STEFAN MYNARSKI

# CYBERNETYCZNE ASPEKTY MODELI PRZEPŁYWÓW LUDNOŚCIOWYCH W MIĘDZYREGIONALNEJ ANALIZIE POPYTU KONSUMPCYJNEGO

W badaniach rynkowych w przekroju regionalnym niezwykle ważnym elementem wpływającym na kształtowanie się popytu konsumpcyjnego są zagadnienia ludnościowe, w tym zwłaszcza liczba i struktura ludności zamieszkującej dany region według wieku i płci oraz ruch naturalny i wędrówkowy ludności. Wszystkie te elementy decydują o wielkości i strukturze popytu konsumpcyjnego na danym terenie, zwłaszcza w zakresie tych artykułów, których spożycie uzależnione jest bardzo wyraźnie od różnych kategorii jednostek konsumpcyjnych. Odnosi się to w szczególności do artykułów żywnościowych, które są spożywane w zależności od wieku i płci konsumentów, a także stanów fizjologicznych i rodzaju wykonywanej pracy. Znajduje to nawet swój wyraz w ustalonych przez fizjologów normach wyżywienia, które przewidują dość dalekie zróżnicowanie w racjach pokarmowych dla osób w różnym wieku, płci oraz zatrudnieniu. Również popyt na szereg artykułów przemysłowych uzależniony jest od różnych cech demograficznych konsumentów. Tak na przykład odzież i obuwie pod względem swych rozmiarów i fasonów są ściśle przystosowane do wieku i płci konsumentów. Podobnie jest z artykułami galanteryjnymi czy nawet kosmetycznymi, chociaż tutaj wpływ wieku na popyt będzie się raczej zacierał.

Jak z tego wynika, znajomość podstawowych elementów składu osobowego ludności na danym terenie posiada ogromne znaczenie dla prawidłowego ustalania zapotrzebowania tej ludności na szereg artykułów konsumpcyjnych. Trudność polega jednak na tym, że układ ludnościowy w skali regionalnej jest bardzo dynamiczny i zmienny i nie da się nigdy całkiem dokładnie określić aktualnej liczby i struktury ludności znajdującej się na danym terenie. Istniejące statystyki podają jedynie stany ludności na określone momenty czasu, nie dają natomiast żadnych informacji o kształtowaniu się przejść z jednego stanu w drugi, toteż obiecującym narzędziem uchwycenia tego procesu wydają się tzw. wieloczynnikowe macierze przejścia, które pozwalają opisać mechanizm funkcjonowania całego układu ludnościowego łącznie z odradzaniem się i obumieraniem poszczególnych jego elementów.

Jak wiadomo, podstawowymi składnikami zmian ludnościowych w skali regionalnej są z jednej strony elementy decydujące o ruchu naturalnym ludności, czyli urodzenia i zgony, z drugiej zaś elementy wyznaczające ruch wędrówkowy ludności, tj. odpływy i przypływy migracyjne. Elementy te powodują, że z okresu na okres zmienia się międzyregionalny układ ludności zarówno pod względem swoich rozmiarów, jak i wewnętrznej struktury.

Posługując się modelem tożsamościowym dla zbilansowania stanów ludności w skali regionu w ciągu pewnego okresu czasu, można napisać podstawową równość w postaci:

$$L_r^{(t+1)} = L_r^{(t)} + A_r - B_r - U_r + V_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \qquad \textbf{(i)}$$

gdzie $L^{(t)}$ i $L^{(t+1)}$ oznaczają liczby ludności w regionie „$r$" odpowiednio w okresie t i t+1, $Ar$ i $Br$ oznaczają odpowiednio liczbę urodzeń i zgonów w regionie „$r$" pomiędzy okresem $t$ i $t+1$, $U_r$ i $V_r$ oznaczają odpowiednio liczbę odpływu i przypływu migracyjnego dla regionu „$r$" pomiędzy okresem $t$ i $t+1$.

Uwzględniając łączną liczbę m regionów, możemy przepływy migracyjne wyrazić w terminach odpływów w postaci

$$U_r = \sum_{j \neq r}^{m} U_{rj} \quad \text{oraz} \quad V_r = \sum_{i \neq r}^{m} U_{ir}$$

gdzie $U_{ij}$ oznacza odpływ ludności z regionu „$i$" do regionu „$j$".

Oczywiście suma wszystkich odpływów musi się równać ogólnej sumie przypływów, co można zapisać

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{j \neq r}^{m} U_{rj} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i \neq r}^{m} U_{ir}$$

Dzieląc następnie odpływy migracyjne poszczególnych regionów przez liczbę ludności tych regionów, możemy model (1) zapisać w postaci

$$L_r^{(t+1)} = L_r^{(t)} + A_r - B_r - \sum_{j \neq r}^{m} u_{rj} L_r^{(t)} + \sum_{i \neq r}^{m} u_{ir} L_i^{(t)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2)$$

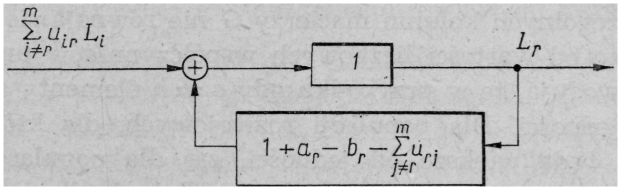
gdzie $u_{ij} = \dfrac{U_{ij}}{L_i^{(t)}}$.

Wyrażając z kolei urodzenia i zgony w wielkościach wskaźnikowych można model (2) napisać w postaci

$$L_r^{(t+1)} = (1 + a_r - b_r - \sum_{j \neq r}^{m} u_{rj}) L_r^{(t)} + \sum_{i \neq r}^{m} u_{ir} L_i^{(t)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2a)$$

gdzie $a_r$ oraz $b_r$ oznaczają odpowiednio współczynniki urodzeń i zgonów.

Jak można zauważyć, model (2a) opisuje układ o sprzężeniu zwrotnym, w którym rolę wejść odgrywają przypływy migracyjne do regionu *„r"* z pozostałych *m–1* regionów, zaś rolę wyjść, stan ludności w regionie *„r",* co można schematycznie przedstawić w postaci




W modelu powyższym rolę regulatora odgrywają wskaźniki urodzeń, zgonów i odpływu migracyjnego, a efektem ich oddziaływania jest zwykle hamowanie wzrostu stanu liczebnego ludności miejscowej, gdyż suma wskaźników umieralności i odpływu migracyjnego przewyższa zwykle wartość wskaźnika urodzeń. Stąd łączna wartość przepustowa układu regulacyjnego jest zwykle mniejsza od jedności, wyznaczając proporcję ludności, która z okresu na okres pozostaje w danym regionie łącznie z własnym przyrostem naturalnym. Gdyby zatem nie napływ ludności z pozostałych regionów, który bezpośrednio zwiększa stan ludności danego regionu (ze względu na przepustowość układu regulowanego równą 1), to liczba ludności w tym regionie miałaby zwykle tendencję spadkową. Przepływy migracyjne są zatem jedynym regulatorem powstających dysproporcji w międzyregionalnych stanach ludności. Bardziej widoczne stanie się to, gdy od pojedynczych regionów przejdziemy do kompleksowego układu m regionów. W tym celu wygodniej będzie napisać model (2a) w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} L_1^{(t+1)} \\ L_2^{(t+1)} \\ L_3^{(t+1)} \\ \vdots \\ L_m^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}\, u_{21}\, u_{31} \ldots u_{m1} \\ u_{12}\, s_{22}\, u_{32} \ldots u_{m2} \\ u_{13}\, u_{23}\, s_{33} \ldots u_{m3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1m}\, u_{2m}\, u_{3m} \ldots s_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1^{(t)} \\ L_2^{(t)} \\ L_3^{(t)} \\ \vdots \\ L_m^{(t)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie

$$s_{rr} = (1 + a_r - b_r - \sum_{j \neq r}^{m} u_{rj})$$

Model (3) można również napisać w postaci

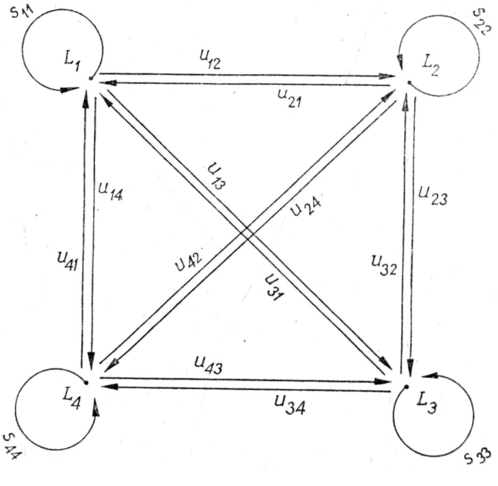
$$L^{(t+1)} = GL^{(t)} \tag{3a}$$

gdzie $L^{(t)}$ i $L^{(t+1)}$ są wektorami stanów ludności w *m* regionach w okresie odpowiednio *t* i *t+1*, zaś *G* jest macierzą operatorową wzrostu, będącą transponowaną macierzą przejścia, w której elementy na głównej przekątnej oznaczają frakcje ludności pozostającej w danym regionie łącznie z przyrostem naturalnym pomiędzy okresem $t$ i $t$+1, zaś elementy poza główną przekątną oznaczają frakcje międzyregionalnych przepływów migracyjnych pomiędzy okresem $t$ i $t$+1. Należy zaznaczyć, że sumy elementów poszczególnych kolumn macierzy G nie równają się zwykle jedności. Zależy to od wartości liczbowych współczynników urodzeń i zgonów, które powodują, że w przypadku gdy $a \neq b$ elementy $s_{rr}$ nie dopełniają się do jedności. Dla populacji rozwojowych, dla których $a_r > b_r$ sumy kolumn będą większe od jedności, zaś dla populacji gasnących $(a_r < b_r)$ sumy te będą mniejsze od jedności. Jedynie dla populacji ustabilizowanych o równych współczynnikach urodzeń i zgonów macierze przejścia będą typowymi macierzami opisującymi jednorodne procesy Markowa [1]. Zgodnie z tym można by model (3a) napisać w postaci

$$L^{(t+1)} = (A - B + P')\, L^{(t)} \tag{3b}$$

gdzie $A$ jest diagonalną macierzą współczynników urodzeń, $B$ jest diagonalną macierzą współczynników zgonów, zaś $P$ jest macierzą prawdopodobieństw przejścia.

Macierz operatorowa wzrostu, podobnie jak macierz prawdopodobieństw przejścia, opisują strukturę sprzężeń układu, którą można graficznie przedstawić za pomocą sieci sprzężeń o przepustowościach cząstkowych równych wartościom poszczególnych elementów macierzy, co na przykład dla układu czterech regionów będzie miało postać jak na ryc. 1.




Ryc. 1

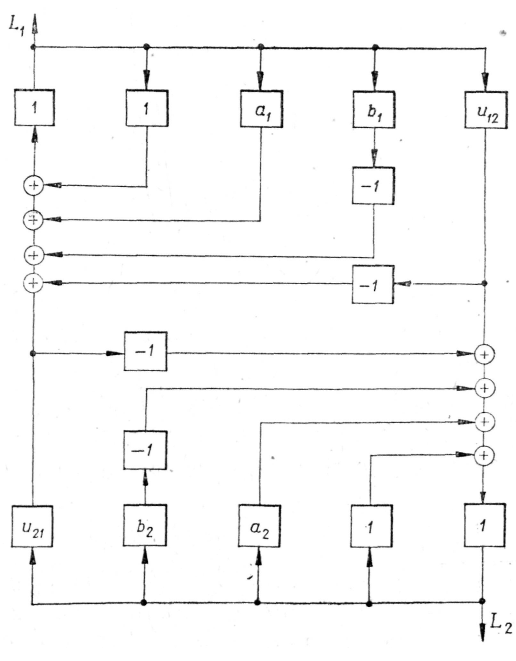
[1] T. C. Lee, G. G. Judge, T. Takyama, *On Estimating the Transition Probabilities of Markov Process.* Journal of Farm Economics, 1965, 43.

W przypadku bardziej ogólnym, dowolny układ składający się z $m$ elementów (regionów) posiadał będzie $m$ pętli sprzężeń zwrotnych o przepustowościach równych elementom na głównej przekątnej macierzy $G$ oraz nie więcej jak $\frac{m(m-1)}{2}$ bezpośrednich sprzężeń zwrotnych o przepustowościach cząstkowych równych elementom położonym symetrycznie parami względem przekątnej głównej. Ponadto układ może zawierać szereg pośrednich sprzężeń zwrotnych, które będą podnosiły jego ultrastabilność. Trzeba również pamiętać, że elementy stabilizujące układ nie są tylko pojedynczymi pętlami sprzężeń zwrotnych, a całymi pękami pętli, w zależności od liczby i spójności poszczególnych regionów.

Dla ilustracji posłużymy się przykładem dwóch regionów, dla których układ równań strukturalnych ma postać

$$L_1^{(t+1)}=(1+a_1-b_1-u_{12})L_1^{(t)}+u_{21}L_2^{(t)}$$
$$L_2^{(t+1)}=(1+a_2-b_2-u_{21})L_2^{(t)}+u_{12}L_1^{(t)}.$$

Układ powyższy można przedstawić za pomocą schematu blokowego (ryc. 2). Jak można zauważyć, układy regulacyjne w każdym regionie składają się z czterech pętli sprzężenia zwrotnego połączonych równolegle, przy czym każda z nich reprezentuje odmienne procesy. Pierwsza pętla sprzężenia zwrotnego o przepustowości „1" stara się utrzymać dotychczasowy stan ludności na niezmiennym poziomie, pętla druga natomiast




Ryc. 2

oddziałuje dodatnio na stan wejściowy układu przez powiększanie dotychczasowego stanu ludności o nowo narodzonych, trzecia pętla z kolei hamuje wzrost stanu ludności o liczbę zgonów i podobnie czwarta pętla zmniejsza stan wejściowy układu o liczbę odpływu migracyjnego, zwiększając równocześnie stan wejściowy układu regulowanego w drugim regionie. Całość regulacji dokonuje się zatem w ramach zamkniętego układu sprzężeń zwrotnych, bez wpływu czynników zewnętrznych, a stany układu zależą jedynie od stanów poprzednich, tak jak to ma miejsce w znanych procesach Markowa. Wskazywałaby na to również postać strukturalna układu równań jednoczesnych (3), która nie zawiera żadnych zmiennych egzogenicznych, a tylko zmienne endogeniczne objaśniane przez poszczególne równania modelu, w których występują one również w charakterze zmiennych objaśniających, opóźnionych o jeden okres.

Tymczasem mimo dużego podobieństwa procesów ludnościowych w skali regionalnej z procesami Markowa, zmiany w stanie ludności w czasie nie zależą tylko od samoczynnych procesów przepływów ludnościowych (naturalnych i migracyjnych), lecz są tak samo wynikiem oddziaływań zewnętrznych. Każda najmniejsza nawet zmiana w układzie stosunków ekonomicznych już powoduje, że proces występowania równowagowych tendencji w przepływach ludnościowych zaczyna się chwiać, skutkiem czego stany ludności w poszczególnych regionach układają się w sposób odmienny od przewidywanych.

Przeobrażenia w strukturze społeczno-ekonomicznej poszczególnych regionów wywołują zwykle daleko większe zmiany w układzie ludnościowym niż każde inne doraźne formy interwencji zewnętrznej, gdyż wpływają one przeważnie na zmianę struktury sprzężeń układu (zmianę wartości elementów macierzy operatorowej przejścia), podczas gdy na przykład środki polityki interwencyjnej państwa wpływają jedynie na stany wyjściowe lub na dodatkowe wejścia układu. W pierwszym przypadku chodziłoby o kwestię każdorazowych zmian postaci numerycznej macierzy przejścia, w drugim zaś o zmodyfikowanie układu o dodatkowe wejścia, co można by uczynić przez wprowadzenie do układu równań (3) dodatkowego wektora zmiennych egzogenicznych.

Ponieważ jednak w praktyce trudno jest wyodrębnić wpływ efektów zewnętrznych na zmianę macierzy przejścia i zmianę stanów wejściowych (wyjściowych) układu, dokonuje się zwykle estymacji macierzy przejścia na podstawie szeregów czasowych zaobserwowanych stanów ludności w poszczególnych regionach, traktując odchylenia pomiędzy stanami faktycznymi i teoretycznymi jako czysto przypadkowe lub też dokonuje się interpolacji macierzy przejścia wyznaczonej na podstawie zaobserwowanych stanów ludności w dwóch możliwie odległych od siebie terminach czasu. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z modelem regresji, który dla wszystkich m regionów przyjmie następującą macierzową postać

$$\begin{bmatrix} L_1^{(t+1)} \\ L_2^{(t+1)} \\ \vdots \\ L_m^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & u_{21} & u_{31} & \dots & u_{m1} \\ u_{12} & s_{22} & u_{32} & \dots & u_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1m} & u_{2m} & u_{3m} & \dots & s_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1^{(t)} \\ L_2^{(t)} \\ \vdots \\ L_m^{(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^{(t)} \\ e_2^{(t)} \\ \vdots \\ e_m^{(t)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

lub

$$L^{(t+1)} = GL^{(t)} + e^{(t)} \tag{4a}$$

gdzie $L^{(t)}$ i $L^{(t+1)}$ są wektorami zaobserwowanych stanów ludności w $m$ regionach w okresach odpowiednio $t$ i $t$+1, G jest oszacowaną[2] macierzą operatorową wzrostu na podstawie szeregów czasowych oraz $e^{(t)}$ jest wektorem odchyleń pomiędzy zaobserwowanymi a obliczonymi wartościami stanów ludności w okresie $t$. Wektor $e^{(t)}$ odgrywa rolę dodatkowych wejść regulujących stany wewnętrzne układu poprzez oddziaływanie czynników przypadkowych z zewnątrz.

Drugi sposób szacowania macierzy przejścia polega na interpolowaniu jej elementów na podstawie zaobserwowanych stanów w dwóch odstępach czasu, np. pomiędzy dwoma kolejnymi spisami ludności, poprzez wyciągnięcie $n$-tego pierwiastka z tej macierzy, gdzie $n$ jest liczbą podokresów dzielących przedział czasowy dla zaobserwowanych stanów. Korzysta się przy tym ze znanej własności mnożenia macierzy

$$G^{\frac{1}{n}} = ND^{\frac{1}{n}}N^{-1}$$

gdzie $D$ jest macierzą diagonalną, a $N$ jest odpowiednio skonstruowaną nieosobliwą macierzą kwadratową tego samego rzędu co $G$. W algebrze macierzy dowodzi się, że dla $G$ z różnymi pierwiastkami charakterystycznymi rozwiązaniem dla $D$ jest macierz diagonalna z niezerowymi elementami, równymi pierwiastkom charakterystycznym równania wyznacznikowego

$$\|G - \lambda I\| = 0$$

Po dokonaniu interpolacji macierzy przejścia do okresu jednostkowego przeprowadza się identyczny ciąg operacji, jak w przypadku modelu regresyjnego, tzn. przemnaża się macierz przejścia przez wektory faktycznie zaobserwowanych stanów układu, a nie przez wektory stanów teoretycz-

[2] Istnieją zasadniczo trzy metody szacowania macierzy przejścia na podstawie szeregów czasowych, a mianowicie: 1) klasyczna metoda najmniejszych kwadratów, 2) metoda absolutnych odchyleń oparta na programowaniu liniowym oraz 3) metoda najmniejszych kwadratów przy warunkach ograniczających, oparta na programowaniu kwadratowym. Zob. A. Rogers, *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution.* Berkeley — Los Angeles 1968, 38-44; S. Mynarski, *Użyteczność demograficznych macierzy przejścia w międzyregionalnych badaniach rynku.* Przegląd statystyczny 1970, nr 2; L. G. Telser, *Least Squares Estimates* oj *Transition Probabilities in Measurement in Economics.* Palo Alto 1963.

nych, jak to ma miejsce w rekursywnym systemie podstawień w procesach Markowa.

W badaniach rynkowych w przekroju regionalnym ważne znaczenie ma nie tylko znajomość liczby ludności, ale jak to już na początku stwierdzono, również jej struktury według wieku i płci, od której zależy popyt na szereg artykułów. Powstaje zatem problem włączenia do dotychczasowego modelu elementów rozdrabniających cały układ na pewne podukłady grup wiekowych, w ramach których zachodzić będą podobne procesy przejścia, tylko że o zgoła odmiennym charakterze. Mianowicie dotyczyć one będą przechodzenia z niższych grup wiekowych do wyższych, a macierze przejścia, które będą opisywać te procesy można by nazwać macierzami przeżycia. Postać tych macierzy będzie jednak inna dla ludności stacjonarnej, a inna dla przepływowej, bowiem wśród ludności stacjonarnej zachodził będzie proces ciągłego odradzania się układu (urodzenia żywe), podczas gdy wśród ludności przepływowej sam fakt przemieszczeń. Oczywiście w jednym i w drugim przypadku zachodzić będą podobne procesy starzenia się ludności.

Ciekawe propozycje w zakresie macierzy przeżycia dla ludności stacjonarnej przedstawił A. Rogers[3]. Proponowana przez niego macierz ma postać[4]:

$$\underset{n\times n}{S} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{l1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Macierz składa się z elementów $s_{r,r+1}$ ułożonych nad główną przekątną, przy czym każdy z nich oznacza proporcję ludności w grupie wiekowej *„r"*, która przeżywszy do końca jednostkowego przedziału czasowego przechodzi do grupy wiekowej *„r+1"*. Oprócz tego macierz zawiera również w pierwszej kolumnie elementy $s_1, \dots, s_1$, które oznaczają proporcję nowo narodzonych dzieci w stosunku do liczby ludności w grupach wiekowych od *„k"* do *„l"* mogących mieć dzieci.

[3] A. Rogers, op. cit., s. 10 - 15.

[4] Zmieniono nieco symbolikę oraz dokonano transpozycji macierzy w celu zachowania korespondencji z poprzednimi rozważaniami.

Nieco prostszą budowę posiada macierz przeżycia ludności przepływowej, gdyż nie zawiera już kolumny dotyczącej urodzeń. Macierz taka w stosunku do ludności migrującej z regionu „*i*" do regionu „*j*" ma postać [5]:

$$\underset{n \times n}{U_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & u_{12}^{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & u_{23}^{ij} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{n-1,n}^{ij} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Elementy $u_{r,r+1}^{ij}$ oznaczają proporcję ludności w grupie wiekowej „*r*" która w ciągu jednostkowego okresu czasu przesuwa się z regionu „*i*" do regionu „*j*" i wchodzi tam do grupy wiekowej „*r+1*".

Trzeba jednak zaznaczyć, iż pomimo dużej oryginalności powyższych macierzy, zakres ich stosowalności w praktyce jest dość poważnie ograniczony. Macierze te mogą być bowiem stosowane tylko w tych przypadkach, gdy długość przyjętych przedziałów wiekowych pokrywa się dokładnie z długością jednostek czasowych istniejących w sprawozdawczości statystycznej. Tymczasem w praktyce nie tylko, że długość ta się nie pokrywa, ale jeszcze istnieje zróżnicowanie w długości przedziałów wiekowych. Ponieważ zwykle okresy sprawozdawcze w zakresie danych demograficznych są krótsze od przedziałów wiekowych, wystąpi sytuacja, że nie cała ludność w grupach wiekowych, która przeżyje do końca jednostkowego okresu czasu, przejdzie do następnych grup wiekowych, lecz część z niej pozostanie nadal w dotychczasowych grupach. Udział ludności pozostającej w tych grupach będzie wprost proporcjonalny do rozpiętości przedziałów wiekowych tych grup, a odwrotnie proporcjonalny do długości jednostkowego okresu sprawozdawczego. W każdym bądź razie w macierzach przejścia wystąpią obok siebie po dwa elementy wzdłuż głównej przekątnej, z których jedne będą leżały na samej przekątnej, a drugie tuż obok nich w prawo [6]. Wobec tego wieloczynnikowa macierz przeżycia dla ludności stacjonarnej w danym regionie będzie miała postać

[5] Zmieniono symbolikę i układ w celu zachowania jednolitej nomenklatury oznaczeń.

[6] W przypadku, gdyby wystąpiła sytuacja odwrotna i przedziały wiekowe były mniejsze od okresów sprawozdawczych, w macierzach przejścia wystąpiłyby również po dwa elementy wzdłuż głównej przekątnej, tylko że już przesunięte o jedno lub więcej miejsc w prawo w zależności od tego, ile razy okres sprawozdawczy jest dłuższy od przedziału wiekowego.

$$\underset{n\times n}{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{k1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{l1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{n-1,n-1} & s_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & s_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

W macierzy tej elementy $s_{rr}$ leżące na głównej przekątnej oznaczają frakcje ludności w grupie wiekowej „$r$", która przeżywszy do końca jednostkowego przedziału czasowego pozostała w tej grupie wiekowej na następny okres, zaś elementy $s_{r,r+1}$ oznaczają pozostałą frakcję ludności, która przeżyła i przeszła do następnej grupy wiekowej. W ten sposób w ramach poszczególnych grup wiekowych można wyróżnić ludność młodszą, pozostającą nadal w danej grupie, od ludności starszej, która przechodzi do następnej grupy wiekowej. Ponadto, tak jak u Rogersa, macierz zawiera w pierwszej kolumnie elementy $s_{kl}$ ..., $s_{ll}$, oznaczające frakcje nowo narodzonych dzieci, które, przeżywszy do końca jednostkowego przedziału czasowego, powiększyły stan liczebny pierwszej grupy wiekowej.

Cechą charakterystyczną tej macierzy jest to, że poszczególne jej wiersze nie sumują się do jedności i są na ogół mniejsze w grupach wiekowych niereprodukcyjnych o frakcję zgonów i frakcję odpływów migracyjnych oraz większe od jedności w grupach reprodukcyjnych, o ile frakcje nowo narodzonych dzieci w tych grupach są wyższe od frakcji zgonów i odpływów migracyjnych. Gdyby do macierzy dodać dodatkowy wiersz i dodatkową kolumnę dla reprezentowania końcowego stanu, jakim jest zgon, to na ich przecięciu wystąpiłaby jedynka, zaś pozostałe elementy wiersza byłyby zerami, a elementy kolumnowe frakcjami zgonów i macierz taka opisywałaby kompletny układ ludności stacjonarnej w danym regionie. Układ taki posiadałby swoje wejścia w postaci przypływów migracyjnych oraz wyjścia w postaci odpływów.

Podobnej modyfikacji jak macierz przeżycia ludności stacjonarnej według grup wiekowych wymaga również macierz przeżycia ludności przepływowej. Zawierać ona będzie również po dwa elementy wzdłuż głównej przekątnej, a więc jej postać dla przejścia z regionu „$i$" do regionu „$j$" będzie następująca:

$$
\underset{n\times n}{U_{ij}} = \begin{bmatrix} u_{11}^{ij} & u_{12}^{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}^{ij} & u_{23}^{ij} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1}^{ij} & u_{n-1,n}^{ij} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn}^{ij} \end{bmatrix} \tag{8}
$$

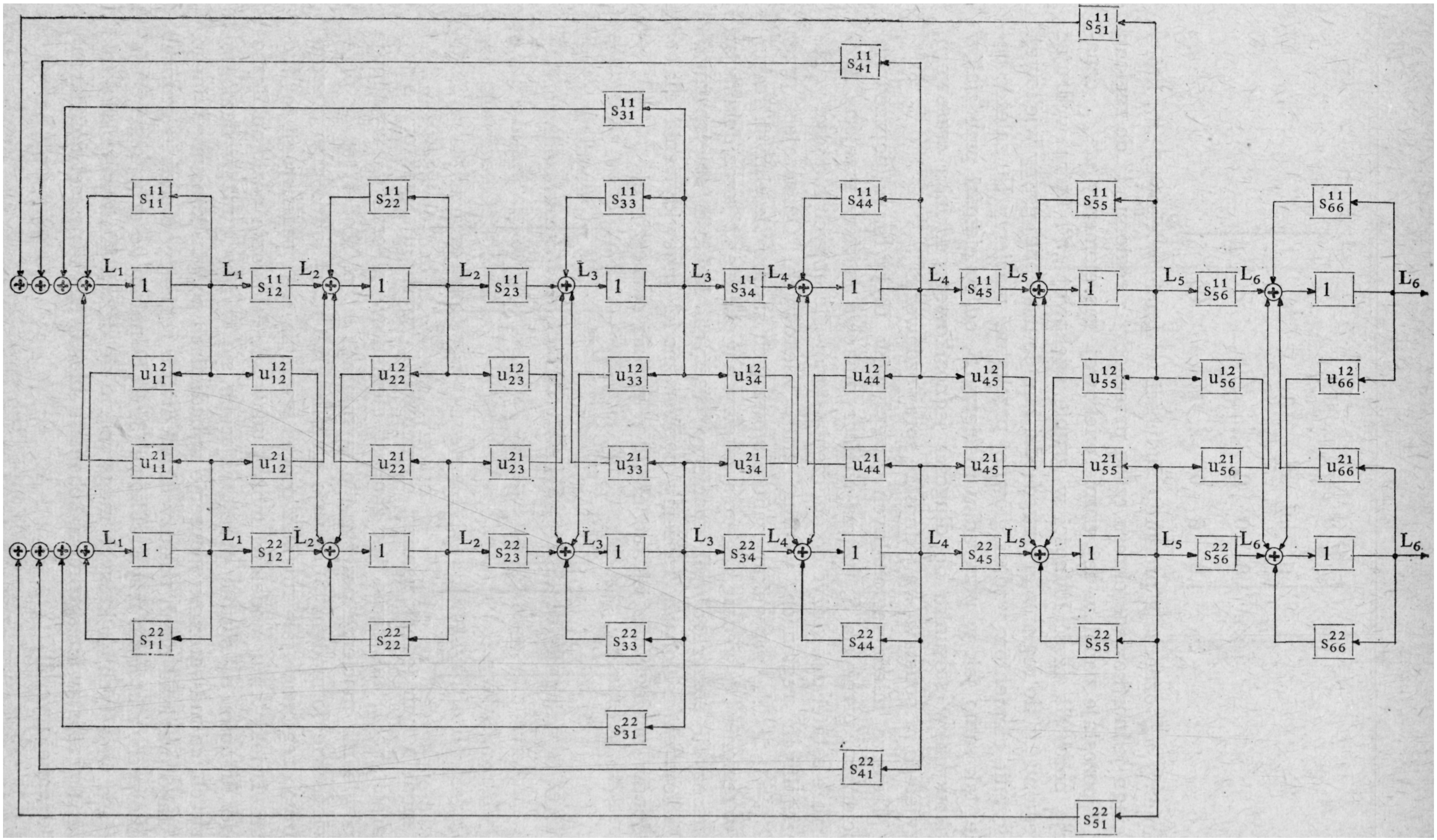
Elementy $u_{rr}^{ij}$ oznaczają proporcję ludności w grupie wiekowej „*r*", która w ciągu jednostkowego okresu czasu przechodzi z regionu „*i*" do regionu „*j*" i pozostaje nadal w tej grupie wiekowej, zaś elementy $u_{r,r+1}^{ij}$ oznaczają pozostałą część ludności w grupie wiekowej „*r*", która wędrując z regionu „*i*" do regionu „*j*" przechodzi tam do następnej grupy wiekowej. Położenie elementów wzdłuż głównej przekątnej macierzy $U_{ij}$ zależeć będzie, tak samo jak w przypadku macierzy *S,* od rozpiętości przedziałów wiekowych w stosunku do długości jednostkowego odcinka czasowego, przyjętego za podstawową jednostkę sprawozdawczą.

Macierze międzyregionalnych przepływów $U_{ij}$, wraz z poprzednimi macierzami przeżycia *S,* tworzą wieloczynnikową macierz przejścia, która może ostatecznie służyć do obliczenia stanów liczebnych ludności w poszczególnych regionach według grup wiekowych. Oznaczając przez $L_i^{(\,)}$ ($i$=1, 2, ..., $m$) wektor zaobserwowanych stanów liczebnych ludności w regionie „*i*" według *n* grup wiekowych w okresie „*t*" oraz dokonując transpozycji poszczególnych macierzy przeżycia ludności stacjonarnych w kolejnych regionach, możemy napisać model przewidywania dla *m* regionów, analogicznie jak model (3), w postaci macierzowej

$$
\begin{bmatrix} L_1^{(t+1)} \\ L_2^{(t+1)} \\ L_3^{(t+1)} \\ \vdots \\ L_m^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & U_{21} & U_{31} & \dots & U_{m1} \\ U_{12} & S'_{22} & U_{32} & \dots & U_{m2} \\ U_{13} & U_{23} & S'_{33} & \dots & U_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{1m} & U_{2m} & U_{3m} & \dots & S'_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1^{(t)} \\ L_2^{(t)} \\ L_3^{(t)} \\ \vdots \\ L_m^{(t)} \end{bmatrix} \tag{9}
$$

W modelu tym jednak zamiast elementów *L*i występują wektory o wymiarach $n\times 1$, tak samo jak zamiast elementów $s_{ii}$ oraz $u_{ij}$ występują odpowiednie macierze przeżycia o wymiarach $n\times n$. Model ten w przeciwieństwie do modelu (3) opisuje już nie tylko stany ludności w poszczególnych regionach, ale również proces starzenia się i regeneracji tej ludności. Dzięki temu modelowi można uchwycić falowanie poziomu liczbowego ludności na skutek przesuwających się wyżów i niżów demograficznych, co ma ogromne znaczenie w badaniach popytu konsumpcyjnego.

Jako przykład niech posłuży układ dwóch regionów o sześciu grupach wiekowych, z których trzy środkowe (3, 4 i 5) należą do grup regenerujących, a więc tych, w których mogą rodzić się dzieci. Wówczas układ taki można przedstawić za pomocą schematu blokowego o postaci dość skomplikowanej (ryc. 3).



$s^{11}_{51}$
$s^{11}_{41}$
$s^{11}_{31}$
$s^{11}_{11}$
$s^{11}_{22}$
$s^{11}_{33}$
$s^{11}_{44}$
$s^{11}_{55}$
$s^{11}_{66}$
$L_1$
1
$L_1$
$s^{11}_{12}$
$L_2$
1
$L_2$
$s^{11}_{23}$
$L_3$
1
$L_3$
$s^{11}_{34}$
$L_4$
1
$L_4$
$s^{11}_{45}$
$L_5$
1
$L_5$
$s^{11}_{56}$
$L_6$
1
$L_6$
$u^{12}_{11}$
$u^{12}_{12}$
$u^{12}_{22}$
$u^{12}_{23}$
$u^{12}_{33}$
$u^{12}_{34}$
$u^{12}_{44}$
$u^{12}_{45}$
$u^{12}_{55}$
$u^{12}_{56}$
$u^{12}_{66}$
$u^{21}_{11}$
$u^{21}_{12}$
$u^{21}_{22}$
$u^{21}_{23}$
$u^{21}_{33}$
$u^{21}_{34}$
$u^{21}_{44}$
$u^{21}_{45}$
$u^{21}_{55}$
$u^{21}_{56}$
$u^{21}_{66}$
$L_1$
1
$L_1$
$s^{22}_{12}$
$L_2$
1
$L_2$
$s^{22}_{23}$
$L_3$
1
$L_3$
$s^{22}_{34}$
$L_4$
1
$L_4$
$s^{22}_{45}$
$L_5$
1
$L_5$
$s^{22}_{56}$
$L_6$
1
$L_6$
$s^{22}_{11}$
$s^{22}_{22}$
$s^{22}_{33}$
$s^{22}_{44}$
$s^{22}_{55}$
$s^{22}_{66}$
$s^{22}_{31}$
$s^{22}_{41}$
$s^{22}_{51}$


Ryc. 3

Jak ze schematu wynika, proces starzenia się ludności w każdym z regionów przechodzi kolejne etapy od młodszych grup wiekowych do starszych, zbliżając się nieuchronnie do ostatecznego stanu, który zamyka poszczególne cykle generacyjne. Proces ten zatrzymuje się częściowo na poszczególnych etapach w stosunku proporcjonalnym do wskaźników liczbowych $s_{rr}^{ii}$ umieszczonych na pętlach sprzężeń zwrotnych układu dla każdego z regionów oraz w stosunku do wskaźników liczbowych $u_{rr}^{ij}$ dla przepływów międzyregionalnych w ramach tych samych grup wiekowych. Regeneracja procesu następuje natomiast w trzech środkowych grupach wiekowych, które zasilają stan początkowy układu w proporcjach równych odpowiednim wskaźnikom liczbowym $s_{k1}^{ii}$ umieszczonych na pętlach sprzężenia zwrotnego, łączących poszczególne stany pośrednie ze stanem początkowym układu. Oczywiście cały ten schemat odnosi się tylko do ludności żyjącej, a ściślej do ludności przeżywającej do końca jednostkowego przedziału czasowego, nie dotyczy natomiast ludności, która w przeciągu tego okresu czasu zmarła w poszczególnych grupach wiekowych, przechodząc bezpośrednio do stanu absorbującego, jakim jest zgon, którego ze względu na czytelność układu nie umieszczono w schemacie.

Powstaje z kolei problem szacowania macierzy przejścia w modelu (9), która jest $n$-krotnie większa w porównaniu z analogiczną macierzą przejścia w modelu (3). Co prawda nie wszystkie jej elementy są niezerowe, ale i tak należy oszacować po $(2n—1)$ elementów przekątniowych w każdej z $m \times m$ podmacierzy segmentowych oraz $(l—k)$ elementów w każdej z $m$ podmacierzy przekątniowych, czyli razem $m[m(2n+1)+(l—k)]$ elementów w porównaniu z $m \times m$ elementami macierzy przejścia w modelu (3). Dla wyznaczenia tej liczby parametrów za pomocą metody najmniejszych kwadratów należałoby dysponować znacznie dłuższymi szeregami czasowymi obserwacji niż w przypadku modelu (3), co dla większych rozmiarów macierzy nie zawsze byłoby możliwe. Dlatego też w praktyce należałoby postępować inaczej, a mianowicie oddzielnie szacować przekątniowe podmacierze segmentowe dla każdego regionu, które z uwagi na dostępne dane odnośnie do ludności stacjonarnej mogłyby być wyznaczane na podstawie danych z ostatnich dwóch okresów sprawozdawczych, a oddzielnie szacować pozaprzekątniowe podmacierze przepływów międzyregionalnych, które z uwagi na niedoskonałość danych statystycznych powinny by być raczej wyznaczane na podstawie dłuższych szeregów czasowych.

W zakresie ludności stacjonarnej istnieją obecnie dość dokładne statystyki regionalne dotyczące stanów ludności w poszczególnych latach według grup wiekowych i płci oraz statystyki ruchu naturalnego, tj. urodzeń według płci noworodka i wieku matki oraz zgonów według wieku i płci, a nadto statystyki ruchu wędrówkowego ludności ujmujące odpływy i przypływy migracyjne ogółem (bez rozbicia na regiony) według grup wiekowych. Wszystkie te dane dają się symbolicznie ująć w poszerzoną macierz stacjonarnego układu ludności, która jest przedstawiona w tabeli 1.

Tabela 1

Poszerzona macierz przeżycia ludności stacjonarnej

| Wiek | 0 - 4 | 5 - 9 | 10 - 14 | 15 - 19 | 20 - 29 | 30 - 39 | 40 - 49 | 50 - 59 | 60 i więcej | Zgony | Odpływ | Stan ludności w okresie $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 - 4 | $L_{11}$ | $L_{12}$ | | | | | | | | $B_1$ | $U_1$ | $L_1^{(t)}$ |
| 5 - 9 | | $L_{22}$ | $L_{23}$ | | | | | | | $B_2$ | $U_2$ | $L_2^{(t)}$ |
| 10 - 14 | | | $L_{33}$ | $L_{34}$ | | | | | | $B_3$ | $U_3$ | $L_3^{(t)}$ |
| 15 - 19 | $A_4$ | | | $L_{44}$ | $L_{45}$ | | | | | $B_4$ | $U_4$ | $L_4^{(t)}$ |
| 20 - 29 | $A_5$ | | | | $L_{55}$ | $L_{56}$ | | | | $B_5$ | $U_5$ | $L_5^{(t)}$ |
| 30 - 39 | $A_6$ | | | | | $L_{66}$ | $L_{67}$ | | | $B_6$ | $U_6$ | $L_6^{()}$ |
| 40 - 49 | $A_7$ | | | | | | $L_{77}$ | $L_{78}$ | | $B_7$ | $U_7$ | $L_7^{(t)}$ |
| 50 - 59 | | | | | | | | $L_{88}$ | $L_{89}$ | $B_8$ | $U_8$ | $L_8^{(t)}$ |
| 60 i więcej | | | | | | | | | $L_{99}$ | $B_9$ | $U_9$ | $L_9^{(t)}$ |
| Przepływ | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ | $V_9$ | | | |
| Stan ludności w okresie $t+1$ | $L_1^{(t+1)}$ | $L_2^{(t+1)}$ | $L_3^{(t+1)}$ | $L_4^{(t+1)}$ | $L_5^{(t+1)}$ | $L_6^{(t+1)}$ | $L_7^{(t+1)}$ | $L_8^{(t+1)}$ | $L_9^{(t+1)}$ | | | |

Niewiadomymi elementami w całym tym układzie są elementy położone na głównej przekątnej macierzy i tuż ponad, z których te pierwsze oznaczają liczebności ludności pozostającej w danych grupach wiekowych na następny okres, zaś drugie oznaczają liczebności ludności przechodzącej do kolejnych wyższych grup wiekowych. Dają się one jednak wyznaczyć przy zachowaniu odpowiedniej kolejności rozwiązań. Mianowicie obliczanie rozpoczyna się od wyznaczenia elementu $L_{11}$ jako różnicy pomiędzy liczbą osób w pierwszej grupie wiekowej w okresie „$t+1$" pomniejszoną o liczbę przypływu migracyjnego w tej grupie, a liczbą nowo narodzonych dzieci we wszystkich czterech grupach wiekowych. Obliczony w ten sposób element $L_{11}$ stanowi następnie podstawę dla obliczenia kolejnego elementu $L_{12}$, który wyznacza się jako różnicę pomiędzy liczbą ludności w pierwszej grupie wiekowej w okresie „$t$" pomniejszoną o liczbę odpływu migracyjnego i liczbę zgonów w tej grupie, a wyznaczoną poprzednio wielkością $L_{11}$. Z kolei przechodzi się do drugiej kolumny macierzy i oblicza element $L_{22}$ na podstawie wyznaczonego uprzednio elementu $L_{12}$ oraz stanu liczebnego ludności w drugiej grupie wiekowej w okresie „$t+1$" i przypływu migracyjnego w tej grupie. Dalej wyznacza się element $L_{23}$ na podstawie tożsamościowej relacji trzeciego wiersza, element $L_{33}$ na podstawie tożsamościowej relacji trzeciej kolumny itd., aż w ostateczności otrzymuje się element $L_{99}$, który musi się zgadzać z bezpośrednią relacją w ostatniej grupie wiekowej.

Dzieląc z kolei poszczególne elementy $L_{ij}$ przez odpowiadające im stany ludności w okresie „$t$", czyli przez $L_j^{(t)}$, otrzymujemy odpowiednie wskaźniki liczbowe $s_{ij}$, będące oszacowanymi elementami macierzy przeżycia dla ludności stacjonarnej.

Powyższa procedura daje się z łatwością stosować do układu dwuregionalnego traktowanego jako całość. W układzie tym wystąpią po dwie macierze przeżycia ludności stacjonarnej oraz dwie macierze międzyregionalnych przepływów. Przykładem może być dwuregionalny układ ludności miasta Krakowa i reszty kraju, dla którego odpowiednie macierze przejścia zostały wyznaczone na podstawie danych statystycznych za lata 1967 - 1968, co obrazuje tabela 2.

Analizując poszczególne elementy tej macierzy, np. według pierwszego wiersza, można stwierdzić, że w ciągu badanego okresu czasu, czyli od 31 XII 1967 do 31 XII 1968 r., około 77,2% dzieci w grupie wiekowej (0 - 4) przeżyło do końca tego okresu i pozostało nadal w tej grupie wiekowej, zaś 21,5% przeżywszy, przeszło do następnej grupy wiekowej (5 - 9) lat. Reszta osób, która przeżyła, wyemigrowała z Krakowa, co stanowiło około 0,7%. Dopełnieniem do 100% jest frakcja osób, które zmarły w ciągu badanego okresu czasu. W podobny sposób można by interpretować elementy następnych wierszy dotyczących dalszych kolejnych grup wiekowych, z tym jednak, że od czwartego do siódmego wiersza występują dodatkowo elementy oznaczające frakcje nowo narodzonych dzieci, które nie będą wliczane do relacji sumowania się poszczególnych wierszy do jedności. Tym niemniej można je sumować wraz z poszczególnymi elementami przejścia występującymi w poszczególnych wierszach, co w przypadku uzyskania sum większych od jedności wskazywać będzie na dodatni przyrost naturalny w ramach poszczególnych grup (jak to występuje w naszym przypadku), zaś w przypadku sum mniejszych od jedności wskazywałoby na ujemny przyrost naturalny. Sumy te jednak będą zazwyczaj większe od jedności i to nawet w populacjach stacjonarnych, gdyż muszą zrekompensować ujemny przyrost naturalny w niereprodukcyjnych grupach wiekowych.

Analogiczną interpretację jak dla miasta Krakowa, mają elementy występujące w poszczególnych wierszach dolnej części macierzy, a dotyczące reszty kraju, z tym jednak, że występuje tam przestawienie kolejności macierzy stacjonarnej ludności z macierzą międzyregionalnych przepływów.

Analizując z kolei wartości liczbowe elementów leżących na głównej przekątnej macierzy zauważymy, że większym rozpiętościom przedziałów wiekowych odpowiadają większe wartości elementów, a mniejszym mniejsze, co potwierdza omawiane wcześniej założenie o relacji pomię-

Wieloczynnikowa macierz przepływów dla układu

Kraków

| | Wiek | 0 - 4 | 5 - 9 | 10 - 14 | 15 - 19 | 20 - 29 | 30 - 39 | 40 - 49 | 50 - 59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kraków | 0 - 4 | 0,771609 | 0,215029 | | | | | | |
| | 5 - 9 | | 0,753308 | 0,243308 | | | | | |
| | 10 - 14 | | | 0,796533 | 0,201042 | | | | |
| | 15 - 19 | 0,008854 | | | 0,760625 | 0,236684 | | | |
| | 20 - 29 | 0,050315 | | | | 0,903033 | 0,088054 | | |
| | 30 - 39 | 0,017522 | | | | | 0,895961 | 0,097784 | |
| | 40 - 49 | 0,001421 | | | | | | 0,940155 | 0,052982 |
| | 50 - 59 | | | | | | | | 0,882131 |
| | 60 i więcej | | | | | | | | |
| Reszta kraju | 0 - 4 | 0,000502 | | | | | | | |
| | 5 - 9 | | 0,000223 | | | | | | |
| | 10 - 14 | | | 0,000149 | | | | | |
| | 15 - 19 | | | | 0,000142 | | | | |
| | 20 - 29 | | | | | 0,000881 | | | |
| | 30 - 39 | | | | | | 0,000378 | | |
| | 40 - 49 | | | | | | | 0,000163 | |
| | 50 - 52 | | | | | | | | 0,000117 |
| | 60 i więcej | | | | | | | | |

dzy wartościami elementów przekątniowych a rozpiętością przedziałów wiekowych i długością okresu sprawozdawczego.

inaczej natomiast niż pierwotnie zakładano wyglądają macierze międzyregionalnych przepływów, które zamiast podwójnych elementów wzdłuż głównych przekątnych mają tylko pojedyncze elementy przekątniowe, co nie odzwierciedla dokładnie faktycznego procesu starzenia się ludności przepływowej. Tym niemniej obecna sprawozdawczość statystyczna ludności nie pozwala na równoczesne wyliczenie frakcji ludności stacjonarnej i ludności przepływowej, które przechodzą w ciągu badanego okresu czasu do wyższej grupy wiekowej. Nie powinno to jednak wpłynąć zasadniczo na zniekształcenie procesu starzenia się ludności w ujęciu międzyregionalnym tym bardziej, że mamy do czynienia z krótkimi okresami sprawozdawczymi (1 rok), na przestrzeni których małe stosunkowo frakcje ludności będą wchodziły do wyższych grup wiekowych. Ponadto nieuwzględnienie tych przejść wśród ludności migrującej jest uchwycone pośrednio w przejściach ludności stacjonarnej, gdyż ogólny układ stanu ludności musi się przecież równoważyć.

Oprócz możliwości uchwycenia i opisania złożonego procesu przechodzenia ludności z niższych grup wiekowych do wyższych w układzie międzyregionalnym, macierze demograficzne przejścia pozwalają na obliczenie prawdopodobnych stanów ludności według grup wiekowych i regionów w przyszłych okresach czasu. Polegać to będzie na wymnożeniu transponowanej macierzy przejścia przez wektor stanów ludności w poszczególnych regionach według grup wiekowych dla ostatniego okresu dwuregionalnego (Kraków i reszta kraju)

Tabela 2

Reszta kraju

| 60 i więcej | 0 - 4 | 5 - 9 | 10 - 14 | 15 - 19 | 20 - 29 | 30 - 39 | 40 - 49 | 50 - 59 | 60 i więcej |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,006868 | | | | | | | | |
| | | 0,003081 | | | | | | | |
| | | | 0,002104 | | | | | | |
| | | | | 0,002292 | | | | | |
| | | | | | 0,008293 | | | | |
| | | | | | | 0,004803 | | | |
| | | | | | | | 0,003094 | | |
| 0,106000 | | | | | | | | 0,002542 | |
| 0,950247 | | | | | | | | | 0,005586 |
| | 0,775298 | 0,216067 | | | | | | | |
| | | 0,771198 | 0,227569 | | | | | | |
| | | | 0,798348 | 0,200562 | | | | | |
| | 0,015240 | | | 0,806158 | 0,192414 | | | | |
| | 0,075595 | | | | 0,894018 | 0,103213 | | | |
| | 0,028062 | | | | | 0,895254 | 0,101837 | | |
| | 0,004111 | | | | | | 0,931618 | 0,063917 | |
| | | | | | | | | 0,881007 | 0,109257 |
| 0,000200 | | | | | | | | | 0,956735 |

czasu, czyli na zastosowaniu relacji (9). Oczywiście należy przy tym założyć stacjonarność demograficznej macierzy przejścia, czyli niezmienność poszczególnych jej elementów w czasie, zarówno w odniesieniu do ludności stacjonarnej jak i przepływowej. Tymczasem w praktyce takie założenie nie zawsze będzie spełnione, zwłaszcza gdy chodzi o ruch wędrówkowy ludności, którego nasilenie zależy od szeregu elementów związanych z aktywizacją społeczno-ekonomiczną poszczególnych regionów. Tym niemniej w przypadku regularnych procesów rozwojowych ludności w badanych regionach istnieje możliwość wykorzystania omawianego modelu do przewidywania stanu ludności w przekroju międzyregionalnym i wiekowym. Prognozy takie mogą być zasadniczo dokonywane na najbliższe okresy czasu o odstępach równych długości jednostkowego przedziału czasowego przyjętego za podstawę wyznaczania demograficznej macierzy przejścia. Jeśli na przykład macierz została wyznaczona na podstawie stanów ludności na koniec lat 1967 i 1968, to prognoza uzyskana w wyniku przemnożenia tej macierzy (transponowanej) przez wektor stanów ludności na koniec 1968 r. dotyczyć będzie stanów ludności na koniec 1969 r. Gdyby natomiast macierz przejścia została wyznaczona na podstawie okresu 5-letniego, to prognoza miałaby również pięcioletnie wyprzedzenie. Obecne statystyki ludnościowe pozwalają już na badanie stanów ludnościowych w odstępach rocznych, dzięki czemu istnieje możliwość bieżącego analizowania międzyregionalnego układu ludności za pomocą przedstawionych macierzy przejścia oraz możliwość przewidywania zmian w układzie na najbliższe okresy czasu, co ma ogromne znaczęnie dla operatywnych badań rynkowych. Mając bowiem przewidywany układ demograficzny ludności w przekroju regionalnym i wiekowym oraz znając przeciętne wielkości zapotrzebowań na dane artykuły przez osoby należące do poszczególnych grup wiekowych, można na drodze zwykłego wymnożenia określić przewidywaną wielkość zapotrzebowania na te artykuły dla badanego regionu. Dotyczy to zwłaszcza tych artykułów, dla których znane są proporcje wagowe zapotrzebowania na osobę w poszczególnych grupach wiekowych, jak na przykład artykuły żywnościowe, dla których zostały opracowane normy wyżywienia lub artykuły konfekcyjne i obuwnicze, które pod względem swych rozmiarów i numeracji przystosowane są ściśle do wieku konsumentów. Ale nawet w stosunku do artykułów o nieznanych proporcjach wagowych zapotrzebowań konsumentów istnieje możliwość pośredniego wykorzystania przewidywanych stanów ludności poprzez włączenie ich do strukturalnych postaci modeli popytu w charakterze dodatkowych zmiennych objaśniających, bądź też w postaci wskaźników wagowych. Ponadto sama macierz przejścia dostarcza szereg interesujących wielkości niemożliwych do uzyskania przy zwykłej analizie statystyk ludnościowych, które mogą być wykorzystane dla pogłębienia badań rynkowych. Dotyczy to zwłaszcza elementów opisujących przejścia z niższych grup wiekowych do wyższych i dynamizujących w ten sposób międzyregionalny układ ludności. Inne będą bowiem proporcje popytu wśród ludności pozostającej nadal w dotychczasowych grupach wiekowych, a inne wśród ludności przechodzącej ,,świeżo" do wyższych grup wiekowych. Proponowany model ludnościowy daje zatem możliwość prowadzenia badań popytu niejako na żywym układzie populacji, która na skutek swej mobilności wywołuje odpowiednie zmiany w układzie stosunków rynkowych.

## CYBERNETIC ASPECTS OF A MODEL MIGRATION POPULATION IN AN INTERREGIONAL ANALYSIS OF CONSUMPTION DEMAND


### Summary

As a means of grasping the changes in population due to natural movements and migration the author proposes a multifactorial matrix. It permits a description of the functional mechanism of the whole population system including the births and deaths of certain of its elements.