Postulaty i metafory

Dwie wizje podstaw matematyki

Jerzy Pogonowski

Postulaty i metafory

Dwie wizje podstaw matematyki

Poznań 2021

KOMITET NAUKOWY
Jerzy Brzeziński, Agnieszka Cybal-Michalska,
Zbigniew Drozdowicz (przewodniczący), Rafał Drozdowski,
Piotr Orlik, Jacek Sójka

RECENZENT
dr hab. Robert Sochacki, prof. Uniwersytetu Opolskiego

Wydanie pierwsze

PROJEKT OKŁADKI
Robert Domurat

Fotografia na okładce: Jerzy Pogonowski

REDAKCJA
Jerzy Pogonowski, Michał Staniszewski

© Copyright by Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych 2021
© Copyright by Jerzy Pogonowski 2021

Publikacja finansowana przez Wydział Psychologii i Kognitywistyki UAM

Praca wykonana w ramach projektu 2015/17/B/HS1/02232
Narodowego Centrum Nauki

ISBN 978-83-64902-98-7
ISBN 978-83-7589-057-0

WYDAWNICTWO NAUK SPOŁECZNYCH I HUMANISTYCZNYCH
UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
60-568 Poznań, ul. Szamarzewskiego 89c
www.wnsh.amu.edu.pl, wnsh@amu.edu.pl, tel. (61) 829 22 54

WYDAWNICTWO FUNDACJI HUMANIORA
60-682 Poznań, ul. Biegańskiego 30A
www.funhum.home.amu.edu.pl, drozd@amu.edu.pl, tel. 519 340 555

DRUK: Drukarnia Scriptor Gniezno

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy tom opracowany został w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*. Zawiera dwa eseje napisane w ostatnich kilku latach, przy czym pierwszy z nich powstał w trakcie realizacji projektu, natomiast drugi jest uzupełnioną i poprawioną wersją tekstu, który ukazał się przed rozpoczęciem projektu w internetowym czasopiśmie lingwistycznym (Pogonowski 2011).

Postulatyści amerykańscy. Omawiam prace niektórych matematyków amerykańskich, publikowane w trzech pierwszych dekadach XX wieku w *Transactions of the American Mathematical Society*. Prace te łączy to, że dotyczą one ustanawiania zestawów postulatów dla ważnych teorii matematycznych (przede wszystkim w algebrze i geometrii). Ich autorów zwykło nazywać się – za propozycją Johna Corcorana – *postulatystami amerykańskimi*. Najbardziej znanymi przedstawicielami tej grupy byli: Eliakim Hastings Moore, Edward Vermilye Huntington, Oswald Veblen oraz Leonard Eugene Dickson. Znakomite omówienie niektórych ich dokonań zawierają artykuły: Scanlan 1991, 2003. W niniejszym tekście szczególną uwagę poświęcam tym aspektom prac owych matematyków, które wiążą się z problematyką jednoznacznego określenia modeli zamierzonych teorii matematycznych. Tematyka tego eseju omawiana była w następujących odczytach:

1. *Postulatyści amerykańscy*. LXII Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 25–26 października 2016.

2. *On the origin of metalogical notions: the case of American Postulate Theorists*. Logic and Cognition 2, Adam Mickiewicz University, Poznań, 5–6 września 2016.

Matematyczne metafory kognitywistów. Dzielę się z czytelnikiem garścią uwag krytycznych na temat proponowanej przez niektórych kognitywistów (Lakoff i Núñez 2000: *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*) koncepcji *ucieleśnionej matematyki*. Wspomniani autorzy próbują redukować genezę oraz uprawianie matematyki do konstruowania swoistych metafor pojęciowych. Czterdzieści lat temu zaproponowano ciekawą koncepcję tworzenia i funkcjonowania metafor pojęciowych w lingwistyce (Lakoff i Johnson 1980: *Metaphors we live by*). Obecnie Lakoff i Núñez próbują stosować ową teorię metafor do analizowania twórczości matematycznej. Polemizuję z ich wizją *teorii ucieleśnionej matematyki* oraz z wysnuwanymi przez nich konkluzjami filozoficznymi. Niektóre z tych uwag krytycznych podawałem w Pogonowski 2011, 2012, 2017. Dodać wypada, że w ostatnich latach znajdujemy w literaturze przedmiotu bardzo zróżnicowane oceny propozycji Lakoffa i Núñeza: od entuzjastycznych po wielce krytyczne. Tematyka tego eseju omawiana była w następujących odczytach:

1. *Metafory pojęciowe w matematyce. 10 Polski Zjazd Filozoficzny*, Poznań, 15–19 września 2015.

2. *Pojęciowy obraz świata w matematyce*. Konferencja *Język, Kultura, Komunikacja*, Studium Języków Obcych Politechniki Opolskiej, Opole, 29 września 2014.

3. *Metafory poznawcze w matematyce. Seminarium Dydaktyki Matematyki Szkoły Wyższej*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN, Kraków, 24 października 2013.

4. *Matematyczne fantazje kognitywistów. Kolokwium Logiczne II*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 14–15 czerwca 2013.

5. *Metafory matematyczne. 58 Konferencja Historii Logiki*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 23–24 października 2012.

6. *Geneza matematyki wedle kognitywistów. Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM*, Poznań, 23 listopada 2011.

Adresatami obu esejów są ci specjaliści nauk kognitywnych, którzy interesują się poznaniem matematycznym. Pierwszy esej dotyczy szczególnego okresu w historii matematyki, w którym metoda aksjomatyczna, obecna wcześniej właściwie jedynie w *Elementach* Euklidesa, zaczyna być podstawową metodą uprawiania matematyki. Od drugiej połowy XIX wieku coraz wyraźniejsze staje się traktowanie matematyki jako nauki o różnego rodzaju strukturach. Warto przy tym zwrócić uwagę na następujące odróżnienie. Pewne struktury matematyczne są wyróżnione i metoda aksjomatyczna miałaby scharakteryzować je w sposób jednoznaczny. Dotyczyło to liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oraz systemu geometrii euklidesowej. Inne typy struktur, np. grupy, pierścienie, ciała, przestrzenie topologiczne, tworzą klasy, które miały być charakteryzowane jedynie ogólnie przez odpowiednie aksjomaty. Oba rodzaje takich charakterystyk obecne są w omawianych w tym eseju pracach postulatystów amerykańskich, zwłaszcza Edwarda Huntingtona i Oswalda Veblena. Interesujące jest przy tym wyłanianie się pewnych pojęć metalogicznych, przede wszystkim kategoryczności oraz różnych odmian zupełności. Pojęcia te uzyskują precyzyjne sformułowania i badane są dokładniej dopiero nieco później, w pierwszej połowie XX wieku. O roli prac postulatystów amerykańskich w podstawach matematyki, zwłaszcza w odniesieniu do *aksjomatów ekstremalnych*, pisałem w Pogonowski 2019.

Drugi esej dotyczy sformułowanej w końcu XX wieku koncepcji matematyki ucieleśnionej, która miałaby, w zamierzeniu i deklaracjach jej twórców, wyjaśniać genezę i funkcjonowanie abstrakcyjnej matematyki. Przedstawiam główne założenia i twierdzenia tej koncepcji, ale większą część eseju poświęcam jej krytyce. Metafory pojęciowe dobrze tłumaczą szereg zjawisk obserwowanych na terenie lingwistyki, natomiast nie mają takiej samej mocy objaśniającej w obszarze matematyki, co staram się pokazać. Tworzenie metafor pojęciowych nie jest, w moim przekonaniu, głównym mechanizmem rozwoju matematyki. W dziejach tej dyscypliny obserwujemy nie tylko procesy tworzenia nowych pojęć wraz z ich charakterystyką na drodze dedukcyjnej, ale także procesy ustalania, co jest poprawną metodą badań matematycznych. Sądzę, że koncepcja matematyki ucieleśnionej nie zdaje adekwatnie sprawy z natury tych procesów. Genezę i funkcjonowanie matematyki można oczywiście próbować opisywać na gruncie filozofii, nauk kognitywnych lub nauk o kulturze, w każdym jednak przypadku nie wolno zapominać o specyfice myślenia matematycznego, które w odniesieniu do twórczości profesjonalnych matematyków rekonstruować możemy na podstawie analizy tekstów źródłowych. Wyjaśnienia wykorzystujące metafory pojęciowe mogą być użyteczne np. w dydaktyce matematyki oraz jej popularyzacji, które to aktywności należą nie do kontekstu odkrycia lub uzasadniania, lecz do kontekstu przekazu. Ten ostatni termin wprowadziłem w pracy Pogonowski 2016 (zob. także Pogonowski 2018 oraz rozdział 8 w Pogonowski 2019).

Już po oddaniu niniejszego tomu do druku zapoznałem się z książką Hohol 2020, prezentującą podstawy poznania geometrycznego z perspektywy nauk kognitywnych. Jej autor, który wcześniej dość entuzjastycznie odnosił się do propozycji Lakoffa i Núñeza, wskazuje tym razem na pewne istotne ograniczenia ich podejścia. Recenzję książki Hohol 2020 przedstawiam w Pogonowski 2021.

Dwa eseje zamieszczone w tym tomie dobrano na zasadzie kontrastu, jako przykłady odmiennych podejść do podstaw matematyki. Na temat różnych wizji takich podstaw istnieje olbrzymia literatura, lecz jej omówienie nie było moim zamiarem w niniejszej pracy. Znakomitą analizę dwóch paradygmatów matematyki zawiera książka Batóg 2000. Rozróżniane przez Tadeusza Batoga paradygmaty to: Euklidesowy i logiczno-teoriomnogościowy. Ten pierwszy obowiązywał w matematyce do końca XIX wieku. Przeprowadzane w jego ramach rozumowania opierały się często na faktach uznawanych za oczywiste i wykorzystywały rysunki. Najważniejszą cechą następującego po Euklidesowym paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego jest uprawianie matematyki na drodze w pełni zaksjomatyzowanej.

Tadeusz Batóg zwraca uwagę, że na przejście od pierwszego do drugiego paradygmatu miały wpływ takie czynniki, jak: powstanie teorii mnogości oraz logiki matematycznej, arytmetyzacja analizy, opracowanie aksjomatycznych teorii systemów liczbowych oraz systemów geometrii. W ramach paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego w sposób wyraźny oddziela się składnię od semantyki, wykorzystuje się precyzyjnie zdefiniowane pojęcia dowodu oraz wynikania, odróżnia się teorię od metateorii. W tym paradygmacie możliwa stała się także refleksja metateoretyczna, ukazująca możliwości i obiektywne ograniczenia metody aksjomatycznej. Tadeusz Batóg uważa, że teoria kategorii, przez niektórych uznawana za kolejny nowy paradygmat matematyki, nie dokonała jednak w matematyce przełomu porównywalnego z tym, który dokonał się za sprawą logiki i teorii mnogości. Dodaje także, że współczesne koncepcje filozofii matematyki odwołują się przede wszystkim do paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego. Pierwszy esej w tym tomie dotyczy badań prowadzonych właśnie w początkach tego paradygmatu, który dominuje również obecnie. Natomiast esej drugi dotyczy koncepcji, która w moim przekonaniu nie odegra znaczącej roli w rozważaniach nad podstawami matematyki. Nie jest ona paradygmatem w tym znaczeniu, o którym pisze Batóg. Jest koncepcją wobec matematyki zewnętrzną, próbującą analizować podstawy matematyki za pomocą pojęć i środków, które dobrze zdały egzamin w eksplikacjach lingwistycznych, ale które moim zdaniem nie oddają specyfiki genezy i funkcjonowania matematyki.

Różne wizje podstaw matematyki omawiane są także na gruncie poszczególnych stanowisk w filozofii matematyki, przedstawionych np. w znakomitej antologii Murawski 2002. Zarówno stanowiska dziś już klasyczne (logicyzm, formalizm, intuicjonizm), jak też nowsze (np. różne wersje empiryzmu) przedstawiają spójne poglądy na istotę matematyki, przy czym może ważniejsza od akceptowania całości takich poglądów jest analiza argumentacji przedkładanych w ramach tych stanowisk. Dla przykładu, w książce Davis i Hersh 1994 omawia się trudności, jakie klasyczne stanowiska w filozofii matematyki mają z eksplikacją pojęcia intuicji matematycznej.

Poglądy matematyków i filozofów dotyczące podstaw matematyki omawiane są również w monografiach dziejów matematyki (np. Kline 1972) oraz innych opracowaniach (np. Shapiro 2005). Ponieważ, jak już pisałem, nie było moim zamierzeniem prezentowanie w tym tomie stanu badań nad podstawami matematyki, uprzejmie zachęcam ewentualnego czytelnika do sięgnięcia do wspomnianych źródeł.

Praca nad niniejszym tomem odbywała się w życzliwej atmosferze badawczej panującej w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM. Uprzejmie dziękuję Dziekanowi Wydziału Psychologii i Kognitywistyki UAM, Panu prof. Mariuszowi Urbańskiemu za zgodę na finansowe wsparcie publikacji tomu ze środków Wydziału. Jestem też wdzięczny za profesjonalną pomoc udzielaną mi w administrowaniu projektem badawczym przez Panie: mgr Honoratę Helon i mgr Natalię Skrzypczak (zajmujące się na Wydziale obsługą administracyjną projektów), mgr Arletę Borowiak i mgr Sylwię Łuczyńską (Centrum Wsparcia Projektów UAM) oraz mgr Natalię Wojciechowską (Dział Księgowości i Kosztów UAM). Panu prof. Robertowi Sochackiemu bardzo dziękuję za istotne uwagi krytyczne przekazane w recenzji wydawniczej, a Panu redaktorowi Michałowi Staniszewskiemu za pomoc w redakcji tomu. Fotografia na okładce przedstawia Czarny Staw Gąsienicowy, w którym częściowo (w postaci ukruszonego zęba) pochowany jest autor tej książki.

Prace cytowane w przedmowie

Batóg, T. (2000). *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Davis, P., Hersh, R. (1994). *Świat matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Hohol, M. (2020). *Foundations of geometric cognition*. London and New York: Routledge.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Lakoff, G., Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Murawski, R. (2002). *Współczesna filozofia matematyki*. Warszawa: PWN.

Pogonowski, J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* 23: 106–147.

Pogonowski, J. (2012). Matematyczne fantazje kognitywistów. W: J. Juchnowski, R. Wiszniowski, redakcja, *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, Vol. 2, 117–127.

Pogonowski, J. (2016). Kontekst przekazu w matematyce. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 8, 119–137.

Pogonowski, J. (2017). On conceptual metaphors in mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 9: 85–98.

Pogonowski, J. (2018). Intuitive explanations of mathematical ideas. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 10, 123–137.

Pogonowski, J. (2019). *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.

Pogonowski, J. (2021). Poznanie geometryczne z kognitywnego punktu widzenia. Recenzja książki Hohol 2020. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* (w druku).

Scanlan, M. (1991). Who were the American Postulate Theorists? *The Journal of Symbolic Logic* 56 (3): 981–1002.

Scanlan, M. (2003). American Postulate Theorists and Alfred Tarski. *History and Philosophy of Logic* 24: 307–325.

Shapiro, S., editor, (2005). *Philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press, 236–317.

Rozdział 1

Postulatyści amerykańscy

1.1. Uwagi wstępne

Badania w podstawach matematyki w drugiej połowie XIX wieku i w pierwszej połowie wieku XX prowadzone były przede wszystkim w Europie, ale pewien znaczący wkład mieli też matematycy amerykańscy. Nie mogę pozwolić sobie tutaj na bardziej szczegółowe i kompletne omówienie tej problematyki, ale muszę co najmniej wskazać kilka okoliczności związanych z działalnością grupy postulatystów amerykańskich. Oto kilka takich faktów.

Powstanie i rozwój uniwersytetów amerykańskich. Pierwsze szkoły wyższe na terenie obecnych Stanów Zjednoczonych powstały w wieku XVIII (Harvard University nawet w XVII). Liczba uniwersytetów znacznie wzrosła w drugiej połowie wieku XIX. Do grona najważniejszych należały:

1. *Harvard University*. Założony w 1636 roku jako Harvard College, był to pierwszy uniwersytet na terenie ówczesnych kolonii brytyjskich.

2. *Princeton University*. W 1746 roku założono College of New Jersey, przemianowane na Princeton University w 1896 roku.

3. *John Hopkins University*. Założony w 1876 roku w Baltimore w stanie Maryland.

4. *University of Chicago*. Założony w 1890 roku.

5. *Institute of Advanced Study at Princeton*. Założony przez Abrahama Flexnera w 1930 roku. Ważną rolę w początkach działalności tej instytucji odgrywał Oswald Veblen.

American Mathematical Society. Zostało założone w 1888 roku przez Thomasa Fiske, początkowo jako Nowojorskie Towarzystwo Matematyczne.

Transactions of the American Mathematical Society. Czasopismo wydawane od 1900 roku przez American Mathematical Society. To właśnie w tym czasopiśmie opublikowano większość prac, o których mowa w tym eseju.

Ojcowie Założyciele. Oprócz matematyków, o których piszę niżej w tym tekście, do grona prekursorów badań matematycznych w Stanach Zjednoczonych należeli m.in.: Thomas Scott Fiske (1865–1944), Maxime Bôcher (1867–1918), William Osgood (1864–1943), James Pierpoint (1866–1938), George David Birkhoff (1884–1944), Benjamin Pierce (1809–1880), Charles Saunders Pierce (1839–1914). James Joseph Sylvester (1814–1897) część życia spędził w Ameryce (utworzył *American Journal of Mathematics*), chociaż klasyfikowany bywa jako matematyk brytyjski.

Kontakty z Europą. Wielu matematyków amerykańskich odwiedzało Europę, niektórzy odbyli tu swoje studia. W latach między wojnami światowymi z Europy do Ameryki wyemigrowali liczni uczeni, w tym wielu znakomitych matematyków, jednak stało się to już po interesującym nas w tym eseju okresie.

Wśród wyników matematycznych uzyskanych w Europie, które stanowiły motywację dla badań prowadzonych przez postulatystów amerykańskich, wymienić należy: aksjomatyki dla geometrii podane przez takich matematyków, jak Pasch (1882), Peano (1889), Pieri (1899), Hilbert (1899), charakterystyki ważnych struktur liczbowych (liczb naturalnych, wymiernych, rzeczywistych) podane przez Dedekinda (1872), Hamiltona (1843), Peana (1889) Höldera (1901), rozwój różnych systemów geometrii (geometria rzutowa, geometrie nieeuklidesowe, geometria algebraiczna) oraz przełomowe prace Kleina (1872) i Riemanna (1854) dotyczące podstaw geometrii, inne wyniki algebraiczne, uzyskane w XIX wieku (w szczególności, wyniki dotyczące różnych rodzajów liczb hiperzespolonych).

Wśród źródeł bibliograficznych, które opisują działalność i wyniki postulatystów amerykańskich, wymienić warto:

1. Artykuł Scanlan 1991, w którym podaje się nieco informacji o szkole, porównuje jedną z prac Huntingtona z rozprawą Höldera, a prace Veblena z podstaw geometrii z wynikami Hilberta w tejże dziedzinie.

2. Artykuł Scanlan 2003, w którym omawia się wpływ prac postulatystów amerykańskich na późniejsze badania w podstawach matematyki, przede wszystkim na prace Alfreda Tarskiego.

3. Monografia Parschall, K.H., Rowe, D.E. (1994). *The Emergence of the American Mathematical Research Community: J. J. Sylvester, Felix Klein,*

and E. H. Moore. History of Mathematics Vol. 8, American Mathematical Society and London Mathematical Society.

4. Materiały zamieszczone na stronach American Mathematical Society:

   (a) Odnośniki do historycznych publikacji AMS:
   http://www.ams.org/samplings/math-history/math-history

   (b) AMS History of Mathematics, Volume 1: A Century of Mathematics in America, Part I, 1988
   http://www.ams.org/samplings/math-history/hmath1-index

   (c) Raymond Clare Archibald (1938) Volume I: A Semicentennial History of the American Mathematical Society, 1888–1938
   http://www.ams.org/samplings/math-history/hmreprint-index

Byłoby chyba przesadą nazywanie postulatystów amerykańskich szkołą, w takim znaczeniu, w jakim termin ten (trafnie) stosujemy np. w przypadku szkoły lwowsko-warszawskiej. Tutaj ograniczam się do wybranych, jednorodnych tematycznie wyników uzyskanych przez tych matematyków i opublikowanych w stosunkowo krótkim okresie. Będę jednak czasem posługiwał się terminem „szkoła", by skrócić wypowiedź.

1.2. Metodologia

W trzech pierwszych dekadach XX wieku w *Transactions of the American Mathematical Society* opublikowano kilkadziesiąt prac poświęconych tworzeniu zespołów postulatów dla ważnych teorii matematycznych. Interesujące nas tutaj prace dotyczą przede wszystkim: systemów liczbowych, algebraicznych, geometrycznych. Omawiane prace kultywują pewien standard metodologiczny, dla którego charakterystyczne jest:

Wybór struktury. Dopiero w wieku XIX matematycy przyjęli inną niż wcześniej perspektywę badania obiektów matematycznych. Metoda aksjomatyczna zaczyna odgrywać istotną rolę również poza geometrią. W samej geometrii następuje zwrot od uznawania systemu Euklidesa za jedynie słuszną (prawdziwą) geometrię. Karierę zaczynają robić różne struktury algebraiczne. Matematycy mają więc do dyspozycji wielość struktur. Pewne ich rodzaje uważane są za fundamentalne. Omawiane niżej prace dotyczą takich właśnie podstawowych struktur: systemów geometrii, struktur algebraicznych, takich jak grupy i ciała. Istotne moim zdaniem jest to, że punktem wyjścia są obiekty matematyczne, a celem ich opis.

Wybór pojęć pierwotnych. W pewnych przypadkach wybór pojęć pierwotnych narzuca się dość jednoznacznie. Dla przykładu, opis grup zakłada użycie pojęcia działania. Z kolei struktury geometryczne opisywane bywają przez wybór np. punktów, prostych i płaszczyzn jako pojęć pierwotnych, ale można też wybrać np. bryły oraz relacje między nimi w charakterze takich pojęć.

Ustalenie postulatów. Ciekawym aspektem rozważanych prac jest to, że bierze się w nich pod uwagę wiele możliwości wyboru postulatów. Osobną sprawą jest później wykazanie, że wybrane postulaty są równoważne, w tym sensie, że określają dokładnie te same klasy struktur.

Definiowanie pozostałych ważnych pojęć poprzez pojęcia pierwotne. Wybranie pewnych pojęć jako pierwotnych implikuje konieczność podania definicji pozostałych używanych pojęć.

Ustalenie niesprzeczności badanego systemu. Tego omawiani autorzy dokonują na sposób semantyczny, podając przykłady struktur spełniających rozważane postulaty.

Dowód niezależności przyjętego systemu postulatów. Autorzy omawianych prac traktowali to jako jedno z naczelnych zadań. Opisy przez postulaty miały być możliwie jak najbardziej ekonomiczne, w tym sensie, że na liście postulatów nie umieszczano takich warunków, które wynikają z pozostałych postulatów systemu. Metoda dowodowa w takim przypadku ma charakter semantyczny: aby wykazać, że postulaty z listy $\mathbb{A}$ są wzajem niezależne, dla każdego $A \in \mathbb{A}$ podawano przykłady struktur, które spełniają wszystkie warunki z listy $\mathbb{A} - \{A\}$, lecz nie spełniają A.

Argumentacja za kategorycznością systemu. Obok wykazywania niezależności aksjomatów, drugim deklarowanym celem rozważnych badań była argumentacja za tym, że podany układ postulatów charakteryzuje omawiane struktury w sposób jednoznaczny (z dokładnością do izomorfizmu).

Refleksje na temat zupełności systemu. Uważam za ciekawe to, że w pracach postulatystów amerykańskich zawarte są uwagi, świadczące o tym, iż – do pewnego stopnia – zdawali sobie oni sprawę z różnicy między obiektywną zależnością wynikania logicznego a możliwościami dowodowymi.

Przed omówieniem wybranych prac postulatystów amerykańskich zwrócę uwagę na kilka spraw. Prace tych autorów dotyczące podstaw geometrii warto porównać z pracami innych autorów na ten temat: Hilberta, Pascha, Peana, Pieriego, Veronese i innych. Eliakim H. Moore, Edward V. Huntington oraz Oswald Veblen mieli znakomite rozeznanie w wynikach uzyskanych w Europie, co potwierdzają między innymi z przypisy zamieszczone w ich pracach. Podobnie, ich prace dotyczące podstaw algebry oraz charakterystyki znanych systemów liczbowych porównywać warto z pracami takich autorów jak: Hölder, Weber, Dedekind, Peano, Cantor, Heine, Hilbert. Praca Scanlan 1991 porównuje prace Huntingtona i Höldera na temat wielkości ciągłych.

Omawiane prace powstały przed uformowaniem się standardu logiki pierwszego rzędu. Dotyczą one podstaw matematyki, ale napisane zostały w okresie, gdy logika matematyczna nie wywierała przemożnego wpływu na badania podstawowe. Prace te nie wykorzystują teorii typów, nie odnoszą się *bezpośrednio* do logiki Fregego, a raczej do prac matematycznych (Hilbert, Peano, Dedekind). Huntington korzysta z notacji Peana w jednej z wczesnych prac, jednak jedynie w celach ilustracyjnych. Huntington deklaruje, że używa metod logiki formalnej w opracowywaniu dowodów, ale nie zamieszcza formalizmu w tekstach oddanych do druku. Warto jednak zwrócić uwagę, że np. dowody przedstawione w Huntington i Kline 1916 są podane w postaci symbolicznej, z użyciem notacji Peana. Postulaty formułowane są w języku przedmiotowym; nie ma więc chyba mowy o aksjomatach ekstremalnych (wrócę jeszcze do tej sprawy). Jednak aksjomat zupełności z systemu geometrii Hilberta jest wspomniany.

Postulatyści amerykańscy posługują się prototypami pojęć metalogicznych: kategoryczności oraz zupełności. Huntington używał terminu *sufficient*, który później przez Veblena zastąpiony zostaje terminem *categorical*. Systemy, które nie mają własności kategoryczności, nazywane są przez postulatystów amerykańskich *disjunctive*. Zarówno Huntington, jak i Veblen formułują pewne stwierdzenia oraz hipotezy dotyczące tego, co współcześnie rozumiemy przez zupełność teorii. Omawiani autorzy wyrażają zatem, chciałoby się rzec, pewne przeczucia metalogiczne. Zauważyć można pewne różnice między ujęciami Huntingtona i Veblena. W pracy Langforda z 1926 roku usyskano wyniki dotyczące zupełności teorii gęstych liniowych porządków bez końców.

W XIX wieku sformułowany został *program z Erlangen* (Riemann, w 1854 roku), który otwierał nową perspektywę dla badań w podstawach geometrii. Interesujące jest zbadanie, na ile postulatyści amerykańscy odnoszą się do tego programu. W XIX wieku intensywnie rozwijana była również teoria *niezmienników*, warto zatem prześledzić, na ile tego typu rozważania obecne są u postulatystów amerykańskich.

Kto w Europie cytuje postulatystów amerykańskich? W zakończeniu niniejszego eseju piszę o wpływie prac postulatystów amerykańskich na badania matematyczne prowadzone ówcześnie oraz później w Europie. Wpływ ten widoczny jest wyraźnie w pewnych pracach Alfreda Tarskiego.

W dalszej części napiszę nieco więcej o pracach Oswalda Veblena oraz Edwarda Huntingtona. Jak się zdaje, wywarły one największy wpływ. W pierwszej kolejności wspomnę jednak o kilku pracach Eliakima Hastingsa Moore'a.

Wezmę pod uwagę także prace Leonarda Dicksona oraz Roberta Lee Moore'a. Na koniec, dodam kilka uwag o innych autorach zaliczanych do postulatystów amerykańskich. W przypadku każdego z omawianych autorów podaję informacje bibliograficzne dotyczące branych pod uwagę prac, aby ewentualny czytelnik nie był zmuszony do sięgania za każdym razem do bibliografii na końcu eseju.

1.3. Eliakim Hastings Moore

Eliakim Hastings Moore (1862–1932) studiował matematykę na Yale University. Rozprawę doktorską z algebry napisał pod kierunkiem Huberta Ansona Newtona. Uczęszczał na wykłady Kroneckera i Weierstrassa w Berlinie. Kierował departamentem matematyki na Uniwersytecie w Chicago od 1892 do 1931 roku. W 1893 roku opracował klasyfikację ciał skończonych. Podał aksjomatykę dla geometrii, w której jedynym pojęciem pierwotnym był *punkt*. Dokonał też pewnego uproszczenia aksjomatyki Hilberta, pokazując, że jeden z aksjomatów można wyprowadzić z pozostałych. Po 1906 roku zajmował się podstawami analizy, geometrią algebraiczną, teorią liczb i równaniami całkowymi. W *Introduction to a form of general analysis* (1910) wprowadził pojęcie operatora domknięcia. Przyczynił się do przekształcenia *New York Mathematical Society* w *American Mathematical Society*. Był redaktorem *Transactions of the American Mathematical Society* w latach 1899–1907. Następujące prace Moore'a zaliczyć należy do interesujących nas w tym eseju wyników:

1. Moore, E.H. (1902). On the projective axioms of geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 142–158.

2. Moore, E.H. (1902). A definition of abstract groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 485–492.

3. Moore, E.H. (1905). On a definition of abstract groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 179–180.

Nie będę streszczał prac E.H. Moore'a, ale zacytuję jego komentarz z rozprawy o aksjomatyce geometrii, gdyż zawiera on ważne refleksje metodologiczne:

> Clearly the body of axioms of a system depends essentially upon the choice of the basal notions of the system. In this connection a remark is pertinent with respect to one's attitude concerning the foundations of geometry. I suppose that if geometry is taken to be a natural science –

> the science or a science of the space in which or according to which we live – it would, as is contended by PASCH and PEANO, be undesirable to introduce the line as a basal notion. The linear segment seems to be a more fundamental notion. But we may discriminate between that part of geometry which establishes a body of postulates based as directly as may be on spatial experience or intuition, and that part which consists in the organization of the science on the basis of the accepted body of axioms; and so we understand that it may in the development of the theory be convenient to replace the body of primary notions and relations by another body of notions and relations, less fundamental, but, with respect to the deductive geometry, more convenient. I suppose that with this thought HILBERT introduced the line and the plane as basal notions in his abstract geometry. – It is understood that greater generality would be obtained by introducing the axioms as valid, as one says, for a limited region of space. In this connection reference is made to KLEIN's introduction of the ideal elements of projective geometry without the use of the parallel axiom, and to remarks of PASCH (pp. 4, 18, 126), of PEANO (p. 75) and of SCHURR (pp. 267, 274). (Moore 1902, 144)

Jak zatem widać z powyższych deklaracji, Moore dokonuje odróżnienia między intuicjami dotyczącymi pojęć pierwotnych, wiążącymi się także z możliwościami zastosowań badanego systemu, a strukturą dedukcyjną systemu, czyli m.in. decyzjami, które pojęcia dogodnie jest wybrać, aby w sposób spójny i elegancki można było charakteryzować je na drodze dedukcyjnej.

1.4. Edward Vermilye Huntington

Edward Vermilye Huntington (1874–1952) studiował matematykę na Harvard University. Doktoryzował się na Uniwersytecie w Strasburgu w 1901 roku, a następnie przez czterdzieści lat pracował na University of Harvard. Jest autorem największej liczby prac wśród tych, które interesują nas w niniejszym eseju. Podał mianowicie systemy aksjomatów dla: grup, grup abelowych, geometrii, ciała liczb rzeczywistych, ciała liczb zespolonych. Jego monografia *The Continuum and Other Types of Serial Order* (1917) stanowiła doskonałe wprowadzenie do – ówcześnie całkiem nowej – teorii mnogości Cantora. W 1904 roku podał aksjomaty teorii algebr Boole'a. Pokazał również w 1933 roku, że teorię algebr Boole'a można zaksjomatyzować w terminach łącznej i przemiennej operacji dwuargumentowej (dodawania) oraz operacji jednoargumentowej (dopełnienia) wraz z *aksjomatem Huntingtona*:

$$(a' + b')' + (a' + b') = a.$$

Interesował się także statystyką oraz zastosowaniami matematyki w inżynierii. Huntington opublikował stosunkowo dużo prac w rozważanym tu okresie, w tym jedną w *Mathematische Annalen*:

1. Huntington, E.V. (1902). A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 264–279.

2. Huntington, E.V. (1902). Complete sets of postulates for the theories of positive integral and positive rational numbers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 280–284.

3. Huntington, E.V. (1903). Two definitions of an abelian group by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4: 27–30.

4. Huntington, E.V. (1903). Definitions of a field by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4: 31–37.

5. Huntington, E.V. (1903). Complete sets of postulates for the theory of real quantities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4: 358–370.

6. Huntington, E.V. (1904). Sets of independent postulates for the algebra of logic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 5: 288–309.

7. Huntington, E.V. (1905). A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 17–41.

8. Huntington, E.V. (1905). Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 181–197.

9. Huntington, E.V. (1905). A set of postulates for ordinary complex algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 209–229.

10. Huntington, E.V. (1913). A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion. *Mathematische Annalen*, 73: 522–559.

11. Huntington, E.V., Kline, J.R. (1917). Sets of independent postulates for betweenness. *Transactions of the American Mathematical Society*, 18: 301–325.

1.4.1. Prace algebraiczne

Huntington w 1902 roku w *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude* podaje system aksjomatów charakteryzujący dodatnie liczby rzeczywiste w sposób kategoryczny. Używa ogólnego pojęcia izomorfizmu, wprowadza też osobny termin dla własności kategoryczności, a mianowicie *sufficiency*. Huntington w następujący zwięzły sposób przedstawia przedmiot tej pracy:

> The object of the work which follows is to show that these six postulates form a *complete set*; that is, they are (I) *consistent*, (II) *sufficient*, (III) *independent* (or *irreducible*). By these three terms we mean: (I) there is at least one assemblage in which the chosen rule of combination satisfies all the six requirements; (II) there is essentially *only one* such assemblage possible; (III) none of the six postulates is a consequence of the other five. (Huntington 1902, 266)

Powyższe deklaracje stosują się w zasadzie do wszystkich prac postulatystów amerykańskich dotyczących proponowanych systemów postulatów dla systemów algebraicznych oraz geometrycznych.

Dla ilustracji, przytoczę postulaty Huntingtona z tej pracy. Mają one charakteryzować, jak pamiętamy, dodatnie liczby rzeczywiste. Takie liczby są formalnymi odpowiednikami *wielkości ciągłych*. W postulatach występuje symbol pierwotny $\circ$, który ma odpowiadać regule tworzenia (kombinowania):

> A *rule of combination* in an assemblage is any rule or agreement by which, when any two elements (whether the same or different) are given, in a definite order, some object (which may or may not belong to the assemblage) is uniquely determined. (Huntington 1902, 266)

W postulatach występuje też predykat identyczności $=$, nazywający relację identyczności (choć oczywiście nie ma w tej pracy współczesnych systematycznych dystynkcji między składnią a semantyką). Huntington wykorzystuje w charakterze przykładów w dalszym tekście „zwykłe” liczby rzeczywiste oraz zespolone, ale – jak wyraźnie zaznacza – dla sformułowania postulatów wystarcza przyjęcie aksjomatyki Peana dla liczb naturalnych (w terminologii Huntingtona: *the natural system of ordinal numbers*).

Termin *assemblage* traktuje Huntington w swoich pracach jako równoznaczny z terminami: *class*, *Menge*, *manifold*, *ensemble* itp., nie wdając się w głębsze analizy jego znaczenia.

Może warto jeszcze przytoczyć opinię Huntingtona na temat różnicy znaczeniowej między terminami *postulate* oraz *axiom*:

> Following the usual distinction, we use "postulate" to mean a proposition the acceptance of which is demanded or agreed upon as a basis for future reasoning, reserving "axiom" to mean "a self-evident proposition, requiring no formal demonstration to prove its truth, but received and accepted as soon as mentioned." (Huntington 1902, przypis na stronie 264)

Postulaty charakteryzują pewien zbiór (zbiór wielkości ciągłych). Huntington nie wprowadza osobnego symbolu na oznaczenie tego zbioru, nie korzysta też z predykatu $\in$ należenia elementu do zbioru. Mówi po prostu: *elements of the assemblage*. Rodzajnik określony decyduje tu o tym, że pisząc o elementach, mamy na myśli elementy tego właśnie zbioru, kwantyfikacja jest relatywizowana do tego zbioru. Postaram się oddać w sposób możliwie najbardziej wierny sformułowania Huntingtona, nie korzystając ze współczesnej notacji logicznej. Oto proponowane postulaty:

1. Zbiór wielkości ciągłych jest domknięty na operację $\circ$: jeśli a oraz b są takimi wielkościami, to $a \circ b$ również.

2. $a \circ b \neq a$.

3. Operacja $\circ$ jest łączna: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, o ile $a \circ b$, $b \circ c$, $(a \circ b) \circ c$ oraz $a \circ (b \circ c)$ są wielkościami ciągłymi.

4. Jeśli $a \neq b$, to spełniony jest co najmniej jeden z następujących warunków:

   (a) istnieje element x taki, że $a = b \circ x$

   (b) istnieje element y taki, że $a \circ y = b$.

5. Niech $a < b$ oznacza, że istnieje element y taki, że $a \circ y = b$, zaś $a \leqslant b$ oznacza, że $a < b$ lub $a = b$. Jeśli S jest nieskończonym ciągiem elementów a_k takich, że $a_k < a_{k+1}$ oraz $a_k < c$, gdzie c jest pewnym ustalonym elementem, to istnieje dokładnie jeden element A, posiadający następujące dwie własności:

   (a) $a_k \leqslant A$, o ile a_k należy do S

(b) jeśli y oraz A' są takie, że $y \circ A' = A$, to istnieje co najmniej jeden element S, powiedzmy a_r dla którego $A' < a_r$.

6. Dla dowolnego elementu a istnieją elementy x oraz y takie, że $x \circ y = a$. Inaczej mówiąc, dla dowolnego elementu a istnieje element x taki, że $x < a$.

Przedostatni postulat na tej liście we współczesnym sformułowaniu wyraża zatem fakt, że dowolny rosnący i ograniczony ciąg wielkości ciągłych ma kres górny.

Niesprzeczności tego układu postulatów dowodzi Huntington, wskazując, że rozważanym zbiorem może być zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, a operacja $\circ$ może być rozumiana jako dodawanie. Inna możliwość podana przez Huntingtona to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od 1, gdzie operacja $\circ$ jest rozumiana jako mnożenie. Porównanie tej pracy Huntingtona z opublikowaną mniej więcej w tym samym czasie pracą Otto Höldera dotyczącą wielkości ciągłych zawiera artykuł Scanlan 1991, o czym piszę dalej w niniejszym rozdziale.

Krótkie informacje historyczne dotyczące teorii grup zawiera początek pracy *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates* (Huntington 1905). Autor zaznacza tu m.in., że to właśnie on podał pierwszy dowód niezależności postulatów dla grup. Huntington przywołuje także kilka informacji historycznych dotyczących wprowadzania pojęcia ciała. W głównej części pracy podaje aksjomaty dla grup, grup abelowych oraz ciał, w tym również pewną skróconą wersję aksjomatyki dla tych ostatnich. Omawia też możliwość definiowania grup przez stosowną relację trójargumentową (charakteryzującą działanie w grupie).

W przypisie na stronie 210 pracy *A set of postulates for ordinary complex algebra* (Huntington 1905) autor zauważa:

> In the case of any categorical set of postulates one is tempted to assert the theorem that if any proposition can be stated in terms of the fundamental concepts, either it is itself deducible from the postulates, or else its contradictory is so deducible; it must be admitted, however, that our mastery of the processes of logical deduction is not yet, and possibly never can be, sufficiently complete to justify this assertion.

Dalej w tym przypisie Huntington wskazuje na pewne uwagi Hilberta wypowiedziane podczas jego słynnego wykładu w Paryżu w 1900 roku, dotyczącego problemów matematycznych. Przywołuje także aksjomat zupełności Hilberta dla systemu liczb rzeczywistych, opublikowany w 1899 roku. Na stronie 211 tejże pracy znajdujemy deklarację:

> It should be said, in conclusion, that no attempt is here made to give a metaphysical analysis of the concepts *class*, *operation*, and *relation*, on which the algebra is based, or the *laws of deductive logic* by which its propositions are deduced – the discussion of these more fundamental notions, here assumed as familiar, being matter for the trained student of philosophy. I hope, however, that a paper like a present may be indirectly of service on the philosophical side of the subject, by enabling one to formulate very precisely the problems involved in the question: *What is algebra?*

Słowa te podkreślają zatem niezależność dalszych rozważań od przyjętego stanowiska filozoficznego odnośnie do rozumienia pewnych podstawowych pojęć. Jednocześnie świadczą o pełnej świadomości autora, że prowadzi badania w podstawach matematyki o doniosłym znaczeniu.

Huntington omawia w tej pracy także różnice między definicjami kontinuum podanymi przez Cantora i Dedekinda. W zasadniczej części omawianego artykułu Huntington przedstawia systemy postulatów charakteryzujące liczby rzeczywiste oraz zespolone.

W pracy *A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups* (Huntington 1905) autor stosuje w jednym miejscu (jak można rozumieć, dla ilustracji) notację logiczną zaproponowaną przez Giuseppe Peana w jego *Formulaire de Mathématiques*, zachwalając ją jako bardzo użyteczną, ale formułując jednocześnie każdy postulat także w sposób, w jaki zwykle robią to matematycy (czyli w języku mieszanym, wykorzystującym język naturalny oraz terminy matematyczne).

Podając w tejże pracy system postulatów dla grup abelowych, Huntington zauważa na stronie 24:

> In conclusion, it should be noticed that the eight postulates of § 2 form a "disjunctive", not a "categorical" set; for an abelian group may contain any finite number of elements, or be infinite; and even if the number of elements in two groups is the same, the groups are not necessarily isomorphic; hence there are many propositions concerning K and $+$ which are neither deducible from these postulates, nor in contradiction with them.

Jest oczywiste, że w przypadku grup nie myślimy o ich kategorycznej charakterystyce. Dokonujemy natomiast przeróżnych klasyfikacji grup, wyodrębniając osobne ich typy.

1.4.2. Prace geometryczne

Praca *A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion* opublikowana została w *Mathematische Annalen*, należy jednak tematycznie do cyklu prac postulatystów amerykańskich, publikowanych w *Transactions of the American Mathematical Society*. Rozpoczyna ją *Prefatory Note*, w której autor krótko objaśnia niektóre różnice między swoim podejściem, a znanymi ówcześnie systemami postulatów geometrycznych:

> The chief points of difference between the present set of postulates and the well known sets given by Pasch, Veronese, Peano, Pieri, Hilbert, Veblen, Schweitzer, and others are: 1) the use of solid body instead of the point as an undefined concept; 2) the extreme simplicity of the undefined relation of inclusion; 3) the systematic definitions of the straight line, the plane, and the 3-space, which can be readily extended, if desired, to space of n dimensions; and 4) the attempt to separate the 'existence postulates' from the postulates expressing 'general laws'. (Huntington 1913, 523)

Huntington wyjaśnia dalej różnicę między owymi postulatami egzystencjalnymi a ogólnymi prawami w następujący sposób. Postulaty egzystencjalne żądają istnienia elementów spełniających pewne warunki. Dla przykładu, taki jest postulat mówiący, że przez dowolny punkt na zewnątrz danej prostej poprowadzić można co najmniej jedną prostą równoległą do tej danej prostej. Taki jest również postulat głoszący, że prosta przechodząca przez jeden z wierzchołków trójkąta oraz dowolny jego punkt wewnętrzny musi przeciąć bok trójkąta przeciwległy do tego wierzchołka.

Huntington docenia formalizm logiczny Peana, pisząc, że był on niezastąpiony w przygotowaniu dowodów, chociaż nie jest używany w wersji pracy przekazanej do druku.

Symbolami pierwotnymi są: K, oznaczający dowolną klasę elementów, oraz R, oznaczający dowolną relację między tymi elementami. Huntington nazywa je *zmiennymi*, dodając komentarz na temat wartości logicznej postulatów:

> These postulates are not definite propositions – that is, they are not in themselves either true or false. Their truth or falsity is a function of the logical interpretation given to the variables K and R, just as the truth or falsity of a conditional equation in algebra is a function of the numerical values given to the variables in such an equation. They may therefore be called '*propositional functions*' (to use a term of Russell's), since they become definite propositions (true or false) only when definite 'values' are given to the variables K and R. (Huntington 1913, 526)

Kwestie metateoretyczne, które interesują Huntingtona w omawianej pracy to, podobnie jak w przypadku pozostałych jego prac: niesprzeczność postulatów, ich niezależność oraz to, czy stanowią one układ warunków wystarczający do wyznaczenia jedynego systemu spełniającego te warunki. Jeśli natomiast chodzi o niesprzeczność, to Huntington pisze:

> In the present case, we have already mentioned one system (K, R) as satisfying all our postulates, namely the system: K = the class of all spheres, and R = the relation of inclusion; but if we mean by 'sphere' and 1inclusion' the common notions given by observation of perceptual space, then our judgment that this system satisfies all the postulates can be only approximate, and the system does not provide a satisfactory proof of the consistency of the postulates. If, however, we use 'sphere' and 'inclusion' in the sense in which these terms are used in analytical geometry (see the end of Chapter II), then we have a strictly numerical system, which certainly exists, and which can be shown to satisfy all the postulates with absolute accuracy. The consistency of the postulates is thus completely established. (Huntington 1913, 527–528)

Niezależność poszczególnych postulatów wykazuje Huntington znaną metodą, budując stosowne modele. Wzorcowym przykładem zastosowania tej metody były ówcześnie dowody niezależności poszczególnych aksjomatów podane w *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta. O trzeciej z wymienionych własności pisze natomiast następująco:

> *Sufficiency of the postulates to determine a unique type of system*. A third and most important part of our work is to show that any two systems (K, R) which satisfy all the postulates are *formally equivalent*, or *isomorphic*, with respect to the variables K and R. This means that if (K', R') and (K'', R'') are any two 'geometrical systems' – that is, any two systems that satisfy all the postulates – then it will be possible to set up a one-to-one correspondence between the elements A', B', C', ... of K' and the elements A'', B'', C'', ... of K'' in such a way that whenever A' and B' satisfy the relation $A'R'B'$, then the corresponding elements A'' and B'' will satisfy the relation $A''R''B''$. By the establishment of this isomorphism, we show that *any theorem involving only the variables K and R, which is true in one of the systems will be true in the other also*; hence *all the systems (K, R) which satisfy the postulates may be said to belong to a single type*.
>
> With the proof of this theorem, the series of deductions which we draw from the postulates is brought to a natural conclusion; and in view of this theorem, we may then define *abstract geometry* as the *study of the properties of a particular type of system (K, R), namely, that type which is completely determined by the Postulates 1–18 and E1–E7*. (Huntington 1913, 528)

W tym miejscu warto może dodać, że Huntington dokonuje rozróżnienia:

1. *abstract geometry* – ogół twierdzeń otrzymanych na drodze dedukcji z przyjętych postulatów;

2. *concrete geometry* – ustalona interpretacja (w domyśle: matematyczna), np. przyjęcie za K zbioru sfer, a za R relacji inkluzji;

3. *applied geometry* – interpretacja (niekoniecznie matematyczna) przyjętych postulatów.

Przedstawię teraz system aksjomatów dla geometrii, proponowany przez Huntingtona. W postulatach występują też pojęcia zdefiniowane, które omawiane są w pierwszej kolejności.

Elementy klasy K nazywamy *sferami*. Jeśli zachodzi ARB, to mówimy, że sfera A jest *zawarta* w sferze B. Jeśli nie zachodzi ani ARB ani BRA, to:

1. jeśli nie istnieje sfera X taka, że XRA oraz XRB, to A i B są *wzajem rozłączne*;

2. jeśli istnieje sfera X taka, że XRA oraz XRB, to mówimy, że A i B *przecinają się*.

Sfera A jest *punktem*, jeśli nie istnieje sfera X taka, że XRA. Ta definicja nic nie mówi oczywiście o rozmiarze sfer.

Huntington podkreśla oryginalność swojej definicji odcinka. Jeśli X jest punktem takim, że każda sfera, która zawiera A oraz B zawiera także X, to mówimy, że X należy do *odcinka* $[AB]$ (lub $[BA]$). Punkty A i B są *końcami* odcinka $[AB]$, a pozostałe punkty tego odcinka są jego *wnętrzem*, oznaczanym (AB). Jeśli (AB) jest pusty, to odcinek $[AB]$ nazywamy *dziurą*.

Przedłużenia odcinka definiuje Huntington podobnie jak Peano, a *prosta* wyznaczona przez odcinek to ogół punktów należących do niego oraz jego przedłużeń. W oczywisty sposób definiuje się też *półproste* (promienie). Trzy punkty są *współliniowe*, jeśli każdy z nich należy do prostej wyznaczonej przez pozostałe dwa.

Huntington wykorzystuje notację, pozwalającą w prosty sposób oznaczać takie rozszerzenia (także w przypadku innych tworów geometrycznych, jak trójkąty, czworościany itd.). Dla odcinka $[AB]$ mamy zatem jego przedłużenia oznaczane $[AB']$ oraz $[BA']$. Huntington korzysta także z pewnej operacji, którą nazywa sumą prostą:

> *Definition 7.* In a set of two or more classes like $[AB]$, $[AB']$, etc., if no two of the classes have any point in common (unless it be a common boundary point, represented by an unaccented letter that appears explicitly in both symbols), then the classes may be said to form a *simple set of non-overlapping* regions, and the logical sum of such a set may be called a *simple sum*. (Huntington 1913, 530–531)

Tego typu operacja może być wykonywana także na trójkątach, czworościanach itd., z zastrzeżeniem, że rozważane obiekty mają wspólny jedynie brzeg (określony w każdym przypadku precyzyjną definicją).

Jeśli X jest punktem takim, że każda sfera, która zawiera A, B i C zawiera także X, to mówimy, że X należy do trójkąta $[ABC]$. Wierzchołki i boki trójkąta definiuje się w oczywisty sposób, podobnie jak *przedłużenia* trójkąta (względem wierzchołków lub boków).

Jeśli A, B, C są trzema niewspółliniowymi punktami, to płaszczyzną ABC jest ogół punktów należących do trójkąta $[ABC]$ lub któregoś z jego sześciu rozszerzeń. Cztery punkty są *współpłaszczyznowe*, jeśli każdy z nich należy do płaszczyzny wyznaczonej przez pozostałe trzy. W oczywisty sposób definiuje się *półpłaszczyznę* wyznaczoną przez prostą AB na płaszczyźnie ABC.

Dwie proste leżące na tej samej płaszczyźnie i niemające punktów wspólnych nazywane są *równoległymi*. Jeśli AB jest równoległa do CD, to piszemy $AB \parallel CD$. Jeśli proste AB i CD są równoległe lub identyczne, to piszemy $AB \sim CD$.

Jeśli $AB \parallel CD$ oraz $BC \parallel DA$, to A, B, C, D tworzą *równoległobok*, którego *przekątnymi* są $[AC]$ i $[BD]$.

Niech $[AB]$ będzie odcinkiem. Jeśli istnieje równoległobok $AXBY$, w którym $[AB]$ jest jedną z przekątnych i jeśli druga przekątna przecina $[AB]$ w punkcie M, to M nazywamy *środkiem* odcinka $[AB]$.

Jeśli A oraz B są w sferze S oraz wszystkie punkty przedłużeń odcinka $[AB]$ są poza S, to $[AB]$ jest *cięciwą* sfery S. Wszystkie punkty końcowe wszystkich cięciw sfery S nazywamy *powierzchnią* tej sfery.

Jeśli O jest punktem w sferze S oraz każda para cięciw tej sfery, która przecina się w O, jest parą przekątnych równoległoboku, to O nazywamy *środkiem* sfery S. Każda cięciwa przechodząca przez środek sfery jest jej *średnicą*. Każda jej połowa to *promień* tej sfery.

Odcinki $[AB]$ i $[CD]$ nazywamy *przystającymi*, gdy zachodzi jeden z warunków:

1. Jeśli $[AB]$ i $[CD]$ są na tej samej prostej, to albo $[AB] = [CD]$, albo środek $[AC]$ jest równy środkowi $[BD]$, albo środek $[AD]$ jest równy

środkowi $[BC]$, a jeśli leżą na prostych równoległych, to są przeciwległymi bokami równoległoboku.

2. Jeśli mają one wspólny punkt końcowy (lub środek), ale nie leżą na tej samej prostej, to są promieniami (lub średnicami) tej samej sfery.

3. Jeśli nie leżą one na tej samej prostej lub na prostych równoległych, to istnieją odcinki $[OX]$ oraz $[OY]$, które są przystające do nich na mocy warunku 1) lub wzajem przystające na mowcy warunku 2).

Pierwszy warunek związany jest z *przesunięciami*, a drugi z *obrotami*. Jeśli AB przystaje do CD, to piszemy $AB \equiv CD$.

Jeśli przekątne równoległoboku są przystające, to równoległobok ten nazywamy *prostokątem*, a trójkąt tworzący połowę prostokąta nazywamy *trójkątem prostokątnym*.

Dwie proste, które przecinają się w punkcie O nazywamy *prostopadłymi*, jeśli każdy odcinek, który łączy punkt jednej z nich z punktem drugiej jest prostokątem, którego jednym z wierzchołków jest O.

Wybieramy ustaloną prostą OU, którą nazywać będziemy *prostą liczbową*, gdzie O jest punktem *zero*, zaś U jest punktem *jednostki*. Ustalenie tej prostej pozwala na wprowadzenie operacji arytmetycznych oraz porządku:

1. Jeśli A i B są dowolnymi punktami na prostej liczbowej OU i jeśli X jest takim punktem na tej prostej, że środek OX równy jest środkowi AB, to X nazywamy sumą A i B i piszemy $X = A + B$.

2. Niech A i B będą dowolnymi punktami na prostej liczbowej OU, a P dowolnym punktem poza tą prostą. Jeśli prosta przez B równoległa do UP przecina OP w Q, a prosta przez Q równoległa do PA przecina OU w Y, oraz jeśli ten punkt Y jest niezależny od wyboru punktu pomocniczego P, to Y jest nazywany *iloczynem* A i B; piszemy wtedy: $Y = A \times B$.

3. Jeśli A i B są dowolnymi punktami na prostej liczbowej OU i jeśli kierunek od A do B jest taki sam jak kierunek od O do U, to mówimy, że A *poprzedza* B i piszemy: $A < B$.

Jeśli X jest takim punktem, że każda sfera, która zawiera A, B, C, D, zawiera także X, to mówimy, że X należy do *czworościanu* $ABCD$. W oczywisty sposób definiuje się *wierzchołki*, *krawędzie* oraz *ściany* czworościanu, które łącznie tworzą jego *brzeg*. Zapis $(ABCD)$ oznacza *wnętrze* czworościanu $[ABCD]$, z pominięciem punktów jego brzegu.

W analogiczny sposób, jak w przypadku trójkąta definiuje się czternaście rozszerzeń czworościanu (względem czterech wierzchołków, sześciu krawędzi oraz czterech ścian).

Jeśli A, B, C, D są czterema punktami nieleżącymi na tej samej płaszczyźnie, to *przestrzeń* jest złożona z punktów, należących do czworościanu $[ABCD]$ lub jego czternastu rozszerzeń.

Prosta i płaszczyzna, lub dwie płaszczyzny są *równoległe*, jeśli nie mają punktów wspólnych.

Można już przedstawić postulaty systemu Huntingtona, wedle proponowanego przez niego podziału.

Prawa ogólne dotyczące sfer i punktów

Postulat 1. Niech A, B, C będą sferami. Jeśli A jest wewnątrz B, a B wewnątrz C, to A jest wewnątrz C.

Postulat 2. Jeśli A jest wewnątrz B, to A i B są różne.

Postulat 3. a) Jeśli klasa sfer, które zawierają punkt A jest taka sama jak klasa sfer, które zawierają punkt B, to $A = B$. b) Jeśli klasa punktów w sferze S jest taka sama jak klasa punktów w sferze T, to $S = T$.

Prawa ogólne dotyczące prostej

Postulat 4. Jeśli X jest punktem odcinka $[AB]$, to $[AB]$ jest *prostą sumą* odcinków $[AX]$ oraz $[XB]$.

Postulat 5. Jeśli dwie proste mają dwa punkty wspólne, to są identyczne.

Prawa ogólne dotyczące płaszczyzny

Postulat 6. Jeśli X jest punktem trójkąta $[ABC]$, to $[ABC]$ jest ‘prostą sumą’ trójkątów $[ABX]$, $[ACX]$ praz $[BCX]$.

Postulat 7. Jeśli odcinek $[XY]$ przecina odcinek $[AB]$, to trójkąty $[ABX]$ oraz $[ABY]$ nie mają punktów wspólnych oprócz punktów należących do odcinka $[AB]$.

Postulat 8. Jeśli dwie płaszczyzny mają trzy wspólne punkty niewspółliniowe, to są identyczne.

Prawa ogólne dotyczące prostych równoległych

Postulat 9. Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są albo równoległe do siebie, albo identyczne.

Postulat 10. Jeśli AB i CD są prostymi równoległymi, to żaden z czterech punktów A, B, C, D nie leży w trójkącie utworzonym przez pozostałe trzy.

Postulat 11 (Postulat czterech punktów). Niech A, B, C, D będą czterema punktami, z których żadne trzy nie są współliniowe oraz niech A', B', C', D' będą innymi czterema punktami, z których żadne trzy nie są współliniowe. Rozważmy dwa układy sześciu prostych, które wyznaczają te punkty:

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD \text{ oraz } A'B', A'C', A'D', B'C', B'D', C'D'.$$

Jeśli pierwsze pięć prostych z pierwszego układu (wziętych w podanym porządku) jest równoległych do pierwszych pięciu prostych z drugiego układu (wziętych w podanym porządku), to również szósta prosta z pierwszego układu jest równoległa do szóstej prostej z układu drugiego. Inaczej mówiąc, zachodzi implikacja: jeśli $AB \sim A'B'$, $AC \sim A'C'$, $AD \sim A'D'$, $BC \sim B'C'$, $BD \sim B'D'$, to $CD \sim C'D'$.

Huntington pisze, że ten ostatni postulat zasugerowany został przez Schurra i odgrywa rolę szczególnej postaci twierdzenia Desarguesa, z której korzystał Hilbert.

Prawa ogólne dotyczące przystawania

Postulat 12. Jeśli $AB \equiv CD$ oraz $CD \equiv EF$, to $AB \equiv EF$.

Postulat 13. Jeśli A oraz X są punktami na powierzchniach dwóch koncentrycznych sfer leżącymi na jednym promieniu, a B oraz Y są punktami na powierzchniach dwóch koncentrycznych sfer leżącymi na innym promieniu, to $[AX] \equiv [BY]$.

Postulat 14. Niech A, B, C, X będą czterema punktami, z których pierwsze trzy są współliniowe, a A', B', C', X' będą innymi czterema punktami, z których pierwsze trzy są współliniowe. Rozważmy dwa układy sześciu odcinków wyznaczonych przez te punkty. Wtedy jeśli:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', AX \equiv A'X', BX \equiv B'X',$$

to również $CX \equiv CX$.

Huntington pisze, że postulat 14 odpowiada założeniu poczynionemu przez Veblena w jego aksjomatycznym ujęciu geometrii z 1911 roku.

Prawa ogólne dotyczące przestrzeni

Postulat 15. Jeśli X jest punktem czworościanu $[ABCD]$, to $[ABCD]$ jest ‘sumą prostą’ czterech czworościanów $[ABCX]$, $[ABDX]$, $[ACDX]$, $[BCDX]$.

Postulat 16. Jeśli odcinek $[XY]$ przecina trójkąt $[ABC]$, to czworościany $[ABCX]$ oraz $[ABCY]$ nie mają punktów wspólnych oprócz punktów należących do $[ABC]$.

Postulat 17. Jeśli $ABCD$ jest przestrzenią, to każdy punkt należy do tej przestrzeni.

Postulat 18. Jeśli prosta XY jest równoległa do płaszczyzny ABC, to żaden z pięciu punktów A, B, C, X, Y nie należy do czworościanu utworzonego przez pozostałe cztery.

Huntington pisze, że postulaty 15 i 16 powodują ograniczenie rozważań geometrycznych do trzech wymiarów.

Postulaty egzystencjalne

Postulat E1. W klasie K istnieją co najmniej dwa różne punkty.

Postulat E2. Jeśli AB jest prostą, to istnieje punkt X poza tą prostą.

Postulat E3. Jeśli AB jest prostą, a C punktem na niej nieleżącym, to istnieje punkt X taki, że CX jest równoległa do AB.

Postulat E4. Jeśli $[AB]$ jest odcinkiem w systemie, w którym można rysować proste równoległe (czyli spełniającym E3), to na każdej półprostej OP istnieje punkt X taki, że $[OX] \equiv [AB]$.

Postulat E5. Jeśli $S_1, S_2, S_3, \ldots$ jest nieskończonym ciągiem sfer, z których każda leży wewnątrz poprzedniej, to istnieje punkt, który leży w nich wszystkich.

Postulat E6. Jeśli jakakolwiek sfera ma środek, to każda sfera ma środek, o ile nie jest punktem.

Postulat E7. Jeśli ABC jest płaszczyzną, to istnieje co najmniej jeden punkt poza tą płaszczyzną.

W komentarzach do postulatów egzystencjalnych Huntington pisze, że:

1. Postulat E3 dotyczy tych systemów, w których można rysować proste równoległe. Tylko w takich systemach niektóre definicje dotyczące przystawania mają sens.

2. Postulat E5 jest modyfikacją aksjomatu Dedekinda, dotyczącego zbiorów punktów na prostej.

3. Postulat E6 jest konieczny z tego względu, że pojęciem wyjściowym jest pełna sfera (*solid sphere*), a nie punkt.

4. Postulat E7 gwarantuje, że w uzyskanym systemie geometrii mamy do dyspozycji trzy wymiary.

Podane wyżej definicje ilustruje Huntington poglądowymi rysunkami, natomiast przy poszczególnych postulatach podaje numery definicji występujących w nich pojęć. Wspomniałem już, że Huntington znał i cenił notację logiczną Peana i deklarował, że stosował ją w przygotowywaniu dowodów. Nie użył jej w sformułowaniu definicji oraz postulatów, być może dlatego, aby dostosować się do ówczesnego stylu pisania tekstów matematycznych.

W rozdziale trzecim swojej rozprawy Huntington przedstawia 47 twierdzeń. Przy każdym z twierdzeń zaznaczono, z których postulatów korzysta jego dowód. W przypadku twierdzeń nieco trudniejszych szczegółowe dowody przedstawione zostały w dodatku na końcu rozprawy. Twierdzenia podzielone zostały ze względu na pojęcia, których dotyczą: sfery i punkty, linia prosta, płaszczyzna, proste równoległe, przystawanie i prostopadłość, prosta liczbowa, współrzędne na płaszczyźnie, przestrzeń. Ostatnie z twierdzeń ustala kategoryczność systemu.

Rozdział czwarty rozprawy przedstawia dowody niezależności wszystkich postulatów. Huntington wykorzystuje rozmaite konstrukcje geometryczne oraz arytmetyczne dla budowania kontrprzykładów potrzebnych w dowodach niezależności. Pokazuje, że postulaty 1–18 tworzą układ niezależny oraz że postulaty E1–E7 także tworzą układ niezależny, a ponadto są niezależne od postulatów 1–18. Niektóre z podanych kontrprzykładów są dość oryginalne: Huntington rozważa np. sfery oznaczone na czerwono i niebiesko lub układy „jajowatych" brył wypukłych (*egg-shaped convex solids*). Jeden z kontrprzykładów wydaje się dość trudny:

> *Example 11.* To construct example for Postulate 11, consider first an ordinary plane, with all its circles, points, and lines, and suppose the interior of a part of this plane – say a square $ABCD$ – is stretched or deformed in such a way that all the points within the square are crowded towards one corner C, without altering their relations of order, or causing any break in continuity. In this deformed plane, by a circle or line we mean, of course, a figure which was a true circle or line before the deformation. Secondly, consider another plane, containing a square $APCQ$ without any deformation, and place the two planes so that they intersect along the line AC.
>
> Then as our class K we take all the circles that lie in these two planes, and as our relation R, the ordinary relation of inclusion.
>
> In this system, Postulates 1–10 are clearly satisfied, but not Postulate 11. To see that Postulate 11 is not true, let PQ meet AC in M, while the deformed line BD meets AC in a different point N; then B, P, D, Q cannot be coplanar; but if Postulate 11 were true, we should have a right to infer, from a consideration of the 'four-points' $ACBP$ and $CADQ$,

> that $BP \parallel DQ$. All the other general laws, 12–18, are satisfied (many of them vacuously). (Huntington 1913, 551)

Opracowano wiele systemów geometrycznych, w których pojęciem pierwotnym nie jest punkt, ale np. obszar, sfera, bryła. Niewątpliwie do najbardziej znanych należy propozycja Tarskiego geometrii brył (Tarski 1929). Współcześnie obserwujemy coraz to nowe propozycje tego typu, m.in. należące do *mereotopologii*.

1.4.3. Prace dotyczące porządku

Huntington i Kline podali możliwości opisu własności relacji *leżenia między* poprzez stosowny układ postulatów (Huntington i Kline 1916). Ich praca nawiązuje do propozycji Pascha. Większą cześć artykułu zajmują dowody niezależności poszczególnych postulatów. Za ciekawe uważam fakt, że dowody te są przedstawione w postaci symbolicznej, z użyciem notacji Peana. Ponadto, autorzy zaznaczają np., ile razy dany postulat został wykorzystany w konkretnym dowodzie, co ukazuje dokładniej strukturę dowodów.

Monografia Huntingtona *The Continuum and Other Types of Serial Order with an Introduction to Cantor's Transfinite Numbers* (Huntington 1917) jest rozszerzoną wersją wcześniejszej pracy, *The Continuum as a Type of Order: an Exposition of the Modern Theory; with an Appendix on the Transfinite Numbers*, opublikowanej w 1905 roku w *Annals of Mathematics*. Praca ta odegrała niezwykle ważną rolę: była traktowana w ameryce jako doskonałe przystępne wprowadzenie do teorii mnogości Cantora. Huntington omawia w niej kolejno: zbiory skończone i nieskończone, ogólne własności porządków, szczególne typy porządków (porządki typu: ω, η, θ), kontinua, zbiory dobrze uporządkowane oraz pozaskończone liczby porządkowe i kardynalne. Huntington podkreśla rolę porządku w charakterystyce kontinuum:

> The main object of this book is to give a systematic elementary account of the modern theory of continuum as a type of serial order – a theory which underlies the definition of irrational numbers and makes possible a rigorous treatment of the real number system of algebra.
>
> The mathematical theory of the continuous independent variable, in anything like a rigorous form, may be said to date from the year 1872, when Dedekind's *Stetigkeit und irrationale Zahlen* appeared; and it reached a certain completion in 1895, when the first part of Cantor's *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* was published in the *Mathematische Annalen*.
>
> While all earlier discussions of continuity had been based more or less consciously on the notions of distance, number, or magnitude, the Dede-

> kind-Cantor theory is based solely on the relation of order. The fact that a complete definition of the continuum has thus been given in terms of order alone has been signalized by Russell as one of the notable achievements of modern pure mathematics; and the simplicity of the ordinal theory, which requires no technical knowledge of mathematics whatever, renders it peculiarly accessible to the increasing number of non-mathematical students of scientific method who wish to keep in touch with recent developments in the logic of mathematics. (Huntington 1917, 1–2)

1.4.4. Algebra logiki

Najczęściej cytowaną pracą Huntingtona jest jego artykuł poświęcony algebrze logiki. Tarski miał zwyczaj podawania tego artykułu jako podstawowego odnośnika do teorii algebr Boole'a. Huntington podaje w nim trzy propozycje zestawów postulatów, które charakteryzują tego typu struktury. Dowodzi też niezależności każdego z tych zestawów. Zacytuję jeden fragment z tej pracy, w którym Huntington odnosi się do metodologii swoich badań:

> Having chosen the fundamental concepts, the next step is to decide on the *fundamental propositions*, or *postulates*, which are to stand at the basis of the algebra. These postulates are simply *conditions* arbitrarily imposed on the fundamental concepts and must not, of course be inconsistent among themselves. Any set of *consistent* postulates would give rise to a corresponding algebra, – namely the totality of propositions which follow from these postulates by logical deduction. For the sake of elegance, every set of postulates should be free from redundancies; in other words, the postulates of every set should be *independent*, no one of them deducible from the rest. For, if any one of the postulates were a consequence of the others, it should be counted among the derived, not among the fundamental propositions. Furthermore, each postulate should be as nearly as possible a *simple statement*, not decomposable into two or more parts; but the idea of a simple statement is a very elusive one, which has not yet been satisfactorily defined, much less attained.
>
> In selecting a set of consistent, independent postulates for any particular algebra, one has usually a considerable freedom of choice; several different sets of independent postulates (on a given set of fundamental concepts) may serve as the basis of the same algebra; the only logical requirement is that every such set of postulates must be deducible from every other. (Huntington 1903, 290)

1.5. Oswald Veblen

Oswald Veblen (1880–1960) studiował na University of Iowa oraz na Harvard University. Jego rozprawa doktorska (pisana pod kierunkiem E.H. Moore'a) dotyczyła systemu aksjomatów dla geometrii rzutowej. Wspólnie z J.W. Youngiem napisał też monografię *Projective Geometry*. Zajmował się również podstawami *Analysis Situs* oraz geometrią różniczkową. Wprowadził *funkcje Veblena*, za pomocą których charakteryzuje się *liczby porządkowe Veblena*. Nauczał matematyki w Princeton od 1905 do 1932. Przyczynił się do utworzenia Institute for Advanced Study in Princeton. Piastował wiele ważnych funkcji w amerykańskich instytucjach matematycznych. Jest także wspominany jako życzliwy opiekun wielu matematyków amerykańskich, których kariery wspomagał merytorycznie.

Prace Oswalda Veblena w *Transactions of the American Mathematical Society* z omawianego okresu dotyczą geometrii:

1. Veblen, O. (1904). A system of axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 5: 343–384.

2. Veblen, O. (1905). Definition in terms of order alone in the linear continuum and in well-ordered sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 165–171.

3. Veblen, O. (1906). The Foundations of Geometry. *Popular Science Monthly*, 68: 21–28.

4. Veblen, O. (1911). The foundations of geometry. W J.W.A. Young, editor, *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. Longmans, Green, London, 3–54.

5. Veblen, O. (1925). Remarks on the foundations of geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 31: 121–141.

6. Veblen, O., Maclagan-Wedderburn, J.H. (1907). Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries. *Transactions of the American Mathematical Society*, 8: 379–388.

1.5.1. System aksjomatów dla geometrii

W pracy Veblen 1904 autor zajmuje się kilkoma systemami geometrii: euklidesową, rzutową oraz metryczną.

Pojęciami pierwotnymi dla systemu geometrii euklidesowej w ujęciu Veblena są: *punkt* oraz *porządek* (trójargumentowa relacja *leżenia między*). Pojęcia te są charakteryzowane przez układ dwunastu postulatów, w niektórych postulatach występują pojęcia wprowadzone na drodze definicji. Oto owe postulaty:

1. Istnieją co najmniej dwa różne punkty.
2. Jeśli punkty A, B, C są w porządku ABC, to są również w porządku CBA.
3. Jeśli punkty A, B, C są w porządku ABC, to nie są one w porządku BCA.
4. Jeśli punkty A, B, C są w porządku ABC, to A jest różny od C.
5. Jeśli A oraz B są dowolnymi różnymi punktami, to istnieje punkt C taki, że A, B, C są w porządku ABC.
6. Jeśli punkty C i D (gdzie $C \neq D$) leżą na prostej AB, to A leży na prostej CD.
7. Jeśli istnieją trzy różne punkty, to istnieją trzy punkty A, B oraz C, które nie są w żadnym z porządków: ABC, BCA lub CAB.
8. Jeśli trzy różne punkty A, B i C nie leżą na tej samej prostej, a D i E są punktami w porządkach BCD oraz CEA, to istnieje punkt F, który jest w porządku AFB i taki, że D, E oraz F leżą na tej samej prostej.
9. Jeśli istnieją trzy punkty nieleżące na tej samej prostej, to istnieje płaszczyzna ABC taka, że istnieje punkt D nieleżący w płaszczyźnie ABC.
10. Jeśli istnieją cztery punkty nieleżące ani na tej samej prostej ani na tej samej płaszczyźnie, to istnieje przestrzeń $ABCD$ taka, że nie istnieje punkt E, który byłby niewspółliniowy z dwoma punktami przestrzeni $ABCD$.
11. Jeśli istnieje nieskończenie wiele punktów, to istnieje para punktów AC taka, że jeśli $[\sigma]$ jest dowolnym nieskończonym zbiorem odcinków prostej AC o tej własności, że każdy punkt, który jest punktem A lub punktem C lub punktem odcinka AC jest punktem jakiegoś odcinka ze zbioru $[\sigma]$, to istnieje skończony podzbiór $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ zbioru $[\sigma]$ o tej samej własności.

12. Jeśli a jest dowolną prostą z dowolnej płaszczyzny α, to istnieje punkt C na płaszczyźnie α, przez który przechodzi nie więcej niż jedna prosta w płaszczyźnie, która nie przecina prostej a.

Definicje pojęć występujących w aksjomatach są następujące:

1. Prosta AB (gdzie $A \neq B$) składa się ze wszystkich punktów X, które są w jednym z możliwych porządków: ABX, AXB, XAB. Punkty X, które są w porządku AXB, tworzą *odcinek* AB, zaś A oraz B są wtedy *punktami końcowymi* tego odcinka.

2. Trzy różne punkty nie leżące na jednej prostej są *wierzchołkami trójkąta* ABC, którego *bokami* są odcinki AB, BC, CA, a którego *brzeg* składa się z tych wierzchołków tego trójkąta oraz punktów na jego bokach.

3. Punkt O jest *we wnętrzu* trójkąta, jeśli leży on na odcinku, którego końce są punktami na różnych bokach tego trójkąta. Zbiór wszystkich takich punktów O jest *wnętrzem trójkąta*.

4. Jeśli A, B oraz C tworzą trójkąt, to *płaszczyzna* ABC składa się ze wszystkich punktów, które są współliniowe z dowolnymi dwoma punktami na bokach tego trójkąta.

5. Jeśli A, B, C oraz D są czterema punktami nieleżącymi na tej samej płaszczyźnie, to tworzą one *czworościan* $ABCD$, którego *ścianami* są wnętrza trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB (o ile istnieją te trójkąty), którego *wierzchołkami* są punkty A, B, C i D, a którego *krawędziami* są odcinki AB, BC, CD, DA, AC, BD. Punkty ścian, krawędzi oraz wierzchołków czworościanu tworzą jego *powierzchnię*.

6. Jeśli A, B, C, D są wierzchołkami czworościanu, to przestrzeń $ABCD$ składa się ze wszystkich punktów współliniowych z dowolnymi dwoma punktami ze ścian czworościanu.

Powyższe aksjomaty oraz definicje wymagają pewnych komentarzy:

1. Zamiast mówić, że punkty A, B i C są w porządku ABC, możemy mówić, że B *leży między* A oraz C.

2. Ostatni aksjomat to aksjomat o równoległych. Veblen pisze, że podaje go w wersji, którą zaproponował Burali-Forti.

3. Zwróćmy uwagę, że w przedostatnim aksjomacie mowa o zbiorach, i to zbiorach nieskończonych.

4. Przedostatni aksjomat podany jest w ciekawym sformułowaniu. Sam Veblen tak o tym pisze:

   > The proposition here adopted as the continuity axiom is referred to by SCHOENFLIES as the HEINE-BOREL theorem. So far as I know, it was first stated formally (as a theorem of analysis rather than of geometry) by BOREL in 1895 but is involved in the proof of the theorem of uniform continuity given by Heine in 1871. The idea of its equivalence with the Dedekind cut axiom was the result of a conversation with Mr. N.J. LENNES. (Veblen 1904, 347–348)

5. Aksjomat Archimedesa jest konsekwencją aksjomatu ciągłości.

6. Aksjomat dziesiąty ustala, że rozważana przestrzeń ma trzy wymiary. Jak zauważa Veblen, aksjomat ten jest równoważny aksjomatowi, który w systemach Pascha i Hilberta ma postać:

   Jeśli dwie płaszczyzny α, β mają wspólny punkt A, to mają też wspólny co najmniej jeden punkt B.

7. Dowody niezależności pierwszych ośmiu aksjomatów Veblen przeprowadza z użyciem skończonych zbiorów punktów. Jak zauważa, dowody niezależności pozostałych czterech aksjomatów wymagają jednak rozważenia nieskończonych zbiorów punktów.

8. Aksjomaty Veblena są prostsze od aksjomatów Pieriego lub Hilberta.

9. Pomijam w niniejszym omówieniu tę część rozprawy Veblena, która dotyczy geometrii rzutowej. Veblen wprowadza *elementy idealne* w sposób niezależny od dwóch ostatnich postulatów, omawia zasadę dualności, przekształcenia rzutowe oraz system współrzędnych.

10. Dowód kategoryczności swojego systemu uzyskuje Veblen poprzez przyporządkowanie punktom współrzędnych w ten sposób, że każda prosta pozostaje w odpowiedniości jedno-jednoznacznej ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Veblen twierdzi, że zdefiniował przystawanie (odcinków) w terminach relacji leżenia między. Twierdzenie to spotkało się z krytyką ze strony Enriquesa, na którą Veblen odpowiedział w pracy z 1911 roku. Jednak niezależnie od tego, okazuje się, iż czteroargumentowa relacja przystawania (zachodząca między parami punktów: para (odcinek) AB przystaje do pary (odcinka) CD) nie może zostać zdefiniowana w terminach trójargumentowej relacji leżenia między. To ustalono dopiero trzy dekady później, dzięki pracom Lindenbauma i Tarskiego. Komentarz Smitha zwięźle charakteryzuje te dokonania:

> Consider elementary geometry based on *congruence* δ of point pairs and *betwennness* β of triples, like Alfred Tarski's system. Formulas such as βABC and $\delta ABCD$ should be read, "B kies between A and C" and "pairs A, B and C, D are congruent." As described here, Mario Pieri had shown in [**41**] how to construct a formula φABC involving just δ, and to prove $(\forall A, B, C)[\beta ABC \Leftrightarrow \varphi ABC]$. That is, φ *characterizes* β, and β is definable from δ; it could thus be eliminated from the list of primitive concepts. In [**54**] Oswald Veblen had claimed the reverse: that he had defined δ from β. But in [**2**] Federigo Enriques had objected: Veblen had not. Could δ *be defined from* β *at all?*
>
> Settling this question required a precise definition of *definition*. That was achieved by first adopting as standard some axiom system such as Tarski's, assumed consistent. If ν is a concept and Φ a family of concepts defined in that system, then a first-order phrase mentioning only the concepts in Φ should be called a *definition* of ν in terms of Φ if it provably characterizes ν in the standard system. In the 1935 study [**49**, §1], after considering definitions in general, Tarski noted that indeed, betweenness β *cannot* serve as the sole primitive relation in an axiomatization of elementary geometry with variables ranging over points. His discussion suggests the following argument, based on a technique introduced in 1900 by Alessandro Padoa [**24**, Sec. 16]: any affine transformation that is not a similarity would preserve β, and thus also any concept defined by a first-order phrase solely in terms of β, but it would not preserve the congruence relation δ. (Smith 2010, 484–485)

Smith podaje dalej szczegółowo opisany kontrprzykład przekształcenia, które zachowuje β, lecz nie zachowuje δ. Informuje również o dalszych wynikach dotyczących definiowalności pojęć geometrycznych, m.in.:

1. W 1926 roku Lindenbaum oraz Tarski pokazali, że nie istnieje rodzina Φ relacji dwuargumentowych definiowalnych w standardowym systemie geometrii, która mogłaby posłużyć za rodzinę wszystkich pojęć pierwotnych dla geometrii. Potrzebne są zatem relacje o większej liczbie argumentów (jak w systemie Pieriego lub Tarskiego).

2. W dowodzie powyższego wyniku korzystano z rzeczywistej płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$, ze zwykłym rozumieniem pojęć: leżeć między oraz przystawać. Rozważano relacje dwuargumentowe reprezentowalne w języku opisującym ten system (w logice pierwszego rzędu). Są one, podobnie jak relacja leżenia między oraz relacja przystawania, niezmiennicze na podobieństwa. Pokazano, że jedynie cztery relacje (identycz-

ność, różność, relacja pusta i relacja pełna) są niezmiennicze ze względu na *wszelkie* przekształcenia uniwersum. Ani relacja leżenia między, ani relacja przystawania nie mają jednak tej własności.

3. W logice infinitarnej (z nieskończonymi koniunkcjami oraz alternatywami) można pokazać, że istnieje *jedna* relacja dwuargumentowa, która może służyć za pojęcie pierwotne systemu geometrii, w rodzaju systemu Tarskiego (Pambuccian 1990).

Argumenty użyte przez Lindenbauma oraz Tarskiego opisane są w krótkiej notce Hodgesa (Hodges 2007). Warto zwrócić uwagę, że konstrukcja Lindenbauma wykorzystuje zbiór Vitalego oraz definicje przez indukcję pozaskończoną dla wykazania, że relacja przystawania nie jest definiowalna przez relację leżenia między.

Scanlan zauważa, że nietrafność poglądu Veblena na temat wyżej wspomnianej zależności definicyjnej leżeć może w fakcie specyficznego traktowania definicji przez Veblena: jego definicje – zdaniem Scanlana – zawierają *parametry*, które muszą zostać oddzielnie ustalone. Scanlan cytuje też opinię Tarskiego na omawiany temat:

> [...] when we analyze the argument in [*Veblen 1904*] which is used to justify this claim, we notice that it actually leads to the opposite conclusion – to the statement that [betweenness] cannot serve as the only primitive notion for Euclidean geometry. In fact, in [*Veblen 1904*] it is proved correctly that, in terms of [betweenness], we can define various notions which have the same properties as the ordinary metric notions... except that they are relativized to a few arbitrarily chosen points and vary with these points. Hence it is seen that Euclidean geometry (with any given number of dimensions) has various models in which the relation [betweenness] is the same while the corresponding metric notions differ. (Tarski 1956, 618, n. 3; cyt. za: Scanlan 2003, 311)

Idee geometryczne Veblena były później wielokrotnie rozwijane (zob. np.: Nuut 1929, Sarv 1931, Lumiste 2007).

1.5.2. Idee metalogiczne Veblena

Veblen w 1904 roku w omówionej wyżej rozprawie *A system of axioms for geometry* nawiązuje do pracy Huntingtona w proponowanej przez siebie modyfikacji aksjomatyki Hilberta dla geometrii. Używa już terminu *categoricity*. Podobnie jak Dedekind, uważa, że semantyczna zupełność jest konsekwencją kategoryczności (także bez dowodzenia tej zależności).

W Veblen 1904 stwierdza się, bezpośrednio po omówieniu aksjomatów systemu:

> Inasmuch as the terms *point* and *order* are undefined one has right, in thinking of the propositions, to apply the terms in connection with any class of objects of which the axioms are valid proposition. It is part of our purpose however to show that there is *essentially only one* class of which the twelve axioms are valid. In more exact language, any two classes K and K' of objects that satisfy the twelve axioms are capable of a one-to-one correspondence such that if any three elements A, B, C of K are in the order ABC, the corresponding elements of K' are also in the order ABC. Consequently any proposition which can be made in terms of points and order either is in contradiction with our axioms or is equally true of all classes that verify our axioms. The validity of any possible statement in these terms is therefore completely determined by the axioms; and so any further axiom would have to be considered redundant. Thus, if our axioms are valid geometrical propositions, they are sufficient for the complete determination of euclidian geometry. (Veblen 1904, 346)

Przedostatnie zdanie w tym fragmencie opatrzone jest przypisem: *Even were it not deducible from the axioms by a finite number of syllogisms.* Tutaj termin *syllogism* nie odnosi się do sylogizmów w rozumieniu Arystotelesa, lecz raczej do dowolnych akceptowalnych w ówczesnej matematyce uzasadnień. Można zatem przypuszczać, że Veblen dostrzega różnicę między prawdziwością a dowodliwością. Ta pierwsza własność ma charakter obiektywny, natomiast ta druga jest związana z akceptowanymi przez matematyków metodami uzasadniania. Jedna z ciekawszych uwag Veblena w popularnej pracy z 1906 roku to:

> But if [a proposition] is a consequence of the axioms, can it be derived from them by a syllogistic process? Perhaps not. (Veblen 1906, 28, cyt. za: Awodey i Reck 2002a, 19)

Waga tego stwierdzenia polega na sformułowaniu przypuszczenia, że zależności semantyczne mogą wymykać się adekwatnemu opisowi czysto syntaktycznemu (w terminach dowodu).

W następnym akapicie Veblen wprowadza termin *categorical* oraz dodaje komentarz dotyczący roli definicji:

> A system of axioms such as we have described is called *categorical*, whereas one to which it is possible to add independent axioms (and which therefore leaves more than one possibility open) is called *disjunctive*. The categorical property of a system of propositions is referred

> to by HILBERT in his “Axiom der Vollständigkeit,” which is translated by TOWNSEND into “Axiom of Completeness.” E.V. HUNTINGTON, in his article on the postulates of the real number system, expresses this conception by saying that his postulates are sufficient for the *complete definition* of essentially a single assemblage. It would probably be better to reserve the word *definition* for the substitution of one symbol for another, and to say that a system of axioms is categorical if it is sufficient for the complete *determination* of a class of objects or elements. (Veblen 1904, 346–347)

1.6. Leonard Eugene Dickson

Leonard Eugene Dickson (1874–1954) studiował matematykę na University of Texas at Austin. Doktorat z matematyki uzyskał na University of Chicago. Promotorem był E.H. Moore. Dickson był później promotorem dla kilkudziesięciu innych matematyków. Jego liczne prace naukowe dotyczą teorii grup oraz innych struktur algebraicznych, a także teorii liczb. Jest autorem ważnej trzytomowej monografii *History of the Theory of Numbers* (1919–1923).

Dickson publikował właściwie głownie prace ściśle matematyczne, przede wszystkim w dziedzinie algebry i teorii liczb. Tylko kilka z nich związanych jest bezpośrednio z ustalaniem listy postulatów. W przypadku Dicksona chodzi o postulaty dla grup, ciał, algebr łącznych:

1. Dickson, L.E. (1903). Definitions of a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4: 13–20.
2. Dickson, L.E. (1903). Definitions of a linear associative algebra by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4: 21–26.
3. Dickson, L.E. (1905). Definitions of a group and a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 198–204.

Fenster w następujący sposób charakteryzuje styl pracy Dicksona, pisząc o jego pracach w algebrze i teorii liczb:

> Moreover, although DICKSON had a seemingly sound mathematical theory, he apparently felt compelled to justify further his ideas to his colleagues through his rather pointed rhetoric. In doing so, he made manifest the mathematical aesthetics which served to guide him in this (as well as other) mathematical endeavors. In particular, DICKSON valued a definition of a set of integral elements which coincided with existing concepts

> for specific algebras like the quaternions and the algebraic number fields. Rather than considering a case-by-case study of the associated arithmetic, he desired (and determined) a general theory of arithmetic which applied to *all* algebras. Thus, DICKSON strove for the most far-reaching mathematical concepts and theories possible. He also apparently looked to previous effective mathematical strategies when launching into uncharted territory himself. In this case, he found the principle of enlargement as used by KUMMER and HURWITZ especially beneficial in his developing notion of a set of integral elements. Finally, DICKSON naturally esteemed a theory with wide application, especially in unexpected realms. DICKSON asked a lot of a theory and, in this case, at least, it delivered. (Fenster 1998, 154)

1.7. Robert Lee Moore

Robert Lee Moore (1882–1974) był topologiem, autorem *Foundations of point set topology* (1932). Od niego pochodzi termin *point-set topology*. *Płaszczyzna Moore'a* nazywana jest także *przestrzenią Niemyckiego*. Znana jest również *metoda Moore'a* nauczania matematyki na poziomie uniwersyteckim. Nie był spokrewniony z E.H. Moorem. Jego prace dotyczące interesującej nas tutaj tematyki to:

1. Moore, R.L. (1908). Sets of metrical hypotheses for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 9: 487–512.

2. Moore, R.L. (1912). A note concerning Veblen's axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 13: 74–76.

3. Moore, R.L. (1915). On a set of postulates which suffice to define a number-plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 16: 27–32.

4. Moore, R.L. (1935). A set of axioms for plane analysis situs. *Fundamenta Mathematicae*, 25: 13–28.

R.L. Moore wykazał, niezależnie od E.H. Moore'a, zależność jednego z aksjomatów systemu Hilberta od pozostałych aksjomatów w *Grundlagen der Geometrie*. Jego rozprawa doktorska *Sets of Metrical Hypotheses for Geometry*, pisana pod kierunkiem Veblena, podaje oryginalny zestaw postulatów dla geometrii. W Moore 1915 autor rozwija pewne idee zapoczątkowane przez Veblena w jego pracy poświęconej systemowi postulatów dla kontinuum liniowego oraz dobrych porządków.

Ciekawy system aksjomatów autorstwa Moore'a znajdujemy też w pracy opublikowanej w *Fundamenta Mathematicae* – chodzi w niej o przestrzenie, które składają się z „kawałków", wraz z naturalną operacją „włożenia". Zacytuję krótkie fragmenty ze wstępu do tej pracy, ukazujące motywacje, które kierowały autorem:

> As far as I know, VEBLEN was the first to conceive the idea of basing geometry on a set of axioms in terms of what he called „chunks" (of space). He had this idea as early as 1905 and discussed it with me at that time. In 1913 HUNTINGTON published a paper in which he founded geometry on a set of postulates in terms of „sphere" and „inclusion"; and WHITEHEAD and NICOD have given some thought to related questions.
>
> HUNTINGTON makes much use of what may be termed the convexity of his undefined spatial segments. It is natural that he should do so in founding a *geometry*. The notion of the convexity of these elements is intimately related to the notion of *straight line* which is one of the fundamental elements of *geometry*.
>
> For many years I have endeavored to found point-set theoretic *analysis situs* on the basis of a set of axioms in terms of the notion of what I shall call „piece" and the relation „embedded in". In so far as I was endeavoring to found *analysis situs*, as opposed to *geometry*, I would naturally avoid postulating that these pieces be convex, the notions of convexity and colinearity being foreign to analysis situs. [...]
>
> The set of Axioms 1–8 is satisfied if, speaking *roughly*, the word „piece" is interpreted to mean any limited piece (in the ordinary sense) of the plane and the word „embedded" is interpreted in a natural manner. In such an interpretation, a *piece* of a plane is not regarded as a set of points.
>
> Speaking *accurately*, if S is a plane, Axioms 1–8 are satisfied if the word „piece" is interpreted to mean any connected and limited domain in S (regardless of what sort of boundary it has) and the piece X is said to be embedded in the piece y, if, and only if, y contains x together with its boundary. (Moore 1935, 13–14)

1.8. Inni autorzy

Omówienia prac postulatystów amerykańskich skupiają się przede wszystkim na dokonaniach Oswalda Veblena i Edwarda Huntingtona. Warto jednak dodać, że także inni matematycy amerykańscy pisali „w duchu" grupy postulatystów amerykańskich:

1. B. A. Bernstein (1881–1964). Podał systemy aksjomatów dla: pierścieni boolowskich oraz algebr Boole'a.

2. Earle Raymond Hedrick (1876–1943). Doktoryzował się u Davida Hilberta w 1901 roku. Zajmował się równaniami różniczkowymi oraz funkcjami zmiennej zespolonej.

3. John Robert Kline (1891–1955). Podał ciekawą charakterystykę topologiczną sfery.

4. Henry Maurice Sheffer (1882–1964). Logik amerykański. Zaproponował aksjomatykę algebr Boole'a z użyciem jednego tylko symbolu funkcyjnego (*kreski Sheffera*).

5. John Wesley Young (1879–1932). Współautor (wraz z Oswaldem Veblenem) monografii *Projective Geometry* (1910–1918).

6. Cassius Jackson Keyser (1862–1947). Jako jeden z pierwszych matematyków amerykańskich docenił osiągnięcia w podstawach matematyki uzyskane w Europie. Autor wielu książek z filozofii matematyki.

7. Cooper Harold Langford (1895–1964). Współautor znanej monografii *Symbolic Logic* (1932, współautorem był Clarence Irving Lewis), w której zaproponowano znany system logiki modalnej $S5$.

8. Norbert Wiener (1894–1964). Twórca cybernetyki, matematyk zajmujący się podstawami matematyki, analizą funkcjonalną oraz rachunkiem prawdopodobieństwa.

W porządku chronologicznym wyliczę jeszcze kilka prac innych autorów, przypisanych do szkoły postulatystów amerykańskich. Prace te zawierają ważne i ciekawe wyniki matematyczne, pisane są z zachowaniem standardów metodologicznych, o których wspomniano na początku tego eseju:

1. Royce, J. (1905). The relation of the principles of logic to the foundations of geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6: 353–415.

2. Schweitzer, A.R. (1909). Note on a system of axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 10: 309–314.

3. Sheffer, H.M. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Transactions of the American Mathematical Society*, 14: 481–488.

4. Hedrick, E.R., Ingold, L.I. (1914). A set of axioms for line geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 15: 205–214.

5. Gaba, M.G. (1915). A set of postulates for general projective geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 16: 51–61.

6. Bernstein, B.A. (1916). A set of four independent postulates for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 17: 50–52.

7. Wiener, N. (1920). A set of postulates for fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, 21: 237–246.

8. Langford, C.H. (1926). Some theorems on deducibility. *Annals of Mathematics*, 28: 16–40.

9. Langford, C.H. (1927). Theorems on deducibility. *Annals of Mathematics*, 28: 459–471.

10. Bernstein, B.A. (1934). A set of four postulates for Boolean algebra in terms of the "implicative" operation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36: 876–884.

11. Bernstein, B.A. (1944). Postulate-sets for Boolean rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 55: 393–400.

Nie twierdzę, że jest to kompletna lista prac dotyczących systemów postulatów, tworzonych przez matematyków amerykańskich rozważanego okresu: wypisałem te prace, które dostrzegłem na stronach *Transactions of the American Mathematical Society*. O pracach Langforda wspomnę jeszcze poniżej. Dodam, że za sprawą wyrażanego przez Russella podziwu, spory rozgłos zyskała praca Sheffera dotycząca funktora nazywanego dzisiaj kreską Sheffera.

1.9. Oddziaływanie

Prace postulatystów amerykańskich były znane w Europie, gdzie, jak wiadomo, powstały najważniejsze ówcześnie prace z podstaw matematyki oraz intensywnie rozwijana była logika matematyczna. Omawiane prace postulatystów amerykańskich powstały głównie w pierwszych dwóch dekadach XX wieku, później ich autorzy zajmowali się inną problematyką. Przedstawię najpierw (w wielkim skrócie) ustalenia, które poczynił Michael Scanlan, a następnie przypomnę kilka ustaleń sformułowanych przez Johna Corcorana, a także analizy dokonane przez Steve'a Awodeya i Ericha Recka.

1.9.1. Ustalenia Scanlana

Jak zauważa Scanlan (Scanlan 1991, 999), Alfred Tarski w swojej pracy na temat pojęcia prawdy (Tarski 1935) cytuje jedynie dwóch matematyków amerykańskich, a mianowicie Veblena i Huntingtona. Scanlan wspomina także, że prace Veblena dotyczące geometrii euklidesowej i geometrii rzutowej wzbudziły zainteresowanie logików i matematyków europejskich (m.in. Russella i Hahna). Były też charakteryzowane np. przez Mac Lane'a jako: *a masterful exposition of the axiomatic method (independence and categoricity of axioms), which had extensive influence on the other workers in algebra and geometry* (Mac Lane 1974, 599).

Scanlan porównuje rozprawę Höldera o wielkościach ciągłych (Hölder 1901) z pracą Huntingtona, dotyczącą tej samej problematyki (Huntington 1902). Jedna z różnic odnosi się do dowodów niezależności aksjomatów poprzez konstruowanie stosownych interpretacji. W przypadku Höldera mamy do czynienia z zachowaniem zamierzonej interpretacji niektórych relacji, np. porządku oraz operacji dodawania, zmieniają się jedynie uniwersa interpretacji. Natomiast u Huntingtona nieco wyraźniej, zdaniem Scanlana, postawiony jest problem znajdowania interpretacji:

> The contrast with Huntington's presentation of his independence interpretations makes clear the sort of explicitness that I have in mind. In Huntington [1902] a set of six "postulates" is presented in which the only nonlogical constant is the two-place operation symbol '$\circ$', used for what Huntington calls "a rule of combination." This paper emphasizes presentation of the postulates independent of any interpretation. Huntington's use of the neutral operation symbol '$\circ$' is one indication of this. Stating the postulates in a fashion that is independent of any given interpretation is an extension of the demand that a "proof" be recognizable as such without any use of intuitions. A postulate theorist such as Huntington wanted the postulate set to be similarly recognizable as such independently of any intuitions about the subject matter, and so postulates were presented using logical vocabulary augmented by an explicit list of nonlogical symbols. (Scanlan 1991, 984)

Za frapujące uważa Scanlan to, że choć postulatyści amerykańscy zawsze skrupulatnie dowodzili niezależności badanych postulatów, to jednak nie zajmowali się kwestią wzajemnej definiowalności używanych pojęć:

> Curiously, although the parallel between deducibility from a small number of postulates and definability from a small number of constants was noted by postulate theorists, they never became interested in proving the analog of independence for sets of undefined constants. [Tu następuje

> przypis: That is, they did not use Padoa's method for proving nondefinability of one expression from remaining expressions. Indeed, Padoa's method is explicitly rejected by Veblen [1903, p. 306, note]. Why there was a blind spot among American postulate theorists and other foundational workers of this period for the applicability of Padoa's method is something of a puzzle. One hypothesis is that the assumption, implicit in Padoa's method, that proper definitions are based on the intended interpretation for a theory, conflicted with the generally accepted doctrine of the time (espoused by Padoa himself) that definitions are merely abbrevational conventions.] Moreover, they did not seek a definitional analog for the notion of deductive completeness. This search was taken up in Tarski [1934]. (Scanlan 1991, 986–987)

Dwie następne ważne różnice między podejściem Höldera oraz Huntingtona polegają na tym, że:

1. Huntington stawia i bada problem kategoryczności swojego systemu postulatów, zaś Hölder tego nie czyni.

2. Huntington oddziela wyraźnie badania w podstawach matematyki od epistemologii matematycznej. Podobnie czynią pozostali postulatyści amerykańscy. Natomiast Hölder we wstępnej części swojej rozprawy dyskutuje problem oczywistości oraz niedowodliwości aksjomatów arytmetycznych.

Scanlan zauważa dalej, że omawiane prace wolne są od wszelkich rozważań filozoficznych:

> There is no suggestion in the work of American postulate theorists of a particular philosophic attitude towards the epistemic foundations of mathematics. The point that seems to have interested postulate theorists was that it was becoming possible to formulate and study mathematical theories, or at least postulate sets for such theories, with the clarity and rigor of ordinary mathematical studies. In Huntington [1902], what the postulate set is and what it counts as an interpretation of such a postulate set is presented with as much clarity as, for example, the notion of a "group" is presented in ordinary mathematical discourse. (Scanlan 1991, 989)

Artykuł Scanlan 1991 porównuje też rozprawę Veblena o geometrii (Veblen 1904) z dziełem Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899). Zarówno Veblen, jak i E.H. Moore studiowali niezwykle uważnie dzieło Hilberta. W swojej recenzji *Grundlagen der Geometrie* Veblen pisze:

> Hilbert's work on axioms, indeed, can hardly be called more original or elegant than that of the Peano School in Italy. He has, however, by an attractive form of presentation drawn the attention of the entire mathematical world to one of the most fertile fields of investigation both for the technical mathematicians and for a philosopher. (Veblen 1903, 308)

Veblen uważał swoje ujęcie geometrii jako wpisujące się raczej w trend zapoczątkowany przez Pascha i Peana niż w ten, który reprezentował Hilbert oraz Pieri. Scanlan stwierdza, że podejście Veblena było nakierowane bardziej na aspekty metateoretyczne niż podejście Hilberta. Veblen pokazuje, jak oprzeć geometrię na dwóch pojęciach pierwotnych oraz charakteryzujących je aksjomatach. Troszczy się o własności systemu geometrii jako całości, rozważając nie tylko problem niezależności aksjomatów (podobnie jak Hilbert), ale także problem jego kategoryczności. Z kolei Hilbert poświęca szczególną uwagę temu, jak poszczególne aksjomaty jego systemu wykorzystywane są w dowodach twierdzeń geometrii.

Scanlan podkreśla pewne różnice w rozumieniu pojęcia niesprzeczności przez Huntingtona oraz Veblena. Ten pierwszy wiąże niesprzeczność z istnieniem interpretacji:

> [...] it is sufficient to show the existence of any system ... in which all the postulates are satisfied; for then the postulates themselves and all their logical consequences express properties of this system, and must therefore be free from contradiction (since no really existent system can have contradictory properties). (Huntington 1905, 224)

Podejście Veblena jest nieco subtelniejsze. Zgadza się on z traktowaniem dowodów niesprzeczności przez podanie interpretacji jako jedynie relatywnych (takie było stanowisko Hilberta). Scanlan zauważa, że dla Veblena oraz Hilberta istnienie obiektów matematycznych oznacza niesprzeczność teorii, podczas gdy dla szkoły Peana, niesprzeczność teorii oznaczała istnienie obiektów matematycznych. Rozterki Veblena widoczne są w cytowanym przez Scanlana fragmencie:

> How shall we use the word exist? There is a technical usage which says that a mathematical science ... exists if no two propositions deducible from its hypotheses are in contradiction. In this sense (due to Hilbert) we are able to say that all mathematical science exist if arithmetic exists – i.e., the science of positive whole numbers. One is tempted to say that surely the whole numbers $1, 2, 3, \ldots$ etc. exist. But what would be the content of such statement? And do we know these numbers except by the propositions which we wish to prove consistent? (Veblen 1905, 754–755, cyt. za: Scanlan 1991, 992)

Świadomość względnego charakteru dowodów niezależności systemu aksjomatów metodą interpretacji jest wyraźnie widoczna w pracach Veblena. Scanlan wskazuje na to, pisząc:

> Thus in Veblen [1903], when he gives an independence interpretation for the Euclidean parallel postulate which has as a domain the points of a sphere, he says of the axioms other than the parallel postulate under this interpretation, "unless the Euclidean geometry is at war with itself, these propositions contain no self-contradiction..." [p. 305]. This qualification, which makes the success of the independence proof depeend on the lack of "self-contradiction" in Euclid's geometry, seems to reflect the Hilbertian point of view which makes proofs by interpretation of independence and consistency relative to the consistency of some given theory. (Scanlan 1991, 993)

Scanlan zauważa, że Veblen nietrafnie przypisuje Hilbertowi świadomość kategoryczności jego systemu geometrii z 1899 roku, która miałaby być wyrażona – w opinii Veblena – przez aksjomat zupełności w systemie Hilberta. Nietrafność poglądu Veblena, zdaniem Scanlana, polega tu na tym, że:

1. Hilbert w ogóle nie mówi o izomorfizmie modeli swojego systemu geometrii.

2. Aksjomat zupełności miał w systemie Hilberta gwarantować *ciągłość* rozważanych obiektów geometrycznych. Aksjomat V, nazywany przez Hilberta aksjomatem ciągłości (aksjomatem Archimedesa) nie gwarantował owej ciągłości. Modelem systemu był wszak, rozważany przez samego Hilberta, model zbudowany z wykorzystaniem liczb algebraicznych, a więc model przeliczalny. Taki model nie może zawierać obiektów ciągłych typu kontinuum.

Podkreślić jednak należy, że w pracach Veblena widać wzrastającą świadomość różnic między semantyczną relacją wynikania a możliwościami wykazywania wynikania metodami dedukcyjnymi. Widać nawet, że Veblen zastanawia się nad kwestią niezupełności dedukcyjnej.

Podsumowując swoje uwagi o znaczeniu i wpływie prac postulatystów amerykańskich, Scanlan pisze:

> At the beginning of the 1930's, thanks to the efforts of Huntington, Veblen, and other American postulate theorists, a worker in foundations of mathematics could confidently point to a wealth of axiomatized mathematical theories as the "mathematics" to which precise systems of formal deduction and other metatheoretical concepts could be applied. One

telling example of such use of the works of American postulate theorists is in Tarski's "Wahrheitsbegriff" [1935], where the only two American mathematicians whose work is cited are Huntington and Veblen. (Scanlan 1991, 999)

Artykuł Scanlan 2003 jest kontynuacją Scanlan 1991: na początku autor zwięźle przypomina pewne fakty dotyczące wyników postulatystów amerykańskich, a następnie szczegółowo omawia prace Langforda, dotyczące zupełności teorii porządku (liniowego, gęstego, bez końców).

Z pierwszej części tego artykułu przywołam następujące uwagi Scanlana, podsumowujące działalność postulatystów amerykańskich i wskazujące na ich ewentualny wpływ na późniejsze prace Tarskiego:

I want to emphasize three ways in which postulate theorists' treatments of investigations into foundations of mathematical theories had aspects which were sympathetic with the standpoint Tarski took in his own metatheoretic research.

(1) Postulate sets were unconnected with a specific philosophical program. More exactly, there were no suggestions that they involved an analysis of the fundamental concepts of the theory, nor that they had a special epistemic status such as being 'logical truths' or 'finitistic'. This is exemplified in the common practice of postulate theorists, e.g. Huntington, of giving multiple sets for the same theory in a single paper and studying the relations between them in terms of interdefinability and interdeducibility. A similar attitude is evidenced by Tarski, perhaps most clearly in his investigations of various first-order formulations of Euclidean geometry and their interrelations. [...]

(2) Postulate sets were also non-foundational in a different sense. That is, they were presented for individual mathematical theories, such as various geometries, for linear order, for the continuum, for various algebras, without any suggestion that they might be unified into a single theory that would encompass all the diverse theories that were parts of mathematics. For instance, there was no suggestion made by postulate theorists that mathematical theories could all be viewed as subtheories of set theory. [...]

(3) The metatheoretic investigations of postulate theorists focused almost exclusively on the use of interpretations for the vocabulary of the postulate set to prove consistency, independence and, in some cases, completeness of the axioms. They were, of course, not the first researchers to use alternate interpretations of mathematical postulates for this purpose nor were they the only ones doing so in the early decades of the twentieth century. Nevertheless, their metatheoretic work focused almost exclusively on these areas and their work thus put this methodology in sharp focus. It was in exactly these areas that Tarski's work of

> the 1930s focused on developing a theoretical framework (that is a mathematical theory) for these practices. (Scanlan 2003, 313–314)

Druga część artykułu Scanlan 2003 przedstawia w szczegółach pracę Langforda dotyczącą gęstych liniowych porządków oraz zawiera przypuszczenia, w jaki sposób praca ta mogła wpłynąć na późniejsze wyniki Tarskiego dotyczące stosowania metody eliminacji kwantyfikatorów.

Powtórzę raz jeszcze, że wspomniani w niniejszym eseju matematycy amerykańscy oddziałali również przez inne swoje prace, nie dotyczące bezpośrednio budowania systemów postulatów. Ta ich twórczość nie jest jednak tematem niniejszych rozważań.

W dalszej części przypomnę niektóre fakty z historii logiki i podstaw matematyki dotyczące wyników uzyskanych już po publikacji głównych prac postulatystów amerykańskich, wiążące się z omawianą w nich problematyką. Nie twierdzę oczywiście, że wszystkie te prace są kontynuacją badań postulatystów amerykańskich ani że wszystkie powstały bezpośrednio pod ich wpływem. Szczególnie interesujące są te wyniki, które wiążą się z zamierzeniami jednoznacznego wyznaczenia (określenia) *modeli zamierzonych* teorii matematycznych.

1.9.2. Inne wybrane komentarze

Do analiz przedstawionych przez Scanlana dodam jeszcze parę uwag odnoszących się do tworzenia pojęć metalogicznych. Jak starano się pokazać w pierwszej części tego eseju, postulatyści amerykańscy formułowali pewne, po części intuicyjne, propozycje w tym zakresie.

Corcoran

John Corcoran podkreśla, że świadomość odróżnienia kategoryczności od zupełności wiąże się obecnie także z rozpoznaniem roli kilku innych pojęć metamatematycznych, np. tych związanych z teorią rekursji, a także z rolą pojęcia zwartości; role te nie były widoczne w badaniach na początku XX wieku (Corcoran 1981, 203):

> Some early postulate theories (e.g. Veblen 1904, 346) were clear about the *conceptual* distinction between characterization and axiomatization *and* about the possibility of an axiomatically inadequate categorical characterization at least to the extent of explicitly mentioning the possibility that a categorical characterization

> need not be a (deductively) complete axiomatization. This possibility, of course, entails the possibility of 'logically' incomplete underlying logics (wherein semantic consequences of a given set of axioms are not deducible as theorems).
>
> At that time, however, there was no suspicion of the idea of recursiveness, nor, *a fortiori*, of the relevance of recursiveness and recursive enumerability to problems of axiomatizability. Now we can see that if the set of truths of an interpretation is not recursively enumerable then there is no way to give a complete axiomatization even if the logic is complete. It follows immediately from the Gödel incompleteness result that a (recursive) set of sentences which provides a categorical characterization need not to provide a complete axiomatization. Moreover, in such cases, it follows that there are infinitely many other categorical characterizations each of which provides a better axiomatization in the sense of providing the basis for the deduction of additional theorems not deducible from the first characterization.

Awodey i Reck

Wnikliwą analizę tworzenia się i rozwoju pojęć metalogicznych (przede wszystkim pojęć pełności i zupełności) zawierają niedawno opublikowane prace: Awodey i Reck 2002a, 2002b, Awodey i Butz 2000, Awodey i Carus 2001.

Przypomina się definicje różnych rodzajów zupełności/pełności: pełność relacji $\vdash$ względem relacji $\models$, semantyczna zupełność (teorii), dedukcyjna zupełność (teorii), zupełność względem ustalonego zbioru zdań.

Omawia się aksjomatyki: Dedekinda i Peana (liczb naturalnych), Hilberta (geometrii, ze szczególnym uwzględnieniem roli *Vollständigkeit Axiom*), Dedekinda i Hilberta (liczb rzeczywistych), Huntingtona (liczb rzeczywistych dodatnich), Veblena (geometrii euklidesowej i rzutowej).

Zwraca się uwagę, że między 1910 a 1930 rokiem logicy tacy jak Hilbert, Gödel, Carnap, Tarski nie pracowali w systemie logiki pierwszego rzędu, a raczej w (prostej) teorii typów, a więc w logice wyższego rzędu. Rozwój badań metalogicznych przypisuje się głównie Hilbertowi i Tarskiemu; podkreśla się jednak, że rola dokonań Fraenkla oraz Carnapa w tej dziedzinie pozostaje niedoceniona. W szczególności Fraenkel w *Einleitung in die Mengenlehre* zawarł wiele ważnych uwag dotyczących możliwych rozumień pojęcia zupełności. Stawia on też pytanie o warunki, przy których zupełność implikować może kategoryczność.

Argumentuje się na rzecz logiki wyższego rzędu jako trafnie, adekwatnie przystającej do potrzeb praktyki matematycznej. Prezentuje się w skrócie pewien system logiki wyższego rzędu, w której przeprowadza się nie tylko dowód tego, że kategoryczność implikuje zupełność, ale także pokazuje, przy jakich założeniach zachodzi implikacja odwrotna (argumentacja pochodząca od Dany Scotta).

W wymienionych wyżej pracach proponuje się także nowe w pewnym sensie rozumienie pełności, zupełności oraz kategoryczności – poprzez odwołanie się do semantyk topologicznych (szczegóły techniczne podano w Awodey i Butz 2000, natomiast „ideologia" wraz z paroma przykładami w Awodey i Reck 2002b).

Hintikka

Jaakko Hintikka zwraca uwagę na używanie w metalogice różnych pojęć zupełności (Hintikka 1996, 91–92):

Zupełność deskryptywna. Jest to własność teorii aksjomatycznych polegająca na tym, że teorie te mają tylko modele zamierzone. W przypadku, gdy jest tylko jeden (z dokładnością do izomorfizmu) model zamierzony, własność ta pokrywa się oczywiście z kategorycznością. W charakterystyce tej własności nie występują, jak widać, pojęcia teorio-dowodowe.

Zupełność semantyczna. To własność mogąca przysługiwać aksjomatycznym systemom logicznym i polegająca na tym, że wszystkie zdania prawdziwe rozważanego języka otrzymane być mogą jako twierdzenia z aksjomatów systemu oraz jego reguł wnioskowania. Przy standardowych założeniach dotyczących aksjomatyzacji własność ta oznacza, że zbiór zdań prawdziwych rozważanego systemu jest rekurencyjnie przeliczalny.

Zupełność dedukcyjna. Ta z kolei własność może przysługiwać teoriom aksjomatycznym sformułowanym w jakimś aksjomatycznym systemie logiki. Mamy z nią do czynienia wtedy, gdy dla każdego zdania rozważanego języka w danej teorii udowodnić można (na bazie przyjętej aksjomatyki logicznej) bądź to zdanie, bądź jego negację.

Zupełność Hilbertiańska (określenie Hintikki). Ten rodzaj zupełności związany jest z *Vollständigkeitsaxiom* Hilberta, stwierdzającym, w ogólnym sformułowaniu, że do rozważanego uniwersum nie można dodać żadnych nowych obiektów bez naruszenia pozostałych aksjomatów systemu. Zauważmy, że aksjomat ten podobny jest do *Beschränkheitsaxiom* Fraenkla w jego systemie teorii mnogości, głoszącego, iż nie ma innych zbiorów niż te, których istnienie stwierdzają pozostałe aksjomaty systemu. Ten rodzaj zupełności jest więc pewnym warunkiem dotyczącym w pierwszym rzędzie modeli, a nie systemu logiki czy też teorii aksjomatycznych.

Grzegorczyk

W artykule Grzegorczyk 1962 rozważa się pewne szczególne typy własności zupełności – m.in. *zupełność opisową*. Gdy mamy możliwość *nazwania* wszystkich elementów modelu (np. stałymi indywiduowymi, lub, ogólniej, termami domkniętymi języka teorii), to uzyskujemy dodatkowe możliwości ustalania izomorfizmu między strukturami.

1.9.3. Prace logiczne w Europie

Ograniczę się jedynie do bardzo selektywnie wybranych wyników w logice matematycznej i podstawach matematyki, które – choć nie zawsze bezpośrednio – wiążą się intencjami postulatystów amerykańskich jednoznacznej charakterystyki modeli zamierzonych, czyli do stwierdzeń Veblena i Huntingtona, że proponowane przez nich układy aksjomatów (dla geometrii oraz wielkości ciągłych) opisują jednoznacznie stosowne struktury, z dokładnością do izomorfizmu.

Löwenheim i Skolem

Udowodnione w 1915 roku przez Leopolda Löwenheima, a w innym sformułowaniu w 1920 roku przez Thoralfa Skolema twierdzenie (dzisiaj znane jako dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema) ukazało ograniczenia, jeśli chodzi o kategoryczny opis struktur w logice, która nieco później przybrała kanoniczny kształt logiki pierwszego rzędu. Głosi ono, że jeśli teoria w języku takiej logiki ma model (nieskończony), to ma model przeliczalny. Twierdzenie to nieco później rozszerzył Alfred Tarski: jeśli teoria (bez modeli skończonych) ma model, to ma modele wszystkich mocy nieskończonych. Można krótko powiedzieć, że twierdzenia te ustalają, iż logika pierwszego rzędu nie odróżnia mocy nieskończonych, nie umożliwia kategorycznych opisów. Sensowne pozostaje rozważanie subtelniejszej wersji kategoryczności, czyli kategoryczności w mocy. Mówimy, że teoria jest kategoryczna w mocy nieskończonej κ, jeśli ma ona model mocy κ oraz każde dwa jej modele mocy κ są izomorficzne. W klasycznej i współczesnej teorii modeli uzyskano mnóstwo wyników charakteryzujących to pojęcie oraz jego związki z innymi pojęciami teorii modeli.

Większość prac postulatystów amerykańskich powstała przed opublikowaniem omawianych tu twierdzeń, a więc autorzy ci nie mogli odnosić się do tych wyników.

Fraenkel i Carnap

Abraham Fraenkel rozważał różne rodzaje zupełności, które mogłyby mieć zastosowanie w badaniach nad teorią mnogości. W trzecim wydaniu *Einleitung in die Mengenlehre* (Fraenkel 1928) pisze o następujących propozycjach:

1. *Monomorphie* – zupełność rozumiana jako kategoryczność (izomorficzność wszystkich modeli).

2. *Entscheidungsdefinitheit* – zupełność rozumiana jako rozstrzygalność.

3. *Nichtgabelbarkeit* – zupełność semantyczna, polegająca na tym, że każde dwie interpretacje spełniają dokładnie te same zdania.

Warto w tym miejscu dodać, że w omawianej monografii Fraenkel proponuje też swój *aksjomat ograniczenia*, głoszący, że istnieją tylko te zbiory, których istnienie może zostać dowiedzione w teorii mnogości. Jest to zatem aksjomat ekstremalny, w tym przypadku aksjomat minimalności (podobnie jak aksjomat indukcji w arytmetyce, a odwrotnie niż aksjomat zupełności w *Grundlagen der Geometrie* Hilberta). Ogólna postać takich aksjomatów omawiana jest w pracy Carnap i Bachmann 1936. Autorzy deklarują, że (mylne, ich zdaniem) rozumienie aksjomatów tego typu jako postulatów jedynie metajęzykowych może zostać tak zmodyfikowane, aby rozważane aksjomaty ekstremalne wyrażone były w sposób wyraźny w języku przedmiotowym teorii, na równi z pozostałymi jej aksjomatami. W tym celu konieczne jest właściwe sformułowanie pojęcia *zupełnego izomorfizmu* (*complete isomorphism*), uogólniającego zwykłe pojęcie izomorfizmu. Konstrukcję tę przeprowadzają w teorii typów, jest ona dość skomplikowana. O wiele prostsze ujęcie zaproponowane zostało w tym samym czasie przez Lindenbauma i Tarskiego (Lindenbaum i Tarski 1936).

Zamieszczone w *Untersuchungen zur Allgemeinen Axiomatik* Rudolfa Carnapa jego *Gabelbarkeitssatz* zostało opublikowane w pierwszym numerze *Erkenntnis* w 1930 roku (strony 303–310), w tekście *Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik* (Carnap 1930). Carnap usiłuje pokazać, że pojęcia kategoryczności (w jego terminologii: *Monomorphie*) oraz zupełności (*Nicht-Gabelbarkeit*) pokrywają się zakresowo (a także, że są zakresowo tożsame z rozstrzygalnością – *Entscheidungsdefinitheit*). Próba ta okazuje się później oczywiście nieudana; przyczyny tego niepowodzenia są różnorakie: nieodróżnianie języka i metajęzyka, brak ostrej granicy między składnią a semantyką, nieuprawnione założenie, iż każda niesprzeczna teoria ma model definiowalny w prostej teorii typów. Krytyczne omówienie wspomnianych wyników Carnapa zawiera praca Awodey i Carus 2001.

Projekt Carnapa (inspirowany po części jego lekturą rozważań Fraenkla dotyczących teorii mnogości), choć nieudany, odegrał jednak niezmiernie ważną rolę – przede wszystkim jako inspiracja dla wyników Gödla (Gödel był jedną z niewielu osób, które czytały maszynopis Carnapa). Współcześnie prowadzi się również badania *własności Fraenkla-Carnapa*, związanej z warunkami, przy których zupełność implikuje kategoryczność.

Dość szczegółową analizę wspomnianych prac Fraenkla i Carnapa zawierają opracowania Georga Schiemera: Schiemer 2010a, 2010b, 2012, 2013. W rozdziale drugim monografii Pogonowski 2019 także znaleźć można uwagi na ten temat.

Zermelo

Druga aksjomatyka teorii mnogości podana przez Ernsta Zermela (Zermelo 1930) zawiera wyniki dotyczące możliwości kategorycznego opisu teorii mnogości. Zermelo wprowadza swoje *dziedziny normalne* i postuluje założenie istnienia pozaskończonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych. Rozważa teorię mnogości, w której oprócz zbiorów występują także obiekty „nierozkładalne”, o nieznanej strukturze, *Urelemente*. Pracuje w systemie logiki przypominającym logikę drugiego rzędu (dopuszcza kwantyfikację po funkcjach zdaniowych). Dodany (do systemu z 1908 roku) jest aksjomat ufundowania. Zermelo pisze, że aksjomat ten wymagany jest dla wykluczenia *„zirkelhafte” und „abgründige” Mengen*. Nie zakłada się aksjomatu nieskończoności, jako – wedle słów Autora – nienależącego do *„allgemeinen” Mengenlehre*, ogólnej teorii mnogości. Jak pokazuje się dalej, dziedzina normalna złożona z wszystkich zbiorów skończonych spełnia aksjomaty systemu. Aksjomat wyboru, zakładany jako *zasada logiczna*, nie jest zaliczany do aksjomatów systemu. Zermelo pisze, że aksjomat ten nie może służyć do ograniczania (wielkości) rozważanych dziedzin (*Abgrenzung der Bereiche*). Dodaje, iż we wszystkich dalszych badaniach podstawowy jest fakt, że każdy zbiór można dobrze uporządkować. Podkreśla, że nie należy rozumieć teorii mnogości jako teorii opisującej jakiś jeden zamierzony model. Dowodzi twierdzeń charakteryzujących dziedziny normalne z dokładnością do izomorfizmu, przy uwzględnieniu mocy bazy (czyli ogółu urelementów) i charakterystyki (czyli najmniejszej liczby porządkowej, która nie jest zbiorem w danej dziedzinie normalnej) tych dziedzin. Wskazuje, że wykazana przez niego *niekategoryczność* (dziedziny normalne odpowiadające poszczególnym mocno nieosiągalnym piętrom hierarchii kumulatywnej nie są izomorficzne) jest raczej zaletą teorii mnogości, niż jej wadą, ze względu na intuicje wiązane z pojęciem zbioru.

1.9.4. Niektóre prace matematyczne ówczesne i późniejsze

Postulatyści amerykańscy z pewnością znali wyniki algebraiczne dotyczące grup oraz ciał, udowodnione w XIX wieku. Tego typu struktur jest ogromna różnorodność, a więc ustalanie dla nich zestawów postulatów rzecz jasna nie było tworzone z myślą o jakichkolwiek wynikach dotyczących kategoryczności. W terminach używanych przez postulatystów amerykańskich są to przykłady *disjunctive systems*.

Pewne struktury algebraiczne są jednak wyróżnione, ze względu m.in. na ich powszechne zastosowania, w algebrze, geometrii, analizie. Takimi strukturami są np. $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$ – ciała liczb rzeczywistych oraz zespolonych. Sensowne jest zatem pytanie, czy te struktury (ewentualnie jeszcze inne) mogą zostać wyróżnione poprzez podanie czysto matematycznych własności, które charakteryzują je z dokładnością do izomorfizmu (a więc strukturalnie) lub z dokładnością do elementarnej równoważności (a więc semantycznie).

Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) ciałem uporządkowanym w sposób zupełny. Własność zupełności $\mathbb{R}$ może zostać wyrażona na różne sposoby, na przykład poprzez warunek, iż każdy ciąg rosnący i ograniczony ma kres górny. Ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nie spełnia tego warunku. Ciało $\mathbb{R}$ nie jest algebraicznie domknięte. Jest maksymalnym ciałem archimedesowym. Z kolei ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych jest algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero, którego stopień przestępności nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest równy kontinuum. Można pokazać, że te trzy warunki charakteryzują jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) ciało $\mathbb{C}$.

W czasie, gdy postulatyści amerykańscy publikowali swoje główne prace, znane były charakterystyki Peana i Dedekinda liczb naturalnych: model standardowy tej teorii jest jeden, z dokładnością do izomorfizmu (gdy pracujemy w logice drugiego rzędu). Było też znane twierdzenie Frobeniusa z 1878 roku, głoszące, że każda skończenie wymiarowa algebra z dzieleniem nad ciałem $\mathbb{R}$ jest izomorficzna z jedną z trzech struktur: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ (kwaterniony). Twierdzenie Hurwitza, charakteryzujące w podobny sposób $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oraz $\mathbb{O}$ (oktoniony) zostało udowodnione w 1898 roku, ale opublikowane dopiero w 1923, już po śmierci autora. W 1916 roku Ostrowski udowodnił, że $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$ są jedynymi ciałami zupełnymi względem normy archimedesowej. Warto może dodać, że inne jeszcze twierdzenie Ostrowskiego ustala możliwości wprowadzenia normy w ciele liczb wymiernych – jedynymi takimi normami (zgodnymi z porządkiem oraz własnościami arytmetycznymi) w ciele liczb wymiernych są: zwykła wartość bezwzględna oraz normy p-adyczne (dla dowolnej liczby pierwszej p).

W pewnym związku z powyższymi twierdzeniami o izomorfizmie pozostają także inne jeszcze twierdzenia, ustalające niektóre własności rozważanych ciał, dla przykładu:

Twierdzenie Pontriagina. Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub algebrą topologiczną kwaternionów.

1,2,4,8–twierdzenie (Bott, Milnor, Kervaire). Każda algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych ma wymiar 1, 2, 4 lub 8.

Twierdzenie Hopfa. Każda przemienna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych ma wymiar $\leqslant 2$.

Arytmetyczne kontinuum, gdy określane jest wraz z dodatkowymi strukturami (porządkowymi oraz topologicznymi), zgodnymi z operacjami arytmetycznymi, może zatem zostać scharakteryzowane w sposób jednoznaczny. Wśród wielu ciał, które mogłyby służyć za podstawę systemów liczbowych, pewne są istotnie wyróżnione, nie tylko pragmatycznie, ale właśnie przez wyraźnie podane warunki matematyczne.

Innego typu charakterystykę ciał otrzymujemy dzięki wynikom uzyskanym przez Artina, Schreiera oraz Tarskiego. Pierwsi dwaj rozwinęli teorię ciał formalnie rzeczywistych oraz rzeczywiście domkniętych. Alfred Tarski natomiast udowodnił niezwykle ważny fakt dotyczący ciał rzeczywiście domkniętych: pokazał mianowicie, że ich teoria jest zupełna i rozstrzygalna, wykorzystując technikę eliminacji kwantyfikatorów.

Również w przypadku struktur niearchimedesowych (a więc zawierających elementy nieskończenie małe i nieskończenie duże) dysponujemy twierdzeniami je charakteryzującymi. Uwagi historyczne i wyniki matematyczne zawierają np. prace Ehrlich 2006, 2012.

1.9.5. Wyniki dotyczące niezupełności

Postulatyści amerykańscy nie zajmowali się systemami postulatów dla arytmetyki liczb naturalnych. Można przypuszczać, że uznawali sprawę aksjomatycznego opisu tego uniwersum za rozwiązaną przez propozycje Peana i Dedekinda (oraz Padoa, w przypadku liczb całkowitych). Huntington w artykule bezpośrednio następującym po jego pracy dotyczącej charakterystyki ciągłych wielkości dodatnich proponuje jednak dwa zestawy postulatów, które miałyby charakteryzować liczby naturalne oraz dodatnie liczby wymierne, rozważane z jedną tylko operacją na takich liczbach (Huntington 1902). Huntington wypowiada się dość ostrożnie na temat prezentowanych w swojej pracy wyników:

> Of course this work throws no new light on the fundamental nature of numbers, since the whole system of ordinal numbers is assumed in de-

> fining the sequence of multiplies of any element (12). For discussion of the more fundamental problems, see DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* and the papers of PEANO and PADOA already cited. (Huntington 1902, 280, przypis)

Pierwszy z proponowanych w tej pracy zestawów postulatów obejmuje postulaty 1–5 omówione poprzednio, a zamiast postulatu 6 dodaje warunek: istnieje element E taki, że $x \circ y \neq E$, o ile $y \neq E$. Taki układ postulatów spełnia zbiór liczb naturalnych z operacją dodawania, gdy E interpretujemy jako liczbę 1.

Drugi z tych zestawów obejmuje omówione poprzednio postulaty 1–3 oraz postulat: istnieje element E taki, że każdy z elementów jest pewną wielokrotnością E; inaczej mówiąc, dla dowolnego elementu a istnieje liczba naturalna (ordinal number) m taka, że $mE = a$.

Huntington wykorzystuje tu rekurencyjne definicje dodawania i mnożenia liczb naturalnych oraz operację następnika z systemu Peana. Niesprzeczność tego zestawu postulatów zapewnia ta sama interpretacja, co uprzednio rozważana.

O obu zestawach Huntington dowodzi niezależności ich postulatów. Stwierdza również, że w przypadku każdego z tych zestawów, dowolne dwie ich interpretacje są równoważne, w tym sensie, że są izomorficzne. Oczywiście dowody te opierają się na aksjomatyce Peana, która jest sformułowana w języku drugiego rzędu, jak to ujęlibyśmy dzisiaj.

Huntington stawia następujące pytanie, które jednak pozostawia bez odpowiedzi:

> Both of these sets are complete sets of postulates in the sense defined on p. 264, although one contains six postulates and the other only four. A problem is therefore at once suggested, to which no satisfactory answer has as yet been given, viz., "when several complete sets of postulates define the same system, which shall be regarded as the best?" (Huntington 1902, 280)

Tu oczywiście należałoby określić, co rozumiemy przez *the best*. Może chodzić w takim przypadku np. o złożoność składniową postulatów, ale możliwe, że właściwsze byłoby ich ocenianie ze względu na strukturę dowodów, które z ich pomocą można przeprowadzać.

Jak powszechnie wiadomo, twierdzenia limitacyjne otrzymane w logice XX wieku (Gödla, Rossera, Tarskiego itd.) ukazały wyraźnie, jakie są możliwości i ograniczenia logiki pierwszego rzędu w ustalaniu takich własności metalogicznych, jak zupełność, kategoryczność, definiowalność niektórych pojęć, rozstrzygalność. Ponieważ są to rzeczy powszechnie znane, więc nie ma potrzeby ich tutaj przypominać.

W pracy Tennant 2000 udowodniono *Noncompossibility Theorem*, wraz z pewnymi ważkimi konsekwencjami tego twierdzenia dla refleksji metalogicznych. Bodaj najważniejsze z nich to pokazanie niemożliwości osiągnięcia jednocześnie różnych – pożądanych każdy z osobna – ideałów metodologicznych (w omawianym w artykule przypadku: kategoryczności oraz pewnej słabej wersji pełności).

Autor zwraca uwagę na dwa rodzaje (uprawiania) matematyki: *monomatematykę* oraz *polimatematykę*. Ta pierwsza dotyczy pojedynczej struktury, np. liczb naturalnych, liczb wymiernych, prostej rzeczywistej lub płaszczyzny zespolonej. Mamy więc do czynienia z danym modelem zamierzonym, o którym chcemy udowodnić jakieś interesujące prawdy. W przypadku polimatematyki zajmujemy się klasami struktur o pewnych wspólnych własnościach, grupami, kratami, pierścieniami, przestrzeniami wektorowymi lub topologicznymi. Ten rodzaj matematyki jest więc w pewnym sensie uprawianiem teorii modeli dla ustalonego zbioru aksjomatów.

Metodologia monomatematyki podlega pewnym obiektywnym ograniczeniom. Przyjmowane aksjomaty dotyczące badanej struktury muszą być intuicyjnie oczywiste oraz tworzyć zbiór obliczalny, wyznaczony nie arbitralnie, lecz przez jakiś algorytm. Dowody twierdzeń przeprowadzane w języku o sygnaturze dobranej dla potrzeb mówienia o badanej strukturze muszą być konstrukcjami o naturze skończonej. To samo dotyczy refutacji. To ostatnie pojęcie jest definiowalne poprzez pojęcie dowodu: refutacją zbioru zdań Δ jest dowód sprzeczności z Δ jako zbioru przesłanek. Dowody i refutacje mają być trafne (sound) w tym sensie, że jeśli istnieje dowód φ z Δ, to φ jest prawdziwe w każdym modelu, w którym wszystkie zdania z Δ są prawdziwe; a także jeśli istnieje refutacja zbioru Δ, to nie istnieje model, w którym wszystkie zdania ze zbioru Δ są prawdziwe. Monomatematyk ma zatem do dyspozycji obliczalny zbiór X aksjomatów sformułowanych w języku L z predykatem identyczności i stosownym do „mówienia" o zamierzonym modelu M aksjomatów X. Nazwijmy $=$-literałem każdą formułę, która jest bądź identycznością, bądź negacją identyczności.

Wreszcie, ideałem monomatematyki jest osiągnięcie jednocześnie kategoryczności oraz zupełności. Twierdzenie Tennanta o niewspółmożliwości pokazuje, że ideał ten jest nieosiągalny, niezależnie od używanego języka oraz nawet w przypadku bodaj najsłabszego z możliwych rozumienia pojęcia zupełności, sformułowanego następująco:

Słaba zupełność. Dla każdego rozszerzenia L^* języka L (o skończenie wiele nowych stałych pozalogicznych) istnieje system trafnych refutacji taki, że dla dowolnego obliczalnego i spełnialnego zbioru Y złożonego z =-literałów z L^*, jeśli $X \cup Y$ nie ma modelu, to istnieje refutacja dla skończonego podzbioru zbioru $X \cup Y$.

Warunek ten jest istotnie słabszy od warunku zwartości, a także od klasycznego warunku silnej pełności dla konsekwencji logicznej. Przy pewnych (rozsądnych) ograniczeniach na klasę rozważanych modeli jest on równoważny, na gruncie RCA_0, tj. *recursive comprehension arithmetics*, warunkowi stwierdzającemu, że zbiór zdań prawdziwych jest rekurencyjnie przeliczalny.

Druga z własności metalogicznych występujących w twierdzeniu o niewspółmożliwości to kategoryczność:

Kategoryczność. Każda struktura, w której wszystkie aksjomaty z X są prawdziwe, jest izomorficzna z modelem zamierzonym M.

W warunku powyższym nie nakłada się żadnych ograniczeń na liczbę mogących wchodzić w grę izomorfizmów.

Można już sformułować twierdzenie o niewspółmożliwości podane przez Tennanta:

> Jeśli M jest nieskończoną strukturą przeliczalną, której każdy element jest definiowalny, to M nie może być kategorycznie opisana przez żaden obliczalny zbiór zdań X prawdziwych w M, dla którego zachodzi warunek słabej zupełności.

W dowodzie tego twierdzenia rozważa się zbiór zdań

$$Y = X \cup \{\neg a = t_m : m \in M\},$$

gdzie a jest nową stała, a każdy t_m termem oznaczającym element m. Przypuszczenie, iż Y nie ma modelu, zmusza do uznania, że pewien jego skończony podzbiór Z nie ma modelu. Z warunków na moce Z oraz M, pewien element modelu M nie jest oznaczany przez żaden term występujący w Z. Rozszerzamy model M przyjmując, że a oznacza ten właśnie element i dostajemy w ten sposób model dla Z; sprzeczność. Stąd zbiór Y ma model, ale nie może to być model izomorficzny z M, ponieważ denotacja stałej a jest w nim różna od denotacji każdego z termów t_m i uzyskujemy dowód całego twierdzenia.

1.9.6. Prace Tarskiego

Alfred Tarski wielokrotnie cytował prace postulatystów amerykańskich (Veblena, Huntingtona, Langforda). Nie byłoby rozumne twierdzenie, że Tarski rozwijał ich pomysły – bardziej trafne jest chyba stwierdzenie, że dopiero prace Tarskiego podają odnośne wyniki matematyczne dobrze ugruntowane na podstawie wypracowanej przez niego metodologii badań dedukcyjnych.

Za początek tych prac można uważać wyniki otrzymywane na seminariach Tarskiego w Warszawie w latach akademickich 1926–1927 oraz 1927–1928. To wtedy Tarski analizował prace Skolema i Langforda i opracował szczegółowo metodę eliminacji kwantyfikatorów, która okazała się później niezwykle przydatna w badaniach nad rozstrzygalnością teorii. Tarski pracował wówczas i na początku lat trzydziestych XX wieku nad wypracowaniem metodologii badań dedukcyjnych, co zaowocowało utworzeniem ważnych pojęć metalogicznych, np. pojęć: wynikania logicznego, spełniania, prawdy, relacji elementarnej równoważności i wielu innych.

Tarski przeprowadził też subtelne analizy związane z pojęciem kategoryczności oraz jego związków z innymi pojęciami metalogicznymi. Na uwagę zasługują w tym względzie przede wszystkim trzy prace:

1. Kilka uwag o pojęciach ω-niesprzeczności i ω-zupełności (s. 93–113, w: Tarski 2001).

2. Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów (s. 114–146, w: Tarski 2001).

3. O ograniczeniach środków wyrazu teorii dedukcyjnych (wspólnie z Lindenbaumem, s. 147–157, w: Tarski 2001).

Rozważane przez Tarskiego pojęcia to np. wewnętrzna i absolutna kategoryczność oraz jednoprzekształcalność; mają one pewien związek z zupełnością definicyjną. Tarski dostarcza (jak sam pisze) – w przypadku tego ostatniego pojęcia – teoretycznych podstaw dla metody Padoa; wyniki te były uogólnione przez Betha. Jednym z ważniejszych twierdzeń w drugim z wymienionych wyżej artykułów jest twierdzenie mówiące, że jednoprzekształcalność (czyli, w swobodnym sformułowaniu, istnienie dokładnie jednego izomorfizmu między interpretacjami) implikuje zupełność ze względu na terminy specyficzne. Przypomnę, że system X jest zupełny ze względu na swe terminy specyficzne, gdy nie jest on zawarty w żadnym systemie Y istotnie bogatszym w terminy specyficzne (tj. takim, że Y zawiera terminy specyficzne nieobecne w X oraz terminy te nie są definiowalne na gruncie Y z terminów z X). Dla przykładu: geometria opisowa, czyli teoria relacji *leżenia między*, jest kategoryczna, ale nie jest zupełna ze względu na ten termin specyficzny – nie da się w niej zdefiniować np. *równoodległości dwóch par punktów*. Geometria metryczna, powstająca z opisowej przez dodanie aksjomatyki dla ostatniej z wymienionych relacji, jest zatem istotnie bogatsza w terminy specyficzne od opisowej; jest kategoryczna, ale także nie jest zupełna ze względu na swe terminy specyficzne: np. nie można w niej zdefiniować symbolu oznaczającego wybrany, ustalony punkt. Jeśli do geometrii metrycznej dodamy, jako stałe pozalogiczne, terminy 0 oraz 1 i aksjomat stwierdzający, iż symbole te oznaczają różne obiekty, to otrzymamy system (formalnie odpowiadający arytmetyce liczb rzeczywistych), istotnie bogatszy od geometrii metrycznej i jednocześnie zupełny ze względu na swe terminy specyficzne.

W trzeciej z wymienionych wyżej prac autorzy pokazują m.in., że każda relacja między przedmiotami (indywiduami, klasami, relacjami), która daje się wyrazić za pomocą środków czysto logicznych, jest niezmiennicza ze względu na każde jedno-jednoznaczne przekształcenie uniwersum indywiduów na siebie oraz że fakt ten jest logicznie dowodliwy. Później (w 1959 we Wrocławiu, w 1966 w Londynie) Tarski wykorzysta te wyniki dla charakterystyki pojęcia *stałej logicznej*, wzorowanej na programie Kleina z 1872 roku. Artykuł ten zawiera także precyzyjne uwagi i twierdzenia dotyczące związków między kategorycznością, nierozgałęzionością (zupełnością), rozstrzygalnością oraz *efektywną interpretowalnością w logice*; m.in. podane są warunki, przy których nierozgałęzioność implikuje kategoryczność.

W roku akademickim 1939–1940 Tarski wygłosił na Uniwersytecie Harvarda wykład *Some current problems in mathematics* (polski tekst tego wykładu znajduje się w Tarski 2001, 380–395). Tekst tego odczytu zawiera dodatek, będący streszczeniem – prawdopodobnie drugiego planowanego wykładu z tej serii – *On the completeness and the categoricity of deductive systems*. Ten z kolei tekst zamieszczono w monografii Mancosu 2010. Tarski wprowadza w nim różne rodzaje zupełności teorii:

1. *Zupełność absolutna* (krótko: zupełność): teoria jest zupełna, gdy z dowolnych dwóch zdań sprzecznych, które wyrażone są w języku tej teorii albo jedno albo drugie jest twierdzeniem tej teorii.

2. *Relatywna zupełność*, zwana też *zupełnością ze względu na bazę logiczną*. Wprowadzenie tego pojęcia poprzedza Tarski komentarzem (cytuję z Tarski 2001, 393–394):

   > Zakładamy, że terminy stałe danej teorii podzielone są na dwie klasy: na terminy logiczne i pozalogiczne; wśród tych pierwszych występują co najmniej stałe rachunku zdań oraz kwantyfikatory. Podziałowi temu odpowiada podział zdań języka naszej teorii na zdania logiczne i pozalogiczne, w zależności od tego, czy dane zdanie zawiera jedynie stałe logiczne, czy nie.

> Zakładamy ponadto, że zdania logiczne teorii dają się wyprowadzić z układu aksjomatów logicznych, a zatem że tworzą podteorię, którą będziemy nazywać *bazą logiczną* danej teorii. Podteoria jest z konieczności niezupełna, jeśli tylko jest dostatecznie bogata. Zainteresowani jesteśmy otrzymaniem teorii, która byłaby jak najbliższa teorii zupełnej, z uwzględnieniem, rzecz jasna, wspomnianego ograniczenia. Rozważamy pewien układ zdań pozalogicznych i nazywamy dwa zdania *równoważnymi* ze względu na ten układ, jeśli dowolne z tych zdań jest wyprowadzalne z rozważanego układu wzbogaconego drugim zdaniem. Mówimy, że ten układ jest *zupełny ze względu na swoją bazę logiczną* lub krótko: *relatywnie zupełny*, jeśli dla każdego zdania teorii istnieje zdanie logiczne, które jest mu równoważne za względu na rozważany układ zdań.

3. *Semantyczna zupełność*: układ zdań nazywamy semantycznie zupełnym, jeśli każde zdanie, które daje się wyrazić w języku danej teorii, ma tę własność, że albo ono, albo jego negacja wynika logicznie z rozważanego układu zdań.

Zupełność implikuje relatywną zupełność, a ta z kolei implikuje semantyczną zupełność. Implikacje odwrotne nie zachodzą.

Tarski nazywa układ zdań *semantycznie kategorycznym*, jeśli każde dwa modele tego układu są izomorficzne. Następnie definiuje *relatywną kategoryczność* (*kategoryczność ze względu na bazę logiczną*). W cytowanym streszczeniu wprowadza to pojęcie dla przypadku szczególnego: jednej stałej pozalogicznej, powiedzmy C (oznaczającej klasę lub relację) oraz skończonego układu zdań, których koniunkcją niech będzie $P(C)$. Jeśli X oraz Y są tego samego typu logicznego co C, to zapis $X \sim Y$ oznacza, że X i Y są izomorficzne. Powiemy, że układ zdań jest kategoryczny ze względu na swoją bazę logiczną, gdy do bazy logicznej należy zdanie: dla dowolnych X oraz Y, jeśli $P(X)$ oraz $P(Y)$, to $X \sim Y$. Tarski dowodzi następujących twierdzeń:

1. Każdy układ zdań, który jest kategoryczny ze względu na swoją bazę logiczną, jest też zupełny ze względu na tę bazę.

2. Każdy semantycznie kategoryczny układ zdań jest też semantycznie zupełny.

Wydaje się, że te pojęcia oraz twierdzenia autorstwa Tarskiego w sposób adekwatny (a zarazem ścisły) reprezentują idee, które – w sposób nieformalny – wyrażali Veblen oraz Huntington.

1.9.7. Rozwój teorii modeli

Główne prace postulatystów amerykańskich powstały kilka dekad przed ukonstytuowaniem się teorii modeli jako odrębnego działu podstaw matematyki. W klasycznej teorii modeli znamy cały szereg twierdzeń dotyczących zupełności oraz kategoryczności w mocy różnorakich teorii. Klasyczne pojęcie kategoryczności pochodzi, jak już wspomniano, od Oswalda Veblena. Przed opracowaniem ścisłych podstaw semantyki języków systemów logicznych bywało ono mieszane z pojęciem zupełności (we współczesnym sensie).

Już Georg Cantor pokazał, że teoria gęstego liniowego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego jest $\aleph_0$-kategoryczna. Elementarna teoria nierówności jest też zupełna (Langford 1927), co wykazać można metodą eliminacji kwantyfikatorów, pochodzącą od Skolema. Wynik Cantora wskazuje na wyróżnioną rolę porządku liczb wymiernych wśród wszystkich porządków przeliczalnych. Inspirował on (łącznie z rozważaniami Hausdorffa dotyczącymi η_α-zbiorów) niektóre konstrukcje w ogólnej teorii modeli, np. modele *jednorodne, uniwersalne, nasycone*. Modele nasycone to modele „bogate" semantycznie. Ich przeciwieństwem są „ubogie" semantycznie modele – modele *atomowe*.

Związki między kategorycznością (w mocy) a zupełnością (np. liczba modeli teorii zupełnej nieizomorficznych w poszczególnych mocach, czyli strukturalne zróżnicowanie modeli teorii zupełnej) badane są we współczesnej teorii modeli (badanie *spektrum* teorii, teoria *klasyfikacji*). Ważna współcześnie badana problematyka wiąże się też ze strukturą rodziny zbiorów *definiowalnych* w modelach. W klasycznej teorii modeli mamy m.in. następujące twierdzenie:

Test Łosia-Vaughta. Jeśli T jest teorią niesprzeczną bez modeli skończonych, κ-kategoryczną w pewnej mocy nieskończonej κ, to T jest zupełna.

Test Łosia-Vaughta znajduje zastosowanie dla ustalenia zupełności na przykład następujących teorii (żadna z nich nie ma modeli skończonych, a każda jest w pewnej mocy kategoryczna):

1. Teoria gęstych liniowych porządków bez końców jest $\aleph_0$-kategoryczna.

2. Teoria bezatomowych algebr Boole'a jest $\aleph_0$-kategoryczna.

3. Teorie ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0 (lub p, gdzie p jest liczbą pierwszą) są, na mocy twierdzenia Steinitza, teoriami kategorycznymi w każdej mocy nieprzeliczalnej.

4. Teoria nieskończonych grup przemiennych, których wszystkie elementy mają rząd p, jest κ-kategoryczna dla wszystkich κ.

Oprócz pojęcia zupełności używa się również w teorii modeli innych pojęć (np. modelowej zupełności). Do bardzo ważnych ustaleń należą algebraiczne charakterystyki własności związanych z elementarną równoważnością modeli teorii.

Większość interesujących teorii matematycznych to teorie niezupełne, zawierające zdania nierozstrzygalne. Fakt ten jest optymistyczny poznawczo: nie można twórczości matematycznej powierzyć jedynie bezmyślnym maszynom.

Początek współczesnej teorii modeli datuje się umownie od twierdzenia Morleya, głoszącego, że jeśli teoria jest kategoryczna w jakiejś mocy nieprzeliczalnej, to jest kategoryczna we wszystkich mocach nieprzeliczalnych. Oczywiście nie mogę w tym miejscu omawiać współczesnych ustaleń teorii modeli, warto jednak podkreślić, że problematyka dotycząca kategoryczności oraz zupełności jest stale niezwykle intensywnie badana. Postulatyści amerykańscy byliby prawdopodobnie zdumieni (oczarowani?) uzyskanymi w teorii modeli wynikami, które – choć bardzo już odległe od nieformalnie wprowadzonych przez nich pojęć – stale owocują nowymi twierdzeniami, technikami, ideami.

1.10. Słowo końcowe

Starałem się wskazać w niniejszym eseju, w jaki sposób kształtowało się rozumienie niektórych pojęć metalogicznych (lub, jak kto woli, metamatematycznych). Ograniczyłem się przy tym do grupy prac postulatystów amerykańskich oraz do dwóch pojęć: kategoryczności oraz zupełności. Nieco dokładniej zaprezentowałem systemy geometrii proponowane przez Veblena i Huntingtona.

O genezie pojęć metalogicznych należałoby mówić z nieco szerszej perspektywy, biorąc pod uwagę co najmniej takie czynniki, jak rozwój samej logiki matematycznej oraz wpływ, który na ten rozwój miała matematyka. To jednak zadanie wykraczające poza możliwości tego eseju.

W czasie, gdy postulatyści amerykańscy pisali pierwsze swoje prace, arsenał pojęć metalogicznych był niezwykle skromny. Metoda aksjomatyczna (pomijając geometrię Euklidesa) stawiała dopiero pierwsze kroki. „Oswojone” było pojęcie niesprzeczności, w tym sensie, że nie akceptowano pary zdań wzajem sprzecznych jako mogących opisywać jakikolwiek istniejący obiekt. Niezależność zdań wykazywana była metodą semantyczną, np. przez Pascha i Hilberta. Ogólne pojęcie izomorfizmu było już znane, w związku z rozwojem abstrakcyjnej algebry.

Uważano jednak w dalszym ciągu, że logika jest jedna, że „nie można wyjść poza logikę”. Taki pogląd wyrażał zarówno Frege, jak i Russell. Zmieniło się to dopiero pod koniec drugiej dekady XX wieku. Następne dwie dekady to niezwykle intensywny rozwój refleksji już nie tylko logicznej, ale i metalogicznej. Właśnie wtedy zaczynają pojawiać się najważniejsze pojęcia metalogiczne wraz z propozycjami ich matematycznego ujęcia. Główną rolę w tym rozwoju przypisać należy Tarskiemu, ale również np. Bernays, Carnap, Hilbert i inni mieli w tej mierze istotnie znaczące dokonania. Te fakty zostały już gruntownie opisane przez wielu autorów, więc nie ma potrzeby, aby to tutaj powtarzać. Trzeba jednak, moim zdaniem, wyrazić uznanie należne Veblenowi oraz Huntingtonowi za ich pierwsze próby nadania klarowności takim pojęciom jak kategoryczność i zupełność.

Bibliografia

Aspray, W., Kitcher, P. (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minneapolis: Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Volume XI, University of Minnesota Press.

Awodey, S., Carus, A.W. (2001). Carnap, completeness, and categoricity: the *Gabelbarkeitssatz* of 1928. *Erkenntniss*, 54: 145–172.

Awodey, S., Reck, E.H. (2002a). Completeness and categoricity. Part I: Nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic. *History and Philosophy of Logic*, 23: 1–30.

Awodey, S. Reck, E.H. (2002b). Completeness and categoricity. Part II: Twentieth-century metalogic to twenty-first-century semantics. *History and Philosophy of Logic*, 23: 77–94.

Baldus, R. (1928). Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom. *Mathematische Annalen*, 100: 321–333.

Bernays, P. (1955). Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome. *Mathematische Zeitschrift*, 63: 219–229.

Carnap, R., Bachmann, F. (1936). Über Extremalaxiome. *Erkenntnis*, 6: 166–188.

Corcoran, J. (1980). Categoricity. *History and Philosophy of Logic*, 1: 187–207.

Corcoran, J. (1981). From categoricity to completeness. *History and Philosophy of Logic*, 2: 113–119.

Drucker, T., editor (1991). *Perspectives on the history of mathematical logic.* Boston Basel Berlin: Birkhäuser.

Ehrlich, P. (2006). The rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: the emergence of non-Archimedean systems of magnitudes. *Archive for the History of Exact Sciences*, 60: 1–121.

Ehrlich, P. (2012). The absolute arithmetic continuum and the unification of all numbers great and small. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 18 (1): 1–45.

Fenster, D.D. (1998). Leonard Eugene Dickson and his work in the arithmetics of algebras. *Archive for the History of Exact Sciences*, 52: 119–159.

Fraenkel, A.A. (1928). *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin: Verlag von Julius Springer.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A. (1973). *Foundations of set theory*. Amsterdam London: North-Holland Publishing Company.

Grattan-Guiness, I. (2000). *The search for mathematical roots 1870–1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1950). *The foundations of geometry*. Authorized translation by E.J. Townsend. Reprint edition. La Salle, Illinois: The Open Court Publishing Company.

Hodges, W. (2007). Tarski on Padoa's method. Dostępne na:

www.maths.qmul.ac.uk/∼wilfrid/padoa.pdf

Lumiste, Ü. (2007). Tarski system of geometry and betweenness geometry with the group of movements. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 56: 252–263.

Mac Lane, S. (1974). Veblen, Oswald. *Dictionary of Scientific Biography*, 13: 599–600.

Nuut, J. (1929). Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs. *Acta Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis)*, A23 (4).

Pambuccian, V. (1990). Unit distance as single binary predicate for plane Euclidean geometry. *Zeszyty Nauk. Geom.*, 18: 5–8.

Pogonowski, J. (2019). *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.

Sarv, J. (1931). Geomeetria alused. *Acta Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis)*, A19 (4).

Scanlan, M. (1991). Who were the American Postulate Theorists? *The Journal of Symbolic Logic*, 56 (3): 981–1002.

Scanlan, M. (2003). American Postulate Theorists and Alfred Tarski. *History and Philosophy of Logic*, 24: 307–325.

Schiemer, G. (2010a). Fraenkel's axiom of restriction: axiom choice, intended models, and categoricity. W Löwe B., T. Müller, T., editors, *Philosophy of mathematics: sociological aspects and mathematical practice*. London: College Publications, 307–340.

Schiemer, G. (2010b). *Carnap's early semantics*. PhD Dissertation, Universität Wien.

Schiemer, G. (2012). Carnap on extremal axioms, "completeness of models", and categoricity. *The Review of Symbolic Logic*, 5 (4): 613–641.

Schiemer, G. (2013). Carnap's early semantics. *Erkenntniss*, 78 (3): 487–522.

Schiemer, G., Reck, E.H. (2013). Logic in the 1930s: type theory and model theory. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 19 (4): 433–472.

Schiemer, G., Zach, R., Reck, E.H. (2015). Carnap's early metatheory: scope and limits. Available at: arXiv:1508.05867v1.pdf

Skolem, T. (1920). Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskappselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, 4.

Smith, J.T. (2010). Definitions and nondefinability in geometry. *American Mathematical Monthly*, 117: 475–489.

Tarski, A. (1929). Les fondements de la gémetrié des corps. *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego*. Kraków: Polskie Towarzystwo Matematyczne, 29–33.

Tarski, A. (1934). Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów. *Przegląd Filozoficzny*, 37: 438–460.

Tarski, A. (1940). On the Completeness and Categoricity of Deductive Systems. W Mancosu, P. (2010). *The Adventure of Reason. Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900–1940*. Oxford: Oxford University Press, 485–492.

Tarski, A., Lindenbaum, A. (1936). Über die Beschränkheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7: 15–22.

Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Rozdział 2

Matematyczne metafory kognitywistów

2.1. Wstęp

Dość obszernie przedstawiłem treść *Where mathematics comes from* (Lakoff i Núñez 2000) w Pogonowski 2011. W niniejszym eseju wykorzystam fragmenty tej publikacji, zamieszczonej w internetowym czasopiśmie lingwistycznym, a więc zapewne mało znanej czytelnikom zainteresowanym filozofią i matematyką. W polskiej literaturze filozoficznej dostępne są również inne omówienia koncepcji matematyki ucieleśnionej – szczególnie polecam np. Hohol 2011 i Brożek i Hohol 2014. Poniżej przypomnę kilka podstawowych założeń, pojęć, ustaleń i propozycji Lakoffa i Núñeza. Skupię się przede wszystkim na uwagach krytycznych, przy czym podkreślę od razu, że nie jest moim zamiarem całkowite zakwestionowanie omawianych propozycji, chociaż osobiście uważam je za nietrafny obraz matematyki. Postaram się bowiem wskazać na pewne wątpliwości, z którymi – być może – omawiana koncepcja, po stosownych uzupełnieniach, dałaby sobie radę. Niewątpliwie jest to koncepcja nowa i ciekawa. Można mieć, moim zdaniem, zastrzeżenia co do zasięgu jej stosowalności – takie zastrzeżenia zresztą wysuwać można wobec każdej koncepcji, która rości sobie prawa do bycia uniwersalną, rozstrzygającą wszelkie kwestie dotyczące genezy i uprawiania matematyki. Warto przypomnieć deklarację autorów, że ich koncepcja nie jest ani teorią *stricte* matematyczną, ani filozoficzną (choć implikuje, ich zdaniem, pewne rozstrzygnięcia filozoficzne). Teoria matematyki ucieleśnionej to koncepcja kognitywistyczna, ma wyjaśniać genezę i sposoby uprawiania matematyki w terminach wobec niej zewnętrznych, kognitywnych właśnie.

2.2. Matematyka ucieleśniona: założenia i metody

Program *ucieleśnionej matematyki* sytuuje się w drugiej generacji badań kognitywistycznych. Pierwsza generacja wiązana jest z badaniami sztucznej inteligencji odwołującymi się przede wszystkim do funkcjonalizmu komputerowego (umysł – program, mózg – hardware, inteligencja – rozwiązywanie problemów, myślenie – manipulowanie symbolami). Początek drugiej generacji wiąże się z teorią metafor zaproponowaną w Lakoff i Johnson 1980. Wedle tej teorii, to metafory odpowiedzialne są za większość procesów poznawczych.

Dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień, przytoczmy słowa autorów dotyczące ich rozumienia tego, czym są metafory pojęciowe:

> Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. [...] It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic). (Lakoff i Núñez 2000, 6)

Metafory polegają na swoistym odwzorowaniu: pojęcia, zwykle bardziej konkretne, z jednej dziedziny powiązane są z tworzonymi, zwykle bardziej abstrakcyjnymi, pojęciami dziedziny drugiej. Ważny jest przy tym ów twórczy charakter metafor, a także to, że są one odwzorowaniami zachowującymi pewne informacje. Zwykle mawia się, że odwzorowania metaforyczne zachowują pewne własności pojęć. Różnica między metaforą oraz analogią miałaby polegać na tym, że w analogii porównujemy istniejące w dwóch dziedzinach pojęcia, a w metaforze pojęcia w drugiej dziedzinie są tworzone. Nadto, czasami mawia się, że analogie zachowują relacje, a metafory własności. Może jednak trzeba mówić, że w obu przypadkach zachowywane są stosowne relacje (własności traktować można przecież jako relacje jednoargumentowe).

Autorzy twierdzą, że udało im się pokazać błędność *mitologii matematycznej* (tak – może nie całkiem literalnie – oddaję ich termin *romance of mathematics*), wedle której matematyka ma charakter obiektywny, jest jakoś obecna w świecie, jej istnienie jest niezależne od jakichkolwiek umysłów, a przy tym matematyka uprawiana przez ludzi pozwala nam odkrywać prawdy o świecie. Ich zdaniem są to wszystko przesądy. Wedle nich, sprawy mają się inaczej, m.in.:

1. Umysł jest ucieleśniony, a zatem natura naszych ciał, mózgów oraz codziennego funkcjonowania kształtuje ludzkie pojęcia i rozumowania, w szczególności matematyczne.

2. Większość procesów myślowych (w tym tych związanych z matematyką) jest niedostępna naszej świadomości. Nie chodzi tu o nieświadomość w sensie Freudowskim, lecz o niedostępność tych procesów dla

bezpośredniej świadomej introspekcji. Nie możemy przyjrzeć się bezpośrednio naszym systemom pojęciowym i procesom myślowym przebiegającym na niskim poziomie. Większość myślenia matematycznego taki ma właśnie charakter.

3. Abstrakcje ujmujemy w postaci metafor pojęciowych, przenosząc pojęcia związane z aktywnością sensoro-motoryczną do innych dziedzin, w tym dziedzin matematycznych.

Próbując wyjaśniać złożone procesy poznawcze (np. aktywności matematyczne) odnosimy się do ustaleń ewolucyjnych dotyczących zarówno gatunku ludzkiego, jak i rozwoju mózgu. Z ewolucyjnego punktu widzenia, mózg nie jest jakimś urządzeniem ogólnego przeznaczenia, lecz powinien być traktowany jako służący przetwarzaniu informacji dotyczącej: widzenia, ruchu, orientacji przestrzennej, wzajemnych oddziaływań interpersonalnych, emocji, języka, potocznych rozumowań. Zarówno język, jak i system pojęciowy są systemami, których organizacja zdeterminowana jest przez strukturę mózgu, ciała oraz świata zewnętrznego. Książka Lakoffa i Núñeza stara się odpowiedzieć na pytanie: jakie konkretnie mechanizmy działania ludzkiego mózgu oraz umysłu pozwalają ludziom na tworzenie pojęć matematycznych oraz rozumowania matematyczne? Ponadto, stara się też argumentować za tezą, że ludzka (ucieleśniona) matematyka jest całą matematyką: nie ma więc, zdaniem autorów, racji bytu matematyka w duchu platońskim, przekraczająca ciała i umysły oraz nadająca strukturę kosmosowi. To, czym jest ludzka matematyka, jest empirycznym problemem naukowym, a nie problemem matematycznym ani filozoficznym. Tak więc, jedynie nauki kognitywne, badające mózg, umysł oraz wiążące je zależności są w stanie odpowiedzieć, jaka jest istota ludzkiej matematyki. W konsekwencji, całość matematyki to ludzka matematyka.

Autorzy wyróżniają dwa typy metafor pojęciowych w matematyce:

1. *Metafory bazujące*. Dostarczają podstawowych, bezpośrednio ugruntowanych pojęć. Dla przykładu: dodawanie jako grupowanie razem obiektów.

2. *Metafory łączące*. Dostarczają bardziej abstrakcyjnych pojęć. Dla przykładu: liczby to punkty na prostej, figury geometryczne to równania algebraiczne.

Wyrażanie w językach etnicznych różnego rodzaju zależności stanowi (dla kognitywistów) podstawę do wyodrębnienia odpowiednich *schematów obrazowych* (*image schemas*). Przykładem takiego schematu jest: *pojemnik* (wraz z *wnętrzem*, *brzegiem*, *zewnętrzem*). Schematy związane są też z systemami zależności aspektowych. Ruch i jego wyrażanie dostarczają schematu *źródło–droga–cel* itd.

Tworzymy *metafory pojęciowe* dokonując przyporządkowań z jednej dziedziny w inną – dla przykładu, w metaforze *stany emocjonalne to miejsca w przestrzeni lub stany fizyczne* przyporządkowujemy emocjom, uczuciom itp. miejsca lub cechy fizyczne: być w depresji, żywić ciepłe uczucia itp. Takich metafor pojęciowych jest niezliczone mrowie, wiele z nich opisano dokładnie w Lakoff i Johnson 1980. *Kategorie* rozumiemy np. jako *pojemniki*, *miłość* jako *partnerstwo* (w cywilizacji Zachodu) itd.

Metafory pojęciowe w matematyce autorzy ilustrują graficznie, w postaci przyporządkowania elementom dziedziny wyjściowej elementów dziedziny docelowej. Pierwsza z tych dziedzin ma mieć charakter bardziej konkretny, związany z naszym obcowaniem ze światem doświadczenia potocznego, natomiast druga ma odpowiadać tworzonym na podstawie tego przyporządkowania pojęciom matematycznym. Spójrzmy jak autorzy motywują metaforę pojęciową nazywaną przez nich *Classes Are Containers* (Lakoff, Núñez 2000, 123):

Source domain CONTAINER SCHEMAS		*Target domain* CLASSES
Interiors of Container schemas	→	Classes
Objects in interiors	→	Class members
Being an object in an interior	→	The membership relation
An interior of one Container schema within a larger one	→	A subclass in a larger class
The overlap of the interiors of two Container schemas	→	The intersection of two classes
The totality of the interiors of two Container schemas	→	The union of two classes
The exterior of a Container schema	→	The complement of a class

Autorzy twierdzą, że konstrukcja ta reprezentuje nasze naturalne rozumienie zbiorów, poprzez odwołanie się do ograniczonych obszarów przestrzeni, w których znajdują się jakieś obiekty. Można mieć wiele zastrzeżeń do tego twierdzenia. Jeśli nawet byłoby ono trafne w przypadku niewielkich skończonych kolekcji, to nie jest takie w przypadku zbiorów nieskończonych. Warto przypomnieć, że początki teorii zbiorów Cantora wiążą się z rozważaniem właśnie nieskończonych zbiorów liczb rzeczywistych. Ponadto, należy pamiętać o zasadniczej różnicy między kolektywnym i dystrybutywnym rozumieniem pojęcia zbioru. Matematyka współczesna wykorzystuje to drugie rozumienie. Dydaktycy matematyki zwracają uwagę na trudności, które sprawia uczącym się odróżnienie obu wspomnianych rozumień pojęcia zbioru (zob. np. Bryll i Sochacki 2009, 267–275).

Złącze pojęciowe to kombinacja dwóch różnych struktur poznawczych razem z ustalonymi odpowiedniościami pomiędzy nimi. Jeśli te połączenia są metaforyczne, to mówimy o *złączu metaforycznym*. Za przykład niech służy tu *oś liczbowa*, która korzysta z metafory *liczby to punkty na prostej*.

Poszczególne rozdziały książki przedstawiają różne rodzaje metafor wykorzystywanych w tworzeniu pojęć matematycznych. W przypadku arytmetyki są to np. metafory: *grupowania obiektów*, *konstruowania obiektów*, *odcinka pomiarowego*, *ruchu wzdłuż drogi*.

W książce podkreśla się – poświadczone eksperymentalnie – istnienie pewnych elementarnych zdolności arytmetycznych u noworodków. Krótko dyskutuje się rolę wybranych struktur w mózgu, związanych z takimi umiejętnościami.

Zarówno w przypadku arytmetyki, jak i innych działów matematyki autorzy starają się ukazać mechanizmy metaforycznego tworzenia (i rozumienia) pojęć, proponując stosowne dziedziny oraz zasady transferu własności z jednej dziedziny do drugiej. Niezwykle ważna jest BMI, podstawowa metafora nieskończoności (*Basic Metaphor of Infinity*). Punktem wyjścia jest rozumienie *procesów* jako ruchów, przy czym procesy ciągłe, bez wyraźnego ich zakończenia, ujmowane są jako (dyskretne) procesy *powtarzalne*. Uzasadnienia dla takich metafor znajdują kognitywiści m.in. w systemach aspektowych języków etnicznych. Autorzy piszą:

> Why is this metaphor important for infinity? The reason is that we commonly apply it to infinitely continuous processes. Continuous processes without end – infinite continuous processes – are conceptualized via this metaphor as if they were infinite iterative processes, processes that iterate without end but in which each iteration has an endpoint and a result. For example, consider infinitely continuous motion, which has no intermediate endpoints and no intermediate locations where the motion stops. Such infinitely continuous motion can be conceptualized metaphorically as iterated motion with intermediate endings to motion and intermediate locations – but with infinitely many iterations.
>
> This metaphor is used in the conceptualization of mathematics to break down continuous processes into infinitely iterating step-by-step processes, in which each step is discrete and minimal. For example, the indefinitely continuous process of reaching a limit is typically conceptualized via this metaphor as an infinite sequence of well-defined steps. (Lakoff i Núñez 2000: 157)

Tak więc, zdaniem autorów, wprowadzanie wszelakich obiektów infinitarnych, granicznych jest motywowane metaforą, która każe „uzupełnić” powtarzalny proces, z nieokreśloną liczbą owych powtórzeń, przez ostateczny wynik takiego procesu. Ten ostateczny wynik to nowy obiekt, mający cechy nieskończoności *aktualnej*.

Typowym przykładem zastosowania BMI jest następująca metafora poznawcza, nazywana przez autorów *The Set of All Natural Numbers* (Lakoff i Núñez 2000, 174):

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* THE SET OF NATURAL NUMBERS
The beginning state (0)	$\Rightarrow$	The natural number frame, with a set of existing numbers and a successor operation that adds 1 to the last number and forms a new set
State (1) resulting from the initial stage of the process	$\Rightarrow$	The empty set, the set of natural numbers smaller than 1
The process: From a prior intermediate state $(n-1)$, produce the next state (n).	$\Rightarrow$	Given S_{n-1}, the set of natural numbers smaller than $n-1$, form $S_{n-1} \cup \{n-1\} = S_n$.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and $n-1$)	$\Rightarrow$	At state n, we have S_n, the set of natural numbers smaller than n.
“The final resultant state” (actual infinity “∞”)	$\Rightarrow$	**S_∞, the set of *all* natural numbers smaller than ∞ – that is, the set of *all* natural numbers (which does not include ∞ as a number)**
Entailment *E*: The final resultant state (“∞”) is unique and follows every nonfinal state.	$\Rightarrow$	**Entailment *E*: The set of all natural numbers is unique and includes every natural number (no more, no less).**

Autorzy twierdzą, że ta metafora pełni taką samą rolę, jak przyjmowany w teorii mnogości aksjomat nieskończoności. Uważam, że jest to dość bałamutne stwierdzenie. Aksjomat nieskończoności w teorii mnogości głosi, że istnieje co najmniej jeden zbiór nieskończony, co wyraża się przez postulowanie istnienia zbioru, który zawiera $\emptyset$ jako swój element i wraz z każdym elementem x zawiera też element $x \cup \{x\}$ (zbiory spełniające te warunki nazywa się induktywnymi). Ponieważ przekrój zbiorów induktywnych jest zbiorem induktywnym, więc jeśli istnieje co najmniej jeden taki zbiór, to istnieje też najmniejszy (względem inkluzji) zbiór induktywny. Jest to zbiór wszystkich skończonych liczb porządkowych. Stanowi on teorio-mnogościową reprezentację ogółu standardowych liczb naturalnych. Model arytmetyki, którego uniwersum stanowią te liczby, jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu, ale na gruncie logiki drugiego rzędu, w logice pierwszego rzędu nie ma on takiej jednoznacznej charakterystyki. W przywołanej wyżej metaforze pojęciowej kwestia istnienia i jednoznaczności zbioru wszystkich standardowych liczb naturalnych jest rozstrzygana dogmatycznie – po prostu stwierdza się, że tak jest. To jedna z ważnych różnic między stosowaną przez autorów podstawową metaforą nieskończoności a rzeczywistym postępowaniem matematyków, którzy zobowiązani są do przedstawiania dowodów istnienia oraz jednoznaczności wprowadzanych obiektów. Trudno sobie zresztą wyobrazić, czemu w płaszczyźnie dowodzenia miałyby odpowiadać dywagacje odwołujące się do tworzenia metafor pojęciowych.

BMI odnajdujemy, wedle autorów, we wszelkich sytuacjach, gdy dokonujemy w matematyce jakiegoś przejścia do granicy, zastosowania jakiejś zasady domknięcia, a także gdy korzystamy z zasady indukcji matematycznej:

> We hypothesize that all cases of actual infinity – infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds – are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this metaphor the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end – that is, what linguists call imperfective processes. The effect of the BMI is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result – an infinite *thing*. (Lakoff i Núñez 2000: 158)

2.3. Matematyka ucieleśniona: propozycje

2.3.1. Zamierzenia autorów

Autorzy uważają za fałszywe następujące przekonania dotyczące poznania matematycznego, a wyrażane często przez samych matematyków:

1. Matematyka jest rzeczywista, choć jest abstrakcyjna i odcieleśniona.

2. Matematyka istnieje obiektywnie, dostarczając struktury dla całego uniwersum, a także wszelkich innych możliwych uniwersów. To istnienie jest niezależne od istnienia ludzi lub w ogóle jakichkolwiek istot, przekracza je.

3. Ludzka matematyka jest jedynie częścią abstrakcyjnej, transcendentalnej matematyki. Tak więc, dowody matematyczne pozwalają nam odkrywać transcendentalne prawdy o uniwersum.

4. Matematyka jest częścią świata fizycznego i dostarcza mu racjonalnej struktury. Istnieją, dla przykładu: ciągi Fibonacciego w kwiatach, spirale logarytmiczne w skorupach ślimaków, fraktale w zarysach gór, parabole w rzutach oraz liczba π w sferycznych kształtach planet, gwiazd oraz baniek mydlanych.

5. Matematyka charakteryzuje nawet logikę, a zatem także strukturę rozumowania, przy tym dowolną postać rozumowania, dowolnych istot.

6. Uczenie się matematyki to zatem uczenie się języka natury, sposobu myślenia, który musi być wspólny dla wszelkich wysoce inteligentnych istot wszędzie w kosmosie.

7. Ponieważ matematyka jest odcieleśniona, a rozum jest postacią logiki matematycznej, sam rozum jest odcieleśniony. Wynika z tego, wedle autorów, że maszyny mogą myśleć.

Argumenty autorów przeciw trafności powyższych przekonań wskazują przede wszystkim na metaforyczną, ich zdaniem, naturę pojęć matematycznych. Odnosi się to do podstawowej metafory matematycznej, z jaką związane jest rozumienie pojęcia nieskończoności w matematyce, przejawia się owa metaforyczność także we wszelkich dziedzinach i na wszelkich poziomach uprawiania matematyki. Dla przykładu, wedle autorów:

1. Liczby są metaforycznie przedstawiane jako punkty na osi liczbowej.

2. W algebrze Boole'a zbiorów tworzenie obiektów jest ujmowane metaforycznie w terminach operacji algebraicznych.

3. W logice matematycznej rozumowania są metaforycznie przedstawiane jako rachunki na symbolach.

4. W przypadku funkcji trygonometrycznych kąty są metaforycznie przedstawiane jako liczby.

5. Mnożenie liczb zespolonych przedstawiane jest metaforycznie na płaszczyźnie zespolonej w terminach obrotów.

Wyniki badań nauk kognitywnych skłaniają do tezy, że mózg nie jest wcale „urządzeniem całkiem ogólnego przeznaczenia” (*general-purpose device*). Służy on przetwarzaniu informacji dotyczącej: widzenia, ruchu, orientacji przestrzennej, wzajemnych oddziaływań interpersonalnych, emocji, języka, potocznych rozumowań. Język i człowiecze pojęcia nie są losowe i dowolne – są wysoce zorganizowane i wielce ograniczone, a to ze względu na ograniczenia i strukturę mózgu, ciała oraz świata zewnętrznego. W odniesieniu do samej matematyki powyższe ustalenia każą zadać m.in. następujące pytania:

1. Jakie konkretnie mechanizmy działania ludzkiego mózgu oraz umysłu pozwalają ludziom na tworzenie pojęć matematycznych oraz rozumowania matematyczne?

2. Czy matematyka ugruntowana na mózgu i umyśle jest całą istniejącą matematyką? Czy też rację bytu ma matematyka w duchu platońskim, przekraczająca ciała i umysły oraz nadająca strukturę kosmosowi (temu oraz wszystkim możliwym)?

Książka stara się odpowiedzieć głównie na pierwsze z tych pytań, przy czym nie jest to – bo być nie może – odpowiedź udzielana wewnątrz matematyki. Terenem, na którym tych odpowiedzi się udziela, są nauki kognitywne.

Natomiast pytanie drugie to jedno z podstawowych pytań filozofii matematyki. Odpowiedź proponowana przez autorów jest taka oto:

1. Twierdzenia dowodzone przez ludzi pozostają w dziedzinie ludzkiego systemu pojęć matematycznych.

2. Cała wiedza matematyczna, którą mamy lub możemy uzyskać, to wiedza wewnątrz ludzkiej matematyki.

3. Nie ma żadnego sposobu, aby przekonać się, czy twierdzenia dowodzone w ludzkiej matematyce mają jakąkolwiek prawdziwość obiektywną, zewnętrzną wobec istot ludzkich lub innych.

Na pierwszy rzut oka sformułowania te mogą sprawiać wrażenie nieco tautologicznych. Autorzy starają się jednak podawać bardziej rozbudowane argumenty za ich trafnością, np.:

1. Problem istnienia matematyki rozumianej po platońsku nie może być rozważany na drodze naukowej. Byty Platońskie nie mogą być percypowane przez ciało, mózg, umysł. Nauka nie może dowieść ani obalić twierdzenia o istnieniu bytów Platońskich, podobnie jak w przypadku istnienia lub nieistnienia Boga.

2. Rozumienie matematyki przez ludzi polegać może jedynie na ujęciu jej w terminach dostępnych mózgowi oraz umysłowi.

3. To, czym jest ludzka matematyka, jest empirycznym problemem naukowym, a nie problemem matematycznym ani filozoficznym. Tak więc, jedynie nauki kognitywne, badające mózg, umysł oraz wiążące je zależności są w stanie odpowiedzieć, jaka jest istota ludzkiej matematyki. W konsekwencji, całość matematyki to ludzka matematyka.

4. Gdyby jednak uważać pytanie o istotę matematyki nie za pytanie naukowe lecz filozoficzne (albo i nawet religijne), to np. istnienie rzekomego Platońskiego świata matematyki oraz obiektywność jej prawd uzasadniane byłyby na drodze, która obecnie nie może zostać uznana za naukową.

2.3.2. Arytmetyka

Umiejętności matematyczne – choć oczywiście w skromnym zakresie – poświadczane są eksperymentalnie u ludzkich noworodków. Sprytnie przeprowadzane doświadczenia uwzględniające czas (a więc także intensywność) uwagi zwracanej przez noworodki na manipulacje niewielkimi liczbami przedmiotów pozwalają postawić tezę, że dla takich minimalnych dziedzin, liczących do około czterech elementów, noworodki są w stanie zdawać sobie sprawę z działań dodawania oraz odejmowania.

Niezależnie od kultury oraz wykształcenia, wszyscy ludzie dysponują zdolnością bezrefleksyjnego, natychmiastowego ustalenia, z jaką niewielką liczbą obiektów mają do czynienia – ogranicza się to do co najwyżej (mniej więcej) czterech obiektów. Przy większej liczbie obiektów wymagana jest już pewna refleksja, działania polegające na porządkowaniu i liczeniu. Tę uniwersalną bezrefleksyjną umiejętność autorzy nazywają *subitizing*. Podkreślić należy, że nie mówi się tu o manipulacjach na symbolach, lecz jedynie na samych obiektach. Odnosi się ona nie tylko do wzroku, ale także np. do wrażeń słuchowych. Podobne umiejętności arytmetyczne obserwuje się również u Braci Mniejszych, nie tylko naczelnych.

Poświadcza się eksperymentalnie, że uszkodzenia w obrębie *zakrętu kątowego* (*angular gyrus*) (znajdującego się w *dolnej korze ciemieniowej* (*inferior parietal cortex*)) wiążą się z utratą zdolności arytmetycznych. Należy zwrócić uwagę, że zakręt kątowy jest anatomicznie położony w rejonie, gdzie znajdują się powiązania neuronów związanych ze wzrokiem, słuchem oraz dotykiem.

W przypadku arytmetyki autorzy omawiają głównie metafory bazujące. W metaforze ujmującej arytmetykę jako *grupowanie obiektów* dokonują przyporządkowania kolekcjom obiektów, relacjom między nimi, operacjom na nich odpowiednio: liczb, relacji i operacji arytmetycznych. Uzyskują w ten sposób również ugruntowanie pewnych elementarnych praw arytmetycznych.

Inna metafora to arytmetyka jako *konstruowanie obiektów*. Operacje na częściach obiektów przetwarzane są na operacje arytmetyczne. Trzecia z kolei metafora to metafora *odcinka pomiarowego* – jego użycia w odniesieniu do obiektów fizycznych transponowane są na odpowiednie operacje na liczbach. Wreszcie, wspomina się o czwartej podstawowej metaforze: arytmetyka jako *ruch wzdłuż drogi*. Także tutaj obiekty fizyczne i relacje między nimi transponowane są na liczby i łączące je relacje.

Wspomniane wyżej cztery metafory odpowiedzialne są, zdaniem autorów, za traktowanie liczb jako *rzeczy w świecie*. To z kolei ma m.in. i tę konsekwencję, że metaforycznie ugruntowane zostają różne zasady *domknięcia* w arytmetyce: skoro operowanie na obiektach fizycznych pewnego rodzaju daje obiekty tego samego rodzaju, to pewne operacje w ustalonym systemie liczbowym nie wyprowadzają poza ten system.

Wreszcie, podkreśla się, że rachunki dokonywane są na *symbolach*, a nie na samych liczbach. Tak więc, rachunki wykonywać można nawet całkowicie bezmyślnie, o ile tylko zna się odpowiednie algorytmy rachowania.

2.3.3. Algebra, logika, zbiory

Autorzy twierdzą, że połączenie ustaleń historycznych z wynikami badań kognitywnych pozwala lepiej rozumieć obowiązujące w matematyce standardy, a więc przede wszystkim standard gruntowania poszczególnych teorii matematycznych na bazie aksjomatycznej. Standard ten – ujawniony po raz pierwszy w aksjomatycznym systemie geometrii Euklidesa – miałby się wywodzić z dążenia Greków do charakterystyki *istoty* (*essence*) zjawisk, z poszukiwania ogólnych zasad, rządzących światem, z których dałoby się wyprowadzić wszelkie ustalenia na temat świata.

Jako wyraziste przykłady posługiwania się pojęciem *istoty* w matematyce autorzy podają rozważania algebraiczne. Abstrakcyjne struktury algebraiczne posiadają wielorakie – chciałoby się rzec bardziej konkretne – realizacje. Dla przykładu, struktura trójelementowej przemiennej grupy addytywnej widoczna jest w konkretnych strukturach arytmetycznych (dodawanie modulo 3), geometrycznych (stosowna grupa obrotów), bądź jeszcze innych. To, zdaniem autorów, kolejna ważna metafora matematyki: *istota systemu matematycznego to jego struktura algebraiczna*.

Logikom XIX wieku (De Morgan, Boole) autorzy przypisują posługiwanie się metaforą: *klasy to pojemniki*, a następnie wykorzystaniem tego, że *liczby* *(oraz pewne prawa arytmetyczne)* dają się przekształcić (metaforycznie) na *klasy (oraz pewne operacje na nich)*. Dalej, *metafora Boole'a* miałaby polegać na przeniesieniu zależności algebraicznych na zależności w elementarnym rachunku klas (zbiorów), a przyporządkowanie klasom stanów świata sądów (w których sądy owe są prawdziwe) miałaby pozwalać na wykształcenie rachunku zdań. Pewne proste prawa rachunku zdań znajdują przy tym swoje odzwierciedlenie w zasadach dotyczących operowaniem pojemnikami (prawa: *wyłączonego środka*, *modus ponens*, *modus tollens*, *sylogizmu hipotetycznego*).

Uwagi dotyczące teorii mnogości są raczej skromne. Autorzy wskazują m.in. na:

1. metaforę (pochodzącą od von Neumanna) traktowania liczb naturalnych jako zbiorów;

2. metaforę Cantora, pozwalającą – w terminach relacji równoliczności – porównywać *moce* zbiorów;

3. interpretację zbiorów jako *grafów*, z rozróżnieniem zbiorów spełniających bądź nie aksjomat ufundowania.

Autorzy nie uwzględniają ważnego aksjomatu teorii Zermela-Fraenkla, a mianowicie *aksjomatu zastępowania*. Jak wiadomo, bez tego aksjomatu nie można wykonać wielu podstawowych operacji w teorii mnogości. W pewnym sensie, aksjomat zastępowania jest również swoistym aksjomatem nieskończoności. Wykorzystywany jest w definicjach przez *indukcję pozaskończoną*. Nie potrafię wskazać powodu, dla którego autorzy go pominęli. Skoro wszelkie konstrukcje w teorii zbiorów miałyby być ugruntowane na podstawie metafor, to można zastanawiać się nad zbudowaniem stosownej metafory poznawczej, oddającej sens tego aksjomatu; w uproszczeniu chodzi przecież o to, że obraz zbioru względem funkcji także jest zbiorem. Wybieranie przez autorów tylko niektórych aksjomatów i konstrukcji dla reprezentowania ich w postaci metafor poznawczych świadczy poniekąd o tym, że rozważane podejście jest trochę *ad hoc*.

2.3.4. Liczby rzeczywiste i granice

Podstawową metaforę nieskończoności BMI wykorzystują autorzy w wielu przypadkach szczególnych, m.in.:

1. nieskończone rozwinięcia dziesiętne,

2. granice ciągów nieskończonych,

3. szeregi nieskończone (oraz ich sumy),
4. granice funkcji,
5. kresy górne i dolne,
6. przekroje nieskończonych rodzin przedziałów zstępujących.

W istocie są to wszystko – moim zdaniem – próby wskazania na obecność pewnych prawidłowości w procesie tworzenia pojęć matematycznych, gdy chcemy (lub musimy) wprowadzać nowe obiekty, które nie powstają poprzez skończony jedynie ciąg operacji. Autorzy twierdzą, że liczby rzeczywiste tworzone są – różnymi sposobami – z wykorzystaniem BMI. Wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości pomiędzy wytworzonymi owymi różnymi sposobami obiektami pozwalają matematykom – wedle opinii autorów – na mówienie o jednej strukturze: *the* real numbers. W konkluzji rozdziału dodają jednak, że właściwie nie jest wcale oczywiste, iż liczby rzeczywiste musiałyby być tworzone z użyciem tej lub innej wersji BMI.

2.3.5. Liczby pozaskończone

Uwagi tego rozdziału są dość skromne. Przypomina się metodę przekątniową Cantora. Przywołuje się nieco propedeutycznych uwag na temat liczb porządkowych i kardynalnych. Czytelnik nieobeznany z teorią mnogości może odnieść wrażenie, że kolejne moce nieskończone definiowane są w niej tylko poprzez konstrukcje: zbioru potęgowego oraz sumy rodziny zbiorów. W istocie jest jednak inaczej: skala *alefów* wprowadzana jest na innej drodze (z wykorzystaniem przyporządkowania Hartogsa). Liczby kardynalne są *początkowymi* liczbami porządkowymi. Odpowiedniość między skalą alefów a skalą mocy zbiorów tworzonych kolejno z jakiegoś zbioru nieskończonego (którego istnienie gwarantuje aksjomat nieskończoności) poprzez iterowanie operacji brania zbioru potęgowego (kroki następnikowe) oraz operacji brania sumy (kroki graniczne) nie jest, jak wiadomo, ustanowiona przez aksjomatyczną teorię mnogości Zermela-Fraenkla: uogólniona hipoteza kontinuum, która głosi, że te dwie skale się pokrywają, jest od aksjomatów tej teorii niezależna.

Wydaje się, że to nie tylko BMI dostarcza „mechanizmu" dla tworzenia Cantorowskiej skali nieskończoności. Sądzę, że warto byłoby w tym kontekście wspomnieć o innej jeszcze idei, uważanej za podstawową w Cantorowskiej teorii mnogości, a mianowicie idei *ufundowania*. To jednak temat na osobną dyskusję.

2.3.6. Wielkości nieskończenie małe

Autorzy piszą, że nieskończenie małe, wprowadzone do rachunku różniczkowego i całkowego stały się bardziej znane dzięki staraniom Leibniza. Twierdzą, że zarówno Newton, jak i Leibniz stosowali metaforę: *zmiana chwilowa to zmiana średnia względem nieskończenie małego przedziału*. Metafora ta wymaga jeszcze – aby wykonalne były rachunki – jakiejś arytmetyzacji owego pojęcia *nieskończenie mały*. Tu Newton i Leibniz się różnią. Pochodna funkcji dla danego argumentu liczbowego u Newtona to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie, którego odciętej przyporządkowano ową wartość liczbową. Z kolei sama styczna jest *granicznym położeniem* siecznej. Brane pod uwagę odcinki siecznej, gdy przyrost argumentu Δx stawał się dowolnie mały, miały jednak zawsze określoną długość – można było im przyporządkować pewną liczbę. Różnica długości odcinka siecznej do długości odpowiedniego odcinka stycznej była zatem także zawsze określona liczbowo. Przy dowolnie małym przyroście argumentu różnica ta wyrażała się arytmetyczną funkcją argumentu Δx. Jeśli wartość tej funkcji stawała się dowolnie mała, to można ją było ignorować i w ten sposób rachunek na długościach siecznych mógł służyć za wystarczająco dobre przybliżenie, wyznaczające styczną. U Newtona mamy więc przejście graniczne w odniesieniu do obiektów geometrycznych.

Inaczej u Leibniza – wprowadza on nieskończenie małe jako wielkości czysto arytmetyczne, jako samoistnie istniejące obiekty matematyczne. Gdy odcinki siecznych u Newtona mają długości, będące liczbami rzeczywistymi, to długości owe u Leibniza wyrażone są liczbami nieskończenie małymi. Geometryczne ujęcie Newtona zyskało solidny grunt arytmetyczny dopiero w wieku XIX, z chwilą arytmetyzacji analizy. W analizie matematycznej uprawianej wedle standardu ustanowionego przez Weierstrassa nie było miejsca na nieskończenie małe Leibniza. Na ich precyzyjny opis matematyczny poczekać musieliśmy do prac Abrahama Robinsona z połowy wieku XX, ustanawiających podstawy *analizy niestandardowej*. W opisie tym wykorzystuje się konstrukcję *ultraproduktu*. Liczby *hiperrzeczywiste* otrzymujemy jako ultraprodukt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a U ultrafiltrem niegłównym w rodzinie $\wp(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. To znana konstrukcja, pochodząca w ogólności od Łosia. W pewnym sensie antycypował ją też Skolem, budując swój niestandardowy model arytmetyki.

Autorzy nie przedstawiają szczegółowo tej konstrukcji. Trudno czynić im z tego powodu zarzuty, gdyż precyzyjny opis konstrukcji ultraproduktu wymaga wprowadzenia szeregu pojęć dodatkowych. Ciekawym wyzwaniem mogłaby być próba ujęcia tego typu rozumowań w ramach podejścia propagowanego w książce. Trzeba byłoby w tym celu znaleźć odpowiednie metafory dla konstrukcji, oddających ideę *równości prawie wszędzie*. Takie konstrukcje występują powszechnie w matematyce – nie tylko we wspomnianym przypadku ultraproduktów, ale również np. w teorii miary, w analizie funkcjonalnej, teorii prawdopodobieństwa itd.

Zamiast tego, autorzy starają się w popularny sposób przedstawić coś, co nazywają *liczbami ziarnistymi* (*granular numbers*). Ma to zapewne oswoić czytelnika z intuicjami związanymi z wprowadzaniem wielkości (liczb) nieskończenie małych. Po uwagach dotyczących twierdzenia o zwartości (w wersji semantycznej) autorzy starają się je wykorzystać dla intuicyjnego wprowadzenia *pierwszej liczby nieskończenie małej* δ, odwołując się przy tym, rzecz jasna, do swojej ulubionej BMI, podstawowej metafory nieskończoności (zakłada się też, iż spełnione są aksjomaty dla liczb rzeczywistych):

1. Niech x będzie dodatnia i mniejsza od 1.
2. Niech x będzie dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{2}$.
3. Niech x będzie dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{3}$.
4. Niech x będzie dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{4}$.
5. …
6. W kroku granicznym, niech δ będzie liczbą spełniającą wszystkie powyższe warunki. Liczba taka istnieje, na mocy twierdzenia o zwartości, bo dla każdego skończonego układu powyższych formuł istnieje liczba czyniąca zadość wszystkim warunkom wyrażonym w formułach tego układu.

Następnie oswajani zostajemy z H, liczbą *nieskończenie dużą*, określoną jako $\frac{1}{\delta}$. Potem otrzymujemy nieskończenie małe i nieskończenie duże *różnych rzędów*, poprzez operacje arytmetyczne (w szczególności, potęgowanie). Autorzy dodają *explicite*, że owe nieskończenie małe oraz nieskończenie wielkie liczby odnajdujemy w innym, różnym od standardowego, modelu teorii liczb rzeczywistych (oraz całego nieskończonego układu powyżej wyliczonych formuł).

2.3.7. Punkty i kontinuum

Autorzy zwracają uwagę na dwa sposoby pojęciowego ujmowania przestrzeni w matematyce. Pierwsze z nich wiążą z naturalnym pojmowaniem przestrzeni, takim, jakie prawdopodobnie akceptujemy wszyscy w doświadczeniu potocznym. Tu przestrzeń jawi się jako absolutnie ciągła (podobnie płaszczyzna). Nie składa się ona z żadnych obiektów, a raczej jest jakby tłem, na którym obiekty są umieszczane. Linie proste oraz krzywe są absolutnie ciągłe, jak drogi przebiegane przez poruszający się punkt. Wreszcie, punkty same nie są obiektami, a jedynie lokalizacjami: w przestrzeni, na płaszczyźnie, na prostej. Z prostymi, płaszczyznami i przestrzenią wiążemy intuicyjne pojęcie *wymiaru*.

To „naturalne" rozumienie przestrzeni zaczyna się zmieniać, piszą autorzy, w miarę oswajania metafory: *liczby to punkty na prostej* (a układy liczb odpowiadają punktom na płaszczyźnie i w przestrzeni). Rozwija się tę metaforę w początkach geometrii analitycznej oraz rachunku różniczkowego. We współczesnej matematyce autorzy zauważają intensywny rozwój *programu jej dyskretyzacji*, rozpoczętego w wieku XIX, do realizacji którego przyczyniły się:

1. Program arytmetyzacji analizy, który miał na celu m.in. wyeliminowanie „naturalnego" rozumienia pojęcia przestrzeni ciągłej i zastąpienie go reprezentacją arytmetyczną.

2. Program formalizacji, który zmierzał do ujęcia matematyki jako manipulacji dyskretnymi symbolami.

3. Logika symboliczna, która miała reprezentować rozumowania na drodze dyskretnej, z wykorzystaniem dyskretnych symboli.

4. Logicyzm, który zamierzał zredukować matematykę do logiki symbolicznej oraz teorii mnogości.

5. Topologia ogólna, która proponowała zastąpienie wspomnianego „naturalnego" rozumienia pojęcia ciągłej przestrzeni przez rozumienie oparte na pojęciach teorii mnogości.

Współcześnie przestrzeń (płaszczyzna, prosta) pojmowana jest więc jako *zbiór*, którego elementami są *punkty*. Rozmyślając nad ewolucją rozumienia pojęcia przestrzeni trzeba pamiętać, że – powiedzmy – dwieście lat temu rozumienie to było inne, było właśnie owym „naturalnym" rozumieniem. Od XIX wieku w matematyce rozważa się jednak wiele różnorodnych przestrzeni – nie mamy przy tym na myśli jedynie włączenia do tych rozważań geometrii nieeuklidesowych. Ważne uogólnienia podał Riemann – prowadzą one do pojęcia *rozmaitości*. Topologia ogólna wypracowała całkiem ogólne pojęcie przestrzeni, której bardzo szczególnym przypadkiem jest znana ze szkoły przestrzeń kartezjańska. Dysponujemy ogólnymi pojęciami: *metryki* i *normy*, tutaj również np. znana ze szkoły metryka wyznaczona przez miarę odcinka (przez wartość bezwzględną) jest tylko szczególnym przypadkiem. Rozważamy przestrzenie, których elementami mogą być dość skomplikowane twory matematyczne, poczynając, powiedzmy, od funkcji. Analiza funkcjonalna dostarcza środków do badania przestrzeni funkcyjnych oraz operatorów określonych na takich przestrzeniach. Trudno obecnie wyobrazić sobie inny niż teorio-mnogościowy (lub teorio-kategoryjny) paradygmat, w którym jednolicie dałoby się opisać tak różnorodne przestrzenie.

Autorzy starają się eksplikować rozumienie pojęcia *punktu* przy użyciu BMI, podstawowej metafory nieskończoności – np. w zastosowaniu do zstępującego ciągu dysków o coraz mniejszych średnicach. Przywołują w tym kontekście ewentualność uwzględnienia dysków o średnicach będących liczbami nieskończenie małymi. Wskazują na pewne trudności, które mogą pojawiać się, gdy pytamy np., co miałoby znaczyć, że punkty *się stykają*. Przyznam, że nie widzę powodu, dla którego należałoby uznać, że pojęcie *stykania się* miałoby odnosić się do punktów. Nie wydaje się roztropne żądanie, aby wszystko, co daje się wyrazić w języku potocznym i w odniesieniu do doświadczenia potocznego musiało mieć dokładny formalny odpowiednik w języku matematyki, w którym mówimy o takich abstrakcyjnych obiektach jak punkty.

Nie kryjąc swoich emocji, autorzy z naciskiem podkreślają istotne różnice pomiędzy „naturalnym" rozumieniem ciągłej przestrzeni a rozumieniem odwołującym się do programu dyskretyzacji, w którym przestrzeń jest zbiorem, a jego elementami są punkty. Przywołują w tym miejscu m.in. znane przykłady „funkcji wypełniających przestrzeń" (dokładniej: kwadrat jednostkowy), które przy rozumieniu „naturalnym" wcale, wedle ich sformułowania, takiej własności wypełniania nie mają. Warto zauważyć, że tej ostatniej deklaracji nie można poddać ocenie prawdziwościowej, gdyż nie wiadomo, jak ją udowodnić bądź odrzucić.

W zakończeniu tego rozdziału autorzy formułują następującą opinię dotyczącą mechanizmu rozwoju matematyki, w odniesieniu do badań kontinuum arytmetycznego:

> The passion for closure pushed the mathematical community to find *all* the linearly ordered numbers that could be solutions to polynomial equations – that is, the system of all linear numbers closed under the operations of addition and multiplication, including all the limits of sequences of such numbers.
>
> The principle of closure then had another effect. It tended to keep the mathematical community from looking further at ordered number sys-

> tems that were not required for closure – systems such as hyperreals. Though infinitesimals were used successfully in mathematics for hundreds of years, the drive for closure of a linear number system led mathematicians to stop with the reals. Closure took precedence over investigating the infinitesimals.
>
> Achieving closure for the real numbers meant "completing" the integers and the rationals. Since numbers were seen as points on the line, that meant "completing" the line – the entire "continuum", finding a "real" number for every possible point. The cardinality of the real numbers – the numerical "size" as measured by Cantor's metaphor – became the "number of points on the line". And the Continuum hypothesis, which is about numbers, was thought of as being about points constituting the naturally continuous line.
>
> What was hidden was that "completeness" – closure with limit points – under the discretization program wound up *defining* what a "point" on a "line" was to be. (Lakoff i Núñez 2000: 290)

Uwagi te nie są, moim zdaniem, trafne, gdyż zawierają nieścisłości zarówno matematyczne, jak i historyczne. Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nie jest algebraicznie domknięte (np. wielomian $x^2 + 1$ nie ma pierwiastka należącego do tego ciała). Jego algebraicznym domknięciem jest ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, w którym jednak nie można określić porządku zgodnego z działaniami arytmetycznymi. Owo algebraiczne domknięcie prowadzi zatem od jednowymiarowego uniwersum liczbowego $\mathbb{R}$ do dwuwymiarowego takiego uniwersum $\mathbb{C}$. Domknięcie algebraiczne nie jest zatem bezpośrednio związane z „kompletnością" linii prostej, której reprezentacją jest $\mathbb{R}$. Ponadto, nie jest prawdą, że struktury niearchimedesowe nie były intensywnie badane mniej więcej w tym samym czasie, w którym uzyskano precyzyjną charakterystykę ciała liczb rzeczywistych, ze zwróceniem szczególnej uwagi na aksjomat zupełności. Dość obszernie na temat tego nieporozumienia pisze Philip Ehrlich w swoich pracach, np. w Ehrlich 2006.

2.3.8. Ciągłość dla liczb: metafora Dedekinda

Konstrukcję Dedekinda liczb rzeczywistych uważają autorzy za jeden z ważniejszych momentów w historii współczesnej matematyki. Jak wiadomo, podano różne definicje (można wyliczyć kilkanaście najważniejszych) pojęcia liczby rzeczywistej. Zwykle przywołuje się w podręcznikach jedną z dwóch definicji: Cantora (liczby rzeczywiste jako klasy abstrakcji stosownej relacji równoważności między ciągami Cauchy'ego) lub Dedekinda (liczby rzeczywiste jako przekroje zbioru liczb wymiernych).

Konstrukcję Dedekinda autorzy chcą oczywiście zaprezentować jako wynik zastosowania szczególnych metafor. Mówią więc o *metaforze przekroju geometrycznego Dedekinda* oraz *metaforze przekroju arytmetycznego Dedekinda*. Cytują wybrane fragmenty *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, przywołują intuicje związane z *ludową teorią mierzenia i wielkości* (*The Folk Theory of Measurement and Magnitude*), a konstrukcję Dedekinda podsumowują następująco:

> In short, the Dedekind Arithmetic Cut metaphor states: *A real number is an ordered pair of sets* (A, B) *of rational numbers, with all the rationals in* A *being less than all the rationals in* B*, and all the rational numbers are in* $A \cup B$. (Lakoff i Núñez 2000, 302)

Dodają również, że wspomniane metafory Dedekinda wzięte łącznie ukazują, że przekroje liczb wymiernych wyczerpują ogół liczb rzeczywistych, w szczególności eliminują z analizy nieskończenie małe. Argumentują następująco:

1. Metafora przekroju geometrycznego Dedekinda (wykorzystująca *ramę pojęciową przekroju*, *Dedekind's Cut Frame* – będącą metaforą *linia liczb wymiernych* wraz z punktem C na tejże linii, dzielącym wszystkie liczby wymierne na rozłączne zbiory A i B, gdzie wszystkie liczby w A są mniejsze od wszystkich liczb w B) polega na przyporządkowaniu tej ramie, w dziedzinie docelowej, połączenia metaforycznego *linia liczb rzeczywistych* wraz ze wspomnianą ramą.

2. Dedekind ma zakładać istnienie liczby rzeczywistej dla każdego punktu prostej. Daje to podstawę dla *Measurement Criterion for Completeness* liczb rzeczywistych.

3. Powyższe kryterium zakłada, wedle autorów, połączenie metaforyczne *liczby to punkty na linii* oraz *aksjomat Archimedesa*.

4. Z ostatnich dwóch założeń wynika jednoznaczność konstrukcji każdej liczby rzeczywistej.

5. Arytmetyczna metafora przekroju gwarantuje, że w zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowanych przez Dedekinda nie ma żadnych *luk* (*gaps*).

6. Tak więc, przekroje liczb wymiernych wyczerpują ogół liczb rzeczywistych.

7. Wreszcie, ciągłość prostej rzeczywistej miałaby być gwarantowana metaforą *Continuity for the Number Line Is Arithmetic Gaplessness*.

Przyznaję, że nie we wszystkim potrafię nadążyć za argumentacją autorów. W szczególności trudno mi się zgodzić, aby najważniejsze w konstrukcji Dedekinda było jego rzekome inspirowanie się pojęciami geometrycznymi.

2.3.9. Ciągłość „naturalna" i metafory Weierstrassa

Program *arytmetyzacji analizy* miał nadać wszelkim rozważaniom w tej dyscyplinie cechy *ścisłości*, pozbawić je jakichkolwiek odwołań do *intuicji*. Wielu matematyków przyczyniło się do realizacji tego programu, lecz za najważniejsze uważa się powszechnie osiągnięcia Weierstrassa.

Postanowiono wyeliminować z analizy wszelkie intuicyjne odwołania do geometrii, określić takie pojęcia, jak: granica, ciągłość funkcji, pochodna, całka wyłącznie w terminach liczbowych. Autorzy piszą, że zgodnie z zaleceniami tego programu:

1. „Naturalne" rozumienie ciągłości miało zostać wyeliminowane z rozumienia pojęć: przestrzeni, płaszczyzny, prostych, krzywych, figur geometrycznych. Geometria miała być ujmowana w terminach zbiorów dyskretnych punktów, a te z kolei miały być ujmowane jako liczby bądź ich układy.

2. Pomysł uważania krzywej jako wyniku ruchu punktu miał zostać porzucony. Żadnych odwołań do ruchu, upływu czasu, „zbliżania się" itp. Wszystkim tym sformułowaniom należało nadać szatę liczbową.

Oznaczało to istotną zmianę myślenia o matematyce, wymagało rektyfikacji pojęć matematycznych. Przyjęte rozwiązania tych problemów są akceptowane także dzisiaj. Przypomnijmy:

1. *Granica funkcji*. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną na przedziale otwartym zawierającym liczbę a oraz niech b będzie liczbą rzeczywistą. Mówimy, że b jest granicą funkcji f w punkcie a, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, gdy dla każdej $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x-a| < \delta$, to $|f(x)-b| < \varepsilon$. Przy tym, f może nie być zdefiniowana dla argumentu a (tj. $f(a)$ może nie mieć wartości będącej liczbą rzeczywistą).

2. *Ciągłość funkcji*. Funkcja f jest ciągła w punkcie (liczbie) a, gdy:

   (a) f jest zdefiniowana w przedziale otwartym zawierającym a,

   (b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ istnieje,

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. *Pochodna funkcji.* Przez pochodną $y = f'(x)$ funkcji f rozumiemy zbiór par (x, y) takich, że: dla każdego ε-otoczenia y istnieje δ-otoczenie x takie, że $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ znajduje się w tym ε-otoczeniu y.

Autorzy przypisują Weierstrassowi posługiwanie się BMI, podstawową metaforą nieskończoności, w ustalaniu definicji tych pojęć. Piszą też, że – mimo wszystko – nie udało mu się całkowicie pozbyć odwołań do geometrii. Stosunek odległości do czasu, gdy czas sam jest metaforycznie pojmowany jako odległość, występuje w metaforze Newtona-Leibniza: zmiana chwilowa to stosunek średniej zmiany odległości do nieskończenie małego przedziału czasu. To właśnie ma być oddawane arytmetycznie wyrażeniem $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, gdzie δ dąży do granicy 0. Autorzy są przekonani, że nie można całkowicie wyrugować w tym kontekście odwołań do geometrii:

> In these metaphors, there is implicit geometry: the ratio of *distance* to *time*, where time is itself conceptualized metaphorically as *distance*. If mathematics is taken to include the ideas that arithmetic expresses – that is, if calculus is taken to be about something – namely, change – then Weierstrass did not eliminate geometry at all. From the conceptual perspective, he just hid it. From the perspective of mathematical idea analysis, no one *could* eliminate the geometry metaphorically implicit in the very concept of change in classical mathematics. (Lakoff i Núñez 2000, 315)

Osobną jest sprawą, czy powyższe ogólne uwagi autorów są trafne. Czy takie teorie *zmiany*, które nie wymagają odwołania się do pojęcia *czasu*, są logicznie wykluczone?

Czy można uznać, że odtąd – po arytmetyzacji analizy w stylu Weierstrassa – istota *ciągłości* jest już w pełni, wyczerpująco dobrze określona? Chyba nie wszyscy matematycy zgodzą się z takim stwierdzeniem – por. np. uwagi kończące książkę Mioduszewski 1996. Zacytuję też zdanie kończące znaną książkę dotyczącą struktury prostej rzeczywistej:

> Z toho, čo sme uviedli, môžeme však dôjsť k rovnakému poučeniu, aké predpovedal N. Luzin v [59], str. 322: že prišiel čas, keď *je potrebné vykonať reformu našich predstav o kontinuu*. [Tutaj [59] odnosi się do pracy: Luzin, N. 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques*. Paris: Gauthier-Villars. J.P.] (Bukovský 1979, 206)

Lakoff i Núñez przywołują natomiast pewne uwagi Hermanna Weyla z jego rozprawy o kontinuum, także wyrażające wątpliwość, czy udało się już adekwatnie opisać istotę ciągłości, a co za tym idzie, strukturę kontinuum. Od siebie piszą zaś:

> Each attempt to understand the continuous in terms of the discrete is necessarily metaphorical – an attempt to understand one kind of thing in terms of another kind of thing. Indeed, it is an attempt to understand one kind of thing – the naturally continuous continuum – in terms of its very opposite – the discrete. We find it strange that it should be seen as a central task of mathematics to provide a metaphorical characterization of the continuum in terms of its opposite. Any such metaphor is bound to miss aspects of what the continuum is, and miss quite a bit.
>
> If "the great task" is to provide absolute, literal foundations for mathematics, then the attempt to conceptualize the continuous in terms of the discrete is self-defeating. First, such foundations cannot be literal; they can only be metaphorical. Second, as Weyl himself says, only "part of its content" can be conceptualized discretely. The rest must be left out. If Weyl is right, the task cannot be accomplished.
>
> We believe there is a greater task: understanding mathematical ideas. (Lakoff, Núñez 2000, 323–324)

2.3.10. Rozumienie wzoru Eulera $\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Ten rozdział to – rozłożona na części – analiza przypadku. Autorzy starają się pokazać, jak zastosować ich ujęcie – tworzenie pojęć matematycznych na drodze budowy metafor – w objaśnieniu znaczenia wybranego twierdzenia matematycznego, a mianowicie słynnego wzoru Eulera (w którym występuje pięć ważnych stałych matematycznych i obecne są dodawanie, mnożenie i potęgowanie i który to wzór bywa czasem nazywany najpiękniejszym wzorem matematyki):

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Nie omawiam tutaj w szczegółach tego rozdziału – dość może powiedzieć, że autorzy objaśniają czytelnikowi, czym są liczby e oraz π, jak rozumieć potęgowanie o wykładniku rzeczywistym i zespolonym, czym jest postać trygonometryczna liczby zespolonej itd. Oczywiście wykorzystują przy tym stosowne metafory. W efekcie czytelnik ma uzyskać to, co zdaniem autorów najważniejsze: rozumienie (w tym przypadku, rozumienie wzoru Eulera, rozumienie, dlaczego jest on prawdziwy). W przekonaniu autorów owo rozumienie to coś więcej niż przyswojenie sobie definicji oraz prześledzenie dowodu. Aby uzyskać rzeczywiste rozumienie w matematyce, trzeba, zdaniem autorów, odwoływać się zawsze do metaforycznej natury pojęć matematycznych.

2.3.11. Konkluzje autorów

Teoria ucieleśnionej matematyki

Autorzy oświadczają wyraźnie, iż są świadomi, że ich propozycje mogą zostać – z różnych powodów, w tym także światopoglądowych – odrzucone przez zawodowych matematyków, zwłaszcza gdy ci ostatni są emocjonalnie i z pełnym przekonaniem przywiązani do tego, co autorzy nazwali we wstępie mitologią matematyki. Lakoff i Núñez przyznają, że owa mitologia posiada walory estetyczne, jest sama w sobie piękna, a nawet – wedle ich własnego określenia – seksowna. Uważają też jednak, że jest ona szkodliwa społecznie, propagując nietrafny obraz matematyki oraz nadając matematykom status, który im się nie należy. Tego ostatniego stwierdzenia nie zamierzamy w tym miejscu komentować.

Autorzy twierdzą, że nie ma żadnego naukowego dowodu na to, że to, czego dowodzimy w ludzkiej matematyce, jest uniwersalną prawdą obiektywną, a nawet, że dowód taki w ogóle jest niemożliwy. Jednym z argumentów autorów na rzecz tego, że nie istnieje transcendentna matematyka, jest to, że podstawowe obiekty matematyczne – na przykład liczby – są w matematyce opisywane na wiele, wzajem niezgodnych sposobów: liczby to punkty na osi, liczby to zbiory, liczby to wartości pozycji w grach kombinatorycznych itd. Gdyby istniała transcendentna matematyka, to liczby (oraz inne obiekty matematyczne) musiałyby być ontologicznie precyzyjnie określone, a tak nie jest, zdaniem autorów.

Matematyka nie jest również, ich zdaniem, częścią świata fizycznego, zaś argumenty odwołujące się do „niewiarygodnej skuteczności matematyki” powinny być właściwie rozumiane. Na to poprawne rozumienie składają się następujące przekonania:

1. W świecie istnieją niezależne od nas regularności.
2. My, ludzie, wymyśliliśmy niesprzeczne oraz trwałe formy matematyki (zazwyczaj dające poprawne odpowiedzi w zastosowaniach).
3. Czasem fizycy odnoszą sukces w dopasowaniu ludzkiej matematyki do swoich – także ludzkich – konceptualizacji regularności obserwowanych w świecie fizycznym. Pojęcia matematyczne nie egzystują jednak w świecie fizycznym.

Jedyną realną matematyką jest – zdaniem autorów – matematyka ucieleśniona, za czym argumentują w następujący sposób:

> For human beings – or any other embodied beings – mathematics *is* embodied mathematics. The only mathematics we can know is the mathematics that our bodies and brains allow us to know. For this reason, the *theory of embodied mathematics* we have been describing throughout the book is anything but innocuous. As a theory of the only mathematics we know or can know, it is a theory of what mathematics *is* – what it really is!
>
> Because it is an empirical theory about the embodied mind, the theory of embodied mathematics is framed within the study of embodied cognition. The elements of embodied cognition are not axioms and proofs but image schemas, aspectual concepts, basic-level concepts, semantic frames, conceptual metaphors, conceptual blends, and so on. Because mathematics does not study the mind, it cannot study itself as a product of mind. The methods and apparatus of embodied cognitive science are necessary. (Lakoff i Núñez 2000, 346–347)

Teoria ucieleśnionej matematyki nie jest i nie może być teorią wewnątrz samej matematyki. Musi jednak czynić zadość wielu wymaganiom charakterystycznym dla nauk kognitywnych w ogólności. Oprócz empirycznych poświadczeń eksperymentalnych teorie z tych nauk muszą mieć moc wyjaśniającą, a więc powinny wyjaśniać np., w jaki sposób możemy posiadać pojęcia abstrakcyjne, a co ważniejsze, jak je rozumiemy. Odnosi się to, w naszym przypadku, do wszelkich pojęć matematycznych. Porządna teoria kognitywistyczna powinna wyjaśniać, jak rozumiemy takie pojęcia. Przy tym rozumienie, zdaniem Lakoffa i Núñeza, nie może zostać sprowadzone jedynie do znajomości aksjomatów, twierdzeń, dowodów i do symbolicznego operowania na nich. Poznanie matematyczne powinno być objaśniane m.in. w odwołaniu do mechanizmów poznawczych oraz neuronowych (*neural*), obecnych w nieświadomym ludzkim systemie pojęciowym. Przypuszcza się, że w przypadku poznania matematycznego istotne są takie same mechanizmy, jak w przypadku każdego innego poznania – autorzy starali się to potwierdzić licznymi przykładami omawianymi wcześniej w tekście.

Poznanie matematyczne musi być objaśniane również w aspekcie historycznym. Zmienia się rozumienie pojęć matematycznych, zmieniają się zainteresowania i mody matematyczne.

Matematyka jest twórczością umysłową wykształconą dla badania obiektów świata zewnętrznego. Takie cechy matematyki, jak: uniwersalność, precyzja, niesprzeczność, stabilność, możliwość dokonywania uogólnień oraz odkryć autorzy wiążą z odpowiednimi własnościami obiektów doświadczenia potocznego.

Teoria ucieleśnionej matematyki, wsparta faktami z historii matematyki oraz wynikami badań szczegółowych, czyni, zdaniem autorów, następujące ustalenia:

1. Matematyka jest produktem ludzkim, zdeterminowanym przez naszą biologię, system pojęciowy oraz czynniki społeczne i kulturowe.

2. Zaawansowana matematyka powstaje jako wynik zdolności poznawczych wspólnych wszystkim ludziom (np. zdolność tworzenia metafor).

3. Proste struktury arytmetyczne są wrodzone.

4. Działy matematyki wyrastają z ludzkich zainteresowań i aktywności.

5. Precyzja w matematyce jest możliwa, ponieważ ludzie są w stanie dokonywać jasnych i dokładnych odróżnień dotyczących obiektów i kategorii. Jest ona ponadto wspierana przez ludzką zdolność symbolizowania.

6. Metafory pojęciowe są podstawowym, neuronalnie ugruntowanym mechanizmem poznawczym.

7. Wnioskowania i obliczenia przeprowadzone w społeczności matematyków nie mają skłonności do zmian w czasie lub między kulturami.

8. Matematyka nie jest monolitem, jeśli chodzi o jej najbardziej podstawowe teorie. Nie ma jednej geometrii, jednej teorii mnogości, jednej logiki formalnej.

9. Matematyka jest skuteczna w charakteryzowaniu przeróżnych aspektów świata oraz w przewidywaniu. Rozwijaliśmy się w taki sposób, że poznanie potoczne dopasowuje nas do świata. Matematyka jest systematycznym rozszerzeniem tego właśnie poznania.

Ponieważ pewne aspekty ludzkiego systemu poznawczego mają walor uniwersalności oraz są wyposażone w takie mechanizmy zachowujące wnioskowania, jak metafory pojęciowe, więc przeprowadzane w matematyce dowody i obliczenia są trwałe, możliwe są odkrycia bez odwołań do empirii, abstrahowanie, trwałe i naturalne powiązania pomiędzy różnymi działami matematyki oraz systematyczny rozwój matematyki w czasie.

Poznanie matematyczne uważają autorzy za ponadkulturowe, zwracają jednak uwagę, że formy tego poznania są w pewnym sensie kulturowo uwarunkowane – wystarczy wspomnieć greckie przeświadczenia, że zjawiska mają swoją istotę, że przedmiot poznania można i należy ugruntować na jakiejś podstawie, że rozumowania można reprezentować matematycznie w formie systemów logicznych – te przeświadczenia przekładają się na wzorzec uprawiania (poszczególnych działów) matematyki w postaci teorii aksjomatycznych. Matematyka w żadnym przypadku nie powinna być rozumiana na modłę postmodernistyczną, jako całkowicie dowolnie ukształtowana przez historię i kulturę. To raczej przekonanie o transcendentności matematyki zasługuje, zdaniem autorów, na nazwanie go równie antynaukowym jak radykalny postmodernizm.

Filozofia ucieleśnionej matematyki

Dla pytań o to, czym są obiekty matematyczne oraz czym jest prawda matematyczna (obu w sensie ucieleśnionej matematyki) autorzy podają odpowiedzi w kilku przypadkach szczególnych (liczba zero, zbiór pusty, suma nieskończona, liczba kardynalna $\aleph_0$). Są to, jak łatwo się domyślić, argumentacje wskazujące na metaforyczne pochodzenie tych obiektów oraz prawdziwości stwierdzeń o nich.

Jeśli chodzi natomiast o *The Formal Reduction Metaphor* – metaforę, która przyporządkowuje konstruktom teorio-mnogościowym pojęcia matematyczne, to autorzy dopuszczają tylko jedną jej interpretację, nazywaną przez nich kognitywną. Każe ona operować na pojęciach matematycznych w połączeniu z ich reprezentacjami teorio-mnogościowymi. Autorzy odrzucają natomiast drugą interpretację, wedle której pojęcia matematyczne miałyby być dosłownie redukowane do konstrukcji z teorii mnogości.

Jaki obraz matematyki wyłania się zatem z ustaleń autorów? Twierdzą oni, że udało im się obalić mity dotyczące matematyki, o których wspomniano we wstępie. Ponadto, uważają, że potraktowanie działalności matematyków oraz wyników tych działań może zostać – choćby wstępnie – scharakteryzowane poprzez wszechobecną metaforyzację, dokonywaną przez ucieleśniony umysł. Ich portret matematyki wygląda zatem następująco.

Matematyka jest naturalnym składnikiem bycia człowiekiem. Wyrasta z naszych ciał, mózgów oraz codziennych doświadczeń. Każda kultura dysponuje jakąś formą matematyki. Matematyka jest przedmiotem badania naukowego, i nie ma w tym niczego magicznego, mistycznego, tajemniczego. Jest konsekwencją ludzkiej historii ewolucyjnej, neurobiologii, zdolności poznawczych oraz kultury. Matematyka jest jednym z największych osiągnięć zbiorowej ludzkiej wyobraźni. Matematyka jest systemem ludzkich pojęć, który czyni niezwykły użytek ze zwykłych środków ludzkiego poznania. Ma takie, wymienione już wcześniej cechy, jak: uniwersalność, precyzja, niesprzeczność, stabilność, możliwość dokonywania uogólnień oraz odkryć.

Skuteczność matematyki jest wynikiem ewolucji oraz kultury. Ewolucja wykształciła nasze ciała i mózgi tak, że otrzymaliśmy neuronowe zdolności dla reprezentowania podstaw arytmetyki oraz pierwotnych zależności przestrzennych. Kultura pozwoliła, poprzez prowadzone przez wiele lat obserwacje natury, na wykształcenie coraz bardziej skomplikowanych środków matematycznych. Połączenie idei matematycznych oraz ludzkich doświadczeń świata ma miejsce w ludzkim umyśle. Pojęcia doświadczenia potocznego, takie jak zmiana, proporcja, wielkość, obrót, prawdopodobieństwo, rekurencja, iteracja oraz setki innych, zostały zmatematyzowane – matematyzacja zwykłych ludzkich pojęć jest zwykłym ludzkim wyzwaniem. Rozwój systemów pisma umożliwił też rozwój notacji matematycznej. Metafory dyskretyzacji pozwoliły na precyzyjne ujęcie stale rosnącej liczby pojęć matematycznych. Ludzka zdolność do tworzenia metafor pojęciowych pozwoliła na matematyzację (czasem nawet arytmetyzację) pojęć potocznych, takich jak: kolekcje, wymiary, symetrie, zależność i niezależność przyczynowa itd.

Wszystko w matematyce daje się – przynajmniej w zasadzie – zrozumieć. Ludzka inteligencja ma wiele aspektów, inteligencja matematyczna to tylko jej część (podobnie jak inteligencja muzyczna, literacka itd.). Matematyka jest twórcza i otwarta. Wykorzystywać możemy coraz to nowe metafory pojęciowe oraz ich złącza. Ludzkie systemy pojęciowe nie są monolityczne. Dopuszczają alternatywne wersje pojęć oraz perspektyw metaforycznych w wielu aspektach naszego życia. Także w matematyce: są różne koncepcje nieskończoności, różne pojęcia liczby, różne systemy logiczne, nie ma jednej tylko teorii mnogości czy tylko jednej geometrii.

Matematyka jest cudownym przykładem piękna, bogactwa, złożoności, różnorodności oraz ważkości ludzkich pojęć. Za stworzenie matematyki odpowiedzialne są istoty ludzkie, są one też odpowiedzialne za jej rozwój.

Portret matematyki ma ludzką twarz, piszą autorzy. Można rzecz jasna twierdzić, że niektóre z wymienionych wyżej stwierdzeń to ogólniki, banały bądź metafory, a ich akceptacja nie przyczynia się do głębszego zrozumienia, czym właściwie jest matematyka i skąd się wzięła. Jak odpowiadać na takie pytania? Autorzy widzą takie podstawy matematyki następująco:

> If there are "foundations" for mathematics, they are *conceptual foundations – mind-based foundations*. They would consist of a thorough mathematical idea analysis that worked out in detail the conceptual structure of each mathematical domain, showing how those concepts are ultimately grounded in bodily experience and just what the network of ideas across mathematical disciplines looks like.
>
> This would be a major intellectual undertaking. We consider this book an early step in that direction. (Lakoff i Núñez 2000, 376)

2.4. Matematyka ucieleśniona: krytyka

Moje uwagi krytyczne są dwóch rodzajów. Po pierwsze, staram się wskazać na konkretne problemy matematyczne, które – jak się zdaje – umykają opisowi proponowanemu przez Lakoffa i Núñeza. Przy okazji, wskazuję na kilka bałamutnych stwierdzeń w tekście (co zresztą czyniłem już wcześniej, sprawozdając propozycje autorów). Po drugie, formułuję pewne polemiczne uwagi natury filozoficznej. Wreszcie, przytaczam też niektóre uwagi krytyczne innych autorów.

2.4.1. Wyzwania i wątpliwości matematyczne

Moje wątpliwości przedstawię w formie dość skrótowej, hasłowo jedynie przywołując odnośne zagadnienia. W każdym przypadku możliwa jest, jak sądzę, głębsza analiza anonsowanego problemu, która pozwoliłaby przesądzić, czy zarzuty są zasadne, czy też np. wynikają z mojego niezrozumienia.

Teoria mnogości

Mówiąc o teorii mnogości, autorzy wykorzystują kilka metafor: metaforę *zbiory to pojemniki*, podstawową metaforę nieskończoności i kilka dalszych, o nieco mniejszym znaczeniu. Warto może przywołać w tym miejscu znaną anegdotę, ilustrującą poglądy twórców teorii mnogości:

> Dedekind wyraził się odnośnie pojęcia zbioru jak następuje: wyobraża on sobie zbiór jak zamknięty worek, który zawiera zupełnie określone przedmioty; przedmiotów tych jednak nie widzimy i nie wiemy o nich nic, poza tym, że istnieją i są określone. W pewien czas później Cantor sformułował swój pogląd na zbiory: uniósł on swą ogromną figurę, podniesionym ramieniem zatoczył wielki łuk i kierując swój wzrok w nieokreślony punkt powiedział: *ja wyobrażam sobie zbiór, jako przepaść*. (Mostowski 1967, 100)

Andrzej Mostowski cytował (we własnym tłumaczeniu) z: Becker 1954, 316. Artykuł Mostowskiego ukazał się tuż po uzyskaniu przez Paula Cohena jego znanego wyniku, dotyczącego niezależności hipotezy kontinuum od aksjomatów teorii mnogości. Warto też może przywołać jeszcze ostrożną predykcję Mostowskiego dotyczącą możliwej przyszłości teorii mnogości:

> Istotnym wynikiem, do którego doprowadzają rozważania na temat pojęcia zbioru jest to, że pojęcie to nie jest należycie sprecyzowane i że istnieją różne sposoby uściślania go. Tak np. dzięki Gödlowi rozumiemy dobrze pojęcie zbioru definiowalnego predykatywnie (konstruowalnego),

> a także pojęcie zbioru definiowalnego za pomocą liczb porządkowych. Modele skonstruowane przez Cohena sugerują możliwość jeszcze innych pojęć, w których znajdą swój wyraz niektóre koncepcje intuicjonistów, a zapewne w przyszłości znajdą się inne jeszcze pojęcia. Być może będziemy operowali w przyszłości różnymi pojęciami zbiorów, podobnie jak dziś operujemy różnymi rodzajami przestrzeni. Przypuszczać należy, że te różne teorie zbiorów będą miały wspólną część, która wystarczy do uzasadnienia podstawowych faktów teorii mnogości potrzebnych do dowodów niezbędnych dla ugruntowania podstawowych pojęć matematycznych. Jak ta wspólna część różnych teorii mnogości ustosunkuje się do zagadnienia wysokich mocy trudno teraz przewidzieć.
>
> O ile naszkicowana wyżej sytuacja powstanie, to teoria mnogości nie będzie oczywiście mogła pretendować do zajmowania centralnego miejsca w matematyce w tym sensie, że każda teoria będzie sprowadzalna do teorii mnogości.
>
> Nie jest wykluczone, że sam Cantor uświadamiał sobie, że pojęcie zbioru nie jest dostatecznie ostro sprecyzowane. Jego osobliwą uwagę, którą zacytowaliśmy na początku artykułu, można interpretować w ten właśnie sposób. (Mostowski 1967, 110–111)

Mija już ponad pół wieku od napisania artykułu Mostowskiego. Teoria mnogości w dalszym ciągu uważana jest za możliwą podstawę formalną matematyki (i to wbrew opinii niektórych z jej twórców – np. Skolema i von Neumanna). „Normalni” matematycy (ci, którzy nie pracują nad podstawami samej teorii mnogości) nie przejmują się zbytnio tym, że aksjomatyka tej teorii podaje jedynie dość mglistą charakterystykę pojęcia zbioru. Chciałoby się rzec, że tacy matematycy godzą się na takie metaforyczne wykorzystywanie pojęcia zbioru dla ujmowania coraz to nowych pojęć matematycznych. Czy jednak w takim przypadku istotnie dziedzina wyjściowa (zbiory) jest bardziej konkretna od dziedzin docelowych (wszelakie inne dziedziny matematyczne)? Pytanie to łączy się z omawianą przez autorów *metaforą redukcji formalnej* (Lakoff i Núñez 2000, 369–376).

Przy omawianiu aksjomatów teorii mnogości autorzy pomijają jeden z nich, a mianowicie aksjomat *zastępowania* (właściwie: schemat aksjomatu zastępowania). Używając języka potocznego, bez szczegółów technicznych, aksjomat ten stwierdza, że obraz zbioru względem funkcji także jest zbiorem. Jest on konieczny np. dla zagwarantowania istnienia liczby kardynalnej $\aleph_\omega$. Jednak ważniejsze jest to, iż to właśnie schemat aksjomatu zastępowania umożliwia wszelkie konstrukcje wykorzystujące *indukcję pozaskończoną* – bez niego nie można poprawnie zdefiniować kroków granicznych w takiej indukcji. A sama technika indukcji pozaskończonej jest fundamentalna dla teorii mnogości. Nie jest dla mnie jasne, dlaczego autorzy opuszczają ten problem, o czym pisałem już wcześniej w niniejszym tekście.

Metafora Boolowska oraz BMI to chyba nie jedyne metafory, których doszukiwać się można w uzasadnianiu konstrukcji z teorii mnogości. Zarówno dla twórców tej teorii (dla Cantora oraz Zermela), jak i dla ich następców, podstawowa była i jest idea *ufundowania*, sprowadzająca się do tego, że zbiory można *dobrze uporządkować*. Ufundowanie zbiorów to rzecz podstawowa dla *iteratywnej* koncepcji tworzenia zbiorów, która jest powszechnie przyjmowana. Istnieją również ujęcia teorii zbiorów bez ufundowania, lecz mają one mniejsze znaczenie w praktyce matematycznej.

Aksjomaty nieskończoności

Wspomniany wyżej schemat aksjomatu zastępowania sam jest swoistym *aksjomatem nieskończoności*. Oprócz niego (i „zwykłego" aksjomatu nieskończoności) rozpatrujemy we współczesnej teorii mnogości olbrzymią różnorodność dalszych aksjomatów nieskończoności (aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych). Motywacje dla tych rozważań są wielorakie.

Po pierwsze, aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych powiązane są z *mocą niesprzeczności* teorii (*consistency strength*) – w teoriach z takimi aksjomatami możemy udowodnić niesprzeczność teorii bez nich. Dla przykładu, aksjomat istnienia liczby mocno nieosiągalnej pozwala udowodnić niesprzeczność teorii mnogości ZF. Mamy więc w tym przypadku do czynienia z motywacją metateoretyczną.

Po drugie, argumentacja za przyjmowaniem aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych ma też charakter po części pragmatyczny. Daje wyraz przekonaniu (obecnie powszechnie akceptowanemu wśród teoretyków), że chcemy mieć do dyspozycji możliwie największe uniwersum zbiorów. Pisze się nawet o analogii między tymi aksjomatami a aksjomatem zupełności w systemie geometrii Hilberta. Wcześniej rozważane aksjomaty *ograniczenia*, które miały minimalizować uniwersum zbiorów, zostały odrzucone. Więcej na ten temat pisałem w Pogonowski 2019.

Wreszcie duże liczby kardynalne zasługują na badanie dla nich samych. Zdarza się jednak i tak, że ich istnienie jest warunkiem koniecznym dla istnienia rozwiązań konkretnych problemów matematycznych, spoza samej teorii mnogości.

Warto zauważyć, że poglądy na temat aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych ulegały zmianie: Hausdorff uważał, że np. liczby mocno nieosiągalne nie będą miały żadnego znaczenia w praktyce badawczej matematyki, Zermelo postulował już istnienie całej pozaskończonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych, obecnie liczby te są najmniejszymi wśród rozważanych.

Warto też przypomnieć, że istnieje wiele metod, za pomocą których wprowadzane są coraz to nowe duże liczby kardynalne. Nie jest więc tak, że kolejne „piętra nieskończoności" zdobywamy, posługując się wyłącznie opisywaną przez autorów podstawową metaforą nieskończoności. Istnieje na ten temat olbrzymia literatura, zainteresowany czytelnik zechce zajrzeć np. do klasycznej już dziś monografii Kanamori 1994.

Czytelnik *Where mathematics comes from*, który nie zna teorii mnogości może odnieść wrażenie, że kolejne nieskończoności wprowadzane są na mocy aksjomatów: nieskończoności, zbioru potęgowego oraz sumy. Tak oczywiście nie jest. Autorzy ograniczyli się do wspomnienia twierdzenia Cantora (o nierównoliczności zbioru z rodziną wszystkich jego podzbiorów), ale nie wspomnieli, w jaki sposób naprawdę wprowadza się w teorii mnogości skalę alefów.

Metafory Dedekinda

Autorzy wiele piszą o konstrukcji Dedekinda liczb rzeczywistych, przypisując mu posługiwanie się specyficznymi metaforami. Nie za wszystkimi ich argumentami potrafię nadążyć. Wyliczyłem te wątpliwości w Pogonowski 2011. W szczególności, trudno mi się zgodzić, że – jak chcą autorzy – inspiracje Dedekinda były natury geometrycznej. W Pogonowski 2011 pisałem (pomijam numerację poszczególnych stwierdzeń):

Istotnie, Dedekind chciał wyeliminować z mówienia o liczbach rzeczywistych wszelkie intuicyjne odniesienia geometryczne. Na drugim niejako planie wskazywał na możliwość ustalenia wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między skonstruowanymi liczbami rzeczywistymi a punktami prostej rzeczywistej.

Dedekind podaje dowód, że rodzina wszystkich przekrojów liczb wymiernych, ze stosownie zdefiniowanym porządkiem tych przekrojów, ma własność *ciągłości*, w tym sensie, iż porządek ten nie zawiera luk.

Dedekind pokazuje, że w zbiorze wszystkich przekrojów liczb wymiernych określić można działania arytmetyczne. Współcześnie dodamy: operacje arytmetyczne zgodne z porządkiem. Liczby rzeczywiste Dedekinda tworzą więc ciało uporządkowane w sposób ciągły. Każde ciało uporządkowane w sposób ciągły jest archimedesowe. Dedekind pokazuje, że liczby wymierne tworzą *ośrodek* w zbiorze liczb rzeczywistych.

Gdy rozważymy liczby hiperrzeczywiste ze standardowo definiowanym dla nich porządkiem $(\mathbb{R}^*, <_U)$ (gdzie U jest używanym w konstrukcji ultrafiltrem niegłównym), to można zauważyć, że:

1. Rodzina $\mathcal{R}^*$ wszystkich przekrojów zbioru $(\mathbb{R}^*, <_U)$ jest ciągła w sensie Dedekinda. Ani $(\mathbb{R}^*, <_U)$, ani rodzina $\mathcal{R}^*$ tych przekrojów nie jest przestrzenią ośrodkową. W konsekwencji, żadna z tych struktur nie jest izomorficzna ze standardowo uporządkowanym zbiorem liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$.

2. Liczby nieskończenie małe są domknięte na dodawanie i mnożenie (tworzą pierścień). Jednak w zbiorze wszystkich przekrojów struktury $(\mathbb{R}^*, <_U)$ nie można określić działań arytmetycznych tak, aby uzyskać strukturę ciała. Gdy bowiem rozważyć przekrój (A, B) taki, że A to wszystkie ujemne liczby hiperrzeczywiste oraz liczby nieskończenie małe, a B to reszta liczb hiperrzeczywistych, to widać, iż przekrój ten wyznacza lukę. Zgodnie z definicją proponowaną dla przekrojów powinno być:
$$(A, B) + (A, B) = (A, B)$$
$$(A, B) \times (A, B) = (A, B),$$
a więc nie otrzymujemy ani grupy addytywnej ze względu na dodawanie, ani grupy multiplikatywnej ze względu na mnożenie.

3. Nauka z tego m.in. taka (por. Błaszczyk 2007, 183, Batóg 2000, 30–31), że uzupełnianie zbioru uporządkowanego metodą Dedekinda jest w samej swojej istocie *rozszerzaniem ciała* (liczb wymiernych), a nie po prostu „wypełnianiem luk w porządku” nowymi elementami.

Dedekind wykonał przede wszystkim pewną (znakomitą!) robotę algebraiczną. Pokazał zarówno metodę konstrukcji pewnej specjalnej struktury arytmetyczno-porządkowej (liczb rzeczywistych właśnie), ale także dał podstawy pod *metodę uzupełniania Dedekinda*, powszechnie wykorzystywaną w teorii struktur porządkowych, topologii itd.

Dedekind wskazał na możliwość interpretacji *ciągłości* prostej rzeczywistej w terminach arytmetycznych. Przy tym, owa prosta rzeczywista była obiektem dość tajemniczym – w systemie geometrii Euklidesa nie występują proste (są jedynie odcinki, które można dowolnie przedłużać). Jeśli więc mówić o jakiejś metaforze Dedekinda, to należałoby chyba odnosić ją do ukazanej przezeń odpowiedniości pomiędzy zdefiniowanymi w jego pracy (z uwzględnieniem własności arytmetycznych i porządkowych) liczbami rzeczywistymi a wielkościami geometrycznymi wiązanymi tradycyjnie z odcinkami.

Dedekind operował *zbiorami* oraz *liczbami wymiernymi* (oraz porządkiem i operacjami arytmetycznymi na nich), lecz nie dysponował jeszcze ani teorią zbiorów (tej dostarczył później Cantor, a w postaci aksjomatycznej ugruntował Zermelo), ani teorią liczb wymiernych (tę z kolei podał Weber). Teorię liczb wymiernych wreszcie oprzeć można było na aksjomatycznej teorii liczb naturalnych, którą opracował Peano.

Na marginesie dodam, że aksjomat ciągłości jest niezależny od aksjomatów geometrii absolutnej. Istnieją modele tej geometrii, w których aksjomat ten nie zachodzi.

Proste metafory przekroju (geometryczna i arytmetyczna, w terminologii autorów) to zatem jeszcze nie wszystko, jeśli chodzi o *analizę idei matematycznych* związanych z konstrukcją Dedekinda. Wnikliwą analizę konstrukcji Dedekinda, wraz z wieloma odniesieniami do innych konstrukcji liczb rzeczywistych, zawiera monografia Błaszczyk 2007. Niezwykle interesujące uwagi dotyczące rozumienia pojęcia ciągłości w matematyce znajdujemy np. w Mioduszewski 1996.

Podstawowa metafora nieskończoności

Pozwolę sobie nieco żartobliwie odnieść się do jednego z aspektów ulubionej metafory autorów, a mianowicie podstawowej metafory nieskończoności (BMI). Otóż piszą oni, że obiekt graniczny, który tworzymy w wyniku stosowania tej metafory, jest zawsze wyznaczony jednoznacznie. W artykule Núñez 2005 na stronie 1772 znajdujemy rysunek przedstawiający początek nieskończonego ciągu wielokątów foremnych, którego „obiektem granicznym” miałby być okrąg, jako „wielokąt o nieskończenie wielu bokach nieskończenie małej długości”. Podpis pod rysunkiem głosi:

> A case of actual infinity: the sequence of regular polygons with n sides, starting with $n = 3$ (assuming that the distance from the center to any of the vertices is constant). The sequence is endless but it is conceived as being completed. The final resultant state is a very peculiar entity, namely, a circle conceived as a polygon with infinitely many sides of infinitely small magnitude.

Moja żartobliwa wątpliwość jest następująca: dlaczego to właśnie okrąg miałby być obiektem granicznym w tym przypadku, a nie np. zbiór wszystkich punktów okręgu o współrzędnych *wymiernych*? Ten pierwszy ma moc kontinuum, ten drugi jest przeliczalny. Ponadto, ten drugi ma bardzo ładną strukturę algebraiczną oraz interpretację geometryczną – zob. np. Tan 1996. Warto może przy tej okazji dodać, że badanie punktów (np. punktów wymiernych) na krzywych algebraicznych to niezwykle ważna dziedzina działalności matematyków. Wiąże się z nią np. spektakularny dowód Wilesa twierdzenia Fermata, twierdzenie Mordella-Weila, a wiele problemów w dalszym ciągu czeka na rozwiązanie.

Innym jeszcze kandydatem na obiekt graniczny w rozważanym tutaj przypadku mógłby być, jak sądzę, zbiór wszystkich punktów okręgu o współrzędnych będących liczbami algebraicznymi. Można chyba zasadnie pytać o jeszcze inne zbiory, np. wszystkich punktów okręgu o współrzędnych będących liczbami *obliczalnymi* lub *definiowalnymi* – w każdym z tych przypadków „obiekt graniczny" rozważanej konstrukcji nie ma kontinuum elementów. Nieco przekornie można zatem zapytać, dlaczego Núñez „przeskakuje" nieskończoność przeliczalną w swojej metaforze i ląduje w kontinuum punktów okręgu. Ponadto, widać wyraźnie z podanych przykładów, że jednoznaczność tego „obiektu granicznego" okazuje się pozorna – można za taki obiekt uważać różne konstrukcje.

W matematyce rozważamy zarówno struktury, które zawierają ciągi elementów wraz ze swoimi obiektami granicznymi (w sensie porządkowym lub topologicznym), jak też struktury, które złożone są z ciągów nieskończonych, ale nie zawierają granic owych ciągów. Nie jest chyba tak, że *zawsze* czujemy się zmuszeni, kierując się BMI, uzupełniać te ostatnie struktury o elementy graniczne.

Przykłady topologiczne

Topologia jest stosunkowo młodą dyscypliną matematyczną (w porównaniu np. z arytmetyką czy analizą). Jednak już w topologii ogólnej znajdujemy konstrukcje, które daleko odbiegają od wszelkich intuicyjnych wyobrażeń doświadczenia potocznego, a więc można spodziewać się, że autorzy *Where mathematics comes from* mieliby trudności ze znajdowaniem w każdym z tych przypadków stosownych metafor, odpowiedzialnych za tworzenie pojęć. Rzeczy stają się jeszcze bardziej skomplikowane w przypadku nowszych działów topologii, np. topologii algebraicznej lub różniczkowej. Dla przykładu, musimy się pożegnać z intuicjami potocznymi przy rozważaniu takich obiektów jak (a to jedynie najprostsze, klasyczne przykłady): sfera rogata Alexandera, jeziora Wady, krzywa Knastera.

Konstrukcje topologiczne mogą dotyczyć obiektów całkiem „oswojonych", dobrze rozpoznawanych przez intuicje potoczne, ale mogą jednocześnie nie tylko wykraczać poza te intuicje, ale wręcz im dramatycznie przeczyć. Ładnym przykładem jest twierdzenie Smale'a o „przenicowaniu" sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Posługujemy się w nim dobrze znanym obiektem (sferą dwuwymiarową) oraz bardzo intuicyjną techniką (homotopijna równoważność), ale otrzymany wynik jest szokujący z punktu widzenia doświadczenia potocznego. I jak tu metaforyzować?

Sądzę, że trudności w proponowanej przez autorów „redukcji metaforycznej" sprawiać mogą też np. *egzotyczne* struktury różniczkowe. Udowodniono, że istnieją *sfery egzotyczne*, czyli sfery, które są homeomorficzne ze zwykłymi sferami, lecz nie są z nimi dyfeomorficzne. Fakt ten ukazuje, że poddać trzeba rewizji nasze intuicyjne przekonania dotyczące struktur różniczkowych, a co najmniej wyzbyć się musimy przekonania, że struktury takie muszą być jednoznaczne. Dodajmy, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ istnieje kontinuum niedyfeomorficznych struktur różniczkowych. Wymiar 4 jest tu wyróżniony: dla żadnej $n \neq 4$ nie istnieją struktury egzotyczne na $\mathbb{R}^n$. Nie wiadomo natomiast obecnie (2020), czy istnieją egzotyczne sfery czterowymiarowe. Jeśli mielibyśmy stosować jakieś metafory w charakterystyce struktur egzotycznych, to musiałyby one zapewne być jakościowo istotnie różne od „zwykłych" metafor, tych euklidesowych czy kartezjańskich.

Inny jeszcze problem topologiczny może jawić się jako trudność dla autorów omawianej koncepcji. Chodzi mianowicie o problem trudny dla samych topologów – należyte scharakteryzowanie pojęcia *wymiaru topologicznego*. Nie chodzi przy tym o to, że brak takiej charakterystyki. Jednak trzy dobrze opracowane pojęcia wymiaru (mały i duży wymiar indukcyjny oraz wymiar pokryciowy) pokrywają się ze sobą w przypadku ośrodkowych przestrzeni metrycznych, natomiast rozchodzą się w szerszych klasach przestrzeni.

Czy sensowne jest zatem pytanie, które z tych pojęć jest *trafne*? „Rekonstrukcja metaforyczna", w stylu proponowanym przez autorów, powinna jakoś odzwierciedlać te problemy związane z poszukiwaniem definicji pojęcia wymiaru w topologii. Nie mówiąc już o tym, że powinna zmierzyć się także z całą plejadą innych jeszcze rozumień pojęcia wymiaru, stosowanych w topologii, analizie funkcjonalnej, algebrze liniowej, geometrii różniczkowej.

Wspomnę wreszcie na koniec, że kłopoty dla „metaforycznego rozumienia" stwarza wymiar iloczynu topologicznego przestrzeni. Chciałoby się zapewne uznać, że wymiar iloczynu topologicznego przestrzeni jest sumą wymiarów mnożonych przez siebie przestrzeni (np. walec jest wymiaru trzy, jako iloczyn koła o wymiarze dwa i odcinka o wymiarze jeden, torus jest wymiaru dwa jako iloczyn dwóch jednowymiarowych okręgów itp.). Pontriagin podał jednak w 1930 roku przykład ukazujący, że zależność takiego logarytmicznego typu nie zachodzi w ogólności: skonstruował przestrzenie dwuwymiarowe, których iloczyn okazał się trójwymiarowy. Ten przykład – i niezliczone mnóstwo innych – pokazuje, że konstrukcje pewnych obiektów matematycznych umykają jednak procedurze metaforyzowania odwołującej się jedynie do wyobrażeń doświadczenia potocznego.

We współczesnych podręcznikach analizy lub topologii podaje się całe mnóstwo dalszych konstrukcji, które są kontrprzykładami, ukazującymi ograniczoną stosowalność pewnych pojęć, niezachodzenie niektórych twierdzeń dla szczególnych przypadków itd. – por. też np. Gelmbaum i Olmsted 1990, 2003, Steen i Seebach 1995, Wise i Hall 1993.

Elementy idealne

Autorzy starają się ukazać BMI „w działaniu" na różnych obszarach matematyki. Na podstawie tej metafory rozumiane ma być wprowadzanie *punktów w nieskończoności*: w przypadku geometrii *rzutowej* chodzi o całą *prostą w nieskończoności*, złożoną z takich punktów, natomiast w przypadku geometrii *inwersji* o jeden punkt w nieskończoności. Autorzy wyraźnie podkreślają, że czym innym są tu definicje matematyczne tych obiektów, a czym innym sama ich konceptualizacja. Z matematycznego punktu widzenia geometria inwersji wyznaczona jest przez odwzorowania, których niezmiennikami są *uogólnione okręgi*. Z kolei w geometrii rzutowej niezmiennikami przekształceń rzutowych są własności incydencji oraz dwustosunek czwórki punktów.

Warto zwrócić uwagę na to, że wprowadzanie punktów i prostych w nieskończoności może zostać ujęte z nieco ogólniejszego punktu widzenia – jako dołączanie do rozważanego uniwersum pewnych *elementów idealnych*, w celu uzyskania struktury o pożądanych, z różnych względów, własnościach matematycznych. Oto co pisał na ten temat David Hilbert:

> Całkiem inne, jedyne w swoim rodzaju znaczenie i zasadnicze ujęcie pojęcia nieskończoności poznajemy za pomocą ze wszech miar ważnej i owocnej metody *elementów idealnych*. Znajduje ona zastosowanie już w elementarnej geometrii płaszczyzny. W geometrii tej punkty i proste są pierwotnie jedynymi rzeczywistymi i realnie istniejącymi obiektami. Obowiązuje dla nich m.in. aksjomat incydencji (das Axiom der Verknüpfung): przez dwa punkty przechodzi zawsze jedna i tylko jedna prosta. Stąd wynika wniosek, że dwie proste przecinają się co najwyżej w jednym punkcie. Nie zachodzi jednak twierdzenie, że dwie proste przecinają się zawsze w jednym punkcie; dwie proste mogą być do siebie równoległe. Wiadomo jednak, że poprzez wprowadzenie elementów idealnych, mianowicie punktów i prostych w nieskończoności (unendlich ferne Punkte und unendlich ferne Gerade), można uzyskać to, że twierdzenie, według którego dwie proste przecinają się zawsze w jednym i tylko jednym punkcie, będzie obowiązywać w całej ogólności.

> Idealne elementy „w nieskończoności" (die idealen „unendlichfernen" Elemente) dają tę korzyść, że czynią system twierdzeń o incydencji (Verknüpfungsgesetze) prostym i przejrzystym, tak jak to tylko jest możliwe. Ze względu na symetrię pomiędzy punktami i prostymi powstaje, jak wiadomo, tak owocna zasada dualności w geometrii.
>
> Zwykłe wielkości *zespolone-urojone* (*komplex-imaginäre Grössa*) w algebrze są także przykładem użycia elementów idealnych; służą one tu do uproszczenia twierdzeń o istnieniu i liczbie pierwiastków równania.
>
> Tak jak w geometrii używa się nieskończenie wielu prostych, mianowicie równoległych do siebie, do definicji jednego punktu idealnego, tak też w arytmetyce wyższej pewne systemy nieskończenie wielu liczb zostają ujęte razem w postaci jednego *ideału liczbowego* (Zahlenideal) i ma tu miejsce najgenialniejsze zastosowanie zasady elementów idealnych. [Tu przypis Romana Murawskiego: Hilbert ma tu na myśli teorię Kummera-Dedekinda. Otóż w drugiej połowie XIX w. w związku z badaniami nad wielkim twierdzeniem Fermata (i ogólnie nad kwestią rozwiązalności równań diofantycznych, czyli równań postaci
>
> $$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
>
> gdzie f i g są wielomianami o współczynnikach całkowitych) stworzono pewne metody badania równań diofantycznych, opierające się na twierdzeniu, że w odpowiednim pierścieniu każdy ideał rozkłada się jednoznacznie na iloczyn ideałów pierwszych (zwanych w klasycznej wersji liczbami idealnymi). Doprowadziło to do wyróżnienia pewnej szerokiej klasy pierścieni, zwanych pierścieniami Dedekinda, która odgrywa dziś bardzo istotną rolę w algebrze i w teorii liczb. J.P.] Jeżeli stosujemy zasadę tę systematycznie wewnątrz pewnego algebraicznego ciała liczbowego, to odnajdziemy w nim proste i dobrze znane twierdzenia o podzielności, jakie zachodzą dla zwykłych liczb całkowitych 1, 2, 3,... (Hilbert 1926, cytuję za przekładem w: Murawski 2002)

Przywołuję ten dość długi cytat dla ukazania, że czym innym jest metaforyczna eksplikacja jakiejś konstrukcji pojęciowej, a czymś zgoła innym powody, motywacje, inspiracje itp., dla których owa konstrukcja dokonywana jest w matematyce.

Akty przekory

Matematyka jest twórczością swobodną, co z zadowoleniem podkreśla wielu wybitnych matematyków. Oczywiście obowiązują w tej twórczości pewne zasady, np. wymóg niesprzeczności, dochowanie starań, aby tworzona teoria była owocna, kierowanie się względami estetycznymi, które m.in. zalecają prostotę, elegancję i ogólność rozważań. Osobnym problemem, wymagającym badań empirycznych, jest to, czy – a jeśli tak, to jak – twórczość ta ograniczona (uwarunkowana) jest ludzkimi strukturami poznawczymi. Proponując swoją teorię funkcjonowania metafor pojęciowych Lakoff i Núñez chcą zwrócić uwagę na takie właśnie uwarunkowania.

Pozwolę sobie – nie do końca poważnie – wskazać na jeden z aspektów owej swobody w twórczości matematycznej, a mianowicie akty przekory. W Pogonowski 2011 podałem parę przykładów takich przekornych działań w matematyce, powtórzę je tutaj:

Algebra. Wiadomo z historii algebry, że np. liczby ujemne oraz urojone przyjmowane były z wielkimi początkowo oporami. Dość długo trwało, zanim uznane one zostały za byty matematyczne prawomocnie istniejące. Do tego uznania przyczyniły się w pierwszym względzie ustalenia, że liczby całkowite oraz liczby zespolone tworzą dobrze zachowujące się struktury (w pierwszym przypadku pierścień, w drugim ciało, w dzisiejszej terminologii) oraz uzyskanie ich poglądowych reprezentacji (np. geometrycznej interpretacji liczb zespolonych). W oswajaniu ich widać jednak również pewien odcień przekory właśnie – dopuśćmy istnienie nowych bytów matematycznych, choć konserwatywna wspólnota matematyków dotąd się przed nimi wzbraniała.

Geometria. Stworzenie geometrii nieeuklidesowych wymagało zaiste wielkiego aktu przekory. Z jednej strony, skoro wysiłki zmierzające do udowodnienia aksjomatu o równoległych nie przynosiły efektu, to niejako naturalne było przypuszczenie, że aksjomatu tego nie da się właśnie wyprowadzić z pozostałych. Ale samo rozważenie (jednej z dwóch wersji) jego zaprzeczenia było przekorne, przy powszechnym przecież ówcześnie przekonaniu, iż geometria ma prawdziwie opisywać rzeczywistość fizyczną.

Teoria mnogości. Jedna z metod tworzenia nowych zbiorów nieskończonych jest – wedle Andrzeja Mostowskiego – następująca. Przypuśćmy, że konstruując zbiory za pomocą operacji opisanych w aksjomatach teorii mnogości, które przyjęliśmy dotychczas, napotykamy stale na zbiory o pewnej własności P. Jeśli nie ma oczywistych powodów, które skłaniałyby nas do przyjęcia twierdzenia, że każdy zbiór ma własność P, to przyjmujemy nowy aksjomat, stwierdzający, że istnieją zbiory właśnie nieposiadające własności P. W ten sposób otrzymujemy np. liczby *mierzalne*.

Można oczywiście nie brać poważnie propozycji uważania matematyków za przekornych z natury. Pozostają jednak do opisania związki między tworzeniem pojęć na drodze metaforycznej a takimi ważnymi procedurami matematycznymi jak np. uogólnianie bądź konstrukcje motywowane rozumowaniami przez analogię.

Zdania nierozstrzygalne

W tekście *Where mathematics comes from*, nigdzie nie znajdujemy deklaracji, iż stosowanie metafor pojęciowych wymusza jakiś czysto kumulatywny, bez „rozwidleń", proces narastania wiedzy matematycznej. Autorzy wykorzystują nawet fakt istnienia różnych geometrii, różnych teorii mnogości itd. do argumentacji przeciw istnieniu matematyki rozumianej po platońsku. Nie poświęcają jednak uwagi odkryciu istnienia zdań nierozstrzygalnych w bogatszych teoriach matematycznych. A jest to przecież okoliczność wielce znacząca dla podstaw matematyki, nawet jeśli „normalni" matematycy (ci, którzy nie zajmują się zawodowo logiką matematyczną lub teorią mnogości) poświęcają temu zagadnieniu znikomą uwagę. Inaczej zresztą rzecz ma się z informatykami, dla których problemy nierozstrzygalności teorii nie mogą być zbywane lekceważeniem.

Tak podstawowe teorie matematyczne jak arytmetyka i teoria mnogości są istotnie nierozstrzygalne (czyli są nierozstrzygalne i żadne ich niesprzeczne rekurencyjne rozszerzenie też nie jest rozstrzygalne). Odkrycie tych faktów rzuciło nowe światło na rozumienie związków między dowodem a prawdą w matematyce.

Sądzę, że brak zainteresowania autorów zagadnieniami nierozstrzygalności nie jest przypadkowy: objaśnianie matematyki poprzez metafory pojęciowe w najmniejszym stopniu nie umożliwia żadnych decyzji w kwestii akceptacji bądź odrzucenia zdań nierozstrzygalnych. Jeśli jakieś tego typu decyzje zostaną podjęte, to przesądzi o tym, jak sądzę, praktyka badawcza matematyki, co potrwać może dziesiątki albo i setki lat. Pamiętajmy, że np. do precyzyjnej postaci teorii liczb rzeczywistych dochodzono przez dwa tysiące lat. Odkrycie zdań nierozstrzygalnych jest stosunkowo nowe, liczy sobie zaledwie kilkadziesiąt lat.

Warto przypomnieć, że znamy obecnie całe mnóstwo zdań nierozstrzygalnych o treści czysto matematycznej (a nie tylko „sztucznej" treści metamatematycznej). To ukazuje, że problemy nierozstrzygalności są jakoś bardzo głęboko obecne w tworzywie matematyki, a nie są jedynie wynikiem formalnych filozoficznych spekulacji. Trudno uwierzyć, że „trzecia droga" – czyli objaśnianie matematyki przez metafory pojęciowe (bez odwoływania się do dowodu i prawdy) – pozwoli dokonać znaczących ustaleń w sprawie zdań nierozstrzygalnych. Oto niektóre przykłady zdań niezależnych:

1. CH (hipoteza kontinuum, która głosi, że $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) i GCH (uogólniona hipoteza kontinuum, która głosi, że $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, dla każdej liczby porządkowej α). Kontinuum $2^{\aleph_0}$ może przyjmować prawie dowolną war-

tość, np.: $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_{2020}$ (nie może jednak być liczbą kardynalną o przeliczalnej współkońcowości). Automatycznie dostajemy więc nieskończoną wielość zdań niezależnych od aksjomatów teorii mnogości.

2. Aksjomat konstruowalności (który głosi, że wszystkie zbiory są konstruowalne), a także jego zaprzeczenie.

3. AD, czyli aksjomat determinacji (o nim będzie jeszcze niżej). AD jest sprzeczny z aksjomatem wyboru.

4. *Drzewo Suslina* to drzewo o wysokości $\aleph_1$, w którym zarówno wszystkie łańcuchy, jak i antyłańcuchy są przeliczalne. *Hipoteza Suslina* SH głosi, że nie istnieje drzewo Suslina. Aksjomat konstruowalności implikuje zaprzeczenie SH. Hipotezę SH można też sformułować tak: każdy porządek liniowy bez elementu pierwszego i ostatniego, w którym topologia porządkowa jest spójna i spełnia warunek ccc (przeliczalnych antyłańcuchów) jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych z ich naturalnym porządkiem.

Fakt istnienia zdań nierozstrzygalnych wydaje się wspierać tezę *agnostycyzmu matematycznego*, o której piszę w jednym z dalszych punktów. Matematykę budujemy na dowodach i jest ona (nasza, ludzka matematyka) jaka jest. Odkrywamy zdania nierozstrzygalne i możemy fantazjować, że w świecie Platońskich idei matematycznych rzeczy są ustalone i zachodzi np. hipoteza kontinuum. Albo że w istocie mamy do czynienia, na wzór wszechświatów Everetta, z Platońskim *multiświatem*, w którym – w poszczególnych jego rozgałęzieniach – realizują się wszelkie możliwe odpowiedzi na pytanie o hipotezę kontinuum. Spekulacje takie są, mniemam, całkowicie niegroźne – nie widzę podstaw ku temu, aby sądzić, że wiara (bądź niewiara) w istnienie uniwersum Platońskiego hamowała lub przyspieszała rozwój matematyki.

Opisywanie i definiowanie

Jak tworzenie metafor pojęciowych ma się do dwóch ważnych procedur matematycznych: opisywania oraz definiowania? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że wszystkie rozważane przez autorów konstrukcje są swoistymi definicjami.

Odróżniając opisywanie od definiowania, mam na myśli przede wszystkim różne w obu przypadkach możliwości dostępu poznawczego do obiektów matematycznych. Oczywiście jedna i druga procedura wymaga korzystania z jakichś ustalonych środków językowych. Jeśli rozumiemy języki jako wyznaczone przez skończony (lub przeliczalnie nieskończony) zestaw symboli wraz z rekurencyjnymi regułami składniowymi, to siłą rzeczy musimy uznać, że nie do wszystkich obiektów matematycznych mamy w ogóle dostęp językowy. W przypadku np. rodziny wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego jedynie przeliczalnie wiele jej elementów może zostać nazwanych w tak rozumianych językach. Prawie wszystkie elementy tej rodziny pozostają więc niedostępne językowo. W przypadku liczb porządkowych również jedynie przeliczalnie wiele z nich może być opisywanych w sposób efektywny, za pomocą różnych specjalnie w tym celu stworzonych systemów notacji. Wszystkie liczby porządkowe do których mamy taki dostęp (liczby rekurencyjne) są przeliczalne i mniejsze od (przeliczalnej) liczby Churcha-Kleene'go ω_1^{CK}. Powyżej tej liczby możemy jedynie definiować większe liczby porządkowe.

Już odróżnienie mocy przeliczalnych od nieprzeliczalnych zdaje się stwarzać wyzwanie dla BMI, podstawowej metafory nieskończoności, tak hołubionej przez autorów. Uznajmy, że działa ona dobrze w przypadku zbiorów przeliczalnych. Postać normalna Cantora dla liczb porządkowych pozwala – zgódźmy się i na to – na manipulowanie metaforami arytmetyczno-algebraicznymi dla liczb porządkowych. Terminu „manipulowanie" użyłem tu celowo, gdyż nie tylko nieprzeliczalne liczby porządkowe, ale także pewne duże przeliczalne takie liczby pozostają niejako poza zasięgiem mocy dowodowych niektórych teorii matematycznych.

Zbiór liczb porządkowych mniejszych od ε_0 jest domknięty na operacje następnika, sumy, mnożenia i potęgowania liczb porządkowych. Liczba ε_0 wiąże się z możliwościami dowodowymi arytmetyki Peana (pierwszego rzędu). Bada się liczby porządkowe związane z możliwościami dowodowymi innych teorii. Bada się *hierarchie szybko rosnących funkcji* (Veblena, Wainera itd.). Być może moja ocena jest mylna i naiwna, ale sądzę, że do *rozumienia* tych zagadnień nie można dojść ograniczając się jedynie do podstawowej metafory nieskończoności. Trzeba chyba raczej zrozumieć reguły operowania wielkościami pozaskończonymi po prostu wyznaczone przez ich teorię – nie ma tutaj drogi na skróty.

Warto w tym kontekście przypomnieć, że definiowanie kolejnych liczb nieskończonych w teorii mnogości wykorzystuje fakt dobrego uporządkowania klasy wszystkich liczb porządkowych. Tak więc, to raczej te założenia, które pozwalają konstruować klasę wszystkich liczb porządkowych oraz prowadzić definicje przez indukcję pozaskończoną, co najmniej tak samo jak BMI, powinny zostać jakoś wykorzystane przez autorów *Where mathematics comes from* w ich próbie metaforycznego opisywania hierarchii nieskończoności.

Całkiem osobny problem dla koncepcji ucieleśnionej matematyki stwarzają te sytuacje, gdy potrafimy udowodnić, że jakiś obiekt matematyczny nie jest definiowalny (w ustalonym języku). Dla przykładu, zbiór (numerów Gödlowskich) wszystkich zdań prawdziwych w standardowym modelu arytmetyki Peana nie jest w tej arytmetyce definiowalny. Czy można do niego „dotrzeć" jakąś metaforą ucieleśnionej matematyki?

Dynamika intuicji

Intuicje doświadczenia potocznego są dość stabilne, co jest okolicznością sprzyjającą rozważaniom Lakoffa i Núñeza. Inaczej rzecz ma się z intuicjami matematycznymi – mają one charakter o wiele bardziej dynamiczny. Zasadne jest oczywiście pytanie o przyczyny takich zmian. Wskazać można, jak sądzę, kilka rodzajów takich przyczyn:

Antynomie. Konieczność usunięcia sprzeczności z tworzonej koncepcji matematycznej jest dla każdego oczywista. Eliminacja antynomii wymaga zmiany założeń wyjściowych, a co za tym idzie także zmiany rozumienia badanych pojęć. Usuwając np. antynomię Russella z teorii mnogości (poprzez stosowne przeformułowanie aksjomatu wyróżniania), proponujemy w istocie całkiem nowe rozumienie pojęcia *zbiór*.

Paradoksy. Również w przypadku paradoksów, gdy staramy się poddawać je eksplikacji (gdy usiłujemy „rozwiązać" paradoks) oczekiwać musimy konieczności dokonania zmian w naszych intuicyjnych przekonaniach. Tu jednak sytuacja wygląda nieco inaczej niż w przypadku antynomii. Może być bowiem tak, że dzięki zmianie sposobu rozumienia jakiegoś pojęcia uzyskujemy rozwiązanie paradoksu, ale może się również zdarzyć, że zmiana taka jest niemożliwa, że musimy dokonać swoistego rodzaju „rozszczepienia" naszych intuicji. Pod pierwszy przypadek podpadają chyba zauważane od dawna paradoksy nieskończoności, jako kłócące się z euklidesowym przekonaniem, iż część musi zawsze być jakoś „mniejsza" od całości. Przyjęcie definicji Dedekinda zbioru nieskończonego (zbiór jest nieskończony dokładnie wtedy, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym) rozwiązuje te paradoksy, za cenę przyjęcia takiej właśnie intuicji kojarzonej ze zbiorami nieskończonymi. Ilustracji dla drugiego z omawianych przypadków dostarcza choćby paradoks Banacha-Tarskiego. Nie możemy odrzucić twierdzenia Banacha-Tarskiego, nawet jeśli boleśnie narusza ono nasze intuicje doświadczenia potocznego. Musimy natomiast przyznać, że intuicje te nie mają zastosowania w przypadku zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a (które wykorzystywane są w dowodzie twierdzenia Banacha-Tarskiego), a także zaakceptować to, że aksjomat wyboru stosowany do zbiorów nieskończonych sprawić może niespodziankę intuicjom potocznym (jeśli życzliwie uznamy, że napotykanie zbiorów nieskończonych należy do doświadczenia potocznego).

Programy badawcze. W tych przypadkach zmian intuicji dokonujemy świadomie, celowo. Postanawiamy, że od danego momentu jakaś sfera działalności matematycznej ma być badana takimi, a nie innymi środkami, pozbywszy się np. balastu zapożyczeń z innych dyscyplin, jeśli chodzi o rozumienie pojęć. Tak rzecz się miała z arytmetyzacją analizy w wieku XIX – pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego miały odtąd być wyrażane jedynie w terminach arytmetycznych, bez odwołań do ruchu, zmiany, geometrii. Można uznać, że jest to program zakończony sukcesem, choć oczywiście w dalszym ciągu możemy pytać o alternatywne opisy kontinuum (np. w terminach analizy niestandardowej lub innych, całkiem nowych). Może też zdarzyć się tak, że w trakcie realizacji programu badawczego okazuje się on nierealny lub możliwy do wykonania jedynie częściowo. Taki był los programu Hilberta – znane twierdzenia metalogiczne (o niezupełności, o niedowodliwości niesprzeczności systemu w nim samym) ukazały, że wyjściowy program zrealizowany może zostać jedynie częściowo.

Nowe wyniki matematyczne. Nasze intuicyjne przekonania zmieniają się rzecz jasna w trakcie poszerzania wiedzy matematycznej. Dla przykładu, aż do wyników Ruffiniego i Abela wierzono, że każde równanie algebraiczne posiada rozwiązanie dane przez pierwiastniki, dopiero wspomniane wyniki ukazały brak w ogólności istnienia tego typu rozwiązań dla równań stopnia wyższego od czterech. Tym samym, zmianie uległo – przynajmniej w jakimś aspekcie – rozumienie pojęcia *rozwiązanie równania algebraicznego*. Tego typu przykłady mnożyć można nieograniczenie – każde nowe istotne twierdzenie matematyczne jakoś na nowo kształtuje intuicje dotyczące pojęć w nim występujących oraz rozumienie przeprowadzanych konstrukcji.

Wartości estetyczne. Podkreślanie przez wielu matematyków, iż najważniejszą motywacją dla uprawiania ich twórczości są walory estetyczne matematyki, nie należy traktować jedynie jako oznak przechwalania się lub dawania świadectwa tego, co należy do dobrego tonu w matematyce. Nigdy nie zdarzyło mi się spotkać matematyka, który zaprzeczałby istnieniu inspiracji estetycznych w jego działalności. Jeśli jednak traktujemy te wypowiedzi poważnie, to – chcąc stosować skutecznie teorię metafor poznawczych – musimy jakoś te wartościowania uwzględnić w rekonstrukcjach metaforycznych. Być może koncepcja ucieleśnionej matematyki wypracowała już jakieś metody przydatne w tym względzie, nie znam jednak żadnych prac na ten temat.

Moda matematyczna. To czynnik, którego nie należy chyba lekceważyć. To, które badania są akurat modne w danym okresie, widać chociażby z listy przyznawanych nagród matematycznych. Problemy Hilberta w znaczącym stopniu ukształtowały ogromne połacie matematyki XX wieku. Kwaterniony były „bardzo modne” pod koniec wieku XIX, później traktowano je jako jedynie ciekawostkę algebraiczną, a współcześnie okazuje się, że struktury algebraiczne różne od klasycznych ciał liczb rzeczywistych i zespolonych mają bardzo istotne zastosowania np. w fizyce. Jedną z największych karier w matematyce zrobiła teoria grup – narzucono wręcz określony sposób ujmowania i rozumienia problemów na modłę algebraiczną.

Być może koncepcja ucieleśnionej matematyki będzie próbowała jakoś poradzić sobie z problemami zmienności intuicji matematycznych. Na razie autorzy omawianej książki odnieśli się do przypadków zmienności intuicji będących skutkiem realizacji programów badawczych – pisząc o metaforach Dedekinda oraz Weierstrassa.

Pozwolę sobie na stwierdzenie, że najgłębsza zmiana jakościowa w rozumieniu intuicji matematycznych dokonała się w wyniku „rewolucji strukturalnej” w matematyce XIX wieku. Oczywiście wszelkie tego typu spekulacje obarczone są dużym ryzykiem błędu. Dopiero z odpowiednio dłuższej perspektywy, biorąc pod uwagę znaczący przedział czasowy, jesteśmy w stanie oceniać rozwój dyscyplin matematycznych. Można, tytułem eksperymentu, zaproponować porównanie koncepcji ucieleśnionej matematyki stosowanej w dwóch okresach: matematyki do wieku XIX oraz matematyki współczesnej. Pozwalam sobie podejrzewać, że w tym pierwszym przypadku koncepcje Lakoffa i Núñeza sprawdziłyby się o wiele lepiej niż w przypadku drugim.

Kolizje intuicji

Można byłoby sądzić, że zawodowi matematycy w procesie tworzenia matematyki jakoś uzgadniają swoje intuicje, że powstaje w ten sposób jedno tylko „jedynie słuszne” rozumienie pojęć. W większości przypadków zaświadczonych w dziejach matematyki tak właśnie jest. Błędne jednakże jest mniemanie, iż jest tak zawsze, bezwyjątkowo. Zdarza się, że różni matematycy rozwiązujący ten sam problem proponują inne jego intuicyjne (a w konsekwencji później także formalne) rozwiązanie, ale zdarza się też tak, iż za przyjęciem jednych założeń przemawiają inne (dobrze osadzone w praktyce matematycznej) argumenty niż za przyjęciem rozwiązania konkurencyjnego (również dobrze przystającego do owej praktyki).

Dobrą ilustracją dla pierwszego z tych przypadków mogą być spory między Newtonem i Leibnizem dotyczące podstaw rachunku różniczkowego. Newton posługiwał się wyłącznie skończonymi wielkościami arytmetycznymi w charakteryzowaniu obiektów granicznych. Leibniz natomiast rachował na *nieskończenie małych* wielkościach, traktowanych w sposób czysto formalny, dla których istnienia podawał jedynie argumenty metafizyczne. Analiza Newtonowska znalazła w pełni precyzyjny wyraz w XIX wieku, z chwilą arytmetyzacji analizy. Rozważaniom Leibniza precyzyjną formę dała analiza niestandardowa, zapoczątkowana w połowie wieku XX. Można podawać dalsze tego typu przykłady, np. spór Hamiltona z Grassmannem dotyczący podstaw rachunku wektorowego.

Drugi ze wspomnianych przypadków ilustruje np. konflikt pomiędzy aksjomatem wyboru AC a aksjomatem determinacji AD. Są one wzajem sprzeczne – obu razem przyjąć nie można. Za każdym z nich przemawiają jednak dobre argumenty natury matematycznej. Co prawda ich role są niewspółmierne, gdyż AC dotyczy wszelkich zbiorów, natomiast AD dotyczy podzbiorów przestrzeni Baire'a. Ich konflikt ukazuje jednak, że możemy – choć w ograniczonym zakresie – wybierać pomiędzy wzajem sprzecznymi założeniami i uprawiać jakiś fragment matematyki niezależnie od drugiego.

Innym przykładem podpadającym pod drugi z omawianych przypadków jest konflikt między aksjomatem konstruowalności Gödla a aksjomatem istnienia liczb mierzalnych. Pierwszy z nich pozwala – mówiąc w stylistyce Lakoffa i Núñeza – „nadać ludzką twarz" rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego (poprzez rozważenie jedynie podzbiorów definiowalnych). Jego konsekwencjami są, jak wiadomo, zarówno aksjomat wyboru, jak i uogólniona hipoteza kontinuum. Nie jest on jednak – podobnie jak żaden inny aksjomat ograniczenia – uważany współcześnie za dobrego kandydata na nowy aksjomat teorii mnogości. Aksjomat istnienia liczby mierzalnej, choć z pozoru może wydawać się bardzo ezoterycznym założeniem, jest bodaj uważany za lepiej oddający „ducha" współczesnej teorii mnogości, w której zaleca się rozważanie możliwie największej liczby zbiorów.

Próba objaśniania konstrukcji matematycznych za pomocą metafor pojęciowych powinna jakoś, moim zdaniem, próbować uporać się z kolizjami intuicji obu wymienionych rodzajów. Jak wyjaśnić – w paradygmacie proponowanym przez autorów – różnice w operowaniu intuicjami u poszczególnych matematyków? Jak wyjaśnić to, że sama matematyka w pewnych przypadkach oferuje możliwość podjęcia i kultywacji różnych, wzajem sprzecznych intuicji, za każdą z których przemawiają jakieś dobre matematyczne argumenty?

Równość prawie wszędzie

Nie można rzecz jasna wymagać od autorów, aby uwzględnili wszystkie pojęcia matematyczne, próbując ukazać ich metaforyczną naturę. Swoistym testem na trafność ich wizji byłaby próba skonstruowania odnośnych metafor dla pojęć wykorzystywanych w poszczególnych działach matematyki. Dla przykładu: jaka metafora mogłaby być odpowiedzialna za skonstruowanie pojęcia *równość prawie wszędzie*? Jest to jedno z fundamentalnych pojęć teorii miary, a nawet ogólniej – analizy matematycznej. Nie jest jasne, jak autorzy chcieliby metaforycznie odnosić się do zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a (występujących np. w znanym twierdzeniu Banacha-Tarskiego o rozkładzie kuli trójwymiarowej).

Pojęcie pochodnej

W artykule Thurston 1994 autor pisze niezwykle zajmująco o własnej karierze matematycznej, o swoich motywacjach, o celach pracy matematyka, które warte są propagowania. Pisze też o tym, w jaki sposób ludzie rozumieją matematykę. W szczególności, podaje przykład różnych rozumień pojęcia *pochodnej*:

> People have different ways of understanding particular pieces of mathematics. To illustrate this, it is best to take an example that practicing mathematicians understand in multiple ways, but that we see our students struggling with. The derivative of a function fits well. The derivative can be thought of as:
>
> 1. Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
> 2. Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g * g'$, etc.
> 3. Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ε there is a δ such that when $0 < |\triangle x| < \delta$,
> $$|\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} - d| < \delta.$$
> 4. Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent.
> 5. Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.
> 6. Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
> 7. Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.
>
> This is a list of different ways of *thinking about* or *conceiving of* the derivative, rather than a list of different *logical definitions*. Unless great efforts are made to maintain the tone and flavor of the original human insights, the differences start to evaporate as soon as the mental concepts are translated into precise, formal and explicit definitions. (Thurston 1994, 164)

Listę powyższą można rozszerzać. Dla przykładu, Thurston podaje jeszcze jedno rozumienie omawianego pojęcia:

> 37. The derivative of a real valued function f in a domain D is the Lagrangian section of the cotangent bundle $T^*(D)$ that gives the connection form for the unique flat connection on the trivial $\mathbf{R}$-bundle $D \times \mathbf{R}$ for which the graph of f is parallel.
>
> These differences are not just a curiosity. Human thinking and understanding do not work on a single track, like a computer with a single central processing unit. Our brains and minds seem to be organized into a variety of separate, powerful facilities. These facilities work together loosely, “talking” to each other at high levels rather than at low levels of organization. (Thurston 1994, 165)

Zwróćmy uwagę na ostatnie z cytowanych zdań – poglądy Thurstona różnią się tu wyraźnie od poglądów Lakoffa i Núñeza.

Krzywizna Gaussa

Theorema egregium Gaussa to jeden z najbardziej podstawowych wyników w geometrii różniczkowej. Bez wdawania się w szczegóły techniczne powiem jedynie, że zawdzięczamy Gaussowi (który z kolei bazował na pewnych wynikach Eulera) określenie pojęcia *krzywizny* powierzchni oraz ustalenie, że można tę krzywiznę wyrazić w terminach samej badanej powierzchni, niezależnie od tego, w jakiej przestrzeni i w jaki sposób jest ona „zanurzona”. Tak więc, np. Płaszczaki mieszkające na sferze mają możliwość ustalenia geometrii swojego świata, bez konieczności podróżowania w „zaświaty” przestrzeni trójwymiarowej. Byłoby ciekawe, sądzę, wypróbowanie sił matematyki ucieleśnionej w rekonstrukcji podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. Jak daleko mogłaby posunąć się na tym obszarze koncepcja Lakoffa i Núñeza?

Przegląd języków etnicznych pokazuje, że stosują one różnorakie środki gramatyczne dla wyrażania stosunków przestrzennych. Dla przykładu, w polskim (i w angielskim) tak samo wyrażamy fakt, że coś leży *na* stole, jak i to, że coś wisi *na* ścianie. W niemieckim jest inaczej: w pierwszym przypadku mamy *auf den Tisch*, w drugim *an die Wand*. Nie ma w tym niczego tajemniczego, różne języki na różne sposoby gramatykalizują informacje. Uważamy jednak, że narzucanie prostych intuicji doświadczenia potocznego złożonym tworom różnych geometrii jest nie na miejscu. Zwyczaj językowy każe nam mówić, że np. trójkąt leży *na* płaszczyźnie. Jednak żaden godny tego miana geometra nie będzie „widział” płaszczyzny jako czegoś, *na* czym kładzie się trójkąty. Zauważmy, że nawet proste pojęcia geometrii Euklidesa znane ze szkoły zakładają już bardzo wysoki stopień abstrakcji, wymagają istotnego jakościowego „przeskoku" od pojęć doświadczenia potocznego do obiektów, które nie mają rozciągłości przestrzennej (punkty), nie mają „grubości" (płaszczyzny), nie mają „szerokości" (odcinki).

Twierdzenie Gaussa-Bonneta ustala pewną zależność między geometrią powierzchni (biorącą pod uwagę jej krzywiznę) a jej topologią (biorącą pod uwagę jej charakterystykę Eulera). Współcześnie o powierzchniach myślimy w matematyce jako o szczególnego rodzaju rozmaitościach Riemanna.

Rozmaitości Riemanna

Można wskazywać na różne punkty zwrotne w rozumieniu ogólnego pojęcia *przestrzeni* w matematyce. Do najważniejszych z nich niewątpliwie należą propozycje Riemanna. To właśnie one umożliwiły opis rzeczywistości fizycznej w makroskali, stanowiąc matematyczne podstawy ogólnej teorii względności. Konstrukcje Riemanna także mogą, jak się zdaje, stanowić wdzięczny obiekt zainteresowania matematyki ucieleśnionej. Czy potrafiłaby ona poradzić sobie z uogólnieniami dokonanymi przez Riemanna i jego następców? Piszę o tym bez ironii, bo przecież można próbować śledzić – z punktu widzenia sporządzania metafor – możliwości oddania kolejnych, coraz bardziej zaawansowanych konstrukcji geometrii różniczkowej.

Konstrukcje Riemanna uogólniają poprzednio wspomniane badania Gaussa. Pozwalają na mówienie o tworach wielowymiarowych, wyposażonych w pewne własności metryczne. Są jednym z podstawowych narzędzi fizyki współczesnej.

Przy okazji, wspomnę tutaj o wyzwaniu dla matematyki ucieleśnionej, które stwarza rozpatrywanie w matematyce przestrzeni wielowymiarowych (mających skończenie lub nieskończenie wiele wymiarów). W samej matematyce pojęcie to wprowadzano ostrożnie. Podobnie jak w swoim czasie liczby urojone, także przestrzenie o liczbie wymiarów większej od trzech uważane były początkowo za twory całkiem fikcyjne. Na utworzenie dobrze funkcjonującego pojęcia przestrzeni wielowymiarowej złożyły się wysiłki matematyków z różnych dyscyplin: teorii liczb (np. prace nad kwaternionami Hamiltona), algebry liniowej (prace Grassmanna), wspomniane wyżej prace Gaussa i Riemanna, dające początek geometrii różniczkowej itd. Nie było wcale tak, że za pomocą jakiejś jednej metafory pojęciowej „oswojono" przestrzenie wielowymiarowe. Współcześnie nawet laik potrafi wypowiadać się np. o czwartym wymiarze, choć nie zawsze czyni to z sensem. Nie mogę sobie w tym miejscu odmówić przytoczenia cytatu z broszury traktującej o roli geometrii wielowymiarowej w odczytywaniu Biblii, o *czterowymiarowym Jezusie* itp. Oto w Kajfosz 2010 na stronie 39 podkreśla się, iż sformułowanie z *Listu do Efezjan* „zdołali pojąć ze wszystkimi świętymi, jaka jest szerokość i długość, i wysokość, i głębokość" wskazuje na posługiwanie się przez autora *Listu* odniesieniem do czterech wymiarów. Autor bogato obdarowuje nas wieloma innymi jeszcze przykładami. Dalej w tekście znajdujemy np.:

> Innym częstym zjawiskiem było nagłe pojawianie się i znikanie aniołów, a także istot ludzkich (Mt 17,3; Wj 3,2; Sdz 6,12; Dz 12,7; Dz 8,39; Dn 5,5).
>
> Szczególnie ciekawy jest znany przypadek ręki, piszącej słowa na ścianie pałacu podczas uczty Belsezara (Dn 5,5). Można przypuszczać, że ręka należała do istoty, która pozostawała poza naszą przestrzenią i „wsunęła" ją tylko, aby napisać na ścianie pałacu wyrok Boży.
>
> Wymowne jest także pojawienie się Jezusa Chrystusa po zmartwychwstaniu, „gdy drzwi były zamknięte" (Łk 24,35-43; J 20,19). Uczniowie mniemali, że widzą ducha, jednak Pan Jezus kazał siebie dotykać, a nawet zjadł kawałek pieczonej ryby i plaster miodu, wyraźnie z zamiarem udowodnienia materialności swego zmartwychwstałego ciała.
>
> Wcześniej, tego samego dnia, także podczas posiłku, będąc w tym samym ciele, „znikł sprzed ich oczu" (Łk 24,31).
>
> Fakty te trudno wyjaśnić z punktu widzenia naszej przestrzeni, gdyż wymagałoby to przyjęcia, że Jego ciało, wraz ze zjedzonym pokarmem, miało zdolność dematerializowania się, przechodzenia przez zamknięte drzwi czy ściany budynku i ponownego materializowania się w innym miejscu. Warto zwrócić uwagę, że tekst biblijny nie mówi nic o przechodzeniu przez zamknięte drzwi czy też ściany, choć nieraz słyszy się o tym w kazaniach.
>
> Obraz czterowymiarowy jest całkiem jasny. Ciało Jezusa było fizyczne, tak jak starał się udowodnić, lecz nie był On już poddany ograniczeniom naszej przestrzeni. Mógł opuszczać naszą hiperpłaszczyznę i ponownie w nią wstępować w innym miejscu, a zatem nie musiał dematerializować się ani też przechodzić przez zamknięte drzwi czy ściany. (Kajfosz 2010, 51–52)

Nie zamierzam oczywiście wypowiadać się na temat trafności tych interpretacji. „Logika" bajki nie podlega ocenie czysto racjonalnej, dopuszcza różnorodne fantazje, czasem spójne wewnętrznie, a czasem nawet tego warunku niespełniające. W odróżnieniu od dywagacji o czterowymiarowym Jezusie, pewne fantazje naukowe dotyczące świata płaskiego warto traktować bardziej poważnie. Książeczka Abbot 1952 odbierana może być jako ciekawostka, popularyzująca matematykę. Ukazały się dalsze tego typu prace, np. Hinton 1907. Możliwości życia w świecie dwuwymiarowym, wraz z wieloma własnościami takiego świata, poświęcone były prace Dewdneya (Dewdney

1984, 2000). Płaskoświat Dewdneya budowany jest bardzo konsekwentnie, z zachowywaniem rygorów niesprzeczności logicznej. Podano zasady fizyki, chemii, biologii itd., które obowiązują w tym świecie (dokładniej: na planecie *Astria*, która ma kształt dysku i wiruje na płaskiej powierzchni; nazwa planety wzięta została z wcześniejszej pracy Hintona). Martin Gardner tak pisze o zasadach rządzących tym światem i jego korelacjach ze stereoświatem, czyli światem trójwymiarowym:

> Aby swój dziwaczny projekt uchronić przed „zwyrodnieniem do jałowych spekulacji”, Dewdney przyjął dwie podstawowe zasady. „Zasada podobieństwa” głosi, że płaskoświat musi być możliwie najbardziej podobny do stereoświata: ciało, na które nie działają siły zewnętrzne, spoczywa lub porusza się po linii prostej, płaski odpowiednik sfery to okrąg, i tak dalej. „Zasada modyfikacji” głosi, że gdy jesteśmy zmuszeni wybrać jedną spośród sprzecznych hipotez, które jednakowo są podobne do teorii obowiązującej w stereoświecie, to powinniśmy zdecydować się na hipotezę bardziej podstawową, pozostałe zaś zmodyfikować. Aby określić, jakie hipotezy są podstawowe, Dewdney zastosował hierarchię, w której fizyka jest bardziej podstawowa od chemii, chemia bardziej podstawowa od biologii i tak dalej. (Gardner 1997, 12)

W konsekwentny sposób ustala się wiele faktów, dotyczących astronomii, fizyki, chemii, biologii, architektury, mechaniki itd. astriańskiego świata. Problematyka płaskoświatowej nauki jest stale żywa, rozważa się np. problem, jak wyglądać w niej może ogólna teoria względności. Zwrócono uwagę m.in. na kłopoty w porozumiewaniu się w takim świecie za pomocą dźwięku lub fal elektromagnetycznych: pewne własności rozwiązań równania falowego utrudniają takie porozumiewanie się w każdym świecie o parzystej liczbie wymiarów. Warto na koniec dodać, że we współczesnej fizyce intensywnie badane są m.in. własności powierzchni pokrytych bardzo cienkimi błonami (grubości jednej cząsteczki) oraz różne dwuwymiarowe własności elektrostatyczne i elektroniczne.

Cantor: Widzę to, ale w to nie wierzę

Wśród pierwszych wyników Cantora w jego teorii mnogości znajdujemy twierdzenia ustalające równoliczność bądź nierównoliczność pewnych bardzo ważnych (z punktu widzenia praktyki matematycznej) zbiorów. Cantor ustalił m.in. że:

1. Przeliczalne są zbiory: liczb całkowitych, wymiernych (to ustala funkcja pary Cantora), algebraicznych (w tym przypadku Cantor podał oryginalny dowód, wykorzystujący współczynniki wielomianów).

2. Nieprzeliczalne są zbiory: liczb rzeczywistych, liczb przestępnych. Przy okazji, warto pamiętać, że Cantor podał dwa całkiem różne dowody nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych – tylko w drugim z nich stosuje swój słynny argument przekątniowy.

3. Istnieje tylko jeden, z dokładnością do izomorfizmu, zbiór przeliczalny uporządkowany w sposób gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego (zbiór liczb wymiernych).

4. Zbiory: punktów prostej, punktów płaszczyzny, punktów przestrzeni trójwymiarowej są wszystkie równoliczne – ich moc wynosi kontinuum (podobnie dla $\mathbb{R}^n$, dla każdej $n > 0$).

W przypadku ostatniego z wyliczonych wyżej twierdzeń Cantor napisał w jednym z listów: *Widzę to, ale w to nie wierzę*. Nie należy tego stwierdzenia traktować jako wyrazu utraty zaufania do tworzonej teorii matematycznej. Odczytujemy stwierdzenie Cantora jako przyznanie, że oto przy badaniu abstrakcyjnych zbiorów musimy porzucić różnego rodzaju intuicje, mniemania, myślenie metaforami. Konsekwentne rozwijanie teorii wymusza zmianę rozumienia pewnych pojęć. Nie jest dla mnie widoczne, w jaki sposób koncepcja Lakoffa i Núñeza mogłaby się uporać z takimi sytuacjami – a jest ich w matematyce całe mnóstwo.

Kwantowanie wielkości ciągłych

Autorzy wiele piszą o dwóch rozumieniach pojęcia *ciągłości* – jedno z nich ma być jakoś naturalne, związane z doświadczeniem potocznym, drugie zaś to rozumienie redukujące kontinuum do konstrukcji czysto arytmetycznych. Można odnieść wrażenie, że autorzy to pierwsze rozumienie darzą o wiele większym sentymentem niż drugie. Brutalna odpowiedź na te deklaracje mogłaby odwołać się do filozoficznego sloganu: *Nic nie jest takie, jakim się wydaje*. To, że przypisywaliśmy w różnych momentach „naturalną” ciągłość np. przestrzeni fizycznej, masie, czasowi, elektryczności, energii itd., nie oznacza, iż wszystkie one mają naturę ciągłą, nawet w drugim z przywołanych wyżej znaczeniu. Przywołajmy raz jeszcze rozważania Hilberta:

> Pierwszym naiwnym wrażeniem zjawisk przyrody i materii jest ciągłość (Stetige), nieprzerwaność (Kontinuierliche). Jeżeli mamy kawałek metalu lub pewną objętość cieczy, to nasuwa się nam wyobrażenie, że są one podzielne nieograniczenie, że każdy ich mały kawałek ma znów te same własności. Wszędzie jednak tam, gdzie wystarczająco ulepszono metody badań w fizyce materii, natrafia się na granice podzielności,

> które leżą nie w nieudolności naszych prób, ale w naturze rzeczy, tak że można by wręcz ująć tendencję współczesnej nauki jako równouprawnienie nieskończenie małych (eine Emanzipation von dem Unendlichkleinen) i zamiast dawnego motta – *natura non facit saltis*, można by dziś stwierdzić coś przeciwnego – „natura czyni skoki".
>
> Jak wiadomo, materia zbudowana jest z małych cegiełek, z atomów, poprzez kombinacje i związki których powstaje cała rozmaitość tworzywa makroskopowego (der makroskopischen Stoffe).
>
> Fizyka nie zatrzymała się jednak na atomistyce materii. Obok niej pojawiła się pod koniec ubiegłego wieku atomistyka elektryczności, jawiąca się na pierwszy rzut oka jako coś dziwacznego. Podczas gdy dotąd uważano elektryczność za fluid i stanowiła ona pierwowzór czynnika działającego w sposób nieprzerwany (das Vorbild eines kontinuierlich wirkenden Agens), to teraz także ona okazuje się zbudowana z pozytywnych i negatywnych *elektronów*.
>
> Poza materią i elektrycznością jest jeszcze w fizyce inna rzeczywistość, dla której także zachodzi prawo zachowania, mianowicie energia. Nawet ona nie dopuszcza, jak dziś wiadomo, nieskończonej i nieograniczonej podzielności; Planck odkrył *kwanty energii*.
>
> Wniosek jest taki, że nigdzie nie da się znaleźć jednorodnego kontinuum, które dopuszczałoby nieograniczoną podzielność i w ten sposób realizowało nieskończenie małe (das Unendliche im Kleinen). Nieskończona podzielność kontinuum jest operacją istniejącą tylko w myślach, której przeczą nasze obserwacje przyrody i doświadczenia fizyki i chemii. (Hilbert 1926, 321–322)

Wielu matematyków piszących o kontinuum geometrycznym oraz liczbach rzeczywistych (np. Dedekind, Weber, Cantor) wyraźnie podkreślało, że nie posiadamy żadnego dowodu ani na ciągłość świata fizycznego, ani na jego dyskretność. Także całkiem współczesna wiedza fizyczna nie dostarcza w tej kwestii żadnych rozstrzygnięć. Poglądy na temat struktury kontinuum zmieniały się w dziejach matematyki (i refleksji filozoficznej): jedni uważali, że kontinuum jest nieskończenie podzielne, inni, iż składa się jakoś (scala) z atomów, wykorzystywano wielkości nieskończenie małe, pozbywano się ich, przywracano je na nowo (w innej szacie matematycznej) itd. Nie było więc tak, iż istniał jakiś jeden, naturalny sposób rozumienia kontinuum (i ciągłości). Nadto, czym innym jest tworzenie wyobrażeń wedle „zdroworozsądkowych" wyobrażeń operujących, raczej bezrefleksyjnie, w doświadczeniu potocznym, a czym innym filozoficzna i matematyczna analiza pojęć oraz refleksja teoretyczna np. w fizyce. Sądzę, że należy zachować pewną ostrożność przy próbach eksplikacji tworzenia wszelakich pojęć poprzez odwołanie się do prostych metafor pojęciowych wywodzących się z doświadczenia potocznego.

Tłumaczyłem niedawno (z niemieckiego na polski) szereg prac dotyczących rozumienia pojęcia ciągłości oraz konstrukcji liczb rzeczywistych. Znajdujemy w tych pracach również uwagi filozoficzne dotyczące ewentualnych związków między rozważanymi konstrukcjami matematycznymi a rzeczywistością fizyczną. Dla przykładu, Richard Dedekind w słynnej rozprawie *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, po zaproponowaniu charakterystyki ciągłości linii prostej pisze:

> Istotę ciągłości odnajduję [...] w następującej zasadzie:
>
> „Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki".
>
> Jak już powiedziano, sądzę, iż się nie mylę przyjmując, że każdy uzna natychmiast prawdziwość tego stwierdzenia; większość moich czytelników będzie bardzo rozczarowana dowiadując się, że tak potocznym stwierdzeniem można odsłonić tajemnicę ciągłości. Skwituję to następująco. Jestem wielce rad, jeśli każdy znajduje powyższą zasadę tak oczywistą i zgodną z jego wyobrażeniami linii prostej; ani nie jestem bowiem w stanie podać jakiegokolwiek innego dowodu jej poprawności, ani nikt nie może tego zrobić. Przyjęcie tej własności linii prostej jest niczym innym jak aksjomatem, dopiero na mocy którego przyznajemy linii prostej jej ciągłość, na mocy którego wnikamy w ciągłość linii prostej. Jeśli przestrzeń ma w ogóle jakąś realną egzystencję, to wcale *nie* musi koniecznie być ciągła; niezliczone jej własności pozostałyby takie same, gdyby była nieciągła. I gdybyśmy wiedzieli z pewnością, że przestrzeń jest nieciągła, to i tak nic nie mogłoby nas powstrzymać, gdybyśmy tego chcieli, aby w myśli uczynić ją ciągłą, poprzez wypełnienie jej luk; to wypełnienie polegałoby jednak na tworzeniu nowych indywiduów punktowych wedle powyższej zasady. (Dedekind 1872, tłumaczenie: J.P.)

Georg Cantor w artykule *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* także podkreśla, że samo pojęcie ciągłości należy traktować jako „wolny akt naszej konstrukcji myślowej":

> Z tymi twierdzeniami łączą się rozważania na temat tej własności świata rzeczywistego, która dla pojęciowego opisu oraz objaśnienia zachodzących w nim zjawisk daje leżącą u podstaw przestrzeń trójwymiarową. Jak wiadomo, zarówno ze względu na spotykane w niej formy, jak też zwłaszcza w odniesieniu do zachodzących w niej ruchów, zakłada się, że jest ona *nieprzerwanie ciągła* [*durchgängig stetig*]. To ostatnie założenie – wedle jednoczesnych i niezależnych badań DEDEKINDA (zob. broszurę R. DEDEKIND *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig

> 1872) oraz autora – polega na niczym innym niż na tym, że każdy punkt, którego współrzędne x, y, z w prostokątnym układzie współrzędnych dane są jako *jakiekolwiek* ustalone rzeczywiste liczby wymierne lub niewymierne jest pomyślany jako *rzeczywiście należący do przestrzeni*, do czego w ogólności nie ma jednak żadnego wewnętrznego przymusu, a stąd musi [to] być uważane za wolny akt naszej konstrukcji myślowej [unserer gedanklichen Construktionshätigkeit]. *Hipoteza ciągłości przestrzeni* jest zatem niczym innym, jak w sobie samym dowolnym założeniem pełnej, wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między trójwymiarowym *czysto arytmetycznym kontinuum* (x, y, z) a przestrzenią leżącą u podstaw świata zjawisk. [...]
>
> Nasze myślenie może jednak z równą łatwością abstrahować od pojedynczych punktów, nawet jeśli występują one wszędzie gęsto [überalldicht] i utworzyć sobie obraz *nieciągłej* trójwymiarowej przestrzeni $\mathfrak{A}$ o własności omówionej uprzednio. Powstające wtedy pytanie, czy także w takich *nieciągłych* przestrzeniach $\mathfrak{A}$ do pomyślenia byłby *ruch ciągły* musi, na mocy poprzednio stwierdzonego, koniecznie zostać *potwierdzone*, gdyż pokazaliśmy, że każde dwa punkty obrazu $\mathfrak{A}$ mogą zostać połączone przez niezliczenie wiele ciągłych całkowicie regularnych linii. Okazuje się więc interesujące, że z samego faktu ruchu ciągłego nie można na razie wyciągnąć żadnego wniosku o nieprzerwanej ciągłości trójwymiarowej przestrzeni, używanej do objaśnienia zjawisk ruchu. Stąd blisko już do podjęcia próby zmodyfikowanej mechaniki, stosownej dla przestrzeni o własności [posiadanej przez] $\mathfrak{A}$, tak, aby z konsekwencji tego rodzaju badania oraz jego porównania z rzeczywistością być może otrzymać rzeczywiste punkty oparcia dla hipotezy o nieprzerwanej ciągłości pojęcia przestrzeni leżącego u podstaw doświadczenia. (Cantor 1882, tłumaczenie: J.P.)

Heinrich Weber w przedmowie do *Lehrbuch der Algebra* również podkreśla, że pojęcie ciągłości zostało wypracowane na drodze czysto matematycznej, a więc nie do końca zdeterminowanej przez postrzeganie zmysłowe:

> Ciągłość, zarówno jak gęstość, są własnościami, które z natury rzeczy są niedostępne naszemu postrzeganiu zmysłowemu; nie można ich zatem ściśle przypisać rzeczom świata zewnętrznego, wielkościom przestrzennym, okresom czasu, masom, jakkolwiek głęboko leżą one w istocie naszego oglądu. Można jednak [swobodnie] konstruować czyste systemy pojęć, którym przysługuje gęstość bez ciągłości, albo też gęstość oraz ciągłość. [Tu przypis: Pokazał to DEDEKIND, któremu w ogóle zawdzięczamy podaną wyżej definicję ciągłości. Por. pisma DEDEKINDA, „Stetigkeit und irrationale Zahlen", Braunschweig 1872, 1892, „Was sind und was sollen die Zahlen?", Braunschweig 1888, 1893. Inne rozmaitości, którym przysługuje ciągłość, są stworzone przez WEIERSTRASSA oraz CANTORA. Definicja ciągłości, którą za DEDEKINDEM bierzemy

> tu za podstawę, jest tak dalece wyczerpująca, że zbiór ciągły w tym sensie, któremu przysługuje jeszcze za chwilę podana własność mierzalności, nie może być częścią bogatszego zbioru ciągłego. Nie wiem, czy własność ta jest gdziekolwiek dowiedziona i mam nadzieję wrócić do tego przy innej sposobności. Zauważę jednak, że taka własność dowodliwa jest jedynie dla zbiorów mierzalnych. Zbiór tylko uporządkowany może być zawsze, jakkolwiek by był gęsty, pojmowany jako część zbioru jeszcze bardziej gęstego.] (Weber 1885, tłumaczenie: J.P.)

Może warto wspomnieć, że istnieją modele geometrii absolutnej, które nie mają własności ciągłości, np. w zbiorze wszystkich *liczb algebraicznych* (będących interpretacjami *punktów*) zachodzą wszystkie aksjomaty systemu geometrii absolutnej oraz zaprzeczenie aksjomatu ciągłości.

Dostępność liczb rzeczywistych

Nieco żartobliwie rzecz ujmując, nie jest możliwe stworzenie wiernego listu gończego pozwalającego wspomóc wytropienie liczby przestępnej. Mówiąc natomiast bardziej poważnie, warto przypomnieć, że mamy zróżnicowany dostęp poznawczy do poszczególnych liczb rzeczywistych. Zgodzimy się, że najłatwiej dostępne są liczby wymierne oraz algebraiczne. Łatwo dostępne są też liczby obliczalne oraz definiowalne. Trudno dostępne są w ogólności liczby przestępne. Ów „stopień dostępności" charakteryzować można na różne sposoby. Wprowadza się np. *miarę niewymierności* dla liczb rzeczywistych, rozważa się liczby *normalne*, charakteryzowane w terminach częstości występowania cyfr ich rozwinięcia (w ustalonej bazie), bada się dokładność przybliżeń liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi itd. Sądzę, że problematyka ta stanowi swego rodzaju wyzwanie dla matematyki ucieleśnionej: nie tylko kontinuum liczb rzeczywistych jako całość warte jest – o ile ktoś akceptuje założenia tej koncepcji – rekonstrukcji metaforycznej, ale ciekawe może być również scharakteryzowanie metaforycznie owego stopnia dostępności do mieszkańców kontinuum (o ile byłoby to w ogóle możliwe). O stopniach dostępności do obiektów matematycznych pisałem m.in. w rozdziale drugim książki Pogonowski 2020.

Zwykle mówi się o liczbach wymiernych jako zbiorze liniowo uporządkowanym w sposób gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego, a ich „wizualizacje" przedstawia się na osi liczbowej. Rzadziej przypomina się obecnie (przynajmniej w podręcznikach) o reprezentacjach liczb wymiernych jako skończonych ułamków łańcuchowych. Warto jednak pamiętać, budując różnorakie metafory, że liczby wymierne mają też ładne reprezentacje w postaci drzew: ciągi Fareya, drzewa Calkina-Wilfa oraz Sterna-Brocota, w których każda liczba wymierna występuje dokładnie raz:

Ciągi Fareya. Ciąg Fareya F_n to ciąg liczb wymiernych, których mianowniki nie przekraczają liczby n. Konstrukcję tych ciągów rozpoczynamy od elementów $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, a następnie, w kroku n, pomiędzy $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ wstawiamy liczby $\frac{a+c}{b+d}$ dla których $b + d \leqslant n$.

Drzewo Calkina-Wilfa. Korzeniem drzewa jest liczba 1, każdy wierzchołek, będący ułamkiem $\frac{a}{b}$ ma dwóch bezpośrednich potomków: ułamki $\frac{a}{a+b}$ oraz $\frac{a+b}{b}$.

Drzewo Sterna-Brocota. To drzewo związane jest z rozwinięciami łańcuchowymi liczb wymiernych. Intuicyjnie mówiąc, budujemy je piętrami, zaczynając od korzenia 1. Na kolejnych piętrach między ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ wstawiamy ułamek $\frac{a+b}{c+d}$. Ta konstrukcja ma także ładną reprezentację macierzową.

Liczby rzeczywiste również mogą być reprezentowane w postaci drzewa: np. nieskończonego drzewa dwójkowego – każdej (nieskończonej!) gałęzi tego drzewa odpowiada liczba rzeczywista. Chciałoby się rzec, że w ten oto sposób „widzimy", „ujmujemy poglądowo" itp. cały zbiór nieprzeliczalny, o ile pamiętamy, że wszystkich tych gałęzi jest właśnie nieprzeliczalnie wiele. To jednak jedynie złudzenie – naprawdę widzimy jedynie skończony fragment tego drzewa.

Przypomnę przy tej okazji, że niezwykle trudno zbliżyć się do całkowitej, absolutnej *losowości*. Nazwijmy nieskończony ciąg (powiedzmy zerojedynkowy) *nieskończenie dystrybutywnym*, gdy prawdopodobieństwo wystąpienia każdego układu n zer oraz jedynek jest takie samo i wynosi $\frac{1}{2^n}$. Ciągiem *von Misesa* nazwiemy ciąg, którego każdy nieskończony podciąg (a więc jakkolwiek wybrany) jest nieskończenie dystrybutywny. Wydawałoby się, że uzyskaliśmy w ten sposób całkiem obiektywny matematyczny opis doskonałej losowości. Zła wiadomość jest jednak następująca: ciągi von Misesa nie istnieją. Opracowano szereg innych, bardziej subtelnych matematycznych reprezentacji pojęcia losowości, nie jest jednak celem tego eseju ich omawianie. Wydaje się, że pojęcie losowości (a także inne pojęcia probabilistyczne) stwarza spore trudności, jeśli chodzi o budowanie metafor pojęciowych, które miałyby takie pojęcia eksplikować.

2.4.2. Wątpliwości filozoficzne

Podam, tytułem przykładu, jedynie dwie takie wątpliwości, w bardzo skrótowej formie. Gdyby chcieć zaangażować się w bardziej poważną dyskusję na te tematy, trzeba byłoby dokonywać nie tylko skrupulatnych porównań propozycji autorów z innymi współczesnymi poglądami w filozofii matematyki, ale również istotnie korzystać z olbrzymiego materiału historycznego, ukazującego w jaki sposób tworzono matematykę.

Agnostycyzm matematyczny

Moja podstawowa wątpliwość dotyczy utożsamiania przez Lakoffa i Núñeza całości matematyki z matematyką ucieleśnioną. Otóż uważam za nieco bałamutne utożsamianie przez nich – o ile dobrze rozumiem – poznawalnej matematyki z istniejącą matematyką. Moja propozycja jest skromniejsza – nie staram się w tej kwestii dokonywać drastycznych rozstrzygnięć. Pozwolę sobie mianowicie na żywienie przekonania, że:

1. Być może istnieje transcendentalna matematyka.
2. Praktyka badawcza profesjonalnych matematyków jest niezależna od ich wiary (bądź niewiary) w istnienie transcendentalnej matematyki.

Przekonanie to oddziela, jak sądzę, praktykę badawczą matematyki (tej ludzkiej) od życzeniowych poglądów na temat matematyki (zarówno tej ludzkiej, jak i tej – być może istniejącej – transcendentalnej). Jest wyrazem *agnostycyzmu matematycznego*, jeśli można użyć tu takiego sformułowania.

Czymże miałaby być metaforyczna dedukcja?

Matematyka opiera się na różnych filarach: dedukcji, obliczeniach, intuicji, tworzeniu pojęć i operowaniu nimi. Koncepcja Lakoffa i Núñeza odnosi się przede wszystkim do analizy pojęć, natomiast niewiele – właściwie nic – mówi o najbardziej podstawowej procedurze matematyki, jaką jest dowodzenie.

Jak wiadomo, dowodzenie nie sprowadza się do operacji czysto algorytmicznych – jest działalnością twórczą, wymagającą kreatywności umysłu. Już zakończony, wyraźnie zapisany dowód stosunkowo łatwo rekonstruować pod względem logicznym. Trudno natomiast wyobrazić sobie, że tworzeniem dowodów w ogólności miałyby sterować jakieś – choćby i nawet formułowane w terminach metaforycznych – generalne reguły postępowania, skuteczne we wszystkich przypadkach. Można oczywiście pisać o heurystykach dowodowych (zob. np. Polya 1964) lub starać się dokonywać takich analiz, jakie w znakomity sposób podano w Lakatos 1976. Można próbować ogarnąć podstawy matematyki lub jej fragmenty w postaci programów badawczych, jak już to wielokroć czyniono. Pozwolę sobie stwierdzić, że prawdopodobnie pojęcie *dowodu matematycznego* będzie ulegało stałej ewolucji, wraz z rozwojem matematyki.

2.4.3. Recenzje

Książka Lakoffa i Núñeza zainteresowała filozofów i przedstawicieli nauk kognitywnych. W polskiej literaturze najciekawsze (moim zdaniem) omówienie koncepcji Lakoffa i Núñeza zawiera książka Brożek i Hohol 2014. Opinie matematyków na temat omawianej koncepcji są zróżnicowane, choć przeważają opinie krytyczne. Znaleźć można jednak również odwołania do ustaleń matematyki ucieleśnionej, np. artykuł Aubry 2009 zawiera propozycje zastosowania metafor poznawczych w przypadku konstrukcji wykorzystanych w tworzeniu podstaw geometrii algebraicznej. Autor odwołuje się do prac Dedekinda, Kummera, Webera i Hensela.

Książka Lakoffa i Núñeza doczekała się wielu recenzji. W niektórych wskazuje się usterki matematyczne, a także błędy argumentacji. Wymienię poniżej parę przykładów.

Auslander

Joseph Auslander zwraca uwagę na szereg błędów matematycznych w książce Lakoffa i Núñeza, np.: niejasne oświadczenia, iż krzywe wypełniające przestrzeń tak naprawdę jej nie wypełniają, przywoływanie dziwolągów w postaci nieskończonych wielomianów, błędne wyjaśnienia dlaczego szereg Taylora reprezentuje funkcję, brak uzasadnienia dla procedury różniczkowania wyraz po wyrazie, użycie błędnego koła w objaśnianiu wzoru $e^{i\pi} + 1 = 0$, złe wytłumaczenie „paradoksu długości”, nietrafne operowanie pojęciem granicy itp. Auslander kończy swoją recenzję następująco:

> It may be that metaphors don’t play a central role in formulating more advanced mathematical concepts, or if they do, they will need to be of a different nature than those used in more elementary mathematics. Mathematical concepts, once they are developed, acquire a life of their own and are dealt with directly. It’s difficult for me to conceive of a metaphor for a real number raised to a complex power, but if there is one, I’d sure like to see it. (Auslander 2001)

Devlin

Keith Devlin początkowo był, jak sam pisze, entuzjastą propozycji Lakoffa i Núñeza (Devlin 2008). Później częściowo zmienił zdanie, podnosząc pewne wątpliwości. Najkrócej rzecz ujmując, Devlin zwraca uwagę m.in. na to, że:

1. Funkcje to nie procesy, ale relacje.

2. Nauka matematyki przypomina raczej grę w szachy niż grę metafor.

3. Być może uczymy się np. elementarnej arytmetyki w jakiejś zgodzie z mechanizmami opisanymi przez Lakoffa i Núñeza. Devlinowi trudno jest jednak zaakceptować to, że także w zaawansowanej pracy zawodowych matematyków podstawową rolę odgrywają również te mechanizmy.

Sądzę, że „szachowa" analogia Devlina warta jest tu zacytowania, w nawiązaniu do powyższych punktów:

> Rather, a mathematician (at least me and the others I've asked) learns new math the way people learn to play chess. We first learn rules of chess. Those rules don't relate to anything in our everyday experience. They don't make sense. They are just rules of chess. To play chess, you don't have to understand the rules or know where they came from or what they "mean". You simply have to follow them. In our first few attempts at playing chess, we follow the rules blindly, without any insight or understanding what we are doing. And, unless we are playing another beginner, we get beat. But then, after we've played a few games, the rules begin to make sense to us – we start to *understand* them. Not in terms of anything in the real world or in our prior experience, but in terms of the game itself. Eventually, after we have played many games, the rules are forgotten. We just play chess. And it really does make sense to us. The moves do have meaning (in terms of the game). But this is not a process of constructing a metaphor. Rather it is one of *cognitive bootstrapping* (my term), where we make use of the fact that, through conscious effort, the brain can learn to follow arbitrary and meaningless rules, and then, after our brain has sufficient experience working with those rules, it starts to make sense of them and they acquire meaning for us. (At least it does if those rules are formulated and put together in a way that has structure that enables this.) (Devlin 2008)

Siegfried

Tom Siegfried w recenzji pisze, że czym innym jest sytuacja, gdy równania opisują znaną rzeczywistość fizyczną, a czym innym sytuacja, gdy równania matematyczne pozwalają przewidywać fakty fizyczne:

> For one thing, the authors ignore the fact that brains not only observe nature, but also are parts of nature. Perhaps the math that brains invent takes the form it does because math had a hand in forming the brains in the first place (through the operation of natural laws in constraining the evolution of life). Furthermore, it's one thing to fit equations to aspects of reality that are already known. It's something else for that math to tell phenomena never previously suspected. When Paul Dirac's equations

> describing electrons produced more than one solution, he surmised that nature must possess other particles, now known as antimatter. But scientists did not discover such particles until after Dirac's math told him they must exists. If math is a human invention, nature seems to know what was going to be invented. (Siegfried 2001)

Voorhees

Burton Voorhees napisał bardzo krytycznie o książce Lakoffa i Núñeza (Voorhees 2004). Wspomina on o przystawaniu koncepcji autorów do poglądów Rubena Hersha na matematykę oraz do społecznego konstruktywizmu Paula Ernesta. Podkreśla swoistą oryginalność ich ujęcia matematyki, wskazując jednak jednocześnie na: błędy matematyczne, dyskusyjny status pewnych metafor, brak głębszych odniesień do innych koncepcji kognitywistycznych oraz bałamutne stwierdzenia natury filozoficznej. Za nieporozumienie uważa Voorhees to, co autorzy piszą o wprowadzanych przez nich *liczbach ziarnistych* (*granular numbers*). Ich metafora wykorzystywana w tym przypadku, czyli BMI, w żaden sposób nie usprawiedliwia wprowadzenia „pierwszej nieskończenie małej"; nadto także odpowiedź Lakoffa i Núñeza na krytykę w tej sprawie świadczy, że mieszają oni myślenie życzeniowe z przeprowadzaniem konstrukcji matematycznych:

> As it happens, though, their concept is nonsense. The error lies in the definition. Omitting details, it boils down to defining this purported object as a number having the form $\frac{1}{H}$ where H is an integer greater than all real numbers. Since all integers *are* real numbers, however, this definition is stating that H is an integer greater than any integer. Use of the BMI has led to contradiction. [Tu przypis: More precisely, unreflexive application of the BMI leads to a conclusion that suffers from the fallacy of continuity – the assumption that the properties of the limit of an infinite sequence must be the same as the properties of points in the sequence itself.] [...]
>
> It is not enough to say that something is metaphorically generated and therefore is a legitimate mathematical idea. It must also be demonstrated that the idea generated is free of contradiction. Conceptual metaphors can only be trusted so far – eventually there will be a point at which they break down. Indeed, much of abstract mathematics begins at exactly the point where a metaphor breaks down; where our expectations turn out to have led us astray. When we come to that point, continued reliance on the metaphor leads to illusion. Any further progress depends on pure abstraction. (Voorhees 2004, 85)

Voorhees krytykuje również sposób odrzucenia przez Lakoffa i Núñeza stanowiska platonizmu matematycznego. To, że liczby mogą być charakteryzowane na różne sposoby, nie świadczy nijak o domniemanej „ontologicznej sprzeczności" matematyki – raczej przeciwnie, sam fakt istnienia wielu różnych reprezentacji liczb wspiera możliwość abstrahowania pojęcia liczby. Vorhees przyrównuje argument Lakoffa i Núñeza o niepoznawalności transcendentalnej matematyki do znanego argumentu Gorgiasza. Dodaje też w tym kontekście:

> The argument fails: the fact that human mathematics is based in human cognitive capacities does not mean that these capacities cannot provide recognition of transcendent mathematical truth. What it does do is point to the well-know issue of qualia, and to the hard problem of consciousness. (Voorhees 2004, 87)

Odnosząc się do krytyki podnoszącej brak związku przyczynowego w percepcji obiektów matematycznych i do tego, co znaczy, że matematyk „widzi" prawdę matematyczną, pisze:

> It is more direct recognition of something that is experienced as mind-independent. Although they would be loath to admit it, L&N point to a possible answer to the question of how such 'seeing' is possible. We are caused to 'see' a mathematical object or a mathematical truth by the neural activity involved in the employment of the cognitive metaphors used in thinking about it, just as we are caused to 'see' a tree by the neural activity involved in the sensory processing that results in the perceived image of a tree. There is, in other words, a direct analogy between everyday sensory qualia such as colours, and perceptions of abstract mathematical objects. (Voorhees 2004, 87)

Voorhees kończy swoją recenzję następująco:

> Mathematics, as carried out by human beings, *is* embodied. It suffers all of the slings and arrows that go along with that embodiment. In emphasizing this, Lakoff&Núñez perform a valuable service. Ironically, however, their attempt to give mathematics a more human face ignores what is perhaps the most significant human aspect of mathematics. For the Platonist, it is the ability to have intuitive access to what is transcendent, whatever the mode of its existence, that is uniquely human. (Voorhees 2004, 88)

Henderson

David Henderson, oprócz wskazania błędów matematycznych autorów, proponuje nieco inną metaforę nieskończoności, ilustrując ją procedurą wprowadzania *punktów w nieskończoności* w geometrii rzutowej (Henderson 2002). Warto wspomnieć w tym miejscu, że metafora użyta przez Lakoffa i Núñeza (na stronach 167–170 ich książki) dla „uzasadnienia" tej konstrukcji jest całkowicie bałamutna, nie tylko matematycznie, ale nawet jakoś intuicyjnie, poglądowo, jakkolwiek zresztą to nazwać – nijak nie widać, dlaczego ów tajemniczy punkt C_∞ miałby być wyznaczony jednoznacznie. Metafora Hendersona natomiast odwołuje się do ruchu (punktów oraz prostych) i nawiązuje do pojęcia *odwzorowania rzutowego*, dobrze określonego w tym systemie geometrii. Henderson argumentuje też za tym, że zamiast odwołań metaforycznych miewamy w matematyce do czynienia raczej z wyobraźnią oraz punktami widzenia, jak np. w geometrii, gdy okręgi kół wielkich na sferze traktujemy jako linie proste na tej powierzchni. Dalej, Henderson uważa za błędne przekonania autorów, iż:

1. Matematyka jest formalna, składa się z formalnych definicji, aksjomatów, twierdzeń i dowodów.
2. Matematyka nie pyta (i pytać nie może), co *znaczą* idee matematyczne, jak mogą być rozumiane i *dlaczego* twierdzenia matematyki są prawdziwe.

Przesądy te, zdaniem Hendersona, funkcjonują głównie wśród nie-matematyków. Apeluje on – zarówno do samych matematyków, jak i do specjalistów w naukach kognitywnych – o rzeczywistą *współpracę* nad zrozumieniem matematyki. Podkreśla przy tym, że wielu wielkich matematyków (cytuje Hilberta) miało pełną świadomość podwójnej niejako natury matematyki – składają się na nią zarówno metody formalne i operacje logiczne, jak i procesy rozumienia pojęć i operowania nimi, zwykle nazywane *intuicją matematyczną*. Podobnie wypowiadał się np. Poincaré, na co uwagę zwraca w swojej recenzji James Madden (zob. niżej).

Madden

James Madden ustosunkowuje się do trzech spraw, ważnych dla omawianej koncepcji:

1. hipotezy o roli metafor w poznaniu matematycznym,
2. stanowiska filozoficznego w kwestii prawdy matematycznej,
3. techniki analizy pojęć matematycznych.

O tym, jakie niejasności budzi operowanie metaforami przez omawianych autorów, Madden pisze m.in. tak:

> One might react to this with the feeling that it is all pretty trivial. Of course, once the arithmetic metaphors are internalized, using them is as easy as riding a bike. But the skills involved in using arithmetic, or in riding a bike, are cognitively quite complex. This is most obvious in the fact that *learning* them is not at all trivial. I would even suggest that evidence in favor of the metaphor hypothesis can be found in the fact that exposure to different metaphors influences the learning process. [. . .]
>
> How do metaphors function in the mathematical activities of actual people? On this, Lakoff and Núñez are not very clear. When they talk about the mathematical activities of real people, they describe them in generic terms: people entertain ideas or "use cognitive mechanisms" of one sort or another to "conceptualize" this or that. Presumably, when an individual is engaged in mathematical work, that person is guided by metaphors that are somehow represented in his or her own brain. The details would depend on the specific task or problem. Unfortunately, Lakoff and Núñez do not provide any illustrations of what they suppose goes on in "real time", so this is about as much as I can say. [. . .]
>
> How exactly do people use metaphors when they are learning new material, solving problems, proving theorems, and communicating with one another? I would like to have seen direct support for the metaphor hypothesis from the observation of mathematical behaviors. After a demonstration that metaphors are indeed as common as the authors believe, I would want a detailed examination of the *ways* metaphors are used in a wide variety of settings. (Madden 2001, 1184–1185)

Madden zwraca też wcześniej uwagę, że opisy Lakoffa i Núñeza dotyczą właściwie obecności pojęć matematycznych w podręcznikach, nie są natomiast wiązane z matematyczną aktywnością w działaniu. Przywołuje także pewne badania, które dotyczyły właśnie takiej aktywności, obserwowanej w trakcie przyswajania sobie matematyki – m.in. opisywały różne, w gruncie rzeczy dysfunkcjonalne oraz idiosynkratyczne, metafory studentów uczących się podstaw rachunku różniczkowego; zadziwiające było to, że owi studenci potrafili w końcu dotrzeć do intuicji uważanych za standardowe w tej dziedzinie.

Madden stwierdza, że Lakoff i Núñez stosują swoje metafory w tak wielu kontekstach i tak różnorodnych funkcjach, że samo pojęcie metafory zaczyna zatracać wyraźne znaczenie. Zauważa także, iż hipoteza, że metafory nie są arbitralne i że mają bogatą wewnętrzną strukturę, jest tylko hipotezą empiryczną i jako taka wymaga badań empirycznych, których autorzy na razie nie dostarczają. Wskazuje wreszcie, że istnieją opisy alternatywne do propagowanych przez autorów, jeśli chodzi o techniki analizy pojęć matematycznych. W uwagach kończących recenzję pisze:

> If I think about the portrayal of mathematics in the book as a whole, I find myself disappointed by the pale picture the authors have drawn. In the book, people formulate ideas and reason mathematically, realize things, extend ideas, infer, understand, symbolize, calculate, and, most frequently of all, *conceptualize*. These plain vanilla words scarcely exhaust the kinds of things that go on when people do mathematics. They explore, search for patterns, organize data, keep track of information, make and refine conjectures, monitor their own thinking, develop and execute strategies (or modify or abandon them), check their reasoning, write and rewrite proofs, look for and recognize errors, seek alternate descriptions, look for analogies, consult one another, share ideas, encourage one another, change points of view, learn new theories, translate problems from one language to another, become obsessed, bang their heads against walls, despair, and find light. Any one of these activities is itself enormously complex cognitively – and in social, cultural, and historical dimensions as well. In all this, what role metaphors play?
>
> Moving to a different perspective, I want to note that there are areas not even hinted at in the book where cognitive science is prepared to contribute to our understanding of mathematical thought. Consider this: Metaphorical ideas are frequently misleading, sometimes just plain wrong. Zariski spent most of his career creating a precise language and theory capable of holding the truths that the Italian geometers had glimpsed intuitively while avoiding the errors into which they fell. What cognitive mechanism enable people to recognize that a metaphor is not doing the job it is supposed to do and to respond by fashioning better conceptual tools? [...]
>
> If mathematical thinking is like other kinds of thinking in its use of metaphors, what distinguishes mathematical thinking may be the exquisite, conscious control that mathematicians exercise over how intuitive structures are used and interpreted. We can step back from our own thinking and critically examine our attempts at meaning-making. This, I would venture, is as fundamental a cognitive mechanism as any mentioned by Lakoff and Núñez. (Madden 2001, 1187)

Elglaly i Quek

Większa część tej recenzji to zwięzłe omówienie treści *Where mathematics comes from*. Swoje uwagi krytyczne autorzy przedstawiają w formie krótkich punktów, piszą m.in., że (Elglaly i Quek 2009, 6):

1. Lakoff i Núñez, pisząc o ucieleśnieniu matematyki, nie zwracają uwagi na nasze wyposażenie biologiczne – czy np. miało ono wpływ na powszechność systemu dziesiątkowego?

2. Elglaly i Quek nie zgadzają się z zasadnością metafory opisującej *zero*. Wskazują na dość złożony proces dochodzenia do tego pojęcia w rozwoju matematyki.

3. Możliwości metaforyzowania powinny być chyba także zależne od takich czynników, jak doświadczenie, wykształcenie, różnice kulturowe.

4. Podkreśla się, że w książce brakuje jakiejkolwiek informacji o tym, czy autorzy przeprowadzili badania dotyczące tego, jak o swojej aktywności intelektualnej mówią zawodowi matematycy. Podobnie, brak też informacji o tym, jak uczymy się matematyki.

5. Książka mogłaby właściwie zostać skrócona do pierwszego i dwóch ostatnich rozdziałów: rozdziały pośrodku właściwie powielają jeden i ten sam schemat eksplikacji. Nadto, podzielenie bibliografii na działy tematyczne utrudnia odnajdywanie informacji. Od siebie dodam, że bibliografia ta – w moim uznaniu – zawiera poważne luki, co najmniej w części dotyczącej prac matematycznych.

Schiralli i Sinclair

Nie jest to recenzja, lecz artykuł nawiązujący do *Where mathematics comes from*. Autorzy deklarują, iż ich propozycje mają pozwolić na usunięcie wielu nieporozumień dotyczących koncepcji przedstawionych przez Lakoffa i Núñeza. Istotnie, ważnym prowadzonym przez nich rozróżnieniem (niedostrzeganym przez Lakoffa i Núñeza) jest dystynkcja pomiędzy *matematyką pojęciową* (*conceptual mathematics*) i *matematyką wyobrażeniową* (*ideational mathematics*). Mam oczywiście wątpliwości, czy proponuję dobre polskie tłumaczenie drugiego z tych terminów – można próbować szukać lepszego. Oto jak autorzy widzą owo rozróżnienie:

> [...] *conceptual mathematics* (CM): this is mathematics as a subject-matter or discipline. The discipline of mathematics in its core purposes is a public activity, an ongoing game in progress, whose rules are continuously negotiated as shared (even if not perfectly shared) meanings among the participants. According to Devlin's (1994) characterisation, the core purpose of mathematics is the pursuit of patterns: the patterns of number and counting are the subject matter of number theory, while geometry studies patterns of shapes. Devlin also identifies those patterns of reasonong that underlie mathematical logic and those patterns of motion that are subject matter of calculus. Patterns of position and closeness are the study of topology and probability theory attends to patterns of chance. [...]

> A mathematical concept, therefore, is a publicly accessible tool – with a history and a future – involved in pursuing, representing, exploring, and manipulating patterns and pattern possibilities. This tool may continue to have utility in its present form, may be improved in future, or even supplanted by newer tools as yet unrepresented. The significance of a mathematical concept lies in the way it connects with related concepts – with the logical patterns of the connective rules functioning as the medium within which mathematical inquiry publicly proceeds.
>
> Next, and this is very important: these CM concepts are not necessarily the same as the mathematical ideas that individual mathematicians (experienced or novice) may form of them. CM concepts are public representations; they exist outside in public space of shared meanings. As such they are best kept distinct from the internal representations that given people will form of them. How an individual represents these concepts to herself is what we will call *ideational mathematics* (IM) and will probably be influenced by many experiential and genetic factors. (Schiralli i Sinclair 2003, 81)

Ilustrują powyższe rozróżnienie rozumieniami pojęcia *pochodnej*, przywołując artykuł Thurston 1994, w którym sprawa ta jest wnikliwie i ciekawie omówiona. W dalszej części artykułu przypominają także o ważnych badaniach Sierpinskiej nad rozumieniem pojęć matematycznych (Sierpinska 1994). Wedle tej autorki, na akt rozumienia pojęcia składają się: identyfikacja, rozróżnienie, uogólnienie oraz synteza.

* * *

Nie omawiam w tym miejscu wielu dalszych recenzji, komentarzy, przyczynków do książki Lakoffa i Núñeza. Zainteresowany czytelnik zechce zajrzeć np. do: Paulos 2002, Goldin 2001, Gold 2001. Odpowiedź autorów na tę ostatnią recenzję można znaleźć w sieci – Lakoff i Núñez 2001.

2.5. Matematyczny umysł i matematyczny świat

Propozycje Lakoffa i Núñeza warto skonfrontować z innymi stanowiskami w kwestii matematyczności umysłu oraz matematyczności świata. Są to oczywiście kwestie zawiłe, nie można ich należycie przedstawić w krótkim tekście, wymagają wnikliwego rozpatrzenia poglądów obecnych w filozofii matematyki. Tutaj ograniczę się jedynie do uwag konfrontujących propozycje Lakoffa i Núñeza z niektórymi poglądami Michała Hellera, który – jak dobrze wiadomo – jest orędownikiem tezy o tym, iż Wszechświat jest matematyczny (por.

np. Heller 1997, 1998) oraz do zacytowania kilku fragmentów z książki Michniowski 2004. Przypomnę proponowaną przez Hellera typologię wszechświatów ze względu na ich „stopień matematyczności”:

Wszechświat całkowicie niematematyczny (całkowicie irracjonalny). Byłby to Wszechświat, w którym nie obowiązują zasady (żadnej) matematyki i logiki. Twór taki byłby sprzeczny. Nie mógłby zatem istnieć.

Wszechświat całkowicie niepoznawalny (bardzo złośliwy). Heller przywołuje tu jako przykład hipotetyczny świat, który znajdować może się w jedynie dwóch stanach, powiedzmy 0 oraz 1, przy czym ciąg tych stanów nie jest *algorytmicznie ścieśnialny*. Ma to oznaczać, że nie istnieje algorytm pozwalający przewidywać kolejne przyszłe stany świata. Zbiór liczb ścieśnialnych w odcinku $[0, 1]$ ma miarę zero, a więc prawie wszystkie liczby z tego odcinka (zapisane jako ciągi zerojedynkowe) miałyby reprezentować takie właśnie „złośliwe”, niepoznawalne matematycznie Wszechświaty. Ich teoria musiałaby – pisze Heller – być tożsama (co do swojej złożoności) z nimi samymi. Fizyk zbudować może teorię prostszą od opisywanego przez nią obiektu tylko w przypadku, gdy ma do czynienia właśnie z ciągiem algorytmicznie ścieśnialnym. Fizyka odeszła jednak od opisów czysto jakościowych, uwzględniając różne zabiegi idealizacji oraz aproksymacji. To umożliwia tworzenie modeli matematycznych przybliżających opisywane zjawiska.

Wszechświaty „łagodnie złośliwe”. Tu jako przykład podaje Heller Wszechświat, w którym siła grawitacji pomiędzy dwiema masami nie działa (zgodnie z prawem Newtona) odwrotnie proporcjonalnie do drugiej potęgi odległości między nimi, lecz odwrotnie proporcjonalnie do odległości między nimi podniesionej do potęgi $1,999$. Ma to oczywiście konsekwencje dla skomplikowania kształtu orbit planet, które stają się krzywymi na ogół nieokresowymi i niezamkniętymi. To z kolei powoduje, że szukanie praw opisujących prawidłowości takiego Wszechświata staje się wielce mozolne.

Heller uważa matematyczność świata za tę jego cechę, dzięki której można go badać za pomocą metod matematyczno-empirycznych. Z przykładów powyższych widać jednak także, że mogą istnieć światy posiadające strukturę matematyczną, ale niepoddające się badaniu przez racjonalne podmioty. Heller wyróżnia więc dwa rodzaje światów: *świat poznawczo matematyczny*, który może być badany metodami matematycznymi, oraz *świat ontycznie matematyczny*, który nie jest całkowicie niematematyczny. Światy ontycznie matematyczne, lecz nie poznawczo matematyczne, mogą istnieć. Nie mogą natomiast istnieć, wedle Hellera, światy pozbawione matematyczności w sensie ontologicznym.

Dystynkcje przeprowadzone przez Hellera są klarowne. Ciekawym zadaniem byłoby, jak sądzę, dokładniejsze scharakteryzowanie światów „złośliwych" matematycznie, np. zaproponowanie bardziej subtelnych miar „stopnia niedostępności" takich światów. Naturalnymi kandydatami na środki opisu zdają się być tutaj konstrukcje rozważane w teorii rekursji (stopnie obliczalności itp.) lub w badaniach liczb przestępnych, liczb obliczalnych, liczb definiowalnych.

Powinno być widoczne, że propozycje Hellera nie pozostają w zgodzie z wizją Lakoffa i Núñeza. Osobiście wyżej cenię sobie argumentację za matematycznością świata niż tę, że ucieleśniona matematyka wyczerpuje całość matematyki.

Obszernie o matematyczności świata – odwołując się przede wszystkim do ustaleń fizyki współczesnej – pisze Tomasz Michniowski (Michniowski 2004). Odnosi się m.in. do (matematycznych aspektów) związków między umysłem a światem, pisząc:

> Niektórzy uważają wprawdzie, iż zagadnienie „matematyczności przyrody" jest nieporozumieniem. Przedstawiana jest wówczas następująca argumentacja: przyroda nie jest matematyczna, to jedynie nasz sposób myślenia i postrzegania jest matematyczny (my, ludzie, sami „wymyśliliśmy" matematykę), zatem w zmysłowym i intelektualnym poznawaniu świata następuje „rzutowanie" matematyki mózgu na postrzegane otoczenie. Rozumowanie takie nie wydaje się spójne w sensie antropicznym [Tu przypis: W rozumieniu tzw. zasady antropicznej]. Jeśli bowiem uznać, iż człowiek (rozum) jest elementem świata i pojawił się jako wynik określonej ewolucji kosmicznej, wówczas jego „strukturalna" odmienność od otoczenia (matematyczny rozum w niematematycznym świecie) byłaby rzeczą zaskakującą, wręcz wymagającą „ręcznej" ingerencji ze strony Absolutu w proces powstawania człowieka. Jak każde założenie komplikujące model, również i to, w kontekście wiedzy metodologicznej oraz treści zasady prostoty (zwanej też brzytwą Ockhama), wydaje się mało prawdopodobne [Tu przypis: Pojęcia tego nie należy mylić z idealnością w sensie platońskim. W tym kontekście wszystkie obiekty matematyczne są „idealne"; wówczas zwrot „idealizacja struktur matematyki" jest określeniem groteskowym. Termin stanowi nazwę własną o znaczeniu jak w tekście]. (Michniowski 2004, 39)

Za ciekawe uznaję też uwagi Michniowskiego dotyczące tego, jak fizycy traktują obiekty swojej dyscypliny, której – jak wiadomo – bez stosowania aparatu zaawansowanej matematyki uprawiać nie sposób. Autor twierdzi (na stronie 43), że:

1. Fizycy traktują matematykę po platońsku, realistycznie, jako niezależną od poznającego podmiotu.
2. Ujmują ją jednocześnie nominalistycznie, czego wyrazem miałoby być jednakowe traktowanie obiektów matematycznych i fizycznych.
3. Fizycy traktują matematykę empirycznie: kryterium prawdy staje się eksperyment. Matematyka „czysta" w takim ujęciu nie istnieje.

Autor zwraca uwagę na niektóre niekonsekwencje w podejściu fizyków do matematyki, wspomnianym powyżej. Ze swej strony dodam, że trudno mi zgodzić się z poglądem o nieistnieniu „czystej" matematyki. Nie chodzi przy tym o to, że pewne pojęcia, konstrukcje, wyniki matematyczne nie mają (dzisiaj) bezpośredniego przełożenia na stany rzeczy badane w fizyce (np. rozważania w teorii mnogości dotyczące istnienia dużych liczb kardynalnych). Uważam, że nie można *a priori* wykluczyć, że pewne działy matematyki w żadnym sensie nie byłyby inspirowane rzeczywistością badaną przez fizyków. Autor używa terminu „matematyka nadwyżkowa" dla oznaczenia tych fragmentów matematyki, które nie reprezentują jakichś faktów fizycznych. Ocenia też następująco podejście fizyków do matematyki:

> Fizycy zatem są wysoce niekonsekwentni w swym podejściu: przypisując matematyce charakter uniwersalny i aprioryczny, traktują ją również, w razie potrzeby, jako środek pozyskiwania wiedzy o faktach przyrodniczych (matematyka jako język plus narzędzia poznawcze). Jest więc dla nich matematyka swoiście oryginalnym tworem: nauką *a priori* wykorzystywaną do konstruowania aposteriorycznych dyscyplin służących poznawaniu świata.
>
> Takiej dwoistości ujęcia sprzyja brak epistemologicznego kryterium matematyki w kontekście jej obiektywności. Nie potrafimy bowiem, posługując się własnym intelektem, przetestować hipotezy obiektywności tej nauki. Nie potrafimy nawet w sposób ogólny odnieść się do hipotez bardziej szczegółowych, na przykład: czy relacja obiektów matematycznych do fizycznych jest taką samą jak relacja obliczeń (tzw. rachunków) do procesów.
>
> Wnioski te, artykułowane przez filozofów nauki i w niemy sposób akceptowane przez samych fizyków, usprawiedliwiane są coraz głębszym, w miarę rozwoju nauki, odchodzeniem od „zdroworozsądkowego" pojmowania rzeczywistości naukowej. Szczególnie istotne jest tu postępujące rozmywanie się (lub zanik) pojęć klasycznych, jak na przykład materialności [Tu przypis: Pociąga to zatratę rozróżnienia obiektów na matematyczne (konstrukty) i fizyczne (faktualne) i upłynnia granicę między obiema naukami: matematyką i fizyką.], czasowości lub przyczynowości. (Michniowski 2004, 43–44)

Michniowski twierdzi, że konstruowanie struktur modelowych (w badaniach fizycznych) przebiega etapami, przy czym na każdym z nich czynione są stosowne założenia. Wspomniana rozprawa zawiera szereg ciekawych obserwacji na temat „tworzywa" modeli matematycznych reprezentujących rzeczywistość fizyczną. Przypomina o zależności owych modeli od dostępności środków obecnych w matematyce danego okresu. Dostrzega matematyczne aspekty, kryjące się za brakiem uzgodnienia między opisem na poziomie kwantowym oraz na poziomie relatywistycznym. Część trzecia rozprawy Michniowskiego zawiera m.in. uwagi na temat sposobów klasyfikowania modeli wykorzystywanych w fizyce. Subtelne analizy autora dotyczące współczesnej postaci paradygmatu relatywistycznego, paradygmatu kwantowego, prób unifikacji całości fizyki prowadzą go do uznania hipotezy o matematyczności świata za dość dobrze potwierdzoną:

> Refleksja w odniesieniu do naukowej ewolucji modeli klasyfikowanych w sensie jak powyżej ponownie prowadzi do oczywistego teraz stwierdzenia (artykułowanego już w poprzednich częściach pracy), iż matematyczność poznania nie ma charakteru akcydentalnego, a przy tym raczej nie jest „projekcją" ludzkich nawyków mentalnych na świat i struktury nauki. Można dyskutować, czy gdyby matematyczność została „narzucona" poznaniu przez człowieka, wciąż powstawałyby modele błędne. W naturalnym dążeniu staralibyśmy się bowiem kreować wyłącznie struktury doskonałe i jedynie naszej nieudolności i niedbałości przypisywać by można pojawianie się modeli próbnych lub jawnie chybionych. Wówczas jednak, jak się wydaje, moglibyśmy oczekiwać stopniowej optymalizacji naszego postępowania do sytuacji, w której modelowanie udawałoby nam się „coraz lepiej". Tego jednak nie obserwujemy [Tu przypis: Przeciwnie, z im trudniejszymi merytorycznie i odleglejszymi od zmysłowo postrzegalnych obszarami emulacji mamy do czynienia, tym trudniejszy i bardziej pracochłonny (wymagający większej liczby prób) wydaje się proces kreowania struktur modelowych.]. Struktury modelowe wydają się zatem obecne w świecie matematyki w niejako naturalny sposób i zdają się równie „naturalnie" identyfikować ogólne własności rzeczywistości, w której się znajdujemy. My staramy się jedynie wyróżniać je spośród innych struktur. Jeśli wyróżnienie takie nam się udaje, posługujemy się odkrytym modelem w celach poznawczych, jeśli nie, pozostają nam dalsze poszukiwania. Tym samym identyfikacja modeli matematycznych i poznanie naukowe w pewnym sensie się utożsamiają, a matematyczność poznania jest tego ostatniego naturalną („zewnętrzną") i niepomijalną własnością. Wszechświat (a nie jedynie nasz intelekt) rzeczywiście wydaje się być głęboko „matematyczny". (Michniowski 2004, 133)

W moim subiektywnym odczuciu, argumentacja na rzecz tezy o matematyczności świata, wspierana wynikami nauk szczegółowych, wydaje się bardziej przekonująca od deklaracji Lakoffa i Núñeza o całkowitym ucieleśnieniu matematyki oraz przydawaniu wszelkiej matematyce transcendentalnej statusu urojenia.

2.6. Uwagi o dydaktyce matematyki

Propozycje związane z rozumieniem matematyki jako ucieleśnionej zdążyły już doczekać się zastosowań w dydaktyce matematyki, przynajmniej w postaci zaleceń, jak ową dydaktykę skutecznie uprawiać – por. np. Núñez, Edwards i Matos 1999. Poglądy na to, jaka powinna być dydaktyka matematyki, ulegały w dziejach zmianom. Uczono matematyki, opierając się na wzorcu z *Elementów* Euklidesa, proponowano uwzględnianie metod heurystycznych, indukcyjnych, eksperymentowano z programem Nowej Matematyki (*New Math*) itd. Wykorzystywano przy tym ustalenia psychologii poznawczej, brano pod uwagę rozwój technologiczny, czasami o kształcie dydaktyki decydowały czynniki natury politycznej, a ponadto – co oczywiste – dydaktyka matematyki musiała jakoś odzwierciedlać rozwój samej matematyki.

W cytowanym wyżej artykule znajdujemy pewne deklaracje dotyczące zastosowań ustaleń matematyki ucieleśnionej w dydaktyce:

> The study of the conceptual structure of mathematics from an embodied point of view shows how mathematics is built up of such informal, everyday experiences and ideas. For this reason, mathematics cannot be as a pure and 'abstract' discipline. Our mathematical conceptual system, like the rest of our conceptual system, is grounded in our bodily functioning and experiences. Seen from this perspective, situated cognition is not about 'situating' mind-free truths in meaningful contexts, but rather about examining how the human creation of mathematics arises from sense-making which is not arbitrary precisely *because* it is bodily grounded.
>
> This view has important entailments for mathematics education. Rather than looking for better ways to help students learn 'rigorous' definition of pre-given mathematical ideas, we need to examine the kinds of understanding and sense-making we want students to develop. We should look at the everyday experiences that provide the initial grounding for the abstractions that constitute mathematics. This is not necessarily an easy undertaking, since the grounding structures are often unconscious and taken-for-granted. At times, this grounding can be found in immediate physical experience, as in the case of work with early arithmetic,

> space, size, and motion. At other times, the grounding for a mathematical idea takes place indirectly, through a chain of conceptual mappings whose nature may be obscured by conventional language, but which can be revealed by utilizing the analytic tools of contemporary embodied cognitive science. In either case, what is important is to re-examine mathematical ideas in order to create instruction that complements the ways our conceptual systems naturally work.
>
> In addition, we should provide a learning environment in which mathematical ideas are taught and discussed with all their human embodied and social features. Students (and teachers) should know that mathematical theorems, proofs, and objects are about ideas, and that these ideas are situated and meaningful because they are grounded in our bodily experience as social animals. Providing an understanding of the historical processes through which embodied ideas have emerged can support this aim. This does not mean simply presenting a few names and dates as a prelude to teaching the 'real' mathematics. It means talking about the motivations, zeitgeist, controversies, difficulties, and disputes that motivated and made possible particular developments in mathematics. (Núñez, Edwards i Matos 1999, 61–62)

Przytaczam tak obszerny cytat, aby nie być posądzonym o wyrywanie z kontekstu stwierdzeń autorów. W moim przekonaniu, deklaracje te są przede wszystkim wyrazem myślenia życzeniowego. Odnoszę też wrażenie, że poglądy te stanowią jakby przeciwległy biegun dla – porzuconego jako nieskuteczny – programu *New Math*. Podobnie jak ów nieszczęsny program wydają się być nawoływaniem do swoistego radykalizmu w nauczaniu matematyki: uczniowie mieliby poznawać matematykę przede wszystkim poprzez oswajanie się z metaforycznym ujmowaniem pojęć. Nie sądzę, aby dobrze to wróżyło uzyskanemu przez nich w ten sposób poziomowi wykształcenia matematycznego. Dodam wreszcie, że nie sądzę, aby zawodowy matematyk tworzył matematykę jakoś lepiej, sprawniej, w głębszy sposób, bardziej odkrywczo itp., gdyby w każdym momencie konfrontował swoje działania z koncepcją ucieleśnionej matematyki.

Lakoff i Núñez podają dziesiątki przykładów, które ich zdaniem pokazują, że poszczególne pojęcia matematyczne wprowadzane są przez stosowne metafory poznawcze. Piszą np. o *The Ordered Pair Metaphor*:

> Intuitively, an ordered pair is conceptualized nonmetaphorically as a subitized pair of elements (by what we will call a Pair schema) structured by a Path schema, where the source of the path is seen as the first member of the pair and the goal of the path is seen as the second member. This is simply our intuitive notion of what an ordered pair is.

> With the addition of the Sets Are Objects metaphor, we can conceptualize ordered pairs metaphorically, not in terms of Path and Pair schemas but in terms of sets:
>
> THE ORDERED PAIR METAPHOR
>
> | *Source Domain* SETS | | *Target Domain* ORDERED PAIRS |
> |---|---|---|
> | The Set $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ | $\rightarrow$ | The Ordered Pair (a, b). |
>
> Using this metaphorical concept of an ordered pair, one can go on to metaphorically define relations, functions, and so on in terms of sets. (Lakoff i Núñez 2000, 141)

Uważam, że praktyka dydaktyczna jest w tym przypadku całkiem odmienna. Rozpoczynamy zwykle od intuicyjnych komentarzy, zwracając uwagę, że zbiory $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ są identyczne, na mocy aksjomatu ekstensjonalności. Następnie formułujemy nasz cel: zdefiniowanie obiektu, w którym porządek jego elementów jest ustalony. Proponujemy definicję: $(a, b) =_{df} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (jest to jedna z możliwości). Na koniec dowodzimy, że podana definicja spełnia nasze wymagania, czyli że $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

2.7. Garść metafor matematycznych

Pozwolę sobie w tym miejscu przytoczyć pewne – z reguły dobrze znane – wypowiedzi matematyków i filozofów o matematyce, które same w sobie metaforycznie oddają specyfikę tej dyscypliny. Wybrane zostały one całkowicie *ad hoc*, bez żadnej systematyczności bądź prób ich klasyfikowania.

Między duchem a materią pośredniczy matematyka. (Hugo Steinhaus)

Istota matematyki leży w jej wolności. (Georg Cantor)

Boga nie obchodzą nasze problemy matematyczne. On całkuje empirycznie. (Albert Einstein)

Jednostka urojona jest nieomal pomostem między bytem i niebytem, pięknym i cudownym wynalazkiem boskiego ducha. (Gottfried Wilhelm Leibniz)

Matematyka nie posiada symboli na mętne myśli. (Henri Poincaré)

Matematyka powstaje w procesie dialogu z materią matematyczną. (Imre Lakatos)

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki. (Immanuel Kant)

Twierdzenia matematyczne uważane są za prawdziwe, ponieważ w niczyim interesie nie leży, by uważać je za fałszywe. (Monteskiusz)

W szkole nie matematyka ma być nowoczesna, ale jej nauczanie. (René Thom)

U podstaw wszelkiego rozumowania mamy zgadywanie niepoddane żadnym regułom, albo dedukcję poddaną rygorowi reguł. (Andrzej Grzegorczyk)

Przez każde trzy punkty przechodzi prosta, o ile jest dostatecznie gruba. (Aksjomat Steinhausa)

Matematyka jest produktem myśli ludzkiej, niezależnej od doświadczenia, jednak wspaniale pasuje do świata realnego i tak świetnie go tłumaczy. (Albert Einstein)

Wszystko należy upraszczać jak tylko można, ale nie bardziej. (Albert Einstein)

Matematyka jest sztuką nadawania tych samych nazw różnym rzeczom. (Henri Poincaré)

Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty, matematyk wybitny – analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami. (Stefan Banach)

Matematyk to ślepiec w ciemnym pokoju szukający czarnego kota, którego tam w ogóle nie ma. (Karol Darwin)

Fizyka jest zasadniczo nauką opartą na intuicji i konkretnych faktach. Matematyka stanowi jedynie narzędzie dla zapisywania praw, które rządzą zjawiskami w przyrodzie. (Albert Einstein)

2.8. Słowo końcowe

Jakie ewentualne konkluzje przynosi powyższy tekst? Postaram się, w możliwie krótki sposób, zrekapitulować poczynione ustalenia.

Metafory pojęciowe istotnie pełnią jakąś rolę przy tworzeniu niektórych pojęć matematycznych. Jednak nie tylko one. Abstrakcja, uogólnianie, analogia, wyobrażanie sobie – to bodaj ważniejsze w tym względzie procedury. Tworzenie metafor poznawczych na sposób rozumiany przez autorów nie zdaje sprawy np. z różnicy między opisywaniem a definiowaniem obiektów (a co za tym idzie, również pojęć).

Wiele aktywności matematycznych związanych jest właśnie z porzuceniem metaforyzowania, wyraźnym rozdzieleniem intuicji oraz roboty formalnej. Podać można niezliczone przykłady, gdy intuicje oparte na doświadczeniu potocznym zwodzą nas, nawet w przypadku rozważania całkiem prostych obiektów i konstrukcji matematycznych.

Metafory być może dobrze zdają sprawę z tworzenia prostych pojęć matematycznych. Jednak od pewnego poziomu zaawansowania teorii (a czasem nawet przy tworzeniu całkiem nowych teorii) to chyba nie one odpowiadają za twórczą działalność matematyków.

Na drodze jedynie tworzenia metafor nie można chyba wytłumaczyć ani zmienności naszych intuicji matematycznych, ani faktu konfliktu między pewnymi intuicjami. Tworzenie pojęć matematycznych jest silnie osadzone w historii matematyki.

Być może ładnie dobrane metafory pojęciowe mogą wspomagać dydaktykę matematyki. Ich rola jednak pozostaje pomocnicza – nie wyczerpują one ogółu umiejętności matematycznych. Potwierdzono, iż uczący się matematyki mogą różnić się między sobą w stosowaniu metafor.

Podałem szereg przykładów, w których tworzenie metafor pojęciowych w stylu Lakoffa i Núñeza nie wystarcza do rozumienia złożonych pojęć matematycznych (np.: nieprzeliczalność, struktury topologiczne i różniczkowe, losowość itd.). Można szukać dalszych tego typu przykładów, w każdej właściwie dyscyplinie matematycznej.

Koncepcja Lakoffa i Núñeza dla swojego uprawomocnienia wymaga konkretnych badań empirycznych, dotyczących zarówno procesu tworzenia matematyki, jak i procesu nabywania wiedzy matematycznej.

Deklaracje filozoficzne autorów nie mają, w mojej opinii, należytego wsparcia. W szczególności ich krytyka platonizmu matematycznego ma wiele cech myślenia życzeniowego.

To, że koncepcja tworzenia metafor pojęciowych dobrze tłumaczy wiele faktów dotyczących rozumienia w językach etnicznych, nie oznacza jeszcze, że jest ona możliwa do zastosowania w identyczny sposób do innych systemów pojęciowych, w tym do matematyki. Podobne zastrzeżenia można chyba będzie sformułować, gdy ktoś napisze książkę *Where physics comes from. How the embodied mind brings physics into being*, w której będzie zarówno próbował wywodzić na drodze konstrukcji metafor pojęciowych wszelkie idee fizyki teoretycznej, łącznie z mechaniką kwantową, teorią względności, teorią strun itd., jak też historię fizyki, łącznie z niezliczonymi jej hipotezami, które okazywały się po kolei błędne, lecz bynajmniej nie tamowały dalszego rozwoju tej dyscypliny.

Moje uwagi krytyczne mogą wydawać się bezładną zbieraniną poczynionych *ad hoc* zarzutów, lecz nie było moim zamiarem podanie jakiejś spójnej, w miarę kompletnej alternatywy dla koncepcji ucieleśnionej matematyki, to przekracza moje skromne możliwości. Książka Lakoffa i Núñeza zasługuje na krytykę, lecz zasługuje również na uwagę. Jest odważną (w wielu miejscach niestety pochopnie brawurową) próbą zmierzenia się z fundamentalnymi pytaniami dotyczącymi, m.in. epistemologii matematyki, jej ontologii, fascynującego zjawiska, jakim jest twórczość matematyczna, bardzo trudnych problemów związanych ze skutecznym nauczaniem matematyki, wreszcie miejsca matematyki w całości kultury.

Bibliografia

Abbot, E.A. (1952). *Flatland. A romance of many dimensions*. New York: Dover Publications, Inc.

Aubry, M. (2009). Metaphors in mathematics: introduction and the case of algebraic geometry. Dostęp 11 lipca 2020:

http://imagine.enpc.fr/∼aubrym/publications/2009-metaphors-in-mathematics.pdf

Auslander, J. (2001). Embodied mathematics. *American Scientist*, 89: 366–367.

Batóg, T. (2000). *Dwa paradygmaty matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Becker, O. (1954). *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg – München.

Błaszczyk, P. (2007). *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda "Stetigkeit und irrationale Zahlen"*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

Brożek, B., Hohol, M. (2014). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.

Bryll, G., Sochacki, R. (2009). *Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki*. Poznań: GARMOND Oficyna Wydawnicza.

Cantor, G. (1882). Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 20: 113–121.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: the science of patterns*. New York: W.H. Freeman.

Devlin, K. (2008). How do learn math? *Mathematical Association of America*. Dostęp 11 lipca 2020:

http://www.maa.org/devlin_12_08.html

Dewdney, A.K. (1984). *The Planiverse*. Poseidon.

Dewdney, A.K. (2000). The Planiverse project: then and now. *The Mathematical Intelligencer.*, 22: 46–51.

Ehrlich, P. (2006). The rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: the emergence of non-Archimedean systems of magnitudes. *Archive for the History of Exact Sciences*, 60: 1–121.

Elglaly, Y.N., Quek, F. (2009). Review of "Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being" by George Lakoff and Rafael E. Nuñez. Boston: *CHI 2009*.

Gardner, M. (1997). *The last recreations. hydras, eggs, and other mathematical mystifications.* New York: Springer-Verlag.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. (1990). *Theorems and counterexamples in mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. (2003). *Counterexamples in analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Gold, B. (2001). Review of Lakoff, Núñez 2000. Dostęp 11 lipca 2020:

www.maa.org/reviews/wheremath.html

Goldin, G.A. (2001). Counting on the metaphorical. *Nature*, 413: 18–19.

Grygiel, W., Hohol, M., Piechowicz, R. (2011). Zmatematyzowana metafora i zmetaforyzowana matematyka. *Logos and Ethos*, 31 (2): 147–168.

Heller, M. (1997). Czy świat jest racjonalny? *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 20: 66–78.

Heller, M. (1998). Czy świat jest matematyczny? *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 22: 3–14.

Henderson, D.W. (2002). Review of: Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being. *The Mathematical Intelligencer*, 24 (1): 75–76.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95: 161–190. Polskie tłumaczenie w: Murawski, R. (2003). *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, 319–340.

Hinton, C.H. (1907). *An episode of Flatland. How a plane folk discovered the third dimension: to which is added, an outline of the history of Unæa.* London: Swan Sonnenschein and Co.

Hohol, M. (2011). Matematyczność ucieleśniona. W: Brożek, B., Mączka, J., Grygiel, W., Hohol, M., redakcja, *Oblicza racjonalności.* Kraków: Copernicus Center Press, 143–166.

Kajfosz, J. (2010). *U wrót przestrzeni. Przesłanie Biblii w świetle geometrii wielowymiarowej*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza VOCATIO.

Kanamori, A. (1994). *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings.* Berlin: Springer-Verlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge.

Lakoff, G., Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., Núñez, R.E. (2001). Replay to Bonnie Gold's Review. Dostęp 11 lipca 2020:

www.maa.org/reviews/wheremath_reply.html

Lanczos, C. (1967). *Albert Einstein i porządek wszechświata*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Madden, J.J. (2001). Review of: Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being. *Notices of the AMS*, 48: 1182–1188.

Manin, Y.I. (1991). Mathematics as metaphor. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Japan 1990*, The Mathematical Society of Japan.

Michniowski, T. (2004). *Wszechświat matematyczny*. Lublin: Wydawnictwo KUL.

Mioduszewski, J. (1996). *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Mostowski, A. (1967). O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica*, 20: 99–116.

Murawski, R. (2002). *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Núñez, R.E. (2005). Creating mathematical infinities: metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics*, 37: 1717–1741.

Núñez, R.E., Edwards, L.D., Matos, J.F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 39: 45–65.

Paulos, J.A. (2001). Math at 98.6°. *The American Scholar*, 70 (1): 151–152.

Polya, G. (1964). *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Pogonowski, J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae*, 23: 106–147. Dostęp 11 lipca 2020:

http://inveling.amu.edu.pl/

http://www.logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf

Pogonowski, J. (2012). Matematyczne fantazje kognitywistów. W Juchnowski, J., Wiszniowski, R., redakcja, *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, Vol. 2, 117–127.

Pogonowski, J. (2017). On conceptual metaphors in mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 9: 85–98.

Pogonowski, J. (2019). *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.

Pogonowski, J. (2020). *Myślenie matematyczne. Drobne eseje przedemerytalne*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.

Schiralli, M., Sinclair, N. (2003). A constructive response to 'Where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics*, 52: 79–91.

Siegfried, T. (2001). Math may be not in the stars, but in ourselves. *The Dallas Morning News*, May 3, 2011.

Sierpińska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. (1995). *Counterexamples in topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Voorhees, B. (2004). Embodied mathematics. Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies*, 11 (9): 83–88.

Wise, G.L., Hall, E.B. (1993). *Counterexamples in probability and real analysis*. New York: Oxford University Press.

Tan, L. (1996). The group of rational points on the unit circle. *Mathematics Magazine*, 69 (3): 163–171.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 (2): 161–177.

Weber, H. (1898). *Lehrbuch der Algebra. Einleitung.* Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.