Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Karol Gierszewski

Oszacowania dolne dla współczynników Dirichleta odwrotności funkcji z wybranych podklas klasy Selberga

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
profesora Jerzego Kaczorowskiego (promotor)
i
doktora Macieja Radziejewskiego (promotor pomocniczy)

POZNAŃ V. I. MMXIII

The author was a student of the joint PhD programme Środowiskowe Studia Doktoranckie z Nauk Matematycznych co-financed by the Europen Social Fund through the Operational Programme Human Capital

W pierwszej kolejności pragnę podziękować mojej Żonie za nieocenione wsparcie podczas pisanie tejże rozprawy, bez którego jej napisanie byłoby niemożliwe. Następnie chciałbym podziękować mojemu Promotorowi, profesorowi Jerzemu Kaczorowskiemu, za zwrócenie mojej uwagi na problematykę podjętą w niniejszej rozprawie oraz za podzielenie się Swoimi intuicjami dotyczącymi tych zagadnień. Na końcu chcę podziękować mojemu Promotorowi pomocniczemu, doktorowi Maciejowi Radziejewskiemu, za życzliwość okazaną podczas pisania niniejszej rozprawy, za poświęcony czas oraz za rozliczne uwagi, i wskazówki których udzielił mi podczas jej pisania.

Dicebat Bernardus Carnotensis nos esse quasi nanos, gigantium humeris insidentes, ut possimus plura eis et remotiora videre, non utique proprii visus acumine, aut eminentia corporis, sed quia in altum subvenimur et extollimur magnitudine gigantea.

Jan z Salisbury

Metalogicon, V. I. MCLIX

Spis treści

WSTĘP

KLASYCZNĄ arytmetyczną funkcję Möbiusa μ można zdefiniować jako ciąg współczynników rozwinięcia w szereg Dirichleta funkcji

$$\frac{1}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}, \quad \sigma > 1,$$

gdzie ζ oznacza funkcję dzeta Riemanna. Przyjmijmy ponadto klasyczne oznaczenie funkcji sumacyjnej arytmetycznej funkcji Möbiusa

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

W liście datowanym na dzień 11. lipca 1885 roku T. J. Stieltjes napisał do K. Hermite'a [34, p. 162][1]:

Or je trouve que dans la somme

$$M(n) = \mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n),$$

les terms ± 1 *se compensent assez bien pour que* $\frac{M(n)}{\sqrt{n}}$ *reste toujours comprise entre deux limites fixes, quelque grand que soit n (probablement on peut prendre pour ces limites* $+1$ *et* -1*).*

Dalej w tymże liście Stieltjes dowodzi, że ograniczoność $\frac{M(n)}{\sqrt{n}}$ implikuje słynną hipotezę Riemanna, po czym stwierdza

Cela monte plus clairement la nature de cette proposition sur laqualle je me suis appuyé, que

$$\frac{\mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)}{\sqrt{n}}$$

reste comprise entre deux limites fixes.

Vous voyez que tout dépend d'une recherche arithmetique sur cette somme $\mu(1)+\mu(2)+\cdots+\mu(n)$*. Ma demonstration est bien pénible: je tâcherai, lorsque je reprendrai ces recherches, de la simplifier encore.*

Nigdzie Stieltjes nie opublikował, ani swojego *demonstration pénible*, ani ewentualnego dowodu uproszczonego, co więcej, nie zachował się po nich jakikolwiek ślad. Jednak wiadomość o tym, że Stieltjes posiada dowód na ograniczoność $\frac{M(n)}{\sqrt{n}}$, a w konsekwencji dowód hipotezy Riemanna, dotarła

[1] W stosunku do oryginałów [34] oraz [26] zmieniono oznaczenia, na używane współcześnie, zaś pisownię pozostawiono bez zmian.

do kilku matematyków. Między innymi J. Hadamard w swojej fundamentalnej pracy [11, pp. 199–200] pisał:

> *Stieltjes avait démontsré, conformément aux prevision de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $\frac{1}{2}+it$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été étabili que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite $\Re(s)=1$.*

Do dziś dokładne wartości granic

$$\alpha^- := \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{oraz} \quad \alpha^+ := \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}}$$

pozostają nieznane. W pracy [26, pp. 779–780] F. Mertens na podstawie danych numerycznych stwierdził

> *Da die Ungleichung $|M(x)| < \sqrt{x}$, (...), sehr wahrscheinlich ist, so ist auch die Rimannische Behauptung sehr wahrscheinlich, dass die imaginären Wurzeln der Gleichung*
>
> $$\zeta(z)=0$$
>
> *alle den reellen Bestandtheil $\frac{1}{2}$ haben.*

Stąd też oszacowanie

$$|M(x)| < \sqrt{x}, \quad x>1, \tag{1}$$

nazywane jest hipotezą Mertensa. Pociąga ona za sobą, że

$$\left|\alpha^-\right| \le 1 \quad \text{oraz} \quad \left|\alpha^+\right| \le 1.$$

Jednakże w 1985 roku A. M. Odlyzko i H. J. J. te Riele w pracy [28] udowodnili, że

$$\alpha^- < -1{,}009 \quad \text{oraz} \quad \alpha^+ > 1{,}06$$

obalając tym samym (1). Wcześniej A. E. Ingham w pracy [13] udowodnił, że jeżeli dodatnie części urojone zer nietrywialnych funkcji ζ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to wtedy

$$\alpha^- = -\infty \quad \text{oraz} \quad \alpha^+ = \infty,$$

w szczególności

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} = \infty. \tag{2}$$

W pracy [27, (20)] N. Ng przytacza przypuszczenie S. Gonka, że istnieje stała $B>0$ taka, że

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}(\log\log\log x)^{5/4}} = -B \quad \text{oraz} \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}(\log\log\log x)^{5/4}} = B. \tag{3}$$

Twierdzenia udowodnione przez A. E. Inghama oraz A. M. Odlyzko i H. J. J. te Riele opierają się na przedstawieniu funkcji $M(x)$ w postaci sumy dwóch zbieżnych szeregów z których pierwszy indeksowany jest zerami nietrywialnymi funkcji dzeta Riemanna ζ, zaś drugi jej zerami trywialnymi. Ponieważ szereg indeksowany zerami trywialnymi jest zbieżny bezwzględnie oraz definiowana przez niego funkcja zmiennej x ma rząd wzrostu szacowany przez $\mathrm{O}\left(x^{-1}\right)$, zatem za asymptotykę funkcji $M(x)$ odpowiada szereg indeksowany zerami nietrywialnymi. W pracy [2] K. Bartz zdefiniowała funkcję $m(\zeta,z)$ przy pomocy szeregu zbieżnego indeksowanego zerami nietrywialnymi funkcji ζ, który jest pewną modyfikacją szeregu odpowiedzialnego za funkcję $M(x)$, a następnie udowodniła, że funkcja $m(\zeta,z)$ posiada analityczne przedłużenie do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$ oraz zachodzi następujące równanie funkcyjne

$$m(\zeta,z)+\overline{m}(\zeta,z)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{n}e^{-z}\right). \tag{4}$$

J. Kaczorowski w pracy [17] udowodnił (4) innymi metodami, a ponadto w pasie $|\Im z|<\pi$ udowodnił formułę dokładną dla funkcji $m(\zeta,z)$ [17, Theorem 2.]. Korzystając z tej formuły dokładnej i [22, Theorem 1.1] udowodnił twierdzenie [17, Theorem 1.]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\log\log\log x\right),$$

dla $x\to\infty$. Następnie z twierdzenia tego wyciągnął następujący wniosek [17, Corollary 1.]

$$|M(x)|+\left|\sum_{n\le x}\mu(n)\cos\left(\frac{ax}{n}\right)\right|=\Omega\left(\sqrt{x}\log\log\log x\right),$$

gdzie $x\to\infty$, zaś $a\neq 0$ jest dowolnie wybraną stałą rzeczywistą niezależną od n i x. Odnotujmy, że powyższy rezultat został udowodniony niezależnie od hipotezy Riemanna. Zauważmy też, że gdyby w powyższej formule można było przejść do granicy z $a\to 0$, to otrzymalibyśmy twierdzenie silniejsze od (2) i zbliżone do (3). W pracy [25] A. Łydka metodami wypracowanymi w [17] udowodnił twierdzenia analogiczne do (4) i [17, Theorem 2.] w przypadku arytmetycznej funkcji Möbiusa krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$ [25, Theorem 1.3. & Theorem 1.4]. W rozdziale 2 niniejszej rozprawy stosując metody z [17] dowodzimy Twierdzenia 2.1., które jest uogólnieniem (4) oraz [25, Theorem 1.3.].

Głównymi wynikami niniejszej rozprawy są twierdzenia z rozdziału 3. Mianowicie dla dowolnej funkcji g takiej, że g jest różniczkowalna w sposób ciągły, monotonicznie rosnąca od pewnego miejsca, $g(x)=\mathrm{o}(\log\log\log x)$ dla $x\to\infty$ oraz $g'(x)=\mathrm{O}\left(x^{-1}\right)$ mamy z Twierdzenia 3.1., że

$$\sum_{n\le x}\mu_E(n)=\Omega\left(\sqrt{x}\,g(x)\right)$$

lub

$$\forall_{a\neq 0}\quad\sum_{n\le x}\mu_E(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/4}\cos\left(a\sqrt{\frac{x}{n}}\right)=\Omega\left(\sqrt{x}\,g(x)\right)$$

lub

$$\omega_E\sum_{n\le x}\mu_E(n)\sqrt{\frac{x}{n}}=\begin{cases}\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\log\log\log x\right), & \text{gdy } F\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0\\ \Omega_{+}\left(\sqrt{x}\log x\right), & \text{gdy } F\left(\frac{1}{2}\right)=0,\end{cases}$$

gdzie $\omega_E = \pm 1$ jest znakiem równania funkcyjnego funkcji L krzywej eliptycznej E, zaś μ_E jest arytmetyczną funkcją Möbiusa krzywej eliptycznej E. Stąd, z Twierdzenia 3.2, otrzymujemy

$$\sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} = \Omega\big(\sqrt{x}\, g(x)\big)$$

lub

$$\forall_{a \neq 0} \quad \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \Big(\frac{x}{n}\Big)^{1/4} \cos\left(a \sqrt{\frac{x}{n}}\right) = \Omega\big(\sqrt{x}\, g(x)\big).$$

Twierdzenia te są analogonami [17, Corollary 1.] w przypadku krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$. Zaznaczamy jednocześnie, że są one niezależne od znanych hipotez dotyczących rozmieszczenia zer nietrywialnych funkcji L krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$, w szczególności hipotezy Riemanna dla tejże funkcji L.

Rozdział 1

PRELIMINARIA

W tym rozdziale przytaczamy fakty, które wykorzystywane są w dowodach lematów i twierdzeń w rozdziałach następnych. Ponadto będziemy stosowali następujące konwencje oznaczeń

$$s = \sigma + it$$
$$z = x + iy$$
$$w = u + iv$$

gdzie σ, t, x, y, u oraz v są liczbami rzeczywistymi. Zera nietrywialne funkcji typu L oznaczać będziemy

$$\rho := \beta + i\gamma.$$

Dla dowolnej funkcji zespolonej h kładziemy $\overline{h}(z) := \overline{h(\overline{z})}$. Aby uniknąć konfliktu oznaczeń, odstąpiliśmy od tradycyjnego oznaczenia stałej Eulera trzecią literą alfabetu greckiego, stosując w zamian trzecią literę alfabetu hebrajskiego $\gimel$. W całej rozprawie ustalamy gałąź logarytmu w taki sposób, że $\log z \in \mathbb{R}$ dla $z = x > 0$.

1.1. Twierdzenia pomocnicze dotyczące sum i całek

Lemat 1.1. [29, Satz 1.4 p. 371] *Niech $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ oraz niech*

$$b : [\lambda_1, x] \to \mathbb{C}$$

będzie funkcją różniczkowalną. Mamy wtedy

$$\sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} a_n b(\lambda_n) = A(x)b(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(\xi)b'(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{1.1}$$

gdzie

$$A(\xi) := \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \xi} a_n$$

oraz gdzie a_n *są dowolnymi liczbami zespolonymi. Jeżeli w* (1.1) *mamy* $\lim_{x\to\infty} A(x)b(x)=0$ *i poniższe suma lub całka posiadają granicę przy* $x\to\infty$*, to wtedy*

$$\sum_{\lambda_1\le\lambda_n\le\infty} a_n b(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} A(\xi)b'(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Wniosek 1.2. *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych oraz niech* $b:[1,\infty)\to\mathbb{C}$ *będzie funkcją różniczkowalną. Niech*

$$A(N) := \sum_{n\le x} a_n.$$

Wtedy

$$\sum_{n\le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(\xi)\mathrm{d}b(\xi).$$

Wniosek 1.3. *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych oraz niech* $b:[1,\infty)\to\mathbb{C}$ *będzie funkcją różniczkowalną. Niech* $M\ge 1$ *i niech*

$$A(N) := \sum_{n\le N} a_n.$$

Jeżeli

$$\lim_{N\to\infty} A(N)b(N) = 0$$

oraz całka

$$\int_M^{\infty} A(\xi)\mathrm{d}b(\xi)$$

jest zbieżna, to wtedy

$$\sum_{n>M} a_n b(n) = -\left(A(M)b(M) + \int_M^{\infty} A(\xi)\mathrm{d}b(\xi)\right).$$

Dowód. Niech $N>M$. Stosując Wniosek 1.2. otrzymujemy

$$\sum_{n\le M} a_n b(n) = A(M)b(M) - \int_1^M A(\xi)\mathrm{d}b(\xi) \tag{1.2}$$

oraz

$$\sum_{n\le N} a_n b(n) = A(N)b(N) - \int_1^N A(\xi)\mathrm{d}b(\xi). \tag{1.3}$$

Odejmując stronami (1.2) od (1.3) otrzymujemy

$$\sum_{M<n\le N} a_n b(n) = A(N)b(N) - A(M)b(M) - \int_M^N A(\xi)\mathrm{d}b(\xi).$$

Stąd otrzymujemy tezę. □

Lemat 1.4. [29, cf. Satz 1.1 p. 370] *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *będą dowolnymi ciągami liczb zespolonych. Niech* $N \geq 1$ *będzie liczbą naturalną oraz niech*

$$A(N) := \sum_{n \leq N} a_n.$$

Wtedy

$$\sum_{n \leq N} a_n b_n = A(N)b(N) - \sum_{n \leq N-1} A(n)\left(b_{n+1} - b_n\right).$$

Lemat 1.5. (Kryterium Weierstaßa)[35, §1.11] *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem funkcji zespolonych określonych w obszarze* $D \subseteq \mathbb{C}$*. Jeżeli dla każdego* $n = 1, 2, \ldots$ *istnieje liczba* M_n *taka, że*

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

dla każdego $z \in D$ *oraz szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

jest zbieżny, to wtedy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie w obszarze D*.*

Lemat 1.6. (Kryterium Mertensa)[35, §1.65] *Niech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

będzie szeregiem liczb zespolonych zbieżnym bezwzględnie do liczby A*, a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

będzie szeregiem liczb zespolonych zbieżnym bezwzględnie do liczby B*. Wtedy szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

gdzie

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

jest zbieżny do liczby AB*.*

Lemat 1.7. [35, §§1.62 & 1.64] *Niech* $\left(a_{n,k}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ *będzie dowolną nieskończoną macierzą zespoloną. Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right| < \infty,$$

to

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}.$$

Lemat 1.8. [35, §1.71] *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem funkcji zespolonych ciągłych określonych na przedziale* $[a,b]$ *takim, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[a,b]$*. Wtedy*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Lemat 1.9. [35, §1.77 p. 45] *Niech* h_n *będą funkcjami zespolonymi ciągłymi w przedziale* $[a,\infty)$*, dla każdego* n*. Przypuśćmy, że*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b h_n(\xi)\mathrm{d}\xi$$

dla każdego $b > a$ *oraz, że jedno z poniższych wyrażeń jest skończone*

$$\int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(\xi)|\,\mathrm{d}\xi, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty} |h_n(\xi)|\,\mathrm{d}\xi.$$

Wtedy

$$\int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty} h_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Lemat 1.10. [35, §1.84] *Niech* h *będzie funkcją zespoloną ciągłą w obszarze* $[a,\infty)\times[c,d]$*. Przypuśćmy, że*

$$\int_a^b\int_c^d h(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \int_c^d\int_a^b h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

dla każdego $b > a$ *oraz, że całka*

$$\int_a^{\infty} h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi$$

jest zbieżna jednostajnie względem η dla $c \leq \eta \leq d$. Wtedy

$$\int_a^\infty \int_c^d h(\xi,\eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi = \int_c^d \int_a^\infty h(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta.$$

Lemat 1.11. (Nierówność Cauchy'ego–Schwartza) *Niech h_1 oraz h_2 będą funkcjami zespolonymi ciągłymi określonymi na przedziale $[a,b]$. Wtedy zachodzi następująca nierówność*

$$\left| \int_a^b h_1(\xi) h_2(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leq \left(\int_a^b |h_1(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |h_2(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemat 1.12. (Twierdzenie Cauchy'ego o reziduach) *Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym a $(c_k)_{k=1}^N$, będzie skończonym ciągiem punktów z U. Niech $\mathscr{M}$ będzie dodatnio zorientowaną krzywą Jordana zawartą w zbiorze $U \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ taką, że wszystkie punkty c_k znajdują się wewnątrz obszaru przez nią ograniczonego. Jeżeli funkcja zespolona h jest holomorficzna na zbiorze $U \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$, to wtedy*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{M}} h(z) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^N \operatorname*{Res}_{z=c_k} h(z).$$

1.1.1. Własności funkcji Γ i silni

Lemat 1.13. (Formuła Stirlinga)[19, p. 216] *Dla dowolnych liczb $a < b$ mamy*

$$|\Gamma(\sigma + it)| = e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \mathrm{O}_{a,b}\left(|t|^{-1}\right)\right), \tag{1.4}$$

gdzie $|t| \to \infty$, jednostajnie względem $a \leq \sigma \leq b$.

Lemat 1.14. (Formuła Stirlinga)[7, (3) p. 63] *Dla dowolnego $\epsilon > 0$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$ mamy*

$$\log \Gamma(s + \alpha) = \left(s + \alpha - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \mathrm{O}\left(|s|^{-1}\right), \tag{1.5}$$

gdzie $|s| \to \infty$ oraz $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$.

Ponadto zachodzi również następująca formuła [7, (6) p. 3]

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{1.6}$$

Stosować również będziemy poniższe nierówności

$$\frac{1}{n!} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n \quad , \quad \binom{n}{q} \leq \frac{n^q}{q!} \leq \left(\frac{ne}{q}\right)^q, \tag{1.7}$$

gdzie n oraz q są liczbami naturalnymi.

1.2. Klasa $\mathfrak{A}$ oraz inne rezultaty pomocnicze

Za [22, §1] przyjmujemy następującą definicję: Niech $\mathfrak{A}$ oznacza zbiór funkcji

$$G(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_n z} \quad (\Im z > 0),$$

gdzie $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots$ są rzeczywiste, a współczynniki a_n, $n \geq 1$ są liczbami zespolonymi spełniającymi poniższe warunki:

1. Istnieje stała $B(G) = B \geq 0$ taka, że
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\omega_n^B} < \infty.$$
2. Istnieje liczba rzeczywista $L_0 = L_0(G)$ taka, że granica
$$P(x) = \lim_{y \to 0^+} \Re\left(G(x+iy)\right)$$
istnieje dla każdego $x \geq L_0$ i przedstawia funkcję ograniczoną lokalnie dla $x \in [L_0, \infty)$.
3. Dla każdego ograniczonego przedziału $I \subsetneq [L_0, \infty)$ mamy
$$\Re\left(G(x+iy)\right) \ll_I 1,$$
dla $x \in I$ i $y > 0$.
4. Istnieje funkcja malejąca i ciągła $\phi\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $\phi(\delta) \to \infty$, gdy $\delta \to 0^+$, oraz istnieją punkty $x_1, x_1' \in \mathbb{R}$ takie, że
$$\Re\left(G(x_1 + \delta e^{i\theta})\right) \gg \phi(\delta)$$
$$-\Re\left(G(x_1' + \delta e^{i\theta'})\right) \gg \phi(\delta),$$
gdy $\delta \to 0^+$, jednostajnie dla $\theta_1 < \theta < \theta_2$ i $\theta_1' < \theta' < \theta_2'$ odpowiednio, gdzie $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ i $0 < \theta_1' < \theta_2' < \pi$ są pewnymi ustalonymi parametrami zależnymi od G.
5. Mamy $|\{n \mid \omega_n \leq T\}| \ll T \log T$, gdy $T \to \infty$.

Lemat 1.15. [22, Theorem 1.1] *Niech $G \in \mathfrak{A}$. Wtedy istnieje stała dodatnia $b_0 = b_0(G)$ taka, że*

$$\Re G(x) = \Omega_{\pm}\left(\phi\left(b_0 \frac{(\log\log x)^3}{\log x}\right)\right), \quad \text{dla} \quad x \to \infty$$

Lemat 1.16. [23, cf. p. 80] *Przypuśćmy, że funkcja całkowalna $h\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ jest taka, że $h(x) \ll x^{A+\epsilon}$ dla każdego $\epsilon > 0$. Wtedy zachodzi następujące oszacowanie dla jej transformaty Mellina*

$$\int_1^{\infty} h(x) x^{-s-1} dx \ll_{\epsilon} 1 \quad \text{dla} \quad \sigma \geq A + \epsilon,$$

dla każdego $\epsilon > 0$.

Lemat 1.17. [22, cf. Corollary 3.2] *Przypuśćmy, że funkcja mierzalna i ograniczona lokalnie $h\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$ spełnia warunek $h(x)\ll x^a\log\log x$, dla pewnej stałej a i wszystkich $x\geq x_0>e$. Wtedy jej transformata Mellina jest holomorficzna dla $\sigma>a$ oraz*

$$\int_1^\infty h(x)x^{-s-1}dx\ll\frac{1}{\sigma-a}\log\left(\frac{1}{\sigma-a}\right)$$

jednostajnie dla $a<\sigma<a+1/2$.

Lemat 1.18. [17, Lemma 4] *Niech*

$$C(s):=\int_0^\infty(\cos x-1)x^{-s-1}\mathrm{d}x\quad\text{dla}\quad 0<\sigma<2.$$

Funkcja C posiada przedłużenie meromorficzne do $\mathbb{C}$. Dokładnie mamy

$$C(s)=-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-(s/2))}{s2^s\Gamma((1+s)/2)}.$$

W szczególności funkcja C nie posiada zer w pasie $0<\sigma<2$. Ponadto mamy

$$|C(\sigma+it)|\asymp(|t|+2)^{-\frac{1}{2}-\sigma}$$

niemal jednostajnie dla $0<\sigma<2$.

1.3. Funkcje Bessela

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju dana jest wzorem [8, (2) p. 4]

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

gdzie $\nu\in\mathbb{R}$ jest nazywana rzędem tej funkcji. Szereg definiujący $z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)$ jest niemal jednostajnie zbieżny względem z oraz ν [8, §7.2.1]. Jeżeli $\nu\in\mathbb{Z}$, to wtedy funkcja J_ν jest funkcją holomorficzną [8, cf. (24) p. 6], a jeżeli $\nu\notin\mathbb{Z}$, to ma rozgałęzienie w punkcie $z=0$. Ustalamy gałąź funkcji J_ν przyjmując $z^\nu>0$ dla $z=x>0$. W przypadku gdy $\nu=1$ funkcję Γ w powyższej formule można zastąpić silnią otrzymując

$$\mathrm{J}_1(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}. \tag{1.8}$$

W przypadku, gdy $\nu=\pm\frac{1}{2}$, z [8, (14), (15) p. 79] mamy, że

$$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\qquad\text{oraz}\qquad\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \tag{1.9}$$

Funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu pierwszego można zdefiniować wzorem [8, cf. (32) p. 8]

$$\pi \,\mathrm{Y}_1(z) = \left(2\mathrm{J}_1(z)\left(\log\left(\frac{z}{2}\right)+\gimel\right)\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(h_k + h_{k+1}\right)}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}, \tag{1.10}$$

gdzie h_k oznacza k. liczbę harmoniczną. Funkcję Bessela trzeciego rodzaju, zwaną również funkcją Hankela, rzędu pierwszego definiujemy wzorem [8, cf. (6) p. 4]

$$\mathrm{H}_1^{(2)}(z) := \mathrm{J}_1(z) - i\,\mathrm{Y}_1(z). \tag{1.11}$$

Kładziemy

$$d_k := \frac{(-1)^k}{\pi k!(k+1)!2^{2k+1}}\left(1-2\gimel i + i\left(h_k + h_{k+1} + 2\log 2\right)\right) \tag{1.12}$$

oraz

$$e_k := \frac{i}{\pi}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!4^k}. \tag{1.13}$$

Lemat 1.19. *Mamy*

$$d_k \ll \frac{1}{(k!)^2 4^k} \quad \text{oraz} \quad e_k \ll \frac{1}{(k!)^2 4^k}, \quad \text{gdy } k \to \infty.$$

Szeregi

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{2k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{2k+1} \tag{1.14}$$

są zbieżne niemal jednostajnie w całej płaszczyźnie zespolonej. Dla $z \neq 0$ funkcja $\mathrm{H}_1^{(2)}$ spełnia równanie

$$\mathrm{H}_1^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{2k+1} + \frac{2i}{\pi}\cdot\frac{1}{z} + \log z \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{2k+1}\right). \tag{1.15}$$

Dowód. Mamy

$$d_k \ll \frac{1}{k!(k)!2^{2k+1}} \frac{\left|1-2\gimel i + i\left(h_k + h_{k+1} + 2\log 2\right)\right|}{k+1} \ll \frac{1}{(k!)^2 4^k}$$

i analogicznie

$$e_k \ll \frac{1}{(k!)^2 4^k}.$$

Na mocy powyższych oszacowań z Lematu 1.5. otrzymujemy zbieżność jednostajną szeregów (1.14) w każdym zwartym podzbiorze $\mathbb{C}$. Zatem z (1.8), (1.10) oraz (1.11) przez odpowiednie grupowanie wyrazów otrzymujemy (1.15). □

Wniosek 1.20. *Funkcja $\mathrm{H}_1^{(2)}$ jest funkcją wielowartościową z rozgałęzieniem typu logarytmicznego w punkcie $z = 0$.*

Wniosek 1.21. *Mamy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \mathrm{A}^k \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{A}^k = \exp(\mathrm{A}) \ll_{\mathrm{A}} 1,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \mathrm{A}^k \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{A}^k = \exp(\mathrm{A}) \ll_{\mathrm{A}} 1,$$

gdzie $\mathrm{A} > 0$ *jest dowolną stałą niezależną od* k.

Uwaga 1.22. Ze względu na wybraną wcześniej gałąź logarytmu, dla $z = x > 0$ mamy $\mathrm{H}_1^{(2)}(z) \in \mathbb{R}$. Zatem w obszarze zadanym nierównością $|\arg z| < \pi$ funkcja $\mathrm{H}_1^{(2)}$ jest holomorficzna.

Lemat 1.23. [31, cf. (2) p. 198] *W obszarze*

$$-2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta,$$

gdzie $\delta > 0$ *mamy*

$$\mathrm{H}_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{3}{4}\pi\right)} \left(1 + \mathrm{O}_{\delta}\left(|z|^{-1}\right)\right), \quad \text{gdy } |z| \to \infty. \tag{1.16}$$

Wniosek 1.24. *Dla każdego* $\delta > 0$, $x_0 > 0$ *w obszarze*

$$|\arg z| \leq \pi - \delta, \qquad |z| > x_0 \tag{1.17}$$

mamy

$$\mathrm{H}_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{3}{4}\pi\right)} \left(1 + h_1^{(2)}(z)\right),$$

gdzie $h_1^{(2)}$ *jest funkcją holomorficzną w obszarze* (1.17)*. Ponadto dla* z *z obszaru* (1.17) *zachodzi*

$$h_1^{(2)}(z) = \mathrm{O}_{\delta, x_0}\left(|z|^{-1}\right). \tag{1.18}$$

Dowód. Kładziemy

$$h_1^{(2)}(z) := \mathrm{H}_1^{(2)}(z) \sqrt{\frac{\pi z}{2}} e^{i\left(z - \frac{3}{4}\pi\right)} - 1,$$

gdzie dla pierwiastka wybieramy jego gałąź główną. Zatem z (1.16) mamy, że

$$h_1^{(2)}(z) = \mathrm{O}_{\delta}\left(|z|^{-1}\right), \quad \text{gdy } |z| \to \infty$$

jednostajnie w obszarze (1.17). Zatem dla $|z| > x_0 > 0$ mamy (1.18). Z Uwagi 1.22. wiemy, że dla $|z| > x_0$ oraz $|\arg(z)| < \pi$, funkcja $\mathrm{H}_1^{(2)}$ jest holomorficzna. Ponieważ ustaliliśmy gałąź pierwiastka, funkcja $\sqrt{\frac{\pi z}{2}} e^{i\left(z - \frac{3}{4}\pi\right)}$ jest holomorficzna dla $|\arg z| < \pi$. W konsekwencji funkcja $h_1^{(2)}$ jest holomorficzna w obszarze (1.17). $\square$

Wniosek 1.25. *Dla każdego $x_0 > 0$ w obszarze*

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad |z| > 2x_0$$

funkcja $\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}z}$ *jest holomorficzna i spełnia*

$$\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{O}_{x_0}\left(|z|^{-2}\right).$$

Dowód. Kładziemy $z = re^{i\theta}$, gdzie $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Z Twierdzenia Cauchy'ego mamy

$$\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \frac{h_1^{(2)}(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \frac{\left|h_1^{(2)}(\xi)\right|}{|\xi - z|^2} |\mathrm{d}\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \left|h_1^{(2)}(\xi)\right| \int\limits_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \frac{1}{|\xi - z|^2} |\mathrm{d}\xi| \leq \max_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \left|h_1^{(2)}(\xi)\right| \frac{2}{r}$$

zatem

$$\left|\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}z}\right| \leq \max_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \left|h_1^{(2)}(\xi)\right| \frac{2}{r}.$$

Dla każdego $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ i dla każdego $r > 2x_0 > 0$ okrąg $|\xi - z| = \frac{1}{2}r$ jest całkowicie zawarty w obszarze $|\xi| > x_0 > 0$ oraz $|\arg \xi| \leq \frac{2}{3}\pi$, zatem z (1.18) mamy

$$\max_{|\xi - z| = \frac{1}{2}r} \left|h_1^{(2)}(\xi)\right| \ll_{x_0} \frac{2}{r}$$

i w konsekwencji

$$\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}z} \ll_{x_0} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{|z|^2}.$$

□

1.4. Klasa S^Γ

Mówimy, że $F \in \mathrm{S}^\Gamma$ jeśli spełnia następujące pięć aksjomatów

1. (Szereg Dirichleta) F jest szeregiem Dirichleta zbieżnym bezwzględnie dla $\sigma > 1$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_F(n)}{n^s}.$$

2. (Przedłużenie analityczne) Dla pewnego $m \geq 0$, funkcja $(s-1)^m F(s)$ jest funkcją całkowitą skończonego rzędu.

3. (Równanie funkcyjne) F spełnia równanie funkcyjne poniższej postaci

$$\Phi_F(s) = \omega\overline{\Phi}_F(1-s),$$

gdzie

$$\Phi_F(s) = Q^s\Gamma(\lambda s+\mu)F(s) \tag{1.19}$$

z $Q>0$, $\lambda>0$, $\Re\mu\geq 0$ oraz $|\omega|=1$.

4. (Warunek Ramanujana) Dla każdego $\epsilon>0$, $a_F(n)\ll_\epsilon n^\epsilon$.

5. (Iloczyn Eulera) Dla $\sigma>1$

$$F(s) = \prod_p F_p(s),$$

gdzie p przebiega wszystkie liczby pierwsze,

$$\log F_p(s) := \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(p^m)}{p^{ms}}$$

oraz $b(n)\ll n^\theta$ dla pewnego $\theta<\frac{1}{2}$.

Z powyższej definicji wynika, że klasa S^Γ jest podzbiorem klasy Selberga S [4, 16]. Znane niezmienniki funkcji z klasy Selberga S: *stopień*, *niezmiennik* ξ, *parzystość* oraz *przesunięcie* w przypadku funkcji $F\in S^\Gamma$ mogą być zapisane jako

$$d_F = 2\lambda\,, \quad \xi_F+1 = 2\mu\,, \quad \eta_F+1 = 2\Re\mu \quad \text{oraz} \quad \theta_F = 2\Im\mu.$$

Chociaż parametry równania funkcyjnego funkcji z klasy Selberga S nie są w ogólności jednoznacznie wyznaczone, a fakt ten został wyczerpująco opisany w [33, §4], [4, §4], [16, §3] oraz [20], są one jednoznaczne w przypadku równania funkcyjnego z S^Γ co jest natychmiastową konsekwencją prostego opisu podanych niezmienników. Ponadto w przypadku funkcji $F\in S^\Gamma$ możemy oszacować z dołu parzystość przez

$$\eta_F\geq -1.$$

Przez *zera trywialne* funkcji $F\in S^\Gamma$ rozumiemy miejsca zerowe położone w punktach

$$s = -\frac{k+\mu}{\lambda}, \quad \text{gdzie} \quad k=0,1,2,\ldots. \tag{1.20}$$

Przez *zera nietrywialne* funkcji $F\in S^\Gamma$ rozumiemy miejsca zerowe

$$\rho = \beta+i\gamma, \quad \text{gdzie} \quad 0\leq\beta\leq 1.$$

Dla $F\in S^\Gamma$ oraz dla $T>0$ niech $N_F(T)$ oznacza liczbę zer nietrywialnych $\rho=\beta+i\gamma$ dla których $|\gamma|\leq T$. Zachodzi wtedy formuła Riemanna–von Mangoldta [16, (2.2) p. 162]

$$N_F(T) = \frac{d_F}{\pi}T\log T + c_F T + O(\log T) \quad \text{dla} \quad T\to\infty. \tag{1.21}$$

W konsekwencji wiemy, że zer nietrywialnych jest nieskończenie wiele.

Na mocy [19, Theorem 1] oraz [21, Theorem] wiemy, że jeżeli F należy do klasy Selberga S (w szczególności jeżeli należy do S^Γ) i ma dodatni stopień, to albo $d_F = 1$, albo $d_F \geq 2$.

1.4.1. Przykłady funkcji należących do S^Γ z $d_F = 1$

Funkcja ζ Riemanna spełnia (1) z $a_\zeta(n) = 1$ i w konsekwencji również (4). Warunek (2) jest spełniony z $m = 1$ [36, cf. Theorem 2.1], zaś warunek (3) jest spełniony z $Q = \sqrt{\pi}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ oraz $\omega = 1$ [36, cf. §2.7]. Warunek (5) jest spełniony dla ζ ponieważ dla każdej liczby pierwszej p oraz dla każdego $m \geq 1$ zachodzi $b(p^m) = 1$ [36, cf. §1.1]. W konsekwencji funkcja dzeta Riemanna należy do S^Γ z $d_F = 1$ i $\eta_F = -1$ i klasa S^Γ jest niepusta.

Niech χ będzie charakterem Dirichleta modulo q. Najmniejszą liczbę naturalną f taką, że $f \leq q$, $f \mid q$ oraz

$$\chi = \chi_0 \cdot \chi^*,$$

gdzie χ_0 jest charakterem głównym $(mod\ q)$, χ^* jest charakterem $(mod\ f)$, a mnożenie charakterów rozumiane jest jako mnożenie ich wartości, nazywamy *przewodnikiem* charakteru χ. Jeżeli $f = q$, to wtedy mówimy, że χ jest charakterem *pierwotnym* [14, cf. §3.3]. Funkcja L Dirichleta stowarzyszona z charakterem pierwotnym χ

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

spełnia (1) oraz (4), a ponieważ posiada przedłużenie analityczne do funkcji meromorficznej skończonego rzędu, z biegunem rzędu co najwyżej pierwszego w punkcie $s = 1$, zatem spełnia również warunek (2). Ponadto jeżeli charakter χ jest niegłówny, to wtedy funkcja $L(s,\chi)$ posiada przedłużenie analityczne do funkcji całkowitej. Funkcja ta spełnia również warunek (5). Ponadto funkcja

$$\Phi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s + a(\chi)}{2}\right) L(s,\chi),$$

gdzie

$$a(\chi) = \begin{cases} 0, \text{ gdy} \quad \chi(-1) = 1 \\ 1, \text{ w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

spełnia równanie funkcyjne

$$\Phi(s,\chi) = \omega_\chi \Phi(1-s,\overline{\chi}),$$

gdzie

$$\omega_\chi = \frac{\tau(\chi)}{i^{a(\chi)}\sqrt{q}},$$

a $\tau(\chi)$ oznacza sumę Gaußa. Ponieważ $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ zatem $|\omega_\chi| = 1$ [16, pp. 135–136]. W konsekwencji dla χ będącego charakterem pierwotnym funkcja $L(s,\chi)$ należy do S^Γ. Jeżeli dodatkowo charakter χ jest niegłówny, to wtedy dla każdego $\theta \in \mathbb{R}$ funkcja $L(s + i\theta,\chi)$ należy do S^Γ. W konsekwencji dla takich funkcji mamy $d_F = 1$, $\theta_F = \theta$ i $\eta_F = a(\chi) - 1$.

Ponadto z [16, Theorem 3] wiemy, że jeżeli $F \in S$ oraz $d_F = 1$, to wtedy albo $F = \zeta$, gdzie ζ oznacza funkcję dzeta Riemanna, albo istnieją liczby $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ oraz $\theta \in \mathbb{R}$ takie, że $F(s) = L(s + i\theta, \chi)$, gdzie χ jest pierwotnym charakterem Dirichleta mod q. Zatem jeżeli $F \in S$ i $d_F = 1$, to $F \in S^{\Gamma}$.

1.4.2. Przykłady funkcji należących do S^{Γ} z $d_F = 2$

Zauważmy wpierw, że dla dowolnych $F, G \in S$ mamy $d_{FG} = d_F + d_G$. Niech χ będzie pierwotnym niegłównym charakterem Dirichleta takim, że $a(\chi) = 1$. Wtedy funkcja $\zeta(s)L(s,\chi)$ ma stopień równy 2. Ponadto czynniki Γ w jej kanonicznym równaniu funkcyjnym mają postać

$$(\pi)^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

zatem stosując formułę podwajania Legendre'a dla funkcji Γ

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

otrzymujemy

$$(\pi)^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = (\pi)^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-(s+1)/2} 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s).$$

W konsekwencji $\zeta(s)L(s,\chi) \in S^{\Gamma}$ z $\eta_F = -1$ oraz $\theta_F = 0$. Niech χ_1 i χ_2 będą dwoma pierwotnymi niegłównymi charakterami Dirichleta, takimi, że $a(\chi_1) = 0$ zaś $a(\chi_2) = 1$. Wtedy dla dowolnego $\theta \in \mathbb{R}$, argumentując analogicznie jak w przypadku $\zeta(s)L(s,\chi)$, otrzymujemy, że $L(s + i\theta, \chi_1)L(s + i\theta, \chi_2) \in S^{\Gamma}$ z $\eta_F = -1$ oraz $\theta_F = \theta$.

Niech h będzie unormowaną formą pierwotną wagi k poziomu N, czyli $h \in S_k^{new}(N)$. Wtedy funkcja L stowarzyszona z h, oznaczana $L\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right)$, posiada przedłużenie analityczne do funkcji całkowitej skończonego rzędu i spełnia równanie funkcyjne postaci

$$\Lambda(s,h) = \omega\overline{\Lambda}(1-s,h),$$

gdzie

$$\Lambda(s,h) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right), \qquad |\omega| = 1$$

[16, §1.4.4 p. 150]. Jeżeli ponadto h jest wspólnym wektorem własnym wszystkich operatorów Heckego T_p, to na mocy twierdzenia Heckego [34, Satz 24] funkcja $L\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right)$ ma iloczyn Eulera. W pracach [5] P. Deligne, a w [6] P. Deligne wspólnie z J.-P. Serrem udowodnili, że czynniki iloczynu Eulera można zapisać w podanej niżej postaci [16, §1.4.2 pp. 147-148]

$$L_p\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right) = \left(1 - \frac{a_F(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{gdy} \quad p \mid N \tag{1.22}$$

$$L_p\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right) = \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_2(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{gdy} \quad p \nmid N,$$

gdzie $\left|\alpha_j(p)\right| = 1$ dla $j = 1,2$. W szczególności spełniona jest dla współczynników rozwinięcia w szereg Dirichleta funkcji $L\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right)$ hipoteza Ramanujana. Zatem $L\left(s + \frac{k-1}{2}, h\right)$ należy do S^Γ z $\eta_F = k-2$ oraz $\theta_F = 0$.

1.5. Funkcja L krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$

Funkcja L krzywej eliptycznej E nad ciałem $\mathbb{Q}$ dana jest wzorem

$$L(s,E) = \prod_{p|N_E} \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid N_E} \left(1 - \frac{a_p}{p^s} + p^{1-2s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1, \tag{1.23}$$

gdzie a_p są liczbami rzeczywistymi, zależnymi od typu redukcji krzywej $mod\ p$ oraz od liczby punktów na krzywej zredukowanej, zaś liczba naturalna N_E oznacza przewodnik krzywej eliptycznej E, przy czym dla $p \mid N_E$ mamy $\left|a_p\right| \leq 1$. Zauważmy, że tak zdefiniowana funkcja L przyjmuje wartości rzeczywiste dla $s = \sigma > 2$ a w konsekwencji

$$\overline{L}(s,E) = L(s,E). \tag{1.24}$$

C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond i R. Taylor pokazali [3, Theorem A], metodami wypracowanymi przez A. Wilesa [32, Theorem 0.4] i R. Taylora wraz z A. Wilesem [30], że dla każdej krzywej eliptycznej E nad $\mathbb{Q}$ istnieje forma modularna $h_E \in S_2^{new}(N_E)$ taka, że

$$L\left(s + \frac{1}{2}, E\right) = L\left(s + \frac{1}{2}, h_E\right).$$

W konsekwencji, na mocy faktów przytoczonych w poprzednim paragrafie,

$$L\left(s + \frac{1}{2}, E\right) \in S^\Gamma.$$

W szczególności

$$\eta_{L(s+\frac{1}{2},E)} = 0 \quad \text{oraz} \quad \theta_{L(s+\frac{1}{2},E)} = 0. \tag{1.25}$$

Dla funkcji $L\left(s + \frac{1}{2}, E\right)$ przyjmujemy następujące konwencje: równanie funkcyjne zapisywać będziemy w postaci

$$\Phi_E(s) = \omega_E \Phi(1-s), \tag{1.26}$$

gdzie

$$\Phi_E(s) = Q_E^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) L\left(s + \frac{1}{2}, E\right),$$

$\omega_E = \pm 1$ [14, (14.37)], zaś $Q_E := \frac{\sqrt{N_E}}{2\pi}$.

Korzystając z (1.20) otrzymujemy, że zera trywialne funkcji $L\left(s + \frac{1}{2}, E\right)$ są położone w punktach

$$s = -\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad \text{gdzie} \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{1.27}$$

Z [3, Theorem A] oraz [15, Theorem] wynika, że funkcja $L\left(s+\frac{1}{2},E\right)$ nie posiada zer nietrywialnych dla których $\beta=1$ lub $\beta=0$. W konsekwencji wszystkie zera nietrywialne tejże funkcji są położone w pasie $0<\sigma<1$.

Lemat 1.26. [24, Lemat 2.5.] *Istnieje rosnący ciąg liczb dodatnich $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, $T_n\to\infty$ taki, że*

$$\max_{-1\leq\sigma\leq 2}\frac{1}{\left|L\left(\sigma+\frac{1}{2}+iT_n,E\right)\right|}=\mathrm{O}\left(T_n^A\right)$$

dla pewnej stałej dodatniej A.

1.5.1. Oszacowanie wypukłościowe funkcji L krzywej eliptycznej w pasie $0\leq\sigma\leq 1$

Dla funkcji $F\in\mathrm{S}^{\Gamma}$ kładziemy

$$\daleth_F(\sigma):=\inf\left\{\xi\in\mathbb{R}\mid F(\sigma+it)=\mathrm{O}\left(|t|^{\xi}\right),\quad |t|\to\infty\right\}.$$

Lemat 1.27. [35, §9.41] *Niech $F\in\mathrm{S}^{\Gamma}$. Funkcja $\daleth_F$ jest funkcją wypukłą, nierosnącą i ciągłą.*

Lemat 1.28. *Niech $F(s)=L\left(s+\frac{1}{2},E\right)$. Wtedy dla $0\leq\sigma\leq 1$ mamy oszacowanie*

$$\daleth_F(\sigma)\leq 1-\sigma.$$

Dowód. Dla $\sigma\geq 1+2\epsilon$, gdzie $\epsilon>0$, mamy

$$|F(s)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_E(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_E(n)|}{n^{\sigma+2\epsilon}}.$$

Ponieważ dla współczynników a_E zachodzi warunek Ramanujana mamy zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_E(n)|}{n^{\sigma+2\epsilon}}\ll_{\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+\epsilon}}\ll_{\epsilon} 1$$

i w konsekwencji

$$|F(s)|\ll_{\epsilon} 1$$

dla $\sigma>1$. Zatem dla takich σ mamy $\daleth_F(\sigma)=0$. Z równania funkcyjnego (1.26) dla $\sigma<0$ otrzymujemy

$$|F(s)|=\mathrm{Q}_E^{1-2\sigma}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right||F(1-s)|\ll_{\epsilon}\mathrm{Q}_E^{1-2\sigma}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right|.$$

Z formuły Stirlinga (1.4) otrzymujemy

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right|=|t|^{1-2\sigma}\left(1+\mathrm{O}_{\sigma_0}\left(|t|^{-1}\right)\right),\qquad |t|\to\infty$$

niemal jednostajnie w każdym pasie $\sigma_0 \leq \sigma < 0$. Zatem dla $\sigma < 0$ mamy $\daleth_F(\sigma) = 1 - 2\sigma$. Na mocy Lematu 1.27. funkcja $\daleth_F$ jest ciągła, zatem

$$\daleth_F(0) = 1 \quad \text{oraz} \quad \daleth_F(1) = 0.$$

Dalej z Lematu 1.27. mamy, że $\daleth_F$ jest funkcją nierosnącą i wypukłą zatem

$$\daleth_F(\sigma) \leq 1 - \sigma$$

dla $0 \leq \sigma \leq 1$. $\square$

Rozdział 2

RÓWNANIE FUNKCYJNE DLA FUNKCJI $m(F, w)$

CELEM niniejszego rozdziału jest przedstawienie dowodu Twierdzenia 2.1, który jest opublikowany w pracy semestralnej [10] oraz będzie opublikowany artykule [9]. Ani struktura klasy Selberga S, ani struktura S^{Γ} nie są znane, choć na temat klasy Selberga sformułowanych jest wiele przypuszczeń [16, 20]. Zaznaczamy jednocześnie, że rezultat z tego rozdziału jest od tych przypuszczeń całkowicie niezależny. W rozdziale tym ustalamy $F \in S^{\Gamma}$ oraz parametry Q, λ, μ, ω w równaniu (1.19).

Przez μ_F oznaczamy odwrotność funkcji a_F względem splotu Dirichleta, tak więc czysto formalnie możemy napisać

$$\frac{1}{F(\sigma+it)} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^{\sigma+it}}. \tag{2.1}$$

Dla prostoty oznaczeń kładziemy

$$\varkappa_F := \begin{cases} -\frac{\eta_F+1}{2d_F} & \text{, jeżeli } \eta_F > -1 \\ -\frac{1}{d_F} & \text{, jezeli } \eta_F = -1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dla w w górnej półpłaszczyźnie $\mathfrak{h} := \{w \in \mathbb{C} \mid \Im(w) > 0\}$ funkcja $m(F, w)$ jest zdefiniowana jako

$$m(F, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{e^{sw}}{F(s)} \mathrm{d}s, \tag{2.3}$$

gdzie $F \in S^{\Gamma}$. Droga całkowania składa się z półprostej $s = \varkappa_F + it$, $\infty > t \geq 0$, gładkiego łuku $\mathscr{A}$ na górnej półpłaszczyźnie łączącego punkty $\varkappa_F$ oraz $\frac{3}{2}$ oddzielającego możliwe miejsca zerowe funkcji $F\overline{F}$ znajdujące się na prostej rzeczywistej od tych ponad nią, oraz półprostej $s = \frac{3}{2} + it$, $0 \leqslant t < \infty$. Zbieżność (niemal jednostajną) całki (2.3) wykazujemy poniżej w Lemacie 2.6. Z lematu tego wynika również, że dla $w \in \mathfrak{h}$ funkcja $m(F, \cdot)$ jest holomorficzna.

Przez δ_a^b oznaczamy deltę Kroneckera, ponadto używamy oznaczenia $\overline{m}(F, z) := \overline{m(F, \overline{z})}$.

Twierdzenie 2.1. *Niech $F \in S^{\Gamma}$. Wtedy $m(F, \cdot)$ posiada przedłużenie meromorficzne do $\mathbb{C}$ z biegunami pojedynczymi w punktach $w = \log n$, $\mu_F(n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, i reziduami*

$$\operatorname*{Res}_{w=\log n} m(F, w) = -\frac{\mu_F(n)}{2\pi i}.$$

Ponadto spełnia ona poniższe równanie funkcyjne

$$\begin{aligned} m(F,w)+\overline{m}(\overline{F},w) = &-\frac{2\overline{\omega}}{d_F \mathrm{Q}^{1+2i\frac{\theta_F}{d_F}}} e^{-i\frac{\theta_F}{d_F}w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu_F(n)}}{n^{1+i\frac{\theta_F}{d_F}}} \cdot \\ &\cdot \left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d_F}} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}d_F+\eta_F}\left(2\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{-\frac{1}{d_F}}\right) - \delta_{-1}^{\eta_F} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d_F\right)} \right) - R(F,w), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie

$$R(F,w) = \sum_{\substack{F(\beta)=0 \\ 0\le\beta\le 1 \\ \beta\neq\frac{1}{2}}} \operatorname*{Res}_{s=\beta} \frac{e^{sw}}{F(s)} + \operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}} \frac{e^{sw}}{F(s)}$$

zaś J_ν *oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju, którą omówiliśmy w Preliminariach niniejszej rozprawy.*

W Twierdzeniu 2.1. rząd funkcji Bessela zależy w sposób wyraźny od stopnia i parzystości funkcji F w następujący sposób

$$\nu = \frac{1}{2}d_F + \eta_F, \quad \text{gdzie} \quad d_F > 0 \text{ oraz } \eta_F \geq -1,$$

zatem jest większy od -1. Ponadto w przypadku gdy $d_F = 1$ na mocy [19, Theorem 2] mamy $\eta_F = 0$ lub $\eta_F = -1$, zatem rząd funkcji Bessela $\nu = \pm\frac{1}{2}$, zaś w przypadku $d_F \geq 2$ rząd oszacowany jest $\nu \geq 0$. W przypadku, gdy $d_F = 1$ formuły (1.9) dają prostszą postać równania funkcyjnego (2.4). W szczególności łatwo otrzymujemy rezultat K. Bartz [2] ponieważ funkcja dzeta Riemanna należy do S^Γ. Zatem Twierdzenie 2.1. uogólnia ten wynik. Uogólnia ono również wynik A. Łydki [25, Theorem 1.3] ponieważ funkcja $L(s+\frac{1}{2}, E)$ należy do S^Γ.

2.1. Rezultaty pomocnicze

Lemat 2.1. [7, Chapter 5.3., pp. 203-204 & (9) p. 205 & (3) p. 211] *Niech*

$$G(z|a,b) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{M}} \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(b-s)} z^s \, ds,$$

gdzie $\mathcal{M}$ *jest krzywą gładką poza skończoną liczbą punktów zaczynającą się i kończącą w* $-\infty$*, obiegającą zgodnie z ruchem wskazówek zegara wszystkie bieguny funkcji* $\Gamma(s+a)$ *dokładnie raz, zaś* a *i* b *są dowolnymi liczbami zespolonymi. Całka ta jest wtedy zbieżna dla wszystkich* $|z| > 1$*. Ponadto dla takich* z *mamy*

$$G(z|a,b) = z^{-\frac{1}{2}(a-b+1)} \mathrm{J}_{a+b-1}\left(2z^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Lemat 2.2. [18, Lemma 1] *Niech* $F \in S$*. Wtedy dla każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $M = M(\epsilon)$ *takie, że* $\mu_F(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$ *dla* $(n,M) = 1$*.*

Lemat 2.3. *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy wyrażenie*

$$\frac{1}{k!}\binom{m-1}{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2.5}$$

przyjmuje największą wartość dla

$$k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor \approx \sqrt{m}.$$

Dowód. Ustalmy $m \geq 1$. Zauważmy, że nierówność

$$\frac{1}{(k+1)!}\binom{m-1}{k} > \frac{1}{k!}\binom{m-1}{k-1} \tag{2.6}$$

jest równoważna

$$\frac{1}{k(k+1)} > \frac{1}{m-k}$$

i dalej

$$m - 2k - k^2 > 0.$$

Zatem $k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1$ jest największą liczbą całkowitą k dla której zachodzi (2.6). W konsekwencji dla $k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ wyrażenie (2.5) osiąga maksimum. □

Lemat 2.4. *Niech $F \in \mathrm{S}^{\Gamma}$. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ szereg* (2.1) *jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w półpłaszczyźnie $\sigma \geq 1 + \epsilon$.*

Dowód. Na mocy Lematu 2.2. mamy, że dla każdego $\epsilon > 0$ szereg

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,M)=1}}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s}$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla $\sigma \geq 1 + \epsilon$. Stosując aksjomat (5) mamy

$$\frac{1}{F_p(s)} = e^{-\sum_{m=1}^{\infty} b(p^m)p^{-ms}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\sum_{m=1}^{\infty} b(p^m)p^{-ms}\right)^k, \quad \sigma > \theta.$$

Dla $\sigma \geq \theta + \epsilon$ na mocy oszacowania $b(p^m) \ll p^{\theta m}$ wnosimy, że

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| b(p^m)p^{-ms} \right| \ll \sum_{m=1}^{\infty} p^{m(\theta-\sigma)} \ll_{\epsilon} 1.$$

Zatem z Lematu 1.6. mamy

$$\left(-\sum_{m=1}^{\infty} b(p^m)p^{-ms}\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} c_k(p^m)p^{-ms}, \quad \sigma > \theta,$$

gdzie

$$c_k(p^m) = (-1)^k \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=m \\ l_i>0}} b(p^{l_1}) \ldots b(p^{l_k})$$

dla $k \geq 1$, $c_0(1) = 1$ i $c_0(p^m) = 0$ dla $m \geq 1$. W konsekwencji

$$\frac{1}{F_p(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{\infty} c_k(p^m) p^{-ms}, \quad \text{dla} \quad \sigma > \theta. \tag{2.7}$$

Na mocy oszacowania $b(p^m) \ll p^{\theta m}$, gdzie $\theta < \frac{1}{2}$ mamy

$$c_k(p^m) \ll p^{\theta m} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=m \\ l_i>0}} 1 = p^{\theta m} \binom{m-1}{k-1}, \tag{2.8}$$

gdzie stała w symbolu Winogradowa nie zależy od m. Ponieważ na mocy definicji c_k mamy $c_k(p^m) = 0$ dla $k > m$, zatem dla każdego $m \geq 1$ mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(p^m)}{k!} p^{-sm} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k(p^m)}{k!} p^{-sm}. \tag{2.9}$$

Na mocy (2.8) dla $\sigma > \theta$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \frac{c_k(p^m)}{k!} p^{-sm} \right| \ll \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \binom{m-1}{k-1} p^{m(\theta-\sigma)}.$$

Stosując nierówności (1.7) na mocy Lematu 2.3. otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \binom{m-1}{k-1} p^{m(\theta-\sigma)} \ll p^{m(\theta-\sigma)} \frac{m}{\lfloor \sqrt{m} \rfloor !} \binom{m-1}{\lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1} \ll$$
$$p^{m(\theta-\sigma)} \left(\frac{e}{\sqrt{m}} \right)^{\sqrt{m}} \left(\frac{me}{\sqrt{m}} \right)^{\sqrt{m}} = p^{m(\theta-\sigma)} e^{2\sqrt{m}}, \tag{2.10}$$

gdzie stałe w symbolach Winogradowa nie zależą od m. W konsekwencji mamy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{c_k(p^m)}{k!} p^{-sm} \right| \ll \sum_{m=1}^{\infty} p^{m(\theta-\sigma)} e^{2\sqrt{m}} \ll_{\epsilon} 1, \quad \text{gdzie} \quad \sigma \geq \theta + \epsilon.$$

Zatem na mocy Lematu 1.7. w (2.7) możemy zamienić kolejność sumowania po k i m dla $\sigma > \theta$. W konsekwencji dla takich σ mamy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_F(p^m) p^{-ms} = \sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(p^m)}{k!},$$

a przez jednoznaczność rozwinięcia w szereg Dirichleta oraz na mocy (2.9) mamy

$$\mu_F(p^m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(p^m)}{k!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k(p^m)}{k!}.$$

Na mocy (2.10) mamy

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\mu_F(p^m)p^{-ms}\right| \ll \sum_{m=1}^{\infty} p^{m(\theta-\sigma)}e^{2\sqrt{m}} \ll_\epsilon 1 \quad \text{dla} \quad \sigma \geq \theta+\epsilon,$$

zatem szereg Dirichleta

$$\frac{1}{F_p(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_F(p^m)p^{-ms}$$

jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie dla $\sigma > \theta$. Z Lematu 1.6. wnosimy, że szereg

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,M)>1}}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s} = \prod_{(p,M)>1} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_F(p^m)p^{-ms},$$

a dalej także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1\\(n,M)=1}}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s} \sum_{\substack{n=1\\(n,M)>1}}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s}$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla $\sigma \geq 1+\epsilon$, i w konsekwencji otrzymujemy tezę. □

Wniosek 2.5. *Szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_F(n)|}{n^{\frac{5}{4}}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_F(n)|}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_F(n)|\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

są zbieżne. W konsekwencji mamy

$$\frac{1}{F\left(\frac{3}{2}+it\right)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_F(n)|\, n^{-\frac{3}{2}} \ll 1.$$

Dla prostoty oznaczeń, dla $F \in \mathrm{S}^\Gamma$ kładziemy

$$h_F(s) := \mathrm{Q}^{2s-1} \frac{\Gamma(\lambda s+\mu)}{\Gamma(\lambda(1-s)+\overline{\mu})}.$$

Wtedy równanie funkcyjne z aksjomatu (3) przybiera postać

$$F(s) = \omega \frac{\overline{F}(1-s)}{h_F(s)}, \tag{2.11}$$

którą nazywać będziemy *asymetryczną postacią równania funkcyjnego*.

Lemat 2.6. *Dla* $s = \varkappa_F + it$ *mamy*

$$\frac{1}{F(s)} \ll |t|^{-\frac{d_F}{2}(1+2|\varkappa_F|)} \tag{2.12}$$

gdy $t \to \infty$ *oraz całka* (2.3) *jest zbieżna niemal jednostajnie dla* $w \in \mathfrak{h}$. *Ponadto całka*

$$\int_{\mathscr{A}} \frac{e^{sw}}{F(s)} \mathrm{d}s$$

jest niemal jednostajnie zbieżna dla $w \in \mathbb{C}$.

Dowód. Każdą z trzech części konturu $\mathscr{C}$ w (2.3) rozważymy oddzielnie. Ponieważ z Wniosku 2.5.

$$\frac{1}{F\left(\frac{3}{2}+it\right)} \ll 1$$

oraz $\left|e^{\left(\frac{3}{2}+it\right)w}\right| = e^{\frac{3}{2}u-vt} \ll_u e^{-vt}$ (przy czym stała w symbolu Winogradowa zależy od u w sposób ciągły) całka po pionowej półprostej $s=\frac{3}{2}+it$, $0 \le t < \infty$ jest zbieżna niemal jednostajnie dla $w \in \mathfrak{h}$. Dla dowolnego $w \in \mathbb{C}$ całka jest również zbieżna na łuku $\mathscr{A}$, ponieważ funkcja $e^{\cdot w}/F(\cdot)$ jest tam holomorficzna. Aby uzyskać zbieżność niemal jednostajną całki na półprostej pionowej $s = \varkappa_F + it$, gdzie $\infty > t \ge 0$, postępujemy następująco: najpierw z równania funkcyjnego (2.11) otrzymujemy

$$\frac{e^{sw}}{F(s)} = \overline{\omega}\frac{h_F(s)e^{sw}}{\overline{F}(1-s)}.$$

Ponieważ $\Re(1-\varkappa_F-it) = 1+|\varkappa_F|$ mamy zatem

$$\frac{1}{\overline{F}(1-\varkappa_F-it)} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu_F}(n)n^{\varkappa_F-1-it} \ll \sum_{n=1}^{\infty}|\mu_F(n)|\,n^{\varkappa_F-1} \ll 1.$$

Następnie stosując do czynników Γ w h_F formułę Stirlinga (1.4) otrzymujemy

$$|h_F(\varkappa_F+it)| \ll \left|\frac{d_F}{2}t\right|^{-\frac{d_F}{2}(1+2|\varkappa_F|)}, \quad \text{gdy } |t| \to \infty.$$

Zatem dla $s = \varkappa_F + it$ mamy (2.12). Ponieważ $|e^{sw}| = e^{-|\varkappa_F|u-vt} \ll_u e^{-vt}$ (gdzie stała w symbolu Winogradowa zależy od u w sposób ciągły), to funkcja podcałkowa w (2.3) jest oszacowana przez e^{-tv}, tak więc całka jest zbieżna niemal jednostajnie na półprostej pionowej $s = \varkappa_F + it$, gdzie $\infty > t \ge 0$ dla $w \in \mathfrak{h}$. Zatem całka (2.3) jest zbieżna niemal jednostajnie dla $w \in \mathfrak{h}$. □

Lemat 2.7. [1, cf. Lemma 2.3] *Niech* $F \in \mathrm{S}$. *Wtedy*

$$N_F(T) - N_F(T+1) = \mathrm{O}_F(\log T).$$

Lemat 2.8. *Niech* $F \in \mathrm{S}^\Gamma$ *i niech* $\rho = \beta + i\gamma$ *przebiega zera nietrywialne funkcji* F. *Wtedy zachodzą następujące formuły*

$$\frac{F'}{F}(s) = \sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}_F(\log|t|) \quad \text{dla } |t|>2 \tag{2.13}$$

oraz

$$\log F(s) = \sum_{|t-\gamma|\le 1}\log(s-\rho) + \mathrm{O}_F(\log|t|), \quad \text{gdy } t \to \infty \tag{2.14}$$

jednostajnie dla $-1 \le \sigma \le 2$, *gdzie stałe w symbolach Landaua zależą jedynie od* F.

Dowód. Formuła (2.13) wynika natychmiast z [1, Lemma 2.4]. Aby zakończyć dowód wystarczy udowodnić drugą formułę. Całkując równanie (2.13) po odcinku łączącym $2+it$ i s, założywszy, że t

nie jest równe rzędnej żadnego miejsca zerowego, otrzymujemy

$$\log F(s) - \log F(2+it) = \sum_{|t-\gamma|\le 1} (\log(s-\rho) - \log(2+it-\rho)) + \mathrm{O}_F(\log t).$$

Na mocy aksjomatu (5) mamy

$$|\log F(2+it)| \le \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{b(p^m)}{p^{m(2+it)}} \right| \le \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b(p^m)|}{p^{2m}}.$$

Ponieważ $|b(p^m)| \ll p^{m\theta} \le p^{\frac{m}{2}}$ zatem mamy

$$\frac{|b(p^m)|}{p^{2m}} \ll \frac{1}{p^{\frac{3}{2}m}}$$

i w konsekwencji

$$|\log F(2+it)| \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \ll 1.$$

Ponieważ $|t-\gamma| \le 1$, składniki $\log(2+it-\rho) = \log|2+it-\rho| + i\arg(2+it-\rho)$ są ograniczone, zaś na mocy Lematu 2.7. ich liczba jest ograniczona przez $\mathrm{O}_F(\log t)$. Zatem otrzymujemy tezę lematu dla t o module większym od 2, nie będących rzędną żadnego miejsca zerowego funkcji F, a przez ciągłość dla wszystkich s w pasie $-1 \le \sigma \le 2$. □

Wniosek 2.9. *Dla każdego $\epsilon > 0$, w pasie $1+\epsilon \le \sigma \le 2$ mamy*

$$\log F(\sigma+it) \ll_{\epsilon,F} \log(|t|+2), \quad \text{gdy } |t| \to \infty. \tag{2.15}$$

Dowód. Ponieważ szereg (2.1) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla $\sigma \ge 1+\epsilon$ dla każdego $\epsilon > 0$, wnosimy, że dla $\sigma > 1$ funkcja F z S^Γ nie ma miejsc zerowych (w istocie jest to dobrze znana własność funkcji z klasy Selberga). Zatem dla każdego $\epsilon > 0$, w pasie $1+\epsilon \le \sigma \le 2$ oszacowanie (2.15) implikuje (2.14). □

Dla prostoty oznaczeń kładziemy

$$\upsilon_F := \frac{|\theta_F|}{d_F} + 1. \tag{2.16}$$

Mamy wtedy

Lemat 2.10. *Niech $w \in \mathfrak{h}$, $s = Re^{i\phi}$, $R\sin\phi \ge \upsilon_F$, $R|\cos\phi| \ge \frac{1}{2}|\varkappa_F|$, gdzie $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ oraz niech $F \in \mathrm{S}^\Gamma$. Wtedy dla $R \ge R_0(u,v)$ mamy*

$$\log|h_F(s)| = (d_F R\cos\phi)\log(R) + \mathrm{O}(R) \tag{2.17}$$

oraz

$$\log\left|\frac{e^{sw}}{F(s)}\right| = d_F R\log\left(\frac{d_F}{2}R\right)\cos\phi + Rf(\phi,u,v) + \mathrm{O}(\log R), \tag{2.18}$$

gdzie

$$f(\phi,u,v):=(u+2\log Q-d_F)\cos\phi+\left(-v+d_F\left(\phi-\frac{3}{2}\pi\right)\right)\sin\phi,$$

oraz

$$\left|\frac{e^{sw}}{F(s)}\right|\leq e^{-v\frac{R}{2}}.$$

Dowód. Korzystając z asymetrycznej formy równania funkcyjnego dla $F\in S^{\Gamma}$ danego przez (2.11) otrzymujemy

$$\log\left|\frac{e^{sw}}{F(s)}\right|=\Re(sw)-\log\left|\overline{F}(1-s)\right|+\log|h_F(s)|.$$

Ponieważ $\Re(1-s)=1+R|\cos\phi|\geq 1+\frac{1}{2}|\varkappa_F|$ na mocy (2.15) mamy $\log\left|\overline{F}(1-s)\right|\ll\log R$. Ponieważ $R\sin\phi\geq\upsilon_F$, mamy

$$\log|\sin(\pi(\lambda s+\mu))|=\frac{d_F\pi}{2}R\sin\phi+O(1). \tag{2.19}$$

Stosując (1.6) otrzymujemy

$$\Gamma(\lambda s+\mu)=\frac{\pi}{\Gamma(1-\lambda s-\mu)\sin(\pi(\lambda s+\mu))}.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}\log|h_F(s)|=(2\sigma-1)\log Q+\log\pi-\log|\Gamma(\lambda(1-s)+\overline{\mu})|&\\ -\log|\Gamma(1-\lambda s-\mu)|-\log|\sin(\pi(\lambda s+\mu))|.&\end{aligned} \tag{2.20}$$

Stosując formułę Stirlinga (1.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\log|\Gamma(\lambda(1-s)+\overline{\mu})|=\\ &\quad\Re\left(\left(-\lambda Re^{i\phi}+\lambda+\overline{\mu}-\frac{1}{2}\right)\log\left(\lambda Re^{i(\phi-\pi)}\right)+\lambda Re^{i\phi}+\frac{1}{2}\log(2\pi)\right)+O\left(|\lambda R|^{-1}\right)=\\ &\qquad\Re\left(-\lambda Re^{i\phi}\log\left(\lambda Re^{i(\phi-\pi)}\right)+\lambda Re^{i\phi}\right)+O(\log R)\end{aligned} \tag{2.21}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\log|\Gamma(1-\lambda s-\mu)|=\\ &\quad\Re\left(\left(-\lambda Re^{i\phi}+\frac{1}{2}-\mu\right)\log\left(\lambda Re^{i(\phi-\pi)}\right)+\lambda Re^{i\phi}+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O\left(|\lambda R|^{-1}\right)\right)=\\ &\qquad\Re\left(-\lambda Re^{i\phi}\log\left(\lambda Re^{i(\phi-\pi)}\right)+\lambda Re^{i\phi}\right)+O(\log R).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ponieważ

$$\Re\left(-\lambda Re^{i\phi}\log\left(\lambda Re^{i(\phi-\pi)}\right)+\lambda Re^{i\phi}\right)=-(\lambda R\cos\phi)\log|\lambda R|-(\lambda R\sin\phi)(\phi-\pi)+\lambda R\cos\phi$$

w konsekwencji z (2.19), (2.21), (2.22) oraz (2.20) mamy

$$\log|h_F(s)| = (2R\cos\phi)\log Q + (d_F R\cos\phi)\log\left(\frac{d_F}{2}R\right) \\ +(d_F R\sin\phi)(\phi-\pi) - d_F R\cos\phi - \frac{d_F\pi}{2}R\sin\phi + O(\log R),$$

a zatem

$$\log|h_F(s)| = (2R\cos\phi)\log Q + (d_F R\cos\phi)\log\left(\frac{d_F}{2}R\right) \\ + d_F R\left(\phi - \frac{3}{2}\pi\right)\sin\phi - d_F R\cos\phi + O(\log R),$$

i dalej (2.17). Jednocześnie otrzymujemy również (2.18). Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{2}, u, v\right) = -v - d_F\pi$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi, u, v) \ll_{u,v} 1, \qquad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi,$$

mamy dla $\frac{\pi}{2} < \phi \le \frac{\pi}{2} + 1/\sqrt{\log R}$

$$f(\phi, u, v) = -v - d_F\pi + O_{u,v}\left(\frac{1}{\sqrt{\log R}}\right).$$

Zatem dla takich ϕ oraz odpowiednio dużych R, wobec (2.18) i $\cos\phi < 0$ mamy

$$\log\left|\frac{e^{sw}}{F(s)}\right| \le -v\frac{R}{2}.$$

Dla $\frac{\pi}{2} + 1/\sqrt{\log R} \le \phi \le \pi$ mamy $|\cos\phi| \gg 1/\sqrt{\log R}$ i stosując (2.18) otrzymujemy

$$\log\left|\frac{e^{sw}}{F(s)}\right| = -d_F R\log\left(\frac{d_F}{2}R\right)|\cos\phi| + O_{u,v}(R) \le -v\frac{R}{2}$$

dla odpowiednio dużych R. □

Wniosek 2.11. *Przez podstawienie $F \mapsto \overline{F}$ teza Lematu 2.10. jest prawdziwa również wtedy, gdy $\overline{w} \in \mathfrak{h}$, $s = Re^{i\phi}$, $R\sin\phi \le -v_F$, $R|\cos\phi| \ge \frac{1}{2}|x_F|$, gdzie $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi$ oraz $F \in S^\Gamma$.*

2.2. Dowód Twierdzenia 2.1

Rozumowanie dzielimy na dwie części. Najpierw dowodzimy, że funkcja $m(F,\cdot)$ posiada przedłużenie meromorficzne do całej płaszczyzny zespolonej, a następnie dowodzimy równania funkcyjnego.

Przez $\mathscr{A}_T$, $T>0$, oznaczamy łuk łączący $\varkappa_F+i\upsilon_F+iT$ i $\varkappa_F+i\upsilon_F-T$. W obszarze ograniczonym przez kontur $\mathscr{D}_T$ składający się z łuku $\mathscr{A}_T$ oraz odcinków $[\varkappa_F-T+i\upsilon_F,\varkappa_F+i\upsilon_F]$, $[\varkappa_F+i\upsilon_F,\varkappa_F+i(\upsilon_F+T)]$, funkcja $e^{w\cdot}/F(\cdot)$ nie ma osobliwości, ponieważ zera trywialne funkcji F znajdują poniżej υ_F (cf. (1.20) oraz (2.16)). Zatem

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{D}_T}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=0.$$

Dla $v>0$ oraz T dostatecznie dużego, na mocy Lematu 2.10. mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{A}_T}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s\ll\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathscr{A}_T}e^{-\frac{vT}{2}}\left|\mathrm{d}s\right|\ll Te^{-\frac{vT}{2}}\to 0\quad\text{dla } T\to\infty.$$

Możemy zatem przesunąć w (2.3) drogę całkowania z $(\varkappa_F+i\infty,\varkappa_F]$ do $\mathscr{D}$, składającej się z półprostej $s=\sigma+i\upsilon_F$, $-\infty<\sigma\le\varkappa_F$ oraz odcinka pionowego $[\varkappa_F+i\upsilon_F,\ \varkappa_F]$. Otrzymujemy zatem

$$m(F,w)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\mathscr{D}}+\int\limits_{\mathscr{A}}+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}\right)\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=:m_{\mathscr{D}}(F,w)+m_{\mathscr{A}}(F,w)+m_{\mathscr{L}}(F,w),\tag{2.23}$$

gdzie $\mathscr{L}=[\frac{3}{2},\frac{3}{2}+i\infty)$. Dla $s=Re^{i\phi}=\sigma+i\upsilon_F$, gdzie $\sigma\le\varkappa_F$ mamy

$$|e^{sw}|=e^{\sigma u-\upsilon_F v}.$$

Korzystając z (2.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{F(\sigma+i\upsilon_F)}\right|&=-d_F R\log\left(\frac{d_F}{2}R\right)|\cos\phi|\\&\quad-R\left((2\log Q-d_F)|\cos\phi|-\left(d_F\left(\phi-\frac{3}{2}\pi\right)\right)\sin\phi\right)+O(\log R)=\\&\qquad-d_F R\log(R)|\cos\phi|+O(R).\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{F(\sigma+i\upsilon_F)}\ll e^{-c|\sigma|\log(|\sigma|+2)},\qquad \sigma\le\varkappa_F$$

dla $c>0$ zależnego jedynie od F. Zatem $m_{\mathscr{D}}(F,\cdot)$ jest funkcją całkowitą. Z Lematu 2.6. wiemy, że $m_{\mathscr{A}}(F,\cdot)$ jest również całkowita. Niech $v>0$. Wtedy z Wniosku 2.5. mamy

$$\int\limits_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{\mu_F(n)}{n^{\frac{3}{2}+it}}\right|\left|e^{\left(\frac{3}{2}+it\right)w}\right|\mathrm{d}t\ll\int\limits_0^\infty\left|e^{\left(\frac{3}{2}+it\right)w}\right|\mathrm{d}t\ll_u\frac{1}{v}.$$

W konsekwencji na mocy Lematów 1.5. i 1.8. dla każdego $T>0$ mamy

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_F(n)}{n^{\frac{3}{2}+it}}e^{sw}\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\mu_F(n)}{n^{\frac{3}{2}+it}}e^{sw}\mathrm{d}s.$$

Z (2.23) mamy

$$m_{\mathscr{L}}(F,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}e^{sw}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_F(n)}{n^s}\mathrm{d}s.$$

Zatem na mocy Lematu 1.9. możemy zamienić kolejność całkowania i sumowania

$$m_{\mathscr{L}}(F,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{\mu_F(n)e^{sw}}{n^s}\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_F(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}e^{(w-\log n)s}\mathrm{d}s.$$

Obliczając całkę otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}e^{(w-\log n)s}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w-\log n}\;e^{(w-\log n)s}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}.$$

Ponieważ $v>0$ mamy

$$\left|e^{(w-\log n)\left(\frac{3}{2}+it\right)}\right|=e^{\frac{3}{2}(u-\log n)-tv}\ll_{u,n}e^{-tv}\to 0,\quad \text{gdy } t\to\infty.$$

Zatem otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}e^{(w-\log n)s}\mathrm{d}s=-\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{\frac{3}{2}w}}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{w-\log n}$$

i w konsekwencji

$$m_{\mathscr{L}}(F,w)=-\frac{e^{\frac{3}{2}w}}{2\pi i}m_0(F,w),$$

gdzie

$$m_0(F,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_F(n)}{n^{3/2}}\frac{1}{w-\log n}. \tag{2.24}$$

Ponieważ (2.24) jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{C}\setminus\{w=\log n\mid \mu_F(n)\neq 0,\ n\in\mathbb{N}\}$ otrzymujmy przedłużenie meromorficzne $m_{\mathscr{L}}(F,\cdot)$, a w konsekwencji $m(F,\cdot)$, do całej płaszczyzny zespolonej. Jedynymi osobliwościami są te pochodzące od $m_0(F,\cdot)$ to znaczy, bieguny pojedyncze w punktach $\log n$, $n\in\mathbb{N}$, $\mu_F(n)\neq 0$ z reziduami

$$\operatorname*{Res}_{w=\log n} m(F,w)=-\frac{\mu_F(n)}{2\pi i}.$$

Rozważmy $\overline{m}(\overline{F},w)$, gdzie $v<0$. Zamieniając zmienną $s\mapsto \overline{s}$ w (2.3), otrzymujemy

$$\overline{m}(\overline{F},w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\overline{\mathscr{C}}}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s,$$

gdzie $\overline{\mathscr{C}}$ oznacza kontur sprzężony do $\mathscr{C}$, a minus oznacza odwróconą orientację. Podobnie jak w pierwszej części dowodu, zamieniamy półprostą $[x_F,x_F+i\infty)$ na kontur $-\overline{\mathscr{D}}$ składający się z pionowego odcinka $[x_F,x_F-iv_F]$ oraz półprostej $s=\sigma-iv_F$, $0\geq\sigma>-\infty$. Zatem analogicznie jak w (2.23) mamy

$$\overline{m}(\overline{F},w)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\overline{\mathscr{D}}}+\int\limits_{-\overline{\mathscr{A}}}+\int\limits_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}}\right)\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=m_{-\overline{\mathscr{D}}}(F,w)+m_{-\overline{\mathscr{A}}}(F,w)+\frac{e^{\frac{3}{2}w}}{2\pi i}m_0(F,w) \tag{2.25}$$

i równość ta przedłuża się do $w\in\mathbb{C}$ na mocy przedłużenia analitycznego. Z (2.23) oraz (2.25) otrzymujemy dla $w\in\mathbb{C}\setminus\{\log n\mid \mu_F(n)\neq 0,\ n\in\mathbb{N}\}$ równość

$$m(F,w)+\overline{m}(\overline{F},w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{E}}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{A}_2}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s,$$

gdzie $\mathscr{E}$ jest drogą składającą się z $(-\infty+iv_F,x_F+iv_F]$, $[x_F+iv_F,x_F-iv_F]$ oraz $[x_F-iv_F,-\infty-iv_F)$, a $\mathscr{A}_2=\mathscr{A}\cup-\overline{\mathscr{A}}$ jest zamkniętą pętlą. Ponieważ $\mathscr{A}$ oddziela miejsca zerowe funkcji $F\overline{F}$ na prostej rzeczywistej od tych ponad nią, poza przedziałem $[0,1]$ funkcja $e^{w\cdot}/F(\cdot)$ nie ma osobliwości wewnątrz pętli $\mathscr{A}_2$. Zważywszy na fakt, że orientacja $\mathscr{A}_2$ jest ujemna, obliczając rezidua otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{A}_2}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=-\sum_{\substack{F(\beta)=0\\0\leq\beta\leq 1}}\operatorname*{Res}_{s=\beta}\frac{e^{sw}}{F(s)}=-R(F,w).$$

Z równania funkcyjnego (2.11) oraz rozwinięcia $1/\overline{F}(1-s)$ w szereg Dirichleta otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{E}}\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s=\frac{\overline{\omega}}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{E}}h_F(s)\frac{e^{sw}}{\overline{F}(1-s)}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\overline{\omega}}{\mathrm{Q}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{E}}\frac{\Gamma(\lambda s+\mu)}{\Gamma(\lambda(1-s)+\overline{\mu})}\left(\mathrm{Q}^2e^{w}\right)^s\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(n)}}{n^{1-s}}\right)\mathrm{d}s. \tag{2.26}$$

Dla s leżącego na półprostych $(-\infty\pm iv_F,x_F\pm iv_F]$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_F(n)}{n^{1-s}}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu_F(n)|}{n^{1+|x_F|}}\ll 1. \tag{2.27}$$

Na mocy (2.17), (2.27) oraz Wniosku 2.11. dla $u > 0$ mamy

$$\int_{\varkappa_F}^{-\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\mu_F(n)}{n^{1-s}}\right| |h_F(\sigma \pm i\upsilon_F)| \left|e^{(\sigma \pm i\upsilon_F)w}\right| |\mathrm{d}\sigma| \ll \int_{\varkappa_F}^{-\infty} e^{-c_1|\sigma|} e^{-|\sigma|u \mp v\upsilon_F} |\mathrm{d}\sigma| \ll 1, \tag{2.28}$$

gdzie $c_1 > 0$. Niech $\mathscr{E}_T$ jest drogą składającą się z $(-T + i\upsilon_F, \varkappa_F + i\upsilon_F]$, $[\varkappa_F + i\upsilon_F, \varkappa_F - i\upsilon_F]$ oraz $[\varkappa_F - i\upsilon_F, -T - i\upsilon_F)$. Na mocy oszacowań (2.28), (2.27) i Lematów 1.5. oraz 1.8. dla $u > 0$ oraz dla każdego $T > |\varkappa_F|$ mamy

$$\int_{\mathscr{E}_T} \frac{e^{sw}}{F(s)} \mathrm{d}s = \overline{\omega} \int_{\mathscr{E}_T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu_F}(n)}{n^{1-s}} h_F(s) e^{sw} \mathrm{d}s = \overline{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathscr{E}_T} \frac{\overline{\mu_F}(n)}{n^{1-s}} h_F(s) e^{sw} \mathrm{d}s.$$

Zatem z Lematu 1.9. w formule (2.26) zamieniamy kolejność całkowania i sumowania otrzymując

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{E}} \frac{e^{sw}}{F(s)} \mathrm{d}s = \frac{\overline{\omega}}{\mathrm{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu_F}(n)}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{E}} \frac{\Gamma(\lambda s + \mu)}{\Gamma(\lambda(1-s) + \overline{\mu})} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^s \mathrm{d}s.$$

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że

$$\frac{\overline{\omega}}{\mathrm{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu_F}(n)}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{E}} \frac{\Gamma(\lambda s + \mu)}{\Gamma(\lambda(1-s) + \overline{\mu})} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^s \mathrm{d}s =$$
$$-\frac{2}{d_F} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{-i\frac{\theta_F}{d_F}} \left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{d_F}} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}d_F - 1}\left(2\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{-\frac{1}{d_F}}\right) - \delta_{-1}^{\eta_F} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d_F\right)} \right)$$

dla w będącego w zbiorze posiadającym punkt skupienia. Podstawiając $\lambda s \mapsto s$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{E}} \frac{\Gamma(\lambda s + \mu)}{\Gamma(\lambda(1-s) + \overline{\mu})} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^s \mathrm{d}s = \frac{2}{d_F} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda\mathscr{E}} \frac{\Gamma(s + \mu)}{\Gamma(\lambda + \overline{\mu} - s)} \left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{\frac{2}{d_F}}\right)^s \mathrm{d}s.$$

Zauważmy, że jeżeli $\eta_F > -1$, to wszystkie bieguny $\Gamma(s + \mu)$ są okrążane przez kontur $\lambda\mathscr{E}$ przy ujemnej orientacji. Ponieważ $\left|\mathrm{Q}^2 n e^w\right| = \mathrm{Q}^2 n e^u > 1$ dla $u > -\log\left(\mathrm{Q}^2 n\right)$, na mocy Lematu 2.1. otrzymujemy dla takich u

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{E}} \frac{\Gamma(\lambda s + \mu)}{\Gamma(\lambda(1-s) + \overline{\mu})} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^s \mathrm{d}s =$$
$$-\frac{2}{d_F} \left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{-i\frac{\theta_F}{d_F}} \left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{d_F}} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}d_F + \eta_F}\left(2\left(\mathrm{Q}^2 n e^w\right)^{-\frac{1}{d_F}}\right) \right),$$

a przez przedłużenie analityczne tezę twierdzenia dla wszystkich u.

Jeżeli $\eta_F = -1$ wtedy jedynym biegunem $\Gamma(s + \mu)$ na prawo od konturu $\lambda\mathscr{E}$ jest punkt $s = -i\frac{\theta_F}{2}$. Przesuwamy zatem kontur $\lambda\mathscr{E}$ tak, aby obiegł punkt $s = -i\frac{\theta_F}{2}$ i oznaczamy tak zmieniony kontur przez $\lambda\mathscr{E}'$. Na mocy Lematu 1.12. mamy, że

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda\mathscr{E}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(\lambda+\overline{\mu}-s)}\left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{\frac{2}{d_F}}\right)^s \mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda\mathscr{E}'} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(\lambda+\overline{\mu}-s)}\left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{\frac{2}{d_F}}\right)^s \mathrm{d}s - \operatorname*{Res}_{s=-i\frac{\theta_F}{2}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(\lambda+\overline{\mu}-s)}\left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{\frac{2}{d_F}}\right)^s.$$

Ponieważ
$$\operatorname*{Res}_{s=-i\frac{\theta_F}{2}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(\lambda+\overline{\mu}-s)}\left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{\frac{2}{d_F}}\right)^s = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d_F\right)}\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{-i\frac{\theta_F}{d_F}},$$

zatem z Lematu 2.1. otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{E}} \frac{\Gamma(\lambda s+\mu)}{\Gamma(\lambda(1-s)+\overline{\mu})}\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^s \mathrm{d}s =$$
$$-\frac{2}{d_F}\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{-i\frac{\theta_F}{d_F}}\left(\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d_F}} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}d_F-1}\left(2\left(\mathrm{Q}^2 n e^{w}\right)^{-\frac{1}{d_F}}\right) - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d_F\right)}\right)$$

dla $u > -\log\left(\mathrm{Q}^2 n\right)$, a przez przedłużenie analityczne tezę twierdzenia dla wszystkich u. □

Rozdział 3

TWIERDZENIA TYPU Ω

FUNKCJA L krzywej eliptycznej E nad $\mathbb{Q}$ jest określona tak jak w (1.23). Przypominamy, że wtedy funkcja $F(s) = L\left(s + \frac{1}{2}, E\right)$ należy do S^{Γ} (cf. §1.4. niniejszej rozprawy). W tym rozdziale ustalamy krzywą eliptyczną E nad $\mathbb{Q}$ i dla prostoty oznaczeń przyjmujemy

$$L\left(s + \frac{1}{2}, E\right) := F(s)$$

oraz

$$\mu_F := \mu_E,$$

gdzie μ_F jest zdefiniowane przez (2.1). Zauważmy jednocześnie, że dla takiej funkcji F, dla każdego $\sigma > 1$ mamy $F(\sigma) \in \mathbb{R}$, zatem w przypadku krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$ funkcja μ_E przyjmuje wartości rzeczywiste.

Niech $\mathfrak{G}$ oznacza klasę funkcji $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ różniczkowalnych jednokrotnie w sposób ciągły, spełniających następujące warunki:

1. $g(x) \to \infty$, gdy $x \to \infty$, monotonicznie dla $x > x_0 = x_0(g)$
2. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \ll \frac{1}{x}$, gdy $x \to \infty$.

Lemat 3.1. *Niech funkcja* $g \in \mathfrak{G}$. *Wtedy*

$$g(x) \ll \log x, \quad \text{gdy } x \to \infty.$$

Dla każdego $\alpha > 0$ *mamy*

$$\frac{g(x)}{x^{\alpha}} \to 0, \quad \text{gdy } x \to \infty$$

monotonicznie od pewnego miejsca.

Dowód. Z 1. wynika, że funkcja g jest monotoniczna dla $x > x_0$, a zatem $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} > 0$ dla $x > x_0$ i w konsekwencji.

$$0 < \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \le B\frac{1}{x} \quad \text{dla } x > x_0 \quad \text{oraz pewnego } B > 0. \tag{3.1}$$

Całkując nierówność (3.1) otrzymujemy

$$0 < \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}g(\xi) \le B \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

i w konsekwencji

$$0 < g(x) - g(x_0) \leq B(\log x - \log x_0),$$

czyli

$$g(x) \ll \log x, \quad \text{gdy } x \to \infty.$$

Ustalamy $\alpha > 0$ zaś B i x_0 niech będą takie jak w (3.1). Ponieważ funkcja g rośnie do nieskończoności, zatem

$$g(x) > \frac{2}{\alpha} B$$

dla każdego $x > x_1 \geq x_0$. Mamy zatem

$$\alpha x^{-\alpha-1} g(x) > 2Bx^{-\alpha-1},$$

a z (3.1)

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} x^{-\alpha} \leq Bx^{-\alpha-1}$$

dla każdego $x > x_1$ i w konsekwencji

$$\alpha x^{-\alpha-1} g(x) > \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} x^{-\alpha}.$$

Zatem dla $x > x_1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} x^{-\alpha} - \alpha x^{-\alpha-1} g(x) < 0$$

i w konsekwencji funkcja $\frac{g(x)}{x^\alpha}$ jest malejąca, dla $x > x_1$. □

3.1. Twierdzenia pomocnicze dotyczące sum ważonych funkcji Möbiusa

Dla prostoty oznaczeń kładziemy

$$M_E(x) := \sum_{n \leq x} \mu_E(n).$$

Będziemy mówili, że spełnione jest oszacowanie (3.2), gdy dla pewnej funkcji $g \in \mathfrak{G}$ mamy

$$M_E(x) \ll \sqrt{x}\, g(x), \quad \text{gdy } x \to \infty. \tag{3.2}$$

Lemat 3.2. *Niech zachodzi* (3.2). *Wtedy dla każdego* $\alpha < \frac{1}{2}$ *mamy*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu_E(n)}{n^\alpha} \ll_\alpha x^{\frac{1}{2}-\alpha} g(x), \quad \textit{gdy } x \to \infty.$$

Dowód. Korzystając z Wniosku 1.2. mamy

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu_E(n)}{n^\alpha}=M_E(x)x^{-\alpha}-\int_1^x M_E(\xi)\mathrm{d}\xi^{-\alpha}\ll$$
$$\sqrt{x}g(x)x^{-\alpha}+\left|\int_1^x\sqrt{\xi}\,g(\xi)\mathrm{d}\xi^{-\alpha}\right|\ll\sqrt{x}g(x)x^{-\alpha}+g(x)\int_1^x\sqrt{\xi}\left|\mathrm{d}\xi^{-\alpha}\right|\ll$$
$$x^{\frac12-\alpha}g(x)+|\alpha|g(x)\int_1^x\xi^{-\frac12-\alpha}\mathrm{d}\xi\ll_\alpha x^{\frac12-\alpha}g(x),\quad\text{gdy}\quad x\to\infty.$$

□

Lemat 3.3. *Jeżeli zachodzi*

$$M_E\left(x;\frac12\right):=\sum_{n\le x}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}}\ll g(x),\quad \textit{gdy } x\to\infty$$

dla pewnej funkcji $g\in\mathfrak{G}$, *to wtedy zachodzi również* (3.2).

Dowód. Korzystając z Wniosku 1.2. mamy

$$\sum_{n\le x}\mu_E(n)=\sum_{n\le x}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{n}=M_E\left(x;\frac12\right)\sqrt{x}-\int_1^x M_E\left(\xi;\frac12\right)\mathrm{d}\sqrt{\xi}\ll$$
$$\sqrt{x}g(x)+\int_1^x g(\xi)\mathrm{d}\sqrt{\xi}\ll\sqrt{x}g(x)+g(x)\int_1^x\mathrm{d}\sqrt{\xi}\ll\sqrt{x}g(x),\quad\text{gdy } x\to\infty.$$

□

Lemat 3.4. *Niech zachodzi* (3.2). *Wtedy dla każdego* $\alpha>\frac12$ *szereg*

$$\sum_{n>x}\frac{\mu_E(n)}{n^\alpha}$$

jest zbieżny i spełnia

$$\sum_{n>x}\frac{\mu_E(n)}{n^\alpha}\ll\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-\frac12}\right)x^{\frac12-\alpha}g(x),\quad\text{gdy } x\ge x_0,\tag{3.3}$$

przy czym x_0 *oraz stała w symbolu Winogradowa nie zależą od* α.

Dowód. Dla każdego $\alpha>\frac12$ mamy

$$\frac{M_E(N)}{N^\alpha}\ll\frac{\sqrt{N}g(N)}{N^\alpha}=\frac{g(N)}{N^{\alpha-\frac12}},$$

stąd

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M_E(N)}{N^\alpha}=0.$$

Ponadto mamy

$$\lim_{N\to\infty}\int_x^N |M_E(\xi)|\,\xi^{-\alpha-1}\mathrm{d}\xi \ll \lim_{N\to\infty}\int_x^N \sqrt{\xi}\,g(\xi)\xi^{-\alpha-1}\mathrm{d}\xi = \lim_{N\to\infty}\int_x^N g(\xi)\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi, \quad x \geq x_1, \tag{3.4}$$

dla pewnego x_1 niezależnego od α. Ponieważ $\alpha > \frac{1}{2}$ zatem dla $\delta = \alpha - \frac{1}{2} > 0$ mamy

$$\lim_{N\to\infty}\int_x^N g(\xi)\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi = \lim_{N\to\infty}\int_x^N \frac{g(\xi)}{\xi^{\frac{\delta}{2}}}\xi^{-1-\frac{\delta}{2}}\mathrm{d}\xi \leq \lim_{N\to\infty}\frac{g(x)}{x^{\frac{\delta}{2}}}\int_x^N \xi^{-1-\frac{\delta}{2}}\mathrm{d}\xi =$$

$$-\frac{2}{\delta}B\frac{g(x)}{x^{\frac{\delta}{2}}}\lim_{N\to\infty}\xi^{-\frac{\delta}{2}}\Big|_x^N = \frac{2}{\delta}\frac{g(x)}{x^{\delta}} - \frac{2}{\delta}\frac{g(x)}{x^{\frac{\delta}{2}}}\lim_{N\to\infty}N^{-\frac{\delta}{2}} = \frac{2}{\delta}\frac{g(x)}{x^{\delta}} = \frac{2}{\alpha-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\alpha}g(x). \tag{3.5}$$

Zatem wobec bezwzględnej zbieżności całki

$$\int_x^\infty M_E(\xi)\xi^{-\alpha-1}\mathrm{d}\xi$$

na mocy Wniosku 1.3. szereg (3.3) jest zbieżny. Mamy ponadto, znów z Wniosku 1.3. oraz (3.4) i (3.5)

$$\sum_{n>x}\frac{\mu_E(n)}{n^\alpha} \ll M_E(x)x^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\alpha}g(x) \ll$$

$$x^{\frac{1}{2}-\alpha}g(x) + \frac{\alpha}{\alpha-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\alpha}g(x) \ll \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{1}{2}-\alpha}g(x), \quad \text{gdy } x \geq x_0,$$

dla pewnego $x_0 > x_1$ niezależnego od α. □

Lemat 3.5. *Niech $g \in \mathfrak{G}$. Wtedy dla η odpowiednio dużych mamy*

$$\sum_{n>\eta}\frac{g(n)}{n^{5/4}} \ll \eta^{-1/4}g(\eta).$$

Dowód. Dla η odpowiednio dużych mamy

$$\sum_{n>\eta}\frac{g(n)}{n^{5/4}} \ll \int_\eta^\infty \frac{g(\xi)}{\xi^{5/4}}\mathrm{d}\xi \ll \left|\int_\eta^\infty g(\xi)\mathrm{d}\xi^{-1/4}\right| = \left|g(\xi)\xi^{-1/4}\Big|_\eta^\infty - \int_\eta^\infty \xi^{-1/4}\mathrm{d}g(\xi)\right| \leq$$

$$\eta^{-1/4}g(\eta) - \lim_{\xi\to\infty}\xi^{-1/4}g(\xi) + \int_\eta^\infty \xi^{-1/4}\mathrm{d}g(\xi).$$

Z Lematu 3.1. wnosimy, że

$$\lim_{\xi\to\infty}\xi^{-1/4}g(\xi) = 0,$$

a z (2) mamy

$$\int_{\eta}^{\infty} \xi^{-1/4} \mathrm{d}g(\xi) \ll \int_{\eta}^{\infty} \xi^{-5/4} \mathrm{d}\xi .$$

Otrzymujemy zatem

$$\eta^{-1/4} g(\eta) + \int_{\eta}^{\infty} \xi^{-5/4} \mathrm{d}\xi \ll \eta^{-1/4} g(\eta) + \eta^{-1/4} \ll \eta^{-1/4} g(\eta).$$

□

Dla $x \geq 0$ kładziemy

$$K(n,x) := n^{-1/4} \left(e^{-i\left(\frac{2}{Q_E} \sqrt{\frac{x}{n}}\right)} - 1 \right)$$

oraz

$$J(n,x) := \Re K(n,x).$$

Lemat 3.6. *Niech $x \geq 1$. Wtedy dla każdego x szereg*

$$\sum_{n>x} \mu_E(n) J(n,x)$$

jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli ponadto spełnione jest założenie (3.2)*, to wtedy dla każdego $x \geq 1$ oraz dla każdego $b > 0$ szereg*

$$r_b(x) := \sum_{n>x} \mu_E(n) K(n, bx)$$

jest zbieżny oraz

$$r_b(x) \ll_b x^{1/4} g(x), \quad \text{dla } x \to \infty.$$

Dowód. Dla $n > x$ mamy $J(n,x) \ll \frac{x}{n^{5/4}}$ przy $n \to \infty$. Zatem

$$\sum_{n>x} |\mu_E(n)| J(n,x) \ll x \sum_{n>x} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{5/4}} \leq x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{5/4}} \ll x,$$

ponieważ ostatni szereg jest zbieżny na mocy Wniosku 2.5. Przyjmijmy teraz założenie (3.2). Kładziemy

$$r(x,\eta,N) := \sum_{\eta<n\leq N} \mu_E(n) K(n, bx), \quad \text{dla } \eta \geq x.$$

Ponieważ $r(x) = r(x,x,\infty)$ oraz $r(x,\eta,\infty)$ jest resztą szeregu $r_b(x)$, aby wykazać zbieżność $r_b(x)$ trzeba wykazać, że $r(x,\eta,\infty)$ istnieje i $r(x,\eta,\infty) \to 0$ dla $\eta \to \infty$. Z Lematu 1.4. wnosimy, że

$$|r(x,\eta,N)| \leq |M_E(N) - M_E(\eta)|\, |K(N,bx)| + \sum_{\eta<n\leq N-1} |M_E(n) - M_E(\eta)|\, |K(n,bx) - K(n+1,bx)| . \quad (3.6)$$

Ponieważ funkcja g jest monotonicznie rosnąca od pewnego miejsca, z założenia (3.2) otrzymujemy

$$|M_E(N)-M_E(\eta)|\leq |M_E(N)|+|M_E(\eta)|\ll \sqrt{N}g(N)$$

oraz

$$|M_E(n)-M_E(\eta)|\leq |M_E(n)|+|M_E(\eta)|\ll \sqrt{n}g(n).$$

Dla $x\leq N$ mamy, że $\frac{bx}{N}\ll 1$, a w konsekwencji

$$|K(N,bx)|=\left|N^{-1/4}\left(e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{N}}\right)}-1\right)\right|\ll_b \sqrt{x}N^{-3/4}.$$

Zatem

$$|M_E(N)-M_E(\eta)|\,|K(N,x)|\ll_b \sqrt{x}N^{-1/4}g(N).$$

Z Lematu 3.1. mamy, że, dla ustalonego x,

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1/4}g(N)=0.$$

Ponadto mamy

$$|K(n,bx)-K(n+1,bx)|=\left|\int_n^{n+1}\mathrm{d}K(\xi,bx)\right|=\left|\int_n^{n+1}\mathrm{d}\xi^{-1/4}\left(e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}-1\right)\right|=$$
$$\left|\int_n^{n+1}\left(e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}-1\right)\mathrm{d}\xi^{-1/4}+\int_n^{n+1}\xi^{-1/4}\mathrm{d}\left(e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}-1\right)\right|\ll_b$$
$$\int_n^{n+1}\left|e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}-1\right|\xi^{-5/4}\mathrm{d}\xi+x^{1/2}\int_n^{n+1}\left|e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}\right|\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi.$$

Ponieważ w powyższej formule mamy $x\leq\eta<n\leq\xi\leq n+1$, zatem $\frac{x}{\xi}\ll_b 1$, a w konsekwencji

$$\left|e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{bx}{\xi}}\right)}-1\right|\ll_b\sqrt{\frac{x}{\xi}}$$

i

$$|K(n,bx)-K(n+1,bx)|\ll_b\sqrt{x}\int_n^{n+1}\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi+\sqrt{x}\int_n^{n+1}\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi\ll_b\sqrt{x}\int_n^{n+1}\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi\ll_b\sqrt{x}n^{-7/4}.$$

Zatem

$$\sum_{\eta<n\leq N-1}|M_E(n)-M_E(\eta)|\,|K(n,bx)-K(n+1,bx)|\ll_b\sqrt{x}\sum_{\eta<n\leq N-1}\frac{g(n)}{n^{5/4}}\leq\sqrt{x}\sum_{n>\eta}\frac{g(n)}{n^{5/4}},$$

ponieważ funkcja g jest rosnąca od pewnego miejsca. Z Lematu 3.5. mamy, że

$$\sqrt{x}\sum_{n>\eta}\frac{g(n)}{n^{5/4}} \ll \sqrt{x}\eta^{-1/4}g(\eta).$$

Ostatecznie z (3.6) i Lematu 3.1.

$$r(x,\eta,N) \ll_b \sqrt{x}\eta^{-1/4}g(\eta).$$

Stąd ciąg $(r(x,x,n))_{n=x}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc szereg $r_b(x)$ jest zbieżny. Mamy też

$$r_b(x) = \lim_{N\to\infty} r(x,x,N) \ll_b \sqrt{x}x^{-1/4}g(x) = x^{1/4}g(x).$$

$\square$

3.2. Własności funkcji G_1

Dla $x \leq -1$ kładziemy

$$G_1(F,x) := -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\int_{i}^{-|x|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w, \qquad (3.7)$$

gdzie drogą całkowania jest prosty odcinek łączący $-|x|$ oraz i.

Lemat 3.7. *Niech $|\Im(w)| < \pi$. Wtedy*

$$\Re\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) > 0$$

i

$$\left|\Im\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\right| < \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{n}},$$

oraz

$$\arg\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{v}{2}.$$

Dowód. Przy powyższych oznaczeniach mamy

$$\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{n}}e^{-i\frac{v}{2}}.$$

Zatem

$$\Re\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{v}{2}\right) > 0$$

i

$$\left|\Im\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{n}}\left|\sin\left(\frac{v}{2}\right)\right| < \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{n}},$$

oraz

$$\arg\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{v}{2}.$$

□

Lemat 3.8. *Niech* $|\Im(w)|<\pi$. *Wtedy dla każdego* $n\geq 1$ *zachodzi następująca formuła*

$$\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}= \sum_{k=0}^{\infty}d_k\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}+\log\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}e_k\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}\right), \tag{3.8}$$

gdzie d_k *i* e_k *są takie jak w* (1.12) *oraz* (1.13). *W szczególności lewa strona jest funkcją całkowitą zmiennej* w.

Dowód. Mamy, że $\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\neq 0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ i dla każdego w. Z Lematu 1.19. podstawiając $z=\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}$ otrzymujemy formułę (3.8). □

Lemat 3.9. [24, cf. pp. 31-32] *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)$$

jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie dla $|\Im(w)|<\pi$.

Lemat 3.10. *Zachodzi następująca formuła*

$$G_1(F,x)=G_{11}(x)+G_{12}(x)+G_{13}(x),$$

gdzie

$$G_{11}(x):=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_{-\log n}^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w,$$

a droga całkowania jest całkowicie zawarta w osi rzeczywistej,

$$G_{12}(x):=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_{i}^{-\log n}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w,$$

gdzie droga całkowania jest prostym odcinkiem łączącym i *oraz* $-\log n$,

$$G_{13}(x):=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_{i}^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w.$$

Dowód. Na mocy Lematu 3.8. funkcja $\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)$ jest holomorficzna. Z Lematu 3.9. wiemy, że szereg w formule (3.7) jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie względem w, zatem zamieniamy kolejność sumowania i całkowania otrzymując

$$G_1(F,x) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_i^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w.$$

W powyższej formule rozbijamy sumowanie na dwie części, $n \le e^{|x|}$ oraz $n > e^{|x|}$, otrzymując

$$G_1(F,x) = G_{13}(x) + \\ -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_i^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w. \quad (3.9)$$

Ponieważ funkcja $\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)$ jest holomorficzna, zatem mamy

$$\int_i^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w = \\ \int_{l_n(i,x)}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w,$$

gdzie $l_n(i,x)$ jest złożone z dwóch odcinków, jednego łączącego i z punktem $-\log n$ oraz drugiego łączącego punkt $-\log n$ z $-|x|$. Suma po n w (3.9) jest skończona. W konsekwencji

$$-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_i^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w = \\ G_{12}(x)+G_{11}(x).$$

□

Lemat 3.11. *Przy założeniu* (3.2) *mamy*

$$G_{13}(x) = \mathrm{O}\left(g(e^{|x|})\right), \quad \text{gdy } |x|\to\infty.$$

Dowód. Korzystając z formuły (3.8) otrzymujemy

$$G_{13}(x) = -\frac{1}{2\omega_E Q_E} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_i^{-|x|} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} + \right.$$
$$\left. \log\left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \right) \right) e^{-w} \mathrm{d}w.$$

Na mocy Lematu 1.19. szeregi po k w powyższej formule są zbieżne bezwzględnie dla każdego n i w, jednostajnie względem n i niemal jednostajnie względem w. Kładziemy

$$A_1(x) := -\frac{1}{2\omega_E Q_E} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_i^{-|x|} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \right) e^{-w} \mathrm{d}w$$

oraz

$$B_1(x) := -\frac{1}{2\omega_E Q_E} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_i^{-|x|} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \right) \log\left(\frac{2}{Q_E} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right) e^{-w} \mathrm{d}w.$$

Jeżeli szeregi A_1 i B_1 są zbieżne, to

$$G_{13}(x) = A_1(x) + B_1(x).$$

Ponieważ suma po k w definicji A_1 jest zbieżna bezwzględnie jednostajne względem w na drodze całkowania (dla ustalonego x), z Lematu 1.8. możemy zamienić kolejność sumowania po k i całkowania otrzymując formalnie

$$A_1(x) = -\frac{1}{2\omega_E Q_E} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w.$$

Mamy

$$d_k \left(\frac{2}{Q_E} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w = \frac{d_k}{(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{2}{Q_E} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \left(e^{(k+3/2)|x|} - e^{-(k+3/2)i} \right).$$

Ponieważ dla $n > e^{|x|}$ mamy

$$\left| \frac{2}{Q_E} \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{2k} < \left(\frac{4}{Q_E^2} \right)^k e^{-k|x|} \tag{3.10}$$

oraz

$$\sum_{n>e^{|x|}} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \ll 1, \tag{3.11}$$

korzystając z Wniosku 1.21 mamy

$$e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|d_k|}{(k+\frac{3}{2})}\left|\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}\left|e^{-(k+3/2)i}\right|\ll$$

$$e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|d_k|}{(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{4}{\mathrm{Q_E^2}}\right)^{k}\ll e^{-|x|/2},\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \quad (3.12)$$

Dla $n>e^{|x|}$ na mocy Wniosku (1.21) oraz (3.10) i (3.11) mamy

$$e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|d_k|}{(k+\frac{3}{2})}\left|\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|d_k|}{(k+\frac{3}{2})}\left|\frac{4}{\mathrm{Q_E^2}}\right|^{k}e^{-k|x|}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$e^{|x|}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}<e^{|x|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}<e^{|x|},\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \quad (3.13)$$

Zatem

$$A_{11}(x):=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}$$

oraz

$$A_{12}(x):=\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-(k+3/2)i}$$

są zbieżne bezwzględnie, stąd zbieżne jest także

$$A_1=A_{11}+A_{12},$$

a w konsekwencji B_1 ponieważ $B_1=G_{13}-A_1$. Z (3.12) mamy

$$A_{12}(x)\ll e^{-|x|/2},\quad \text{gdy } |x|\to\infty,$$

zatem aby oszacować A_1 wystarczy oszacować A_{11}. Ponieważ zachodzi (3.13) zatem z Lematu 1.7. możemy zamienić kolejność sumowania po k i n w formule na A_{11} otrzymując

$$A_{11}(x)=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{k+3/2}}.$$

Ponieważ zachodzi (3.2) zatem na mocy Lematu 3.4. mamy

$$\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{k+3/2}}\ll\left|\frac{k+\frac{5}{2}}{k+1}\right|g\left(e^{|x|}\right)\left(e^{|x|}\right)^{-k-1}\ll g\left(e^{|x|}\right)\left(e^{|x|}\right)^{-k-1},\quad \text{gdy } x\geq x_0,$$

przy czym x_0 oraz stała w symbolu Winogradowa są niezależne od k. Zatem korzystając z Wniosku 1.21 otrzymujemy

$$A_{11}(x) \ll e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \right| \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \right)^{2k+1} e^{(k+3/2)|x|} e^{-(k+1)|x|} g\left(e^{|x|}\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \right| \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \right)^{2k+1} g\left(e^{|x|}\right) \ll \exp\left(\frac{4}{\mathrm{Q_E^2}} \right) g\left(e^{|x|}\right) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$A_1(x) = A_{11}(x) + A_{12}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right) + e^{-|x|/2} \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty.$$

Ponieważ w B_1 szereg po k jest zbieżny bezwzględnie dla każdego n i w, jednostajnie względem n i niemal jednostajnie względem w, zatem na mocy Lematu 1.8. zamieniamy w B_1 kolejność sumowania po k i całkowania otrzymując

$$B_1(x) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}} e^{-|x|/2} \sum_{n > e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} \log\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right) e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w.$$

Mamy

$$\int_i^{-|x|} \log\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right) e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w = \log\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \right) \int_i^{-|x|} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w - \frac{1}{2} \int_i^{-|x|} \log(ne^w) e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w.$$

Kładziemy

$$B_{11}(x) := -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}} \log\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \right) e^{-|x|/2} \sum_{n > e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w$$

oraz

$$B_{12}(x) := \frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}} e^{-|x|/2} \sum_{n > e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} e^{-(k+3/2)w} \log(ne^w) \mathrm{d}w.$$

Rozumując analogicznie jak w przypadku A_1 otrzymujemy, że B_{11} jest zbieżne (tzn. zbieżne są szereg wewnętrzny po k i zewnętrzny po n) oraz

$$B_{11}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty. \tag{3.14}$$

Stąd otrzymujemy zbieżność B_{12} i tożsamość $B_1 = B_{11} + B_{12}$. Mamy

$$\int_i^{-|x|} e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \log(ne^w) \mathrm{d}w = -\left(\frac{e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \log(ne^w)}{\left(k+\frac{3}{2}\right)} \Bigg|_i^{-|x|} \right) + \int_i^{-|x|} e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \mathrm{d}w.$$

Dalej kładziemy

$$B_{121}(x) := -\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \left(\frac{e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \log(ne^w)}{\left(k+\frac{3}{2}\right)} \Bigg|_i^{-|x|} \right)$$

oraz

$$B_{122}(x) := \frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{\left(k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \int_i^{-|x|} e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \mathrm{d}w.$$

Znów rozumując analogicznie jak w przypadkach B_{11} oraz A_1 otrzymujemy, że szereg B_{122} jest zbieżny oraz

$$B_{122}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty. \tag{3.15}$$

Stąd także B_{121} jest zbieżny i mamy $B_{12} = B_{121} + B_{122}$, oraz

$$B_{121}(x) = \frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} \cdot$$
$$\left(e^{(k+3/2)|x|} \log\left(ne^{-|x|}\right) - e^{-(k+3/2)i} \log\left(ne^i\right) \right).$$

Rozumując analogicznie jak w przypadku funkcji A_{12} otrzymujemy

$$\frac{i}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2k+1} e^{-(k+3/2)i} \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{gdy } |x| \to \infty.$$

Ponieważ dla $n > e^{|x|}$ mamy (3.10) oraz

$$\sum_{n>e^{|x|}} \frac{|\mu_E(n)| \log n}{n^{3/2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)| \log n}{n^{3/2}} \ll 1 \tag{3.16}$$

zatem z Wniosku 1.21 mamy

$$e^{-|x|/2} \sum_{n>e^{|x|}} \frac{|\mu_E(n)| \log n}{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}} \left| \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{2k} \left| e^{-(k+3/2)i} \right| \ll$$
$$e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \right| \left| \frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{2k} \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{gdy } |x| \to \infty.$$

W konsekwencji mamy

$$\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-(k+3/2)i}\log\left(ne^{i}\right)=$$

$$\frac{i}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-(k+3/2)i}+$$

$$\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)\log n}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-(k+3/2)i}$$

oraz

$$B_{121}(x)=\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}\log\left(ne^{-|x|}\right)+ \mathrm{O}(e^{-|x|/2}),\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \tag{3.17}$$

Dla $n>e^{|x|}$ stosując Wniosek 1.21 oraz (3.10) i (3.16) mamy

$$e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|\log n}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}}\left|\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\right|\left|\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{(k+3/2)|x|}\ll e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k}e^{-k|x|}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k}e^{(3/2)|x|}\ll e^{|x|},\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \tag{3.18}$$

Podobnie stosując Wniosek 1.21 oraz (3.10) i (3.11) otrzymujemy

$$|x|e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}}\left|\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$|x|e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\right|\left|\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$|x|e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k}e^{-k|x|}e^{(k+3/2)|x|}\ll$$

$$|x|e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k}e^{(3/2)|x|}\ll |x|e^{|x|},\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \tag{3.19}$$

W konsekwencji mamy

$$\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}\log\left(ne^{-|x|}\right)=$$
$$\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}\log(n)+$$
$$\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{(k+3/2)|x|}\log\left(e^{-|x|}\right).$$

Dalej, znów z (3.18) i (3.19), możemy na mocy Lematu 1.7. zamienić w (3.17) kolejność sumowania po n i k otrzymując

$$B_{121}(x)=\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k+1}e^{\left(k+\frac{3}{2}\right)|x|}\sum_{n>e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{k+3/2}}\log\left(ne^{-|x|}\right)+$$
$$\mathrm{O}(e^{-|x|/2}),\quad \text{gdy } |x|\to\infty. \tag{3.20}$$

Dla oszacowania sumy wewnętrznej w (3.20) wykażemy teraz, że całka

$$\int_{e^{|x|}}^{\infty}\mathrm{M}_E(\xi)\,\mathrm{d}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right) \tag{3.21}$$

jest zbieżna i oszacujemy ją. Ponieważ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)=\xi^{-\left(k+\frac{5}{2}\right)}\left(1-\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)$$

z założenia (3.2) mamy

$$\int_{e^{|x|}}^{\infty}\left|\mathrm{M}_E(\xi)\,\mathrm{d}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\right|\ll\int_{e^{|x|}}^{\infty}g(\xi)\xi^{-(k+2)}\left(1+\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\mathrm{d}\xi,\quad \text{gdy } |x|\to\infty.$$

Z Lematu 3.1. otrzymujemy

$$\int_{e^{|x|}}^{\infty}g(\xi)\xi^{-(k+2)}\left(1+\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\mathrm{d}\xi\leq\frac{g(e^{|x|})}{\left(e^{|x|}\right)^{1/2}}\int_{e^{|x|}}^{\infty}\xi^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(1+\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\mathrm{d}\xi$$

dla x dostatecznie dużych. Mamy

$$\frac{g\left(e^{|x|}\right)}{\sqrt{e^{|x|}}}\int_{e^{|x|}}^{\infty}\xi^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(1+\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\mathrm{d}\xi =$$

$$\frac{g\left(e^{|x|}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{e^{|x|}}}\left|\int_{e^{|x|}}^{\infty}\left(1+\left(k+\frac{3}{2}\right)\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\mathrm{d}\xi^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right| \leq$$

$$\frac{g\left(e^{|x|}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{e^{|x|}}}\left|\int_{e^{|x|}}^{\infty}\mathrm{d}\xi^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\left(k+\frac{3}{2}\right)\int_{e^{|x|}}^{\infty}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\mathrm{d}\xi^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right| =$$

$$\frac{g\left(e^{|x|}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{e^{|x|}}}\left|\lim_{\xi\to\infty}\xi^{-k-1/2}-\left(e^{-|x|\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right)+\left(k+\frac{3}{2}\right)\int_{e^{|x|}}^{\infty}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\mathrm{d}\xi^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right| \leq$$

$$\frac{g\left(e^{|x|}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{e^{|x|}}}\left(\left(e^{-|x|\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right)+\left(k+\frac{3}{2}\right)\left|\int_{e^{|x|}}^{\infty}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\mathrm{d}\xi^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right|\right).$$

Ponadto mamy

$$\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}\left|\int_{e^{|x|}}^{\infty}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\mathrm{d}\xi^{-k-\frac{1}{2}}\right| =$$

$$\left|\left(\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}\,\frac{\log\left(\xi e^{-|x|}\right)}{\xi^{k+\frac{1}{2}}}\Bigg|_{e^{|x|}}^{\infty}\right)-\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}\int_{e^{|x|}}^{\infty}\xi^{-k-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right| =$$

$$\left|\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}\frac{\log 1}{e^{|x|\left(k+\frac{1}{2}\right)}}+\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}\int_{e^{|x|}}^{\infty}\xi^{-k-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\xi\right| = \frac{k+\frac{3}{2}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-|x|\left(k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Mamy zatem

$$\int_{e^{|x|}}^{\infty}\left|\mathrm{M}_E(\xi)\,\mathrm{d}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right)\right| \ll \left(\frac{2k+2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right)g\left(e^{|x|}\right)e^{-|x|(k+1)}, \quad \text{gdy} \quad |x|\to\infty,$$

w szczególności całka (3.21) jest zbieżna. Stosując Wniosek 1.3. otrzymujemy

$$\sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n^{k+\frac{3}{2}}} \log\left(ne^{-|x|}\right) =$$
$$-\log(1)\mathrm{M}_E\left(e^{|x|}\right)\left(e^{|x|}\right)^{-k-\frac{3}{2}} - \int_{e^{|x|}}^{\infty} \mathrm{M}_E(\xi)\,\mathrm{d}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right) =$$
$$-\int_{e^{|x|}}^{\infty} \mathrm{M}_E(\xi)\,\mathrm{d}\left(\xi^{-k-\frac{3}{2}}\log\left(\xi e^{-|x|}\right)\right),$$

zatem

$$\sum_{n>e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n^{k+\frac{3}{2}}} \log\left(ne^{-|x|}\right) \ll \left(\frac{2k+2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right) \frac{g\left(e^{|x|}\right)}{e^{|x|(k+1)}} \ll \frac{g\left(e^{|x|}\right)}{e^{|x|(k+1)}}, \quad \text{gdy } |x| \to \infty,$$

gdzie stałe w symbolu Winogradowa są niezależne od k. W konsekwencji podstawiając powyższe oszacowanie do formuły (3.20) otrzymujemy

$$B_{121}(x) \ll e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\right)^{2k+1} e^{\left(k+\frac{3}{2}\right)|x|} \frac{g\left(e^{|x|}\right)}{e^{|x|(k+1)}} \ll$$
$$g\left(e^{|x|}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\right)^{2k+1} \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty. \tag{3.22}$$

Dalej z (3.15) i (3.22) mamy

$$B_{12}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty. \tag{3.23}$$

W konsekwencji z oszacowań (3.14) i (3.23)

$$B_1(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty.$$

□

Lemat 3.12. *Niech zachodzi* (3.2). *Mamy wtedy*

$$G_{12}(x) = \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right) \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Dowód. Mamy z definicji

$$G_{12}(x) = -\frac{1}{2\omega_\mathrm{E}\mathrm{Q_E}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_{i}^{-\log n} \left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right) e^{-w}\,\mathrm{d}w.$$

Korzystając z formuły (3.8) mamy

$$G_{12}(x)=-\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\cdot$$
$$\int_i^{-\log n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}+\log\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w. \quad (3.24)$$

Na mocy Lematu 1.19. szeregi po k w formule (3.24) są zbieżne bezwzględnie jednostajnie względem n i niemal jednostajnie względem w. Mamy

$$G_{12}(x)=A_2(x)+B_2(x),$$

gdzie

$$A_2(x):=-\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_i^{-\log n}\sum_{k=0}^{\infty}d_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-w}\mathrm{d}w$$

oraz

$$B_2(x):=-\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_i^{-\log n}\log\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-w}\mathrm{d}w.$$

Zauważmy najpierw, że dla ustalonego n w powyższych formułach zmienna w przebiega zbiór zwarty. Zatem niemal jednostajna zbieżność szeregów po k implikuje ich jednostajną zbieżność na drodze całkowania dla ustalonego n. Zatem na mocy Lematu 1.8. zmieniamy kolejność sumowania po k i całkowania otrzymując

$$A_2(x)=-\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}d_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}\int_i^{-\log n}e^{-(k+\frac{3}{2})w}\mathrm{d}w$$

i

$$B_2(x)=-\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}e_k\left(\frac{2}{Q_E}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}\int_i^{-\log n}\log\left(\frac{2}{Q_E}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)e^{-(k+\frac{3}{2})w}\mathrm{d}w.$$

Mamy

$$\int_i^{-\log n}e^{-(k+\frac{3}{2})w}\mathrm{d}w=\frac{1}{(k+\frac{3}{2})}\left(e^{-i(k+\frac{3}{2})}-n^{k+\frac{3}{2}}\right).$$

Kładziemy formalnie

$$A_{21}(x):=\frac{1}{2\omega_E Q_E}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{Q_E}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}n^{k+\frac{3}{2}}$$

$$A_{22}(x) := -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Mamy

$$\sum_{n \le e^{|x|}} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \ll 1,$$

a zatem, ponieważ $1/\sqrt{n} < 1$, korzystając Wniosku 1.21 otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d_k|}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k} \ll \\ e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d_k|}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k} \ll \\ e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k} \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{dla } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

W konsekwencji A_{22} jest zbieżne, zatem A_{21} jest zbieżne i zachodzi tożsamość $A_2 = A_{21} + A_{22}$. Ponadto otrzymujemy oszacowanie

$$A_{22}(x) \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Dla A_{21} mamy

$$\begin{aligned} A_{21}(x) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} n^{k+\frac{3}{2}} = \\ -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} (\sqrt{n})^{2k+3} = \\ -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \mu_E(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k+1} = \\ -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k+1} \sum_{n \le e^{|x|}} \mu_E(n). \end{aligned}$$

Korzystając z założenia (3.2) oraz Wniosku 1.21 otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k+1} \sum_{n \le e^{|x|}} \mu_E(n) \ll \\ e^{-|x|/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|d_k|}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right)^{2k+1} e^{|x|/2} g\left(e^{|x|}\right) \ll \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\right)^{k} g\left(e^{|x|}\right) \ll g\left(e^{|x|}\right) \quad \text{dla } |x| \to \infty, \end{aligned}$$

zatem

$$A_{21}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$A_2 \ll e^{-|x|/2} + g\left(e^{|x|}\right) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy teraz oszacować B_2. Kładziemy formalnie

$$B_{21}(x) := -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \log\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\right) e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} \int_i^{-\log n} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}w$$

oraz

$$B_{22}(x) := \frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} \int_i^{-\log n} e^{-(k+3/2)w} \log(ne^w) \mathrm{d}w.$$

Rozumując analogicznie jak w przypadku A_2 otrzymujemy, że B_{21} jest zbieżne i spełnia

$$B_{21}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Stąd otrzymujemy, że B_{22} jest zbieżne oraz, że zachodzi tożsamość $B_2 = B_{21} + B_{22}$. Mamy

$$\int_i^{-\log n} e^{-(k+3/2)w} \log(ne^w) \mathrm{d}w = -\frac{1}{k+\frac{3}{2}} \left(e^{-(k+3/2)w} \log(ne^w) \Big|_i^{-\log n} - \int_i^{-\log n} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}\log(ne^w) \right).$$

Dalej kładziemy formalnie

$$B_{221}(x) := -\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} \left(e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \log(ne^w) \Big|_i^{-\log n} \right)$$

oraz

$$B_{222}(x) := \frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{k+\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1} \left(\int_i^{-\log n} e^{-(k+3/2)w} \mathrm{d}\log(ne^w) \right).$$

Ponieważ

$$\int_i^{-\log n} e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \mathrm{d}\log(ne^w) = \int_i^{-\log n} e^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)w} \mathrm{d}w,$$

zatem rozumując analogicznie jak w przypadku A_2 otrzymujemy, że B_{222} jest zbieżne oraz zachodzi tożsamość $B_{22} = B_{221} + B_{222}$, a w konsekwencji wobec zbieżności B_{22} otrzymujemy, że B_{221} jest zbieżne. Ponadto mamy

$$B_{222}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Z Lematu 1.19. mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}\right| \ll \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{4}{\mathrm{Q_E^2}}\right)^{k} \ll 1,$$

gdzie stała w symbolu Winogradowa jest niezależna od n. Stąd mamy

$$B_{221}(x)=\frac{1}{4\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}\log\left(ne^{i}\right)=$$
$$\frac{1}{2\omega_E \mathrm{Q}_E^2}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)\log n}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}+$$
$$\frac{i}{2\omega_E \mathrm{Q}_E^2}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Ponadto z Wniosku 2.5. mamy

$$\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|\log n}{n^{3/2}} \ll \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|\log n}{n^{3/2}} \ll 1$$

oraz

$$\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \ll \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \ll 1,$$

a zatem

$$\frac{1}{2\omega_E \mathrm{Q}_E^2}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)\log n}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k}e^{-i(k+3/2)} \ll$$
$$e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|\log n}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}}\left|\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}\left|e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)}\right| \ll e^{-|x|/2} \quad \text{dla } |x|\to\infty$$

i

$$\frac{i}{2\omega_E \mathrm{Q}_E^2}e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)} \ll$$
$$e^{-|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{|\mu_E(n)|\log n}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|e_k|}{k+\frac{3}{2}}\left|\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^{2k}e^{-i\left(k+\frac{3}{2}\right)} \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

W konsekwencji

$$B_{221}(x) \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{dla } |x|\to\infty,$$

dalej

$$B_{22}(x) \ll e^{-|x|/2}+g\left(e^{|x|}\right) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x|\to\infty$$

oraz

$$B_2(x) \ll g\left(e^{|x|}\right) + g\left(e^{|x|}\right) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

□

Lemat 3.13. *Niech zachodzi* (3.2). *Zachodzi wtedy następująca formuła asymptotyczna*

$$G_1(F,x) = G_{11}(x) + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right), \quad \textit{dla } |x| \to \infty.$$

Dowód. Na mocy Lematu 3.10. mamy

$$G_1(F,x) = G_{11}(x) + G_{12}(x) + G_{13}(x).$$

Na mocy Lematów 3.11. i 3.12. mamy

$$G_{13}(x) = \mathrm{O}\left(g(e^{|x|})\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty$$

i

$$G_{12}(x) = \mathrm{O}\left(g(e^{|x|})\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty$$

odpowiednio i otrzymujemy tezę. □

Lemat 3.14. *Zachodzi następująca formuła*

$$G_{11}(x) = P(x) + T(x) + \mathrm{Er}(x),$$

gdzie

$$P(x) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\sqrt{\pi \mathrm{Q}_E}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_{-\log n}^{-|x|} (ne^{w})^{\frac{1}{4}}\, e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} - \frac{3}{4}\pi\right)} e^{-w}\,\mathrm{d}w \tag{3.25}$$

i

$$\mathrm{Er}(x) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\sqrt{\pi \mathrm{Q}_E}} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n} \int_{-\log n}^{-|x|} (ne^{w})^{\frac{1}{4}}\, h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} - \frac{3}{4}\pi\right)} e^{-w}\,\mathrm{d}w, \tag{3.26}$$

i

$$T(x) = \frac{i}{2\pi\omega_E} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\log n}^{-|x|} e^{-\frac{w}{2}}\,\mathrm{d}w, \tag{3.27}$$

gdzie $h_1^{(2)}$ jest funkcją z Wniosku 1.24.

Dowód. Z definicji G_{11} mamy

$$G_{11}(x)=-\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int\limits_{-\log n}^{-|x|}\left(\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)e^{-w}\mathrm{d}w.$$

Dla $w\in[-|x|,-\log n]$ mamy

$$\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\ge\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}>0.$$

Zatem z Wniosku 1.24. mamy

$$\mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}=$$
$$\left(\frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}{\pi}\sqrt{ne^{w}}\right)^{1/2}e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}-\frac{3}{4}\pi\right)}\left(1+h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)\right)-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}.\quad(3.28)$$

Podstawiając (3.28) do definicji G_{11} otrzymujemy tezę. □

Lemat 3.15. *Niech zachodzi* (3.2). *Wtedy dla funkcji P zachodzi następująca formuła asymptotyczna*

$$P(x)=\mathrm{C}e^{-|x|/4}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}e^{-i\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}+\mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right),$$

dla $x\to\infty$, gdzie $\mathrm{C}=\frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}}{2\omega_E}\sqrt{\frac{Q_E}{\pi}}$.

Dowód. W formule (3.25) podstawiając

$$\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{1}{ne^{w}}=\eta$$
$$-\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{1}{ne^{w}}\mathrm{d}w=\mathrm{d}\eta$$

otrzymujemy

$$P(x)=\frac{1}{2\omega_E\sqrt{\pi\mathrm{Q}_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int\limits_{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}}^{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{e^{|x|}}{n}}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_E^2\eta}\right)^{1/4}e^{-i\left(\sqrt{\eta}-\frac{3}{4}\pi\right)}\left(\frac{\mathrm{Q}_E^2\eta n}{4}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta}=$$
$$\mathrm{C}_1e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\int\limits_{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}}^{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{e^{|x|}}{n}}\eta^{-1/4}e^{-i\sqrt{\eta}}\mathrm{d}\eta,$$

gdzie $C_1=\frac{Q_E}{8\omega_E}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{i\pi\frac{3}{4}}$. Podstawiając dalej

$$\eta=\xi^2$$
$$d\eta=2\xi\, d\xi$$

otrzymujemy

$$P(x)=C_2e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\int_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\sqrt{\xi}e^{-i\xi}\, d\xi, \tag{3.33}$$

gdzie $C_2=\frac{Q_E}{4\omega_E}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{i\pi\frac{3}{4}}$. Kładąc

$$P(x,n):=\int_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{-i\xi}\, d\xi$$

mamy

$$\int_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\sqrt{\xi}e^{-i\xi}\, d\xi=i\int_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\sqrt{\xi}\, de^{-i\xi}=i\left(\sqrt{\xi}e^{-i\xi}\Big|_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}-\frac{1}{2}P(x,n)\right),$$

zatem formułę (3.33) możemy zapisać

$$P(x)=iC_2e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\left(\sqrt{\xi}e^{-i\xi}\Big|_{\frac{2}{Q_E}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\right)-$$
$$\frac{i}{2}C_2e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)P(x,n)=:P_1(x)+P_2(x).$$

Obliczając P_1 otrzymujemy

$$P_1(x)=Ce^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\left(\left(\frac{e^{|x|}}{n}\right)^{1/4}e^{-i\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}-e^{-i\left(\frac{2}{Q_E}\right)}\right)=$$
$$Ce^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\left(\frac{e^{|x|}}{n}\right)^{1/4}e^{-i\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}-e^{-i\left(\frac{2}{Q_E}\right)}Ce^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)=:P_{11}(x)+P_{12}(x).$$

Przy założeniu (3.2) mamy

$$P_{12}(x)\ll e^{-|x|/2}\left|\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\right|\ll g\left(e^{|x|}\right),\quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Mamy zatem

$$P_1(x)=Ce^{-|x|/4}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}e^{-i\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}+O\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).$$

Dalej mamy

$$P_2(x) \ll e^{-|x|/2} \left| \sum_{n \le e^{|x|}} \mu_E(n) P(x,n) \right|.$$

Przy założeniu (3.2) korzystając z Lematu 1.4. otrzymujemy

$$P_2(x) \ll e^{-|x|/2} \left(\left| M_E\left(e^{|x|}\right) P\left(x, \lfloor e^{|x|} \rfloor\right) \right| + \sum_{n \le \lfloor e^{|x|} \rfloor - 1} |M_E(n)| \, |P(x,n+1) - P(x,n)| \right) \ll$$
$$e^{-|x|/2} \left(e^{|x|/2} g\left(e^{|x|}\right) \left| P\left(x, \lfloor e^{|x|} \rfloor\right) \right| + \sum_{n \le \lfloor e^{|x|} \rfloor - 1} \sqrt{n} g(n) |P(x,n+1) - P(x,n)| \right).$$

Z definicji $P(x,n)$ mamy

$$P\left(x, \lfloor e^{|x|} \rfloor\right) = \mathrm{O}(1),$$

a zatem

$$P_2(x) \ll e^{-|x|/2} \sum_{n \le \lfloor e^{|x|} \rfloor - 1} \sqrt{n} g(n) |P(x,n+1) - P(x,n)| + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty,$$

gdzie

$$|P(x,n+1) - P(x,n)| = \left| \int_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-1/2} e^{-i\xi} \, \mathrm{d}\xi \right|.$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\left| \int_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-1/2} e^{-i\xi} \, \mathrm{d}\xi \right| \le \left| \xi^{-1/2} e^{-i\xi} \Big|_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-3/2} e^{-i\xi} \, \mathrm{d}\xi \right|. \tag{3.34}$$

Szacując pierwszy składnik sumy (3.34) otrzymujemy

$$\left| \xi^{-1/2} e^{-i\xi} \Big|_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \right| = \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \right)^{-1/2} e^{-|x|/4} \left| \int_{n+1}^{n} \mathrm{d}\xi^{1/4} e^{-i \frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} \right| \ll$$
$$e^{-|x|/4} \left| \int_{n+1}^{n} \xi^{-3/4} e^{-i \frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} \mathrm{d}\xi \right| + e^{|x|/4} \left| \int_{n+1}^{n} \xi^{-5/4} e^{-i \frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} \mathrm{d}\xi \right| \ll$$
$$e^{-|x|/4} n^{-3/4} + e^{|x|/4} n^{-5/4}, \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Drugi składnik szacujemy przy użyciu nierówności Cauchy'ego–Schwartza

$$\left|\int_{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-3/2}e^{-i\xi}\,\mathrm{d}\xi\right| \le \int_{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-3/2}\mathrm{d}\xi \le \left(\int_{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \xi^{-3}\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\left(\int_{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \mathrm{d}\xi\right)^{1/2} \ll$$

$$\left|e^{-|x|}n - e^{-|x|}(n+1)\right|^{1/2}\left(e^{|x|/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)^{1/2} \ll$$

$$e^{-|x|/2}e^{|x|/4}n^{-3/4} = e^{-|x|/4}n^{-3/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Otrzymujemy zatem następujące oszacowanie

$$e^{-|x|/2}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\sqrt{n}\,g(n)\,|P(x,n+1)-P(x,n)| \ll$$

$$e^{-|x|/2}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\sqrt{n}\,g(n)\left(e^{-|x|/4}n^{-3/4}+e^{|x|/4}n^{-5/4}\right) \ll$$

$$e^{-\frac{3}{4}|x|}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{g(n)}{n^{1/4}} + e^{-|x|/4}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{g(n)}{n^{3/4}}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Ponieważ funkcja g jest monotonicznie rosnąca od pewnego miejsca, zatem dla odpowiednio dużych $|x|$ mamy

$$e^{-\frac{3}{4}|x|}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{g(n)}{n^{1/4}} + e^{-|x|/4}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{g(n)}{n^{3/4}} \ll$$

$$e^{-\frac{3}{4}|x|}g\left(e^{|x|}\right)\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{1}{n^{1/4}} + e^{-|x|/4}g\left(e^{|x|}\right)\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\frac{1}{n^{3/4}} \ll$$

$$e^{-\frac{3}{4}|x|}g\left(e^{|x|}\right)e^{\frac{3}{4}|x|} + e^{-|x|/4}g\left(e^{|x|}\right)e^{|x|/4} \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Ostatecznie

$$P_2(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

□

Lemat 3.16. *Niech zachodzi* (3.2)*. Wtedy dla funkcji* Er *mamy*

$$\mathrm{Er}(x) \ll g\left(e^{|x|}\right)$$

dla $|x|\to\infty$.

Dowód. W formule (3.26) podstawiając

$$\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{1}{ne^w}=\eta$$
$$-\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{1}{ne^w}\mathrm{d}w=\mathrm{d}\eta$$

otrzymujemy

$$\mathrm{Er}(x)=\frac{1}{2\omega_E\sqrt{\pi\mathrm{Q}_E}}e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n}\int_{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}}^{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{e^{|x|}}{n}}\left(\frac{4}{\mathrm{Q}_E^2\eta}\right)^{1/4}h_1^{(2)}\left(\sqrt{\eta}\right)e^{-i\left(\sqrt{\eta}-\frac{3}{4}\pi\right)}\left(\frac{\mathrm{Q}_E^2\eta n}{4}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta}=$$
$$\mathrm{C}_3e^{-|x|/2}\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)\int_{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}}^{\frac{4}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}^2}\frac{e^{|x|}}{n}}\eta^{-1/4}h_1^{(2)}\left(\sqrt{\eta}\right)e^{-i\sqrt{\eta}}\mathrm{d}\eta,$$

gdzie $\mathrm{C}_3=\frac{\mathrm{Q}_E}{8\omega_E}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{i\frac{3}{4}\pi}$. Podstawiając w powyższej formule

$$\eta=\xi^2$$
$$\mathrm{d}\eta=2\xi\,\mathrm{d}\xi$$

otrzymujemy

$$\mathrm{Er}(x)\ll e^{-|x|/2}\left|\sum_{n\le e^{|x|}}\mu_E(n)R(x,n)\right|,$$

gdzie

$$R(x,n):=\int_{\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}}\sqrt{\xi}\,h_1^{(2)}(\xi)e^{-i\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Przy założeniu (3.2) z Lematu 1.4. otrzymujemy

$$\mathrm{Er}(x)\ll e^{-|x|/2}\left(\left|M_E\left(e^{|x|}\right)R\left(x,\lfloor e^{|x|}\rfloor\right)\right|+\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}|M_E(n)|\,|R(x,n+1)-R(x,n)|\right)\ll$$
$$e^{-|x|/2}\left(\sqrt{e^{|x|}}g\left(e^{|x|}\right)\left|R\left(x,\lfloor e^{|x|}\rfloor\right)\right|+\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\sqrt{n}g(n)|R(x,n+1)-R(x,n)|\right),\quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Z definicji $R(x,n)$ mamy

$$R\left(x,\lfloor e^{|x|}\rfloor\right)=\mathrm{O}(1),$$

a zatem

$$\mathrm{Er}(x) \ll e^{-|x|/2} \sum_{n \le \lfloor e^{|x|} \rfloor - 1} \sqrt{n}\, g(n) |R(x,n+1) - R(x,n)| + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty, \tag{3.39}$$

gdzie

$$|R(x,n+1) - R(x,n)| = \left| \int\limits_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi) e^{-i\xi} \mathrm{d}\xi \right|. \tag{3.40}$$

Zatem aby oszacować (3.39) wystarczy oszacować (3.40). Całkując przez części otrzymujemy

$$\left| \int\limits_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi) e^{-i\xi} \mathrm{d}\xi \right| = \left| \int\limits_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi) \mathrm{d}e^{-i\xi} \right| \le$$

$$\left| \sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi) e^{-i\xi} \Big|_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \right| + \left| \int\limits_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} e^{-i\xi} \mathrm{d}\left(\sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi)\right) \right|. \tag{3.41}$$

Pierwszy składnik powyższej sumy, podstawiając $\xi = \frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}$, możemy przedstawić w postaci

$$\left| \sqrt{\xi}\, h_1^{(2)}(\xi) e^{-i\xi} \Big|_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \right| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}} e^{|x|/4} \left| \int\limits_{n+1}^{n} \mathrm{d}\xi^{-1/4} h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right) e^{-i\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} \right|. \tag{3.42}$$

Ponieważ

$$\mathrm{d}\xi^{-1/4} h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right) e^{-i\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} =$$

$$-e^{-i\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}} \left(\frac{1}{4}\xi^{-5/4} h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\mathrm{Q}_E}\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\sqrt{e^{|x|}}\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi + \right.$$

$$\left. \frac{i}{\mathrm{Q}_E} h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\sqrt{e^{|x|}}\xi^{-7/4}\mathrm{d}\xi \right),$$

zatem (3.42) jest oszacowane przez

$$e^{|x|/4}\int_n^{n+1}\xi^{-5/4}\left|h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\right|\mathrm{d}\xi+ \\ e^{\frac{3}{4}|x|}\int_n^{n+1}\xi^{-7/4}\left|\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\right|\mathrm{d}\xi+ \\ e^{\frac{3}{4}|x|}\int_n^{n+1}\xi^{-7/4}\left|h_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}}\right)\right|\mathrm{d}\xi. \quad (3.43)$$

Ponieważ $\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\xi}} \geq \frac{1}{\mathrm{Q}_E}$ dla $n \leq e^{|x|}$, na mocy Wniosku 1.24. i Wniosku 1.25. szacujemy funkcje $h_1^{(2)}$ i $\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\xi}$ w (3.43) otrzymując

$$e^{-|x|/4}\int_n^{n+1}\xi^{-3/4}\mathrm{d}\xi+e^{-|x|/4}\int_n^{n+1}\xi^{-3/4}\mathrm{d}\xi+e^{|x|/4}\int_n^{n+1}\xi^{-5/4}\mathrm{d}\xi \ll e^{-|x|/4}n^{-3/4}+e^{|x|/4}n^{-5/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty,$$

gdzie $n \leq e^{|x|}$, a w konsekwencji dostajemy oszacowanie pierwszego składnika prawej strony (3.41)

$$\sqrt{\xi}\,h_1^{(2)}(\xi)e^{-i\xi}\Big|_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} \ll e^{-|x|/4}n^{-3/4}+e^{|x|/4}n^{-5/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty. \quad (3.44)$$

Ponieważ

$$\mathrm{d}\Big(\sqrt{\xi}\,h_1^{(2)}(\xi)\Big)=\frac{1}{2}\xi^{-1/2}h_1^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi+\sqrt{\xi}\,\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi,$$

zatem

$$\left|\int_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} e^{-i\xi}\,\mathrm{d}\Big(\sqrt{\xi}\,h_1^{(2)}(\xi)\Big)\right| = \left|\int_{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} e^{-i\xi}\left(\frac{1}{2}\xi^{-1/2}h_1^{(2)}(\xi)+\sqrt{\xi}\,\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}\xi\right|. \quad (3.45)$$

Podstawiając w (3.45)

$$\eta=\left(\frac{4}{\mathrm{Q_E^2}}\right)e^{|x|}\xi^{-2}$$
$$\mathrm{d}\eta=-\left(\frac{8}{\mathrm{Q}_E^2}\right)e^{|x|}\xi^{-3}\mathrm{d}\xi$$

na mocy Wniosku 1.24. i Wniosku 1.25. szacując funkcje $h_1^{(2)}$ oraz $\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\eta}$, otrzymujemy

$$\left(\frac{Q_E^2}{8}\right)e^{-|x|}\left|\int_{n+1}^{n} e^{-i\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)^{5/2} h_1^{(2)}\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)^{7/2}\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)\right)\mathrm{d}\eta\right| \ll$$
$$e^{-|x|}\int_{n}^{n+1} e^{\frac{5}{4}|x|}\eta^{-\frac{5}{4}}\left|h_1^{(2)}\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)\right|\mathrm{d}\eta+$$
$$e^{-|x|}\int_{n}^{n+1} e^{\frac{5}{4}|x|}\eta^{-\frac{5}{4}}\left|\frac{\mathrm{d}h_1^{(2)}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{\eta}}\right)\right|\mathrm{d}\eta \ll$$
$$e^{-|x|/4}\int_{n}^{n+1}\eta^{-3/4}\mathrm{d}\eta+e^{-|x|/4}\int_{n}^{n+1}\eta^{-3/4}\mathrm{d}\eta \ll e^{-|x|/4}n^{-3/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty, \quad n\le e^{|x|}.$$

Zatem

$$\left|\int_{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n+1}}}^{\frac{2}{Q_E}\sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}} e^{-i\xi}\mathrm{d}\left(\sqrt{\xi}\,h_1^{(2)}(\xi)\right)\right| \ll e^{-|x|/4}n^{-3/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty. \tag{3.48}$$

Ostatecznie z (3.40), (3.41), (3.44) i (3.48) mamy

$$|R(x,n+1)-R(x,n)| \ll e^{-|x|/4}n^{-3/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

W konsekwencji

$$e^{-|x|/2}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\sqrt{n}\,g(n)\,|R(x,n+1)-R(x,n)| \ll$$
$$e^{-|x|/2}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}\sqrt{n}\,g(n)\left(e^{-|x|/4}n^{-3/4}\right)=e^{-\frac{3}{4}|x|}\sum_{n\le\left[e^{|x|}\right]-1}g(n)n^{-1/4}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Ponieważ funkcja g od pewnego miejsca jest monotonicznie rosnąca, mamy

$$e^{-\frac{3}{4}|x|}\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}g(n)n^{-1/4} \ll e^{-\frac{3}{4}|x|}g\left(e^{|x|}\right)\sum_{n\le\lfloor e^{|x|}\rfloor-1}n^{-1/4} \ll e^{-\frac{3}{4}|x|}g\left(e^{|x|}\right)e^{\frac{3}{4}|x|} \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x|\to\infty,$$

co wobec (3.39) kończy dowód. □

Lemat 3.17. *Niech zachodzi* (3.2)*. Wtedy dla funkcji T zachodzi następująca formuła asymptotyczna*

$$T(x) = \frac{i}{\omega_E \pi} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(g(e^{|x|})\Big),$$

dla $|x| \to \infty$.

Dowód. Ponieważ

$$\int_{-\log n}^{-|x|} \left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}} \right)^{-1} e^{-w} \mathrm{d}w = -\mathrm{Q}_E \sqrt{n} \int_{-\log n}^{-|x|} \mathrm{d}e^{-\frac{w}{2}} = \mathrm{Q}_E n - \mathrm{Q}_E \sqrt{n e^{|x|}},$$

więc z formuły (3.27) otrzymujemy

$$T(x) = \frac{i}{2\pi\omega_E} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\log n}^{-|x|} e^{-\frac{w}{2}} \mathrm{d}w = \frac{i}{\pi\omega_E} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} - T_1(x),$$

gdzie

$$T_1(x) := \frac{i}{\pi\omega_E} e^{-|x|/2} \sum_{n \le e^{|x|}} \mu_E(n).$$

Na mocy założenia (3.2) mamy

$$T_1(x) \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

□

Lemat 3.18. *Niech zachodzi* (3.2)*. Wtedy dla funkcji G_1 zachodzi następująca formuła asymptotyczna*

$$G_1(F,x) = \mathrm{C} e^{-|x|/4} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}\right)} + \frac{i}{\pi\omega_E} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(g\left(e^{|x|}\right)\Big),$$

dla $|x| \to \infty$, *gdzie* $\mathrm{C} = \frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}}{2\omega_E} \sqrt{\frac{\mathrm{Q}_E}{\pi}}$.

Dowód. Na mocy Lematu 3.13. mamy

$$G_1(F,x) = G_{11}(x) + \mathrm{O}\Big(g\left(e^{|x|}\right)\Big), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Na mocy Lematu 3.14. mamy

$$G_{11}(x) = P(x) + T(x) + \mathrm{Er}(x).$$

Na mocy Lematu 3.15. mamy

$$P(x) = \mathrm{C} e^{-|x|/4} \sum_{n \le e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} e^{-i\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{e^{|x|}}{n}}\right)} + \mathrm{O}\Big(g\left(e^{|x|}\right)\Big), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Na mocy Lematu 3.16. mamy

$$\mathrm{Er}(x) = \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).$$

Na mocy Lematu 3.17. mamy

$$T(x) = \frac{i}{\pi\omega_E} \sum_{n \leq e^{|x|}} \frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).$$

□

3.3. Twierdzenia typu Ω

Dla $x \geq 0$ kładziemy

$$J(x) := J(1,x) = \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{x}\right) - 1.$$

Lemat 3.19. *Dla* $0 < \sigma < 1$ *kładziemy*

$$C_E(s) := \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} \mathrm{d}x.$$

Całka ta jest zbieżna bezwzględnie niemal jednostajnie w pasie $0 < \sigma < 1$, *definiując tam tym samym funkcję holomorficzną.*

Dowód. Niech $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ będą dowolne i ustalone. Wykażemy, że całka C_E jest zbieżna bezwzględnie i jednostajnie w pasie $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. Dla $x \geq 0$ mamy $|J(x)| \leq 2$, zaś dla $0 \leq x \leq 1$ mamy dodatkowo $|J(x)| \ll x$. Mamy również

$$\int_0^\infty |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x = \int_0^1 |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x + \int_1^\infty |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x.$$

W konsekwencji dla $\sigma \leq \sigma_2 < 1$ mamy

$$\int_0^1 |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \ll \int_0^1 x^{-\sigma} \mathrm{d}x \ll \frac{1}{1-\sigma_2} \ll 1,$$

zaś dla $\sigma \geq \sigma_1 > 0$

$$\int_1^\infty |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \ll \int_1^\infty x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \ll \frac{1}{\sigma_1} \ll 1,$$

a w konsekwencji

$$\int_0^\infty |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \ll 1.$$

Zatem dla $\xi \to \infty$ mamy

$$\int_{\xi}^{\infty} |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

jednostajnie dla $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. □

Lemat 3.20. *Funkcja C_E ma przedłużenie meromorficzne do $\mathbb{C}$. Dokładnie mamy*

$$C_E(s) = -\frac{\sqrt{\pi}}{s Q_E^{2s}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}.$$

W szczególności, C_E nie ma zer w pasie $0 < \sigma < 1$. Ponadto mamy

$$|C_E(\sigma + it)| \asymp (2|t|+2)^{-\frac{1}{2}-2\sigma}$$

niemal jednostajnie w pasie $0 < \sigma < 1$.

Dowód. Z Lematu 1.18. mamy, że dla $0 < \sigma < 2$ funkcja

$$C(s) = \int_0^{\infty} J\left(\frac{Q_E^2}{4} x^2\right) x^{-s-1} \mathrm{d}x \tag{3.49}$$

jest postaci

$$C(s) = -\frac{\sqrt{\pi}}{s 2^s} \frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}.$$

Podstawiając $\frac{Q_E^2}{4} x^2 \mapsto \xi$ w całce (3.49) mamy

$$x = \frac{2}{Q_E} \sqrt{\xi}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi} Q_E}$$

i otrzymujemy

$$C(s) = \int_0^{\infty} J(\xi) \left(\frac{2}{Q_E} \sqrt{\xi}\right)^{-s-1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi} Q_E} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_E}{2}\right)^s \int_0^{\infty} J(\xi) \xi^{-\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{2}\right)^s C_E\left(\frac{s}{2}\right).$$

W konsekwencji

$$C_E(s) = 2\left(\frac{2}{Q_E}\right)^{2s} C(2s) = -\frac{2\sqrt{\pi}}{2s 2^{2s}} \left(\frac{2}{Q_E}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(1-\frac{2s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{s Q_E^s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}.$$

Druga część tezy lematu wynika z odpowiedniego oszacowania dla funkcji C zawartego w Lemacie 1.18. □

Dla $x \geq 1$ kładziemy

$$f(x) := \sum_{n \leq x} \mu_E(n) J(n,x)$$

oraz

$$\tilde{f}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J(n,x) \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Z Lematu 3.6. wynika, że funkcja $\tilde{f}$ jest dobrze określona.

Lemat 3.21. *Niech zachodzi* (3.2)*,* $f(x) \ll x^{\frac{1}{4}} g(x)$ *oraz niech* $g(x) \ll \log\log x$*, dla* $x \to \infty$*. Wtedy hipoteza Riemanna dla funkcji* F *jest prawdziwa, wszystkie zera nietrywialne są pojedyncze oraz*

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)\log(\gamma+2), \quad \gamma \geq 0. \tag{3.52}$$

Dowód. Dla $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ mamy następujące oszacowanie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |\mu_E(n)| |J(n,x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4}} \int_0^{\infty} \left| \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{x}{n}}\right) - 1 \right| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} \int_0^{\infty} \left| \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{x}\right) - 1 \right| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} \right) \int_0^{\infty} |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x. \tag{3.53}$$

Ponieważ $\sigma > \frac{3}{4}$ zatem szereg w (3.53) jest zbieżny, zaś z faktu, że $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ wynika, że spełnione są założenia Lematu 3.19. i w konsekwencji całka w (3.53) jest zbieżna niemal jednostajnie. Dla $\sigma < 1$ kładziemy

$$E(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4+s}} \int_0^{1/n} J(x) x^{-s-1} \mathrm{d}x.$$

Ponieważ dla $0 \leq x \leq 1/n$ mamy $|J(x)| \ll x$, więc dla $\sigma < 1$ mamy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} \int_0^{1/n} |J(x)| x^{-\sigma-1} \mathrm{d}x \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} \int_0^{1/n} x^{-\sigma} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{1-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} \int_0^{1/n} \mathrm{d}x^{-\sigma+1} = \frac{1}{1-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{1/4+\sigma}} n^{\sigma-1} = \frac{1}{1-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{5/4}}. \tag{3.54}$$

Na mocy Wniosku 2.5. ostatni szereg w (3.54) jest zbieżny, zatem dla każdego ustalonego $\sigma_3 < 1$ szereg definiujący $E(s)$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie dla $\sigma \leq \sigma_3$, a w konsekwencji dla $\sigma < 1$ funkcja E jest holomorficzna. Ponadto z (3.54) wynika również, że

$$E(s) \ll \frac{1}{1-\sigma}, \quad \text{dla} \quad \sigma < 1. \tag{3.55}$$

Dla $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ z (3.53) i Lematu 1.9. mamy, że

$$\int_1^\infty \tilde{f}(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty \mu_E(n)J(n,x)x^{-s-1}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}\left(\cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right)x^{-s-1}\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}\left(\cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right)x^{-s-1}\mathrm{d}x - \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}\left(\cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right)x^{-s-1}\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}\left(\cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right)x^{-s-1}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}\left(\cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right)x^{-s-1}\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4+s}}\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4+s}}\int_0^{1/n} J(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x = \frac{C_E(s)}{F(s+1/4)} - E(s). \tag{3.56}$$

Ponieważ zachodzi (3.2) zatem z Lematu 3.6. wnosimy, że

$$\Re r_1(x) = \sum_{n>x} \mu_E(n)J(n,x) \ll x^{1/4}g(x) \quad \text{dla} \quad x \to \infty,$$

a ponieważ $f(x) \ll x^{1/4}g(x)$ oraz $g(x) \ll \log\log x$, dla $x \to \infty$, mamy

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \Re r_1(x) \ll x^{1/4}g(x) \ll x^{1/4}\log\log x \quad \text{dla} \quad x \to \infty.$$

Zatem z Lematu 1.17. wnosimy, że transformata Mellina funkcji $\tilde{f}$ jest holomorficzna dla $\sigma > \frac{1}{4}$, zaś (3.56) i Lemat 3.20 ustanawia jej przedłużenie meromorficzne do półpłaszczyzny $\sigma < 1$. Z Lematu 1.17. i (3.56) wnosimy, że funkcja $\frac{C_E(s)}{F(s+1/4)} - E(s)$ jest holomorficzna w pasie $\frac{1}{4} < \sigma < 1$. Z Lematu 3.20. wiemy, że funkcja C_E nie ma zer w pasie $0 < \sigma < 1$, zatem funkcja $\frac{1}{F(s+1/4)}$ jest holomorficzna w pasie $\frac{1}{4} < \sigma < 1$ i w konsekwencji spełniona jest hipoteza Riemanna dla F. Z Lematu 1.17. dla funkcji $\tilde{f}$ wynika również, że

$$\int_1^\infty \tilde{f}(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x \ll \frac{1}{\sigma-\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{4}}\right)$$

jednostajnie dla $\frac{1}{4} < \sigma < \frac{3}{4}$. Ponieważ dla $\sigma > \frac{1}{2}$ z Lematu 1.16. mamy

$$\int_1^\infty \tilde{f}(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x \ll 1,$$

więc

$$\int_1^\infty \tilde{f}(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x \ll \frac{1}{\sigma-\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{4}}\right)$$

jednostajnie dla $\frac{1}{4} < \sigma < 1$. Na mocy (3.56) oraz (3.55) mamy zatem

$$\frac{C_E\left(s-\frac{1}{4}\right)}{F(s)} \ll \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) + \left|E\left(s-\frac{1}{4}\right)\right| \ll \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{\sigma-\frac{5}{4}}$$

jednostajnie dla $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{5}{4}$, a w pasie $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

$$\frac{C_E\left(s-\frac{1}{4}\right)}{F(s)} \ll \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

jednostajnie, zatem wszystkie zera F są pojedyncze, oraz mamy

$$\frac{1}{F(s)} \ll \frac{1}{\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\left|C_E\left(s-\frac{1}{4}\right)\right|}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \qquad \frac{1}{2} < \sigma < 1.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy wykazać oszacowanie (3.52). Kładąc $s = \sigma + i\gamma$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, gdzie $\gamma \geq 0$ oznacza część urojoną zera nietrywialnego funkcji F, na mocy Lematu 3.20. i powyższego równania mamy

$$\frac{1}{F(s)} \ll \frac{(\gamma+2)^{2\sigma}}{\sigma-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right). \tag{3.57}$$

Z twierdzenia Cauchy'ego mamy dla $w \in [\rho, 3/4 + i\gamma]$

$$\left|F''(w)\right| \ll \int\limits_{|\xi-w|=r} \frac{|F(\xi)|}{|\xi-w|^3}\,|\mathrm{d}\xi| \leq \max_{|\xi-w|=r}|F(\xi)|\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi-w|=r}\frac{|\mathrm{d}\xi|}{|\xi-w|^3} = \max_{|\xi-w|=r}|F(\xi)|\,\frac{1}{r^2}.$$

Ustalmy r, ϵ_1, $0 < r < \frac{1}{2}$, $0 < \epsilon_1 < 1/10$. Ponieważ okrąg $|\xi - w| = r$ jest całkowicie zawarty w półpłaszczyźnie $\sigma \geq \frac{1}{2} - r > 0$, zatem z Lematu 1.28. możemy oszacować $\daleth_F(\sigma) \leq \frac{1}{2} + r$ na tym okręgu. Ponieważ dla takich ξ mamy $|\Im\xi| \leq \gamma + r$ zatem

$$\max_{|\xi-w|=r}|F(\xi)| \ll (\gamma+r)^{\frac{1}{2}+r+\epsilon/2} \ll (\gamma+2)^{\frac{1}{2}+r+\epsilon/2}$$

dla dowolnego $\epsilon > 0$, a w konsekwencji

$$\max_{|\xi-w|=r}|F(\xi)|\,\frac{1}{r^2} \ll \frac{(\gamma+2)^{\frac{1}{2}+r+\epsilon/2}}{r^2}.$$

Stąd, biorąc $r = \epsilon_1/2$ dostajemy

$$F''(w) \ll_{\epsilon_1} (\gamma+2)^{\frac{1}{2}+\epsilon_1}, \quad \text{przy } 0 \leq \gamma \to \infty.$$

Kładąc

$$s := \rho + \min\left\{\frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}, \frac{1}{(\gamma+2)}\right\} \tag{3.58}$$

z twierdzenia Taylora z resztą Lagrange'a wnosimy, że istnieje $w \in [\rho, s]$ takie, że

$$F(s) = F'(\rho)(s-\rho) + F''(w)(s-\rho)^2. \tag{3.59}$$

Ponieważ mamy

$$\left|F'(\rho)\right| |s-\rho| = \left|F'(\rho)\right| \left|\min\left\{\frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}, \frac{1}{(\gamma+2)}\right\}\right| = \min\left\{\frac{|F'(\rho)|^2}{(\gamma+2)}, \frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}\right\}$$

oraz

$$\left|F''(w)\right| |s-\rho|^2 \ll_{\epsilon_1} (\gamma+2)^{\frac{1}{2}+\epsilon_1} \left|\min\left\{\frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}, \frac{1}{(\gamma+2)}\right\}\right|^2 =$$
$$(\gamma+2)^{\frac{1}{2}+\epsilon} \min\left\{\frac{|F'(\rho)|^2}{(\gamma+2)^2}, \frac{1}{(\gamma+2)^2}\right\} = \min\left\{\frac{|F'(\rho)|^2}{(\gamma+2)^{\frac{3}{2}-\epsilon_1}}, \frac{1}{(\gamma+2)^{\frac{3}{2}-\epsilon_1}}\right\},$$

dla ustalonego $0 < \epsilon_1 < \frac{1}{10}$, zatem drugi składnik sumy (3.59) jest mniejszy, co do modułu, od pierwszego i w konsekwencji

$$F(s) \sim F'(\rho)(s-\rho), \quad \text{dla } 0 \leq \gamma \to \infty.$$

Ponieważ $s - \rho = \sigma - \frac{1}{2}$ mamy, wciąż dla s określonego jak w (3.58), że

$$F(s) \sim F'(\rho)\left(\sigma - \frac{1}{2}\right),$$

a dalej, z (3.57), mamy

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)^{2\sigma} \log\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right). \tag{3.60}$$

Załóżmy, że

$$\frac{1}{|F'(\rho)|} \geq (\gamma+2)\log(\gamma+e), \tag{3.61}$$

gdyż w przeciwnym wypadku zachodzi (3.52). Mamy wtedy $\frac{1}{|F'(\rho)|} \geq 2\log e > 1$ i $\left|F'(\rho)\right| < 1$, a w konsekwencji

$$\sigma - \frac{1}{2} = \min\left\{\frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}, \frac{1}{(\gamma+2)}\right\} = \frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}, \tag{3.62}$$

zatem z (3.60) mamy

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)(\gamma+2)^{2\sigma-1} \log\left(\frac{(\gamma+2)}{|F'(\rho)|}\right) = (\gamma+2)(\gamma+2)^{2\sigma-1}\left(\log(\gamma+2) - \log|F'(\rho)|\right).$$

Ponieważ $|F'(\rho)| < 1$, z (3.62) mamy, że

$$(\gamma+2)^{2\sigma-1} = e^{(2\sigma-1)\log(\gamma+2)} = e^{2(\sigma-1/2)\log(\gamma+2)} = e^{2\frac{|F'(\rho)|}{(\gamma+2)}\log(\gamma+2)} < e^{|F'(\rho)|\log 2} < 2, \quad \text{dla } \gamma \geq 0.$$

Zatem

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)(\gamma+2)^{2\sigma-1}\left|\log(\gamma+2)-\log|F'(\rho)|\right| \ll$$
$$(\gamma+2)\left|\log(\gamma+2)+\left|\log|F'(\rho)|^{-1}\right|\right|. \quad (3.63)$$

Z (3.61) wnosimy, że

$$\left|\log|F'(\rho)|^{-1}\right| \geq \log(\gamma+2).$$

Wtedy z (3.63) otrzymujemy

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)\left|\log\left|\frac{1}{F'(\rho)}\right|\right|.$$

Ponieważ $|F'(\rho)| < 1$, kładąc $t = \left|\frac{1}{F'(\rho)}\right| > 1$ mamy następujący ciąg implikacji

$$\frac{t}{\log t} \ll \gamma+2 \Rightarrow \sqrt{t} \ll \gamma+2 \Rightarrow \log t \ll \log(\gamma+2).$$

Zatem

$$t \ll (\gamma+2)\log(\gamma+2)$$

i w konsekwencji

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)\log(\gamma+2).$$

□

Dla $\Im z > 0$, kładziemy

$$G(F,z) = e^{\frac{z}{2}} \int_{z+i\infty}^{z} m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w, \quad (3.64)$$

gdzie $m(F,w)$ jest zdefiniowana przez (2.3). Ponieważ F jest przesuniętą funkcją L krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$ na mocy (1.25), (2.2) oraz (2.16) mamy

$$\varkappa_F = -\frac{1}{4}$$
$$\upsilon_F = 1.$$

Lemat 3.22. *Niech x_0, x_1 i $y_0 > 0$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $x_0 \leq \Re w \leq x_1$ i $\Im w \geq y_0$. Wtedy dla $\sigma = \frac{3}{2}$ i $\sigma = -\frac{1}{4}$ oraz $t \geq 0$ mamy następujące oszacowanie*

$$\frac{e^{sw}}{F(s)} \ll_{x_0,x_1} e^{-tv}. \quad (3.65)$$

Ponadto dla w z tak określonego obszaru mamy

$$m(F,w) \ll_{x_0,x_1,y_0} e^{-t_0 v}, \quad (3.66)$$

gdzie $t_0 > 0$ jest ustalone i zależne od F.

Dowód. Na prostych $\frac{3}{2} + it$ oraz $-\frac{1}{4} + it$ na mocy Wniosku 2.5. oraz (2.12) odpowiednio, mamy $1/F(s) \ll 1$. Zatem na prostej $\frac{3}{2} + it$ mamy

$$\frac{e^{sw}}{F(s)} \ll |e^{sw}| = e^{\frac{3}{2}u - tv} \leq e^{\frac{3}{2}x_0 - tv} \ll_{x_0} e^{-tv}.$$

Na prostej $-\frac{1}{4} + it$ analogicznie mamy

$$\frac{e^{sw}}{F(s)} \ll |e^{sw}| = e^{-\frac{1}{4}u - tv} \ll_{x_1} e^{-tv}$$

co dowodzi (3.65). Ponieważ $v > 0$ zatem $m(F, w)$ jest równa całce (2.3). Niech $t_0 := \frac{\gamma_1}{2}$, gdzie γ_1 oznacza część urojoną zera nietrywialnego funkcji F leżącego najniżej ponad osią rzeczywistą. Ze względu na rozmieszczenie zer funkcji F (cf. (1.27)) z twierdzenia Cauchy'ego o reziduach mamy, że

$$m(F, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{C}'} \frac{e^{sw}}{F(s)} \mathrm{d}s,$$

gdzie kontur $\mathscr{C}'$ składa się z półprostej $\left(-\frac{1}{4} + i\infty, -\frac{1}{4} + it_0\right]$, odcinka $\left[-\frac{1}{4} + it_0, \frac{3}{2} + it_0\right]$ oraz półprostej $\left[\frac{3}{2} + it_0, \frac{3}{2} + i\infty\right)$. Na półprostych konturu $\mathscr{C}'$ wykazaliśmy już, że zachodzi (3.65). Zatem

$$\int\limits_{\frac{3}{2}+it_0}^{\frac{3}{2}+i\infty} \left| \frac{e^{sw}}{F(s)} \right| \mathrm{d}s \ll_{x_0} \frac{1}{v} e^{-t_0 v} \ll_{x_0, y_0} e^{-t_0 v},$$

podobnie

$$\int\limits_{-\frac{1}{4}+it_0}^{-\frac{1}{4}+i\infty} \left| \frac{e^{sw}}{F(s)} \right| \mathrm{d}s \ll_{x_1} \frac{1}{v} e^{-t_0 v} \ll_{x_1, y_0} e^{-t_0 v}.$$

Ponieważ dla s na odcinku $\left[-\frac{1}{4} + it_0, \frac{3}{2} + it_0\right]$ mamy

$$\left| \frac{e^{sw}}{F(s)} \right| \ll |e^{sw}| = e^{\sigma u - t_0 v} \ll_{x_0, x_1} e^{-t_0 v}$$

zatem otrzymujemy oszacowanie funkcji $m(F, \cdot)$. □

Lemat 3.23. *Całka* (3.64) *jest zbieżna bezwzględnie niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie $\Im z > 0$. W szczególności funkcja $G(F, \cdot)$ jest dobrze określona i holomorficzna w tej półpłaszczyźnie. W każdym domkniętym obszarze $\Im z \geq \Im z_0 > 0$ i $\Re z_0 \leq \Re z \leq \Re z_1$ funkcja $G(F, z)$ jest oszacowana przez $\mathrm{O}_{z_0, z_1}\left(e^{-t_0 \Im z}\right)$, gdzie $t_0 > 0$ jest ustalone i zależne od F.*

Dowód. Ustalmy $x_0, y_0 > 0$, $z_0 = x_0 + iy_0$ oraz niech $v \geq y \geq y_0 > 0$ i $x_0 \leq u = x \leq x_1 = \Re z_1$. Na mocy (3.66) mamy

$$\int_{x+iy}^{x+i\infty} \left| m(F,w)e^{-w} \right| |\mathrm{d}w| \ll_{x_0,x_1,y_0} \int_y^\infty e^{-t_0 v} e^{-x} \mathrm{d}v \ll_{x_0,x_1,y_0} \int_y^\infty e^{-t_0 v} \mathrm{d}v \ll_{x_0,x_1,y_0} e^{-t_0 y}.$$

Zatem całka (3.64) spełnia wymagane oszacowanie i w konsekwencji jest ona bezwzględnie niemal jednostajnie zbieżna zatem funkcja G jest holomorficzna. □

Lemat 3.24. *Funkcja $G(F,\cdot)$ przedłuża się analitycznie wzdłuż każdej drogi kawałkami gładkiej $\mathscr{P}$ z punktu z_1 do z_2, leżącej na płaszczyźnie zespolonej, nie przechodzącej przez ani jeden punkt $z = \log n$, $n \geq 1$, $\mu_E(n) \neq 0$, zgodnie ze wzorem*

$$G(F,z_2) = e^{\frac{z_2}{2}} \left(\int_{z_1+i\infty}^{z_1} + \int_{\mathscr{P}} \right) m(F,w)e^{-w} \mathrm{d}w. \tag{3.67}$$

Dla

$$z = \log n + \delta e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \mu_E(n) \neq 0 \tag{3.68}$$

mamy

$$G(F,z) = \frac{\mu_E(n)}{2\pi i \sqrt{n}} \log \frac{1}{\delta} + \mathrm{O}_n(1).$$

Dowód. W przypadku, gdy droga $\mathscr{P}$ jest zawarta w górnej półpłaszczyźnie, prawdziwość (3.67), tj. możliwość przesunięcia konturu, wynika z oszacowania (3.66) w Lemacie 3.22. i faktu, że funkcja $m(F,\cdot)$ jest holomorficzna w górnej półpłaszczyźnie. Wiemy, że funkcja $m(F,\cdot)$ posiada przedłużenie analityczne do funkcji meromorficznej, której jedynymi osobliwościami są bieguny pojedyncze w punktach $w = \log n$, $\mu_E(n) \neq 0$. Stąd dla każdej drogi omijającej te punkty wzór (3.67) zadaje wymagane przedłużenie. Reziduum funkcji $m(F,w)$ w punkcie $w = \log n$, na mocy Twierdzenia 2.1., jest równe

$$\operatorname*{Res}_{w=\log n} = -\frac{\mu_E(n)}{2\pi i},$$

zatem dla

$$|w - \log n| < \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{3.69}$$

mamy

$$m(F,w) = -\frac{\mu_E(n)}{2\pi i} \frac{1}{w - \log n} + h_n(w), \tag{3.70}$$

gdzie h_n jest funkcją holomorficzną w dysku (3.69). Niech z będzie takie jak w (3.68). Niech $z_0 = \log n + \delta_0 i$, $\delta_0 = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Z (3.67) mamy

$$G(F,z) = e^{\frac{z}{2}} \int\limits_{z_0+i\infty}^{z_0} m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w + e^{\frac{z}{2}} \int\limits_{z_0}^{z} m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w =$$

$$e^{\frac{z-z_0}{2}} G(F,z_0) + e^{\frac{z}{2}} \int\limits_{z_0}^{z} m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w = e^{\frac{z}{2}} \int\limits_{z_0}^{z} m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w + \mathrm{O}_n(1).$$

Na mocy (3.70) mamy zatem, że

$$G(F,z) = -\frac{\mu_E(n)e^{\frac{z}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{-w}}{w-\log n}\mathrm{d}w + \mathrm{O}_n(1) =$$

$$-\frac{\mu_E(n)e^{\frac{z}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{-w}+e^{-\log n}-e^{-\log n}}{w-\log n}\mathrm{d}w + \mathrm{O}_n(1) =$$

$$-\frac{\mu_E(n)e^{\frac{z}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{-\log n}}{w-\log n}\mathrm{d}w - \frac{\mu_E(n)e^{\frac{z}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{-w}-e^{-\log n}}{w-\log n}\mathrm{d}w + \mathrm{O}_n(1). \quad (3.71)$$

Ponieważ funkcja

$$\frac{e^{-w}-e^{-\log n}}{w-\log n}$$

jest holomorficzna w punkcie $w = z$ zatem druga całka w (3.71) jest oszacowana przez $\mathrm{O}_n(1)$. Dalej mamy

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{-\log n}}{w-\log n}\mathrm{d}w = \frac{1}{n}\int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{w-\log n}\mathrm{d}w = \frac{1}{n}(\log(z-\log n) - \log(z_0-\log n)) =$$

$$\frac{1}{n}\left(\log\left(\delta e^{i\theta}\right) - \log(i\delta_0)\right) = \frac{1}{n}\log\delta + \frac{\theta}{n}i - \frac{\pi}{2n}i - \frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\log\delta + \mathrm{O}_n(1).$$

Zatem

$$G(F,z) = -\frac{\mu_E(n)e^{\frac{z}{2}}}{2\pi i n}\log\delta + \mathrm{O}_n(1) =$$

$$\frac{\mu_E(n)}{2\pi i\sqrt{n}}\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{\mu_E(n)\left(e^{\frac{\delta}{2}e^{i\theta}}-1\right)}{2\pi i\sqrt{n}}\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \mathrm{O}_n(1) =$$

$$\frac{\mu_E(n)}{2\pi i\sqrt{n}}\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{\mu_E(n)}{2\pi i\sqrt{n}}\cdot\mathrm{O}\left(\delta\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) + \mathrm{O}_n(1).$$

Ostatecznie

$$G(F,z) = \frac{\mu_E(n)}{2\pi i\sqrt{n}}\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \mathrm{O}_n(1).$$

□

Lemat 3.25. [25, Theorem 1.4] *Dla* $|\Im w| < 2\pi$ *oraz* $w \neq \log n$ *dla wszystkich* n *takich, że* $\mu_E(n) \neq 0$, *mamy*

$$m(F,w) = -\frac{1}{2\omega_{\mathrm{E}}\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n}B(n,w) - \frac{1}{2}(R(F,w) - iR^*(F,w)) + \frac{1}{2i}\left(H(F,w) + \overline{H}(F,w)\right) - \frac{e^{\frac{3}{2}w}}{2\pi i}m_0(F,w) - \frac{1}{2i}(m_1(F,w) + \overline{m}_1(F,w)),$$

gdzie $\overline{m_1}(F,w) = \overline{m_1(F,\overline{w})}$, $\overline{H}(F,w) = \overline{H(F,\overline{w})}$,

$$B(n,w) = \mathrm{H}_1^{(2)}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2i}{\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{Q}_{\mathrm{E}}}\frac{e^{-w/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1},$$

$$m_0(F,w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}}\frac{1}{w-\log n},$$

$$m_1(F,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}}(\mathrm{tg}(\pi s) - i)\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s,$$

$$H(F,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}(\mathrm{tg}(\pi s) - i)\frac{e^{sw}}{F(s)}\mathrm{d}s,$$

$$R(F,w) = \sum_{\substack{F(\beta)=0\\0<\beta<1}}\operatorname*{Res}_{s=\beta}\frac{e^{sw}}{F(s)},$$

$$R^*(F,w) = \sum_{\substack{F(\beta)=0\\0<\beta<1\\\beta\neq\frac{1}{2}}}\operatorname*{Res}_{s=\beta}\left(\mathrm{tg}(\pi s)\frac{e^{sw}}{F(s)}\right) + \operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\left(\mathrm{tg}(\pi s)\frac{e^{sw}}{F(s)}\right).$$

Lemat 3.26. *Dla* $z = x \leq -1$ *mamy*

$$G(F,z) = e^{-|x|/2}\int_{i}^{-|x|}m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w + O\left(e^{-|x|/2}\right).$$

Ponadto $G(F,x)$ *możemy wtedy zapisać w postaci*

$$G(F,x) = G_1(F,x) + \sum_{j=2}^{8}G_j(F,x) + O\left(e^{-|x|/2}\right),$$

gdzie funkcja $G_1(F,x)$ *jest określona w* (3.7) *oraz*

$$G_2(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2}\int_i^{-|x|} R(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_3(F,x) = \frac{i}{2}e^{-|x|/2}\int_i^{-|x|} R^*(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_4(F,x) = \frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int_i^{-|x|} H(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_5(F,x) = \frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int_i^{-|x|} \overline{H}(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_6(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2\pi i}\int_i^{-|x|} m_0(F,w)e^{\frac{w}{2}}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_7(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int_i^{-|x|} m_1(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

$$G_8(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int_i^{-|x|} \overline{m}_1(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w.$$

Dowód. Z Lematu 3.24. mamy

$$G(F,x) = e^{-|x|/2}\left(\int_{i\infty}^{i} + \int_i^{-|x|}\right) m(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w,$$

gdzie całkujemy wpierw po półprostej urojonej $(i\infty, i]$ a następnie po odcinku $[i, -|x|]$. Ponieważ

$$e^{-|x|/2}\int_{i\infty}^{i} m(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w = e^{-|x|/2}e^{-i/2}G(F,i) \ll e^{-|x|/2},$$

zatem

$$G(F,x) = e^{-|x|/2}\int_i^{-|x|} m(F,w)e^{-w}\,\mathrm{d}w + \mathrm{O}\left(e^{-|x|/2}\right). \tag{3.72}$$

Druga część tezy Lematu jest natychmiastową konsekwencją Lematu 3.25. i formuły (3.72). □

Lemat 3.27. *Niech zachodzi* (3.2) *oraz* $f(x) \ll x^{1/4}g(x)$, *gdzie* $x \to +\infty$, *dla pewnej funkcji* $g \in \mathfrak{G}$, *gdzie* $g(x) \ll \log\log x$ *dla* $x \to +\infty$. *Wtedy dla* $x \le -1$ *mamy*

$$G(F,x) = G_1(F,x) + C_6|x| + \mathrm{O}(1),$$

gdzie

$$C_6 = -i\pi \operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}} \frac{1}{F(s)}. \tag{3.73}$$

Dowód. Z definicji (cf. Lematy 3.25. oraz 3.26.) mamy

$$G_6(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2\pi i} \int_i^{-|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}} \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n} \mathrm{d}w.$$

Dla $w \in \mathrm{K} \subsetneq \mathbb{C}$, gdzie K jest dowolnym zbiorem zwartym nie zawierającym punktów $\log n$, mamy

$$\frac{e^{-w}}{w - \log n} \ll_{\mathrm{K}} 1,$$

przy czym stała w symbolu Winogradowa nie zależy od n. Na mocy Wniosku 2.5. mamy zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}} \max_{w\in \mathrm{K}} \left| \frac{e^{-w}}{w - \log n} \right| \ll_{\mathrm{K}} 1.$$

Z Lematu 1.5. wnosimy zatem, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}} \frac{e^{-w}}{w - \log n}$$

jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid w = \log n, \quad n = 1, 2, \ldots\}$. Zatem z Lematu 1.8. mamy

$$G_6(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}} \int_i^{-|x|} \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n} \mathrm{d}w =$$
$$- \frac{e^{-|x|/2}}{2\pi i} \left(\int_i^{-|x|} \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w} \mathrm{d}w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}} \int_i^{-|x|} \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n} \mathrm{d}w \right). \tag{3.74}$$

Dla $n \geq 2$ funkcja

$$\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n}$$

jest holomorficzna dla $u \leq 0$, zatem z Lematu 1.12. mamy

$$\int_i^{-|x|} \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n} \mathrm{d}w = \left(\int_i^{0} + \int_0^{-|x|} \right) \frac{e^{\frac{w}{2}}}{w - \log n} \mathrm{d}w, \tag{3.75}$$

gdzie drogi całkowania to odcinki $[i,0]$ oraz $[0,-|x|]$. Stosując (3.75) do (3.74) mamy

$$\frac{e^{-|x|/2}}{(2\pi i)}\left(\int_i^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}}\left(\int_i^0+\int_0^{-|x|}\right)\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right)=$$
$$\frac{e^{-|x|/2}}{(2\pi i)}\left(\int_i^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu_E(n)}{n^{3/2}}\int_0^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right)+$$
$$\mathrm{O}\left(e^{-|x|/2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\left|\int_i^0\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right|\right).$$

Ponieważ dla $n\geq 2$ mamy

$$\left|\int_i^0\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right|\ll\frac{1}{\log n},$$

zatem z Wniosku 2.5. mamy

$$\mathrm{O}\left(e^{-|x|/2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\left|\int_i^0\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right|\right)=\mathrm{O}\left(e^{-|x|/2}\right).$$

Dla $n\geq 2$ oraz $w\in[0,-|x|]$ mamy

$$0\leq\frac{e^{\frac{w}{2}}}{|w-\log n|}\leq\frac{e^{\frac{w}{2}}}{\log n},$$

zatem

$$\left|\int_0^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right|\leq\int_{-|x|}^0\frac{e^{\frac{w}{2}}}{\log n}\mathrm{d}w\ll\frac{1}{\log n}.$$

Funkcja $e^{\frac{w}{2}}/w$ jest holomorficzna dla $w\neq 0$, zatem

$$\int_i^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w=\left(\int_i^{-1}+\int_{-1}^{-|x|}\right)\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w=\int_{-1}^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w+\mathrm{O}(1).$$

Ponadto

$$\left|\int_{-1}^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w\right|=\left|\int_1^{|x|}\frac{e^{-\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w\right|\leq\int_1^{|x|}\frac{e^{-\frac{w}{2}}}{w}\mathrm{d}w\leq\int_1^{|x|}e^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w\ll 1.$$

Zatem

$$G_6(F,x) \ll e^{-|x|/2}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}}\left|\int\limits_0^{-|x|}\frac{e^{\frac{w}{2}}}{w-\log n}\mathrm{d}w\right|\right) \ll e^{-|x|/2}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\mu_E(n)|}{n^{3/2}\log n}\right) \ll e^{-|x|/2}.$$

Z definicji funkcji G_7 (cf. Lematy 3.25. oraz 3.26.) mamy

$$G_7(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int\limits_i^{-|x|}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}}(\mathrm{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{sw}}{F(s)}e^{-w}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w.$$

Z Lematu 3.21. wynika, że wszystkie zera nietrywialne funkcji F są pojedyncze, zatem dla $\gamma > 0$ mamy

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho}(\mathrm{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{sw}}{F(s)} = (\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}.$$

Ponieważ dla każdego ustalonego σ oraz $t > 0$ mamy

$$\mathrm{tg}(\sigma+it) = i + \mathrm{O}\left(e^{-2t}\right), \quad \text{gdy} \quad t \to \infty, \tag{3.76}$$

a z Lematu 3.21. wynika, że spełniona jest hipoteza Riemanna dla funkcji F oraz $\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)\log(\gamma+2)$ zatem dla dowolnych u, u_0 takich, że $u \le u_0$, mamy

$$(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)} \ll e^{-2\pi\gamma}\left|e^{\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)(u+iv)}\right|(\gamma+2)\log(\gamma+2) \ll_{u_0} e^{-(v+2\pi)\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2).$$

Z Lematu 2.7. wnosimy, że dla każdego $k = 0,1,2,\ldots$ mamy

$$N_F(k) - N_F(k+1) = \mathrm{O}_F(\log k).$$

W konsekwencji dla takich k mamy

$$\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\right| \ll_{u_0} \sum_{k<\gamma\le k+1} e^{-(v+2\pi)\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2) \ll_{u_0}$$
$$e^{-(v+2\pi)(k+1)}(k+3)\log^2(k+3),$$

a dalej dla $v > -2\pi+\epsilon$, dla dowolnego $\epsilon > 0$, mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\right| \ll_{u_0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(v+2\pi)(k+1)}(k+3)\log^2(k+3) \ll_{u_0} 1.$$

Zatem dla $v > -2\pi$ szereg

$$\sum_{\gamma>0}(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}$$

jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie względem w, a z Lematów 1.12. oraz 1.26.

$$m_1(F,w)=\sum_{\gamma>0}(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\,\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}.$$

Zatem

$$G_7(F,x)=-\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\int_i^{-|x|}\sum_{\gamma>0}(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\,\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\mathrm{d}w,$$

a w konsekwencji, z Lematu 1.8., mamy

$$G_7(F,x)=-\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\sum_{\gamma>0}(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)\,\frac{1}{F'(\rho)}\int_i^{-|x|}e^{(\rho-1)w}\mathrm{d}w=$$
$$-\frac{1}{2i}\sum_{\gamma>0}\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{(\rho-1)F'(\rho)}e^{-i\gamma|x|}+\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\sum_{\gamma>0}\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{(\rho-1)F'(\rho)}e^{-\gamma-i/2}.$$

Ze względu na oszacowanie $\frac{1}{F'(\rho)}\ll(\gamma+2)\log(\gamma+2)$ oraz (3.76) mamy

$$\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{\overline{\rho}F'(\rho)}\ll\frac{e^{-2\pi\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2)}{\gamma}\ll e^{-2\pi\gamma}\log(\gamma+2).$$

Ponownie z Lematu 2.7. mamy

$$N_F(k)-N_F(k+1)=\mathrm{O}_F(\log k).$$

W konsekwencji, dla $k=0,1,2,\dots$, mamy

$$\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{\overline{\rho}F'(\rho)}\right|\ll e^{-2\pi k}\log^2(k+3),$$

a dalej

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{\overline{\rho}F'(\rho)}\right|\ll\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\pi k}\log^2(k+3)\ll 1.$$

Ponieważ $\rho-1=-\frac{1}{2}+i\gamma=-\overline{\rho}$ mamy stąd

$$\frac{e^{-|x|/2}}{2i}\sum_{\gamma>0}\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{(\rho-1)F'(\rho)}e^{-\gamma-i/2}=\mathrm{O}\left(e^{-|x|/2}\right)$$

oraz

$$-\frac{1}{2i}\sum_{\gamma>0}\frac{(\mathrm{tg}(\pi\rho)-i)}{(\rho-1)F'(\rho)}e^{-i\gamma|x|}=\mathrm{O}(1),$$

a zatem

$$G_7(F,x)=\mathrm{O}(1).$$

Analogicznie mamy

$$G_8(F,x)=\mathrm{O}(1).$$

Dla dowolnego $T>0$ mamy

$$\int_i^{-|x|}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+iT}(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+iT}\int_i^{-|x|}(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\mathrm{d}w\,\mathrm{d}s$$

ponieważ funkcja

$$(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}$$

jest ciągła w obszarze całkowania. Na mocy Lematu 3.22. oraz (3.76) mamy

$$(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\ll_x e^{-2\pi t}e^{-tv}=e^{-(v+2\pi)t}.$$

Zatem dla $v>-2\pi$ oraz dla dowolnego $T>0$ mamy

$$\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{3}{2}+i\infty}\left|(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\right||\mathrm{d}s|\ll_x\frac{1}{v+2\pi}e^{-T(v+2\pi)}.$$

W konsekwencji całka

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\mathrm{d}s$$

jest zbieżna bezwzględnie niemal jednostajnie względem w dla $v>-2\pi$ [24, cf. (3.33)]. Zatem z Lematu 1.10. mamy

$$G_4(F,x)=-\frac{e^{-|x|/2}}{4\pi}\int_i^{-|x|}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}(\operatorname{tg}(\pi s)-i)\frac{e^{(s-1)w}}{F(s)}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w=-\frac{e^{-|x|/2}}{4\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{(\operatorname{tg}(\pi s)-i)}{F(s)}\int_i^{-|x|}e^{(s-1)w}\mathrm{d}w\,\mathrm{d}s.$$

Dalej z (3.76) oraz Wniosku 2.5. mamy

$$G_4(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{4\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{(\mathrm{tg}(\pi s)-i)}{F(s)}\frac{e^{-(s-1)|x|}-e^{(s-1)i}}{s-1}\mathrm{d}s \ll$$

$$e^{-|x|/2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} e^{-2\pi t}\frac{e^{-(\sigma-1)|x|}+e^{-t}}{|s-1|}|\mathrm{d}s| =$$

$$e^{-|x|/2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+i\infty} e^{-2\pi t}\frac{e^{-|x|/2}+e^{-t}}{|s-1|}|ds| \ll e^{-|x|/2}, \quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Rozumując analogicznie jak powyżej otrzymujemy $G_5(F,x) \ll e^{-|x|/2}$. Ponieważ spełniona jest hipoteza Riemanna dla funkcji F mamy zatem

$$R(F,w) = \operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{e^{sw}}{F(s)} = e^{\frac{w}{2}}\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)}$$

i w konsekwencji

$$G_2(F,x) = -\frac{e^{-|x|/2}}{2}\int_i^{-|x|}R(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w = -\frac{e^{-|x|/2}}{2}\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)}\int_i^{-|x|}e^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w =$$

$$e^{-|x|/2}\left(\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)}\right)\left(e^{|x|/2}-e^{-i/2}\right) \ll 1.$$

Dla $R^*(F,w)$ mamy

$$R^*(F,w) = \begin{cases} e^{\frac{w}{2}}\operatorname{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{tg}(\pi s)}{F(s)} + we^{\frac{w}{2}}\operatorname{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{(s-\frac{1}{2})\mathrm{tg}(\pi s)}{F(s)}, & \text{gdy } F\left(\frac{1}{2}\right)=0 \\ \frac{e^{\frac{w}{2}}}{F(\frac{1}{2})}\operatorname{Res}_{s=\frac{1}{2}}\mathrm{tg}(\pi s), & \text{gdy } F\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0. \end{cases}$$

Zatem w przypadku, gdy $F\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ mamy

$$G_3(F,x) = \frac{i}{2}e^{-|x|/2}\int_i^{-|x|}R^*(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w = \frac{i}{2}\frac{e^{-|x|/2}}{F\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\mathrm{tg}(\pi s)\right)\int_i^{-|x|}e^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w \ll e^{-|x|/2}e^{|x|/2} = 1.$$

Ponieważ mamy

$$\lim_{s\to\frac{1}{2}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,\pi s = -\pi$$

zatem

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}(\pi s)}{F(s)} = -\pi\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)}.$$

W przypadku, gdy $F\left(\frac{1}{2}\right)=0$ mamy

$$
\begin{aligned}
G_3(F,x)=\frac{i}{2}e^{-|x|/2}\left(\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{tg}(\pi s)}{F(s)}\int\limits_i^{-|x|}e^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w+\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}(\pi s)}{F(s)}\int\limits_i^{-|x|}we^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w\right)=\\
e^{-|x|/2}\left(\mathrm{C}_7\int\limits_i^{-|x|}e^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w+\frac{1}{2}\mathrm{C}_6\int\limits_i^{-|x|}we^{-\frac{w}{2}}\mathrm{d}w\right)=\\
e^{-|x|/2}\left(-2\mathrm{C}_7\left(e^{|x|/2}-e^{-i/2}\right)-\mathrm{C}_6\left(e^{-\frac{w}{2}}(w+2)\Big|_i^{-|x|}\right)\right)=\\
-2\mathrm{C}_7+\mathrm{C}_6|x|+2\mathrm{C}_7e^{-i/2}e^{-|x|/2}+\mathrm{C}_6e^{-|x|/2}(i+2)e^{-i/2}-2\mathrm{C}_6=\mathrm{C}_6|x|+\mathrm{O}(1).
\end{aligned}
$$

□

Lemat 3.28. *Niech zachodzi (3.2), $f(x)\ll x^{1/4}g(x)$, dla $x\to+\infty$, gdzie $g\in\mathfrak{G}$ oraz $g(x)\ll\log\log x$, dla $x\to+\infty$. Wtedy dla $x\leq-1$ mamy*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}^{-1}G(F,x)=e^{-|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)K\left(n,e^{|x|}\right)+\\
\frac{i}{\mathrm{C}\pi\omega_E}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/2}}+e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}+\mathrm{C}^{-1}\mathrm{C}_6|x|+\mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right),
\end{aligned}
$$

dla $|x|\to\infty$, gdzie C jest stałą z Lematu 3.18.

Dowód. Przy założeniu (3.2) na mocy Lematu 3.18. mamy

$$
\mathrm{C}^{-1}G_1(F,x)=e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\mu_E(n)K(n,e^{|x|})+\frac{i}{\mathrm{C}\pi\omega_E}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/2}}+e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}+\mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).
$$

Na mocy Lematu 3.27. mamy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}^{-1}G(F,x)=e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\mu_E(n)K(n,e^{|x|})+\frac{i}{\mathrm{C}\pi\omega_E}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}}+\\
e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}}+\frac{\mathrm{C}_6}{\mathrm{C}}|x|+\mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Przy założeniu (3.2) z Lematu 3.6. mamy

$$
e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\mu_E(n)K(n,e^{|x|})=e^{-|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)K(n,e^{|x|})+\mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).
$$

□

Lemat 3.29. *Niech zachodzi* (3.2), $f(x) \ll x^{1/4} g(x)$, *gdzie* $g \in \mathfrak{G}$ *oraz* $g(x) \ll \log\log x$. *Wtedy dla* $\Im z > 0$ *mamy*

$$G(F,z) = -\sum_{\gamma>0} \frac{e^{i\gamma z}}{\overline{\rho} F'(\rho)}.$$

Dowód. Ponieważ spełnione są założenia Lematu 3.21. zatem zachodzi hipoteza Riemanna dla funkcji F, wszystkie zera nietrywialne są pojedyncze oraz zachodzi (3.52). W konsekwencji dla $u_0 \le u \le u_1$ mamy

$$\left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\right| = \frac{e^{\frac{1}{2}u - \gamma v}}{\left|F'(\rho)\right|} \ll_{u_0,u_1} e^{-\gamma v}(\gamma+2)\log(\gamma+2).$$

Z Lematu 2.7. mamy

$$N_F(k) - N_F(k+1) = \mathrm{O}_F(\log k).$$

W konsekwencji dla takich $k = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\sum_{k<\gamma\le k+1} \left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\right| \ll_{u_0,u_1} e^{-kv}(k+3)\log^2(k+3),$$

a dalej, dla $v \ge \epsilon$, dla każdego $\epsilon > 0$, mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k<\gamma\le k+1} \left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}\right| \ll_{u_0,u_1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kv}(k+3)\log^2(k+3) \ll_{u_0,u_1,\epsilon} 1.$$

Stąd dla $v > 0$ szereg

$$\sum_{\gamma>0} \frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)} \tag{3.77}$$

jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie. Ponadto z [24, cf. Lemat 2.6]

$$m(F,w) = \sum_{\gamma>0} \frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}, \qquad \text{dla } v > 0.$$

Dalej mamy

$$\sum_{\gamma>0} \int_{z+i\infty}^{z} \left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)} e^{-w}\right| |\mathrm{d}w| = \sum_{\gamma>0} \int_{y}^{\infty} \left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)} e^{-w}\right| \mathrm{d}v \ll_x \sum_{\gamma>0} \int_{y}^{\infty} e^{-\gamma v}(\gamma+2)\log(\gamma+2)\,\mathrm{d}v,$$

a ponieważ $v \ge y > 0$, zatem

$$\int_{y}^{\infty} e^{-\gamma v}(\gamma+2)\log(\gamma+2)\,\mathrm{d}v = -\frac{e^{-\gamma v}}{v\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2)\Big|_{y}^{\infty} = \frac{e^{-\gamma y}}{y\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2)$$

i w konsekwencji

$$\sum_{\gamma>0}\int\limits_{z+i\infty}^{z}\left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}e^{-w}\right||\mathrm{d}w|\ll_x\sum_{\gamma>0}\frac{e^{-\gamma y}}{y\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2).$$

Z Lematu 2.7. mamy

$$\sum_{k<\gamma\le k+1}\frac{e^{-\gamma y}}{y\gamma}(\gamma+2)\log(\gamma+2)\ll\frac{e^{-ky}}{yk}(k+3)\log^2(k+3),$$

a zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k<\gamma\le k+1}\int\limits_{z+i\infty}^{z}\left|\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}e^{-w}\right||\mathrm{d}w|\ll_x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-ky}}{yk}(k+3)\log^2(k+3)\ll_x 1.$$

Ponieważ szereg (3.77) jest zbieżny bezwzględnie niemal jednostajnie, zatem z Lematu 1.8. mamy, że

$$\int\limits_{z+iT}^{z}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}e^{-w}\mathrm{d}w=\sum_{\gamma>0}\int\limits_{z+iT}^{z}\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}e^{-w}\mathrm{d}w$$

dla każdego $T>0$. Zatem z Lematu 1.9. otrzymujemy

$$\begin{aligned}G(F,z)=e^{\frac{z}{2}}\int\limits_{z+i\infty}^{z}m(F,w)e^{-w}\mathrm{d}w=e^{\frac{z}{2}}\int\limits_{z+i\infty}^{z}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{\rho w}}{F'(\rho)}e^{-w}\mathrm{d}w=\\ e^{\frac{z}{2}}\sum_{\gamma>0}\frac{1}{F'(\rho)}\int\limits_{z+i\infty}^{z}e^{(\rho-1)w}\mathrm{d}w=e^{\frac{z}{2}}\sum_{\gamma>0}\frac{1}{F'(\rho)}\frac{1}{(\rho-1)}e^{(\rho-1)w}\Big|_{z+i\infty}^{z}=\\ e^{\frac{z}{2}}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{(\rho-1)z}}{(\rho-1)F'(\rho)}-\lim_{t\to\infty}e^{\frac{z}{2}}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{(\rho-1)(z+it)}}{(\rho-1)F'(\rho)}.\end{aligned}$$

Ponieważ spełniona jest hipoteza Riemanna dla funkcji F to $(\rho-1)=-\frac{1}{2}+i\gamma=-\overline{\rho}$ oraz

$$\left|\frac{e^{i\gamma z-\frac{1}{2}-\gamma t}}{\overline{\rho}F'(\rho)}\right|\ll\frac{e^{-\gamma t}}{|\gamma|\left|F'(\rho)\right|}\ll\frac{e^{-\gamma t}(\gamma+2)\log(\gamma+2)}{|\gamma|}\ll e^{-\gamma t}\log(\gamma+2).$$

W konsekwencji

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k<\gamma\le k+1}\frac{e^{i\gamma z-\frac{1}{2}-\gamma t}}{\overline{\rho}F'(\rho)}=0,$$

a zatem

$$G(F,z)=-\sum_{\gamma>0}\frac{e^{i\gamma z}}{\overline{\rho}F'(\rho)}.$$

□

Dla $\Im z>0$ kładziemy

$$\tilde{G}(F,z):=\frac{1}{\mathbb{C}}\overline{G}(F,-z)=\frac{1}{\mathbb{C}}\overline{G(F,-\overline{z})}.$$

Ponieważ funkcja F jest funkcją rzeczywistą na osi rzeczywistej (cf. (1.24)), zatem przy założeniach Lematu 3.29. mamy

$$\tilde{G}(F,z) = -\frac{1}{\overline{\mathrm{C}}}\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\rho F'(\overline{\rho})}e^{i\gamma z}. \tag{3.78}$$

Lemat 3.30. *Niech zachodzi (3.2), $f(x) \ll x^{1/4}g(x)$, gdzie $g \in \mathfrak{G}$ oraz $g(x) \ll \log\log x$. Wtedy funkcja $\tilde{G}(F,\cdot)$ należy do klasy $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Z (3.78) widać, że funkcja $\tilde{G}(F,\cdot)$ jest wymaganej postaci. Na mocy Lematu 3.21. mamy, że

$$\frac{1}{F'(\rho)} \ll (\gamma+2)\log(\gamma+2),$$

zatem wobec Lematu 2.7. mamy

$$\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}F'(\overline{\rho})}\right| \ll \sum_{k<\gamma\le k+1}\frac{\log(\gamma+2)}{(\gamma+2)^2} \ll \frac{\log^2(k+3)}{(k+2)^2}.$$

Stąd

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k<\gamma\le k+1}\left|\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}F'(\overline{\rho})}\right| \ll \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log^2(k+3)}{(k+2)^2} \ll 1.$$

Zatem spełniony jest warunek (1) klasy $\mathfrak{A}$ ze stałą $B(\tilde{G}) = 2$. Na mocy Lematu 3.28. spełniony jest warunek (2) ze stałą $L_0 = 1$, ponieważ dla $x \ge 1$

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0^+}\Re\left(\tilde{G}(F,x+iy)\right) = \\
&\qquad \Re\left(\tilde{G}(F,x)\right) = \Re\left(\overline{\mathrm{C}^{-1}}\overline{G}(F,-x)\right) = \Re\left(\overline{\mathrm{C}^{-1}G(F,-x)}\right) = \\
&e^{-|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,e^{|x|}) + \Re\left(\frac{i}{\mathrm{C}\pi\omega_E}\right)\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/2}} + e^{-|x|/4}\sum_{n\le e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} + \\
&\qquad \Re\left(\frac{\mathrm{C}_6}{\mathrm{C}}\right)|x| + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).
\end{aligned}$$

Z Lematu 3.24. wynika, że funkcja $\tilde{G}$ jedyne osobliwości ma w punktach $z = -\frac{\log n}{\overline{C}}$, gdzie $n \ge 1$ oraz $\mu_E(n) \ne 0$, zatem dla $x \ge 1$ funkcja jest holomorficzna. Z Lematu 3.23. wynika oczekiwane oszacowanie dla $y > 0$, zatem przez ciągłość funkcji $\tilde{G}$ dla $x \ge 1$ warunek (3) jest spełniony ze stałą $L_0 = 1$. Przyjmując $x_1 = -\log n$, $n \ge 1$ taki, że $\mu_E(n) > 0$, oraz $x_1' = -\log m$, $m \ge 1$ taki, że $\mu_E(m) < 0$ i kładąc $\phi(\delta) = \log\left(\frac{1}{\delta}\right)$ oraz parametry θ_1, θ_2, θ_1', θ_2' tak by $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, $0 < \theta_1' < \theta_2' < \pi$, na mocy Lematu 3.24. wnosimy, że dla takich parametrów spełniony jest warunek (4). Warunek (5) jest spełniony ponieważ dla funkcji F spełniona jest formuła Riemanna–von Mangoldta (1.21). □

Lemat 3.31. *Niech zachodzi (3.2), $f(x) \ll x^{1/4}g(x)$, gdzie $g \in \mathfrak{G}$. Jeżeli $g(x) = \mathrm{o}(\log\log\log x)$, to*

$$x^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x) + \mathrm{E}\sqrt{x}\sum_{n\le x}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{D}x^{1/2}\log x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\log\log\log x\right)$$

dla $x \to \infty$, gdzie

$$\mathrm{E} := \Re\left(\frac{i}{\mathrm{C}\pi\omega_E}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\mathrm{Q}_E\pi}} < 0 \tag{3.79}$$

oraz

$$\mathrm{D} := \Re\left(\frac{\mathrm{C}_6}{\mathrm{C}}\right) = \begin{cases} \omega_E\pi\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{Q}_E}}\frac{1}{F'\left(\frac{1}{2}\right)}, \text{ gdy } & F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ 0, \quad \text{gdy } F\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0. \end{cases} \tag{3.80}$$

Dowód. Na mocy Lematu 3.30.

$$\tilde{G}(F,x) \in \mathfrak{A}.$$

Na mocy Lematu 3.28.

$$\Re\tilde{G}(F,x) = e^{-|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J\left(n, e^{|x|}\right) +$$
$$\mathrm{E}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} + \mathrm{D}|x| + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).$$

Z Lematu 3.2. mamy

$$e^{-|x|/4}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} \ll g\left(e^{|x|}\right), \quad \text{gdy } |x| \to \infty,$$

zatem

$$\Re\tilde{G}(F,x) = e^{-|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J\left(n, e^{|x|}\right) + \mathrm{E}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{D}|x| + \mathrm{O}\left(g\left(e^{|x|}\right)\right).$$

Z Lematu 1.15. wnosimy, że

$$\Re\tilde{G}(F,x) = \Omega_\pm\left(\log\left(\frac{\log x}{b_0(\log\log x)^3}\right)\right) = \Omega_\pm(\log\log x).$$

Zatem

$$e^{|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J\left(n, e^{|x|}\right) + \mathrm{E}e^{|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} +$$
$$\mathrm{D}e^{|x|/2}|x| + \mathrm{O}\left(e^{|x|/2}g\left(e^{|x|}\right)\right) = \Omega_\pm\left(e^{|x|/2}\log\log x\right).$$

Ponieważ $g(x) = \mathrm{o}(\log\log\log x)$ zatem

$$e^{|x|/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J\left(n, e^{|x|}\right) + \mathrm{E}e^{|x|/2}\sum_{n\leq e^{|x|}}\frac{\mu_E(n)}{\sqrt{n}} + \mathrm{D}e^{|x|/2}|x| = \Omega_\pm\left(e^{|x|/2}\log\log x\right)$$

i zmieniając skalę z wykładniczej na liniową otrzymujemy pierwszą część tezy lematu. Ponieważ funkcja, gdy $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, to przy założeniach niniejszego lematu, z Lematu 3.21. wnosimy, że $F'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, a w konsekwencji z (3.73) mamy

$$\mathrm{D} = \Re\left(\frac{\mathrm{C}_6}{\mathrm{C}}\right) = -\frac{1}{2\omega_E}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{Q}_E}}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)} = \frac{\omega_E}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{Q}_E}}\left|\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right|\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)}.$$

Ponieważ mamy

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}}\frac{1}{F(s)} = \begin{cases} \frac{1}{F'\left(\frac{1}{2}\right)}, \text{ gdy } F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ 0, \text{ gdy } F\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, \end{cases} \tag{3.81}$$

zatem otrzymujemy dokładną wartość stałej D. □

Lemat 3.32. *Niech zachodzi* (3.2), $f(x) \ll x^{1/4}g(x)$, *gdzie* $g \in \mathfrak{G}$ *oraz* $g(x) \ll \log\log x$, *dla* $x \to \infty$. *Niech ponadto* $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. *Wtedy* $F'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Dowód. Ponieważ zachodzi (3.2) oraz $f(x) \ll x^{1/4}g(x) \ll x^{1/4}\log\log x$ zatem na mocy Lematu 3.21. zachodzi hipoteza Riemanna dla funkcji F oraz wszystkie zera nietrywialne są pojedyncze. Zatem $F'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ oraz $\mathbb{R} \ni F(\sigma) \neq 0$ dla $\sigma > \frac{1}{2}$ i w konsekwencji $F(\sigma)$ ma stały znak dla $\sigma > \frac{1}{2}$. Zatem przy powyższych założeniach $F'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\sigma) > 0$ dla pewnego $\sigma > \frac{1}{2}$. Aby zakończyć dowód wystarczy wykazać, że dla $\sigma = 2$ mamy $F(2) > 0$. Dla $\sigma > 1$ mamy (cf. (1.23))

$$F(s) = \prod_p F_p(s),$$

a z (1.22) dla każdego $p \nmid N_E$ mamy, że

$$F_p(s) = \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_2(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

gdzie $|\alpha_j(p)| \leq 1$. Ponieważ $F(\sigma) \in \mathbb{R}$ zatem współczynniki a_F szeregu Dirichleta funkcji F są rzeczywiste. Stąd albo $\alpha_j(p) \in \mathbb{R}$, albo $\alpha_1(p) = \overline{\alpha_2(p)}$. W pierwszym przypadku mamy

$$\left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^2}\right)^{-1} > 0.$$

W drugim

$$\left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_2(p)}{p^2}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\overline{\alpha_1(p)}}{p^2}\right)^{-1} = \left|1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^2}\right|^{-2} > 0.$$

Zatem

$$F_p(2) = \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_2(p)}{p^2}\right)^{-1} > 0.$$

Jeżeli $p \mid N_E$, to wtedy

$$F_p(2) = \left(1 - \frac{a_p}{p^2}\right)^{-1}, \quad \text{gdzie } |a_p| \leq 1,$$

zatem $F_p(2) > 0$. Ponieważ $F(2) \neq 0$, więc $F(2) > 0$. □

Wniosek 3.33. *Niech zachodzi* (3.2), $f(x) \ll x^{1/4} g(x)$, *gdzie* $g \in \mathfrak{G}$ *oraz* $g(x) \ll \log\log x$. *Jeżeli* $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, *to wtedy*

$$\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} \omega_E.$$

Dowód. Z Lematu 3.32. wnosimy, że $F'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, a zatem na mocy (3.80) i (3.81) otrzymujemy tezę. □

Lemat 3.34. *Niech zachodzi* (3.2) *dla pewnej funkcji* $g \in \mathfrak{G}$. *Dla tej funkcji* g *mamy wtedy, że*

$$\sum_{n \le x} \frac{\mu_E(n)}{n^{1/4}} \ll x^{1/4} g(x), \quad \text{dla } |x| \to \infty \tag{3.82}$$

oraz

$$\sum_{n \le x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{x}{n}}\right) - x^{1/4} \sum_{n \le x} \mu_E(n) J(n,x) = \mathrm{O}\left(\sqrt{x}\, g(x)\right), \tag{3.83}$$

dla $|x| \to \infty$. *Ponadto, jeżeli zachodzi*

$$\sum_{n \le x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{x}{n}}\right) \ll \sqrt{x}\, g(x), \tag{3.84}$$

dla $|x| \to \infty$, *to wtedy dla każdej stałej rzeczywistej* $a \neq 0$ *zachodzi*

$$x^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J\left(n, a^2 x\right) \ll_a \sqrt{x}\, g(x), \qquad |x| \to \infty$$

oraz

$$\sum_{n \le x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4} \cos\left(a \sqrt{\frac{x}{n}}\right) \ll_a \sqrt{x}\, g(x), \tag{3.85}$$

dla $|x| \to \infty$.

Dowód. Z Lematu 3.2. dla $\alpha = \frac{1}{4}$ mamy (3.82). Ponadto mamy, że

$$\sum_{n \le x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{2}{\mathrm{Q_E}} \sqrt{\frac{x}{n}}\right) - x^{1/4} \sum_{n \le x} \mu_E(n) J(n,x) = \sum_{n \le x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4},$$

a zatem z (3.82) wnosimy, że zachodzi (3.83). Załóżmy również, że zachodzi (3.84). Ponieważ zachodzi (3.2) z Lematu 3.6. mamy, że

$$x^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J(n,x) \ll \sqrt{x}\, g(x), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Podstawiając bx za x w powyższej formule, gdzie $b > 0$ jest dowolną stałą, mamy

$$x^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J(n, bx) \ll_b \sqrt{x}\, g(x), \quad \text{dla } |x| \to \infty.$$

Ponieważ zachodzi (3.2) zatem z Lematu 3.6. wynika, że

$$x^{1/4} \sum_{n > x} \mu_E(n) J(n, bx) \ll_b \sqrt{x}\, g(x), \quad \text{dla } |x| \to \infty$$

i, po odjęciu stronami, dostajemy

$$x^{1/4}\sum_{n\le x}\mu_E(n)J(n,bx)\ll_b \sqrt{x}\,g(x),\quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Z

$$\sum_{n\le x}\mu_E(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/4}\cos\left(a\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-x^{1/4}\sum_{n\le x}\mu_E(n)J(n,bx)=\sum_{n\le x}\mu_E(n)\left(\frac{bx}{n}\right)^{1/4},$$

gdzie $a:=\pm\sqrt{b}$, oraz z (3.82) wnosimy, że zachodzi (3.85). □

Twierdzenie 3.1. *Dla każdej funkcji* $g\in\mathfrak{G}$ *takiej, że* $g(x)=o(\log\log\log x)$ *mamy*

$$\sum_{n\le x}\mu_E(n)=\Omega\big(\sqrt{x}\,g(x)\big)$$

lub

$$\forall_{a\neq 0}\quad \sum_{n\le x}\mu_E(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{1/4}\cos\left(a\sqrt{\frac{x}{n}}\right)=\Omega\big(\sqrt{x}\,g(x)\big)$$

lub

$$\omega_E\sum_{n\le x}\mu_E(n)\sqrt{\frac{x}{n}}=\begin{cases}\Omega_\pm\big(\sqrt{x}\log\log\log x\big), & \text{gdy } F\left(\frac12\right)\neq 0\\ \Omega_+\big(\sqrt{x}\log x\big), & \text{gdy } F\left(\frac12\right)=0.\end{cases}$$

Dowód. Niech zachodzi (3.2), gdyż w przeciwnym wypadku otrzymujemy pierwszy człon alternatywy. Niech zachodzi (3.84), gdyż w przeciwnym wypadku z Lematu 3.34. wnosimy, że zachodzi drugi człon alternatywy. Aby zakończyć dowód wykażemy, że powyższe założenia implikują trzeci człon alternatywy. Z (3.83) mamy, że

$$x^{1/4}\sum_{n\le x}\mu_E(n)J(n,x)\ll \sqrt{x}\,g(x),\quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Stąd z Lematu 3.6. wynika, że

$$x^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x)\ll \sqrt{x}\,g(x),\quad \text{dla } |x|\to\infty.$$

Z założenia $g(x)=\mathrm{o}(\log\log\log x)$ wnosimy, że

$$x^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x)=\mathrm{o}\big(\sqrt{x}\log\log\log x\big),\quad \text{dla } |x|\to\infty. \tag{3.86}$$

Jeżeli $F\left(\frac12\right)\neq 0$, to $\mathrm{D}=0$ i z Lematu 3.31. mamy

$$x^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x)+\mathrm{E}\sum_{n\le x}\mu_E(n)\sqrt{\frac{x}{n}}=\Omega_\pm\big(\sqrt{x}\log\log\log x\big),$$

zatem z (3.86) mamy

$$\mathrm{E}\sum_{n\le x}\mu_E(n)\sqrt{\frac{x}{n}}=\Omega_\pm\big(\sqrt{x}\log\log\log x\big)$$

dla $x \to \infty$. Jeżeli $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, to $\mathrm{D} \neq 0$ i z Lematu 3.31. oraz (3.86) mamy

$$\mathrm{E} \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} + \mathrm{D}\sqrt{x} \log x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x} \log\log\log x\right),$$

a zatem

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} + \sqrt{x} \log x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x} \log\log\log x\right).$$

Stąd mamy

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} = \Omega_{-}\left(\sqrt{x} \log x\right)$$

czyli

$$-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} = \Omega_{+}\left(\sqrt{x} \log x\right).$$

Z (3.79) oraz Wniosku 3.33. mamy, że

$$\operatorname{sgn}\left(-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\right) = \operatorname{sgn} \omega_E.$$

□

Twierdzenie 3.2. *Dla każdej funkcji $g \in \mathfrak{G}$ takiej, że $g(x) = o(\log\log\log x)$ mamy*

$$\sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} = \Omega\left(\sqrt{x} g(x)\right)$$

lub

$$\forall_{a \neq 0} \quad \sum_{n \leq x} \mu_E(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/4} \cos\left(a \sqrt{\frac{x}{n}}\right) = \Omega\left(\sqrt{x} g(x)\right).$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy stosując *reductio ad absurdum*. Niech zachodzi

$$\sum_{n \leq x} \mu_E(n) \sqrt{\frac{x}{n}} \ll \sqrt{x} g(x), \quad \text{dla } |x| \to \infty,$$

dla $g \in \mathfrak{G}$ oraz $g(x) = o(\log\log\log x)$, gdyż w przeciwnym przypadku zachodzi pierwszy człon alternatywy. Z Lematu 3.3 wnosimy, że zachodzi (3.2), a zatem zachodzą również oszacowania (3.82) oraz (3.83). Niech zachodzi zatem (3.84), gdyż w przeciwnym przypadku z Lematu 3.34. wnosimy, że zachodzi drugi człon alternatywy. W konsekwencji z (3.83) otrzymujemy, że $f(x) \ll x^{1/4} g(x)$. Z Lematu 3.31. wnosimy, że

$$x^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J(n,x) + \mathrm{D}\sqrt{x} \log x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x} \log\log\log x\right).$$

Jeżeli $F\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ i w konsekwencji $\mathrm{D} = 0$, to mamy

$$x^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(n) J(n,x) = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x} \log\log\log x\right),$$

co prowadzi do sprzeczności na mocy Lematu 3.34. Jeżeli $F\left(\frac{1}{2}\right)=0$ i w konsekwencji $\mathrm{D}\neq 0$, to mamy

$$x^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x)+\mathrm{D}\sqrt{x}\log x=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\log\log\log x\right),$$

a zatem

$$\frac{x^{1/4}}{\mathrm{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_E(n)J(n,x)=\Omega_{-}\left(\sqrt{x}\log x\right),$$

co znów prowadzi do sprzeczności na mocy Lematu 3.34. □

Bibliografia

[1] A. Akbary, M.R. Murty, *Uniform distribution of zeros of Dirichlet series*, w *'Anatomy of Integers'*, CRM Proceedings & Lecture Notes 46, AMS, Providence, RI, 2008, 143–158.

[2] K. Bartz, *On some complex explicit formulæ connected with the Möbius function. I*, Acta Arith. 57 (1991), no. 4, 283–293.

[3] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$, Journal of AMS (4) 14 (2001), 843–939.

[4] J. B. Conrey, A. Ghosh, *On the Selberg class of Dirichlet series: small degries*, Duke Math. J. 72 (1993), 673–693.

[5] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publicationes mathématique de'l I.H.É.S. 43 (1974), 273–307.

[6] P. Deligne, J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Annales scientifiques de l'É.N.S. (4) 7 (1974), 507–530.

[7] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. I, McGraw–Hill, New York, 1953.

[8] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw–Hill, New York, 1953.

[9] K. Gierszewski, *On some complex explicit formulæ connected with Dirichlet coefficients of inverses of special type L-functions from the Selberg class*, ukaże się w Functiones et Approximatio.

[10] K. Gierszewski, *On some complex explicit formulæ connected with Dirichlet coefficients of inverses of special type L-functions from the Selberg class*,
http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/prace-studentow/st/pliki/karol-gierszewski-3.pdf.

[11] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques*, Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), 199–220.

[12] E. Hecke, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I.*, Math. Ann., 114 (1937), 1–28.

[13] A. E. Ingham, *On two conjectures in the theory of numbers*, Amer. J. Math. 64 (1942) 313–319.

[14] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Colloquium Publications Vol. 53, AMS, Providance, RI, 2004

[15] H. Jacquet, J. A. Shalika, *A Non-Vanishing Theorem for Zeta Functions of* GL_n, Inventiones Math. 38 (1976), 1–16

[16] J. Kaczorowski, *Axiomatic Theory of L-Functions: the Selberg class*, Analytic Number Theory eds. A. Perelli & C. Viola, 133–209, Springer-Verlag, 2006.

[17] J. Kaczorowski, *Results on the Möbius function*, J. London Math. Soc. (2) 75 (2007), 509–521.

[18] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the prime number theorem for the Selberg class*, Arch. Math. 80 (2003), 255–263.

[19] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the structure of the Selberg class, I:* $0 \leqslant d \leqslant 1$, Acta Math. 182 (1999), 207–241.

[20] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the structure of the Selberg class, II: invariants and conjectures*, J. reine angew. Math. 524 (2000), 73–96.

[21] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the structure of the Selberg class, VII:* $1 < d < 2$, Annals of Mathematics 173 (2011), 1397–1441.

[22] J. Kaczorowski, K. Wiertelak, *Ω-estimates for a class of arithmetic error terms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (3) 142 (2007), 385–394.

[23] R. B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin–Barnes Integrals*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications Vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] A. Łydka, *Formuły dokładne związane z funkcją Möbiusa krzywej eliptycznej*, rozprawa doktorska,

[25] A. Łydka, *On complex explicit formulæ connected with the Möbius function of an elliptic curve*, ukaże się w Canadian Mathematical Bulletin.

[26] F. Mertens, *Über eine zahlentheoretische Function*, Sitsunberichte Akad. Wiss. Wien IIa 106 (1897), 761–830.

[27] N. Ng, *The distribuition of the summatory function of the Möbius function*, Proc. London Math. Soc. (3) 89 (2004) 361–389.

[28] A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*, J. reine angew. Math. 357 (1985), 138–160.

[29] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin–Götingen–Heidelberg, 1957.

[30] R. Taylor, A. Wiles, *Ring–theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Mathematics 141 (1995), 553–572.

[31] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[32] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics 141 (1995), 443–551.

[33] M.-F. Vignéras, *Facteurs gamma et équations fonctionnelles*, Modular Functions of One Complex Variable eds. J.-P. Serre & D. B. Zagier, Springer Lect. Notes Math. 627 (1977), 79–103.

[34] T. J. Stieltjes, *Lettre à Hermite de 11 juillet 1885, Lettre 79,* Correspondance d'Hermite et Stieltjes eds. B. Baillaud et H. Bourget, 160–164, Paris, 1905.

[35] E. C. Titchmarch, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.

[36] E. C. Titchmarch, *The theory of the Riemann zeta function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.