfizm centralny względem takiej topologii na E rozszerza się jednoznacznie do operatora ciągłego na $A_e = E$, a wobec domkniętości stożka E^+ rozszerzenie to jest ortomorfizmem centralnym.

Łącząc lematy 5.3 (a) oraz 5.5 otrzymujemy w poniższym lemacie prostą postać izomorfizmu porządkowego \widehat{e} z kraty $Z(E)$ na A_e , co wskazuje, że krata $Z(E)$, więc również $Orth(E)$, jest 'bogata', gdy E posiada quasi-jedynkę. Wynik ten jest jednak czysto teoretyczny, bo w jego dowodzie stosujemy w sposób niejawni twierdzenie Kakutaniego (na nim oparty jest lemat 5.3): tu nie wiemy w jaki sposób z elementu $u \in A_e$ utworzyć ortomorfizm $T \in Z(E)$ taki, że $\widehat{e}(T) = u$. W praktyce często stosujemy wniosek 2.26 (rozdział 2) mówiący o konkretnej postaci ortomorfizmów centralnych na ideałach f -algebry z jednością.

Warto w tym miejscu dodać, że wynik podobnego typu próbowali uzyskać autorzy pracy [7, Theorem 3.3], gdzie krata $Orth(E)$ jest zastąpiona przez tzw. δ -ideał kraty $\mathcal{L}_r(L, M)$, przy czym L, M są kratami liniowymi, a M jest zupełna w sensie Dedekinda. Z cytowanego twierdzenia wynikałoby, że jeśli $E = L = M = \ell_p$, gdzie $1 < p < \infty$, to dla elementu $e = (\frac{1}{n}) \in \ell_p$ odwzorowanie $\widehat{e} : Orth(E) (\cong \ell_\infty) \rightarrow E$ postaci $\widehat{e}(T) = T(e) = te$, gdzie $t \in \ell_\infty$, byłoby surjekcją (na E), co oczywiście jest nieprawdą⁸.

Lemat 5.7 *Niech E będzie F -kratą z quasi-jedynką e . Rozważmy odwzorowanie liniowe $\widehat{e} : Orth(E) \rightarrow E$ postaci*

$$\widehat{e}(T) = T(e).$$

Wówczas \widehat{e} jest izomorfizmem kratowym oraz jego obraz - $\widehat{e}(Orth(E))$ - jest podkratą topologicznie i porządkowo gęstą w E .

Ponadto, $\widehat{e}(Z(E)) = A_e$, przy czym

$$\widehat{e}(Z_1^+(E)) = [0, e], \text{ gdzie } Z_1^+(E) = \{T \in Z(E) : 0 \leq T \leq I_E\}. \quad (5.2)$$

Dowód. Oczywiście \widehat{e} jest operatorem liniowym. Ponadto, z tożsamości (2.4) w twierdzeniu 2.3 wynika, że \widehat{e} jest izomorfizmem kratowym, bo

$$|\widehat{e}(T)| = |T(e)| = |T|(e) = \widehat{e}(|T|).$$

Z wniosku 2.6 wynika, że \widehat{e} jest iniekcją: $\widehat{e}(T) = Te = 0 = 0(e)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T = 0$. Stąd otrzymujemy, że $\widehat{e}(Orth(E))$ jest podkratą E .

Wykażemy teraz, że $\widehat{e}(Z(E)) = A_e$, co będzie implikować również, że $\widehat{e}(Orth(E))$ jest porządkowo i topologicznie gęstą podkratą E (bo $\overline{A_e} = E$).

Niech $0 \leq \widehat{e}(T) = Te \leq e$. Zatem $\widehat{e}(T) \in [0, e]$, a stąd

$$\widehat{e}(Z_1^+(E)) \subset [0, e]. \quad (5.3)$$

Niech $u \in [0, e]$. Na podstawie lematu 5.3 (a) istnieje izomorfizm porządkowy h działający z A_e na $C(K_e)$ (dla pewnej przestrzeni zwartej Hausdorffa K_e) taki, że $h(e) = \mathbf{1}_{K_e}$. Rozważmy ortomorfizm $T^u \in Z(A_e)$ postaci

$$T^u y = h^{-1}(h(u) \bullet h(y)), \quad y \in A_e. \quad (5.4)$$

⁸Przykładowo dla ustalonego $1 < p < \infty$ oraz dla ciągu $x = (x_n)$, gdzie $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = \frac{p+1}{2p}$, otrzymujemy $x \in \ell_p$, ale x nie jest postaci $(\frac{1}{n}t_n)$, gdzie t_n jest ciągiem ograniczonym, bo $nx_n = n^{\frac{p-1}{2p}} \uparrow \infty$.

Na podstawie lematu 5.5 istnieje ortomorfizm $T \in Z(E)$ postaci $T = \Psi(T^u) = \overline{T^u}$ (= rozszerzenie T^u z A_e na E). Ponieważ T jest rozszerzeniem T^u , to $T(e) = T^u(e)$. Zatem z warunku (5.4) dostajemy

$$T(e) = T^u(e) = h^{-1}(h(u) \cdot h(e)) = h^{-1}(h(u) \cdot \mathbf{1}_{K_e}) = h^{-1}(h(u)) = u;$$

to implikuje inkluzję

$$[0, e] \subset \widehat{e}(Z_1^+(E)). \quad (5.5)$$

Łącząc inkluzje (5.3) oraz (5.5) otrzymujemy, że \widehat{e} odwzorowuje bijektywnie $Z_1^+(E)$ na odcinek $[0, e]$, co dowodzi równości (5.2).

Ponieważ $Z^+(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot Z_1^+(E)$, to z wykazanej równości (5.2) wynika, że

$$\widehat{e}(Z^+(E)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot [0, e] = A_e^+.$$

Stąd otrzymujemy

$$\widehat{e}(Z(E)) = \widehat{e}(Z^+(E) - Z^+(E)) = A_e^+ - A_e^+ = A_e.$$

Dowód drugiej części lematu jest zakończony. ■

5.3.1 Topologiczna pełność

Kolejne dwa twierdzenia mówią o możliwości aproksymowania elementu $y \in [0, x]$ wartościami ciągu ortomorfizmów z $Z(E)$.

Definicja 5.8 Niech E będzie F -kratą. Mówimy, że krata $Z(E)$ ortomorfizmów centralnych na E jest **topologicznie pełna**, jeśli dla dowolnego $x \in E^+$ oraz dla każdego elementu $y \in [0, x]$ istnieje ciąg ortomorfizmów centralnych (S_n) , taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x - y\|_E = 0. \quad (5.6)$$

Uwaga 5.9 Z równości $|S_n x| = |S_n|(x)$ wynika, że w warunku (5.6) możemy założyć,

że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $S_n \geq 0$. Ponadto, ponieważ mamy⁹

$$(S_n \wedge I_E)(x) = S_n(x) \wedge x \xrightarrow{\|\cdot\|_E} y \wedge x = y,$$

to możemy dodatkowo założyć, że $S_n \leq I_E$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ostatecznie, w warunku (5.6) możemy założyć bez straty ogólności, że $0 \leq S_n \leq I_E$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd i z definicji 5.8 wynika, że E jest topologicznie pełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E^+$ odcinek $[0, x]$ jest postaci $\widehat{Z_1^+(E)}(x)$, gdzie $Z_1^+(E)$ jest określone w lemacie 5.7, formuła (5.2) oraz $Z_1^+(E)(x) = \{Tx : T \in Z_1^+(E)\}$ (tj. zbiór $Z_1^+(E)(x)$ jest topologicznie gęsty w odcinku $[0, x]$).

⁹Zbieżność wynika z nierówności Birkoffa $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b|$, dla $a, b, c \in E$.

Poniższe twierdzenie mówi, że każda F -krata z quasi-jedynką jest topologicznie pełna. Jest ono przeniesieniem wyniku znanego dla krat Banacha [50] na przypadek F -krat.

Twierdzenie 5.10 *Niech E będzie F -kratą z quasi-jedynką e . Wtedy krata $Z(E)$ ortomorfizmów centralnych na E jest topologicznie pełna.*

Dokładniej, dla każdego $x \in E^+$ oraz każdego elementu $y \in [0, x]$ istnieje ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z(E)$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$(1) \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq I_E,$$

$$(2) \quad 0 \leq y - S_n x \leq \frac{1}{n}(e \vee x).$$

Stąd, w szczególności,

$$(3) \quad S_n x \uparrow y \text{ (zbieżność porządkowa),}$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x - y\|_E = 0 \text{ (zbieżność topologiczna).}$$

Uwaga 5.11 Zauważmy, że dla $x = e$ lemacie 5.7 daje znacznie mocniejszy wynik

niż warunki (1), (2) twierdzenia 5.10: zbiór $Z_1^+(E)(e)$ jest po prostu topologicznie domknięty i równy $[0, e]$, zatem w tym przypadku twierdzenie 5.10 nie wnosi nic nowego.

Uwaga 5.12 Twierdzenie 5.10 mówi nie tylko, że dowolna F -krata z quasi-jedynką jest

topologicznie pełna, ale wskazuje, że ortomorfizmy występujące w warunku (5.6) definicji 5.8 topologicznej pełności kraty $Z(E)$ spełniają dodatkowo warunki (1), (2) twierdzenia 5.10. Warunki te będziemy wykorzystywać w kolejnym twierdzeniu.

Uwaga 5.13 W przypadku, gdy krata E jest *lokalnie wypukła i lokalnie solidna*,

strukturę kraty $Z(E)$ (jej bogactwo (richness)), badał M. Meyer. Wyniki te przedstawione są w pracy [35] z 1978 roku. O tych badaniach wspomina również A. W. Wickstead w pracy przeglądowej [50] z 2009 roku; wyniki tam zawarte dotyczą jednak tylko krat Banacha. Problem pełności kraty $Z(E)$ był badany przez M. Meyera i E. Chila. Wyniki zostały opublikowane w 2012 roku [8].

Uwaga 5.14 Dowód twierdzenia 5.10 jest adaptacją pomysłu A. Wicksteada [50, str. 51]

- do wzoru (5.17) - i opiera się na lemacie 5.3.

Dowód twierdzenia 5.10. Niech $x, y \in E$ oraz $0 \leq y \leq x$. Połóżmy $e_x = e \vee x$. Oczywiście element e_x jest również quasi-jedynką kraty E . Istotnie, $E = \bar{A}_e \subset \bar{A}_{e_x} \subset E$; zatem $\bar{A}_{e_x} = E$.

Dalsze rachunki będziemy przeprowadzać na ideale głównym A_{e_x} .

Ponieważ $0 \leq y \leq x \leq e_x$, to $x, y \in A_{e_x}$.

Na podstawie lematu 5.3 (a), ideał A_{e_x} jest porządkowo izomorficzny z przestrzenią $C(K_{e_x})$, gdzie K_{e_x} jest pewną zwartą przestrzenią Hausdorffa, za pomocą pewnej izometrii h określonej jak w lemacie 5.3.

Stąd otrzymujemy, że

$$h(x), h(y) \in C(K_{e_x}). \quad (5.7)$$

Ponieważ h jest takim izomorfizmem kraty A_{e_x} na $C(K_{e_x})$, że $h(e_x) = 1_{K_{e_x}}$, to

$$0 \leq h(y) \leq h(x) \leq 1_{K_{e_x}}. \quad (5.8)$$

Zdefiniujmy elementy $t_n \in C(K_{e_x})$ wzorem

$$t_n = \frac{h(y)}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Zauważmy, że funkcje występujące w liczniku oraz w mianowniku wzoru (5.9) są ciągłe na przestrzeni K_{e_x} , a ponadto mianownik wyrażenia (5.9) jest funkcją ściśle dodatnią¹⁰; stąd t_n jest elementem $C(K_{e_x})$, $n = 1, 2, \dots$

Korzystając z lematu 5.3 (b) tworzymy ciąg (T_n) ortomorfizmów centralnych na ideale A_{e_x} za pomocą elementów t_n :

$$T_n u = h^{-1}(t_n \bullet h(u)), \quad u \in A_{e_x}. \quad (5.10)$$

Z lematu 5.5 wynika, że każdy ortomorfizm $T_n \in Z(A_{e_x})$ możemy rozszerzyć jednoznacznie do ortomorfizmu \bar{T}_n określonego na E .

Położmy $S_n = \bar{T}_n$.

Zauważmy, że skoro funkcje występujące w mianowniku wzoru (5.9) maleją ze wzrostem n , to elementy t_n rosną, tj.

$$0 \leq t_n \leq t_{n+1} \quad \text{dla dowolnego } n \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Ponieważ h jest izomorfizmem porządkowym, to z nierówności (5.11) oraz postaci ortomorfizmów T_n (patrz wzór (5.10)) otrzymujemy

$$0 \leq T_n \leq T_{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Wiemy, że odwzorowanie Ψ , określone w lemacie 5.5 wzorem

$$\Psi(T) = \bar{T}, \quad \text{dla } T \in Z(A_{e_x}),$$

jest izomorfizmem porządkowym, zatem

$$0 \leq S_n = \bar{T}_n = \Psi(T_n) \leq \Psi(T_{n+1}) = \bar{T}_{n+1} = S_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

więc **ciąg ortomorfizmów (S_n) spełnia warunek (1) naszego twierdzenia.**

¹⁰dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}} \geq \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}$.

Z nierówności $0 \leq t_n \leq 1_{K_{e_x}}$ oraz z definicji operatora (5.10) wynika natychmiast, że każdy ortomorfizm T_n spełnia nierówność $0 \leq T_n \leq I_{A_{e_x}}$, a ponieważ Ψ (tj. operator rozszerzania) jest izometrią porządkową taką, że $\Psi(I_{A_{e_x}}) = I_E$, to

$$0 \leq S_n = \bar{T}_n = \Psi(T_n) \leq \Psi(I_{A_{e_x}}) = I_E.$$

Mamy oczywiście $x \in A_{e_x}$, więc $S_n x = T_n x$, a zatem z warunku (5.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_n x - y &= \\ T_n x - y &= h^{-1}(t_n \bullet h(x)) - h^{-1}(h(y)) = \\ &= h^{-1}(t_n \bullet h(x) - h(y)) = \\ &= h^{-1}\left(\left(\frac{h(y) \bullet h(x)}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}} - h(y)\right)\right) = h^{-1}\left(\frac{-h(y) \bullet \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}\right) = \\ &= -h^{-1}\left(\frac{h(y) \bullet \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}\right). \end{aligned}$$

Z powyższej równości otrzymujemy

$$y - S_n x = h^{-1}\left(\frac{h(y) \bullet \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.14)$$

Z nierówności (5.8) oraz warunku (5.14) wynika, że

$$y - S_n x \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

Ponadto, na podstawie nierówności (5.8) otrzymujemy

$$0 \leq \frac{h(y)}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}} \leq \frac{h(x)}{h(x) + \frac{1}{n}1_{K_{e_x}}} \leq 1_{K_{e_x}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

Teraz warunki (5.14), (5.16) oraz równość $h(e_x) = 1_{K_{e_x}}$ implikują, że dla wszystkich $n = 1, 2, \dots$ mamy

$$0 \leq y - S_n x \leq \frac{1}{n}h^{-1}(1_{K_{e_x}}) = \frac{1}{n}e_x; \quad (5.17)$$

stąd, **spełniony jest warunek (2) twierdzenia 5.10.** Warunki (5.8) oraz (5.17) implikują, że $0 \leq S_n x \uparrow y$, a zatem **spełniony jest również warunek (3) naszego twierdzenia.**

Z warunku (5.17) oraz z monotoniczności F -normy $\|\cdot\|_E$ dostajemy

$$\|y - S_n x\|_F \leq \left\|\frac{1}{n}e_x\right\|_E \rightarrow 0, \quad \text{przy } n \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

a więc **spełniony jest warunek (4).**

Ostatecznie, wykazaliśmy, że jeśli E jest F -kratą z quasi-jedynką, to spełnione są warunki (1) - (4) naszego twierdzenia; w szczególności krata $Z(E)$ jest topologicznie pełna, co kończy dowód. ■

W związku z twierdzeniem 5.10 pojawia się naturalne pytanie:

Czy ciąg ortomorfizmów (S_n) jest zbieżny (topologicznie) nie tylko dla ustalonego elementu $y \leq x$, ale na większej podprzestrzeni F -kraty E zawierającej element x ?

Poniższy wynik pokazuje, że ortomorfizmy S_n występujące w tezie twierdzenia 5.10 tworzą ciąg nie tylko zbieżny punktowo na elemencie x , ale dodatkowo zbieżny topologicznie na ideale $\overline{A_x}$.

Twierdzenie 5.15 *Niech E będzie F -kratą z quasi-jedynką e , oraz niech (S_n) będzie ciągiem ortomorfizmów na E spełniającym warunki (1) - (4) twierdzenia 5.10. Wtedy ciąg ortomorfizmów (R_n) na $\overline{A_x}$ postaci:*

$$R_n = S_n|_{\overline{A_x}} \quad (5.19)$$

jest zbieżny punktowo (topologicznie) do pewnego ortomorfizmu $R \in Z(\overline{A_x})$ takiego, że

$$0 \leq R \leq I_{\overline{A_x}}.$$

Dowód. Niech $u \in A_x$, tj. $|u| \leq \lambda x$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Wtedy dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$|S_n u - S_m u| = |S_n - S_m||u| \leq |S_n - S_m|\lambda x = \lambda|S_n - S_m|x = \lambda|S_n x - S_m x| \rightarrow 0,$$

przy $m, n \rightarrow \infty$, a więc ciąg $(S_n u)$ spełnia warunek Cauchy'ego w E . Z zupełności (topologicznej) E wynika zatem, że dla każdego $u \in A_x$ istnieje granica topologiczna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n u = \tilde{T}u. \quad (5.20)$$

Dodatkowo, dla każdego $u \in E$ ciąg $(S_n u)$ jest topologicznie ograniczony: z warunku (1) twierdzenia 5.10 otrzymujemy $|\alpha_n S_n u| = |\alpha_n S_n||u| \leq |\alpha_n u|$, gdzie (α_n) jest dowolnym, zbieżnym do zera ciągiem liczb rzeczywistych. Stąd dostajemy $\|\alpha_n S_n u\|_E \leq \|\alpha_n u\|_E \rightarrow 0$, przy $n \rightarrow \infty$, zatem zbiór $\{S_n u, n = 1, 2, \dots\}$ jest topologicznie ograniczony dla każdego $u \in E$. Na podstawie ([9, Theorem 17, p. 54], por. [41, Corollary 2.2.3]) ciąg (S_n) jest zbieżny punktowo na $\overline{A_x}$ do pewnego operatora R . Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $S_n \geq 0$, więc $S_n|_{\overline{A_x}} \rightarrow R$. Skoro $S_n|_{\overline{A_x}} \geq 0$, to $R \geq 0$. Dodatkowo $S_n u \leq u$ dla każdego $0 \leq u \in \overline{A_x}$, zatem z domkniętości stożka E^+ otrzymujemy, że $Ru \leq u$ dla każdego $0 \leq u \in \overline{A_x}$, czyli $R \leq I_{\overline{A_x}}$.

Dowód twierdzenia 5.15 jest zakończony. ■

5.3.2 Własności rozdzielania elementów ortogonalnych

Następne twierdzenie jest uzupełnieniem twierdzenia 5.10: pokazuje ono, że zbiór ortomorfizmów centralnych w F -kracie E z quasi-jedynką ma dość bogatą strukturę porządkową. W pracy przeglądowej [50] A. W. Wickstead przypomina pojęcie własności rozdzielania elementów ortogonalnych, które wprowadził S. Leader [27] w 1959 roku.

Definicja 5.16 *Jeśli $E = (E, \|\cdot\|_E)$ jest F -kratą, to mówimy, że krata $Z(E)$ posiada **własność rozdzielania** (the separation property), jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in E$ takich, że $x \wedge y = 0$, istnieje ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z(E)^+$ taki, że $S_n y \rightarrow y$ oraz $S_n x \rightarrow 0$, przy $n \rightarrow \infty$ (zbieżność topologiczna).*

A. W. Wickstead podaje dowód faktu [50, Lemma 1.2], że jeśli E jest kratą Banacha oraz $Z(E)$ jest topologicznie pełna, to $Z(E)$ ma własność rozdzielania.

Nasze twierdzenie 5.17 pokazuje znacznie więcej: *jeśli F -krata E posiada quasi-jedynką (więc $Z(E)$ jest topologicznie pełna: twierdzenie 5.10), to ciąg ortomorfizmów można tak dobrać, że $S_n x = 0$, a nie tylko $S_n x \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0$, przy $n \rightarrow \infty$.*

Wówczas mówimy, że F -krata E posiada **mocną własność rozdzielania**.

Twierdzenie 5.17 *Każda F -krata E z quasi-jedynką e posiada mocną własność rozdzielania. Dokładniej, dla każdego elementu $x, y \in E \setminus \{0\}$ takich, że $x \wedge y = 0$ istnieje ciąg ortomorfizmów centralnych $(S_n) \subset Z(E)$ spełniających warunki:*

- (1) $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq I_E$,
- (2) $S_n y \uparrow y$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n y - y\|_F = 0$,
- (3) $S_n x = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Ustalmy $y \in E^+$ oraz niech x będzie dowolnym elementem E^+ takim, że $x \wedge y = 0$, (tj. $0 \leq x \in y^d$). Wtedy

$$0 \leq y \leq x + y = x \vee y. \quad (5.21)$$

Z nierówności (5.21) oraz z twierdzenia 5.10 wynika, że istnieje ciąg ortomorfizmów $(S_n) \subset Z(E)$ spełniający poniższe warunki:

$$0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq I_E, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.22)$$

(a zatem spełniony jest warunek (1) twierdzenia 5.17) oraz

$$0 \leq S_n(x + y) \uparrow y, \quad (5.23)$$

przy czym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x+y) - y\|_F = 0. \quad (5.24)$$

Z warunku (5.23) otrzymujemy:

$$0 \leq S_n(x+y) = S_nx + S_ny \leq y, \quad (5.25)$$

skąd $S_nx \leq y$ (bo $S_nx \geq 0$). Stąd, ponieważ $S_nx \leq x$ otrzymujemy $S_nx = (S_nx) \wedge x \leq y \wedge x = 0$. Dostaliśmy zatem

$$S_nx = 0 \quad (5.26)$$

dla wszystkich $0 \leq x \in y^d$ oraz $n = 1, 2, \dots$, więc **ciąg (S_n) spełnia warunek (3) naszego twierdzenia**. Z warunków (5.24) oraz (5.26) otrzymujemy, że $0 \leq S_n(x+y) = S_ny \uparrow y$, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_ny - y\|_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x+y) - y\|_E = 0.$$

Wykazaliśmy, że **spełniony jest również warunek (2) naszego twierdzenia**¹¹.

Powyższy ciąg ortomorfizmów centralnych (S_n) spełnia wszystkie trzy warunki tezy twierdzenia 5.17. ■

¹¹Ponieważ $S_nx = 0$, to z twierdzenia 5.10 (2) wynika dodatkowo, że ciąg (S_ny) spełnia nierówność $0 \leq y - S_ny = y - S_n(x+y) \leq \frac{1}{n}(e \vee (x+y))$

Bibliografia

- [1] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis *An invitation to operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, 50. Am. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [2] A. Alexiewicz, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 1969.
- [3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [4] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, New York, 1985.
- [5] B. Balcar, P. Simon, *Disjoint Refinement*, Handbook of Boolean Algebra, vol 2, Edited by J. D. Monk with R. Bonnet, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo, 1989.
- [6] A. Bigard, K. Keimel, *Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé Archimédien*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 381-398.
- [7] F. Benamor, K. Boulabiar, *Maximal ideals of disjointness preserving operators*, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006), 599-609.
- [8] E. Chil, M. Meyer, *On the centre of a vector lattice*, Indag. Math. NS 23 (2012), 167-183.
- [9] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience Publishers, INC., New York, 1958.
- [10] L. Drewnowski, *On the generalized Orlicz sequence spaces $l_{(f_n)}$* , manuskrypt niepublikowany.
- [11] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1973.
- [12] W. Feldman, *Operators on Banach lattices and the Radon-Nikodym theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 517-521.
- [13] C. E. Finol, L. Maligranda, *On a decomposition of some functions*, Comment. Math. Prace Mat. 30, (1991), 285-291.

- [14] M. Gonzales, B. Sari, M. Wójtowicz, *Semi-homogeneous bases in Orlicz sequence spaces*, Contemp. Math. 435, Amer. Math. Soc. (2007), 171-182.
- [15] A. Goulet de Rugy, *La structure ideale des M-espaces*, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 331-373.
- [16] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, INC, Toronto - New York - London, 1950.
- [17] G.V. Iyer, *On the space of integral functions. I.*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 12 (1949), 13-30.
- [18] N. J. Kalton, *Orlicz sequence spaces without local convexity*, Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 81 (1977), 253-277.
- [19] N.J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts, *An F -space sampler*, Cambridge University Press, 1984.
- [20] N. J. Kalton, *Basic sequences in F -spaces and their applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 19 (1974/75), no. 2, 151-167.
- [21] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional analysis*, 'Nauka', Moscow, 1984.
- [22] M. A. Krasnoselskiĭ, Ja. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1961.
- [23] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, PWN, Warszawa, 1978.
- [24] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, PWN, Uniwersytet Śląski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.
- [25] S. S. Kutateladze, *Support set for sublinear operators*, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1428-1431.
- [26] B. Lavrič, *On Freudenthal's spectral theorem*, Indag. Math. 48 (1986), 411-421.
- [27] S. Leader, *Separation and approximation in topological vector lattices*, Canad. J. Math. 11, (1959), 286-296.
- [28] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [29] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [30] Z. Lipecki, *On binary-type approximations in vector lattices*, Arch. Math. 62 (1994), 545-553.

- [31] Z. Lipecki, *Remarks on independent sequences and dimension in topological linear spaces*, Collect. Math. 49 (1998), 53-65.
- [32] W.A.J. Luxemburg, A.R. Schep, *A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual*, Indag. Math. NS 40 (1978), 357-375.
- [33] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [34] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1973.
- [35] M. Meyer, *Richesses du centre d'un espace vectoriel réticulé*, Math. Ann. 236 (1978), 147-169.
- [36] D. S. Mitrinović, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa, 1972.
- [37] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa, 1976.
- [38] H. Nakano, *Teilweise geordnete Algebra* Japan. J. Math. 17 (1941), 425-511.
- [39] P.-M. Nieberg *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [40] B. de Pagter, *f-algebras and orthomorphisms*, Rozprawa doktorska, Leiden, 1981.
- [41] S. Rolewicz, *Metric linear spaces*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1984.
- [42] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 2009.
- [43] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, New York, Berlin 1970.
- [44] I. Singer, *Bases in Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.
- [45] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [46] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [47] T. Traczyk, *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, PWN, Warszawa, 1970.
- [48] A. Wickstead, *Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces*, Compositio Math. 35 (1977), 225-238.
- [49] A. Wickstead, *Extensions of orthomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. 29 (1980), 87-98.
- [50] A. Wickstead, *Banach lattices with topologically full centre*, Vladikavkaz Math. Zh. 11 (2009), 50-60.
- [51] A. Wickstead, *Banach lattices with trivial centre*, Proc. Roy. Irish. Acad. A88 (1988), 71-83.

- [52] W. Wnuk, *On the order-topological properties of the quotient spaces L/L_a* , Studia Math. 79 (1984), 139-149.
- [53] W. Wnuk, *Representations of Orlicz lattices*, Dissert. Math. 235 (1984), 1-66.
- [54] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa, 1999.
- [55] W. Wnuk, *Nonreflexive Musielak-Orlicz spaces nonisomorphic to any Orlicz space*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 41, no 1, (1993), 77-80.
- [56] M. Wójtcowicz, *On a weak Freudenthal spectral theorem*, Comment. Math. Univ. Carolinae 33 (1992), 631-643.
- [57] A. I. Veksler, *Projection properties of vector lattices and Freudenthal's theorem*, Math. Nachr. 74 (1976), 7-25.
- [58] A.C. Zaanen, *Examples of ortomorphisms*, J. Approx. Theory 13 (1975), 192- 204.
- [59] A.C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland, Amsterdam, 1983.