

Politechnika Poznańska
Wydział Elektryczny
Instytut Matematyki

WYBRANE WŁASNOŚCI PRZESTRZENI
CALDERÓNA - ŁOZANOWSKIEGO

KAROL LEŚNIK

Promotor pracy:
dr hab. inż.
Paweł Kolwicz,
profesor nadzw.

Poznań, 20 marca 2012

Podziękowania

Pragnę podziękować mojemu Nauczycielowi i Promotorowi, Profesorowi Pawłowi Kolwiczowi, za wszechstronną pomoc, wskazówki i inspiracje matematyczne, dzięki którym mogła powstać ta praca. Za poświęcony czas, za okazaną wyrozumiałość i zrozumienie oraz za przyjacielską atmosferę towarzyszącą przygotowaniu niniejszej rozprawy.

Ponadto, za wyjątkową życzliwość, wielopłaszczyznową pomoc oraz rozmowy o matematyce serdecznie dziękuję Profesorowi Lechowi Maligrandzie.

Profesorowi Ryszardowi Płuciennikowi pragnę podziękować, za opiekę i pomoc podczas studiów doktoranckich.

Za możliwość uczestniczenia w seminariach i wykładach na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza, dzięki którym mogłem poszerzyć swoje horyzonty matematyczne, chciałbym podziękować w szczególności Profesorowi Henrykowi Hudzikowi, Profesorowi Mieczysławowi Mastyle oraz Profesorowi Pawłowi Domańskiemu.

Za pomoc w redagowaniu pracy dziękuję Doktorowi Piotrowi Rejmenciakowi oraz Doktorowi Wojciechowi Kowalewskiemu.

Serdecznie dziękuję Rodzicom oraz Monice za zrozumienie i wsparcie, którym dla mnie byli, podczas gdy powstawała ta praca.

Wstęp

„Jeśliby dać tysiącowi ludzi łopaty i kazać znaleźć wodę na Saharze, minęłyby lata bez rezultatów. Łozanowski pojawiłby się, a w miejscu, w którym wbiłyby łopate, wytrysnąłby strumień” - takimi słowami opisał Łozanowskiego jego rówieśnik i wybitny matematyk - Władimir Mazja (zob. [84]). Właśnie na fali idei Łozanowskiego powstała niniejsza praca. Głównym obiektem badań i motywem przewodnim będą przestrzenie Calderóna - Łozanowskiego. Zostały one wprowadzone w pracy [16] przez Calderóna, jako konstrukcja interpolacyjna. Znaczenie i potencjał tej konstrukcji dostrzegł Łozanowski, który poświęcił jej wiele prac (zob. [76] - [83]), badając ich własności interpolacyjne i topologiczne, a przede wszystkim znalazł postać przestrzeni dualnej. Twierdzenie to znalazło wiele zastosowań w teorii przestrzeni Köthe’go i uogólniło inne znane twierdzenia o dualności. W szczególności, Łozanowski wykorzystał je do udowodnienia innego ze swych znanych wyników, tzn. twierdzenia faktoryzacyjnego Łozanowskiego. Twierdzenie to i jego uogólnienie będzie drugim z motywów przewodnich tej pracy.

Dla dwóch danych przestrzeni Köthe’go E, F nad tą samą przestrzenią miary oraz funkcji $\rho : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniającej pewne dodatkowe warunki, przestrzeń Calderóna-Łozanowskiego $\rho(E, F)$ jest zdefiniowana jako

$$\rho(E, F) = \{z \in L^0 : |z| \leq \rho(x, y) \text{ dla pewnych } x \in E_+ \text{ i } y \in F_+\} \quad (1)$$

z normą

$$\|z\|_{\rho(E, F)} = \inf \{\max \{\|x\|_E, \|y\|_F\} : |z| \leq \rho(x, y), \text{ gdzie } x \in E_+ \text{ i } y \in F_+\}. \quad (2)$$

Szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji są przestrzenie E_φ zwane też uogólnionymi przestrzeniami Orlicza, które otrzymujemy z $\rho(E, F)$, gdy $F = L^\infty$.

W pracy tej przyjrzymy się zarówno konstrukcji $\rho(E, F)$, jak i przestrzeniom E_φ , z różnych punktów widzenia. Na początku zajmiemy się porządkową ciągłością przestrzeni $\rho(E, F)$. Następnie przejdziemy do bardziej szczegółowych własności geometrycznych, przy czym ograniczymy się już tylko do przestrzeni E_φ , a wyniki te zastosujemy też do uzyskania odpowiednich kryteriów dla przestrzeni Orlicza - Lorentza. W dalszym ciągu pozostawimy własności geometryczne, aby spojrzeć na strukturę uogólnionych przestrzeni Orlicza z punktu widzenia multiplikatorów między tymi przestrzeniami. W ostatniej części pracy wykażemy powiązania między przestrzeniami $\rho(E, F)$, a „punktowym” iloczynem przestrzeni $E \odot F$, który pojawia się w naturalny sposób przy pytaniu o faktoryzację przestrzeni funkcyjnych. Znajdziemy też reprezentację przestrzeni $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$, a wyniki te wykorzystamy, aby podać twierdzenia faktoryzacyjne dla uogólnionych przestrzeni Orlicza.

Rozdział pierwszy zawiera zbiór pojęć oraz znanych faktów, z których będziemy korzystali w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale drugim zbadamy kryteria na porządkową ciągłość przestrzeni $\rho(E, F)$. Podamy szereg warunków wystarczających, aby przestrzeń $\rho(E, F)$ posiadała tę własność. W szczególności pokażemy, że to czy $\rho(E, F) \in (OC)$, zależy zarówno od własności funkcji ρ , jak i od własności przestrzeni E oraz F . W tym celu wprowadzimy nową własność topologiczną, zdefiniowaną dla pary przestrzeni E, F , która okaże się konieczna dla porządkowej ciągłości przestrzeni $\rho(E, F)$. Zaprezentujemy przy okazji przykłady pokazujące, że przestrzeń $\rho(E, F)$ może być porządkowo ciągła, nawet gdy żadna z przestrzeni E i F nie jest porządkowo ciągła, przy czym obie są symetryczne. Sytuacja ta ukaże różnice między teorią przestrzeni $\rho(E, F)$, a E_φ , gdyż w przypadku tych drugich wiadomo, że E musi być porządkowo ciągła, aby E_φ też taka była. Rozdział zakończymy podając alternatywny dowód konieczności warunku Δ_2 dla porządkowej ciągłości przestrzeni E_φ , wykorzystujący teorię przestrzeni multiplikatorów. Wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [60].

Trzeci rozdział został poświęcony trzem własnościom geometrycznym przestrzeni E_φ . Podajemy w nim pełne kryteria na ścisłą i jednostajną ortogonalną wypukłość (ozn. SC^\perp i UC^\perp odpowiednio) oraz własność β - Rolewicza dla uogólnionych funkcyjnych przestrzeni Orlicza. W przypadku własności β - Rolewicza dla ciągłych przestrzeni e_φ , wprowadzamy korespondującą własność monotonicznościową. Warunki pojawiające się w twierdzeniach tego rozdziału zostały zilustrowane przykładem dwuwymiarowej przestrzeni e_φ , pokazującym wpływ geometrii przestrzeni e oraz własności funkcji φ , na kształt sfery w przestrzeni e_φ . Na koniec uzyskane wyniki zastosujemy do funkcyjnych przestrzeni Orlicza - Lorentza. W przypadku tym uzyskane kryteria przybiorą bardziej elementarną postać. Rozdział trzeci został napisany w oparciu o pracę [61].

Rozdział czwarty mówi o przestrzeniach multiplikatorów między przestrzeniami Köthe'go, tj. o przestrzeniach

$$M(E, F) = \{x \in L^0 : xy \in F \text{ dla każdego } y \in E\}.$$

Na elementy przestrzeni $M(E, F)$ można też spojrzeć jak na operatory mnożenia punktowego działające z E do F . Wtedy naturalna norma na $M(E, F)$ jest normą operatorową. Na początku rozdziału wykażemy szereg elementarnych faktów dotyczących przestrzeni multiplikatorów. Między innymi znajdziemy wzór na funkcję fundamentalną przestrzeni $M(E, F)$ w przypadku, gdy E i F są symetryczne oraz spełniają pewne dodatkowe założenia. W dalszym ciągu zajmiemy się szczegółowo reprezentacją przestrzeni $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$. Uogólnimy wyniki znane dla przestrzeni Orlicza, aby „obliczyć”, że $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$, gdy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$. Pokażemy, że przy pewnych założeniach relacje $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ i $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ są konieczne i wystarczające, odpowiednio dla włożeń $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}$ i $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$, co w szczególności da odpowiedź na pytanie postawione w książce [86] dla przestrzeni Orlicza. Na koniec zajmiemy się problemem jak skonstruować funkcję φ_2 , która przy zadanych φ i φ_1 spełnia warunek $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$. W tym celu zbadamy funkcję dopełniającą do φ_1 względem φ , tj. $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ zdefiniowaną jako

$$(\varphi \ominus \varphi_1)(u) = \sup_{v \geq 0} [\varphi(uv) - \varphi_1(v)].$$

Ważnym elementem tej części pracy jest też Przykład 4.2.23, który koresponduje z wieloma wynikami rozdziału czwartego (i piątego) pokazując, że pojawiające się założenia są jak najbardziej zasadne. Rozdział czwarty powstał na podstawie pracy [62].

Celem ostatniego, piątego rozdziału jest udowodnienie twierdzenia faktoryzacyjnego dla uogólnionych przestrzeni Orlicza, postaci

$$E_{\varphi_1} \odot M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) = E_{\varphi}. \quad (3)$$

W związku z tym konieczne jest zbadanie „punktowego” iloczynu przestrzeni $X \odot Y$, tj.

$$X \odot Y = \{xy : x \in X, y \in Y\},$$

$$\|z\|_{X \odot Y} = \inf \{\|x\|_X \|y\|_Y : |z| = xy, x \in X_+, y \in Y_+\}.$$

Okaże się, że konstrukcja $X \odot Y$ jest ściśle związana z przestrzeniami Calderóna – Łozanowskiego $\rho(E, F)$. Pokażemy między innymi, że $X \odot Y \equiv (X^{1/2}Y^{1/2})^{(1/2)}$, tzn. iloczyn $X \odot Y$ jest $1/2$ - uwklęśnieniem przestrzeni $X^{1/2}Y^{1/2}$. Znajdziemy też wzór na funkcję fundamentalną przestrzeni $X \odot Y$, gdy X i Y są symetryczne. Przedstawione ogólne wyniki wykorzystamy dalej do znalezienia reprezentacji iloczynów uogólnionych przestrzeni Orlicza, tj. $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} = E_{\varphi}$. Wyniki te przedstawimy w terminach relacji $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ i $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$, analogicznie jak w rozdziale czwartym, podając warunki konieczne i wystarczające dla włożeń $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$ i $E_{\varphi} \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$. Omówimy także odpowiednią konstrukcję funkcji φ spełniającej relację $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$, tj. $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, gdzie

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) = \inf_{u=vw} \{\varphi_1(v) + \varphi_2(w)\}.$$

Wnioskiem z tego i poprzedniego rozdziału będzie twierdzenie faktoryzacyjne postaci (3). Wyniki rozdziału piątego stanowią część pracy [63].

Spis treści

Spis treści	1
1 Pojęcia wstępne	2
1.1 Przestrzenie Köthe'go	2
1.2 Funkcje Orlicza	6
1.3 Przestrzenie Calderóna - Łozanowskiego	10
2 Porządkowa ciągłość	13
3 Własności geometryczne	25
3.1 Ortogonalne wypukłości	26
3.2 Własność β - Rolewicza	31
3.3 Zastosowania do przestrzeni Orlicza - Lorentza	42
4 Przestrzenie multiplikatorów	48
4.1 Przestrzenie multiplikatorów $M(E, F)$	48
4.2 Multiplikatory między przestrzeniami E_φ	62
5 Przestrzenie iloczynowe i faktoryzacja	90
5.1 Przestrzeń iloczynowa $X \odot Y$	90
5.2 Iloczyn przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego	96
5.3 Faktoryzacja	107
Bibliografia	111

Rozdział 1

Pojęcia wstępne

1.1 Przestrzenie Köthe'go

Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią miary z miarą σ - skończoną i zupełną. Niech dalej $L(\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji Σ - mierzalnych i μ - prawie wszędzie skończonych, określonych na Ω . Możemy w tej przestrzeni wprowadzić relację

$$x \simeq y \iff x(t) = y(t) \text{ dla } \mu - \text{ prawie wszystkich } t \in \Omega.$$

Nietrudno sprawdzić, że relacja ta jest relacją równoważności na zbiorze $L(\Omega, \Sigma, \mu)$. Przestrzeń klas abstrakcji tej relacji będziemy oznaczali przez $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. W przypadku, gdy $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą na rodzinie $2^{\mathbb{N}}$, przestrzeń $L^0(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, będziemy oznaczali po prostu l^0 . Naturalną topologią na L^0 jest topologia zbieżności lokalnej według miary.

W przestrzeni L^0 definiujemy relację częściowego porządku „ \leq ” w naturalny sposób, tzn. dla $x, y \in L^0$

$$x \leq y \text{ gdy } x(t) \leq y(t) \text{ dla } \mu - p.w. t \in \Omega.$$

Standardowo $x \vee y$ i $x \wedge y$ rozumiemy jako

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\} \text{ i } (x \wedge y)(t) = \min\{x(t), y(t)\}.$$

Ponadto dla dowolnego zbioru $S \subset L^0$, jego dodatnią część S_+ zdefiniujemy jako

$$S_+ = \{x \in S : x \geq 0\}.$$

Dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$, funkcję $\chi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, zdefiniowaną wzorem

$$\chi_A(t) = 1, \text{ gdy } t \in A \text{ oraz } \chi_A(t) = 0, \text{ gdy } t \notin A,$$

nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru A .

Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Definicja 1.1.1. *Przestrzeń Banacha E zawartą w $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, dla pewnej σ - skończonej i zupełnej przestrzeni miary, będziemy nazywali **przestrzenią Köthe'go**, jeśli dodatkowo spełnia następujące dwa warunki:*

a) jeśli $x \in E, y \in L^0$ i $y \leq x$, to $y \in E$ oraz $\|y\|_E \leq \|x\|_E$,

b) istnieje $x \in E$, taki że $x(t) > 0$ dla każdego $t \in \Omega$.

Czasami zakłada się mocniejszą wersję warunku b), a mianowicie:

b') dla każdego $A \in \Sigma, \mu(A) < \infty$, funkcja charakterystyczna zbioru A należy do E ($\chi_A \in E$).

Uwaga 1.1.2. Tak zdefiniowane przestrzenie Köthe'go w literaturze, funkcjonują także jako **przestrzenie funkcyjne Banacha** lub **funkcyjne siatki Banacha** (oczywiście każda przestrzeń Köthe'go jest siatką Banacha z naturalną relacją częściowego porządku). W niniejszej pracy przyjmujemy jednak konwencję nazywania ich właśnie przestrzeniami Köthe'go, aby słowa "funkcyjna" lub "ciągowa" zachować dla konkretnych przypadków, tj. jeśli przestrzeń miary (Ω, Σ, μ) będzie bezatomowa, to odpowiednią przestrzeń Köthe'go nazwiemy **funkcyjną przestrzenią Köthe'go**, jeśli zaś będziemy mieli do czynienia z przestrzenią miary $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą, to będziemy mówili o **ciągowej przestrzeni Köthe'go**. Wracając do podanej definicji, odnotujmy jeszcze, że warunek a) często nazywany jest warunkiem ideału. Z kolei warunek b) lub b'), w niektórych źródłach nie występuje jako część definicji przestrzeni funkcyjnej Banacha, lecz jako integralna własność zwana nasyceniem przestrzeni (dot. warunku b), zob. np. [86]). Element, o którym mowa w punkcie b) jest też nazywany **słabą jedynką**. Oczywiście b') implikuje b), jednak relacja przeciwna nie musi zachodzić w przypadku przestrzeni niesymetrycznych. W przestrzeniach symetrycznych (zob. def. poniżej) oba warunki są równoważne. W pracy tej będziemy używali definicji ze słabszym warunkiem b). W przypadku, gdy w definicji stwierdzenie, że E jest przestrzenią Banacha rozszerzymy do przestrzeni quasi - Banacha, tzn. w miejsce nierówności trójkąta pojawi się nierówność

$$\|x + y\| \leq C (\|x\| + \|y\|),$$

dla pewnego $C \geq 1$, to będziemy mówili o przestrzeni **quasi-Köthe'go**.

Kulę jednostkową przestrzeni Banacha $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, będziemy oznaczali jako

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

a **sferą jednostkową** będzie

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Gdy element $x \in L^0$, to jego **nośnikiem** (ozn. $\text{supp}(x)$) nazywamy zbiór

$$\text{supp}(x) = \{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}.$$

W przypadku podprzestrzeni F przestrzeni Köthe'go E sytuacja jest nieco delikatniejsza, tzn. **nośnikiem podprzestrzeni F** nazwiemy dowolny zbiór mierzalny (ozn. $\text{supp}F$), spełniający następujące warunki:

- 1) dla każdego $x \in F$ istnieje $A \in \Sigma$ taki, że $\mu(A) = 0$ oraz $\text{supp}(x) \subset A \cup \text{supp}F$,
 2) istnieje $x \in F$ taki, że $\mu(\text{supp}F \setminus \text{supp}(x)) = 0$.

Niech E, F będą dwoma przestrzeniami Köthe'go. Jeśli $E \subset F$, to z twierdzenia o domkniętym wykresie wynika, że włożenie to jest ciągłe, tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $x \in E$

$$\|x\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Będziemy wtedy pisali $E \xrightarrow{M} F$. Ponadto, jeśli $E \subset F$ oraz $F \subset E$, to obie przestrzenie są izomorficzne, co będziemy oznaczali $E = F$. Jeśli dodatkowo $\|x\|_F = \|x\|_E$ dla każdego $x \in E = F$, to będziemy pisali $E \equiv F$.

Definicja 1.1.3. *Mówimy, że przestrzeń Köthe'go E posiada **własność Fatou** (ozn. $E \in (FP)$), jeśli dla każdego ciągu $(x_n) \subset E_+$ takiego, że $x_n \nearrow x \in L^0$ μ -p.w. i $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$, element x także należy do E oraz zachodzi równość $\|x\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E$.*

Przypomnijmy w tym miejscu, że przestrzenią dualną w sensie Köthe'go do przestrzeni Köthe'go E nazywamy przestrzeń

$$E' = \left\{ x \in L^0 : \forall y \in E \int_{\Omega} |xy| d\mu < \infty \right\}$$

z normą operatorową, tj.

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_{\Omega} |xy| d\mu.$$

Wiadomo, że $E \in (FP)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E = E''$ (zob. np. [8], Twierdzenie 2.7, str. 10).

Definicja 1.1.4. *Mówimy, że $x \in E$ jest elementem porządkowej ciągłości, jeśli dla każdego ciągu $(x_m) \subset E$ takiego, że $0 \leq x_m \leq |x|$ oraz $x_m \rightarrow 0$ μ -p.w. zachodzi $\|x_m\|_E \rightarrow 0$. Przestrzeń E jest **porządkowo ciągła** ($E \in (OC)$), jeśli każdy element E jest elementem porządkowej ciągłości (zob. [54], [72]). Zwyczajowo, przez E_a oznaczamy podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych przestrzeni E .*

Oczywiście $x \in E_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| \in E_a$. Niech dany będzie ciąg zbiorów $(A_n) \subset \Sigma$. Będziemy pisali, że $A_n \searrow \emptyset$ gdy $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego n oraz $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Lemat 1.1.5. ([8, Twierdzenie 3.2, str. 14]) *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Wówczas $x \in E$ jest elementem porządkowej ciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbiorów $(A_n) \subset \Sigma$, jeśli $A_n \searrow \emptyset$, to $\|x\chi_{A_n}\|_E \searrow 0$.*

Często będziemy korzystali z następującego twierdzenia Dobrakowa (zob. [31, Twierdzenie 10, str. 12]).

Twierdzenie 1.1.6. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go nad bezatomową przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) . Jeśli $x \in E_a$, to półmiara $\mu_x : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem*

$$\mu_x(A) = \|x\chi_A\|_E$$

posiada własność Darboux, tzn. dla każdego $0 < b < \mu_x(\Omega)$ istnieje zbiór $A \in \Sigma$ taki, że $\mu_x(A) = b$.

W przypadku, gdy μ_x jest miarą zdefiniowaną jako

$$\mu_x(A) = \int_A |x(t)| d\mu,$$

tzn. gdy w Twierdzeniu 1.1.6 przyjmiemy $E = L^1$, to otrzymamy twierdzenie Lapunowa.

Bardzo ważną podklasą przestrzeni Köthe'go są przestrzenie symetryczne. Dla dowolnego $x \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, zdefiniujemy funkcję **dystrybucji** $d_x : [0, \infty) \rightarrow [0, \mu(\Omega)]$ wzorem

$$d_x(\lambda) = \mu(\{t \in \Omega : |x(t)| > \lambda\}).$$

Zgodnie z [68], **nierosnącym przestawieniem** elementu x nazywamy funkcję $x^* : [0, \mu(\Omega)) \rightarrow [0, \infty]$ określoną wzorem

$$x^*(t) = \inf \{\lambda > 0 : d_x(\lambda) < t\}. \quad (1.1)$$

Wprost z definicji funkcji d_x wynika, że dla dowolnej funkcji $x \in L^0$ oraz dowolnych, rozłącznych zbiorów mierzalnych A i B oraz dla każdego $\lambda \geq 0$ zachodzi równość

$$d_x(\lambda) = d_{x\chi_A}(\lambda) + d_{x\chi_B}(\lambda).$$

Ponadto, jeśli $d_x \geq d_y$, to $x^* \geq y^*$, a z drugiej strony $x \geq y$ implikuje, że $d_x \geq d_y$.

Powiemy, że dwie funkcje $x, y \in L^0$ są **równomierzalne** (oznaczamy $x \sim y$), gdy $d_x(\lambda) = d_y(\lambda)$ dla każdego $\lambda > 0$. Równoważnie, $x \sim y$ gdy $x^* = y^*$.

Przestrzeń (quasi) Köthe'go E nazywamy **symetryczną**, jeśli dla dowolnych równomierzalnych $x, y \in L^0$

$$x \in E \text{ implikuje, że } y \in E \text{ oraz } \|x\|_E = \|y\|_E.$$

Jeśli E jest przestrzenią symetryczną, to dla $x \in E$, $y \in L^0$ zachodzi implikacja

$$y^* \leq x^* \implies y \in E \text{ oraz } \|y\|_E \leq \|x\|_E.$$

Wiadomo (zob. [72] cz. II, str. 114-115), że każda (nieskończenie wymiarowa) symetryczna przestrzeń Köthe'go jest równoważna przestrzeni symetrycznej Köthe'go nad jedną z trzech przestrzeni miary: $I = [0, 1]$, $I = [0, \infty)$ z miarą Lebesguea m lub $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$. Zatem rozważając symetryczne przestrzenie Köthe'go, możemy ograniczyć się tylko do tych przypadków.

Dla symetrycznej przestrzeni E nad I definiujemy jej funkcję fundamentalną $f_E : I \rightarrow [0, \infty)$ jako

$$f_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E.$$

Każda nietrywialna przestrzeń symetryczna Köthe'go nad I jest przestrzenią pośrednią pomiędzy $L^1(I)$ i $L^\infty(I)$, tzn.

$$L^1(I) \cap L^\infty(I) \xrightarrow{C_1} E \xrightarrow{C_2} L^1(I) + L^\infty(I), \quad (1.2)$$

gdzie $C_1 = 2f_E(1)$, $C_2 = 1/f_E(1)$ oraz

$$\|x\|_{L^1 \cap L^\infty} = \max(\|x\|_{L^1}, \|x\|_{L^\infty}),$$

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^1 + L^\infty} &= \inf \left\{ \|x_0\|_{L^1} + \|x_1\|_{L^\infty} : x = x_0 + x_1, x_0 \in L^1, x_1 \in L^\infty \right\} \\ &= \int_0^1 x^*(s) ds \end{aligned}$$

(zob. np. [68], Twierdzenie 4.1, str. 91 i formułę 3.4 str. 78).

Dla przestrzeni miary (Ω, Σ, μ) odwzorowanie $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$ nazywamy **odwzorowaniem zachowującym miarę**, gdy dla każdego $A \subset \Sigma$

$$\mu(\omega^{-1}(A)) = \mu(A),$$

gdzie $\omega^{-1}(A)$ oznacza przeciwobraz zbioru A . Wtedy dla dowolnej nieujemnej i μ -mierzalnej funkcji f , zachodzi relacja $f \circ \omega \sim f$ (zob. np. [8], Twierdzenie [Proposition] 7.2, str. 80).

1.2 Funkcje Orlicza

Różne definicje klasy funkcji Orlicza można znaleźć w literaturze. W pracy tej będziemy rozpatrywali możliwie najszerszą klasę funkcji, dla których odpowiednia przestrzeń Orlicza jest przestrzenią Banacha. Przyjmijmy więc następującą definicję;

Definicja 1.2.1. *Funkcją Orlicza nazywamy funkcję $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, spełniającą warunki:*

- i) $\varphi(0) = 0, \varphi(u) < \infty$ dla pewnego $u > 0$,
- ii) $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$,
- iii) φ jest lewostronnie ciągła i wypukła na zbiorze A , gdzie

$$A = [0, b_\varphi), \text{ gdy } \varphi(b_\varphi) = \infty$$

oraz

$$A = [0, b_\varphi], \text{ gdy } \varphi(b_\varphi) < \infty,$$

dla

$$b_\varphi = \sup \{u > 0 : \varphi(u) < \infty\}. \quad (1.3)$$

Oznaczmy tak zdefiniowaną klasę funkcji Orlicza przez P . Przyjmijmy też oznaczenia:

$$a_\varphi = \sup \{u \geq 0 : \varphi(u) = 0\} = \max \{u \geq 0 : \varphi(u) = 0\}, \quad (1.4)$$

$$G_\varphi = \begin{cases} \{0\} \cup (a_\varphi, b_\varphi], & \text{gdy } \varphi(b_\varphi) < \infty, \\ \{0\} \cup (a_\varphi, b_\varphi) & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Ponadto będziemy pisali $\varphi > 0$, gdy $a_\varphi = 0$ oraz $\varphi < \infty$, gdy $b_\varphi = \infty$. W dalszej części, obcięcie funkcji φ do zbioru G_φ będziemy oznaczali jako φ_r , t.j.

$$\varphi_r : G_\varphi \rightarrow [0, \infty) \text{ oraz } \varphi_r(t) = \varphi(t) \text{ dla każdego } t \in G_\varphi. \quad (1.6)$$

Zauważmy, że z takiej definicji generalnie nie wynika ciągłość φ , ponieważ gdy $b_\varphi < \infty$ i $\varphi(b_\varphi) < \infty$, to φ jest nieciągła w punkcie b_φ . Oczywiście, ze względu na wypukłość, funkcja φ jest ciągła na zbiorze $[0, b_\varphi)$.

Funkcją sprzężoną (lub dopełniającą) w sensie Younga do funkcji Orlicza φ nazywamy funkcję φ^* daną wzorem

$$\varphi^*(u) = \sup_{v>0} (uv - \varphi(v)). \quad (1.7)$$

Wtedy φ^* jest też funkcją Orlicza (zob. np. [20], [86]).

Funkcje Orlicza posiadają szereg własności, z których będziemy często korzystali.

Lemat 1.2.2. *Następujące zdania są prawdziwe dla funkcji Orlicza φ :*

- 1) $\forall_{0<a<1} \forall_{u>0} \varphi(au) \leq a\varphi(u)$,
- 2) $\forall_{a>1} \forall_{u>0} \varphi(au) \geq a\varphi(u)$,
- 3) $\forall_{u,v \geq 0} \varphi(u+v) \geq \varphi(u) + \varphi(v)$ (superaddytywność),
- 4) $\forall_{u \geq v > 0} \varphi(u-v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$.

Dowody powyższych własności zostały zebrane np. w [73].

Szczególną klasą funkcji Orlicza są tzw. \mathcal{N} -**funkcje**, tzn. takie funkcje Orlicza, że $0 < \varphi < \infty$ oraz

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty \text{ i } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{u} = 0. \quad (1.8)$$

Klasę \mathcal{N} -funkcji oznaczamy przez P^0 . Jeśli $\varphi \in P^0$, to $\varphi^* \in P^0$ (zob. [20]).

Bardzo ważną rodzinę funkcji Orlicza stanowią te, których wzrost nie jest zbyt szybki.

Definicja 1.2.3. *Mówimy, że funkcja Orlicza φ spełnia **warunek** Δ_2 odpowiednio dla wszystkich, dla dużych lub dla małych argumentów, jeżeli:*

- 1) $\exists_{K \geq 2} \forall_{u>0} \varphi(2u) \leq K\varphi(u)$ [piszemy $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$].
- 2) $\exists_{K \geq 2} \exists_{u_0>0, \varphi(u_0)<\infty} \forall_{u \geq u_0} \varphi(2u) \leq K\varphi(u)$ [piszemy $\varphi \in \Delta_2(\infty)$].
- 3) $\exists_{K \geq 2} \exists_{u_0>0, \varphi(u_0)>0} \forall_{0<u \leq u_0} \varphi(2u) \leq K\varphi(u)$ [piszemy $\varphi \in \Delta_2(0)$].

Uwaga 1.2.4. *Zauważmy, że z warunków $\varphi \in \Delta_2(\infty)$ i $\varphi \in \Delta_2(0)$ wnosimy odpowiednio, że $\varphi < \infty$ oraz $\varphi > 0$.*

Zanim wprowadzimy definicję przestrzeni Calderona - Łozanowskiego, musimy najpierw określić klasę funkcji, przy pomocy których taką przestrzeń zbudujemy. Poniższa definicja pochodzi od Reisnera (zob. [100]) i nie obejmuje wszystkich funkcji, które dopuszczał Łozanowski, jednak dla naszych rozważań będzie wystarczająca.

Definicja 1.2.5. *Będziemy mówili, że funkcja $\rho : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ należy do klasy U , jeśli:*

- 1) *jest dodatnio jednorodna, tzn. $\forall_{a \geq 0} \forall_{u, v \geq 0} \rho(au, av) = a\rho(u, v)$,*
- 2) $\forall_{u \geq 0} \rho(0, u) = \rho(u, 0) = 0$,
- 3) $\forall_{u > 0} \rho(\cdot, u)$ oraz $\rho(u, \cdot)$ są ciągłymi i wklęsłymi funkcjami jednej zmiennej,
- 4) $\forall_{v > 0} \lim_{u \rightarrow \infty} \rho(u, v) = \lim_{u \rightarrow \infty} \rho(v, u) = \infty$.

Wiadomo, że każda funkcja $\rho \in U$ jest funkcją wklęsłą, jako funkcja dwóch zmiennych (zob. [100] lub [73]).

Jeżeli funkcja $\varphi \in P^0$, to definiując

$$\rho_\varphi(u, v) := \begin{cases} v\varphi^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) & \text{gdy } v > 0, \\ 0 & \text{gdy } v = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

nie trudno zauważyć, że $\rho_\varphi \in U$. Z drugiej strony, każda funkcja $\rho \in U$ definiuje dwie funkcje klasy P^0 , tj. $(\rho(\cdot, u))^{-1}, (\rho(u, \cdot))^{-1} \in P^0$, gdy $u > 0$. Związki te zostały szczegółowo opisane w pracy [73]. Dla przykładu sprawdźmy, że funkcja $\rho_\varphi(u, \cdot)$ jest wklęsła dla każdego $u > 0$. Dla dowolnych $v_1, v_2 > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \rho_\varphi\left(u, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) &= \frac{v_1 + v_2}{2} \varphi^{-1}\left(\frac{uv_1}{(v_1 + v_2)v_1} + \frac{uv_2}{(v_1 + v_2)v_2}\right) \geq \\ &\geq \frac{v_1 + v_2}{2} \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2} \varphi^{-1}\left(\frac{u}{v_1}\right) + \frac{v_2}{v_1 + v_2} \varphi^{-1}\left(\frac{u}{v_2}\right)\right) = \frac{\rho_\varphi(u, v_1) + \rho_\varphi(u, v_2)}{2}. \end{aligned}$$

Dzięki wyżej opisanym relacjom między funkcjami z klasy U a funkcjami Orlicza, można wprowadzić warunek Δ_2 dla funkcji z klasy U w taki sposób, aby był równoważny z warunkiem Δ_2 dla funkcji Orlicza $(\rho(\cdot, 1))^{-1}$ lub $(\rho(1, \cdot))^{-1}$ (zob. [100]).

Definicja 1.2.6. *Powiemy, że $\rho \in U$ spełnia **warunek Δ_2 z lewej strony**, dla wszystkich argumentów (w skrócie $\rho \in \Delta_2(L, \mathbb{R}_+)$), jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że*

$$\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{K}{2}u, \frac{1}{2}v\right)$$

*dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Analogicznie, ρ spełnia **warunek Δ_2 z prawej strony**, dla wszystkich argumentów (w skrócie $\rho \in \Delta_2(R, \mathbb{R}_+)$) jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że*

$$\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{1}{2}u, \frac{K}{2}v\right)$$

dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Napiszemy ponadto, że $\rho \in \Delta_2(L, R, \mathbb{R}_+)$ jeśli zarówno $\rho \in \Delta_2(L, \mathbb{R}_+)$, jak i $\rho \in \Delta_2(R, \mathbb{R}_+)$.

Wówczas warunek Δ_2 dla funkcji ρ_φ jest zgodny z warunkiem Δ_2 dla funkcji φ , tzn.

$$\rho_\varphi \in \Delta_2(L, \mathbb{R}_+) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+),$$

gdzie ρ_φ jest jak w (1.9). Powyższa równoważność wynika wprost z równoważności następujących nierówności

$$\forall_{u,v>0} \quad v\varphi^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) \leq \frac{v}{2}\varphi^{-1}\left(\frac{Ku}{v}\right) \iff \quad (1.10)$$

$$\forall_{t>0} \quad \varphi^{-1}(t) \leq \frac{1}{2}\varphi^{-1}(Kt) \iff$$

$$\forall_{s>0} \quad s \leq \frac{1}{2}\varphi^{-1}(K\varphi(s)) \iff$$

$$\forall_{s>0} \quad \varphi(2s) \leq K\varphi(s). \quad (1.11)$$

Znów przez analogię do funkcji Orlicza, możemy wyszczególnić warunek Δ_2 dla dużych i dla małych argumentów.

Definicja 1.2.7. Powiemy, że $\rho \in U$ spełnia **warunek Δ_2 z lewej strony dla dużych argumentów** (w skrócie $\rho \in \Delta_2(L, \infty)$) jeśli istnieją stałe $K, u_0 > 0$ takie, że

$$\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{K}{2}u, \frac{1}{2}v\right)$$

dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ takich, że $\frac{u}{v} \geq u_0$. Natomiast $\rho \in U$ spełnia **warunek Δ_2 z lewej strony dla małych argumentów** (w skrócie $\rho \in \Delta_2(L, 0)$) jeśli istnieją stałe $K, u_0 > 0$ takie, że

$$\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{K}{2}u, \frac{1}{2}v\right)$$

dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ takich, że $\frac{u}{v} \leq u_0$.

Wówczas $\rho_\varphi \in \Delta_2(L, \infty)$ [$\rho_\varphi \in \Delta_2(L, 0)$] wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(\infty)$ [$\varphi \in \Delta_2(0)$]. Następujący lemat jest konsekwencją równoważności nierówności (1.10) i (1.11) oraz odpowiednich równoważności dla funkcji Orlicza (zob. np. [20], Twierdzenie 1.13, str. 9).

Lemat 1.2.8. Niech $\rho \in U$. Wówczas $\rho \in \Delta_2(L, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u_0 > 0$ istnieje $K > 0$ takie, że $\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{K}{2}u, \frac{1}{2}v\right)$ dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ takich, że $\frac{u}{v} > u_0$.

W dalszej części pracy przez $\varphi(x)$ będziemy rozumieli złożenie $\varphi \circ x$, gdzie $0 \leq x \in L^0$, a φ jest funkcją Orlicza. Analogicznie, dla $0 \leq x, y \in L^0(\Omega)$ i funkcji $\rho \in U$, zapis $\rho(x, y)$ będzie oznaczał funkcję $\rho(x, y)(t) = \rho(x(t), y(t))$, gdzie $t \in \Omega$.

1.3 Przestrzenie Calderóna - Łozanowskiego

Definicja 1.3.1. Niech E, F będą przestrzeniami Köthe'go nad (Ω, Σ, μ) oraz niech $\rho \in U$. Zdefiniujemy przestrzeń $\rho(E, F)$ w następujący sposób

$$\rho(E, F) = \left\{ z \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : |z| \leq \rho(x, y) \text{ dla pewnych } x \in E_+ \text{ i } y \in F_+ \right\}, \quad (1.12)$$

z normą

$$\|z\|_{\rho(E, F)} = \inf \left\{ \max \{ \|x\|_E, \|y\|_F \} : |z| \leq \rho(x, y), x \in E_+, y \in F_+ \right\}. \quad (1.13)$$

Wtedy parę $\langle \rho(E, F), \|\cdot\|_{\rho(E, F)} \rangle$ nazywamy **przestrzenią Calderóna - Łozanowskiego**.

Tak zdefiniowana przestrzeń jest przestrzenią Köthe'go (zob. [16], [77] - [81], [86]). Odnajmy, że Łozanowski dopuszczał szerszą klasę funkcji ρ , tj. wszystkie funkcje, które można wygenerować przy pomocy formuły (1.9), z dowolnej funkcji Orlicza φ , nie tylko z \mathcal{N} -funkcji. Ponadto, w powyższej definicji normy możemy nierówność $|z| \leq \rho(x, y)$ zastąpić równością $|z| = \rho(x, y)$ (zob. np. [100], Lemat 1). Łozanowski udowodnił ([83], zob. też [100], [98]), że przestrzenią dualną w sensie Köthe'go do przestrzeni $\langle \rho(E, F), \|\cdot\|_{\rho(E, F)} \rangle$ jest przestrzeń $\langle \hat{\rho}(E', F'), \|\cdot\|_{\hat{\rho}(E', F')}^0 \rangle$, gdzie

$$\hat{\rho}(s, t) = \inf_{u, v > 0} \frac{su + vt}{\rho(u, v)},$$

$$\|x\|_{\hat{\rho}(E', F')}^0 = \inf \left\{ \|x\|_{E'} + \|y\|_{F'} : |x| \leq \hat{\rho}(x, y), \text{ gdzie } x \in E'_+ \text{ i } y \in F'_+ \right\}.$$

Stąd i z własności $\hat{\rho} = \rho$ (zob. np. [83]) wynika bezpośrednio, że $\rho(E, F) \in (FP)$, gdy $E, F \in (FP)$.

Ze względu na swą ogólność oraz niekonstruktywną postać normy, przestrzenie Calderóna - Łozanowskiego stanowią wymagający obiekt badań, szczególnie z punktu widzenia własności geometrycznych. Oto kilka szczególnych przypadków przestrzeni $\rho(E, F)$, z których każdy i tak stanowi szeroką klasę przestrzeni Köthe'go.

Jeśli $\rho(s, t) = s^\theta t^{1-\theta}$ to przestrzeń $\rho(E, F)$ oznaczamy jako $E^\theta F^{1-\theta}$. Jest to pierwowzór konstrukcji $\rho(E, F)$ wprowadzony w pracy [16].

Inną ważną podklasą przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego są przestrzenie E_φ zwane też **uogólnionymi przestrzeniami Orlicza** (lub po prostu przestrzeniami Calderóna - Łozanowskiego). Dla danej funkcji $\varphi \in P_0$ rozważmy przestrzeń $\rho_\varphi(E, L^\infty)$. Zauważmy najpierw, że normę w $\rho(E, F)$ możemy równoważnie zapisać jako

$$\|z\|_{\rho_\varphi(E, L^\infty)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : |z| \leq \lambda \rho_\varphi(x, y), \text{ gdzie } x \in B(E)_+ \text{ i } y \in B(L^\infty)_+ \right\},$$

(zob. np. [86]). Ponieważ przestrzeń L^∞ posiada mocną jedynekę χ_Ω , tzn. $\forall y \in B(L^\infty)_+ y \leq \chi_\Omega$, więc z powyższego i monotoniczności funkcji $\rho_\varphi(v, \cdot)$ wynika, że

$$\|z\|_{\rho_\varphi(E, L^\infty)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : |z| \leq \lambda \rho_\varphi(x, \chi_\Omega) \text{ oraz } x \in B(E)_+ \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \left\| \varphi \left(\frac{|z|}{\lambda} \right) \right\|_E \leq 1 \right\}. \quad (1.14)$$

Otrzymaliśmy zatem normę w postaci Luxemburga i dalej możemy rozszerzyć formułę (1.14) na wszystkie funkcje Orlicza.

Przestrzenie $E^\theta F^{1-\theta}$ zostały wprowadzone przez Calderóna w 1964 roku w pracy [16]. W tej samej pracy pojawia się też ogólna konstrukcja $\rho(E, F)$, jak i E_φ . Warto jednak podkreślić, że przestrzeń E_φ została niezależnie zdefiniowana przez Łozanowskiego w tym samym roku, w pracy [74], jako uogólnienie przestrzeni Orlicza. Natomiast pierwszą pracą Łozanowskiego, w której bada przestrzeń $E^\theta F^{1-\theta}$ powołując się na Calderóna, jest [76].

Definicja 1.3.2. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) oraz niech φ będzie funkcją Orlicza. Wtedy przestrzeń $\langle E_\varphi, \|\cdot\|_\varphi \rangle$ definiujemy jako

$$E_\varphi = \left\{ x \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : \exists \lambda > 0 \varphi \left(\frac{|x|}{\lambda} \right) \in E \right\},$$

z normą Luxemburga

$$\|x\|_{E_\varphi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\varphi \left(\frac{x}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

gdzie modular $I_\varphi : L^0 \rightarrow [0, \infty]$ dany jest wzorem

$$I_\varphi(x) = \begin{cases} \|\varphi(|x|)\|_E, & \text{gdy } \varphi(|x|) \in E, \\ \infty, & \text{gdy } \varphi(|x|) \notin E. \end{cases} \quad (1.15)$$

Odnajmy tutaj, że przestrzeń E_φ jest uogólnieniem dwóch ważnych konstrukcji. Z jednej strony, gdy $E = L^1$, to przestrzeń $(L^1)_\varphi$ jest przestrzenią Orlicza z normą Luxemburga, tj. $\langle L^\varphi, \|\cdot\|_\varphi \rangle$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi(u) = u^p$, dla $p \in (1, \infty)$, to E_φ jest **p - uwypukleniem** przestrzeni E , tzn.

$$E^{(p)} = \{x \in L^0 : |x|^p \in E\}, \quad (1.16)$$

z normą

$$\|x\|_{E^{(p)}} = (\| |x|^p \|_E)^{1/p}. \quad (1.17)$$

Bardzo często będziemy korzystali z następujących zależności pomiędzy normą, a modulem w przestrzeniach E_φ (zob. np. [59], gdzie zebrano poniższe lematy).

Lemat 1.3.3. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go z własnością Fatou, natomiast φ - funkcją Orlicza. Wtedy dla dowolnego $x \in E_\varphi$ mamy:

a) $I_\varphi(x) = 1 \implies \|x\|_{E_\varphi} = 1.$

b) $\|x\|_{E_\varphi} \leq 1 \implies I_\varphi(x) \leq \|x\|_{E_\varphi}.$

$$\text{c) } \|x\|_{E_\varphi} > 1 \implies I_\varphi(x) \geq \|x\|_{E_\varphi}.$$

Należy zwrócić uwagę, że dowód punktu b) w powyższym lemacie wymaga aby przestrzeń E posiadała własność Fatou. Z zależności b) będziemy bardzo często korzystali w dalszej części pracy. Ponadto większa część geometrycznej i topologicznej teorii przestrzeni E_φ została rozwinięta przy założeniu, że $E \in (FP)$ (zob.np. [18], [35], [36], [40], [41], [59]). Ze względu na te dwa fakty, **w całej pracy przyjmujemy konwencję, że zawsze gdy mówimy o przestrzeniach E_φ , przestrzeń Köthe'go E posiada własność Fatou.** Założenie to nie dotyczy przestrzeni $\rho(E, F)$.

Wiadomo, że odpowiedni warunek Δ_2 w przypadku przestrzeni Orlicza zapewnia porządkową ciągłość tej przestrzeni. W tym samym celu wprowadzono warunek Δ_2^E dla przestrzeni E_φ (zob. [40]).

Definicja 1.3.4. Mówimy, że funkcja Orlicza φ spełnia **warunek Δ_2^E** , jeśli:

- 1) $\varphi \in \Delta_2(0)$, gdy $E \subset L^\infty$,
- 2) $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, gdy $L^\infty \subset E$,
- 3) $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$, gdy ani $L^\infty \not\subset E$, ani $E \not\subset L^\infty$.

Definicja 1.3.5. Mówimy, że przestrzeń E_φ spełnia warunek **normowo - modułarny** (w skrócie $E_\varphi \in (nm)$), jeśli

$$\forall x \in E_\varphi \quad \|x\|_{E_\varphi} = 1 \implies I_\varphi(x) = 1.$$

Lemat 1.3.6. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go, natomiast φ - funkcją Orlicza taką, że $\varphi < \infty$ oraz $\varphi \in \Delta_2^E$.

- a) Dla dowolnego $x \in E_\varphi$, jeśli $\|x\|_{E_\varphi} = 1$, to $I_\varphi(x) = 1$.
- b) Dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset E_\varphi$, jeśli $\|x_n\|_{E_\varphi} \rightarrow 1$, to $I_\varphi(x_n) \rightarrow 1$.

Lemat 1.3.7. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go, natomiast φ - funkcją Orlicza taką, że $\varphi > 0$ oraz $\varphi \in \Delta_2^E$, wtedy

$$I_\varphi(x_n) \rightarrow 0 \implies \|x_n\|_{E_\varphi} \rightarrow 0,$$

dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset E_\varphi$.

Lemat 1.3.8. Niech $e \hookrightarrow l^\infty$ będzie ciągową przestrzenią Köthe'go oraz niech $\varphi \in \Delta_2(0)$.

a) Niżej wymienione warunki są równoważne:

- i) $\forall p \in (0,1) \exists q \in (0,1) \forall x \in e_\varphi \quad I_\varphi(x) \leq 1 - p \implies \|x\|_{e_\varphi} \leq 1 - q.$
- ii) $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1.$

$$\text{b) } \forall x \in e_\varphi \quad (I_\varphi(x) = 1 \iff \|x\|_{E_\varphi} = 1) \iff \varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1.$$

Odnotujmy, że wielkość $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e$ jest dobrze określona, ponieważ założenie $e \hookrightarrow l^\infty$ oznacza, że istnieje stała $M > 0$ spełniająca nierówność $\|e_i\|_\infty \leq M \|e_i\|_e$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, a co za tym idzie $\inf_i \|e_i\|_e \geq 1/M$.

Rozdział 2

Porządkowa ciągłość

Chociaż przestrzenie E_φ nazywane są przestrzeniami Calderóna - Łozanowskiego, są one tylko szczególnym przypadkiem ogólnej konstrukcji $\rho(X, Y)$. Podczas gdy geometryczne i topologiczne własności przestrzeni E_φ zostały kompleksowo zbadane (zob. np. [17], [18], [35], [36], [40], [44], [45], [52], [55], [57], [59], [64], [65], [66]), analogiczne własności ogólnej konstrukcji $\rho(X, Y)$ są nadal białą kartą w teorii przestrzeni funkcyjnych. Częściowe wyniki dotyczące jednostajnej wypukłości oraz porządkowej ciągłości wspomnianych przestrzeni można znaleźć w pracy S. Reisnera (zob. [100]). Rezultaty dotyczące porządkowej ciągłości przestrzeni E_φ znajdują się między innymi w [35], [36], [40] i [65]. Jak zobaczymy poniżej, nawet tak elementarna własność jak porządkowa ciągłość sprawia znacznie większe trudności w przypadku przestrzeni $\rho(X, Y)$, ze względu na dużą ogólność konstrukcji.

Lemat 2.0.9. *Niech X, Y będzie parą przestrzeni Köthe'go, natomiast funkcja $\rho \in U$. Jeśli $X, Y \in (OC)$, to $\rho(X, Y) \in (OC)$.*

Dowód. Dowód jest natychmiastowy. Przypuśćmy, że $z \in \rho(X, Y)_+$ oraz ciąg zbiorów $(A_n) \subset \Sigma$, $A_n \searrow \emptyset$ są dowolne. Wtedy istnieją $x \in X_+$, $y \in Y_+$ takie, że $z = \rho(x, y)$. Na podstawie Lematu 1.1.5 wystarczy pokazać, że $\|z\chi_{A_n}\|_{\rho(X, Y)} \rightarrow 0$. Oczywiście $\|z\|_{\rho(X, Y)} \leq \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ i podobnie

$$\|z\chi_{A_n}\|_{\rho(X, Y)} \leq \max\{\|x\chi_{A_n}\|_X, \|y\chi_{A_n}\|_Y\}.$$

Skoro jednak $X, Y \in (OC)$, to

$$\max\{\|x\chi_{A_n}\|_X, \|y\chi_{A_n}\|_Y\} \rightarrow 0,$$

co kończy dowód. ■

Definicja 2.0.10. *Powiemy, że para przestrzeni Köthe'go (X, Y) jest **wspólnie porządkowo nieciągła** (jointly order discontinuous) (w skrócie $(X, Y) \in (JOD)$), jeśli istnieją elementy $x \in X \setminus X_a$, $y \in Y \setminus Y_a$, ciąg zbiorów mierzalnych $A_n \searrow \emptyset$ oraz stała $a > 0$ takie, że dla każdego ciągu $(B_n) \subset \Sigma$ takiego, że $B_n \subset A_n$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek*

$$(\|x\chi_{B_n}\|_X \geq a \text{ i } \|y\chi_{B_n}\|_Y \geq a) \text{ lub } (\|x\chi_{B'_n}\|_X \geq a \text{ i } \|y\chi_{B'_n}\|_Y \geq a), \quad (2.1)$$

gdzie $B'_n = A_n \setminus B_n$.

Uwaga 2.0.11. Odnotujmy, że w pracy [60] wprowadzono własność (JOD) przy pomocy bardziej skomplikowanego, z pozoru słabszego warunku, tj. $(X, Y) \in (JOD)$, gdy istnieją elementy $x \in X \setminus X_a$, $y \in Y \setminus Y_a$ oraz ciąg zbiorów mierzalnych $A_n \searrow \emptyset$ takie, że dla każdego ciągu $(B_n) \subset \Sigma$ takiego, że $B_n \subset A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) istnieje liczba $a > 0$ oraz ciąg indeksów (n_k) taki, że

$$\text{albo } \|x\chi_{B_{n_k}}\|_X \geq a \text{ i } \|y\chi_{B_{n_k}}\|_Y \geq a \text{ dla każdego } k,$$

$$\text{albo } \|x\chi_{B'_{n_k}}\|_X \geq a \text{ i } \|y\chi_{B'_{n_k}}\|_Y \geq a \text{ dla każdego } k,$$

gdzie $B'_n = A_n \setminus B_n$. Oznaczmy chwilowo ten warunek jako (*).

Zauważmy, że obie definicje są równoważne. Oczywiście wystarczy wykazać tylko jedną implikację, a mianowicie, że z (*) wynika warunek w Definicji 2.0.10. Na początku odnotujmy, że zmieniając kolejność ostatnich dwóch kwantyfikatorów, możemy Definicję 2.0.10 równoważnie zapisać jako: istnieją elementy $x \in X \setminus X_a$, $y \in Y \setminus Y_a$, ciąg zbiorów mierzalnych $A_n \searrow \emptyset$ oraz stała $a > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz każdego zbioru $B \in \Sigma$, jeśli $B \subset A_n$, to zachodzą nierówności (2.1). Przypuśćmy, że para X, Y nie spełnia warunku z Definicji 2.0.10. Wtedy dla dowolnych $x \in X \setminus X_a$, $y \in Y \setminus Y_a$, ciągu zbiorów mierzalnych $A_k \searrow \emptyset$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $B_k \in \Sigma$ taki, że $B_k \subset A_{n(k)}$ dla pewnego $n(k) \in \mathbb{N}$ oraz

$$\left(\|x\chi_{B_k}\|_X < \frac{1}{k} \text{ lub } \|y\chi_{B_k}\|_Y < \frac{1}{k} \right) \text{ i } \left(\|x\chi_{B'_k}\|_X < \frac{1}{k} \text{ lub } \|y\chi_{B'_k}\|_Y < \frac{1}{k} \right), \quad (2.2)$$

gdzie $B'_k = A_{n(k)} \setminus B_k$. Zauważmy najpierw, że bez straty ogólności możemy przyjąć, iż ciąg $(n(k))$ jest ściśle rosnący. Rzeczywiście, jeśli dla pewnego k zachodzi nierówność $n(k+1) \leq n(k)$, to zbiór B_{k+1} możemy zastąpić nowym zbiorem $C_{k+1} = B_{k+1} \cap A_{n(k)+1}$. Wtedy zarówno $C_{k+1} \subset B_{k+1}$, jak i $C'_{k+1} \subset B'_{k+1}$, gdyż $C'_{k+1} = A_{n(k)+1} \setminus C_{k+1}$ oraz $A_{n(k)+1} \subset A_{n(k)}$. Zatem po podstawieniu do (2.2) zbiorów C_{k+1} , C'_{k+1} w miejsce B_{k+1} , B'_{k+1} , nierówności tym bardziej zachodzą. Jeśli już wiemy, że ciąg $(n(k))$ rośnie (tzn. jest podciągiem ciągu (n)), to możemy uzupełnić ciąg (B_k) budując nowy ciąg (D_k) w taki sposób, aby "wypełnić luki" między $n(k)$, tzn. aby dla każdego naturalnego k , istniał $D_k \subset A_k$. Zdefiniujmy ciąg zbiorów $(D_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ jak następuje

$$D_k = \begin{cases} A_k & \text{gdy } k < n(1), \\ B_i \cap A_k & \text{gdy } n(i) \leq k < n(i+1). \end{cases}$$

Oczywiście $D_k \subset A_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponadto dla $k \geq n(1)$, jeśli $D_k = B_i \cap A_k$, to $D_k \subset B_i$ oraz $D'_k = A_k \setminus D_k = A_k \setminus B_i \subset A_{n(i)} \setminus B_i$. Stąd i z (2.2)

$$\left(\|x\chi_{D_k}\|_X < \frac{1}{i} \text{ lub } \|y\chi_{D_k}\|_Y < \frac{1}{i} \right) \text{ i } \left(\|x\chi_{D'_k}\|_X < \frac{1}{i} \text{ lub } \|y\chi_{D'_k}\|_Y < \frac{1}{i} \right),$$

przy czym $k < n(i+1)$, więc gdy $k \rightarrow \infty$, to też $i \rightarrow \infty$. Zatem para elementów x, y i ciąg (A_n) nie spełniają warunku (*), co dowodzi równoważności obu definicji.

Twierdzenie 2.0.12. Niech $\rho \in U$ oraz niech X, Y będzie parą przestrzeni Kóthe'go.

(i) Jeśli $\rho(X, Y) \in (OC)$, to $(X, Y) \notin (JOD)$.

(ii) Jeśli $(X, Y) \notin (JOD)$ oraz $\rho \in \Delta_2(R, L, \mathbb{R}_+)$, to $\rho(X, Y) \in (OC)$.

Dowód. (i) Przypuśćmy, że $(X, Y) \in (JOD)$. Niech $x \in (X \setminus X_a)_+$, $y \in (Y \setminus Y_a)_+$, ciąg zbiorów $(A_n) \subset \Sigma$, $A_n \searrow \emptyset$ oraz stała $a > 0$ będą jak w Definicji 2.0.10. Zdefiniujmy $z = \rho(x, y)$ oraz ciąg

$$z_n = \rho(x, y) \chi_{A_n} = \rho(x \chi_{A_n}, y \chi_{A_n}).$$

Niech dla ustalonego n , para $(u_n, v_n) \in X_+ \times Y_+$ będzie taka, że

$$z_n = \rho(u_n, v_n). \quad (2.3)$$

Przyjmijmy

$$B_n = \{t \in A_n : u_n(t) > x(t)\} \text{ i } B'_n = A_n \setminus B_n.$$

Wtedy ciąg (B_n) jest jak w definicji własności (JOD) , więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$(\|x \chi_{B_n}\|_X \geq a \text{ i } \|y \chi_{B_n}\|_Y \geq a) \text{ albo } (\|x \chi_{B'_n}\|_X \geq a \text{ i } \|y \chi_{B'_n}\|_Y \geq a). \quad (2.4)$$

Jeśli $\|x \chi_{B_n}\|_X \geq a$ i $\|y \chi_{B_n}\|_Y \geq a$, to

$$\max\{\|u_n\|_X, \|v_n\|_Y\} \geq \max\{\|u_n \chi_{B_n}\|_X, \|v_n \chi_{B_n}\|_Y\} \geq \|u_n \chi_{B_n}\|_X \geq \|x \chi_{B_n}\|_X \geq a.$$

Analogicznie $\max\{\|u_n\|_X, \|v_n\|_Y\} \geq a$, gdy $\|x \chi_{B'_n}\|_X \geq a$ i $\|y \chi_{B'_n}\|_Y \geq a$, ponieważ z równości (2.3) wynika, że $v_n \chi_{B'_n} \geq y \chi_{B'_n}$. Przechodząc do infimum po wszystkich u_n, v_n jak w (2.3) uzyskamy następujące oszacowanie

$$\|z_n\|_{\rho(X, Y)} = \inf\{\max\{\|u_n\|_X, \|v_n\|_Y\} : z_n = \rho(u_n, v_n)\} \geq a,$$

dla wszystkich n . Zatem $z \notin \rho(X, Y)_a$, co oznacza, że $\rho(X, Y) \notin (OC)$.

(ii) Niech $0 \leq z = \rho(x, y)$ oraz ciąg $(A_n) \subset \Sigma$, $A_n \searrow \emptyset$ będą dowolne. Musimy pokazać, że $\|z \chi_{A_n}\|_{\rho(X, Y)} \rightarrow 0$. Rozważmy następujące trzy przypadki.

A) Jeśli $x \in X_a$ i $y \in Y_a$, to dowód wygląda jak w Lemacie 2.0.9.

B) Załóżmy, że $x \in X_a$ lub $y \in Y_a$. Przyjmijmy, że $x \in X_a$. Ponieważ $\rho \in \Delta_2(L, \mathbb{R}_+)$, to istnieje stała $K > 0$ spełniająca nierówność

$$\rho(u, v) \leq \rho\left(\left(\frac{K}{2}\right)^m u, \left(\frac{1}{2}\right)^m v\right),$$

dla wszystkich $u, v > 0$ oraz $m \in \mathbb{N}$. Skoro jednak $\|x \chi_{A_n}\|_X \rightarrow 0$, to możemy dobrać niemalejący i nieograniczony ciąg $(i(n)) \subset \mathbb{N}$ oraz stałą $M > 0$ tak, aby spełniona była nierówność

$$\left(\frac{K}{2}\right)^{i(n)} \sqrt{\|x \chi_{A_n}\|_X} \leq M,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$z \chi_{A_n} = \rho(x, y) \chi_{A_n} \leq \rho\left(\left(\frac{K}{2}\right)^{i(n)} x \chi_{A_n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{i(n)} y \chi_{A_n}\right),$$

z czego wynika, że

$$\begin{aligned} \|z\chi_{A_n}\|_{\rho(X,Y)} &\leq \max \left\{ \left(\frac{K}{2}\right)^{i(n)} \|x\chi_{A_n}\|_X, \left(\frac{1}{2}\right)^{i(n)} \|y\chi_{A_n}\|_Y \right\} \\ &\leq \max \left\{ M\sqrt{\|x\chi_{A_n}\|_X}, \left(\frac{1}{2}\right)^{i(n)} \|y\|_Y \right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Gdy $y \in Y_a$, to wykorzystując warunek $\Delta_2(R, \mathbb{R}_+)$ dowód wygląda analogicznie.

C) Skoncentrujemy się obecnie na najistotniejszym (z punktu widzenia tego twierdzenia) przypadku, tzn. $x \in X \setminus X_a$ oraz $y \in Y \setminus Y_a$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\mu(\text{supp}(x) \div \text{supp}(y)) = 0$ oraz $A_n \subset \text{supp}(x)$ dla wszystkich n . Zauważmy, że dzięki monotoniczności ciągu $z\chi_{A_n}$, a zatem też ciągu $\|z\chi_{A_n}\|_{\rho(X,Y)}$, wystarczy pokazać, że $\|z\chi_{A_{n_k}}\|_{\rho(X,Y)} \rightarrow 0$ dla pewnego podciągu (A_{n_k}) ciągu (A_n) . Skoro $(X, Y) \notin (JOD)$, to tłumacząc jak w Uwadze 2.0.11 znajdziemy podciąg (A_{n_k}) ciągu (A_n) oraz ciąg (B_{n_k}) , $B_{n_k} \subset A_{n_k}$ takie, że

$$\left(\|x\chi_{B_{n_k}}\|_X \rightarrow 0 \text{ lub } \|y\chi_{B_{n_k}}\|_Y \rightarrow 0 \right) \text{ i } \left(\|x\chi_{B'_{n_k}}\|_X \rightarrow 0 \text{ lub } \|y\chi_{B'_{n_k}}\|_Y \rightarrow 0 \right),$$

gdzie $B'_{n_k} = A_{n_k} \setminus B_{n_k}$. Oznaczmy $C_k = A_{n_k}$, $D_k = B_{n_k}$ oraz $D'_k = B'_{n_k}$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Zauważmy, że jeśli $(\|x\chi_{D_k}\|_X \rightarrow 0 \text{ i } \|x\chi_{D'_k}\|_X \rightarrow 0)$ lub $(\|y\chi_{D_k}\|_Y \rightarrow 0 \text{ i } \|y\chi_{D'_k}\|_Y \rightarrow 0)$, to odpowiednio $\|x\chi_{C_k}\|_X \rightarrow 0$ lub $\|y\chi_{C_k}\|_Y$, więc możemy postąpić jak w przypadku **B)**. Przyjmijmy więc, że

$$\|x\chi_{D_k}\|_X \rightarrow 0 \text{ i } \|y\chi_{D'_k}\|_Y \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

(gdyby $\|y\chi_{D_k}\|_X \rightarrow 0 \text{ i } \|x\chi_{D'_k}\|_Y \rightarrow 0$, to dowód wyglądałby tak samo). Ponieważ $\rho \in \Delta_2(R, L, \mathbb{R}_+)$, to istnieją stałe $K, L > 0$ takie, że dla dowolnych $u, v > 0$ oraz każdego $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \rho(u, v) &\leq \rho\left(\left(\frac{K}{2}\right)^m u, \left(\frac{1}{2}\right)^m v\right), \\ \rho(u, v) &\leq \rho\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m u, \left(\frac{L}{2}\right)^m v\right). \end{aligned}$$

Ponadto istnieją niemalejące ciągi $m(k) \rightarrow \infty$ oraz $j(k) \rightarrow \infty$ spełniające nierówności

$$\begin{aligned} \left(\frac{K}{2}\right)^{m(k)} \sqrt{\|x\chi_{D_k}\|_X} &\leq M, \\ \left(\frac{L}{2}\right)^{j(k)} \sqrt{\|y\chi_{D'_k}\|_Y} &\leq N, \end{aligned}$$

dla pewnych stałych $M, N > 0$. Podstawmy $i(k) = \min(m(k), j(k)) \rightarrow \infty$. Mamy wtedy

$$z_{n_k} = z\chi_{A_{n_k}} = z\chi_{C_k} = \rho(x, y)\chi_{C_k} = \rho(x, y)\chi_{D_k} + \rho(x, y)\chi_{D'_k} \leq$$

$$\leq \rho \left(\left(\frac{K}{2} \right)^{i(k)} x, \left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} y \right) \chi_{D_k} + \rho \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} x, \left(\frac{L}{2} \right)^{i(k)} y \right) \chi_{D'_k}.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} & \|z_{n_k}\|_{\rho(X,Y)} \leq \\ & \leq \left(\frac{K}{2} \right)^{i(k)} \|x\chi_{D_k}\|_X + \left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} \|y\chi_{D_k}\|_Y + \left(\frac{L}{2} \right)^{i(k)} \|y\chi_{D'_k}\|_Y + \left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} \|x\chi_{D'_k}\|_X \leq \\ & \leq M\sqrt{\|x\chi_{D_k}\|_X} + \left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} \|y\chi_{D_k}\|_Y + N\sqrt{\|y\chi_{D'_k}\|_Y} + \left(\frac{1}{2} \right)^{i(k)} \|x\chi_{D'_k}\|_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Czyli też $\|z_n\|_{\rho(X,Y)} \rightarrow 0$, a ponieważ $z \in \rho(X,Y)_+$ był dowolny, wnosimy, że $\rho(X,Y) \in (OC)$. ■

W przypadku przestrzeni E_φ , jej porządkowa ciągłość implikuje porządkową ciągłość przestrzeni E . Z tego punktu widzenia ciekawym wydaje się, że w przypadku ogólnym (tj. $\rho(X,Y)$), może się zdarzyć sytuacja, w której żadna z przestrzeni X i Y nie jest porządkowo ciągła, a mimo to $(X,Y) \notin (JOD)$ i w konsekwencji $\rho(X,Y) \in (OC)$, dla „dobrych” ρ . Poniższy przykład przedstawia taką sytuację.

Przykład 2.0.13. Niech $\Omega = \mathbb{R}_+$ oraz φ, ψ będą \mathcal{N} -funkcjami takimi, że

$$\varphi \in \Delta_2(0) \text{ i } \varphi \notin \Delta_2(\infty),$$

$$\psi \notin \Delta_2(0) \text{ i } \psi \in \Delta_2(\infty).$$

Oczywiście wtedy przestrzenie Orlicza L^φ i L^ψ nie są porządkowo ciągłe (zob. np. [86], str. 21). Pokażemy, że $(L^\varphi, L^\psi) \notin (JOD)$. Ustalmy dowolne $0 \leq x \in L^\varphi \setminus (L^\varphi)_a$, $0 \leq y \in L^\psi \setminus (L^\psi)_a$ oraz dowolny ciąg $(A_n) \subset \Sigma$ taki, że $A_n \searrow \emptyset$. Zauważmy dalej, że zbiór $A = \{t \in \Omega : x(t) \geq 1\}$ ma skończoną miarę, a ponadto

$$x\chi_{\Omega \setminus A} \in L_a^\varphi.$$

Rzeczywiście, mamy $I_\varphi(cx) = \|\varphi(cx)\|_{L^1} < \infty$ dla pewnego $c > 0$, ponieważ $x \in L^\varphi$. Przypuśćmy, że $0 \leq z_n \leq x\chi_{\Omega \setminus A}$ oraz $z_n \rightarrow 0$ μ -p.w.. Zatem $I_\varphi(cz_n) \rightarrow 0$, gdyż $\varphi(cx) \in L^1 \in (OC)$. Ponieważ $\varphi \in \Delta_2(0)$ wnosimy, że dla każdego $\lambda > 0$ istnieje $K > 0$ takie, że $\varphi(\lambda cu) \leq K\varphi(cu)$ dla wszystkich $u \in [0, 1]$. Zatem

$$I_\varphi(\lambda cz_n) \leq KI_\varphi(cz_n) \rightarrow 0.$$

Stąd $\|z_n\|_\varphi \leq \frac{1}{c\lambda}$ dla odpowiednio dużych n , co wobec dowolności λ oznacza, że $\|z_n\|_\varphi \rightarrow 0$. Z drugiej strony

$$y\chi_A \in L_a^\psi,$$

ponieważ $L^\psi(A, \Sigma \cap A, \mu|_A) \in (OC)$, gdyż $\mu(A) < \infty$ i $\psi \in \Delta_2(\infty)$ (zob. np. [86], str. 21). Wtedy dla

$$B_n = A_n \cap A, B'_n = A_n \setminus B_n,$$

mamy $\|x\chi_{B'_n}\|_\varphi \rightarrow 0$ i $\|y\chi_{B_n}\|_\psi \rightarrow 0$, co ze względu na dowolność x, y oraz (A_n) oznacza, że $(L^\varphi, L^\psi) \notin (JOD)$. Przyjmując $\rho(u, v) = u^\delta v^{1-\delta}$, dla dowolnej $\delta \in (0, 1)$, z Twierdzenia 2.0.12 (ii) wnosimy

$$\rho(L^\varphi, L^\psi) = (L^\varphi)^\delta (L^\psi)^{1-\delta} \in (OC).$$

Odnotujmy, że gdy X lub Y jest izomorficznie równa L^∞ , a druga z przestrzeni też nie jest porządkowo ciągła, to $(X, Y) \in (JOD)$ i w konsekwencji $\rho(X, Y) \in (OC)$. Oczywiście, $(L^\infty)_a = \{0\}$, ale to nie jedyny taki przypadek przestrzeni Köthe'go X , dla której $X_a = \{0\}$. Na przykład przestrzeń $X = L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ też posiada trywialną podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych. Nasuwa się następujące pytanie.

Przykład 2.0.14. *Czy $(X, Y) \in (JOD)$ gdy $X_a = \{0\}$ i $Y \notin (OC)$? - Nie. Rzeczywiście, niech μ będzie miarą Lebesgue'a na \mathbb{R}_+ . Połóżmy $X = L^1(\mathbb{R}_+, \Sigma, \mu) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \Sigma, \mu)$ z normą $\|x\|_X = \|x\|_1 + \|x\|_\infty$ oraz niech $Y = L^\varphi(\mathbb{R}_+, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią Orlicza z normą Luxemburga taką, że $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, $\varphi \notin \Delta_2(0)$ i φ jest \mathcal{N} -funkcją. Wtedy $X_a = \{0\}$ i $Y \notin (OC)$ (zob. np. [86], str. 21). Pokażemy, że dla dowolnych $0 \leq x \in X \setminus X_a$, $0 \leq y \in Y \setminus Y_a$ oraz każdego ciągu zbiorów $(A_n) \subset \Sigma$, $A_n \searrow \emptyset$ istnieje ciąg (B_n) taki, że $B_n \subset A_n$ oraz*

$$\|x\chi_{B'_n}\|_X \rightarrow 0 \text{ i } \|y\chi_{B_n}\|_Y \rightarrow 0,$$

gdzie $B'_n = A_n \setminus B_n$. Ustalmy więc dowolne $0 \leq x \in X \setminus X_a$, $0 \leq y \in Y \setminus Y_a$ i ciąg (A_n) , $A_n \searrow \emptyset$. Skoro $A_n \searrow \emptyset$, to $\mu(A_n) \rightarrow 0$ lub $\mu(A_n) = \infty$ dla każdego n . Jeśli $\mu(A_n) \rightarrow 0$, to dla pewnego $K \in \mathbb{N}$ i wszystkich $n \geq K$, $\mu(A_n) < \infty$. Wtedy $L^\varphi(A_n, \Sigma \cap A_n, \mu|_{A_n}) \in (OC)$ i wystarczy przyjąć $B_n = \emptyset$ dla każdego n . Zatem tylko drugi przypadek jest istotny. Zdefiniujmy

$$C_k = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ : x(t) \geq \frac{1}{k} \right\},$$

$$B_k^n = C_k \cap A_n \text{ i } (B_k^n)' = A_n \setminus B_k^n.$$

Skoro $x \in L^1$, to $\mu(C_k) < \infty$ więc też $\mu(B_k^n) < \infty$ dla wszystkich $k, n \in \mathbb{N}$. Ponadto $\mu(B_k^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dla każdego k , ponieważ $B_k^n \subset C_k$ oraz $\chi_{B_k^n} \leq \chi_{A_n} \searrow 0$ μ -p.w. gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem $\|y\chi_{B_k^n}\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (ponieważ $L^\varphi(C_k, \Sigma \cap C_k, \mu|_{C_k}) \in (OC)$) dla każdego k . Zdefiniujmy dla $k = 2, 3, \dots$

$$R'(k) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \left\| y\chi_{B_k^n} \right\|_Y \leq \frac{1}{k} \right\},$$

$$R(k) = \max_{i=2, \dots, k} R'(i)$$

oraz dla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$i(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 1 \leq n < R(2), \\ k & \text{gdy } R(k) \leq n < R(k+1). \end{cases}$$

Wtedy ciąg $i(n)$ jest niemalejący oraz $\|y\chi_{B_{i(n)}^n}\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \left\| x\chi_{(B_{i(n)}^n)'} \right\|_X &= \left\| x\chi_{(B_{i(n)}^n)'} \right\|_1 + \left\| x\chi_{(B_{i(n)}^n)'} \right\|_\infty \leq \\ &\leq \|x\chi_{A_n}\|_1 + \frac{1}{i(n)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem $(X, Y) \notin (JOD)$.

W pracy [100] zostało udowodnione, że odpowiedni warunek Δ_2 (z lewej lub z prawej) wystarcza, aby przestrzeń Calderóna-Łozanowskiego $\rho(X, Y)$ była porządkowo ciągła, nawet gdy jedna z przestrzeni X, Y nie posiada tej własności. Jednakże w teorii przestrzeni Orlicza wiadomo, że dla porządkowej ciągłości przestrzeni wystarcza czasami, aby warunek Δ_2 zachodził tylko dla małych lub tylko dla dużych argumentów. Sytuację taką dla przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego $\rho(X, Y)$ opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.0.15. *Niech $\rho \in U$ oraz niech X, Y będzie parą przestrzeni Köthe'go.*

(i) *Jeśli $X \subset Y$, $X \in (OC)$ oraz $\rho \in \Delta_2(L, 0)$, to $\rho(X, Y) \in (OC)$.*

(ii) *Jeśli $Y \subset X$, $X \in (OC)$ oraz $\rho \in \Delta_2(L, \infty)$, to $\rho(X, Y) \in (OC)$.*

Dowód. (i) Niech $z \in \rho(X, Y)_+$. Wtedy istnieje para $(x, y) \in X_+ \times Y_+$ taka, że $z = \rho(x, y)$. Wtedy też $z \leq \rho(x, x \vee y) \in \rho(X, Y)$ ponieważ $x \vee y \in Y$ na podstawie założenia $X \subset Y$. Ponadto z Lematu 1.2.8 wynika, że istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\rho(x(t), (x \vee y)(t)) \leq \rho\left(\frac{K_1}{2}x(t), \frac{1}{2}(x \vee y)(t)\right), \quad (2.6)$$

dla każdego $t \in \text{supp}(x \vee y)$, ponieważ wtedy $\frac{x(t)}{(x \vee y)(t)} \leq 1$. Stosując Lemat 1.2.8 po raz kolejny znajdziemy stałą K_2 taką, że

$$\rho\left(\frac{K_1}{2}x(t), \frac{1}{2}(x \vee y)(t)\right) \leq \rho\left(\frac{K_1 K_2}{2^2}x(t), \frac{1}{2^2}(x \vee y)(t)\right), \quad (2.7)$$

dla każdego $t \in \text{supp}(x \vee y)$, ponieważ wtedy $\frac{K_1 x(t)}{(x \vee y)(t)} \leq K_1$. Postępując w ten sposób możemy znaleźć ciąg (K_i) spełniający dla każdego n nierówność

$$\rho(x(t), (x \vee y)(t)) \leq \rho\left(\frac{\prod_{i=1}^n K_i}{2^n}x(t), \frac{1}{2^n}(x \vee y)(t)\right),$$

gdy $t \in \text{supp}(x \vee y)$. Weźmy dowolny ciąg (A_n) taki, że $A_n \searrow \emptyset$ i zdefiniujmy

$$z_n = \rho(x\chi_{A_n}, y\chi_{A_n}) \leq \rho(x\chi_{A_n}, y \vee x\chi_{A_n}).$$

Wystarczy więc sprawdzić, że $\|z_n\|_{\rho(X, Y)} \rightarrow 0$. Porządkowa ciągłość przestrzeni X implikuje

$$\|x\chi_{A_n}\|_X \searrow 0.$$

Ponadto istnieje monotoniczny ciąg $(i(n))$, $i(n) \rightarrow \infty$ oraz liczba $M > 0$ takie, że

$$\frac{\prod_{i=1}^{i(n)} K_i}{2^{i(n)}} \sqrt{\|x\chi_{A_n}\|_X} \leq M$$

dla każdego n . Zatem dowód można dokończyć jak w Twierdzeniu 2.0.12 (ii).

(ii) Niech $z \in \rho(X, Y)_+$. Wtedy $z = \rho(x, y)$ dla pewnych $x \in X_+, y \in Y_+$. Jeśli $y \in Y_a$, to oczywiście $z \in \rho(X, Y)_a$ (zob. Twierdzenie 2.0.9). Przypuśćmy, że $y \in (Y \setminus Y_a)_+$. Mamy

$$z \leq \rho(x \vee y, y)$$

oraz $x \vee y \in X$. Na podstawie Lematu 1.2.8 (ii), dla $u_0 = 1$, istnieje $K > 1$ taka, że $\rho(u, v) \leq \rho\left(\frac{K}{2}u, \frac{1}{2}v\right)$ dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ gdzie $\frac{u}{v} > 1$. Ponieważ nierówność $K^n \frac{x \vee y}{y} \chi_{\text{supp}(y)} \geq \chi_{\text{supp}(y)}$ jest prawdziwa dla każdego n , więc

$$\rho(x \vee y, y) \leq \rho\left(\left(\frac{K}{2}\right)^n x \vee y, \frac{1}{2^n} y\right).$$

Możemy zatem dokończyć jak w Twierdzeniu 2.0.12 (ii). ■

W dalszej części pracy więcej uwagi poświęcimy przestrzeniom multiplikatorów, tymczasem ograniczymy się do podania definicji. Dla danych przestrzeni Köthe'go X i Z nad tą samą przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) , **przestrzeń multiplikatorów** $M(X, Z)$ (oznaczamy też X^Z) rozumiemy jako

$$M(X, Z) = \left\{ x \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : xy \in Z \text{ dla każdego } y \in X \right\}$$

(zob. np. [88]). Na potrzeby niniejszego rozdziału uogólnimy powyższą definicję w następujący sposób.

Definicja 2.0.16. Niech X i Z będą funkcyjnymi przestrzeniami Köthe'go nad przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) oraz niech zbiór $H \subset \mathbb{R}_+$ będzie nieograniczony. Zdefiniujmy zbiory

$$X_H = \left\{ x \in X : \exists_{A \subset \Omega, \mu(A)=0} \forall_{t \in \Omega \setminus A} x(t) \in H \cup \{0\} \right\}.$$

$$M(X_H, Z) = \left\{ x \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : xy \in Z \text{ dla każdego } y \in X_H \right\}.$$

Jeśli $H = \mathbb{R}$, to oczywiście $X_H = X$. Znana jest następująca własność przestrzeni Köthe'go.

Lemat 2.0.17. (zob. np. [88]) *Jeśli X jest przestrzenią Köthe'go, to $M(X, X) = L^\infty$.*

Będziemy potrzebowali uogólnienia powyższego lematu.

Lemat 2.0.18. *Niech X będzie porządkowo ciągłą przestrzenią Köthe'go taką, że $X \not\subset L^\infty$. Przypuśćmy, że zbiór $H \subset \mathbb{R}_+$ jest nieograniczony. Wtedy*

$$M(X_H, X) = L^\infty.$$

Dowód. Inkluzja $' \supset '$ wynika z włożenia $X_H \subset X$. Aby pokazać drugą inkluzję, przypuśćmy, że istnieje $x \in M(X_H, X) \setminus L^\infty$. Zdefiniujmy zbiory

$$A_n = \left\{ t \in \Omega : n^3 \leq |x(t)| < (n+1)^3 \right\}.$$

Skoro $x \notin L^\infty$, to $\mu(A_n) > 0$ dla nieskończenie wielu n . Przyjmijmy

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) > 0\}.$$

Dalej położmy

$$y = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^2 \|\chi_{B_n}\|_X} \chi_{B_n}, \quad (2.8)$$

gdzie $B_n \subset A_n$ spełniają $\frac{1}{n^2 \|\chi_{B_n}\|_X} \in H$. Fakt, że takie zbiory B_n istnieją wynika z nieograniczoności zbioru H oraz założenia $X \in (OC)$, ponieważ wtedy funkcja zbioru $\gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ zdefiniowana wzorem $\gamma : A \mapsto \|\chi_A\|_X$ posiada własność Darboux na podstawie Twierdzenia 1.1.6. Dalej, z zupełności przestrzeni X oraz absolutnej zbieżności szeregu $\sum_{n \in M} \frac{1}{n^2 \|\chi_{B_n}\|_X} \chi_{B_n}$ wynika, że $y \in X$, a ponadto $y \in X_H$. Z drugiej strony

$$\|xy\|_X \geq \left\| \frac{n^3}{n^2 \|\chi_{B_n}\|_X} \chi_{B_n} \right\|_X = n,$$

dla każdego $n \in M$. Co przeczy założeniu, że $x \in M(X_H, X)$. ■

Uwaga 2.0.19. Powyższy lemat pozostanie prawdziwy, jeśli założenie $X \in (OC)$ zastąpimy symetrią przestrzeni X , gdy $\Omega = [0, 1]$ i $X \not\subset L^\infty$. Zauważmy bowiem, że w powyższym dowodzie potrzebowaliśmy tylko porządkowej ciągłości funkcji charakterystycznych. Wystarczy więc pokazać, że $\chi_A \in X_a$ dla każdego $A \in \Sigma$. Skoro $X \not\subset L^\infty$, to istnieje $x \in X_+$, który nie należy do L^∞ . Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ zdefiniujmy zbiory $A_n = A_n(x) = \{t \in \Omega : x(t) \geq n\}$. Wtedy wszystkie A_n mają niezerową miarę, gdyż $0 \leq x \in X \setminus L^\infty$ oraz $A_n \searrow \emptyset$. Zauważmy na początek, że dla takiego x ,

$$x \in X_a \iff \|x\chi_{A_n}\|_X \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Implikacja $x \in X_a \implies \|x\chi_{A_n}\|_X \rightarrow 0$ jest oczywista. Aby wykazać implikację przeciwną, przez transpozycję pokażemy, że gdy $x \notin X_a$, to $\|x\chi_{A_n}\|_X \geq a > 0$ dla pewnego $a > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $x \notin X_a$. Wtedy istnieje ciąg zbiorów (C_n) , $C_n \searrow \emptyset$ taki, że $\|x\chi_{C_n}\|_X \geq a$ dla wszystkich n i pewnego $a > 0$. Wybierzmy podciąg (C_{n_k}) ciągu (C_n) tak, aby $\mu(C_{n_k}) \leq \mu(A_k)$ dla każdego k . Ponadto, jeśli każdy ze zbiorów C_{n_k} powiększymy do zbioru B_k , w taki sposób, że $\mu(B_k) = \mu(A_k)$ dla każdego k , to nierówność $\|x\chi_{B_k}\|_X \geq a$ pozostanie prawdziwa dla każdego n . Pokażemy, że $\|x\chi_{A_n}\|_X \geq \|x\chi_{B_n}\|_X$. Zauważmy, że $\mu(B_n \setminus A_n) = \mu(A_n \setminus B_n)$ dla każdego n , zatem dla każdego $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} d_{x\chi_{B_n}}(\lambda) &= d_{x\chi_{B_n \cap A_n}}(\lambda) + d_{x\chi_{B_n \setminus A_n}}(\lambda) \leq d_{x\chi_{B_n \cap A_n}}(\lambda) + d_{n\chi_{B_n \setminus A_n}}(\lambda) = \\ &= d_{x\chi_{B_n \cap A_n}}(\lambda) + d_{n\chi_{A_n \setminus B_n}}(\lambda) \leq d_{x\chi_{B_n \cap A_n}}(\lambda) + d_{x\chi_{A_n \setminus B_n}}(\lambda) = d_{x\chi_{A_n}}(\lambda), \end{aligned}$$

czyli $(x\chi_{B_n})^* \leq (x\chi_{A_n})^*$ i stąd $a \leq \|x\chi_{B_n}\|_X \leq \|x\chi_{A_n}\|_X$, ze względu na symetrię przestrzeni X . Wykazaliśmy zatem (2.9).

Niech $0 \leq x \in X \setminus L^\infty$ i $x \geq \chi_{\text{supp} x}$. Wtedy $\sqrt{x} \in X \setminus L^\infty$ oraz $\sqrt{x} \leq x$, natomiast z (2.9) wynika, że $\sqrt{x} \in X_a$. Rzeczywiście, zdefiniujmy

$$D_n = A_n(\sqrt{x}) = \left\{ t \in \Omega : \sqrt{x(t)} \geq n \right\}.$$

Wtedy

$$n\sqrt{x}\chi_{D_n} \leq \sqrt{x}\sqrt{x}\chi_{D_n} = x\chi_{D_n},$$

czyli

$$\sqrt{x}\chi_{D_n} \leq \frac{1}{n}x\chi_{D_n}$$

i stąd

$$\|\sqrt{x}\chi_{D_n}\|_X \leq \left\| \frac{1}{n}x\chi_{D_n} \right\|_X \leq \frac{1}{n} \|x\|_X \rightarrow 0.$$

Zatem na mocy (2.9), $\sqrt{x} \in X_a$. Jednak $\sqrt{x} = \sqrt{x}\chi_{D_1} \geq \chi_{D_1}$, więc $\chi_{D_1} \in X_a$. Wystarczy więc tylko odnotować, że jeśli $A \in \Sigma$, to ze względu na bezatomowość miary, można zbiór A podzielić na skończoną liczbę parami rozłącznych podzbiorów E_i takich, że

$$A = \bigcup_i E_i \text{ oraz } \mu(E_i) \leq \mu(D_1) \quad \forall_i.$$

Wtedy z symetrii przestrzeni X wynika, że $\chi_{E_i} \in X_a$ dla każdego i , a zatem $\chi_A \in X_a$, jako suma skończonej liczby elementów porządkowo ciągłych.

Potrzebne nam będzie jeszcze poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.0.20. ([100]) *Niech X, Y będą przestrzeniami Köthe'go spełniającymi warunek b') w Definicji 1.1.1. Niech obie spełniają własność Fatou oraz niech $\rho \in U$. Wtedy dla każdego $z \in \rho(X, Y)$*

$$\begin{aligned} \|z\|_{\rho(X, Y)} &= \inf \{ \max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} : z = \rho(u, v), (u, v) \in X_+ \times Y_+ \} = \\ &= \min \{ \max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} : z = \rho(u, v), (u, v) \in X_+ \times Y_+ \}. \end{aligned}$$

Wiadomo, że przy pewnych dodatkowych założeniach, warunek $\varphi \in \Delta_2$ jest konieczny, by przestrzeń $\rho(E, L^\infty)$ była porządkowo ciągła (zob. [40]). Poniższe twierdzenie wynika wprost z mocniejszego Twierdzenia 1 z [40]. Udowodnimy je alternatywnie, wykorzystując powyższy lemat.

Twierdzenie 2.0.21. *Niech $\rho \in U$ oraz niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go (przy czym niech E spełnia mocniejszy warunek b' z Definicji 1.1.1) taką, że $L^\infty \subset E$, $E \in (FP)$ oraz $E \in (OC)$. Jeśli $\rho \notin \Delta_2(L, \infty)$, to $\rho(E, L^\infty) \notin (OC)$.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ równaniem

$$\rho(t, 1) = \rho\left(\frac{K(t)}{2}t, \frac{1}{2}\right) \text{ oraz } K(0) = 0. \quad (2.10)$$

Zauważmy, że K jest ciągła na $(0, \infty)$, ponieważ z definicji $\rho(\cdot, 1)$ i $\rho(\cdot, \frac{1}{2})$ są ciągłymi i różnowartościowymi funkcjami z \mathbb{R}_+ na \mathbb{R}_+ . Ponadto $\rho \notin \Delta_2(L, \infty)$ implikuje, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} K(t) = \infty. \quad (2.11)$$

Rzeczywiście, gdyby $\sup_{t \geq M} K(t) \leq N$ dla pewnych $N, M > 0$, to

$$\rho(t, 1) = \rho\left(\frac{K(t)}{2}t, \frac{1}{2}\right) \leq \rho\left(\frac{N}{2}t, \frac{1}{2}\right) \text{ dla } t \geq M,$$

co oznaczałoby, że $\rho \in \Delta_2(L, \infty)$.

Wybermy ciąg liczb rzeczywistych (s_n) w następujący sposób. Niech $s_0 = 0$ oraz niech s_n będzie rekurencyjnie określone w taki sposób, że

$$s_n \geq s_{n-1} + 1 \text{ oraz } K(s_n) \geq K(s_{n-1}) + 1.$$

Ciąg taki istnieje dzięki (2.11). Połóżmy $H = \{s_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Wtedy dla dowolnych $s, t \in H$ nierówność $s \leq t$ implikuje, że $K(s) \leq K(t)$. Ponadto funkcja K na zbiorze H pozostaje nieograniczona. Zdefiniujmy dalej

$$E_H = \left\{ x \in E : \exists_{A \subset \Omega, \mu(A)=0} \forall_{t \in \Omega \setminus A} x(t) \in H \right\}.$$

Przypuśćmy, dla sprzeczności, że $\rho(E, L^\infty) \in (OC)$. Zauważmy, iż założenia $L^\infty \subset E$ i $E \in (OC)$ implikują, że $E \not\subset L^\infty$. Niech $0 \leq q \in E \setminus L^\infty$. Zdefiniujmy zbiory

$$G_n = \{t \in \Omega : s_n \leq q(t) < s_{n+1}\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oraz element

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \chi_{G_n}.$$

Oczywiście $x \leq q$ oraz $x \in E_H$. Ponadto zbiory

$$A_n = \{t \in \Omega : x(t) > n\}$$

mają dodatnią miarę dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_n \searrow \emptyset$. Połóżmy

$$z_n = \rho(x, \chi_\Omega) \chi_{A_n}.$$

Wtedy $\|z_n\|_{\rho(E, L^\infty)} \searrow 0$, ponieważ założyliśmy, że $\rho(E, L^\infty) \in (OC)$. Ponadto, w świetle Twierdzenia 2.0.20, dla każdego n istnieje para $(u_n, v_n) \in E_+ \times L_+^\infty$ taka, że

$$\|z_n\|_{\rho(E, L^\infty)} = \max\{\|u_n\|_E, \|v_n\|_{L^\infty}\} \text{ i } z_n = \rho(u_n, v_n).$$

Zatem istnieje n_0 takie, że $v_{n_0} \leq \frac{1}{2} \chi_{A_{n_0}}$. Stosując równość (2.10) dostajemy

$$\rho(u_n(t), v_n(t)) = \rho(x(t), 1) = \rho\left(\frac{K(x(t))}{2} x(t), \frac{1}{2}\right)$$

dla μ -p.w. $t \in A_{n_0}$ i w rezultacie

$$\frac{K \circ x}{2} x \chi_{A_{n_0}} \leq u_{n_0} \in E.$$

Zdefiniujmy element

$$h = \frac{K \circ x}{2} x \chi_{A_{n_0}}.$$

Oczywiście funkcja h jest nieograniczona, gdyż $x \in E_H \setminus L^\infty$. Pokażemy, że $h \in M(E_H, E)$, aby uzyskać sprzeczność z Lematem 2.0.18. Wystarczy więc pokazać, że

dla każdego $y \in E_H$ spełniającego $y \geq x$, zachodzi $yh \in E$. Niech więc $y \geq x$ będzie dowolny, połóżmy

$$\begin{aligned} f &= \rho(y, \chi_\Omega), \\ f_n &= \rho(y\chi_{A_n}, \chi_{A_n}). \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że dla każdego n para $(r_n, s_n) \in E_+ \times L_+^\infty$ realizuje normę f_n , t.j.

$$\|f_n\|_\rho = \max\{\|r_n\|_E, \|s_n\|_\infty\} \text{ i } f_n = \rho(r_n, s_n).$$

Skoro $\rho(E, L^\infty) \in (OC)$, to $\|f_n\|_{\rho(E, L^\infty)} \rightarrow 0$, więc też $\|s_n\|_\infty \rightarrow 0$. Zatem istnieje $n_1 \geq n_0$ takie, że $s_{n_1} \leq \frac{1}{2}\chi_{A_{n_1}}$. Wtedy

$$\rho(r_{n_1}(t), s_{n_1}(t)) = \rho(y(t), 1) = \rho\left(\frac{K(y(t))}{2}y(t), \frac{1}{2}\right)$$

dla μ -p.w. $t \in A_{n_1}$. Więc

$$\frac{K \circ y}{2}y\chi_{A_{n_1}} \leq r_{n_1} \in E.$$

Co więcej, dzięki monotoniczności funkcji K na zbiorze H mamy

$$\frac{1}{2}K \circ x\chi_{A_{n_1}} \leq \frac{1}{2}K \circ y\chi_{A_{n_1}}.$$

Zatem

$$h\chi_{A_{n_1}}y \leq \frac{K \circ y}{2}y\chi_{A_{n_1}} \in E.$$

Ponadto $x\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}} \leq n_1\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}}$ oraz

$$h\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}} = \frac{K \circ x}{2}\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}} \leq \frac{K(n_1)}{2}\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}} \in L^\infty.$$

Pokazaliśmy więc, że $hy = hy\chi_{\Omega \setminus A_{n_1}} + hy\chi_{A_{n_1}} \in E$, a zatem z dowolności y wnosimy, że $h \in M(E_H, E)$, co jest sprzeczne z Lematem 2.0.18, gdyż $h \notin L^\infty$. ■

Rozdział 3

Własności geometryczne

W rozdziale tym zajmiemy się wpływem przestrzeni E oraz funkcji Orlicza φ na geometryczną strukturę przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego E_φ . Uzyskane wyniki zastosujemy następnie do szczególnego przypadku, tj. przestrzeni Orlicza - Lorentza, aby uzyskać bardziej klarowne i elementarne kryteria. Będziemy badali przestrzenie E_φ z punktu widzenia ich własności wypukłościowych. W tym celu jednak niezbędne okażą się też własności monotonicznościowe. Warto tutaj zwrócić uwagę na ścisły związek wypukłości przestrzeni E_φ z odpowiednią monotonicznością przestrzeni E ([41]).

Powiemy, że przestrzeń Köthe'go E jest **ściśle monotoniczna** ($E \in (SM)$) jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in E$ takich, że $0 \leq y \leq x$ i $y \neq x$ zachodzi ostra nierówność $\|y\|_E < \|x\|_E$. Przestrzeń Köthe'go E jest **jednostajnie monotoniczna** ($E \in (UM)$), jeśli dla każdego $q \in (0, 1)$ istnieje $p \in (0, 1)$ takie, że dla wszystkich $0 \leq y \leq x \in B(E)$ zachodzi implikacja

$$\|y\|_E \geq q \implies \|x - y\|_E \leq 1 - p,$$

(zob. np. [9], [41]).

Przestrzeń Banacha X nazywamy **ściśle wypukłą** ($X \in (SC)$), gdy dla dowolnych $x, y \in B(X)$ zachodzi implikacja

$$\|x - y\| > 0 \implies \|(x + y)/2\|_X < 1$$

Przestrzeń Köthe'go E nazwiemy **ściśle ortogonalnie wypukłą** ($E \in (SC^\perp)$), gdy dla dowolnych $x, y \in B(E)$ zachodzi implikacja

$$\|x\chi_{A_{xy}}\|_E \vee \|y\chi_{A_{xy}}\|_E > 0 \implies \|(x + y)/2\|_E < 1,$$

gdzie $A_{xy} = \text{supp}(x) \div \text{supp}(y)$. Analogicznie, przestrzeń Köthe'go E jest **jednostajnie ortogonalnie wypukłą** $E \in (UC^\perp)$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in B(E)$ zachodzi implikacja

$$\|x\chi_{A_{xy}}\|_E \vee \|y\chi_{A_{xy}}\|_E \geq \varepsilon \implies \|(x + y)/2\|_E \leq 1 - \delta,$$

gdzie $A_{xy} = \text{supp}(x) \div \text{supp}(y)$ (zob. [55]-[58]).

Zauważmy, że zarówno na ścisłą monotoniczność, jak i na ścisłą ortogonalną wypukłość można spojrzeć jak na osłabienie ścisłej wypukłości. Ścisła wypukłość mówi, że na sferze jednostkowej przestrzeni nie ma żadnych odcinków, natomiast wiedząc, że przestrzeń jest ściśle monotoniczna wnosimy, że na sferze nie ma tylko odcinków porządkowych. Podobnie, w przypadku ścisłej ortogonalnej wypukłości, ograniczamy się tylko do pytania o istnienie na sferze odcinków o „ortogonalnych” końcach (o końcach z istotnie różnymi nośnikami)

Kolejną i ostatnią własnością geometryczną, którą zajmiemy się w tym rozdziale jest własność β - Rolewicza. Oryginalnie własność ta została zdefiniowana przy pomocy miary niezwartości Kuratowskiego ([102]). Będziemy się jednak posługiwać równoważnym sformułowaniem znalezionym przez D. Kutzarową (zob. [71]). Wcześniej przypomnijmy, że ciąg $(x_n) \subset X$ nazywamy ε -**separowalnym**, dla pewnego $\varepsilon > 0$, jeśli

$$\text{sep}\{x_n\} := \inf\{\|x_n - x_m\|_X : n \neq m\} \geq \varepsilon.$$

Powiemy, że przestrzeń Banacha X posiada **własność β - Rolewicza**, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in B(X)$ oraz każdego ε -separowalnego ciągu $(x_n) \subset B(X)$ istnieje $k \in \mathbb{N}$, dla którego

$$\|x + x_k\|_X \leq 2(1 - \delta).$$

Własności β poświęcone zostały m. in. prace [26], [55], [58], [61], [70] i [71]. W szczególności, pełna charakterystyka własności β w przestrzeniach Orlicza została podana w [26].

Własności β i UC^\perp są ze sobą ściśle związane. Co ciekawe związek ten zmienia swój charakter, w zależności od tego, czy mówimy o przestrzeni ciągowej, czy funkcyjnej. Mianowicie, dla ciągowych przestrzeni Köthe’go zachodzą implikacje

$$(UC) \Rightarrow (UC^\perp) \Rightarrow (\beta), \quad (3.1)$$

przy czym żadnej z implikacji nie można odwrócić ([56], [58]). Natomiast dla funkcyjnych przestrzeni Köthe’go prawdziwe jest zdanie

$$(UC) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (UC^\perp), \quad (3.2)$$

gdzie ponownie nie można żadnej z implikacji odwrócić ([55], [56] i [102]). Warto też odnotować, że w przypadku ciągowych przestrzeni symetrycznych własność β jest równoważna własności UC^\perp (zob. [58]). Na koniec odnotujmy, że użyteczność obu własności wynika chociażby z faktu, że każda z osobna implikuje własność punktu stałego (zob. np. [56]).

3.1 Ortogonalne wypukłości

Jeśli P jest pewną własnością geometryczną lub topologiczną przestrzeni Köthe’go E , to powstaje naturalne pytanie: czy własność tę możemy równoważnie rozważać tylko na stożku dodatnim E_+ przestrzeni E . Tak zmodyfikowaną własność P będziemy oznaczali jako P_+ (zob. np. [41], [51]).

Lemat 3.1.1. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go.*

- 1) $E \in (SC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (SC^\perp)_+$.
- 2) $E \in (UC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \in (UC^\perp)_+$.

Dowód. Udowodnimy tylko punkt 2), gdyż dowód punktu 1) jest analogiczny. Jest oczywiste, że jeśli $E \in (UC^\perp)$, to $E \in (UC^\perp)_+$. Przypuśćmy więc, że $E \in (UC^\perp)_+$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $x, y \in B(E)$ będą takie, że $\|x\chi_{A_{xy}}\|_E \vee \|y\chi_{A_{xy}}\|_E \geq \varepsilon$, gdzie A_{xy} jest jak w definicji ortogonalnej jednostajnej wypukłości. Zatem też $\| |x| \chi_{A_{|x||y|}} \|_E \vee \| |y| \chi_{A_{|x||y|}} \|_E \geq \varepsilon$, gdyż oczywiście $A_{xy} = A_{|x||y|}$. Z założenia istnieje $\delta > 0$ zależna tylko od ε , dla której $\|(|x| + |y|) / 2 \|_E \leq 1 - \delta$. Tym bardziej więc $\|(x + y) / 2 \|_E \leq 1 - \delta$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 3.1.2. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Wówczas $E_\varphi \in (SC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (a) $E_\varphi \in (nm)$, $E \in (SM)$, $\varphi > 0$ oraz
- (b) dla wszystkich $u, v \in S(E)_+$, spełniających $\|u\chi_{A_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_E > 0$, zachodzi jeden z warunków

$$\|(u + v) / 2 \|_E < 1 \text{ lub } \|u\chi_{B_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{B_{uv}}\|_E > 0,$$

gdzie

$$A_{uv} = \text{supp}(u) \div \text{supp}(v), \quad (3.3)$$

$$B_{uv} = \left\{ t \in \Omega : \varphi \left(\frac{x(t) + y(t)}{2} \right) < \frac{1}{2} [\varphi(x(t)) + \varphi(y(t))] \right\} \quad (3.4)$$

oraz $x = \varphi_r^{-1}(u)$, $y = \varphi_r^{-1}(v)$, gdzie φ_r jest jak w (1.6), a własność (nm) określono w Definicji 1.3.5.

Dowód. *Koniieczność.* Jeśli $E_\varphi \in (SC^\perp)$, to $E_\varphi \in (SM)$ (zob. Lemat 2 w [58]). Zatem Lemat 2.5 w [59] implikuje punkt (a). Przypuśćmy więc, że warunek (b) nie jest spełniony. Wtedy istnieją $u, v \in S(E)_+$ spełniające $\|u\chi_{A_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_E > 0$ oraz takie, że

$$\|(u + v) / 2 \|_E = 1 \text{ i } \|u\chi_{B_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{B_{uv}}\|_E = 0. \quad (3.5)$$

Zauważmy, że skoro $u, v \in S(E)_+$, to $x = \varphi_r^{-1}(u)$, $y = \varphi_r^{-1}(v)$ są dobrze zdefiniowane na podstawie Twierdzenia (Proposition) 2.1(ii) w [59]. Mamy $I_\varphi(x) = I_\varphi(y) = 1$, więc $x, y \in S(E_\varphi)$. Ponadto, z (3.4) oraz (3.5) dostaniemy

$$I_\varphi \left(\frac{x + y}{2} \right) = \left\| \varphi \left(\frac{x + y}{2} \right) \right\|_E = \|(\varphi(x) + \varphi(y)) / 2 \|_E = 1.$$

Zatem $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{E_\varphi} = 1$. Z drugiej strony, skoro $\|u\chi_{A_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_E > 0$ i $u, v \geq 0$, to $\|x\chi_{A_{xy}}\|_{E_\varphi} \vee \|y\chi_{A_{xy}}\|_{E_\varphi} > 0$, ponieważ φ jest injekcją na zbiorze G_φ (zob. (1.6)). To

znaczy, że $E_\varphi \notin (SC^\perp)$.

Dostateczność. Stosując Lemat 3.1.1 wystarczy pokazać, że $E_\varphi \in (SC^\perp)_+$. Weźmy dowolne $x, y \in (S(E_\varphi))_+$ spełniające $\|x\chi_{A_{xy}}\|_\varphi \vee \|y\chi_{A_{xy}}\|_\varphi > 0$. Oznaczmy $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$. Wtedy też $\|u\|_E = \|v\|_E = 1$, gdyż $E_\varphi \in (nm)$. Zauważmy, że $\|u\chi_{A_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_E > 0$, ponieważ $\varphi > 0$. Jeżeli $\|(u+v)/2\|_E < 1$, to wypukłość funkcji φ implikuje, że $\|\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\|_E < 1$. W konsekwencji $\|(x+y)/2\|_{E_\varphi} < 1$, ponieważ $E_\varphi \in (nm)$. Jeśli natomiast $\|u\chi_{B_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{B_{uv}}\|_E > 0$, to ściśła monotoniczność przestrzeni E implikuje $\|\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\|_E < 1$. Zatem ponownie $\|(x+y)/2\|_{E_\varphi} < 1$, ponieważ $E_\varphi \in (nm)$. ■

Uwaga 3.1.3. *Jeśli ograniczymy nieco dowolność przestrzeni Köthe'go E , to warunek normowo - modularny można zastąpić bardziej elementarnymi własnościami. Na przykład gdy $\text{supp}E_a = \Omega$, to $E_\varphi \in (nm)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi < \infty$ oraz $\varphi \in \Delta_2^E$ (zob. np. Wniosek 2.8 w [59]). W przypadku przestrzeni ciągowej mamy natomiast $e_\varphi \in (nm)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$ oraz $\varphi \in \Delta_2^e$ (zob. Wniosek 2.10 w [59]).*

Twierdzenie 3.1.4. *Przypuśćmy, że E jest funkcyjną przestrzenią Köthe'go. Wówczas $E_\varphi \in (UC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (a) $E \in (UM)$, $0 < \varphi < \infty$, $\varphi \in \Delta_2^E$ oraz
- (b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla wszystkich $u, v \in S(E)_+$ spełniających $\|u\chi_{A_{uv}}\|_E \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_E \geq \varepsilon$, zachodzi jeden z warunków

$$\|(u+v)/2\|_E \leq 1 - \delta \text{ lub } \|u\chi_{B_\delta(u,v)}\|_E \vee \|v\chi_{B_\delta(u,v)}\|_E \geq \delta,$$

gdzie

$$A_{uv} = \text{supp}(u) \div \text{supp}(v),$$

$$B_\delta(u, v) = \left\{ t \in \Omega : \varphi\left(\frac{x(t) + y(t)}{2}\right) \leq \frac{1 - \delta}{2} [\varphi(x(t)) + \varphi(y(t))] \right\}$$

oraz $x = \varphi^{-1}(u)$, $y = \varphi^{-1}(v)$.

Dowód. *Konieczność.* Jeśli $E_\varphi \in (UC^\perp)$, to $E_\varphi \in (UM)$ (zob. Lemat 3 w [55]), zatem punkt (a) dowodzi się analogicznie jak w Twierdzeniu 2.11 w [59]. To znaczy, $\varphi > 0$ na podstawie Lematu 2.5 w [59]. Ponadto jednostajna monotoniczność przestrzeni E_φ implikuje, że $E \in (UM)$ (zob. Tw. 2 w [34]) oraz $E_\varphi \in (OC)$ (zob. Twierdzenie (Proposition) 2.1 w [32]) co oznacza, że $\varphi \in \Delta_2^E$ i $\varphi < \infty$ (zob. Twierdzenie 1, [40]). Przypuśćmy obecnie, że warunek (b) nie jest spełniony. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ oraz ciągi $(u_n), (v_n) \subset S(E)_+$ takie, że

$$\|u\chi_{A_n}\|_E \vee \|v\chi_{A_n}\|_E \geq \varepsilon, \|(u_n + v_n)/2\|_E > 1 - 1/n \quad (3.6)$$

$$\text{oraz } \|u_n\chi_{T_n}\|_E \vee \|v_n\chi_{T_n}\|_E < 1/n, \quad (3.7)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $A_n = \text{supp}(u_n) \div \text{supp}(v_n)$,

$$T_n = \left\{ t \in \Omega : \varphi \left(\frac{x_n(t) + y_n(t)}{2} \right) \leq \frac{1 - 1/n}{2} [\varphi(x_n(t)) + \varphi(y_n(t))] \right\} \quad (3.8)$$

oraz $x_n = \varphi^{-1}(u_n)$, $y_n = \varphi^{-1}(v_n)$. Nierówność (3.7) implikuje, że

$$\frac{1}{2} \| [\varphi(x_n) + \varphi(y_n)] \chi_{T_n} \|_E < 1/n,$$

zatem, poprzez (3.6),

$$\frac{1}{2} \| [\varphi(x_n) + \varphi(y_n)] \chi_{\Omega \setminus T_n} \|_E \geq 1 - 2/n. \quad (3.9)$$

Co więcej, z definicji zbiorów T_n wynika, że

$$\varphi \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \chi_{\Omega \setminus T_n} > \frac{1 - 1/n}{2} [\varphi(x_n) + \varphi(y_n)] \chi_{\Omega \setminus T_n}.$$

Konsekwentnie, stosując nierówność (3.9), mamy

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right\|_E \geq \left\| \varphi \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \chi_{\Omega \setminus T_n} \right\|_E > \\ & > \frac{1 - 1/n}{2} \| [\varphi(x_n) + \varphi(y_n)] \chi_{\Omega \setminus T_n} \|_E \geq (1 - 1/n)(1 - 2/n). \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\| \varphi((x_n + y_n)/2) \|_E \rightarrow 1$ gdy $n \rightarrow \infty$. Wtedy $\| (x_n + y_n)/2 \|_{E_\varphi} \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$, na podstawie Lematu 1.3.3. Ponadto równość $\| \varphi(x_n) \|_E = \| u_n \|_E = 1$ implikuje, że $\| x_n \|_{E_\varphi} = 1$ dla każdego n . Zauważmy ostatecznie, że skoro

$$1 \geq \| \varphi(x_n) \chi_{A_n} \|_E \vee \| \varphi(y_n) \chi_{A_n} \|_E \geq \varepsilon,$$

to z Lematu 1.3.3(ii) wnosimy, że $\| x_n \chi_{A_n} \|_{E_\varphi} \vee \| y_n \chi_{A_n} \|_{E_\varphi} \geq \varepsilon$. Zatem $E_\varphi \notin (UC^\perp)$. *Dostateczność.* Stosując Lemat 3.1.1 wystarczy udowodnić, że $E_\varphi \in (UC^\perp)_+$. Niech $\varepsilon > 0$ oraz $x, y \in S(E_\varphi)_+$ będą dowolne takie, że $\| x \chi_{A_{xy}} \|_{E_\varphi} \vee \| y \chi_{A_{xy}} \|_{E_\varphi} \geq \varepsilon$, gdzie $A_{xy} = \text{supp}(x) \div \text{supp}(y)$. Oznaczając $\varphi(x) = u$ i $\varphi(y) = v$ mamy też $u, v \in S(E)_+$ na podstawie Lematu 1.3.6. Z Lematu 1.3.7 wynika natomiast, że istnieje $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ taka, że

$$\left\| \varphi(x) \chi_{A_{xy}} \right\|_E \vee \left\| \varphi(y) \chi_{A_{xy}} \right\|_E \geq \eta.$$

Stosując warunek (b) z $\delta = \delta(\eta(\varepsilon)) > 0$ musimy rozważyć dwa przypadki.

I. Jeśli $\| (u + v)/2 \|_E \leq 1 - \delta$, to $I_\varphi((x + y)/2) \leq 1 - \delta$. Zatem $\| (x + y)/2 \|_{E_\varphi} \leq 1 - r_1$, gdzie $r_1 = r_1(\delta)$ zależy tylko od δ (zob. Lemat 1.3.6).

II. Niech tym razem $\| u \chi_{B_\delta(u,v)} \|_E \vee \| v \chi_{B_\delta(u,v)} \|_E \geq \delta$. Z definicji zbiorów $B_\delta(u, v)$ wnosimy, że

$$\varphi \left(\frac{x + y}{2} \right) \leq \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) - \frac{\delta}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) \chi_{B_\delta(u,v)}.$$

Ale $\left\| \frac{\delta}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) \chi_{B_\delta(u,v)} \right\|_E \geq \delta^2/2$. Stąd i ponieważ $E \in (UM)$, istnieje stała $p = p(\delta^2/2) > 0$ taka, że $\|\varphi(x+y)/2\|_E \leq 1-p$. Ostatecznie, z Lematu 1.3.6 wynika, że $\|(x+y)/2\|_{E_\varphi} \leq 1-r_2$, gdzie $r_2 = r_2(p) > 0$.
Zatem ostatecznie $\|(x+y)/2\|_{E_\varphi} \leq 1-r$ dla $r = r_1 \wedge r_2$. ■

Odnotujmy, że niektóre konieczne i wystarczające warunki na to aby ciągowa przestrzeń Calderóna-Łozanowskiego była jednostajnie ortogonalnie wypukła zostały podane w pracy [57]. Uzupełnijmy więc tę pracę następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 3.1.5. *Niech e będzie ciągową przestrzenią Köthe'go. Wówczas $e_\varphi \in (UC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (a) $e \in (UM)$, $\varphi > 0$, $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$, $\varphi \in \Delta_2^e$ oraz
(b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla wszystkich $u, v \in S(e)_+$ spełniających $\|u\chi_{A_{uv}}\|_e \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_e \geq \varepsilon$, zachodzi jeden z dwóch warunków

$$\|(u+v)/2\|_e \leq 1-\delta \text{ lub } \|u\chi_{B_\delta(u,v)}\|_e \vee \|v\chi_{B_\delta(u,v)}\|_e \geq \delta, \text{ gdzie}$$

$$B_\delta(u, v) = \left\{ i \in \mathbb{N} : \varphi \left(\frac{x(i) + y(i)}{2} \right) \leq \frac{1-\delta}{2} [\varphi(x(i)) + \varphi(y(i))] \right\}, \quad (3.10)$$

$x = \varphi_r^{-1}(u)$, $y = \varphi_r^{-1}(v)$ i A_{uv} są jak w (3.3).

Dowód. Odmienność warunku (a) wynika z innej charakterystyki jednostajnej monotoniczności w przestrzeniach ciągowych. Dowód konieczności warunku (a) przebiega dokładnie jak dowód konieczności warunku (a) w Twierdzeniu 2.12 w [59]. Konieczność warunku (b) można natomiast udowodnić tak samo jak w Twierdzeniu 3.1.4. ■

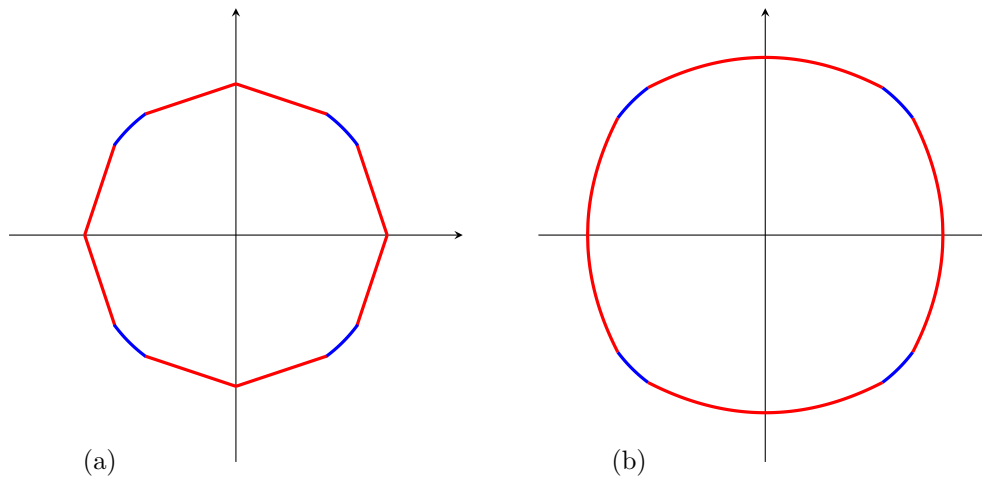
Podsumowując tę część pracy zauważmy, że poza pewnymi standardowymi założeniami zapewniającymi „dobre” zachowanie się normy, wyżej przedstawione warunki składają się z dwóch części. Po pierwsze, aby przestrzeń E_φ posiadała własność wypukłościową, potrzeba aby przestrzeń E , jak i funkcja φ były odpowiednio monotoniczne. Drugi z warunków mówi natomiast, że ani „dobra” wypukłość całej przestrzeni E , ani całej funkcji φ nie jest konieczna, aby przestrzeń E_φ była odpowiednio wypukła. Wystarczy, aby te własności się uzupełniały. Sytuację taką ilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.1.6. *Niech $e = \mathbb{R}^2$ z normą*

$$\|x\|_0 = \max \{ \|x\|_2, \|x\|_\omega \},$$

gdzie $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\|x\|_\omega = \max \{ |x_1|, |x_2| \} + \frac{1}{3} \min \{ |x_1|, |x_2| \}$, (równoważnie $\|x\|_\omega = x^*(1)\omega(1) + x^*(2)\omega(2)$, dla $\omega(1) = 1$, $\omega(2) = \frac{1}{3}$, jest normą w odpowiedniej, dwuwymiarowej przestrzeni Lorentz'a). Zdefiniujemy funkcję Orlicza

$$\varphi_K(t) = \begin{cases} t^2 & \text{gd } 0 \leq t \leq K, \\ t - K + K^2 & \text{gd } t > K, \end{cases}$$



Rysunek 3.1: (a) sfera $S(e)$, (b) sfera $S(e_{\varphi_K})$ dla $K = \sqrt{\frac{3}{5}}$

dla $K > 0$. Elementarne rachunki pokazują, że dodatnia część sfery $S(e_{\varphi_K})$ dla $K = \sqrt{\frac{3}{5}}$ dana jest równaniami

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{3}x_1^2, & \text{gdy } 0 \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{3}{5}}, \\ x_1 = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{3}x_2^2, & \text{gdy } 0 \leq x_2 \leq \sqrt{\frac{3}{5}}, \\ x_2 = \sqrt{1 - \left(x_1 - \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{5}\right)^2} - \frac{3}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}, & \text{w p. p.} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Widzimy zatem, że e_{φ_K} jest ściśle wypukła mimo, że ani funkcja Orlicza, ani przestrzeń e nie są ściśle wypukłe. Można pokazać, że gdy $K > \sqrt{\frac{3}{5}}$, to tym bardziej $e_{\varphi_K} \in (SC)$ (zwiększa się przedział ścisłej wypukłości funkcji φ_K), ale już dla $K < \sqrt{\frac{3}{5}}$ pojawiają się odcinki na sferze e_{φ_K} , tzn. e_{φ_K} nie jest ściśle wypukła.

3.2 Własność β - Rolewicza

Następująca zależność została wykazana w dowodzie Twierdzenia 2.11 w [59].

Lemat 3.2.1. Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go oraz niech funkcja Orlicza φ spełnia warunki $0 < \varphi < \infty$ oraz $\varphi \in \Delta_2^E$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in B(E_\varphi)_+$ zachodzi implikacja

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \geq \varepsilon \implies \|\varphi(|x - y|)\|_E \geq \delta.$$

Twierdzenie 3.2.2. Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go. $E_\varphi \in (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (a) $E_\varphi \in (UC^\perp)$,
- (b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla wszystkich $u, (v_k)$ w $S(E)_+$

spełniających $\text{sep} \{v_k\} \geq \varepsilon$ zachodzi jeden z warunków

$$\|(u + v_k)/2\|_E \leq 1 - \delta \text{ lub } \|u\chi_{B_\delta(u,v_k)}\|_E \vee \|v_k\chi_{B_\delta(u,v_k)}\|_E \geq \delta \text{ dla pewnego } k, \quad (3.12)$$

gdzie

$$B_\delta(u, v_k) = \left\{ t \in \Omega : \varphi \left(\frac{x(t) + y_k(t)}{2} \right) \leq \frac{1 - \delta}{2} [\varphi(x(t)) + \varphi(y_k(t))] \right\}, \quad (3.13)$$

$x = \varphi^{-1}(u)$ oraz $y_k = \varphi^{-1}(v_k)$.

Dowód. *Konieczność.* Warunek (a) wynika wprost z implikacji (3.2) (zob. też [55]). Przypuśćmy więc, że warunek (b) nie jest spełniony, podczas gdy $E_\varphi \in (\beta)$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje element u^n oraz ciąg $(v_k^n)_{k=1}^\infty$ w $S(E)_+$ takie, że $\text{sep}_k \{v_k^n\} \geq \varepsilon$ oraz

$$\|(u^n + v_k^n)/2\|_E > 1 - \frac{1}{n} \text{ i } \|u^n\chi_{T_k^n}\|_E \vee \|v_k^n\chi_{T_k^n}\|_E < \frac{1}{n}, \quad (3.14)$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, gdzie

$$T_k^n = \left\{ t \in \Omega : \varphi \left(\frac{x^n(t) + y_k^n(t)}{2} \right) \leq \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} [\varphi(x^n(t)) + \varphi(y_k^n(t))] \right\} \quad (3.15)$$

oraz $x^n = \varphi^{-1}(u^n)$, $y_k^n = \varphi^{-1}(v_k^n)$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x^n, y_k^n \in S(E_\varphi)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z (3.14) wynika, że

$$\frac{1}{2} \|[\varphi(x^n) + \varphi(y_k^n)]\chi_{T_k^n}\|_E < 1/n$$

i w rezultacie

$$\frac{1}{2} \|[\varphi(x^n) + \varphi(y_k^n)]\chi_{\Omega \setminus T_k^n}\|_E \geq 1 - \frac{2}{n}, \quad (3.16)$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponadto,

$$\varphi \left(\frac{x^n(t) + y_k^n(t)}{2} \right) > \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} [\varphi(x^n(t)) + \varphi(y_k^n(t))], \quad (3.17)$$

dla $t \in \Omega \setminus T_k^n$. Stąd, stosując nierówność (3.16), (3.17) i Lemat 1.3.3 dostaniemy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x^n + y_k^n}{2} \right\|_{E_\varphi} &\geq \left\| \varphi \left(\frac{x^n + y_k^n}{2} \right) \right\|_E \geq \left\| \varphi \left(\frac{x^n + y_k^n}{2} \right) \chi_{\Omega \setminus T_k^n} \right\|_E \geq \\ &\geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} \|[\varphi(x^n) + \varphi(y_k^n)]\chi_{\Omega \setminus T_k^n}\|_E \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right), \end{aligned}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Aby ostatecznie wywnioskować, że E_φ nie może posiadać własności β , wystarczy pokazać, że $\text{sep}_k \{y_k^n\} \geq \eta > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie η zależy tylko od ε . Rzeczywiście, założenia Lematu 3.2.1 są spełnione na podstawie

Twierdzenia 3.1.4(a), ponieważ przyjęliśmy, że $E_\varphi \in (\beta)$, co daje $E_\varphi \in (UC^\perp)$. Wiemy jednak, że

$$\varepsilon \leq \|v_k^n - v_j^n\|_E = \|\varphi(y_k^n) - \varphi(y_j^n)\|_E,$$

dla każdego $n, k \in \mathbb{N}$, więc Lemat 3.2.1 implikuje, że istnieje stała $\delta > 0$ zależna tylko od ε taka, że

$$\|\varphi(|y_k^n - y_j^n|)\|_E \geq \delta.$$

Zatem na podstawie Lematu 1.3.3 wnosimy, że

$$\|y_k^n - y_j^n\|_{E_\varphi} \geq \min\{\delta, 1\},$$

dla każdego $n, k \in \mathbb{N}$.

Dostateczność. Twierdzenie 1 w [55] mówi, że w funkcyjnych przestrzeniach Köthe'go własność (β) jest równoważna koniunkcji własności $(\beta)_+$ i (UC^\perp) . Zatem na mocy założenia (a) wystarczy pokazać, że $E_\varphi \in (\beta)_+$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolny. Weźmy $x, y_n \in S(E_\varphi)_+$ spełniające $\text{sep}\{y_n\} \geq \varepsilon$ i zdefiniujmy $u = \varphi(x)$, $v_n = \varphi(y_n)$. Wtedy z Lematu 1.3.6 wynika, że $v_n, u \in S(E)_+$. Ponadto Lemat 1.3.7 implikuje, że istnieje stała $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ taka, że $\|\varphi(|y_n - y_m|)\|_E \geq \eta$ o ile $n \neq m$. Funkcja φ jest superaddytywna na \mathbb{R}_+ , więc na podstawie Lematu 1.2.2 wnioskujemy, że $\text{sep}\{v_n\} \geq \eta$. Stosując założenie b) dla $\delta = \delta(\eta)$ musimy rozważyć dwa przypadki.

I. Jeśli istnieje k spełniające $\|(u + v_k)/2\|_E \leq 1 - \delta$, to dzięki wypukłości φ dostaniemy $I_\varphi((x + y_k)/2) \leq 1 - \delta$. Zatem $\|(x + y_k)/2\|_{E_\varphi} \leq 1 - r_1$, gdzie $r_1 = r_1(\delta)$ zależy tylko od δ , (zob. Lemat 1.3.6).

II. Przypuśćmy tym razem, że $\|u\chi_{B_\delta(u, v_k)}\|_E \vee \|v_k\chi_{B_\delta(u, v_k)}\|_E \geq \delta$ dla pewnego k . Z definicji zbiorów $B_\delta(u, v_k)$ wynika, że

$$\varphi\left(\frac{x + y_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y_k)) - \frac{\delta}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))\chi_{B_\delta(u, v_k)}.$$

Ponadto $\|\frac{\delta}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))\chi_{B_\delta(u, v_k)}\|_E \geq \delta^2/2$. Jednak przestrzeń E jest jednostajnie monotoniczna, więc istnieje stała $p = p(\delta^2/2) > 0$ taka, że $\|\varphi((x + y_k)/2)\|_E \leq 1 - p$. Zatem z tego samego powodu, co w przypadku I, mamy $\|(x + y_k)/2\|_{E_\varphi} \leq 1 - r_2$ dla pewnego r_2 zależącego tylko od p . Wybranie $r = \min\{r_1, r_2\}$, kończy dowód. ■

Aby scharakteryzować własność β w przestrzeniach ciągłych, wprowadźmy następującą własność monotonicznościową.

Definicja 3.2.3. Powiemy, że ciągowa przestrzeń Köthe'go e posiada **własność α** , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego skończonego zbioru $A \subset \mathbb{N}$ oraz każdego ciągu $(x_n) \subset B(e)$ z $\text{sep}\{x_n\} \geq \varepsilon$ zachodzi

$$\|x_{n_0}\chi_A\|_e < 1 - \delta \text{ dla pewnego } n_0 \in \mathbb{N}.$$

W dalszym ciągu przydadzą nam się następujące techniczne lematy.

Lemat 3.2.4. ([41]) *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Wówczas $E \in (UM)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla każdego $x \in B(E)$ oraz każdego $A \in \Sigma$*

$$\|x\chi_A\|_E \geq \varepsilon \implies \|x\chi_{\Omega \setminus A}\|_E \leq 1 - \delta.$$

Uwaga 3.2.5. *Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego ograniczonego ciągu (u_n) w ciągowej przestrzeni Köthe'go e spełniającego $\text{sep}\{u_n\}_e \geq \varepsilon$ oraz dla każdego skończonego $A \subset \mathbb{N}$, istnieje $K \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\|u_n\chi_{\mathbb{N} \setminus A}\|_e \geq \frac{\varepsilon}{3},$$

dla każdego $n > K$.

Dowód. Przypuśćmy, dla otrzymania sprzeczności, że podany warunek nie zachodzi, tzn. istnieje ograniczony ciąg (u_n) taki, że $\text{sep}\{u_n\}_e \geq \varepsilon$, skończony zbiór $A \subset \mathbb{N}$ oraz podciąg (u_{n_k}) ciągu (u_n) taki, że $\|u_{n_k}\chi_{\mathbb{N} \setminus A}\|_e < \frac{\varepsilon}{3}$ dla każdego k . Ponieważ przestrzeń $e|_A$ ma skończony wymiar, więc z twierdzenia Riesz'a oraz ograniczoności ciągu (u_n) wynika, że znajdziemy kolejny podciąg $(u_{n_{k_i}})$ ciągu (u_{n_k}) , spełniający dla odpowiednio dużych i, j nierówność $\|u_{n_{k_i}}\chi_A - u_{n_{k_j}}\chi_A\|_e < \varepsilon/3$ i w rezultacie

$$\|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_j}}\|_e \leq \|u_{n_{k_i}}\chi_A - u_{n_{k_j}}\chi_A\|_e + \|u_{n_{k_j}}\chi_{\mathbb{N} \setminus A}\|_e + \|u_{n_{k_i}}\chi_{\mathbb{N} \setminus A}\|_e < \varepsilon,$$

co przeczy założeniu, że $\text{sep}\{u_n\}_e \geq \varepsilon$. ■

Lemat 3.2.6. *Niech e będzie ciągową przestrzenią Köthe'go.*

(i) Jeśli $e \in (\alpha)$, to $e \in (OC)$.

(ii) Jeśli $e \in (UM)$, to $e \in (\alpha)$. Ponadto, jeśli e jest symetryczna, to także przeciwna implikacja jest prawdziwa.

Dowód. (i) Przypuśćmy, że $e \notin (OC)$. Istnieją zatem $x \in S(e)_+$, $\delta > 0$ i ciąg $(A_n)_{n=1}^\infty$ parami rozłącznych zbiorów takich, że $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \text{supp}(x)$ oraz $\|x\chi_{A_n}\|_e \geq \delta$ dla wszystkich n (zob. Lemat 5 w [44]). Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ $e \in (FP)$, znajdziemy $m = m(k) \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|y_k\|_e > 1 - \frac{1}{2k}, \text{ gdzie } y_k = \sum_{i=1}^{m(k)} x\chi_{A_i}.$$

Ponadto, korzystając znów z własności Fatou można dobrać skończone podzbiory $B_i \subset A_i$, dla $i = 1, 2, \dots, m(k)$, spełniające

$$\|z_k\|_e > \|y_k\|_e - \frac{1}{2k}, \text{ gdzie } z_k = \sum_{i=1}^{m(k)} x\chi_{B_i}.$$

Zatem $\|z_k\|_e > 1 - \frac{1}{k}$. Przyjmijmy $C_k = \bigcup_{i=1}^{m(k)} B_i$, $D_n^k = A_{m(k)+n}$ oraz $u_n^k = z_k + x\chi_{D_n^k}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $(D_n^k) \subset \mathbb{N} \setminus C_k$, $D_n^k \cap D_m^k = \emptyset$ gdy $n \neq m$, skąd wynika, że $\text{sep}_n \{u_n^k\} \geq \delta$. Ponadto, $\|u_n^k \chi_{C_k}\|_e > 1 - \frac{1}{k}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. To znaczy, że $e \notin (\alpha)$.

(ii) Implikacja $e \in (UM) \Rightarrow e \in (\alpha)$ wynika bezpośrednio z Lematu 3.2.4 i Uwagi 3.2.5. Przypuśćmy więc, że e jest symetryczna oraz $e \notin (UM)$. Stosując Lemat 3.2.4 wnosimy, że istnieje $\varepsilon > 0$ oraz ciągi $(x_k) \subset B(e)$ i $(A_k) \subset 2^{\mathbb{N}}$ takie, że

$$\|x_k \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k}\|_e > 1 - \frac{1}{k} \text{ oraz } \|x_k \chi_{A_k}\|_e \geq \varepsilon.$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Skoro $e \in (FP)$, to istnieją skończone zbiory $B_k \subset \mathbb{N} \setminus A_k$ i $C_k \subset A_k$ spełniające

$$\|x_k \chi_{B_k}\|_e > 1 - \frac{2}{k} \text{ oraz } \|x_k \chi_{C_k}\|_e \geq \varepsilon/2.$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned} h &= h(k) = \text{card}(C_k), C_k = \{i_1, i_2, \dots, i_h\}, \\ m &= m(k) = \max \{i : i \in B_k \cup C_k\}. \end{aligned}$$

Dla każdego n zdefiniujemy

$$y_k^n = x_k \chi_{B_k} + z_k^n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} z_k^n(i) &= 0 \text{ gdy } i \leq nm \text{ lub } i \geq nm + h + 1, \\ z_k^n(nm + 1) &= x_k(i_1), z_k^n(nm + 2) = x_k(i_2), \dots, z_k^n(nm + h) = x_k(i_h). \end{aligned}$$

Ponieważ przestrzeń e jest symetryczna stwierdzamy, że $\|y_k^n\|_e = \|x_k \chi_{B_k \cup C_k}\|_e \leq 1$ oraz $\|y_k^n \chi_{B_k}\|_e > 1 - \frac{2}{k}$ dla każdego n . Ponadto, podstawiając

$$D_k^n = \{nm + 1, nm + 2, \dots, nm + h\}$$

widzimy, że $\|y_k^n \chi_{D_k^n}\|_e = \|x_k \chi_{C_k}\|_e \geq \varepsilon/2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $\text{sep}_n \{y_k^n\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, a zatem $e \notin (\alpha)$. ■

Uwaga 3.2.7. Zauważmy, że w przypadku gdy pominiemy założenie o symetrii przestrzeni e , własność α nie implikuje nawet ścisłej monotoniczności. Dla $i = 1, 2, \dots$, przez X_i oznaczmy \mathbb{R}^i z normami $\|(x_1, x_2, \dots, x_i)\|_i = \max_{1 \leq j \leq i} |x_j|$. Zdefiniujmy przestrzeń

$$Y = \left\{ y = (y_i) : y_i \in X_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots \text{ oraz } \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_i^2 < \infty \right\}$$

z normą

$$\|y\|_Y = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_i^2 \right)^{1/2}.$$

Twierdzenie 1 (Proposition 1) z [70] stwierdza, że $Y \in (\beta)$, zatem $Y \in (\alpha)$ (zob. Lemat 3.2.11 poniżej). Oczywiście, $Y \notin (SM)$, ponieważ przyjmując $y_2 = (1, 1) \in X_2$, $y_2^o = (1, 0) \in X_2$ i $y = (0, y_2, 0, 0, \dots)$, $y^o = (0, y_2^o, 0, 0, \dots)$ widzimy, że $y^o \leq y$ i $y^o \neq y$, ale $\|y\|_Y = \|y^o\|_Y$.

Zauważmy też, że porządkowa ciągłość nie implikuje własności α . Rozważmy na przykład ciągową przestrzeń Orlicza l_φ , gdzie $\varphi \in \Delta_2(0)$ oraz $0 < \varphi(b_\varphi) < 1$. Wtedy $l^\varphi \in (OC)$. Przyjmijmy

$$x = b_\varphi e_1 + a e_2 \text{ oraz } y = b_\varphi e_1,$$

gdzie a spełnia równanie $\varphi(a) = 1 - \varphi(b_\varphi)$. Wtedy $y \leq x$, $y \neq x$ oraz $\|x\|_\varphi = \|y\|_\varphi = 1$, więc $l_\varphi \notin (SM)$ i na podstawie Lematu 3.2.6 ii) wnosimy, że $l_\varphi \notin (\alpha)$.

Lemat 3.2.8. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Dla każdego $\gamma > 0$ istnieje $\zeta > 0$ taka, że dla każdego $\delta > 0$ i wszystkich $u, v \in E_+$ zachodzi implikacja*

$$\|u + v\|_E \geq \|u\|_E + \delta \implies \left\| u + \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) v \right\|_E \geq \|u\|_E + \delta + \zeta.$$

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $\gamma > 0$ taka, że dla każdego k istnieje $\delta_k > 0$ oraz elementy $u_k, v_k \in E_+$, spełniające

$$\|u_k + v_k\|_E \geq \|u_k\|_E + \delta_k \text{ oraz } \left\| u_k + \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_k}\right) v_k \right\|_E < \|u_k\|_E + \delta_k + \frac{1}{k}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} & \|u_k\|_E + \delta_k + \frac{1}{k} > \left\| \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_k}\right) (u_k + v_k) - \frac{\gamma}{\delta_k} u_k \right\|_E \geq \\ & \geq \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_k}\right) \|u_k + v_k\|_E - \frac{\gamma}{\delta_k} \|u_k\|_E \geq \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_k}\right) (\|u_k\|_E + \delta_k) - \frac{\gamma}{\delta_k} \|u_k\|_E = \\ & = \|u_k\|_E + \delta_k + \gamma \end{aligned}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$, co przeczy, że $\gamma > 0$. ■

Lemat 3.2.9. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Wtedy dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in B(E)_+$ oraz każdego zbioru $A \in \Sigma$ zachodzi implikacja*

$$\|x\chi_A\|_E \leq 1 - \varepsilon \implies \|x\chi_A + (1 - \varepsilon)x\chi_{A'}\|_E \leq 1 - \delta,$$

gdzie $A' = \Omega \setminus A$.

Dowód. Przypuśćmy, dla otrzymania sprzeczności, istnienie $\varepsilon \in (0, 1)$ takiego, że dla każdego k istnieją $x_k \in B(E)_+$ oraz $A_k \in \Sigma$ spełniające nierówności

$$\|x_k\chi_{A_k}\|_E \leq 1 - \varepsilon \text{ oraz } \|x_k\chi_{A_k} + (1 - \varepsilon)x_k\chi_{A'_k}\|_E > 1 - \frac{1}{k}.$$

Położmy $w_k = (1 - \varepsilon)x_k\chi_{A'_k}$ oraz $\delta_k = 1 - \frac{1}{k} - \|x_k\chi_{A_k}\|_E$. Wtedy $\delta_k \geq \varepsilon - \frac{1}{k}$ i dla odpowiednio dużych k mamy $\delta_k \geq \varepsilon/2$. Biorąc $0 < \gamma < \frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)}$, dostaniemy

$1 + \frac{\gamma}{\delta_k} < \frac{1}{(1-\varepsilon)}$. Ponadto, $\|x_k \chi_{A_k} + w_k\|_E \geq \|x_k \chi_{A_k}\|_E + \delta_k$. Stosując Lemat 3.2.8 z $\zeta = \zeta(\gamma) > 0$ mamy

$$\begin{aligned} 1 \geq \|x_k\|_E &= \left\| x_k \chi_{A_k} + \frac{1}{(1-\varepsilon)} w_k \right\|_E \geq \left\| x_k \chi_{A_k} + \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_k}\right) w_k \right\|_E \geq \\ &\geq \|x_k \chi_{A_k}\|_E + \delta_k + \zeta = 1 - \frac{1}{k} + \zeta, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność, gdy k jest odpowiednio duże. \blacksquare

W pracy [36] wykazano, że $e_\varphi \in (OC)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \in (OC)$ oraz $\varphi \in \Delta_2^e$, jednak przy założeniach, że $e \hookrightarrow c_0 \{\|e_n\|_e\}$ i $\varphi > 0$. Pokażemy, że gdy $l^\infty \not\hookrightarrow e$, to założenia te można opuścić w sformułowaniu twierdzenia, gdyż wynikają z poszczególnych warunków.

Lemat 3.2.10. *Niech e będzie ciągową przestrzenią Köthe'go taką, że $l^\infty \not\hookrightarrow e$. Wówczas $e_\varphi \in (OC)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \in (OC)$ oraz $\varphi \in \Delta_2^e$.*

Dowód. Konieczność. Pokażemy najpierw, że jeśli $e_\varphi \in (OC)$, to $e \in (OC)$. W tym celu skorzystamy z Twierdzenia 11 w [65]. Po pierwsze odnotujmy, że w [65] autorzy zakładają, że $a_\varphi < b_\varphi$. Oczywiście, gdyby $a_\varphi = b_\varphi > 0$, to $e_\varphi = l^\infty$, więc $e_\varphi \notin (OC)$. Możemy więc dalej rozpatrywać tylko przypadki, gdy $a_\varphi < b_\varphi$. Twierdzenia 11 w [65] mówi, że

$$\text{jeśli } 0 \leq x \in e_\varphi \text{ jest taki, że } \varphi(x) \in e \setminus e_a, \text{ to } x \in e_\varphi \setminus (e_\varphi)_a, \quad (3.18)$$

czyli $e_\varphi \notin (OC)$. Przypuśćmy więc, że $e \notin (OC)$. Pokażemy, że wtedy istnieje taki $x \in e_\varphi$, jak w (3.18). Rozpatrzmy dwa przypadki.

a) Niech $e \hookrightarrow l^\infty$ i niech $u \in e \setminus e_a$. Bez straty ogólności mogę przyjąć, że $u < \varphi(b_\varphi) \chi_{\mathbb{N}}$, gdyż $e \hookrightarrow l^\infty$. Wtedy element

$$x = \varphi_r^{-1}(u)$$

jest dobrze zdefiniowany oraz $\varphi(x) = \varphi(\varphi_r^{-1}(u)) = u \in e \setminus e_a$. Czyli na podstawie Twierdzenia 11 w [65], $e_\varphi \notin (OC)$.

b) Niech $l^\infty \not\hookrightarrow e$ i $e \not\hookrightarrow l^\infty$. Pokażmy najpierw, że nie może być $b_\varphi < \infty$. Skoro $e \not\hookrightarrow l^\infty$, to znajdziemy $v \in e$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} v(i_k) = \infty$. Więc definiując zbiór $A = \{i_k : k \in \mathbb{N}\}$, na podstawie własności ideału przestrzeni e wnosimy, że $\chi_A \in e$. Stąd przestrzeń $e|_A := \{v \in e : \text{supp}(v) \subset A\}$ zawiera $l^\infty|_A$. Ale $(e|_A)_\varphi \hookrightarrow l^\infty|_A$, gdyż $b_\varphi < \infty$, więc $(e|_A)_\varphi = l^\infty|_A \notin (OC)$. Zatem $e_\varphi \notin (OC)$. Uzasadniliśmy więc, że $b_\varphi = \infty$, czyli możemy powtórzyć procedurę z punktu a) definiując $x = \varphi_r^{-1}(u)$. Wiemy zatem, iż $e_\varphi \in (OC)$ implikuje, że $e \in (OC)$. Jednak $e \in (OC)$ oznacza, że $e \hookrightarrow c_0 \{\|e_n\|_e\}$, gdzie

$$c_0 \{\|e_n\|_e\} := \left\{ x \in l^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| \|e_n\|_e = 0 \right\}.$$

Rzeczywiście, gdyby $e \not\hookrightarrow c_0 \{\|e_n\|_e\}$, to istniałby $x \in e \setminus c_0 \{\|e_n\|_e\}$ oraz stała $\delta > 0$ taka, że

$$\|x(i_k) e_{i_k}\|_e = |x(i_k)| \|e_{i_k}\|_e > \delta,$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście $|x| \geq |x(i_k)| e_{i_k} \rightarrow 0$ punktowo, gdy $k \rightarrow \infty$. Stąd i z poprzedniego, $e \notin (OC)$.

Ponadto, przy naszych założeniach musi być $\varphi > 0$. Rzeczywiście, gdyby było $a_\varphi > 0$, to definiujemy elementy

$$x = a_\varphi \chi_{\mathbb{N}}, \quad x_n = a_\varphi \chi_{\{n, n+1, \dots\}}.$$

Wtedy $x_n \leq x$ i $x_n \searrow 0$ punktowo, ale $\|x_n\|_{e_\varphi} = 1$, gdyż $l^\infty \not\hookrightarrow e$, czyli $e_\varphi \notin (OC)$. Dalej, skoro wiemy, że $e \hookrightarrow c_0 \{\|e_n\|_e\}$ i $\varphi > 0$, to możemy zastosować Twierdzenie 2.4 w [36] i Lemat 2.9 w [59], aby wywnioskować, że $\varphi \in \Delta_2^e$.

Dostateczność. Pokazaliśmy, że porządkowa ciągłość przestrzeni e implikuje inkluzję $e \hookrightarrow c_0 \{\|e_n\|_e\}$. Ponadto w przypadku $l^\infty \not\hookrightarrow e$, warunek $\varphi \in \Delta_2^e$ implikuje, że $\varphi > 0$, czyli na podstawie Twierdzenia 4.2 w [36] wnosimy, że $e_\varphi \in (OC)$. ■

Lemat 3.2.11. *Niech e będzie ciągłą przestrzenią Köthe'go.*

(i) *Jeśli $e \in (\beta)$, to $e \in (\alpha)$.*

(ii) *Niech $e \hookrightarrow l^\infty$. Jeśli $e_\varphi \in (\beta)$, to $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$ oraz $e \in (\alpha)$.*

Dowód. (i) Przypuśćmy, że $e \notin (\alpha)$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego k istnieje skończony zbiór $A^k \subset \mathbb{N}$ i ciąg $(x_n^k)_{n=1}^\infty \subset B(e)$ taki, że $\text{sep}_n \{x_n^k\} \geq \varepsilon$ oraz

$$\|x_n^k \chi_{A^k}\|_e \geq 1 - 1/k$$

dla każdego n . Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że dla każdego $i \in A^k$ ciąg $(x_n^k(i))_{n=1}^\infty$ jest ograniczony ponieważ $\|x_n^k\|_e \leq 1$ dla $k, n \in \mathbb{N}$. Zatem przechodząc w razie konieczności do podciągu możemy przyjąć, że dla każdego $i \in A^k$ ciąg $(x_n^k(i))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny, powiedzmy $x_n^k(i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^k(i)$. Skoro zbiór A^k jest skończony, to $x_n^k \chi_{A^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^k$ w normie, gdzie $x^k(i) = 0$, gdy $i \notin A^k$. Zatem $x^k \in B(e)$ i

$$\left\| \frac{x_n^k \chi_{A^k} + x^k \chi_{A^k}}{2} - x_n^k \chi_{A^k} \right\|_e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Stąd dla odpowiednio dużych n , powiedzmy dla $n \geq N_0$, dostajemy

$$\left\| \frac{x_n^k + x^k \chi_{A^k}}{2} \right\|_e \geq \left\| \frac{x_n^k \chi_{A^k} + x^k \chi_{A^k}}{2} \right\|_e \geq \|x_n^k \chi_{A^k}\|_e - 1/k \geq 1 - 2/k.$$

Przyjmując $z^k = x^k \chi_{A^k}$ i $z_n^k = x_{N_0+n}^k$, $n \in \mathbb{N}$, wnosimy, że $e \notin (\beta)$.

(ii) Przypuśćmy, że $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e < 1$. Wtedy $\varphi(b_\varphi) < \infty$ (zob. komentarz do Lematu 1.3.8). Ponadto, istnieją $1 > \gamma > 0$ oraz $i_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi(b_\varphi) \|e_{i_0}\|_e < 1 - \gamma$ oraz $\gamma \leq \varphi(b_\varphi)/M$. Wtedy, dla każdego n ,

$$\frac{\gamma}{2 \|e_n\|_e} \leq \gamma M \leq \varphi(b_\varphi),$$

gdzie M jest stałą włożenia $e \hookrightarrow l^\infty$. Możemy więc zdefiniować elementy

$$x_n = b_\varphi e_{i_0} + \varphi_r^{-1} \left(\frac{\gamma}{2 \|e_n\|_e} \right) e_n,$$

dla $n \neq i_0$ oraz

$$x_0 = b_\varphi e_{i_0}.$$

Wtedy $\|x_n\|_{e_\varphi} = \|x_0\|_{e_\varphi} = 1$ oraz $\left\| \frac{x_n + x_0}{2} \right\|_{e_\varphi} = 1$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$. Z drugiej strony, dla $n \neq m$ mamy

$$\begin{aligned} I_\varphi \left(\frac{x_n - x_m}{\gamma/2} \right) &\geq \left\| \varphi \left(\frac{2}{\gamma} \varphi_r^{-1} \left(\frac{\gamma}{2 \|e_n\|_e} \right) \right) e_n \right\|_e \geq \\ &\geq \left\| \frac{2}{\gamma} \frac{\gamma}{2 \|e_n\|_e} e_n \right\|_e = 1, \end{aligned}$$

czyli $\|x_n - x_m\|_\varphi \geq \frac{\gamma}{2}$. Stąd $\text{sep} \{x_n\} \geq \frac{\gamma}{2}$, a zatem $e_\varphi \notin (\beta)$.

Przypuśćmy, dla sprzeczności, że $e_\varphi \in (\beta)$ i $e \notin (\alpha)$. Zauważmy, że Lematy 3.2.6(i), 3.2.10 i 3.2.11(i) implikują, że $e \in (OC)$ oraz $\varphi \in \Delta_2(0)$. Niech $\varepsilon > 0$, $A_k \subset \mathbb{N}$, $(x_n^k)_{n=1}^\infty \subset B(e)$ dla $k, n \in \mathbb{N}$ będą jak w dowodzie części (i) powyżej. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Dzięki temu, że przestrzeń e jest porządkowo ciągła, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy skończony zbiór D_n^k taki, że $\|x_n^k \chi_{\mathbb{N} \setminus D_n^k}\|_e \leq \min \{\varepsilon/4, 1/k\}$. Zatem, dla $v_n^k = x_n^k \chi_{D_n^k}$ widzimy, że gdy $m \neq n$ to

$$\begin{aligned} \|v_n^k - v_m^k\|_e + \|x_n^k \chi_{\mathbb{N} \setminus D_n^k}\|_e + \|x_m^k \chi_{\mathbb{N} \setminus D_m^k}\|_e &\geq \\ &\geq \|x_n^k - x_m^k\|_e \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

więc

$$\|v_n^k - v_m^k\|_e \geq \varepsilon/2,$$

co oznacza, że

$$\text{sep}_n \{v_n^k\} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponadto

$$1 - 1/k \leq \|x_n^k \chi_{A_k}\|_e \leq \|v_n^k \chi_{A_k}\|_e + \|x_n^k \chi_{A_k \setminus D_n^k}\|_e \leq \|v_n^k \chi_{A_k}\|_e + \frac{1}{k},$$

więc też

$$\|v_n^k \chi_{A_k}\|_e > 1 - 2/k \text{ dla każdego } n. \quad (3.19)$$

Z Uwagi 3.2.5 wynika, że dla każdego skończonego zbioru $G \subset \mathbb{N}$ znajdziemy indeks n_0 spełniający nierówność

$$\|v_{n_0}^k \chi_{\mathbb{N} \setminus G}\|_e \geq \frac{\varepsilon}{8}. \quad (3.20)$$

Położmy $n_1 = 1$ i $G = \text{supp}(v_{n_1}^k)$. Wtedy znajdziemy n_2 jak w (3.20). Następnie przyjmijmy $G = \text{supp}(v_{n_1}^k) \cup \text{supp}(v_{n_2}^k)$, dla którego ponownie znajdziemy n_3 jak w (3.20). Postępując w ten sposób znajdziemy ciąg $(v_{n_i}^k)_{i=1}^\infty$ taki, że

$$\left\| v_{n_i}^k \chi_{\mathbb{N} \setminus \text{supp}(v_{n_j}^k)} \right\|_e \geq \frac{\varepsilon}{8} \text{ dla każdego } i > j. \quad (3.21)$$

Skoro $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$ i $\varphi \in \Delta_2(0)$, to $e_\varphi \in (nm)$ (zob. Lemat 1.3.8) i w konsekwencji

$$y_n^k = \varphi_r^{-1}(|v_n^k|)$$

są dobrze zdefiniowane, gdyż $|v_n^k| \leq |v_n^k| / \|v_n^k\|_e \leq \varphi(b_\varphi) \chi_{\mathbb{N}}$ na podstawie Twierdzenia 2.1(ii) w [59]. Oczywiście $y_n^k \in B(e_\varphi)$. Zatem z (3.21) oraz Lematu 1.3.3 wynika, że dla każdego $i > j$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{8} &\leq \left\| v_{n_i}^k \chi_{\mathbb{N} \setminus \text{supp}(v_{n_j}^k)} \right\|_e = \left\| \varphi(y_{n_i}^k) \chi_{\mathbb{N} \setminus \text{supp}(v_{n_j}^k)} \right\|_e \leq \\ &\leq \left\| y_{n_i}^k \chi_{\mathbb{N} \setminus \text{supp}(v_{n_j}^k)} \right\|_{e_\varphi} \leq \|y_{n_i}^k - y_{n_j}^k\|_{e_\varphi}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\text{sep}_i \{y_{n_i}^k\} \geq \frac{\varepsilon}{8}$. Ponadto, na mocy (3.19) mamy

$$1 - 2/k < \|v_{n_i}^k \chi_{A^k}\|_e \leq \|y_{n_i}^k \chi_{A^k}\|_{e_\varphi}$$

dla każdego i . Udowodniliśmy zatem, że $e_\varphi \notin (\alpha)$ i na podstawie punktu (i) także $e_\varphi \notin (\beta)$, wbrew założeniu. ■

Uwaga 3.2.12. Oczywiście własność α nie implikuje własności β . Wystarczy zauważyć, że $l^1 \in (\alpha)$, ponieważ przestrzeń ta jest jednostajnie monotoniczna, jednak l^1 nie może posiadać własności β , gdyż jest przestrzenią nierefleksywną, a własność β implikuje refleksywność (zob. np. [55]).

Twierdzenie 2.1 z [57] mówi, że $e \in (\beta) \iff e \in (\beta)_+$ i $e \in (OC)$. Pokażemy, że w istocie $e \in (\beta) \iff e \in (\beta)_+$. W tym celu wystarczy zauważyć, że $e \in (\beta)_+ \implies e \in (OC)$.

Twierdzenie 3.2.13. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Jeśli $E \in (\beta)_+$, to $E \in (OC)$.

Dowód. Przypuśćmy, nie wprost, że $E \notin (OC)$. Wiadomo (zob. [19] lub [42]), że wtedy istnieje porządkowa prawie izometryczna kopia l^∞ w E . To znaczy, że dla każdego $n = 2, 3, 4, \dots$ istnieje izomorfizm $T_n : l^\infty \hookrightarrow E$ zachowujący porządek (tzn. $0 \leq x \leq y$ implikuje, że $0 \leq Tx \leq Ty$) oraz taki, że

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x\|_\infty \leq \|T_n x\|_E \leq \|x\|_\infty.$$

dla każdego $x \in l^\infty$. Dla $n = 2, 3, 4, \dots$ zdefiniujemy

$$y_k^n = T_n x_k, \text{ gdzie } x_k = \chi_{\{1,2,\dots,k\}}.$$

Wtedy $\text{sep}_k \{y_k^n\}_E \geq 1/2$ oraz $\|y_k^n\|_E \leq 1$ dla wszystkich n . Ponadto dla $y^n = T_n \chi_{\mathbb{N}}$ mamy $\|y^n\|_E \leq 1$ i

$$\left\| \frac{y^n + y_k^n}{2} \right\|_E = \left\| \frac{T_n \chi_{\mathbb{N}} + T_n x_k}{2} \right\|_E \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\| \frac{\chi_{\mathbb{N}} + x_k}{2} \right\|_\infty = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście $y^n \geq y_k^n \geq 0$, gdyż operatory T_n zachowują porządek. Zatem E nie posiada własności $(\beta)_+$. ■

Wniosek 3.2.14. Niech e będzie ciągłą przestrzenią Köthe'go. Wówczas $e \in (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \in (\beta)_+$.

Twierdzenie 3.2.15. Niech e będzie ciągłą przestrzenią Köthe'go taką, że $e \hookrightarrow l^\infty$ oraz niech φ będzie funkcją Orlicza taką, że $\varphi^* \in \Delta_2(0)$. Wówczas $e_\varphi \in (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(0)$, $e \in (\alpha)$ oraz $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$.

Dowód. Konieczność. Z Lematów 3.2.6 i 3.2.11(i) (lub z Twierdzenia 3.2.13) wnosiśmy, że $e_\varphi \in (OC)$. Stąd $\varphi \in \Delta_2(0)$ oraz $e \in (OC)$ na podstawie Lematu 3.2.10. Ponadto warunki $e \in (\alpha)$ i $\varphi(b_\varphi) \inf_i \|e_i\|_e \geq 1$ wynikają wprost z Lematu 3.2.11(ii).

Dostateczność. Po pierwsze zauważmy, że gdy $e \xrightarrow{C} l^\infty$, to dla

$$M = \sup \{t > 0 : \varphi(t) \leq C\}$$

oraz dla każdego $y \in B(e_\varphi)$ zachodzi

$$|y(i)| \leq M \text{ dla każdego } i \in \mathbb{N}.$$

Ponadto, ze względu na lewostronną ciągłość funkcji φ mamy $M < b_\varphi$, jeśli $\varphi(b_\varphi) = \infty$ oraz $M \leq b_\varphi$, jeśli $\varphi(b_\varphi) < \infty$. Wtedy jednak założenie $\varphi^* \in \Delta_2(0)$ implikuje, że istnieje $\eta > 0$ taka, że dla każdego $0 < u \leq M$ zachodzi nierówność

$$\varphi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{1-\eta}{2} \varphi(u) \quad (3.22)$$

(zob. [20], str. 9 lub [22], gdzie dowód przeprowadzono dla przypadku dużych argumentów). Na podstawie Wniosku 3.2.14 wystarczy pokazać, że $e_\varphi \in (\beta)_+$. Niech $\varepsilon > 0$, $x \in S(e_\varphi)_+$ oraz $(x_n) \subset S(e_\varphi)_+$, $\text{sep} \{x_n\} \geq \varepsilon$ będą dowolne. Ustalmy kilka stałych. Z Lematu 1.3.7 wynika, że istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że zachodzi implikacja $\|u\|_{e_\varphi} \geq \varepsilon \Rightarrow I_\varphi(u) \geq \delta$ dla każdego $u \in e_\varphi$. Stosując własność α dla ciągu $(\varphi(x_n))$ ustalmy $\zeta = \zeta(\delta/2)$. Dalej, niech $\lambda = \lambda(\min\{\zeta, \eta\})$ będzie jak w Lemacie 3.2.9. Ostatecznie dobierzmy $\theta = \theta(\lambda)$ jak w Lemacie 1.3.8. Dla tak dobranej θ , niech $k \in \mathbb{N}$ spełnia $\varepsilon/k \leq \theta$. Skoro $e_\varphi \in (OC)$, to istnieje skończony zbiór $A_k \subset \mathbb{N}$, dla którego $\|x \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k}\|_\varphi \leq \varepsilon/k$. Z drugiej strony, z (3.22) dostajemy

$$\left\| \varphi\left(\frac{x \chi_{A_k} + x_n}{2}\right) \right\|_e \leq \left\| \frac{\varphi(x) + \varphi(x_n)}{2} \chi_{A_k} + \frac{1-\eta}{2} \varphi(x_n) \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k} \right\|_e. \quad (3.23)$$

Zdefiniujmy

$$z_n = (\varphi(x) \chi_{A_k} + \varphi(x_n)) / 2 \in e.$$

Ponieważ $\inf_{n \neq m} \|x_n - x_m\|_{e_\varphi} \geq \varepsilon$, to z Lematu 1.3.7 wynika, że

$$\inf_{n \neq m} I_\varphi(x_n - x_m) \geq \delta(\varepsilon).$$

Ponadto, przez superaddytywność funkcji φ na \mathbb{R}_+ mamy

$$\inf_{n \neq m} \|z_n - z_m\|_e = \frac{1}{2} \inf_{n \neq m} \|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\|_e \geq \frac{1}{2} \inf_{n \neq m} \|\varphi(x_n - x_m)\|_e \geq \frac{\delta}{2}.$$

Zastosujmy więc własność α przestrzeni e dla zbioru A_k i ciągu z_n . Wtedy istnieje stała $n_0 = n_0(k)$ taka, że

$$\|z_{n_0} \chi_{A_k}\|_e = \left\| \frac{\varphi(x) + \varphi(x_{n_0})}{2} \chi_{A_k} \right\|_e \leq 1 - \zeta.$$

W rezultacie, z Lematu 3.2.9 dostaniemy

$$\|z_{n_0} \chi_{A_k} + (1 - \eta) z_{n_0} \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k}\|_e = \left\| \frac{\varphi(x) + \varphi(x_{n_0})}{2} \chi_{A_k} + \frac{1 - \eta}{2} \varphi(x_{n_0}) \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k} \right\|_e \leq 1 - \lambda.$$

Nierówność (3.23) oznacza, że $I_\varphi\left(\frac{x \chi_{A_k} + x_{n_0}}{2}\right) \leq 1 - \lambda$. Dalej, Lemat 1.3.8 implikuje, że

$$\left\| \frac{x \chi_{A_k} + x_{n_0}}{2} \right\|_{e_\varphi} \leq 1 - \theta,$$

gdzie $\theta = \theta(\lambda)$ zależy tylko od λ . Ostatecznie, ponieważ k było tak dobrane, aby zachodziła nierówność $\varepsilon/k \leq \theta$, to

$$\left\| \frac{x + x_{n_0}}{2} \right\|_{e_\varphi} \leq \left\| \frac{x \chi_{A_k} + x_{n_0}}{2} \right\|_{e_\varphi} + \left\| \frac{x}{2} \chi_{\mathbb{N} \setminus A_k} \right\|_{e_\varphi} \leq 1 - \theta + \theta/2 = 1 - \frac{\theta}{2}.$$

■

3.3 Zastosowania do przestrzeni Orlicza - Lorentza

Funkcję $\omega : [0, \gamma) \rightarrow [0, \infty)$, gdzie $\gamma \in (0, \infty]$, będziemy nazywali **funkcją wagową** (wagą), jeśli jest nierosnąca i lokalnie całkowna względem miary Lebesgue'a m . Wtedy **przestrzeń Lorentz'a** to

$$\Lambda_\omega = \left\{ x \in L^0([0, \gamma), \Sigma, m) : \int_0^\gamma x^*(t) \omega(t) dt < \infty \right\},$$

z normą

$$\|x\|_{\Lambda_\omega} = \int_0^\gamma x^*(t) \omega(t) dt,$$

gdzie x^* oznacza nierosnące przestawienie elementu x (zob. (1.1)).

Oznaczmy

$$S(t) = \int_0^t \omega(s) ds.$$

Mówimy, że waga ω jest **regularna**, jeśli

$$\inf_{0 < t < \gamma} S(t)/S(t/2) > 1.$$

Zauważmy, że dla $\gamma = \infty$, regularność wagi ω implikuje, że $\int_0^\infty \omega(s) ds = \infty$, natomiast implikacja przeciwna nie zachodzi.

Przestrznię Orlicza - Lorentz'a $(\Lambda_\omega)_\varphi$ będziemy nazywali przestrzeń E_φ , gdzie $E \equiv \Lambda_\omega$ (przestrzeniom takim zostały poświęcone np. prace: [17], [40] i [49]). Wtedy poszczególne własności i definicje przyjmują bardziej elementarną postać, ponieważ widzimy, że $L^\infty \subset \Lambda_\omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\gamma \omega(t) dt < \infty$. Zatem warunek $\varphi \in \Delta_2^E$ dla funkcyjnych przestrzeni Orlicza - Lorentz'a tłumaczy się na następujące przypadki (zob. [50]):

$$\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+), \text{ gdy } \int_0^\gamma \omega(t) dt = \infty,$$

$$\varphi \in \Delta_2(\infty), \text{ gdy } \int_0^\gamma \omega(t) dt < \infty.$$

Z Twierdzeń 3.1.2, 3.1.4 i 3.1.5 uzyskamy następujące wnioski.

Wniosek 3.3.1. (i) Jeśli $\gamma = \infty$, to $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (SC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$, $\int_0^\infty \omega(t) dt = \infty$, funkcja φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera (tzn. na żadnym przedziale postaci $[0, a]$, gdzie $a > 0$).

(ii) Jeśli $\gamma < \infty$, to $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (SC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, funkcja φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera i waga ω jest dodatnia na $[0, \gamma]$.

Dowód. (i) Dowód jest analogiczny jak w przypadku (ii) rozpisany poniżej.

(ii) *Konieczność.* Załóżmy, że $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (SC^\perp)$. Wtedy $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (SM)$ (zob. Lemat 2 w [58]). Zatem $\Lambda_\omega \in (SM)$ oraz $\varphi > 0$ na podstawie Lematu 2.5 z [59]. Z kolei z Lematu 3.1(i) w [59] wynika, że waga ω jest ściśle dodatnia na przedziale $[0, \gamma]$. Ponadto $\Lambda_\omega \in (OC)$, więc $\text{supp}(\Lambda_\omega)_a = [0, \gamma]$ i możemy zastosować Uwagę 3.1.3 i Twierdzenie 3.1.2, aby wywnioskować, że $\varphi \in \Delta_2(\infty)$. Przypuśćmy obecnie, że φ jest liniowa na pewnym przedziale $\langle 0, a \rangle$, gdzie $a > 0$. Ponieważ φ jest ciągła, więc znajdziemy stałą $0 < b < a$ taką, że $\varphi(b) \int_0^\gamma \omega(t) dt < 1$. Wybierzmy $c > b$ oraz $\gamma_1 < \gamma$ tak, aby

$$\varphi(c) \int_0^{\gamma_1} \omega(t) dt + \varphi(b) \int_{\gamma_1}^{(\gamma_1+\gamma)/2} \omega(t) dt = 1.$$

Ponadto ustalmy stałe $0 < d < b$ i $(\gamma_1 + \gamma)/2 < \gamma_2 < \gamma$ w taki sposób, by zachodziła równość

$$\varphi(c) \int_0^{\gamma_1} \omega(t) dt + \varphi(d) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega(t) dt = 1.$$

Stałe c, d, γ_1 i γ_2 istnieją, ponieważ φ jest ciągła, a waga ω jest dodatnia. Dalej zdefiniujmy

$$x = c\chi_{[0, \gamma_1]} + b\chi_{[\gamma_1, (\gamma_1+\gamma)/2]}, \quad y = c\chi_{[0, \gamma_1]} + d\chi_{[\gamma_1, \gamma_2]},$$

$$u = \varphi(x) \quad \text{oraz} \quad v = \varphi(y).$$

Wtedy $u, v \in S(\Lambda_\omega)_+$ oraz

$$\|u\chi_{A_{uv}}\|_{\Lambda_\omega} \vee \|v\chi_{A_{uv}}\|_{\Lambda_\omega} = \varphi(d) \int_0^{\gamma_2 - (\gamma_1 + \gamma)/2} \omega(t) dt > 0.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \|(u+v)/2\|_{\Lambda_\omega} &= \int_0^\gamma \left(\frac{u+v}{2}\right)^*(t) \omega(t) dt = \\ &= \int_0^{\gamma_1} \varphi(c) \omega(t) dt + \int_{\gamma_1}^{(\gamma_1 + \gamma)/2} \frac{\varphi(d) + \varphi(b)}{2} \omega(t) dt + \int_{(\gamma_1 + \gamma)/2}^{\gamma_2} \frac{\varphi(d)}{2} \omega(t) dt = 1. \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\|u\chi_{B(u,v)}\|_{\Lambda_\omega} \vee \|v\chi_{B(u,v)}\|_{\Lambda_\omega} = 0,$$

gdzie $B(u, v)$ są określone jak w (3.4). Zatem z Twierdzenia 3.1.2 dostajemy, że $(\Lambda_\omega)_\varphi \notin (SC^\perp)$.

Dostateczność. Zauważmy, że założenie $\omega > 0$ implikuje, że $\Lambda_\omega \in (SM)$ (Lemat 3.1(i) w [59]). Ponadto $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, więc z Lematu 1.3.6 wnosimy, że $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (nm)$, co daje warunek (a) w Twierdzeniu 3.1.2. Pozostaje pokazać, że warunek (b) w Twierdzeniu 3.1.2 jest spełniony. Niech $u, v \in S(\Lambda_\omega)_+$ oraz $\|u\chi_{A_{uv}}\|_\omega > 0$ będą dowolne, gdzie A_{uv} jest zdefiniowany jak zwykle. Skoro φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera, to

$$A_{uv} \subset B_{uv} = \left\{ t \in [0, \gamma) : \varphi\left(\frac{x(t)}{2}\right) < \frac{1}{2}\varphi(x(t)) \right\},$$

co oznacza, że warunek (b) w Twierdzeniu 3.1.2 jest spełniony. Gdyby $\|u\chi_{A_{uv}}\|_\omega > 0$, to argument jest analogiczny. ■

Wniosek 3.3.2. (i) *Jeśli $\gamma < \infty$, to $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (UC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, $\varphi^* \in \Delta_2(\infty)$, φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera oraz ω jest ściśle dodatnia i regularna na $[0, \gamma]$.*

(ii) *Jeśli $\gamma = \infty$, to $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (UC^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$, $\varphi^* \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$ oraz ω jest regularna.*

Dowód. (i) *Konieczność.* Jeśli $(\Lambda_\omega)_\varphi \in (UC^\perp)$, to $\varphi \in \Delta_2(\infty)$, $\varphi > 0$ i $\Lambda_\omega \in (UM)$, na podstawie Twierdzenia 3.1.4. Zatem ω jest regularna na podstawie Uwagi 3.8 z [24] (zob. też [39]). Ponadto, Wniosek 3.3.1 implikuje, że funkcja φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera i ω jest dodatnia na $[0, \gamma]$. Zatem wystarczy jeszcze pokazać, iż warunek (b) w Twierdzeniu 3.1.4 implikuje, że $\varphi^* \in \Delta_2(\infty)$. Przypuśćmy, że $\varphi^* \notin \Delta_2(\infty)$. Wtedy znajdziemy ciąg (u_n) rozbieżny do nieskończoności taki, że

$$\varphi(u_n/2) > \frac{1 - 1/n}{2} \varphi(u_n), \quad (3.24)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (zob. [20] str. 9 lub [22]). Przechodząc do podciągu, jeśli trzeba, możemy założyć, że dla każdego n

$$u_{n+1}/u_n > 2 \quad (3.25)$$

oraz $\varphi(u_1) \int_0^\gamma \omega(t) dt \geq 1$. Zatem dzięki twierdzeniu Lapunowa, dla każdego n znajdziemy liczbę γ_n spełniającą równość

$$\varphi(u_n) \int_0^{\gamma_n} \omega(t) dt = 1. \quad (3.26)$$

Z (3.25) i wypukłości φ mamy $\varphi(u_{n+1}) > 2\varphi(u_n)$, zatem $\gamma_n > 2\gamma_{n+1}$, ponieważ ω jest nierosnąca. Mamy więc dla $v_n = u_n \chi_{(0, \gamma_n)} \in S(\Lambda_\omega)_{\varphi+}$ oraz dowolnych $n < m$

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(v_n) \chi_{\text{supp}(v_n) \setminus \text{supp}(v_m)} \right\|_{\Lambda_\omega} &= \varphi(u_n) \int_0^{\gamma_n - \gamma_m} \omega(t) dt > \\ &> \varphi(u_n) \int_0^{\gamma_n/2} \omega(t) dt \geq \frac{1}{2} \varphi(u_n) \int_0^{\gamma_n} \omega(t) dt = 1/2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Wyberzemy obecnie podciąg ciągu (u_n) w następujący sposób. Niech $n_1 = 3$. Dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ rekurencyjnie określamy n_{i+1} w taki sposób, aby była spełniona nierówność

$$\varphi(u_{n_i}) < \frac{1}{(i+2) \left(1 - \frac{2}{i+2}\right)} \varphi(u_{n_{i+1}}). \quad (3.28)$$

Takie $u_{n_{i+1}}$ zawsze istnieje, ponieważ φ jest wypukła oraz zachodzi (3.25). Wtedy z (3.24) i (3.28) dostaniemy

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{u_{n_i} + u_{n_{i+1}}}{2}\right) &> \varphi\left(\frac{u_{n_{i+1}}}{2}\right) > \frac{1 - \frac{1}{n_{i+1}}}{2} \varphi(u_{n_{i+1}}) \geq \frac{1 - \frac{1}{i+2}}{2} \varphi(u_{n_{i+1}}) = \\ &= \frac{1 - \frac{2}{i+2}}{2} \varphi(u_{n_{i+1}}) + \frac{1}{2(i+2)} \varphi(u_{n_{i+1}}) > \frac{1 - \frac{2}{i+2}}{2} (\varphi(u_{n_{i+1}}) + \varphi(u_{n_i})). \end{aligned}$$

Czyli ciąg (u_{n_i}) spełnia nierówność

$$\varphi\left(\frac{u_{n_i} + u_{n_{i+1}}}{2}\right) > \frac{1 - \frac{2}{i+2}}{2} (\varphi(u_{n_i}) + \varphi(u_{n_{i+1}})). \quad (3.29)$$

Co więcej, z definicji ciągu (u_n) wynika, że

$$\varphi\left(\frac{u_{n_i}}{2}\right) > \frac{1 - 1/n_i}{2} \varphi(u_{n_i}) \geq \frac{1 - 2/(i+2)}{2} \varphi(u_{n_i}),$$

ponieważ $n_i \geq i + 2$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy $x_i = v_{n_i}$, $y_i = v_{n_{i+1}}$, $f_i = \varphi(x_i)$ oraz $g_i = \varphi(y_i)$. Wtedy z (3.26) wynika, że

$$\|(f_i + g_i)/2\|_{\Lambda_\omega} = 1.$$

Ponadto,

$$\left\| f_i \chi_{B_{2/(i+2)}(f_i, g_i)} \right\|_{\Lambda_\omega} \vee \left\| g_i \chi_{B_{2/(i+2)}(f_i, g_i)} \right\|_{\Lambda_\omega} = 0,$$

gdzie

$$B_{2/(i+2)}(f_i, g_i) = \left\{ t \in [0, \gamma] : \varphi \left(\frac{f_i(t) + g_i(t)}{2} \right) \leq \frac{1 - 2/(i+2)}{2} [\varphi(f_i(t)) + \varphi(g_i(t))] \right\},$$

są jak w Twierdzeniu 3.1.4. Wtedy z (3.27) dostajemy

$$\|f_i \chi_{A_{x_i y_i}}\|_{\Lambda_\omega} > 1/2.$$

Czyli warunek (b) z Twierdzenia 3.1.4 nie jest spełniony, a zatem $(\Lambda_\omega)_\varphi \notin (UC^\perp)$.

Dostateczność. Na podstawie Uwagi 3.8 z [24] (zob. też [39]), z regularności wagi ω , wnosimy, że $\Lambda_\omega \in (UM)$. Ponadto założenia na funkcję φ oznaczają, że $\varphi \in \Delta_2^E$. Zatem warunek (a) w Twierdzeniu 3.1.4 jest spełniony. Pokażemy, że warunek (b) także zachodzi. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolny i ustalmy $a > 0$ tak, aby $\|\varphi(a) \chi_{[0, \gamma]}\|_{\Lambda_\omega} = \varepsilon/2$. Wystarczy pokazać, że istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $u \geq a$

$$\varphi(u/2) < \frac{1 - \delta}{2} \varphi(u). \quad (3.30)$$

Rzeczywiście, przypuśćmy, że taka δ istnieje i weźmy $w, v \in S(\Lambda_\omega)_+$ z

$$\|w \chi_{A_{wv}}\|_{\Lambda_\omega} \vee \|v \chi_{A_{wv}}\|_{\Lambda_\omega} \geq \varepsilon,$$

gdzie $A_{wv} = \text{supp}(w) \div \text{supp}(v)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\|v \chi_{A_{wv}}\|_{\Lambda_\omega} \geq \varepsilon$. Biorąc

$$A_1 = \{t \in A_{wv} : v(t) \geq \varphi(a)\}, \quad A_2 = A_{wv} \setminus A_1,$$

dostaniemy $\|v \chi_{A_1}\|_{\Lambda_\omega} \geq \varepsilon/2$, ponieważ $\|v \chi_{A_2}\|_{\Lambda_\omega} \leq \varepsilon/2$. Jednak dla zbiorów $B_\delta(w, v)$, zdefiniowanych jak w Twierdzeniu 3.1.4, zachodzi inkluzja $B_\delta(w, v) \supset A_1$, zatem warunek (b) z Twierdzenia 3.1.4 jest spełniony. Pozostaje więc pokazać, że istnieje $\delta > 0$ spełniająca (3.30). Skoro $\varphi^* \in \Delta_2(\infty)$, to istnieją $u_0 > 0$ i $\delta_0 > 0$ takie, że dla każdego $u \geq u_0$

$$\varphi(u/2) < \frac{1 - \delta_0}{2} \varphi(u) \quad (3.31)$$

(zob. [20], Twierdzenie 1.13). Jeśli $u_0 \leq a$, to $\delta = \delta_0$. Rozważmy więc przypadek $u_0 > a$. Połóżmy $f(u) = \frac{2\varphi(u/2)}{\varphi(u)}$. Wtedy $f(u) < 1$ dla każdego $u \in [a, u_0]$, ponieważ φ nie jest liniowa w żadnym otoczeniu zera. Stąd i z ciągłości f wnosimy, że $\sup_{u \in [a, u_0]} f(u) < 1$. Przyjmując $\delta = \min\{\delta_0, 1 - \sup_{u \in [a, u_0]} f(u)\}$ dostajemy (3.30).

(ii) *Konieczność.* Analogicznie jak w punkcie (i), na podstawie Twierdzenia 3.1.4, możemy uzasadnić, że $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$ i $\Lambda_\omega \in (UM)$. Wtedy ω jest regularna na podstawie Twierdzenia 1 w [39] (zob. też [24]). Przypuśćmy, że $\varphi^* \notin \Delta_2(\mathbb{R}_+)$. Wtedy znajdziemy ciąg $(u_n) \subset \mathbb{R}_+$, spełniający

$$\varphi(u_n/2) > \frac{1 - 1/n}{2} \varphi(u_n)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (zob. [20]). Przechodząc do podciągu jeśli trzeba, musimy rozważyć trzy przypadki.

I. Niech $u_n \rightarrow u_0$ dla pewnego $u_0 > 0$. To znaczy jednak, że φ jest liniowa na przedziale $[0, u_0]$, a wtedy $(\Lambda_\omega)_\varphi \notin (SC^\perp)$ na podstawie Wniosku 3.3.1.

II. Jeśli $u_n \rightarrow \infty$, to możemy postąpić jak w punkcie (i).

III. Jeśli $u_n \rightarrow 0$, to w razie potrzeby przechodząc do podciągu przyjmijmy, że

$$u_n/u_{n+1} > 2, \quad (3.32)$$

dla każdego n . Ponieważ waga jest regularna, to $\int_0^\infty \omega(t) dt = \infty$, a zatem dla każdego n istnieje liczba γ_n spełniająca równość

$$\varphi(u_n) \int_0^{\gamma_n} \omega(t) dt = 1,$$

na podstawie twierdzenia Lapunowa. Zatem, gdy $v_n = u_n \chi_{(0, \gamma_n)} \in S((\Lambda_\omega)_\varphi)_+$, mamy dla $n > m$

$$\left\| \varphi(v_n) \chi_{\text{supp}(v_n) \setminus \text{supp}(v_m)} \right\|_{\Lambda_\omega} > 1/2,$$

z tego samego powodu co w punkcie (i). Również analogicznie jak w punkcie (i) znajdziemy podciąg (u_{n_i}) taki, że $n_i \geq i + 2$ oraz

$$\varphi\left(\frac{u_{n_i} + u_{n_{i+1}}}{2}\right) > \frac{1 - \frac{2}{i+2}}{2} (\varphi(u_{n_i}) + \varphi(u_{n_{i+1}})). \quad (3.33)$$

Ponadto z definicji ciągu (u_n) dostaniemy

$$\varphi\left(\frac{u_{n_i}}{2}\right) > \frac{1 - 1/n_i}{2} \varphi(u_{n_i}) \geq \frac{1 - 2/(i+2)}{2} \varphi(u_{n_i}).$$

Stosując Twierdzenie 3.1.4 (b) wnosimy, że $(\Lambda_\omega)_\varphi \notin (UC^\perp)$, ponieważ dla $x_i = v_{n_i}$, $y_i = v_{n_{i+1}}$ mamy

$$\|(\varphi(x_i) + \varphi(y_i))/2\|_{\Lambda_\omega} = 1 \text{ i } \left\| \varphi(x_i) \chi_{B_{2/(i+2)}(x_i, y_i)} \right\|_{\Lambda_\omega} \vee \left\| \varphi(y_i) \chi_{B_{2/(i+2)}(x_i, y_i)} \right\|_{\Lambda_\omega} = 0,$$

gdzie $\left\| \varphi(y_i) \chi_{A_{x_i y_i}} \right\|_{\Lambda_\omega} > 1/2$ oraz $B_{2/(i+2)}(x_i, y_i)$ są zdefiniowane jak w Twierdzeniu 3.1.4.

Dostateczność. Dowód jest znacznie prostszy niż w przypadku (i), ponieważ nierówność (3.30) zachodzi dla wszystkich $u > 0$ dzięki założeniu, że $\varphi^* \in \Delta_2(\mathbb{R}_+)$. ■

Odnajmy, że konieczność warunku $\varphi^* \in \Delta_2(\infty)$ w punkcie (i) można wywnioskować także z Twierdzenia 2 w [53].

Przypadek ciągłych przestrzeni Orlicza-Lorentza został omówiony w pracach [57] i [61].

Rozdział 4

Przestrzenie multiplikatorów

4.1 Przestrzenie multiplikatorów $M(E, F)$

Niech E oraz F będą przestrzeniami Köthe'go nad tą samą przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) , z normami $\|\cdot\|_E$ i $\|\cdot\|_F$. **Przestrzeń multiplikatorów** (lub uogólnioną przestrzeń dualną) $M(E, F)$ definiujemy jako

$$M(E, F) = \{x \in L^0(\Omega) : xy \in F \text{ dla każdego } y \in E\} \quad (4.1)$$

z normą

$$\|x\|_{M(E, F)} = \sup\{\|xy\|_F, y \in E, \|y\|_E \leq 1\}, \quad (4.2)$$

z którą przestrzeń jest zupełna oraz posiada własność ideału (zob. Twierdzenie (Proposition) 2 w [88]). Nie musi ona jednak być przestrzenią Köthe'go w sensie Definicji 1.1.1. Może się zdarzyć, że $M(E, F) = \{0\}$ lub $\text{supp}M(E, F) \subsetneq \text{supp}E$ (zob. Przykład 4.1.1c poniżej lub [88]). W przypadku, gdy $F = L^1$, przestrzeń $M(E, L^1) = E'$, gdzie E' jest przestrzenią dualną w sensie Köthe'go, do przestrzeni E . Wiadomo, że zawsze $E \xrightarrow{1} E''$ oraz $E \equiv E''$ wtedy i tylko wtedy, gdy E posiada własność Fatou. Oznaczenie E' dla przestrzeni sprzężonej do E jest powodem, dla którego czasami przestrzeń multiplikatorów $M(E, F)$ oznaczamy jako E^F . Przestrzeń Köthe'go dla której $E \equiv E''$ bywa też nazywana przestrzenią doskonałą (perfect space), dlatego uogólnienie tej własności prowadzi do stwierdzenia, że E jest F - doskonała (F -perfect), *gdy* $E \equiv E^{FF}$. Na przykład, L^∞ jest F - doskonała, dla dowolnej przestrzeni Köthe'go F (zob. [88]). Natomiast z tego co napisaliśmy wcześniej wynika, że E jest L^1 - doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy E posiada własność Fatou.

Ogólne własności przestrzeni multiplikatorów oraz wyliczone konkretne przykłady można znaleźć w [6], [88] [104] (zobacz też [3], [14], [25], [27], [86], [87], [92], [105] i [109]). Przypomnijmy kilka własności przestrzeni multiplikatorów, których dowody można znaleźć w wyżej wymienionych pracach.

(I) Jeśli $E_0 \xrightarrow{C} E_1$, to $M(E_1, F) \xrightarrow{C} M(E_0, F)$.

(II) Jeśli $F_0 \xrightarrow{C} F_1$, to $M(E, F_0) \xrightarrow{C} M(E, F_1)$.

(III) $E \xrightarrow{1} E^{FF}$ oraz włożenie to wynika z nierówności Höldera-Rogersa postaci

$$\|xy\|_F \leq \|x\|_E \sup_{\|z\|_E \leq 1} \|yz\|_F = \|x\|_E \|y\|_{M(E, F)}, \quad (4.3)$$

dla dowolnych $x \in E$ i $y \in M(E, F)$.

(IV) $L^\infty \xrightarrow{C} M(E, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \xrightarrow{C} F$.

(V) $M(E, E) \equiv L^\infty$.

(VI) $M(E, F) \xrightarrow{1} M(F', E') \equiv M(E'', F'')$. Jeśli F posiada własność Fatou, to

$$M(E, F) \equiv M(F', E'). \quad (4.4)$$

(VII) Dla $1 < p < \infty$ zachodzi równość $M(E^{(p)}, F^{(p)}) \equiv M(E, F)^{(p)}$.

(VIII) Jeśli F posiada własność Fatou, to przestrzeń $M(E, F)$ też ma tę własność.

Przykład 4.1.1. a) [88] Niech $1 \leq q < p < \infty$, $1/r = 1/q - 1/p$ oraz niech przestrzeń Köthe'go E posiada własność Fatou. Wtedy $M(E^{(p)}, E^{(q)}) \equiv E^{(r)}$. W szczególności $M(E^{(p)}, E) \equiv E^{(p')}$, $M(L^p(\mu), L^q(\mu)) \equiv L^r(\mu)$ dla $1 \leq q \leq p \leq \infty$, gdzie $1/p + 1/p' = 1$.

(b) [88] Niech $1 \leq p < q < \infty$. Jeśli μ jest bezatomowa, to $M(L^p(\mu), L^q(\mu)) = \{0\}$, natomiast w przypadku ciągłym $M(l^p, l^q) \equiv l^\infty$.

(c) Niech $\Omega = [0, 2]$ z miarą Lebesgue'a m . Jeśli $E = L^1[0, 1] \oplus L^2[1, 2]$ z normą $\|x\|_E = \|x\chi_{[0,1]}\|_{L^1[0,1]} + \|x\chi_{[1,2]}\|_{L^2[1,2]}$ oraz $F = L^2[0, 2]$, to $M(E, F) = L^\infty[1, 2]$, gdyż z a) i b) wynika, że $M(L^1[0, 1], L^2[0, 1]) = \{0\}$ i $M(L^2[1, 2], L^2[1, 2]) = L^\infty[1, 2]$.

Obecnie przypomnimy po krótku kilka faktów dotyczących przestrzeni symetrycznych i funkcji fundamentalnych, które można znaleźć na przykład w [68], rozdziały II.3 i II.5 lub w [8], rozdział 2.5.

Niech E będzie przestrzenią symetryczną nad I z miarą Lebesgue'a, gdzie $I = [0, 1]$ lub $I = [0, \infty)$. Przypomnijmy, że **funkcją fundamentalną** przestrzeni symetrycznej E nazywamy funkcję $f_E : I \rightarrow [0, \infty)$ zdefiniowaną wzorem

$$f_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E. \quad (4.5)$$

Wiadomo, że każda funkcja fundamentalna symetrycznej przestrzeni Köthe'go jest pseudo-wklęsła na I , tzn. $f_E(0) = 0$, $f_E(t) > 0$ dla $t > 0$, $f_E(t)$ jest niemalejąca, natomiast $f_E(t)/t$ jest nierosnąca (lub równoważnie $f_E(t) \leq \max(1, t/s)f_E(s)$ dla wszystkich $s, t \in (0, m(I))$). Nawet jeśli dana funkcja fundamentalna f_E nie jest wklęsła, to definiując

$$\tilde{f}_E(t) = \inf_{s \in (0, m(I))} \left(1 + \frac{t}{s}\right) f_E(s), \quad (4.6)$$

otrzymamy oszacowanie

$$f_E(t) \leq \tilde{f}_E(t) \leq 2f_E(t), \quad (4.7)$$

dla wszystkich $t \in I$, przy czym \tilde{f}_E jest już wklęsła. Oczywiście funkcja fundamentalna daje pewną informację o przestrzeni, jednak bynajmniej jej nie determinuje (poza przypadkiem L^1 i L^∞). Często będziemy korzystali z faktu, że wśród przestrzeni z taką samą funkcją fundamentalną istnieje zawsze najmniejsza i największa. Niech ϕ będzie funkcją pseudo-wklęsłą na I . **Przestrzeń funkcyjną Marcinkiewicza** M_ϕ definiujemy jako

$$M_\phi = \left\{x \in L^0(I) : \|x\|_{M_\phi} < \infty\right\},$$

gdzie

$$\|x\|_{M_\phi} = \sup_{t \in I} \phi(t)x^{**}(t)$$

oraz

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds.$$

Wtedy funkcja ϕ jest funkcją fundamentalną przestrzeni M_ϕ , t.j. $f_{M_\phi}(t) = \phi(t)$. Ponadto, dla danej symetrycznej przestrzeni E nad I zachodzi inkluzja $E \xhookrightarrow{1} M_{f_E}$, tzn. przestrzeń Marcinkiewicza jest największą przestrzenią symetryczną o danej funkcji fundamentalnej. Powyższe stwierdzenie uzasadnia oszacowanie

$$x^{**}(t) \leq \frac{1}{t} \|x^*\|_E \|\chi_{[0,t]}\|_{E'} = \|x\|_E \frac{1}{f_E(t)} \text{ dla każdego } t \in I, \quad (4.8)$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z twierdzenia o normie operatora, a ostatnia równość z zależności

$$f_E(t)f_{E'}(t) = t \text{ dla każdego } t \in I.$$

Jak pisaliśmy funkcja fundamentalna nie musi być wklęsła. Wtedy jednak na przestrzeni można wprowadzić normę równoważną tak, aby nowa funkcja fundamentalna była wklęsła. Rzeczywiście, rozważmy przestrzeń $E = (E, \|\cdot\|_E)$, z funkcją fundamentalną f_E . Zdefiniujmy nową normę na E wzorem

$$\|x\|_E^1 = \max(\|x\|_E, \|x\|_{M_{\tilde{f}_E}}),$$

gdzie \tilde{f}_E jest jak w (4.6). Wtedy

$$\|x\|_E \leq \|x\|_E^1 \leq \max(\|x\|_E, 2\|x\|_{M_{f_E}}) \leq 2\|x\|_E \quad (4.9)$$

oraz

$$\|\chi_{[0,t]}\|_E^1 = \max(f_E(t), \tilde{f}_E(t)) = \tilde{f}_E(t). \quad (4.10)$$

Zatem $(E, \|\cdot\|_E^1)$ pozostaje symetryczna, ale jej funkcja fundamentalna jest już wklęsła (zob. [111], Lemat 2.1).

Jeśli E ma wklęsłą funkcję fundamentalną f_E to istnieje także najmniejsza przestrzeń symetryczna z tą samą funkcją fundamentalną. Taką przestrzenią jest **przestrzeń funkcyjna Lorentz'a** zdefiniowana przez normę

$$\|x\|_{\Lambda_{f_E}} = \int_I x^*(t) df_E(t) = f_E(0^+) \|x\|_{L^\infty} + \int_I x^*(t) f_E'(t) dt,$$

gdzie pochodna f_E' istnieje prawie wszędzie na I , ponieważ f_E jest monotoniczna. Wtedy

$$\Lambda_{f_E} \xhookrightarrow{1} E \xhookrightarrow{1} M_{f_E}. \quad (4.11)$$

Zauważmy, że tak zdefiniowana przestrzeń Lorentza nie różni się od przestrzeni Lorentza zdefiniowanych w poprzednim rozdziale o ile $f_E(0^+) = 0$. Zmieniliśmy tylko notację, aby położyć nacisk na funkcję fundamentalną przestrzeni, która będzie odgrywała kluczową rolę w dalszych rozważaniach.

Lemat 4.1.2. Niech E oraz F będą symetrycznymi, funkcyjnymi przestrzeniami Köthe'go na I .

- (i) Jeśli $I = [0, 1]$ oraz $M(E, F) \neq \{0\}$, to $E \hookrightarrow F$.
- (ii) Jeśli $I = [0, \infty)$, $x \in M(E, F)$ oraz $x^*(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) > 0$, to $E \hookrightarrow F$.
- (iii) Jeśli $I = [0, \infty)$ oraz $M(E, F) \neq \{0\}$, to $E_{fin} \subset F$, gdzie E_{fin} oznacza podprzestrzeń przestrzeni E złożoną dokładnie z tych elementów, których nośniki mają miarę skończoną.

Dowód. (*) Pokażemy najpierw, że jeśli $M(E, F) \neq \{0\}$, to $\chi_C \in M(E, F)$ dla każdego zbioru C o mierze skończonej, zarówno w przypadku $I = [0, 1]$, jak i $I = [0, \infty)$.

Niech $0 \neq x \in M(E, F)$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ oraz zbiór $A \subset I$ o mierze dodatniej taki, że

$$|x| \chi_A \geq \delta \chi_A.$$

Stąd $\chi_A \in M(E, F)$ ponieważ $M(E, F)$ posiada własność ideału. Pokażemy, że $\chi_B \in M(E, F)$ dla każdego zbioru B takiego, że $m(A) = m(B)$. Niech więc $m(A) = m(B)$. Wiemy, że wtedy istnieje przekształcenie zachowujące miarę $\omega : A \rightarrow B$, przy czym $\omega(A) = B$ (zob. [103], Twierdzenie 17, str. 410 lub [23], Twierdzenie 5.6, str. 44). Dla dowolnej funkcji mierzalnej f na I , funkcję $f(\omega)$ definiujemy jako $f(\omega(t))$, gdy $t \in A$ oraz 0, w pozostałych przypadkach. Wtedy dla dowolnego $y \in E$ oraz $t \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} d_{y(\omega)\chi_A}(t) &= m(\{s \in I : |y(\omega)\chi_A|(s) > t\}) = \\ &= m(\{s \in A : |y(\omega)|(s) > t\}) = m(\omega^{-1}(\{s \in B : |y|(s) > t\})) = \\ &= m(\{s \in B : |y|(s) > t\}) = d_{y\chi_B}(t). \end{aligned}$$

Stąd $d_{y(\omega)\chi_A} = d_{y\chi_B}(t)$, więc

$$y(\omega)\chi_A \sim y\chi_B.$$

Jednak $y(\omega)\chi_A \in F$, ponieważ $\chi_A \in M(E, F)$, więc też $y\chi_B \in F$, ze względu na symetrię F . Stąd i z dowolności $y \in E$ wnosimy, że $\chi_B \in M(E, F)$. Zatem także $\chi_D \in M(E, F)$ gdy $m(D) \leq m(A)$. Jeśli teraz $C \subset I$ i $m(C) < \infty$, to ze względu na bezatomość miary m możemy podzielić zbiór C na skończoną liczbę rozłącznych zbiorów (B_k) takich, że

$$C = \bigcup_{k=1}^n B_k \text{ oraz } m(B_k) \leq m(A) \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Czyli $\chi_C = \sum_{k=1}^n \chi_{B_k}$, a zatem $\chi_C \in M(E, F)$, co kończy dowód (*).

(i) Z udowodnionego właśnie punktu (*) wynika, że $\chi_I \in M(E, F)$. Zatem $E \xrightarrow{C} F$, gdzie $C = \|\chi_I\|_{M(E, F)}$.

(ii) Jeśli $I = [0, \infty)$ oraz istnieje $x \in M(E, F)$ taki, że $x^*(\infty) > 0$, to zbiór

$$A = \{t \in I : |x(t)| \geq x^*(\infty)/2\}$$

ma nieskończoną miarę. Niech $y \in E$ będzie dowolny. Przypuśćmy chwilowo, że wiemy, iż istnieje odwzorowanie zachowujące miarę $\omega : A \xrightarrow{na} I$. Zauważmy, że wtedy

$$y(\omega) \chi_A \sim y,$$

gdzie $y(\omega) \chi_A$ rozumiemy jako funkcję na I , w taki sposób, że $(y(\omega) \chi_A)(t) = 0$, gdy $t \notin A$. Rzeczywiście, wystarczy pokazać równość funkcji dystrybucji

$$d_{y(\omega) \chi_A} = d_y.$$

Mamy dla dowolnego $t \geq 0$

$$\begin{aligned} d_{y(\omega) \chi_A}(t) &= m(\{s \in I : |y(\omega) \chi_A|(s) > t\}) = \\ &= m(\{s \in A : |y(\omega)|(s) > t\}) = m(\omega^{-1}(\{s \in I : |y|(s) > t\})) = \\ &= m(\{s \in I : |y|(s) > t\}) = d_y(t). \end{aligned}$$

Zatem $y(\omega) \chi_A \in E$ na podstawie symetrii przestrzeni E i stąd $xy(\omega) \chi_A \in F$, ponieważ $x \in M(E, F)$. Jednak

$$\frac{x^*(\infty)}{2} y(\omega) \chi_A \leq xy(\omega) \chi_A \in F,$$

czyli $y(\omega) \chi_A \in F$, a więc i $y \in F$, ponieważ F jest symetryczna. Pozostaje tylko pokazać, że istnieje odwzorowanie $\omega : A \xrightarrow{na} I$. Skoro jednak $m(A) = \infty$, to na podstawie σ -skończoności miary Lebesgue'a m oraz jej bezatomowości, możemy podzielić zbiór A na przeliczalną ilość rozłącznych podzbiorów o mierze równej jeden. Niech (A_n) będzie rodziną takich zbiorów, tzn. $m(A_n) = 1$ oraz $A_n \cap A_k = \emptyset$ dla każdego $k \neq n$. Dalej, na podstawie Twierdzenia 17, str 410 w [103] istnieją odwzorowania zachowujące miarę

$$\omega_n : A_n \xrightarrow{na} [n-1, n).$$

Wtedy odwzorowanie $\omega : A \xrightarrow{na} I$ zdefiniowane jako

$$\omega(t) = \omega_n(t) \text{ gdy } t \in A_n,$$

jest szukanym odwzorowaniem. Rzeczywiście, jeśli $B \subset I$, to

$$\begin{aligned} m(\omega^{-1}(B)) &= m\left(\omega^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap [n-1, n))\right)\right) = \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1}(B \cap [n-1, n))\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} m(\omega_n^{-1}(B \cap [n-1, n))) = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} m(B \cap [n-1, n)) = m(B), \end{aligned}$$

więc ω zachowuje miarę.

(iii) Jeśli $y \in E$ i $m(\text{supp}(y)) < \infty$, to z (*) wynika, że $\chi_{\text{supp}(y)} \in M(E, F)$, czyli $y = y\chi_{\text{supp}(y)} \in F$. ■

Uwaga 4.1.3. *Odnajmy, że jeśli E i F są przestrzeniami symetrycznymi na $I = [0, \infty)$, to E_{fin} nie jest zupełna, dlatego włożenie $E_{fin} \subset F$ nie musi być ciągłe. Można jednak pokazać, że dla każdego $d > 0$ istnieje stała $c = c(d) > 0$ taka, że $E|_A \xrightarrow{c} F|_A$ dla każdego zbioru $A \subset I$ takiego, że $m(A) = d$, tzn. $\|x\chi_A\|_F \leq c\|x\chi_A\|_E$ dla wszystkich $x \in E$.*

Dowód. Oczywiście przestrzenie $E|_A$ i $F|_A$ są też symetrycznymi przestrzeniami funkcyjnymi, więc $E|_A \xrightarrow{c} F|_A$ dla każdego A takiego, że $m(A) = d < \infty$, na podstawie punktu (i). Wystarczy więc pokazać, że stała c zależy tylko od d , a nie zależy od wyboru konkretnego zbioru A . Przypuśćmy, dla sprzeczności, że istnieje ciąg zbiorów (A_n) o równej mierze, $m(A_n) = d$ takich, że $E|_{A_n} \xrightarrow{c_n} F|_{A_n}$ oraz $c_n \rightarrow \infty$ są optymalne, tzn. nie mogą zostać wybrane mniejsze. Wybierzmy c tak, aby $E|_{[0,d]} \xrightarrow{c} F|_{[0,d]}$. Ponieważ c_n były wybrane optymalnie, to znajdziemy ciąg (x_n) taki, że $x_n \in E|_{A_n}$ dla każdego n oraz

$$\|x_n\|_E = \|x_n\|_{E|_{A_n}} = 1 \text{ i } \frac{c_n}{2}\|x_n\|_E = \frac{c_n}{2}\|x_n\|_{E|_{A_n}} \leq \|x_n\|_{F|_{A_n}} = \|x_n\|_F.$$

Ostatecznie więc, na podstawie symetrii przestrzeni E , dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n^* \in E|_{[0,d]}$ oraz

$$\infty \leftarrow \frac{c_n}{2}\|x_n^*\|_{E|_{[0,d]}} = \frac{c_n}{2}\|x_n\|_{E|_{A_n}} \leq \|x_n\|_{F|_{A_n}} = \|x_n^*\|_{F|_{[0,d]}} \leq c\|x_n^*\|_{E|_{[0,d]}} = c.$$

■

Przykład 4.1.4. *Dla symetrycznych przestrzeni na $I = [0, \infty)$, przestrzeń $M(E, F)$ nie musi być trywialna, nawet jeśli nie zachodzi inkluzja $E \hookrightarrow F$, tzn. w punkcie (iii) Lematu 4.1.2 nie możemy zastąpić E_{fin} przez E . Niech na przykład $E = L^2(I)$ oraz $F = L^2 \cap L^1(I)$, gdzie $I = [0, \infty)$. Wtedy oczywiście $L^2 \not\subset L^2 \cap L^1$, ale*

$$\begin{aligned} \|x\|_{M(L^2, L^2 \cap L^1)} &= \sup_{\|y\|_{L^2} \leq 1} \max \{ \|xy\|_{L^2}, \|xy\|_{L^1} \} = \\ &= \max \left\{ \sup_{\|y\|_{L^2} \leq 1} \|xy\|_{L^2}, \sup_{\|y\|_{L^2} \leq 1} \|xy\|_{L^1} \right\} = \max \{ \|x\|_{M(L^2, L^2)}, \|x\|_{M(L^2, L^1)} \} = \\ &= \|x\|_{M(L^2, L^2) \cap M(L^2, L^1)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$M(L^2, L^2 \cap L^1) \equiv M(L^2, L^2) \cap M(L^2, L^1) \equiv L^\infty \cap L^2,$$

gdzie ostatnia równość wynika z Przykładu 4.1.1 a).

Lemat 4.1.5. *Niech E będzie symetryczną przestrzenią funkcyjną na $[0, \infty)$. Jeśli $y \in E$ i $\|y\|_E \leq 1$, to istnieje rozkład $y = u + v$ taki, że $u \in B(E)$, $m(\text{supp } u) \leq 1$ oraz $v \in E \cap L^\infty$ gdzie $\|v\|_{L^\infty} \leq 1/f_E(1)$.*

Dowód. Jeśli $y^*(1) > y^*(\infty) \geq 0$ lub $y^*(1) = y^*(\infty) > 0$, to wystarczy przyjąć $y = u + v$, gdzie $u = y\chi_A$ i $v = y\chi_{I \setminus A}$ dla $A = \{s > 0 : |y(s)| > y^*(1)\}$. Rzeczywiście, $m(A) \leq 1$ oraz

$$\|v\|_{L^\infty} \leq y^*(1) \leq \int_0^1 y^*(t) dt \leq \|y\|_E \|\chi_{[0,1]}\|_{E'} \leq 1/f_E(1),$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z równości $f_E(t)f_{E'}(t) = t$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $y^*(1) = y^*(\infty) = 0$ i $y^*(t) > 0$ dla pewnego $0 < t \leq 1$, to $\text{supp}(y) = A$, $m(A) = t$, natomiast $y = y\chi_A + 0$ jest szukany rozkładem. ■

Przypomnijmy, że symetryczna przestrzeń E nad I posiada **własność majoryzacji**, jeśli dla każdych $x \in L^0$, $y \in E$, nierówność $\int_0^t x^*(s) ds \leq \int_0^t y^*(s) ds$ dla wszystkich $t \in I$ implikuje, że $x \in E$ oraz $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. Każda symetryczna przestrzeń z własnością Fatou posiada własność majoryzacji (zob. np. [68]).

Twierdzenie 4.1.6. *Niech E i F będą nietrywialnymi symetrycznymi przestrzeniami Köthe'go nad I .*

(i) $M(E, F)$ jest również symetryczną przestrzenią nad I .

(ii) Jeśli F posiada własność majoryzacji, to $M(E, F)$ też posiada tę własność oraz

$$\|x\|_{M(E, F)} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|x^*y^*\|_F. \quad (4.12)$$

(iii) Zachodzi nierówność

$$f_{M(E, F)}(t) \geq \sup_{0 < s \leq t} \frac{f_F(s)}{f_E(s)}$$

dla wszystkich $0 < t < m(I)$. Ponadto, gdy f_F jest wklęsła oraz $f_F(0^+) = 0$, to

$$f_{M(E, F)}(t) \leq \int_0^t \frac{f'_F(s)}{f_E(s)} ds \quad \text{dla każdego } t \in (0, m(I)). \quad (4.13)$$

Jeśli dodatkowo $\frac{f_F(t)}{f_E(t)t^a}$ jest niemalejącą funkcją na $(0, b)$ dla pewnego $a > 0$ i $b \in (0, m(I))$, to

$$\frac{f_F(t)}{f_E(t)} \leq f_{M(E, F)}(t) \leq \frac{1}{a} \frac{f_F(t)}{f_E(t)} \quad \text{dla każdego } t \in (0, b). \quad (4.14)$$

W przypadku, gdy f_F jest tylko pseudo-wklęsła, to odpowiednie, prawe strony nierówności (4.13) i (4.14) posiadają dodatkowy czynnik 2.

(iv) Jeśli f_E jest wklęsła na I , $f_E(0^+) = 0$ oraz $\Lambda_{f_E} \hookrightarrow F$ to

$$f_{M(\Lambda_{f_E}, F)}(t) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{f_F(s)}{f_E(s)} \quad \text{dla każdego } t \in I.$$

(v) Niech ϕ, ψ będą wklęsłe na I , $\phi(0^+) = \psi(0^+) = 0$ oraz oznaczmy

$$\phi_1(t) = \frac{t}{\psi(t)}.$$

Wówczas $M_{\phi_1} \xrightarrow{C} \Lambda_\phi$ i stała C jest optymalna wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \int_I \psi'(s)\phi'(s)ds < \infty$. Ponadto, jeśli

$$\eta(t) := \int_0^t \psi'(s)\phi'(s)ds < \infty, \quad \text{dla } t \in I, \quad (4.15)$$

to $M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi) \equiv \Lambda_\eta$.

Dowód. (i). Niech $I = [0, 1]$. Przypuśćmy, że $x \sim z$ oraz $0 \neq z \in M(E, F)$. Z Lematu 2.1 na str. 60 w [68] (zob. też [7], str. 777) wnosimy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje odwzorowanie zachowujące miarę $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ takie, że

$$\|x(\omega) - z\|_{L^\infty} \leq \epsilon.$$

Ponadto, Lemat 4.1.2 gwarantuje, że $E \xrightarrow{C} F$. Zatem dla każdego $y \in B(E)$, wykorzystując symetrię E otrzymujemy

$$\begin{aligned} |xy| &\sim |x(\omega)y(\omega)| \leq |zy(\omega)| + |(x(\omega) - z)y(\omega)| \leq \\ &\leq |zy(\omega)| + \epsilon |y(\omega)| \in F. \end{aligned}$$

Stąd, na mocy symetrii przestrzeni F , $x \in M(E, F)$. Ponadto $\|y(\omega)\|_E = \|y\|_E \leq 1$, więc

$$\begin{aligned} \|xy\|_F &\leq \|zy(\omega)\|_F + C\epsilon \|y(\omega)\|_E \\ &\leq \|z\|_{M(E,F)} + C\epsilon. \end{aligned}$$

Przechodząc więc do supremum po wszystkich $y \in B(E)$, otrzymujemy

$$\|x\|_{M(E,F)} \leq \|z\|_{M(E,F)} + C\epsilon,$$

co wobec dowolności $\epsilon > 0$ oznacza, że $\|x\|_{M(E,F)} \leq \|z\|_{M(E,F)}$. Nierówności przeciwniej dowodzimy analogicznie.

Niech tym razem $I = [0, \infty)$. Podzielmy dowód na dwie części:

A. Jeśli $x \in M(E, F)$ i $x^*(\infty) > 0$, to przyjmijmy

$$x_1(t) = \max(|x(t)|, x^*(\infty)), \quad t \in I.$$

Wtedy dla każdego $y \in E$

$$|x_1y| \leq |xy| + x^*(\infty) |y| \in F,$$

gdyż na podstawie Lematu 4.1.2(ii), $E \hookrightarrow F$. Zatem $x_1 \in M(E, F)$. Ponadto, $x_1 \sim x$. Udowodnimy, że

$$\|x\|_{M(E,F)} = \|x_1\|_{M(E,F)}. \quad (4.16)$$

Oczywiście wystarczy pokazać tylko nierówność $\|x\|_{M(E,F)} \geq \|x_1\|_{M(E,F)}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolny i ustalony. Znajdziemy $y \in B(E)_+$ taki, że

$$(1 - \varepsilon) \|x_1\|_{M(E,F)} \leq \|x_1 y\|_F. \quad (4.17)$$

Dalej zdefiniujemy zbiory

$$A = \{t \in I : (1 - \varepsilon) x^*(\infty) \leq |x(t)| \leq (1 + \varepsilon) x^*(\infty)\},$$

$$B = \{t \in I : |x(t)| > (1 + \varepsilon) x^*(\infty)\}.$$

Wtedy z definicji zbiorów A , B oraz elementu x_1 mamy

$$x_1 \chi_B = x \chi_B,$$

$m(A) = \infty$ oraz

$$x_1 \chi_A \geq x \chi_A \geq (1 - \varepsilon) x_1 \chi_A.$$

Tłumacząc analogicznie jak w dowodzie części (ii) Lematu 4.1.2, znajdziemy odwzrowanie zachowujące miarę $\omega_0 : A \xrightarrow{na} I \setminus B$. Zdefiniujemy $\omega : A \cup B \xrightarrow{na} I$, jako

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(t) & \text{gdy } t \in A, \\ t & \text{gdy } t \in B. \end{cases}$$

Wtedy ω też zachowuje miarę oraz analogicznie jak w dowodzie części (ii) Lematu 4.1.2 stwierdzamy, że

$$y(\omega) \chi_{A \cup B} \sim y.$$

Mamy

$$\begin{aligned} xy(\omega) \chi_{A \cup B} &= xy(\omega) \chi_A + xy(\omega) \chi_B \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon) x_1 y(\omega) \chi_A + x_1 y(\omega) \chi_B \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon) x_1 y(\omega) \chi_{A \cup B}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Z drugiej strony, skoro $y(\omega_0) \chi_A \sim y \chi_{I \setminus B}$, to

$$d_{(1+\varepsilon)x^*(\infty)y \chi_{I \setminus B}} = d_{(1+\varepsilon)x^*(\infty)y(\omega_0) \chi_A}.$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} d_{x_1 y} &= d_{x_1 y \chi_B} + d_{x_1 y \chi_{I \setminus B}} \leq d_{x_1 y \chi_B} + d_{(1+\varepsilon)x^*(\infty)y \chi_{I \setminus B}} = \\ &= d_{x_1 y \chi_B} + d_{(1+\varepsilon)x^*(\infty)y(\omega_0) \chi_A} \leq \\ &\leq d_{(1+\varepsilon)x_1 y(\omega) \chi_B} + d_{(1+\varepsilon)x_1 y(\omega_0) \chi_A} = d_{(1+\varepsilon)x_1 y(\omega) \chi_{A \cup B}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$(x_1 y)^* \leq ((1 + \varepsilon) x_1 y(\omega) \chi_{A \cup B})^*$$

i konsekwentnie, na mocy (4.17) i (4.18)

$$(1 - \varepsilon) \|x_1\|_{M(E,F)} \leq \|x_1 y\|_F \leq (1 + \varepsilon) \|x_1 y(\omega) \chi_{A \cup B}\|_F \leq \quad (4.19)$$

$$\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|xy(\omega) \chi_{A \cup B}\|_F \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\|_{M(E,F)}.$$

Zatem ostatecznie

$$\|x_1\|_{M(E,F)} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} \|x\|_{M(E,F)},$$

co ze względu na dowolność $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\|x_1\|_{M(E,F)} \leq \|x\|_{M(E,F)}$.

Przypuśćmy więc, że x jest jak wyżej oraz $z \sim x$. Wtedy $z_1 \sim x_1$, gdzie $x_1 \in M(E, F)$ i $z_1(t) = \max(|z(t)|, z^*(\infty))$, $t \in I$. Możemy zatem postąpić dokładnie jak w punkcie (i), stosując Lemat 2.1, str. 60 w [68], aby wywnioskować, że $z_1 \in M(E, F)$ i $\|x_1\|_{M(E,F)} = \|z_1\|_{M(E,F)}$. Oczywiście $z_1 \geq z$, więc też $z \in M(E, F)$ i na podstawie (4.16) mamy

$$\|x\|_{M(E,F)} = \|x_1\|_{M(E,F)} = \|z_1\|_{M(E,F)} = \|z\|_{M(E,F)}.$$

B. Przypuśćmy, że $0 \neq x \in M(E, F)$ i $x^*(\infty) = 0$. Weźmy $z \sim x$. Wtedy, z Lematu 2.1, str. 60 w [68] wnosimy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje odwzorowanie zachowujące miarę $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ takie, że

$$\|x - z(\omega)\|_{L^1 \cap L^\infty} < \varepsilon.$$

Stąd, dla każdego $y \in B(E)$, mamy

$$|zy| \sim |z(\omega)y(\omega)| \leq |xy(\omega)| + |[z(\omega) - x]y(\omega)|$$

Skoro $\|y(\omega)\|_E \leq 1$, to stosując Lemat 4.1.5, znajdziemy rozkład $y(\omega) = u + v$ taki, że $u \in B(E)$, $m(\text{supp}(u)) \leq 1$ oraz $v \in E \cap L^\infty$ gdzie $\|v\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{f_E(1)}$. Korzystając dodatkowo z (1.2) oraz Lematu 4.1.2(iii), mamy

$$\begin{aligned} |z(\omega)y(\omega)| &\leq |xy(\omega)| + |[z(\omega) - x][u + v]| \leq \\ &\leq |xy(\omega)| + |[z(\omega) - x]u| + |[z(\omega) - x]v| \leq \\ &\leq |xy(\omega)| + \varepsilon |u| + \frac{1}{f_E(1)} |z(\omega) - x| \in F. \end{aligned}$$

Czyli $z \in M(E, F)$. Ponadto $zy \sim z(\omega)y(\omega)$, więc z powyższych nierówności, symetrii F oraz inkluzji (1.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|zy\|_F &\leq \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon \|u\|_F + \|v\|_{L^\infty} \|z(\omega) - x\|_F \\ &\leq \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon \|u\|_F + \frac{1}{f_E(1)} \|z(\omega) - x\|_{L^1 \cap L^\infty} \cdot 2f_F(1) \\ &= \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon \|u\|_F + 2\varepsilon \frac{f_F(1)}{f_E(1)}. \end{aligned}$$

Z Uwagi 4.1.3 wynika, że $\|u\|_F \leq c\|u\|_E$, ponieważ $m(\text{supp}(u)) \leq 1$, a więc

$$\|zy\|_F \leq \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon c \|u\|_E + 2\varepsilon \frac{f_F(1)}{f_E(1)} \leq \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon c + 2\varepsilon \frac{f_F(1)}{f_E(1)}.$$

Przechodząc do supremum po wszystkich $y \in B(E)$, otrzymujemy

$$\|z\|_{M(E,F)} \leq \|x\|_{M(E,F)} + \varepsilon c + 2\varepsilon \frac{f_F(1)}{f_E(1)},$$

co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\|z\|_{M(E,F)} \leq \|x\|_{M(E,F)}$. Nierówności przeciwną dowodzimy analogicznie.

(ii) Niech $x \in M(E, F)$, $y \in E$. Z Twierdzenia 4.1.6(i) oraz symetrii przestrzeni E wnosimy, że $x^* \in M(E, F)$ oraz $y^* \in E$, a zatem $x^*y^* \in F$. Ponadto,

$$\begin{aligned} \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|x^*y^*\|_F &= \sup_{\|y^*\|_E \leq 1} \|x^*y^*\|_F \\ &\leq \sup_{\|z\|_E \leq 1} \|x^*z\|_F = \|x^*\|_{M(E,F)}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\int_0^t (xy)^*(s) ds = \sup_{m(A)=t} \int_A |x(s)y(s)| ds,$$

(zob. [68], str. 64 własność 8°). Ponadto dla każdego zbioru $A \subset I$, $m(A) = t$ istnieje odwzorowanie zachowujące miarę $\omega_A : [0, t] \xrightarrow{na} A$ (zob. [103], Twierdzenie 17, str. 410). Wtedy

$$\int_A |x(s)y(s)| ds = \int_0^t |x(\omega_A(s))y(\omega_A(s))| ds$$

oraz z nierówności Hardy'ego - Littlewood'a (zob. np. [8], Twierdzenie 2.2, str. 44) dostaniemy

$$\int_0^t |x(\omega_A(s))y(\omega_A(s))| ds \leq \int_0^t [x(\omega_A(s))]^* [y(\omega_A(s))]^* ds.$$

Ponadto, $x(\omega_A)\chi_{[0,t]} \sim x\chi_A$ i $y(\omega_A)\chi_{[0,t]} \sim y\chi_A$, więc

$$[x(\omega_A)\chi_{[0,t]}]^* = (x\chi_A)^* \text{ i } [y(\omega_A)\chi_{[0,t]}]^* = (y\chi_A)^*,$$

a zatem $x(\omega_A)^* \leq x^*$ i $y(\omega_A)^* \leq y^*$, gdyż ogólnie nierówność $0 \leq f \leq h$ implikuje $f^* \leq h^*$ (zob. [68], Własność 2, str. 63). Ostatecznie

$$\int_0^t [x(\omega_A(s))]^* [y(\omega_A(s))]^* ds \leq \int_0^t x^*(s) y^*(s) ds,$$

dla każdego $t \in I$ i każdego $A \subset I$, $m(A) = t$. Czyli

$$\int_0^t (xy)^*(s) ds \leq \int_0^t x^*(s) y^*(s) ds, \quad (4.20)$$

dla każdego $t \in I$. Ponieważ przestrzeń F posiada własność majoryzacji, to $\|xy\|_F \leq \|x^*y^*\|_F$. Zatem

$$\|x\|_{M(E,F)} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|xy\|_F \leq \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|x^*y^*\|_F \leq \|x^*\|_{M(E,F)} = \|x\|_{M(E,F)}, \quad (4.21)$$

gdzie ostatnia równość wynika z symetrii przestrzeni $M(E, F)$, co dowodzi równości (4.12).

Pokażmy dalej, że jeśli przestrzeń F posiada własność majoryzacji, to też $M(E, F)$ posiada tę własność. Niech $x \in M(E, F)$ oraz $z \in L^0$. Jeśli

$$\int_0^t z^*(s) ds \leq \int_0^t x^*(s) ds$$

dla wszystkich $t \in I$, to z lematu Hardy'ego (zob. Twierdzenie (Proposition) 3.6, str. 56 w [8]) wynika, że

$$\int_0^t z^*(s)y^*(s)ds \leq \int_0^t x^*(s)y^*(s)ds \quad (4.22)$$

dla wszystkich $t \in I$ i każdego $y \in E$. Ponieważ $M(E, F)$ jest symetryczna na podstawie punktu (i), więc też $x^* \in M(E, F)$. Stąd $x^*y^* \in F$ dla każdego $y \in E$. Zatem własność majoryzacji przestrzeni F oraz (4.22) implikują, że $z^*y^* \in F$. Dowodząc analogicznie, jak w przypadku nierówności (4.20) i korzystając z własności majoryzacji przestrzeni F wnosimy, że $zy \in F$. Stąd, ze względu na dowolność $y \in E$, $z \in M(E, F)$. Ponadto z (4.22) mamy $\|z^*y^*\|_F \leq \|x^*y^*\|_F$, więc przechodząc do supremum po $y \in B(E)$ dostajemy z (4.21) $\|z\|_{M(E, F)} \leq \|x\|_{M(E, F)}$, co oznacza, że również $M(E, F)$ ma własność majoryzacji.

(iii) Dla każdego $t \in I$ mamy

$$f_{M(E, F)}(t) = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|y \chi_{[0, t]}\|_F \geq \sup_{s \in I} \left\| \frac{\chi_{[0, s]}}{f_E(s)} \chi_{[0, t]}\right\|_F = \sup_{s \leq t} \frac{f_F(s)}{f_E(s)}, \quad (4.23)$$

co implikuje także lewą stronę nierówności (4.14). Z drugiej strony, jeśli f_F jest wklęsła oraz $f_F(0^+) = 0$, to z ogólnych własności (I), (II) oraz włożeń (4.11) wynika, że $M(M_{f_E}, \Lambda_{f_F}) \xrightarrow{1} M(E, F)$, a zatem

$$\begin{aligned} f_{M(E, F)}(t) &\leq f_{M(M_{f_E}, \Lambda_{f_F})}(t) = \sup_{\|y\|_{M_{f_E}} \leq 1} \|y \chi_{[0, t]}\|_{\Lambda_{f_F}} \\ &\leq \sup_{y^* \leq 1/f_E} \int_0^t y^*(s) df_F(s) \leq \int_0^t \frac{f'_F(s)}{f_E(s)} ds. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto spełnione jest założenie o monotoniczności funkcji $\frac{f_F(t)}{f_E(t)^{t^a}}$, to wykorzystując nierówność $f'_F(s) \leq f_F(s)/s$, która zachodzi dla funkcji wklęsłych dla prawie wszystkich $s \in I$, mamy

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{f'_F(s)}{f_E(s)} ds &\leq \int_0^t \frac{f_F(s)}{s f_E(s)} ds = \int_0^t \frac{f_F(s)}{f_E(s)} s^{a-1} ds \\ &\leq \frac{f_F(t)}{f_E(t)^{t^a}} \int_0^t s^{a-1} ds = \frac{1}{a} \frac{f_F(t)}{f_E(t)} \text{ dla } t \in (0, b). \end{aligned}$$

Jeśli f_F jest tylko pseudo-wklęsła, to z (4.9) wnosimy, że możemy przernormować przestrzeń F tak, aby posiadała wklęsłą funkcję fundamentalną. Oznaczmy przestrzeń F z taką normą jako F^1 . Wtedy, z (4.9) mamy $F^1 \xrightarrow{1} F \xrightarrow{2} F^1$, skąd

$M(E, F^1) \xrightarrow{1} M(E, F)$ na podstawie ogólnej własności (II). W konsekwencji, z nierówności (4.14) wynika, że

$$f_{M(E, F)}(t) \leq f_{M(E, F^1)}(t) \leq \frac{1}{a} \frac{f_{F^1}(t)}{f_E(t)} \leq \frac{2}{a} \frac{f_F(t)}{f_E(t)}.$$

(iv) Teza wynika wprost z równości

$$\|x^*\|_{M(\Lambda_{f_E}, F)} = \sup_{s \in I} \frac{\|x^* \chi_{[0, s]}\|_F}{f_E(s)},$$

udowodnionej w [88, Twierdzenie 3], ponieważ

$$f_{M(\Lambda_{f_E}, F)}(t) = \sup_{s \in I} \frac{\|\chi_{[0, t]} \chi_{[0, s]}\|_F}{f_E(s)} = \sup_{0 < s \leq t} \frac{f_F(s)}{f_E(s)}.$$

(v) Niech $\phi_1(t) = t/\psi(t)$. Pokażmy najpierw równoważność: $M_{\phi_1} \xrightarrow{C} \Lambda_\phi$ i stała C jest optymalna wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \int_I \psi'(s) \phi'(s) ds < \infty$.

Przypuśćmy, że $\int_I \psi'(s) \phi'(s) ds = C < \infty$. Jeśli $\|x\|_{M_{\phi_1}} \leq 1$, to dla każdego $0 < t < m(I)$

$$\frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds = \frac{\phi_1(t)}{t} \int_0^t x^*(s) ds \leq 1,$$

skąd

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq \psi(t) = \int_0^t \psi'(s) ds \quad (4.24)$$

dla wszystkich $t \in I$. Zatem z lematu Hardy'ego wynika, że

$$\int_I x^*(s) \phi'(s) ds \leq \int_I \psi'(s) \phi'(s) ds = C, \quad (4.25)$$

czyli $\|x\|_{\Lambda_\phi} \leq C$, tzn. $M_{\phi_1} \xrightarrow{C} \Lambda_\phi$. Ponadto,

$$\|\psi'\|_{M_{\phi_1}} = \sup_{t \in I} (\psi')^{**}(t) \phi_1(t) = \sup_{t \in I} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \psi'(s) ds = 1. \quad (4.26)$$

Czyli $\psi' \in S(M_{\phi_1})$ i dla $x = x^* = \psi'$ w nierówności (4.25) zachodzi równość, więc stała włożenia nie może być mniejsza od C . Z drugiej strony, niech $M_{\phi_1} \xrightarrow{C} \Lambda_\phi$, gdzie C jest optymalna. Wtedy

$$\int_I \psi'(s) \phi'(s) ds \leq C \|\psi'\|_{M_{\phi_1}} = C. \quad (4.27)$$

Ponadto, jeśli $f = f^*$ i $\|f\|_{M_{\phi_1}} = 1$, to

$$1 = \sup_{t \in I} \frac{\phi_1(t)}{t} \int_0^t f^*(s) ds,$$

skąd

$$\forall t \in I \quad \int_0^t f^*(s) ds \leq \psi(t) = \int_0^t \psi'(s) ds.$$

Zatem stosując lemat Hardy'ego, mamy dla każdego $t \in I$

$$\int_0^t f(s)\phi'(s)ds \leq \int_0^t \psi'(s)\phi'(s)ds.$$

Stąd też

$$\|f\|_{\Lambda_\phi} = \int_I f(s)\phi'(s)ds \leq \int_I \psi'(s)\phi'(s)ds,$$

dla każdego $f \in S(M_{\phi_1})$. Zatem

$$\|f\|_{\Lambda_\phi} \leq \int_I \psi'(s)\phi'(s)ds \|f\|_{M_{\phi_1}},$$

dla każdego $f \in M_{\phi_1}$. Jednak optymalność stałej włożenia C oznacza, że $C \leq \int_I \psi'(s)\phi'(s)ds$, co w połączeniu z (4.27) daje równość $C = \int_I \psi'(s)\phi'(s)ds$.

Udowodnimy równość przestrzeni $M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi) \equiv \Lambda_\eta$, gdzie

$$\eta(t) := \int_0^t \psi'(s)\phi'(s)ds < \infty, \quad (4.28)$$

dla $t \in I$. Niech $x \in M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)$. Wtedy też $x^* \in M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)$ na mocy (i). Skoro $\psi' \in S(M_{\phi_1})$, to $x^*\psi' \in \Lambda_\phi$ i

$$\|x^*\psi'\|_{\Lambda_\phi} \leq \|x^*\|_{M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)} \|\psi'\|_{M_{\phi_1}} = \|x^*\|_{M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)}.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Lambda_\eta} &= \|x^*\|_{\Lambda_\eta} = \int_I x^*(s)\psi'(s)\phi'(s)ds \\ &= \int_I (x^*\psi')^*(s)\phi'(s)ds \leq \|x^*\|_{M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)} = \|x\|_{M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)}. \end{aligned}$$

Czyli $M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi) \xrightarrow{1} \Lambda_\eta$.

Z drugiej strony, jeśli $x \in \Lambda_\eta$ oraz $\|y\|_{M_{\phi_1}} \leq 1$, to $\int_0^t y^*(s)ds \leq \psi(t) = \int_0^t \psi'(s)ds$ dla wszystkich $t \in I$. Wtedy na podstawie lematu Hardy'ego wnosimy, że

$$\int_I x^*(s)y^*(s)\phi'(s)ds \leq \int_I x^*(s)\psi'(s)\phi'(s)ds = \|x\|_{\Lambda_\eta}.$$

Ponadto, stosując nierówność (4.20) oraz jeszcze raz lemat Hardy'ego, mamy

$$\|xy\|_{\Lambda_\phi} = \int_I (xy)^*(s)\phi'(s)ds \leq \int_I x^*(s)y^*(s)\phi'(s)ds \leq \|x\|_{\Lambda_\eta}$$

dla każdego $\|y\|_{M_{\phi_1}} \leq 1$. W rezultacie $\|x\|_{M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi)} \leq \|x\|_{\Lambda_\eta}$ i ostatecznie $M(M_{\phi_1}, \Lambda_\phi) \equiv \Lambda_\eta$. ■

Uwaga 4.1.7. Zauważmy, że dla $I = [0, 1]$, z Lematu 4.1.2 (i) wynika równoważność: $M(E, F) \neq \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \hookrightarrow F$, ponieważ inkluzja $E \hookrightarrow F$ implikuje, że $L^\infty \hookrightarrow M(E, F)$. Dowód konieczności można wywnioskować też z prac [2, Twierdzenie 1] i [47, Lemat 5.2], gdzie autorzy dowodzą ogólniejszych faktów, z których w szczególności wynika wspomniane włożenie. Oczywiście powyższy dowód jest znacznie prostszy. Ponadto punkt (iii) Lematu 4.1.2 został dowiedziony w [2, Wniosek 9] oraz w [14, Lemat 6.1]. Jednak autorzy pracy [14], jak i [88] wykorzystują symetrię przestrzeni $M(E, F)$, nie dowodząc tego, skądinąd intuicyjnie oczywistego faktu, ani nie wskazując miejsca w którym został udowodniony. Dla kompletności układu zamieściliśmy więc dowód.

4.2 Multiplikatory między przestrzeniami E_φ

Aby sformułować i udowodnić główne twierdzenia tego rozdziału wprowadźmy następującą notację, dzielącą klasę funkcji Orlicza jak następuje:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{(1)} &= \{\varphi : b_\varphi = \infty\}, \\ \mathcal{Y}^{(2)} &= \{\varphi : b_\varphi < \infty \text{ i } \varphi(b_\varphi) = \infty\}, \\ \mathcal{Y}^{(3)} &= \{\varphi : b_\varphi < \infty \text{ i } \varphi(b_\varphi) < \infty\}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Oczywiście funkcja Orlicza φ może nie mieć funkcji odwrotnej. W poprzednim rozdziale, w takiej sytuacji posługiwaliśmy się obcięciem funkcji φ do zbioru G_φ , aby pozostać w zgodzie z notacją stosowaną w innych pracach dotyczących własności geometrycznych przestrzeni E_φ (np. [59]). W tym i następnym rozdziale natomiast, problem braku odwrotności funkcji φ rozwiązaliśmy posługując się jej prawostronnie ciągłą uogólnioną odwrotnością, którą definiujemy jako

$$\varphi^{-1}(v) = \inf\{u \geq 0 : \varphi(u) > v\} \text{ dla } v \in [0, \infty) \text{ oraz } \varphi^{-1}(\infty) = \lim_{v \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(v).\tag{4.30}$$

Odnajdujemy tutaj, że $\{u \geq 0 : \varphi(u) > v\} \neq \emptyset$ dla każdego $v \in [0, \infty)$, więc powyższe infimum jest zawsze skończone. Oczywiście, gdy funkcja Orlicza jest różnowarościowa (tj. gdy $a_\varphi = 0$ i $b_\varphi = \infty$), to φ^{-1} z (4.30) jest funkcją odwrotną do φ w zwykłym sensie. Często będziemy używali następujących własności funkcji φ oraz φ^{-1} .

Lemat 4.2.1. *Następujące własności zachodzą dla każdej funkcji Orlicza φ .*

- (i) $\varphi(\varphi^{-1}(u)) \leq u$ dla $u \in [0, \infty)$ oraz $u \leq \varphi^{-1}(\varphi(u))$, jeśli $\varphi(u) < \infty$.
- (ii) $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$ dla $a_\varphi \leq u \leq b_\varphi$, jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(2)}$.
- (iii) $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$ dla $a_\varphi \leq u < b_\varphi$, jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$.
- (iv) $\varphi^{-1}(\varphi(u)) > u$ dla $0 \leq u < a_\varphi$.
- (v) $\varphi^{-1}(\varphi(u)) < u$ dla $u > b_\varphi$.
- (vi) $\varphi(\varphi^{-1}(u)) = u$ dla $u \in [0, \infty)$, jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$.
- (vii) $\varphi(\varphi^{-1}(u)) = u$ dla $u \in [0, \varphi(b_\varphi)]$, gdy $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$.
- (viii) $\varphi(\varphi^{-1}(u)) < u$ dla $u > \varphi(b_\varphi)$, gdy $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$.

Dowód. (i) Niech $u \in [0, \infty)$. Dla $u = 0$, $\varphi^{-1}(u) = 0$. Przypuśćmy, że $0 < u < \varphi(b_\varphi)$ gdy $\varphi(b_\varphi) = \infty$ lub $0 < u \leq \varphi(b_\varphi)$, gdy $\varphi(b_\varphi) < \infty$. Wtedy $\varphi^{-1}(u) = v$, gdzie $\varphi(v) = u$, czyli $\varphi(\varphi^{-1}(u)) = u$. Jeśli natomiast $\varphi(b_\varphi) < \infty$ i $u > \varphi(b_\varphi)$, to $\varphi^{-1}(u) = b_\varphi$, więc $\varphi(\varphi^{-1}(u)) = \varphi(b_\varphi) < u$.

Aby wykazać drugą część założymy, że $\varphi(u) < \infty$. Jeśli $u < a_\varphi$, to $\varphi(v) > \varphi(u) = 0$ dla każdego $v > a_\varphi$, więc $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = a_\varphi > u$. Jeśli $u \geq a_\varphi$, to $\varphi(v) > \varphi(u)$ dla każdego $v > u$, więc $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$.

Pozostałe punkty lematu wynikają z analogicznych rozważań. ■

Ponadto będziemy używali następującej notacji.

Mówimy, że $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów [dla dużych argumentów] (dla małych argumentów), jeśli istnieje stała $C > 0$ [istnieją stałe $C, u_0 > 0$] (istnieją stałe $C, u_0 > 0$) takie, że nierówność

$$C\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u) \quad (4.31)$$

zachodzi dla wszystkich $u > 0$ [dla $u \geq u_0$] (dla $0 < u \leq u_0$), odpowiednio.

Analogicznie, powiemy, że $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów [dla dużych argumentów] (dla małych argumentów), jeśli istnieje stała $D > 0$ [istnieją stałe $D, u_0 > 0$] (istnieją stałe $D, u_0 > 0$) takie, że nierówność

$$\varphi^{-1}(u) \leq D\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \quad (4.32)$$

zachodzi dla wszystkich $u > 0$ [dla $u \geq u_0$] (dla $0 < u \leq u_0$), odpowiednio.

Relacja $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów [dla dużych argumentów] (dla małych argumentów) oznacza z kolei, że jednocześnie zachodzą relacje $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ i $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$, odpowiednio dla wszystkich argumentów [dla dużych argumentów] (dla małych argumentów).

Lemat 4.2.2. *Niech φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza.*

(i) *Jeśli $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów, to*

(a) *dla każdego $u_1 > 0$ istnieją stałe $C_1 > 0, D_1 > 0$ takie, że*

$$C_1\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u) \leq D_1\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u), \quad (4.33)$$

dla każdego $u \geq u_1$.

(b) *$b_\varphi < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_{\varphi_1} < \infty$ oraz $b_{\varphi_2} < \infty$.*

(ii) *Jeśli $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla małych argumentów, to*

(a) *dla każdego $u_1 > 0$ istnieją stałe $C_1 > 0, D_1 > 0$ takie, że*

$$C_1\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u) \leq D_1\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u), \quad (4.34)$$

dla każdego $0 < u \leq u_1$.

(b) *$a_\varphi = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{\varphi_1} = 0$ lub $a_{\varphi_2} = 0$.*

Dowód. (i)(a) Wystarczy przyjąć

$$C_1 = \min \left\{ C, \inf_{u_1 \leq u \leq u_0} \frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u)} \right\}$$

oraz

$$D_1 = \max \left\{ D, \sup_{u_1 \leq u \leq u_0} \frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u)} \right\},$$

gdzie C, D oraz u_0 są z (4.31) i (4.32) odpowiednio.

(ii)(b). Konieczność. Przypuśćmy, że $a_\varphi = 0$ oraz ($a_{\varphi_1} > 0$ i $a_{\varphi_2} > 0$). Biorąc $u_n \rightarrow 0$, dostaniemy $\varphi_1^{-1}(u_n)\varphi_2^{-1}(u_n) \rightarrow a_{\varphi_1}a_{\varphi_2} > 0$ oraz $\varphi^{-1}(u_n) \rightarrow 0$, co przeczy nierówności (4.31).

Dostateczność. Jeśli $a_{\varphi_1} = 0$ oraz $a_\varphi > 0$, to $\varphi_1^{-1}(u_n)\varphi_2^{-1}(u_n) \rightarrow 0$ oraz $\varphi^{-1}(u_n) \rightarrow a_\varphi$, co przeczy nierówności (4.32). Przypadek gdy $a_{\varphi_2} = 0$ i $a_\varphi > 0$ jest w pełni analogiczny.

Dowód punktów (i)(b) oraz (ii)(a) jest podobny. ■

Uwaga 4.2.3. Zauważmy obecnie, że nierówność (4.31) jest równoważna nierówności, którą można nazwać uogólnioną nierównością Young'a, a mianowicie

$$\varphi(Cuv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v) \quad (4.35)$$

dla wszystkich $u, v > 0$, o ile $\varphi_1(u), \varphi_2(v) < \infty$. Implikacja (4.31) \implies (4.35) została dowiedziona w [93]. Wystarczy przyjąć $w = \max[\varphi_1(u), \varphi_2(v)]$, wtedy na podstawie Lematu 4.2.1 otrzymujemy

$$uv \leq \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u))\varphi_2^{-1}(\varphi_2(v)) \leq \varphi_1^{-1}(w)\varphi_2^{-1}(w) \leq \frac{1}{C}\varphi^{-1}(w),$$

skąd, ponownie wykorzystując Lemat 4.2.1, mamy $\varphi(Cuv) \leq \varphi(\varphi^{-1}(w)) \leq w \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$. Udowodnimy zatem, że jeśli nierówność $\varphi(Cuv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ jest spełniona dla wszystkich $u, v > 0$, to $\varphi_1^{-1}(w)\varphi_2^{-1}(w) \leq \frac{2}{C}\varphi^{-1}(w)$ dla każdego $w > 0$. Rzeczywiście, dla $w > 0$ położmy $u = \varphi_1^{-1}(w)$ oraz $v = \varphi_2^{-1}(w)$. Wtedy, wykorzystując Lemat 4.2.1, dostaniemy

$$\varphi(Cuv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(w)) + \varphi_2(\varphi_2^{-1}(w)) \leq 2w.$$

Stosując jeszcze raz Lemat 4.2.1 oraz wklęsłość funkcji φ^{-1} mamy

$$Cuv \leq \varphi^{-1}(\varphi(Cuv)) \leq \varphi^{-1}(2w) \leq 2\varphi^{-1}(w),$$

co daje $\varphi_1^{-1}(w)\varphi_2^{-1}(w) \leq \frac{2}{C}\varphi^{-1}(w)$.

Rozważmy obecnie przypadki małych i dużych argumentów. W przypadku dużych argumentów równoważne są następujące warunki:

- (a) dla każdego $u_0 > 0$ istnieje $C_0 > 0$ takie, że $C_0\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u)$ dla wszystkich $u \geq u_0$,
- (b) dla każdego $u_1 > 0$ istnieje $C_1 > 0$ takie, że $\varphi(C_1uv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ dla wszystkich u, v spełniających $u_1 \leq \max\{\varphi_1(u), \varphi_2(v)\} < \infty$.

Implikacji (a) \implies (b) można dowieść analogicznie jak dla wszystkich argumentów. Wystarczy przyjąć $u_0 = u_1$, wtedy $C_1 = C_0$. Udowodnimy, że (b) \implies (a). Dla funkcji Orlicza φ zdefiniujemy

$$\alpha_\varphi = \begin{cases} \inf\{u > 0 : \varphi^{-1}(u) = b_\varphi\} = \varphi(b_\varphi) & \text{dla } \varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}, \\ \infty & \text{dla } \varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}. \end{cases}$$

Przyjmijmy ponadto

$$u_1 = \min \{u_0, \alpha_{\varphi_1}, \alpha_{\varphi_2}\}.$$

Niech $w \geq u_0$ będzie dowolne, połóżmy dalej $u = \varphi_1^{-1}(w), v = \varphi_2^{-1}(w)$. Wtedy $\varphi_1(u) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(w)) \in [u_1, \infty)$. Podobnie $\varphi_2(v) \in [u_1, \infty)$ i możemy skończyć jak wcześniej.

W przypadku małych argumentów, dla dowolnych funkcji Orlicza równoważne są warunki:

- (a) dla każdego $u_0 > 0$ istnieje $C_0 > 0$ takie, że $C_0 \varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u)$ dla wszystkich $u \leq u_0$,
- (b) dla każdego $u_1 > 0$ istnieje $C_1 > 0$ takie, że $\varphi(C_1 uv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ dla wszystkich $u, v > 0$ spełniających $\max \{\varphi_1(u), \varphi_2(v)\} \leq u_1$.

Rozważmy pytanie kiedy $xy \in E_\varphi$ dla $x \in E_{\varphi_1}$ oraz $y \in E_{\varphi_2}$, tzn. kiedy

$$E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi).$$

Twierdzenie 4.2.4. *Przypuśćmy, że E jest przestrzenią Köthe'go. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Załóżmy, że zachodzi jeden z warunków:*

- (i) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów,
- (ii) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów, gdy $L^\infty \hookrightarrow E$,
- (iii) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów, gdy $E \hookrightarrow L^\infty$.

Wtedy $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$.

Dowód. (i) Niech $x \in E_{\varphi_1}$ oraz $y \in E_{\varphi_2}$ będą dowolne i takie, że $\|x\|_{\varphi_1} = \|y\|_{\varphi_2} = 1$. Na podstawie Uwagi 4.2.3, z założenia wynika nierówność

$$I_\varphi \left(\frac{Cxy}{2} \right) \leq \frac{1}{2} I_\varphi(Cxy) \leq \frac{1}{2} [I_{\varphi_1}(x) + I_{\varphi_2}(y)] \leq 1.$$

Oznacza to, że $\|xy\|_{E_\varphi} \leq \frac{2}{C} \|x\|_{E_{\varphi_1}} \|y\|_{E_{\varphi_2}}$ dla każdego $x \in E_{\varphi_1}$ i $y \in E_{\varphi_2}$, a więc $E_{\varphi_2} \xrightarrow{2/C} M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$.

(ii) Połóżmy $u_1 = \frac{1}{\|\chi_\Omega\|_E}$. Niech $C_1 = C_1(u_1)$ będzie odpowiednią stałą z nierówności (4.33). Na podstawie Uwagi 4.2.3, z założenia wynika nierówność

$$\varphi(C_1 uv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$$

dla wszystkich $u, v > 0$, gdzie $\varphi_1(u), \varphi_2(v) < \infty$ oraz $\max \{\varphi_1(u), \varphi_2(v)\} \geq u_1$. Niech $x \in E_{\varphi_1}, y \in E_{\varphi_2}$ oraz $\|x\|_{E_{\varphi_1}} = \|y\|_{E_{\varphi_2}} = 1$. Zdefiniujmy

$$A = \{t \in \Omega : \max [\varphi_1(|x(t)|), \varphi_2(|y(t)|)] \geq u_1\}, \text{ oraz } B = \Omega \setminus A.$$

Wtedy

$$I_\varphi \left(\frac{C_1 xy}{3} \chi_A \right) \leq \frac{1}{3} [I_{\varphi_1}(x \chi_A) + I_{\varphi_2}(y \chi_A)] \leq \frac{2}{3}.$$

Skoro $I_{\varphi_1}(x) \leq 1$, to $\varphi_1(|x(t)|) < \infty$ dla μ -p.w. $t \in \Omega$ i konsekwentnie

$$|x(t)| \leq \varphi_1^{-1}(\varphi_1(|x(t)|)) \leq \varphi_1^{-1}(u_1) \text{ dla wszystkich } t \in B.$$

Analogicznie $|y(t)| \leq \varphi_2^{-1}(u_1)$. Zatem, na podstawie (4.33), dostajemy

$$I_{\varphi}(C_1xy\chi_B) \leq I_{\varphi}(C_1\varphi_1^{-1}(u_1)\varphi_2^{-1}(u_1)\chi_B) \leq \varphi(\varphi^{-1}(u_1))\|\chi_{\Omega}\|_E \leq u_1\|\chi_{\Omega}\|_E = 1.$$

Zatem

$$I_{\varphi}\left(\frac{C_1xy}{3}\right) \leq I_{\varphi}\left(\frac{C_1xy}{3}\chi_A\right) + \frac{1}{3}I_{\varphi}(C_1xy\chi_B) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

i ostatecznie $\|xy\|_{E_{\varphi}} \leq \frac{3}{C_1}$. W konsekwencji $\|xy\|_{E_{\varphi}} \leq \frac{3}{C_1}\|x\|_{E_{\varphi_1}}\|y\|_{E_{\varphi_2}}$ dla każdego $x \in E_{\varphi_1}$ oraz $y \in E_{\varphi_2}$, co oznacza, że $E_{\varphi_2} \xrightarrow{3/C_1} M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$.

(iii) Przypuśćmy, że $E \xrightarrow{A} L^{\infty}$. Postępując analogicznie jak w przypadku (i), można pokazać, że $E_{\varphi_2} \xrightarrow{2/C_1} M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$, gdzie $C_1 = C_1(A)$ jest jak w nierówności (4.34) dla $u_1 = A$, ponieważ zachodzi oszacowanie $\sup_{t \in \Omega} |\varphi_1(u(t))| \leq A$ dla każdego $u \in B(E_{\varphi_1})$ i $\sup_{t \in \Omega} |\varphi_2(u(t))| \leq A$ dla każdego $u \in B(E_{\varphi_2})$. ■

Rozważmy tym razem konieczność warunku $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla inkluzji $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$.

Twierdzenie 4.2.5. *Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Przypuśćmy, że*

$$E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}). \quad (4.36)$$

(i) *Jeśli $E_a \neq \{0\}$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.*

(ii) *Jeśli $\text{supp } E_a = \text{supp } E$ oraz $L^{\infty} \not\hookrightarrow E$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.*

Dowód. (i) Przypuśćmy, że nierówność $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ nie jest spełniona. Oznacza to, że istnieje ciąg (u_n) taki, że $u_n \nearrow \infty$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_1^{-1}(u_n)\varphi_2^{-1}(u_n) \geq 2^n\varphi^{-1}(u_n). \quad (4.37)$$

Pokażemy, że wtedy istnieje ciąg $(x_n) \subset E_{\varphi_2}$ taki, że

$$\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} \leq 1 \text{ oraz } \|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})} \rightarrow \infty,$$

co będzie oznaczało, że $E_{\varphi_2} \not\hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$.

Po pierwsze zauważmy, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy mierzalny zbiór A_n spełniający

$$\|u_n\chi_{A_n}\|_E = 1. \quad (4.38)$$

Rzeczywiście, jeśli $E_a \neq \{0\}$, to istnieje niezerowy element $0 \leq x \in E_a$, a zatem istnieje mierzalny zbiór A , o dodatniej mierze taki, że $\chi_A \in E_a$. Ponadto, dla

dostatecznie dużych n mamy $\|u_n \chi_A\|_E \geq 1$. Stosując Twierdzenie 1.1.6 wnosimy, że submiara $\omega(B) = \|\chi_B\|_E$, gdzie $B \in \Sigma, B \subset A$, posiada własność Darboux. Zatem dla każdego takiego n istnieje zbiór A_n spełniający równość (4.38). Zdefiniujmy

$$x_n = \varphi_2^{-1}(u_n) \chi_{A_n}, \quad y_n = \varphi_1^{-1}(u_n) \chi_{A_n}.$$

Wtedy

$$I_{\varphi_1}(y_n) = \|\varphi_1(\varphi_1^{-1}(u_n) \chi_{A_n})\|_E \leq \|u_n \chi_{A_n}\|_E = 1,$$

czyli $\|y_n\|_{E_{\varphi_1}} \leq 1$. Podobnie $\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} \leq 1$. Jednakże, dla dużych n , na mocy nierówności (4.37) dostajemy

$$I_{\varphi}\left(\frac{x_n y_n}{\lambda}\right) = \left\| \varphi\left(\frac{\varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n)}{\lambda}\right) \chi_{A_n} \right\|_E \geq \left\| \varphi\left(\frac{2^n \varphi^{-1}(u_n)}{\lambda}\right) \chi_{A_n} \right\|_E.$$

Stąd, jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$ oraz $\lambda \leq 2^n$, to

$$\begin{aligned} \left\| \varphi\left(\frac{2^n \varphi^{-1}(u_n)}{\lambda}\right) \chi_{A_n} \right\|_E &\geq \left\| \frac{2^n}{\lambda} \varphi(\varphi^{-1}(u_n)) \chi_{A_n} \right\|_E \\ &= \left\| \frac{2^n}{\lambda} u_n \chi_{A_n} \right\|_E = \frac{2^n}{\lambda} \geq 1. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$, to dla n tak dużych, że $\lambda < 2^n$ oraz $\varphi^{-1}(u_n) = b_{\varphi}$ otrzymamy

$$I_{\varphi}\left(\frac{x_n y_n}{\lambda}\right) \geq \left\| \varphi\left(\frac{2^n b_{\varphi}}{\lambda}\right) \chi_{A_n} \right\|_E = \infty.$$

Zatem w obu przypadkach dla dużych n mamy $\|x_n y_n\|_{E_{\varphi}} \geq 2^n$. Ostatecznie

$$\|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})} = \sup_{\|y\|_{E_{\varphi_1}} \leq 1} \|x_n y\|_{E_{\varphi}} \geq \|x_n y_n\|_{E_{\varphi}} \geq 2^n,$$

podczas gdy $\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} \leq 1$, a zatem (x_n) jest szukanym ciągiem.

(ii) Oczywiście założenie $\text{supp } E_a = \text{supp } E$ implikuje, że $E_a \neq \{0\}$. Zatem pozostaje udowodnić, że $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów. Dowód w tym przypadku przebiega tak samo, jak w przypadku (i), a jedynie konstrukcja zbiorów A_n spełniających równość (4.38), wymaga wyjaśnienia. Skoro $\text{supp } E_a = \text{supp } E$, to istnieje $x \in E_a$ taki, że $x > 0$ p.w.. Zdefiniujmy zbiory

$$B_k = \left\{ t \in \Omega : |x(t)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Oczywiście, prawie wszystkie B_k mają dodatnią miarę, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ oraz $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$. Mamy zatem $\|\chi_{B_k}\|_E \rightarrow \infty$, ponieważ $L^{\infty} \not\rightarrow E$ i E posiada własność Fatou. Ponadto, $\chi_{B_k} \in E_a$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Zatem dla każdego u_n znajdziemy $k(n)$ takie, że $\|u_n \chi_{B_{k(n)}}\|_E > 1$, a więc jak wcześniej wystarczy skorzystać Twierdzenie 1.1.6. ■

Następujący przykład wyjaśnia zasadność założeń dotyczących E_a w powyższym twierdzeniu.

Przykład 4.2.6. Niech $E = L^\infty$. Wtedy dla dowolnej, nietrywialnej funkcji Orlicza φ zachodzi równość $E_\varphi = L^\infty$. Oznacza to, że

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = M(L^\infty, L^\infty) = L^\infty = E_{\varphi_2},$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ są dowolne, zatem nie musi ich wiązać żadna zależność. Z drugiej jednak strony założenie $E_a \neq \{0\}$ w Twierdzeniu 4.2.5 nie jest konieczne. Dla $E = L_t^\infty[0, 1]$, z normą $\|x\|_E = \sup_{t \in [0, 1]} |tx(t)|$, mamy $E_a = \{0\}$, a mimo to relacja $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów jest konieczna, aby zachodziła inkluzja $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$. Aby się o tym przekonać, wystarczy postępować jak w dowodzie Twierdzenia 4.2.5(i), ponieważ funkcja $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana formułą $\eta(t) = \|\chi_{[0, t]}\|_E = t$ jest ciągła, przez co posiada własność Darboux.

Uwaga 4.2.7. Warunek $E_a \neq \{0\}$ z Twierdzenia 4.2.5(i), może być zastąpiony przez następujące słabsze założenie: istnieje $a > 0$ takie, że dla każdego $0 < t < a$ znajdziemy zbiór $A \in \Sigma$ taki, że $\|\chi_A\|_E = t$.

Rozważmy jeszcze ciągową wersję Twierdzenia 4.2.5.

Twierdzenie 4.2.8. Niech e będzie ciągową przestrzenią Köthe'go taką, że $l^\infty \not\hookrightarrow e$ oraz $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|e_i\|_e < \infty$. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Jeśli

$$e_{\varphi_2} \hookrightarrow M(e_{\varphi_1}, e_\varphi), \quad (4.39)$$

to $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

Dowód. Przypuśćmy, że relacja $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów nie zachodzi. Wtedy istnieje ciąg (u_n) taki, że $u_n \rightarrow 0$ oraz

$$\varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) \geq 2^n \varphi^{-1}(u_n), \quad (4.40)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Skoro $l^\infty \not\hookrightarrow e$ i e posiada własność Fatou, to $\|\chi_{\{1, 2, \dots, n\}}\|_e \rightarrow \infty$ gdy $n \rightarrow \infty$. Z założenia $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|e_i\|_e < \infty$ wynika, że istnieje $N > 0$ takie, że $\|u_n e_i\|_e \leq 1/2$ dla wszystkich $n > N$, $i \in \mathbb{N}$. Co więcej, dla każdego $n > N$ znajdziemy indeks k_n spełniający warunki

$$\|u_n \chi_{\{1, 2, \dots, k_n\}}\|_e \leq 1 \text{ oraz } \|u_n \chi_{\{1, 2, \dots, k_n, k_n+1\}}\|_e > 1.$$

Wtedy $1/2 \leq \|u_n \chi_{\{1, 2, \dots, k_n\}}\|_e$, ponieważ $\|u_n e_{k_n+1}\|_e \leq 1/2$. Dalej, dla $n > N$ połóżmy $A_n = \{1, 2, \dots, k_n\}$ oraz

$$x_n = \varphi_2^{-1}(u_n) \chi_{A_n}, \quad y_n = \varphi_1^{-1}(u_n) \chi_{A_n}.$$

Wtedy $\|y_n\|_{e_{\varphi_1}} \leq 1$ i $\|x_n\|_{e_{\varphi_2}} \leq 1$. Ponadto, na podstawie nierówności (4.40), mamy

$$\begin{aligned} I_\varphi \left(\frac{x_n y_n}{\lambda} \right) &= \left\| \varphi \left(\frac{\varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n)}{\lambda} \right) \chi_{A_n} \right\|_e \\ &\geq \left\| \varphi \left(\frac{2^n \varphi^{-1}(u_n)}{\lambda} \right) \chi_{A_n} \right\|_e. \end{aligned}$$

Jeśli $\lambda \leq 2^{n-1}$ oraz $u_n \leq \varphi(b_\varphi)$, to stosując Lemat 4.2.1 (vi) i (vii) otrzymujemy

$$\left\| \varphi \left(\frac{2^n \varphi^{-1}(u_n)}{\lambda} \right) \chi_{A_n} \right\|_e \geq \left\| \frac{2^n u_n}{\lambda} \chi_{A_n} \right\|_e \geq \frac{2^{n-1}}{\lambda} \geq 1,$$

dla odpowiednio dużych n , co implikuje, że $\|x_n y_n\|_{e_\varphi} \geq 2^{n-1}$. Zatem dla dużych n

$$\|x_n\|_{M(e_{\varphi_1}, e_\varphi)} = \sup_{\|y\|_{e_{\varphi_1}} \leq 1} \|x_n y\|_{e_\varphi} \geq \|x_n y_n\|_{e_\varphi} \geq 2^{n-1},$$

podczas gdy $\|x_n\|_{e_{\varphi_2}} \leq 1$, czyli inkluzja (4.39) nie zachodzi. ■

Jako wniosek z Twierdzenia 4.2.4 i 4.2.5 otrzymamy:

Wniosek 4.2.9. *Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza.*

- (i) *Jeśli $L^\infty \hookrightarrow E$ oraz $E_a \neq \{0\}$, to $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych elementów.*
- (ii) *Jeśli $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz $\text{supp} E_a = \text{supp} E$, to $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.*

Natomiast Twierdzenia 4.2.4 i 4.2.8 implikują:

Wniosek 4.2.10. *Niech e będzie ciągową przestrzenią Köthe'go taką, że $e \subsetneq l^\infty$ i $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|e_i\|_e < \infty$. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Wówczas $e_{\varphi_2} \hookrightarrow M(e_{\varphi_1}, e_\varphi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.*

W przypadku, gdy $E = L^1$, przestrzeń E_φ jest przestrzenią Orlicza L^φ i Twierdzenia 4.2.4-4.2.8 razem z równoważnością warunków (4.31) i (4.35), dają wyniki Ando [4] i O'Neil'a [93] (zob. też [86], Twierdzenia 10.2-10.4).

Zajmiemy się obecnie trudniejszą inkluzją, tj.

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}.$$

Zacniemy od lematu, który stanowi uogólnienie odpowiedniego wyniku z [87].

Lemat 4.2.11. *Jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$ i $0 \neq x \in E_\varphi$ jest funkcją prostą, to*

$$I_\varphi \left(\frac{x}{\|x\|_{E_\varphi}} \right) = 1.$$

Dowód. Niech więc $0 \neq x \in E_\varphi$ będzie funkcją prostą. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że x jest nieujemny. Wtedy element x jest postaci

$$x = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{A_k},$$

gdzie

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_N < \infty,$$

natomiast A_1, A_2, \dots, A_N są parami rozłącznymi zbiorami o mierze dodatniej i skończonej. Pokażemy, że funkcja

$$h(\lambda) = I_\varphi \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \left\| \sum_{k=1}^N \varphi \left(\frac{c_k}{\lambda} \right) \chi_{A_k} \right\|_E$$

jest ciągłą surjekcją z $(0, c_N/a_\varphi)$ na $(0, \infty)$ (jeżeli $a_\varphi = 0$, to przyjmujemy $c_N/a_\varphi = \infty$). Przypuśćmy, że $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)}$. Jeśli $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$, to

$$\begin{aligned} |h(\lambda_m) - h(\lambda_0)| &\leq \left\| \sum_{k=1}^N \left| \varphi \left(\frac{c_k}{\lambda_m} \right) - \varphi \left(\frac{c_k}{\lambda_0} \right) \right| \chi_{A_k} \right\|_E \\ &\leq \sum_{k=1}^N \left| \varphi \left(\frac{c_k}{\lambda_m} \right) - \varphi \left(\frac{c_k}{\lambda_0} \right) \right| \|\chi_{A_k}\|_E \rightarrow 0 \end{aligned}$$

gdy $m \rightarrow \infty$. Ponadto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} h(\lambda) \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi \left(\frac{c_1}{\lambda} \right) \|\chi_{A_1}\|_E = \infty.$$

Z drugiej strony, dla $\frac{c_N}{a_\varphi} > \lambda > \frac{c_{N-1}}{a_\varphi}$ mamy $h(\lambda) = \varphi \left(\frac{c_N}{\lambda} \right) \|\chi_{A_N}\|_E$, więc

$$\lim_{\lambda \rightarrow (c_N/a_\varphi)^-} h(\lambda) = 0.$$

W przypadku, gdy $a_\varphi = 0$, to dla $c > 0$ takiego, że $I_\varphi(cx) < \infty$, z wypukłości funkcji φ wynika, że

$$h(\lambda) = I_\varphi \left(\frac{x}{\lambda} \right) = I_\varphi \left(\frac{cx}{c\lambda} \right) \leq \frac{1}{c\lambda} I_\varphi(cx),$$

gdy $c\lambda > 1$. Stąd $h(\lambda) \rightarrow 0$ przy $\lambda \rightarrow \infty$. Czyli h działa w sposób ciągły z $(0, c_N/a_\varphi)$ na $(0, \infty)$. Zatem na podstawie twierdzenia Darboux istnieje liczba $\lambda_0 \in (0, c_N/a_\varphi)$ taka, że $I_\varphi \left(\frac{x}{\lambda_0} \right) = 1$. Gdyby

$$I_\varphi \left(\frac{x}{\|x\|_{E_\varphi}} \right) < 1,$$

to na podstawie ciągłości h istniałaby liczba $0 < \lambda < 1$, dla której

$$I_\varphi \left(\frac{x}{\lambda \|x\|_{E_\varphi}} \right) < 1.$$

Stąd otrzymujemy sprzeczność

$$1 = \left\| \frac{x}{\|x\|_{E_\varphi}} \right\|_{E_\varphi} \leq \lambda < 1.$$

Zatem musi być $I_\varphi(x/\|x\|_{E_\varphi}) = 1$.

Jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(2)}$ to pokażemy, że i tym razem $h : (c_N/b_\varphi, c_N/a_\varphi) \rightarrow (0, \infty)$ jest surjekcją. Rzeczywiście, ciągłości funkcji h dowodzimy jak w poprzednim przypadku. Podobnie $\lim_{\lambda \rightarrow (c_N/a_\varphi)^-} h(\lambda) = 0$. Pozostaje więc pokazać, że $\lim_{\lambda \rightarrow (c_N/b_\varphi)^+} h(\lambda) = \infty$. Mamy jednak

$$\lim_{\lambda \rightarrow (c_N/b_\varphi)^+} h(\lambda) \geq \lim_{\lambda \rightarrow (c_N/b_\varphi)^+} \varphi\left(\frac{c_N}{\lambda}\right) \|\chi_{A_N}\|_E = \infty.$$

■

Uwaga 4.2.12. W pracy [87] zostało pokazane, że jeśli funkcja φ należy do klasy $\mathcal{Y}^{(3)}$, to dla każdej $0 < \delta < 1$ istnieje funkcja Orlicza $\psi \in \mathcal{Y}^{(2)}$ taka, że

$$b_\varphi = b_\psi \text{ oraz } \psi(\delta u) \leq \varphi(u) \leq \psi(u) \quad (4.41)$$

dla wszystkich $u \geq 0$. Jeśli więc $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$, a funkcja $\psi \in \mathcal{Y}^{(2)}$ jest jak wyżej, to z definicji normy w przestrzeniach E_φ wynika, że dla każdego $x \in E_\varphi$

$$\delta \|x\|_{E_\psi} \leq \|x\|_{E_\varphi} \leq \|x\|_{E_\psi}. \quad (4.42)$$

Oczywiście $E_\varphi = E_\psi$ (zob. też. [52], Twierdzenie 2.3).

Następujący wynik stanowi uogólnienie Twierdzenia 1 w [87], z przestrzeni Orlicza na przestrzenie Calderona - Łozanowskiego, a ponadto uwzględnia przypadki nierówności $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych lub małych argumentów.

Twierdzenie 4.2.13. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Przypuśćmy, że zachodzi jeden z warunków:

- (i) $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów,
- (ii) $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów, gdy $L^\infty \hookrightarrow E$,
- (iii) $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla małych argumentów, gdy $E \hookrightarrow L^\infty$.

Wtedy

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}.$$

Dowód. (i) Niech $x \in M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ będzie funkcją prostą postaci $x = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Zauważmy na początek, że mimo iż x jest funkcją prostą, nie musi należeć do E . Jeśli więc $\chi_{A_i} \notin E$ dla pewnego i , to wybieramy ciąg zbiorów wstępujących $(A_i^k)_{k=1}^\infty$ takich, że $\mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_i^k) = 0$ oraz $\chi_{A_i^k} \in E$ dla każdego k (takie zbiory istnieją, ponieważ E zawiera słabą jedynekę, jako przestrzeń Köthe'go). Rozważmy więc element $x_k = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i^k}$, zamiast x , gdzie $A_i^k = A_i$ dla każdego k , jeśli $\chi_{A_i} \in E$. Wtedy $x_k \in E$, a zatem też $x_k \in E_{\varphi_2}$ dla każdego k . Przypuśćmy ponadto, że $\varphi, \varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$. Zdefiniujmy

$$y_k(t) = \varphi_2\left(\frac{|x_k(t)|}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}}\right)$$

oraz

$$z_k(t) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(y_k(t)) & \text{gdy } 0 < y_k(t) < \infty, \\ 0 & \text{gdy } y_k(t) = 0. \end{cases}$$

Wtedy z Lematu 4.2.1 (i) wynika, że $\varphi_1(z_k(t)) \leq y_k(t)$ $\mu - p.w.$. Zatem

$$I_{\varphi_1}(z_k) \leq I_{\varphi_2} \left(\frac{x_k}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \leq 1,$$

to znaczy $\|z_k\|_{E_{\varphi_1}} \leq 1$. Przypomnijmy, iż założenie twierdzenia oznacza, że istnieje stała $D > 0$, dla której prawdziwa jest nierówność

$$\varphi^{-1}(u) \leq D\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \text{ dla } u \geq 0. \quad (4.43)$$

Zatem, gdy $y_k(t) > 0$, to Lemat 4.2.1 (iii) oraz nierówność (4.43) implikują

$$z_k(t) \frac{|x_k(t)|}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} = \varphi_1^{-1}(y_k(t))\varphi_2^{-1}(y_k(t)) \geq \frac{1}{D}\varphi^{-1}(y_k(t)),$$

co w świetle Lematu 4.2.1 (vi) oznacza, że

$$\varphi \left(Dz_k(t) \frac{|x_k(t)|}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \geq \varphi(\varphi^{-1}(y_k(t))) = y_k(t).$$

Jeśli natomiast $y_k(t) = 0$, to też $\varphi \left(Dz_k(t) \frac{|x_k(t)|}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right) = 0$, więc Lemat 4.2.11 implikuje, że

$$I_{\varphi} \left(Dz_k \frac{x_k}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \geq I_{\varphi_2} \left(\frac{x_k}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right) = 1,$$

tzn.

$$\|z_k x_k\|_{E_{\varphi}} \geq \frac{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}}{D}.$$

W konsekwencji

$$\|x_k\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})} \geq \frac{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}}{D}.$$

Ponieważ przestrzeń E_{φ_2} posiada własność Fatou, $|x_k(t)| \nearrow |x(t)|$ $\mu - p.w.$ oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}}{D} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})} \leq \|x\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})}, \quad (4.44)$$

to $x \in E_{\varphi_2}$ i

$$\|x\|_{E_{\varphi_2}} \leq D \|x\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})}. \quad (4.45)$$

Niech na koniec $x \in M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ będzie dowolny. Wtedy znajdziemy ciąg funkcji prostych $(x_n) \subset M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ taki, że $x_n(t) \nearrow |x(t)|$ $\mu - p.w.$. Wówczas, na mocy poprzedniej części dowodu $(x_n) \subset E_{\varphi_2}$ oraz

$$\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} \leq D \|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $E_{\varphi_2} \in (FP)$ i $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \in (FP)$, to $x \in E_{\varphi_2}$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{E_{\varphi_2}} = \|x\|_{E_{\varphi_2}} \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})} = \|x\|_{M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})}.$$

Zatem x spełnia też nierówność (4.45).

Jeśli natomiast $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$ lub $\varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(3)}$, to wykorzystując Uwagę 4.2.12 możemy postąpić analogicznie, jak w Twierdzeniu 1 w [87]. Przypuśćmy bowiem, że $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$ i $\varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(3)}$ (jeśli tylko jedna z funkcji należy do klasy $\mathcal{Y}^{(3)}$, to dowód jest analogiczny). Wtedy, na podstawie Uwagi 4.2.12, dla każdej $0 < \delta < 1$ znajdziemy funkcje $\psi, \psi_2 \in \mathcal{Y}^{(2)}$ takie, że

$$\psi(\delta u) \leq \varphi(u) \leq \psi(u) \quad \text{oraz} \quad \psi_2(\delta u) \leq \varphi_2(u) \leq \psi_2(u).$$

Jeśli więc

$$\varphi^{-1}(u) \leq D\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u),$$

to też

$$\psi^{-1}(u) \leq \frac{D}{\delta}\varphi_1^{-1}(u)\psi_2^{-1}(u),$$

dla wszystkich $u > 0$ (zob. dowód Twierdzenia 1 w [87]). Stąd, na podstawie poprzedniej części dowodu mamy

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\psi}) \xrightarrow{D/\delta} E_{\psi_2}.$$

Wtedy z (4.42) oraz ogólnej własności (II) wynika, że

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \xrightarrow{1/\delta} M(E_{\varphi_1}, E_{\psi}) \xrightarrow{D/\delta} E_{\psi_2} \xrightarrow{1} E_{\varphi_2}.$$

Czyli

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \xrightarrow{D/\delta^2} E_{\varphi_2},$$

co ze względu na dowolność $0 < \delta < 1$ oznacza, że $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \xrightarrow{D} E_{\varphi_2}$.

(ii) Przypuśćmy, że $L^\infty \hookrightarrow E$. Weźmy $\alpha > a_{\varphi_2}$ spełniające

$$\varphi_2(\alpha)\|\chi_\Omega\|_E < \frac{1}{2}.$$

Stosując Lemat 4.2.2 znajdziemy stałą $D_1 \geq D$ taką, że

$$\varphi^{-1}(u) \leq D_1\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \quad \text{dla każdego } u \geq \varphi_2(\alpha).$$

Zauważmy, że dla dowolnego $z \in L^0$, jeśli $I_{\varphi_2}(z) = 1$, to

$$I_{\varphi_2}(z\chi_B) \geq 1/2, \tag{4.46}$$

gdzie $B = \{t \in \text{supp}(z) : |z(t)| \geq \alpha\}$. Rzeczywiście, w przeciwnym razie byłoby

$$1 = I_{\varphi_2}(z) \leq I_{\varphi_2}(z\chi_B) + I_{\varphi_2}(z\chi_{\Omega \setminus B}) < \frac{1}{2} + \varphi_2(\alpha)\|\chi_\Omega\|_E < 1,$$

co dałoby sprzeczność.

Przypuśćmy obecnie, że $\varphi, \varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$. Niech $x \in M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ będzie funkcją

prostą. Wtedy $x \in E_{\varphi_2}$, ponieważ $\varphi_2(\lambda|x|)$ dla każdego $\lambda > 0$ też jest funkcją prostą i $L^\infty \hookrightarrow E$. Zatem dla

$$y(t) = \varphi_2 \left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \right)$$

mamy $y(t) < \infty$ dla μ -p.w. $t \in \Omega$. Zdefiniujmy

$$z(t) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(y(t)) & \text{gdy } 0 < y(t) < \infty, \\ 0 & \text{gdy } y(t) = 0. \end{cases}$$

Wtedy warunek

$$I_{\varphi_1}(z) \leq I_{\varphi_2} \left(\frac{x}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \leq 1$$

implikuje, że $\|z\|_{E_{\varphi_1}} \leq 1$ i z założenia $x \in M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ dostajemy $zx \in E_\varphi$. Oznaczmy

$$A = \{t \in \text{supp}(y) : \frac{|x(t)|}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} < \alpha\} \text{ oraz } B = \{t \in \text{supp}(y) : \frac{|x(t)|}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \geq \alpha\}.$$

Zatem dla μ -p.w. $t \in B$,

$$z(t) \frac{|x(t)|}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} = \varphi_1^{-1}(y(t))\varphi_2^{-1}(y(t)) \geq \frac{1}{D_1}\varphi^{-1}(y(t)).$$

Stąd

$$\varphi \left(D_1 z(t) \frac{2|x(t)|}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \geq \varphi(2\varphi^{-1}(y(t))) \geq 2\varphi(\varphi^{-1}(y(t))) = 2y(t),$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że $\varphi \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$. Z Lematu 4.2.11 wiemy, że $I_{\varphi_2} \left(\frac{x}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \right) = 1$ i w rezultacie, przez nierówność (4.46),

$$I_\varphi \left(D_1 z \frac{2x}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \chi_B \right) \geq 2I_{\varphi_2} \left(\frac{x}{\|x\|_{E_{\varphi_2}}} \chi_B \right) \geq 1.$$

Zatem $\|zx\|_{E_\varphi} \geq \frac{1}{2D_1}\|x\|_{E_{\varphi_2}}$ oraz $\|x\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)} \geq \frac{1}{2D_1}\|x\|_{E_{\varphi_2}}$. Ponieważ przestrzenie E_{φ_2} oraz $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ posiadają własność Fatou, możemy zakończyć dowód jak w poprzednim przypadku.

Jeśli $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$ lub $\varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(3)}$, to ponownie wykorzystując Uwagę 4.2.12 i postępując jak w dowodzie punktu (i) (zob. też Twierdzenie 1 w [87]), można pokazać, że $\|x\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)} \geq \frac{1}{2D_1}\|x\|_{E_{\varphi_2}}$.

(iii) Niech $E \xrightarrow{A} L^\infty$. Wtedy definiując elementy $y_k(t) = \varphi_2 \left(\frac{|x_k(t)|}{\|x_k\|_{E_{\varphi_2}}} \right)$, gdzie x_k są jak w punkcie (i) mamy

$$\text{supess}_{t \in \Omega} |y_k(t)| \leq A.$$

Z drugiej strony, na podstawie Lematu 4.2.2 istnieje stała D_2 taka, że

$$\varphi^{-1}(u) \leq D_2\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \text{ dla każdego } 0 < u \leq A.$$

Zatem dowód można dokończyć dokładnie tak samo, jak w punkcie (i). ■

Aby zbadać, kiedy relacja $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ jest konieczna dla zawierania

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \hookrightarrow E_{\varphi_2},$$

ograniczmy się do przestrzeni symetrycznych nad I . Wtedy E_{φ} jest też przestrzenią symetryczną z funkcją fundamentalną $f_{E_{\varphi}}$ daną wzorem

$$f_{E_{\varphi}}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))} \quad \text{dla } t \in (0, m(I)). \quad (4.47)$$

Rzeczywiście, na podstawie Lematu 4.2.1 (vii) mamy

$$\begin{aligned} I_{\varphi}(\varphi^{-1}(1/f_E(t))\chi_{[0,t]}) &= \left\| \varphi(\varphi^{-1}(1/f_E(t)))\chi_{[0,t]} \right\|_E = \\ &= \frac{1}{f_E(t)} \left\| \chi_{[0,t]} \right\|_E = 1, \end{aligned}$$

poza przypadkiem, gdy $\varphi \in \mathcal{Y}^{(3)}$ i $1/f_E(t) > \inf \{u > 0 : \varphi^{-1}(u) = b_{\varphi}\} = \varphi(b_{\varphi})$, w którym mamy tylko nierówność $I_{\varphi}(\varphi^{-1}(1/f_E(t))\chi_{[0,t]}) < 1$. Pozostaje więc omówić tylko ten przypadek. Niech $0 < \lambda < 1/\varphi^{-1}(1/f_E(t))$ będzie dowolna. Wtedy

$$b_{\varphi} = \varphi^{-1}(1/f_E(t)) < \frac{1}{\lambda}.$$

Zatem $\varphi(1/\lambda) = \infty$ oraz $I_{\varphi}(\frac{1}{\lambda}\chi_{[0,t]}) > 1$, co ze względu na dowolność λ oznacza, że zachodzi równość (4.47).

Twierdzenie 4.2.14. *Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Köthe'go na I oraz niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą funkcjami Orlicza. Przypuśćmy, że*

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \hookrightarrow E_{\varphi_2}.$$

- (i) *Jeśli istnieją liczby $a, b > 0$ takie, że $\frac{f_{E_{\varphi}}(t)}{f_{E_{\varphi_1}}(t)^a} = \frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))^{1/a}}$ jest funkcją niemalejącą na przedziale $(0, b)$ oraz $E_a \neq \{0\}$, to $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów.*
- (ii) *Jeśli $b_{\varphi} = \infty$, istnieje liczba $a > 0$ taka, że $\frac{f_{E_{\varphi}}(t)}{f_{E_{\varphi_1}}(t)^a} = \frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))^{1/a}}$ jest funkcją niemalejącą na przedziale $(0, \infty)$, $L^{\infty} \not\hookrightarrow E$ oraz $\text{supp } E_a = \text{supp } E$, to $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów.*

Dowód. (i) Przypuśćmy, że założenia są spełnione oraz warunek $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów nie zachodzi, tzn. istnieje ciąg (u_n) zmierzający do nieskończoności i taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$2^n \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) \leq \varphi^{-1}(u_n).$$

Wystarczy więc znaleźć ciąg (x_n) zawarty w $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$, jak i w E_{φ_2} oraz taki, że

$$\frac{\|x_n\|_{E_{\varphi_2}}}{\|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)}} \rightarrow \infty.$$

Ponieważ $E_a \neq \{0\}$, to tłumacząc jak w dowodzie Twierdzenia 4.2.5(i), dla dużych n , znajdziemy zbiory A_n takie, że

$$u_n \|\chi_{A_n}\|_E = 1. \quad (4.48)$$

Zatem odrzucając początkowe wyrazy ciągu (u_n) , możemy przyjąć, że (4.48) zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy

$$x_n = \varphi_2^{-1}(u_n)\chi_{A_n}.$$

Wtedy $\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} = 1$. Rzeczywiście, jeśli $\varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$ to

$$I_{\varphi_2}(x_n) = \|\varphi_2(\varphi_2^{-1}(u_n))\chi_{A_n}\|_E = u_n \|\chi_{A_n}\|_E = 1.$$

Jeśli natomiast $\varphi_2 \in \mathcal{Y}^{(3)}$ to istnieje N_0 takie, że $\varphi_2^{-1}(u_n) = b_{\varphi_2}$ dla $n \geq N_0$, zatem $I_{\varphi_2}(x_n) \leq 1$ oraz $I_{\varphi_2}(x_n/\lambda) = \infty$ dla $0 < \lambda < 1$. To znaczy, że $\|x_n\|_{E_{\varphi_2}} = 1$ dla odpowiednio dużych n . Podstawiając $t_n = m(A_n)$ i korzystając z symetrii przestrzeni E otrzymujemy

$$f_E(t_n) = \|\chi_{[0, t_n]}\|_E = \|\chi_{A_n}\|_E = \frac{1}{u_n} \rightarrow 0$$

gdy $n \rightarrow \infty$, a zatem też $t_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Konsekwentnie, stosując Twierdzenie 4.1.6(iii) dla $t_n \in (0, b)$, dostaniemy

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)} &= \varphi_2^{-1}(u_n) \|\chi_{A_n}\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)} = \varphi_2^{-1}(u_n) f_{M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)}(t_n) \\ &\leq \frac{2}{a} \varphi_2^{-1}(u_n) \frac{f_{E_\varphi}(t_n)}{f_{E_{\varphi_1}}(t_n)} \leq \frac{2\varphi_2^{-1}(u_n)}{a 2^n \varphi_1^{-1}(u_n)} \frac{f_{E_\varphi}(t_n)}{f_{E_{\varphi_1}}(t_n)} \\ &= \frac{1}{a 2^{n-1}} \frac{\varphi_1^{-1}(u_n)}{\varphi_1^{-1}(u_n)} \frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t_n))}{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t_n))} = \frac{1}{a 2^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ przy } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

(ii) Analogicznie jak wyżej i w Twierdzeniu 4.2.5 (ii). ■

Z Twierdzeń 4.2.14 i 4.2.13 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.2.15. Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Köthe'go oraz niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą funkcjami Orlicza.

- (i) Jeśli $L^\infty \hookrightarrow E, E_a \neq \{0\}$ oraz istnieją liczby $a, b > 0$ takie, że $\frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))t^a}$ jest niemalejącą funkcją zmienną t na przedziale $(0, b)$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów.
- (ii) Jeśli $b_\varphi = \infty, L^\infty \not\hookrightarrow E, \text{supp}E_a = \text{supp}E = I$ oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $\frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))t^a}$ jest niemalejącą funkcją zmienną t na przedziale $(0, \infty)$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

Jeśli we Wniosku 4.2.15 przyjmiemy $E = L^1$, to otrzymamy odpowiedź na pytanie postawione w książce [86] (Problem 4, str. 77) dla przestrzeni Orlicza.

(i) Gdy $I = [0, 1]$ oraz dla pewnych $a, u_0 > 0$ funkcja $\frac{\varphi_1^{-1}(u)u^a}{\varphi^{-1}(u)}$ jest nierosnąca ze względu na $u > u_0$, to $M(L^{\varphi_1}, L^\varphi) \hookrightarrow L^{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów.

(ii) Gdy $I = [0, \infty)$ oraz dla pewnego $a > 0$ funkcja $\frac{\varphi_1^{-1}(u)u^a}{\varphi^{-1}(u)}$ jest nierosnąca ze względu na $u > 0$, to $M(L^{\varphi_1}, L^\varphi) \hookrightarrow L^{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

Obecnie połączmy poprzednie wyniki tego rozdziału, aby stwierdzić, kiedy

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}.$$

Z Twierdzeń 4.2.4 i 4.2.13 wprost wynika:

Wniosek 4.2.16. *Niech E będzie przestrzenią Köthe'go. Niech ponadto φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza. Przypuśćmy, że zachodzi jeden z poniższych warunków:*

- (i) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów,
- (ii) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów, gdy $L^\infty \hookrightarrow E$,
- (iii) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla małych argumentów, gdy $E \hookrightarrow L^\infty$.

Wtedy $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$.

Podobnie, z Wniosków 4.2.9 i 4.2.15 otrzymujemy.

Wniosek 4.2.17. *Niech E będzie symetryczną funkcyjną przestrzenią Köthe'go oraz niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą funkcjami Orlicza.*

- (i) *Gdy $L^\infty \hookrightarrow E, E_a \neq \{0\}$ oraz istnieją liczby $a, b > 0$ takie, że $\frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))t^a}$ jest niemalejącą funkcją zmiennej t na przedziale $(0, b)$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \approx \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów.*
- (ii) *Gdy, $b_\varphi = \infty, L^\infty \not\hookrightarrow E, \text{supp}E_a = \text{supp}E = I$ oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $\frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\varphi^{-1}(1/f_E(t))t^a}$ jest niemalejącą funkcją zmiennej t na przedziale $(0, \infty)$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1} \approx \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla wszystkich argumentów.*

Zastanówmy się obecnie, czy dla dwóch funkcji Orlicza φ, φ_1 zawsze istnieje funkcja φ_2 spełniająca relację $\varphi^{-1} \approx \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$. Jeśli tak, to pozostaje jeszcze pytanie, czy istnieje formuła, przy pomocy której możemy taką funkcję skonstruować?

Odpowiedź na pierwsze z pytań w ogólności jest negatywna. Poniższy przykład pokazuje nie tylko, że taka funkcja nie musi istnieć, ale nawet, że przestrzeń $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ nie musi być typu E_ψ .

Przykład 4.2.18. *Przyjmijmy $\varphi(u) = u^2, \varphi_1(u) = u$ oraz $E = L_t^\infty[0, 1]$ z normą $\|x\|_E = \text{supess}_{t \in [0, 1]} |tx(t)|$. Równoważność $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ w tym przypadku oznacza, że $u\varphi_2^{-1}(u) \approx \sqrt{u}$, tzn. $\varphi_2^{-1}(u) \approx 1/\sqrt{u}$, co nie jest możliwe dla żadnej funkcji*

Orlicza φ_2 . Ponadto $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ nie jest przestrzenią Calderóna - Łozanowskiego postaci E_{φ_3} dla żadnej funkcji Orlicza φ_3 . Zauważmy najpierw, że $E_{\varphi} = L_{\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1]$, tzn. $E_{\varphi} = E^{(2)}$, gdzie $E^{(2)}$ jest 2 - wypukleniem przestrzeni E oraz

$$\|x\|_{E_{\varphi}} = \sqrt{\sup_{t \in [0,1]} t |x(t)|^2} = \sup_{t \in [0,1]} \sqrt{t} |x(t)| = \|x\|_{L_{\sqrt{t}}^{\infty}}.$$

Ponadto,

$$M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \equiv M(L_t^{\infty}[0, 1], L_{\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1]) \equiv L_{1/\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1].$$

Aby uzasadnić ostatnią równość, weźmy $x \in B(L_{1/\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1])$. Wtedy $|x(t)| \leq \sqrt{t}$ dla prawie wszystkich $t \in [0, 1]$. Ponadto, dla każdego $y \in B(L_t^{\infty}[0, 1])$, mamy $|y(t)| \leq 1/t$ prawie wszędzie, więc

$$|x(t)y(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

co oznacza, że $\|xy\|_{L_{\sqrt{t}}^{\infty}} \leq 1$, czyli ze względu na dowolność y wnosimy, że

$$\|x\|_{M(L_t^{\infty}[0,1], L_{\sqrt{t}}^{\infty}[0,1])} \leq 1.$$

Jeśli natomiast $x \in B(M(L_t^{\infty}[0, 1], L_{\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1]))$, to w szczególności dla $y(t) = 1/t \in B(L_t^{\infty}[0, 1])$, mamy $\sqrt{t}|x(t)y(t)| = \sqrt{t}|x(t)| \frac{1}{t} \leq 1$, czyli $|x(t)| \leq \sqrt{t}$ dla prawie wszystkich t , więc $\|x\|_{L_{1/\sqrt{t}}^{\infty}[0,1]} \leq 1$.

Wystarczy zauważyć, że przestrzeń $L_{1/\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1]$ nie jest przestrzenią typu E_{φ_3} , ponieważ dla dowolnej funkcji Orlicza φ_3 , $\chi_{[0,1]} \in E_{\varphi_3}$ oraz $\|\chi_{[0,1]}\|_{E_{\varphi_3}} = 1/\varphi_3^{-1}(1)$, jednak $\chi_{[0,1]} \notin L_{1/\sqrt{t}}^{\infty}[0, 1]$.

Pokazaliśmy wcześniej, że nierówność $\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u)$ dla $u > 0$ jest równoważna uogólnionej nierówności Younga $\varphi(uv) \leq \varphi_1(v) + \varphi_2(u)$ dla $u, v > 0$. Z drugiej strony wiadomo, że w teorii przestrzeni Orlicza klasyczna nierówność Younga (t.j. gdy $\varphi(u) = u$) jest kluczem do konstrukcji funkcji dopełniającej w sensie Younga, która definiuje przestrzeń Orlicza dualną w sensie Köthe'go do danej przestrzeni Orlicza. Nie inaczej możemy postąpić w przypadku ogólnym, tzn. mając dane dwie funkcje Orlicza φ_1, φ znajdziemy nową funkcję Orlicza φ_2 , w taki sposób, aby uogólniona nierówność Younga pozostała prawdziwa, ale jednocześnie aby funkcja φ_2 była wybrana w sposób optymalny, tzn. była wypukła, ale jak najmniejsza. Mianowicie, definiujemy konstrukcję $\varphi \ominus \varphi_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ wzorem

$$(\varphi \ominus \varphi_1)(u) = \sup_{v \geq 0} [\varphi(uv) - \varphi_1(v)]. \quad (4.49)$$

Powiemy wtedy przez analogię, że funkcja $\varphi \ominus \varphi_1$ jest **funkcją dopełniającą (w sensie Younga) do φ_1 względem φ** . Jak pisaliśmy, w szczególnym przypadku, gdy $\varphi(u) = u$, to $\varphi \ominus \varphi_1 = \varphi_1^*$ jest funkcją dopełniającą do φ_1 . Operacja taka dla klasy \mathcal{N} -funkcji została prawdopodobnie pierwszy raz zdefiniowana przez Ando w [4], a na szerszą klasę funkcji Orlicza została rozszerzona przez O'Neil'a w [93].

Aby uniknąć sytuacji, gdy w definicji (4.49) pojawia się nieoznaczoność typu $\infty - \infty$, będziemy dalej pomijali przypadek, gdy $\max\{b_{\varphi}, b_{\varphi_1}\} < \infty$. Z drugiej

strony zauważmy, że może się zdarzyć, iż $\varphi_2(u) = (\varphi \ominus \varphi_1)(u) = \infty$ dla wszystkich $u > 0$ (np. gdy $\varphi_1(t) = t$, a $\varphi(t) = t^2$ lub gdy $b_\varphi < \infty$ i $b_{\varphi_1} = \infty$, zob. też Przykład 4.2.19 poniżej). Dopuścimy ten przypadek, rozumiejąc, że wtedy $E_{\varphi_2} = \{0\}$.

Odnotujmy jeszcze, że w przypadku ciągowym (lub $E \hookrightarrow L^\infty$) można definiować $\varphi \ominus \varphi_1$ w inny sposób, tzn.

$$(\varphi \ominus \varphi_1)_0(u) = \sup_{0 \leq v \leq 1} [\varphi(uv) - \varphi_1(v)],$$

ponieważ w takim przypadku istotne jest tylko zachowanie się funkcji w okolicach zera. Djakov i Ramanujan w [30] udowodnili, że w przypadku ciągowych przestrzeni Orlicza zachodzi równość $M(l^{\varphi_1}, l^\varphi) = l^{\varphi_2}$, gdzie $\varphi_2 = (\varphi \ominus \varphi_1)_0$. Z definicji wprost wynika, że funkcja $(\varphi \ominus \varphi_1)_0$ jest nie większa niż $\varphi \ominus \varphi_1$.

Przykład 4.2.19. Niech $p, q \geq 1$,

$$\varphi(u) = u^p \text{ oraz } \varphi_1(u) = u^q.$$

Biorąc $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ otrzymujemy

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u = 0, \\ \infty & \text{dla } u > 0, \end{cases} \text{ gdy } p > q, \quad (4.50)$$

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \geq u \geq 0, \\ \infty & \text{dla } u > 1, \end{cases} \text{ gdy } p = q, \quad (4.51)$$

$$\varphi_2(u) = \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{p}{q-p}} - \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{q}{q-p}} \right) u^{\frac{pq}{q-p}} \text{ gdy } p < q. \quad (4.52)$$

Aby pokazać wzór (4.50) wystarczy zauważyć, że dla $u > 0$

$$\varphi_2(u) = \sup_{v \geq 0} (u^p v^p - v^q) \geq \lim_{v \rightarrow \infty} v^q (u^p v^{p-q} - 1) = \infty.$$

W przypadku $p = q$, dla $1 \geq u \geq 0$ mamy

$$u^p v^p - v^p = v^p (u^p - 1) \leq 0 \text{ dla każdego } v \geq 0,$$

więc $\varphi_2(u) = 0$. Jeśli natomiast $u \geq 1$, to jak wcześniej

$$\varphi_2(u) \geq \lim_{v \rightarrow \infty} v^q (u^p - 1) = \infty.$$

Wzór w punkcie (4.52) wynika natomiast z faktu, że dla każdego $u > 0$ supremum funkcji $u^p v^p - v^q$ jest osiągnięte w punkcie $v = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{p}{q-p}} u^{\frac{p}{q-p}}$. Mniej elementarne przykłady pokazujące jak wygląda funkcja $\varphi \ominus \varphi_1$ można znaleźć w pracach [14] i [62].

Niektóre własności konstrukcji $\varphi \ominus \varphi_1$ zostały zabrane w lemacie poniżej. Część (iii) została udowodniona w [110, Twierdzenie 3] przy pewnych dodatkowych założeniach (zob. też [86] i [88]).

Lemat 4.2.20. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Orlicza spełniającymi warunek $\max\{b_\varphi, b_{\varphi_1}\} = \infty$. Wtedy funkcja $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ posiada następujące własności:

- (i) Funkcja φ_2 jest niemalejąca, wypukła, lewostronnie ciągła na $[0, \infty)$ oraz $\varphi_2(0) = 0$.
- (ii) Zachodzi nierówność $\varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u) \leq 2 \varphi^{-1}(u)$ dla wszystkich $u \geq 0$.
- (iii) Jeśli $b_\varphi = b_{\varphi_1} = \infty$ oraz dla każdego $v > 0$ funkcja $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(uv)}$ jest równoważna funkcji niemalejącej, to $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

Założenie, że funkcja $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(uv)}$ jest równoważna funkcji niemalejącej oznacza, że istnieje $K > 1$ takie, że dla każdego $v > 0$ istnieje niemalejąca funkcja ψ_v spełniająca oszacowania $\frac{1}{K} \psi_v(u) \leq \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(uv)} \leq K \psi_v(u)$ dla wszystkich $u > 0$.

Dowód. (i) Oczywiście, $\varphi_2(0) = 0$ oraz φ_2 jest niemalejąca, ponieważ φ jest taka. Z tego samego powodu φ_2 jest wypukła. Istotnie,

$$\begin{aligned} \varphi_2\left(\frac{u+s}{2}\right) &= \sup_{v>0} \left\{ \varphi\left(\frac{uv+sv}{2}\right) - \varphi_1(v) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{v>0} \{ \varphi(uv) + \varphi(sv) - 2\varphi_1(v) \} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sup_{v>0} \{ \varphi(uv) - \varphi_1(v) \} + \sup_{v>0} \{ \varphi(sv) - \varphi_1(v) \} \right) = \frac{\varphi_2(u) + \varphi_2(s)}{2}, \end{aligned}$$

dla $u, s > 0$. Pozostaje wykazać, że φ_2 jest lewostronnie ciągła dla $u_0 > 0$. Rozważmy dwa przypadki.

1⁰. Niech $0 < \varphi_2(u_0) < \infty$. Przypuśćmy nie wprost, że φ_2 nie jest lewostronnie ciągła w punkcie u_0 . Wtedy znajdziemy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$\varphi_2(u) \leq \varphi_2(u_0) - \delta, \quad (4.53)$$

dla wszystkich $u < u_0$, ponieważ φ_2 jest niemalejąca. Z definicji φ_2 wynika, że istnieje $v > 0$ takie, że

$$\varphi_2(u_0) \leq \varphi(u_0v) - \varphi_1(v) + \frac{\delta}{3}.$$

Ponadto, z lewostronnej ciągłości φ wnosimy, że istnieje $t < u_0$ takie, że

$$0 \leq \varphi(u_0v) - \varphi(tv) \leq \frac{\delta}{3}.$$

Zatem

$$\varphi_2(t) \geq \varphi(tv) - \varphi_1(v) \geq \varphi(u_0v) - \varphi_1(v) - \frac{\delta}{3} \geq \varphi_2(u_0) - \frac{2\delta}{3},$$

co przeczy (4.53).

2⁰. Niech $\varphi_2(u_0) = \infty$. Przypuśćmy ponownie, że φ_2 nie jest lewostronnie ciągła w punkcie u_0 . Znajdziemy liczbę $M > 0$ taką, że $\varphi_2(u) \leq M$ dla wszystkich $u < u_0$, ponieważ φ_2 nie maleje. Na mocy definicji φ_2 , istnieje $v > 0$ takie, że $\varphi(u_0v) -$

$\varphi_1(v) \geq 3M$. Ponadto, korzystając z lewostronnej ciągłości funkcji φ , wnosimy, że istnieje $t < u_0$ takie, że $\varphi(tv) = \infty$ w przypadku, gdy $u_0v > b_\varphi$, lub $\varphi(tv) \geq \varphi(u_0v) - M$, gdy $u_0v \leq b_\varphi$. Zatem, gdy $u_0v \leq b_\varphi$, otrzymujemy

$$\varphi_2(t) \geq \varphi(tv) - \varphi_1(v) \geq \varphi(u_0v) - \varphi_1(v) - M \geq 2M,$$

natomiast, gdy $u_0v > b_\varphi$, to

$$\varphi_2(t) \geq \varphi(tv) - \varphi_1(v) = \infty,$$

co daje sprzeczność z nierównością $\varphi_2(u) \leq M$, gdy $u < u_0$.

(ii) Z definicji φ_2 mamy $\varphi(uv) \leq \varphi_1(v) + \varphi_2(u)$ dla wszystkich $u, v > 0$, zatem ten wynik wypływa z Uwagi 4.2.3.

(iii) Niech $u > 0$ będzie ustalone i założmy, że $v > \varphi_1^{-1}(u)$. Wtedy, dla $w = \frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$, z monotoniczności funkcji ψ_w oraz Lematu 4.2.1 mamy

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(v)}{\varphi(vw)} &\geq \frac{1}{K} \psi_w(v) \geq \frac{1}{K} \psi_w(\varphi_1^{-1}(u)) \geq \frac{1}{K^2} \frac{\varphi_1(\varphi_1^{-1}(u))}{\varphi(\varphi_1^{-1}(u)w)} \\ &= \frac{1}{K^2} \frac{u}{\varphi(\varphi^{-1}(u))} = \frac{1}{K^2}, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\varphi(vw) \leq K^2\varphi_1(v)$. Dla $v \leq \varphi_1^{-1}(u)$, z monotoniczności funkcji φ , otrzymujemy

$$\varphi(vw) \leq \varphi(\varphi_1^{-1}(u)w) = \varphi(\varphi^{-1}(u)) = u.$$

Konsekwentnie, przez wypukłość φ_1 , dla każdego $v > 0$ mamy

$$\varphi(vw) \leq K^2\varphi_1(v) + u \leq \varphi_1(K^2v) + u,$$

a zatem

$$\begin{aligned} \varphi_2\left(\frac{w}{K^2}\right) &= \sup_{v>0} \left\{ \varphi\left(\frac{w}{K^2}v\right) - \varphi_1(v) \right\} = \\ &= \sup_{v>0} \left\{ \varphi(wv) - \varphi_1(K^2v) \right\} \leq u, \end{aligned}$$

tzn.

$$\varphi_2\left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{K^2\varphi_1^{-1}(u)}\right) \leq u.$$

Ostatecznie, powyższa nierówność wraz z Lematem 4.2.1 implikuje, że

$$\varphi^{-1}(u) \leq K^2\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u)$$

dla wszystkich $u > 0$, co w połączeniu z punktem (ii) daje tezę. ■

Dzięki powyższemu lematowi możemy zmienić założenie w Twierdzeniu 4.2.14.

Twierdzenie 4.2.21. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go taką, że $L^\infty \hookrightarrow E$, $E_a \neq \{0\}$ oraz niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą funkcjami Orlicza. Przypuśćmy, że

$$M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \hookrightarrow E_{\varphi_2}.$$

Jeśli dla każdego $v > 0$ funkcja $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(uv)}$ jest równoważna niemalejącej funkcji (w sensie Lematu 4.2.20 (iii)) zmiennej $u > 0$, to $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów.

Dowód. Z Lematu 4.2.20 (iii) wnosimy, że funkcja $\varphi_3 = \varphi \ominus \varphi_1$ spełnia $\varphi_1^{-1}\varphi_3^{-1} \approx \varphi^{-1}$. Zatem, zgodnie z Wnioskiem 4.2.16, mamy

$$E_{\varphi_3} = M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) \hookrightarrow E_{\varphi_2}.$$

Wiadomo ponadto (zob. [52], Twierdzenie 2.4), że jeśli $E_a \neq \{0\}$ i $E_{\varphi_3} \hookrightarrow E_{\varphi_2}$ to istnieje stała $k > 0$ taka, że $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(ku)}{\varphi_3(u)} < \infty$. Zatem $\varphi_2(ku) \leq C \varphi_3(u)$ dla pewnego $C > 1$ i dużych u . Konsekwentnie, na mocy Lematu 4.2.1, dla $u = \varphi_3^{-1}(v)$ dostaniemy

$$\varphi_2(k\varphi_3^{-1}(v)) \leq C \varphi_3(\varphi_3^{-1}(v)) \leq Cv$$

oraz

$$k\varphi_3^{-1}(v) \leq \varphi_2^{-1}(\varphi_2(k\varphi_3^{-1}(v))) \leq \varphi_2^{-1}(Cv) \leq C\varphi_2^{-1}(v) \text{ dla dużych } v.$$

Ostatecznie więc $\varphi^{-1} \approx \varphi_1^{-1}\varphi_3^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów, co kończy dowód. ■

Poniższy przykład pokazuje, że istnieją funkcje Orlicza takie, że iloraz $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$ jest niemalejący ze względu na u , dla każdego $v > 0$, ale nie istnieje $a > 0$, dla którego funkcja $\frac{f_{L\varphi}(t)}{f_{L\varphi_1}(t)t^a}$ byłaby niemalejąca. Zatem założenia Twierdzenia 4.2.14 i Twierdzenia 4.2.21 nie pokrywają się.

Przykład 4.2.22. Rozważmy następujące funkcje Orlicza

$$\varphi(u) = u^2 \text{ i } \varphi_1(u) = u^2 \ln(u+1).$$

Wtedy $L^{\varphi_1}[0, 1] \hookrightarrow L^{\varphi}[0, 1]$, ponieważ $\varphi(u) \leq \varphi_1(u)$ dla dużych u (zob. np. Twierdzenie 3.4 na str. 18 w [86]). Ponadto, $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)} = \frac{\ln(u+1)}{u^2}$ jest niemalejącą funkcją zmiennej $u > 0$ dla każdego $v > 0$. Z drugiej strony, jeśli do wyrażenia $\frac{f_{L\varphi}(t)}{f_{L\varphi_1}(t)t^a} = \frac{\varphi_1^{-1}(\frac{1}{t})}{\varphi^{-1}(\frac{1}{t})t^a}$ podstawimy $t = \frac{1}{\varphi_1(u)}$, to otrzymamy

$$\frac{\varphi_1(u)^a u}{\varphi^{-1}(\varphi_1(u))} = \frac{u^{2a+1} \ln^a(u+1)}{\sqrt{u^2 \ln(u+1)}} = u^{2a} \ln^{a-1/2}(u+1) \rightarrow \infty,$$

gdy $u \rightarrow \infty$ dla każdego $a > 0$. Czyli $\frac{f_{L\varphi}(t)}{f_{L\varphi_1}(t)t^a} \rightarrow \infty$ przy $t \rightarrow 0^+$, a zatem funkcja taka nie może być niemalejąca w żadnym otoczeniu zera, dla żadnego $a > 0$.

Poniższy przykład pozwoli przedyskutować wiele aspektów twierdzeń udowodnionych w tym rozdziale. W szczególności uzasadnia, że pewnych założeń pojawiających się we wcześniejszych twierdzeniach tego rozdziału nie można opuścić.

Przykład 4.2.23. Niech $\varphi(u) = \frac{u^2}{2}$. Zbudujemy drugą funkcję Orlicza ψ , która nie będzie spełniała warunku Δ_2 dla dużych argumentów oraz będzie taka, że

$$\psi(u) \geq \varphi(u) \text{ dla każdego } u > 0 \text{ oraz } \psi(u_n) = \varphi(u_n),$$

dla pewnego ciągu (u_n) dążącego do nieskończoności i spełniającego warunek $\frac{\psi(2u_n)}{\psi(u_n)} \nearrow \infty$.

W tym celu weźmy ciąg liczb dodatnich (a_n) , spełniający następujące warunki

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \nearrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k < \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} a_k \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (4.54)$$

Zauważmy, że

$$2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} a_k = 3 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k - a_{n+1}, \quad (4.55)$$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \dots$. Ponadto, dla dowolnego rosnącego ciągu liczb dodatnich zachodzi oszacowanie

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k \leq a_n. \quad (4.56)$$

Rzeczywiście, gdy n jest nieparzyste, to

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k = a_n + (-a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + (-a_2 + a_1) \leq a_n,$$

gdyż na podstawie monotoniczności każde z wyrażen w nawiasach jest ujemne. Jeśli natomiast n jest parzyste, to nierówność

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k = a_n + (-a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + (-a_3 + a_2) - a_1 \leq a_n$$

zachodzi z tego samego powodu. Zatem, aby pokazać, że ciągi spełniające warunki (4.54) istnieją, rozważmy np. ciąg $a_n = (n+2)!$. Na podstawie równości (4.55) wystarczy pokazać, że

$$3 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (k+2)! < (n+3)!,$$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \dots$. Mamy jednak, na podstawie (4.56)

$$3 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (k+2)! \leq 3(n+2)! < (n+3)!,$$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \dots$, więc ciąg $a_n = (n+2)!$ spełnia (4.54).

Zdefiniujmy dalej ciąg (u_n)

$$u_0 = 0 \quad \text{i} \quad u_n = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} a_k, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

oraz ciąg parami rozłącznych przedziałów $I_n = [u_{n-1}, u_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Oczywiście przedziały I_n są dobrze zdefiniowane, ponieważ ciąg (u_n) jest ściśle rosnący na

podstawie (4.54). Ponadto, liczby a_n są środkami odpowiednich przedziałów I_n , tzn. $\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = a_n$. Szukaną funkcję ψ definiujemy wzorem

$$\psi(u) = \int_0^u \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{I_n}(s) ds. \quad (4.57)$$

Oczywiście $\psi(0) = 0$, $\psi(u) > 0$ dla każdego $u > 0$, natomiast wypukłość ψ wynika z monotoniczności ciągu (a_n) , więc ψ jest funkcją Orlicza. Mamy

$$\int_{I_n} a_n ds = a_n(u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) = \frac{u_n^2 - u_{n-1}^2}{2} = \int_{I_n} s ds$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a zatem

$$\begin{aligned} \psi(u_n) &= \int_0^{u_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{I_k}(s) ds = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} a_k ds \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{I_k} s ds = \int_0^{u_n} s ds = \frac{u_n^2}{2} = \varphi(u_n). \end{aligned}$$

Zauważmy obecnie, że $\psi \geq \varphi$. Jeżeli $u \in [0, u_1] = [0, 2a_1]$, to $\psi(u) = a_1 u \geq u^2/2$. Ustalmy $n = 2, 3, \dots$ oraz $u \in [u_{n-1}, u_n]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_0^u \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{I_k}(s) ds = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (u_k - u_{k-1}) + a_n (u - u_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (u_k^2 - u_{k-1}^2) + \frac{u_n + u_{n-1}}{2} (u - u_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1}^2 + \frac{u_n + u_{n-1}}{2} u - \frac{u_n + u_{n-1}}{2} u_{n-1} \\ &= \frac{u_n + u_{n-1}}{2} u - \frac{u_n u_{n-1}}{2} = \frac{h(u)}{2} + \frac{u^2}{2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$h(u) = -u^2 + (u_n + u_{n-1})u - u_n u_{n-1}.$$

Ponieważ dla $u \in [u_{n-1}, u_n]$ spełniona jest nierówność

$$h(u) \geq \max[h(u_{n-1}), h(u_n)] = 0, \quad (4.58)$$

dostajemy $\psi(u) \geq \frac{u^2}{2}$ dla każdego $u \in [u_{n-1}, u_n]$, i konsekwentnie $\psi(u) \geq \frac{u^2}{2}$ dla wszystkich $u \geq 0$. Ponadto, z warunku (4.54) wynika, że $2u_n \in I_{n+1} = [u_n, u_{n+1})$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{\psi(2u_n)}{\psi(u_n)} &= \frac{(u_{n+1} + u_n)u_n - \frac{u_{n+1}u_n}{2}}{u_n^2/2} \\ &= \frac{2u_{n+1}u_n + 2u_n^2 - u_{n+1}u_n}{u_n^2} = 2 + \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= 2 + \frac{2a_{n+1} - u_n}{u_n} = 1 + \frac{2a_{n+1}}{u_n} \\ &= 1 + \frac{2a_{n+1}}{2a_n - u_{n-1}} > 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gdy $n \rightarrow \infty$.

Oczywiście, $L^\psi[0, 1] \subset L^\varphi[0, 1] = L^2[0, 1]$, ponieważ $\psi(u) \geq \varphi(u)$ dla wszystkich $u > 0$, na mocy Twierdzenia 3.4 w [86]. Zatem $M(L^\psi, L^\varphi)$ jest nietrywialna, co wynika z ogólnej własności (IV). Ponadto $L^\varphi = L^2$, a ponieważ ψ nie spełnia warunku $\Delta_2(\infty)$, to $L^\psi \notin (OC)$ (zob. np. [86], str. 21), więc $L^\psi \neq L^\varphi$. Obliczmy $\varphi_2 = \varphi \ominus \psi$. Dla $u > 1$ mamy

$$\begin{aligned}\varphi_2(u) &= \sup_{v>0} [\varphi(uv) - \psi(v)] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} [\varphi(uu_n) - \psi(u_n)] \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} u_n^2 (u^2 - 1) = \infty,\end{aligned}$$

oraz dla dowolnego $0 < u \leq 1$ zachodzi nierówność $\varphi(uv) - \psi(v) \leq \varphi(v) - \psi(v) \leq 0$ dla wszystkich $v > 0$, więc $\varphi_2(u) = 0$. Reasumując

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 0 \leq u \leq 1, \\ \infty & \text{gdy } u > 1 \end{cases}$$

oraz $\psi^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) = \psi^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(u)$ dla wszystkich $u > 0$. Zbierzmy własności funkcji φ oraz ψ .

(a) Nie zachodzi relacja $\varphi^{-1} \prec \psi^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych u , ponieważ

$$\begin{aligned}\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi^{-1}(u)}{\varphi^{-1}(u)} &= \liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{\varphi^{-1}(\psi(v))} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2u_n}{\varphi^{-1}(\psi(2u_n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{\psi(2u_n)}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\sqrt{(u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}u_n/2}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\sqrt{2a_{n+1}u_n - (2a_{n+1} - u_n)u_n/2}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\sqrt{a_{n+1}u_n + u_n^2/2}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_{n+1}}{u_n}}} \leq \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_{n+1}}{2a_n}}} = 0.\end{aligned}$$

(b) Funkcja $\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}$ nie może być monotoniczna, ponieważ

$$\frac{\psi(u_n)}{\varphi(u_n)} = 1 \text{ i } \frac{\psi(2u_n)}{\varphi(2u_n)} = \frac{\psi(2u_n)}{2u_n^2} = \frac{\psi(2u_n)}{4\psi(u_n)} \rightarrow \infty \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

W konsekwencji, z (a) i (b) wynika, że

(c) nie można opuścić założenia o monotoniczności funkcji $\frac{\psi(u)}{\varphi(uv)}$ w Lemacie 4.2.20 (iii).

(d) Nie istnieje $a > 0$ takie, że $\frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)t^a}$ jest niemalejąca w pobliżu zera, ponieważ

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)} = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi^{-1}(u)}{\varphi^{-1}(u)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi^{-1}(u_n)}{\varphi^{-1}(u_n)} = 1, \quad (4.59)$$

więc dla każdego $a > 0$, $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)t^a} \rightarrow \infty$.

(e) Funkcja $\frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)}$ nie może być równoważna w pobliżu zera żadnej pseudo-wklęsłej funkcji. Rzeczywiście, mamy

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi^{-1}(\frac{1}{t})}{\varphi^{-1}(\frac{1}{t})} = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi^{-1}(u)}{\varphi^{-1}(u)} = 0,$$

a z drugiej strony zachodzi nierówność (4.59). Stąd formuła (5.21) w książce [6], t.j. $f_{M(E,F)}(t) = \frac{f_F(t)}{f_E(t)}$, jest fałszywa, nawet w sensie równoważności funkcji. W tym przypadku mamy jednak $f_{M(E,F)}(t) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{f_F(s)}{f_E(s)} = 1$.

(f) Zachodzi równość $M(L^\psi, L^\varphi) = L^\infty = L^{\varphi^2}$.

Z Twierdzenia 4.1.6 wiemy, że $f_{M(E,F)}(t) \geq \frac{f_F(t)}{f_E(t)}$. Zatem monotoniczność funkcji fundamentalnej $f_{M(L^\psi, L^\varphi)}$ implikuje, że

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{M(L^\psi, L^\varphi)}(t) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} f_{M(L^\psi, L^\varphi)}(t) \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{L^\varphi}(t)}{f_{L^\psi}(t)} \geq 1. \quad (4.60)$$

Oznacza to, że $M(L^\psi, L^\varphi) \hookrightarrow L^\infty$. Rzeczywiście, przypuśćmy, że istnieje $x \in M(L^\psi, L^\varphi) \setminus L^\infty$. Wtedy $x^* \in M(L^\psi, L^\varphi) \setminus L^\infty$ oraz $x^*(0^+) = \infty$, ponieważ przestrzeń $M(L^\psi, L^\varphi)$ jest symetryczna. Stąd, dla każdego $t > 0$

$$\|x\|_{M(L^\psi, L^\varphi)} = \|x^*\|_{M(L^\psi, L^\varphi)} \geq \|x^* \chi_{[0,t]}\|_{M(L^\psi, L^\varphi)} \geq x^*(t) \|\chi_{[0,t]}\|_{M(L^\psi, L^\varphi)}.$$

W konsekwencji, na mocy (4.60), otrzymujemy

$$\|x\|_{M(L^\psi, L^\varphi)} \geq x^*(t) \|\chi_{[0,t]}\|_{M(L^\psi, L^\varphi)} \geq x^*(t) \rightarrow \infty \text{ gdy } t \rightarrow 0^+,$$

a zatem musi być $M(L^\psi, L^\varphi) \hookrightarrow L^\infty$. Z drugiej strony $L^\psi \hookrightarrow L^\varphi$, więc $L^\infty \hookrightarrow M(L^\psi, L^\varphi)$. W konsekwencji $M(L^\psi, L^\varphi) = L^\infty$.

(g) Z punktu (d) wynika, że założenia Twierdzenia 4.2.14 nie są spełnione, podobnie założenia Twierdzenia 4.2.21 na podstawie punktu (b), jednakże $M(L^\psi, L^\varphi) \subset L^{\varphi^2}$ mimo, że $\varphi^{-1} \not\prec \psi^{-1} \varphi_2^{-1}$.

(h) Nie istnieje funkcja Orlicza φ_3 spełniająca relację $\varphi^{-1} \approx \psi^{-1} \varphi_3^{-1}$. Jeśli taka funkcja by istniała, to na podstawie Wniosku 4.2.16 mielibyśmy $M(L^\psi, L^\varphi) = L^{\varphi^3}$. Z drugiej strony, z (f) wiemy, że $M(L^\psi, L^\varphi) = L^\infty$. Zatem musiałoby być $\varphi_3 \approx \varphi_2$ dla dyżych argumentów, co jest niemożliwe na podstawie punktu (a).

(i) L^ψ nie jest L^φ - doskonała. Rzeczywiście, z (f) wynika, że

$$(L^\psi)^{L^\varphi L^\varphi} = M(M(L^\psi, L^\varphi), L^\varphi) = M(L^\infty, L^\varphi) = L^\varphi \neq L^\psi.$$

Twierdzenie 4.2.24. Niech φ, φ_1 będą funkcjami Orlicza takimi, że $a_\varphi = a_{\varphi_1} = 0$, $b_\varphi = b_{\varphi_1} = \infty$ oraz niech E będzie symetryczną przestrzenią na $[0, 1]$.

- (i) Załóżmy, że $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} = 0$ dla każdego $v > 0$ oraz zachodzi przynajmniej jeden z poniższych warunków:
- funkcja $f_v(u) = \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)}$ jest nierosnąca na $(0, \infty)$ dla każdego $v > 0$,
 - $\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$ jest rosnąca dla dużych u ,
 - funkcja $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ spełnia warunek Δ_2 dla dużych argumentów. Wtedy $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$, gdzie $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$.
- (ii) Jeśli $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} < \infty$ dla pewnego $v > 0$ oraz $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uw)}{\varphi_1(u)} > 0$ dla pewnego $w > 0$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = L^\infty$.
- (iii) Jeśli $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} = \infty$ dla wszystkich $v > 0$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = \{0\}$.

Dowód. (i) Wystarczy, że udowodnimy, iż każdy z trzech warunków z założenia implikuje, że $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$. Wtedy z Wniosku 4.2.16 wynika równość przestrzeni, tj. $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$. Z Lematu 4.2.20 wynika, że relacja $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ zachodzi dla wszystkich argumentów. Pozostaje więc pokazać, że $\varphi^{-1} \prec \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}$ dla dużych argumentów. Rozważmy zatem trzy przypadki.

a) Jeśli dla każdego $v > 0$ funkcja $f_v(u)$ jest nierosnąca na $(0, \infty)$, to z Lematu 4.2.20(iii) dostaniemy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

b) Przypuśćmy, że funkcja $g(u) = \frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$ jest rosnąca dla $u > u_0 \geq 0$. Ponieważ

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\varphi(vw)}{\varphi_1(v)} = 0 \text{ dla każdego } w > 0,$$

to supremum w definicji funkcji φ_2 jest osiąganym dla pewnego $v_0 = v_0(w) > 0$. Dla $u > u_0$ podstawmy $w = \frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$. Jeśli $v_0(w) = v_0 > \varphi_1^{-1}(u)$, to monotoniczność funkcji g implikuje, że

$$\varphi_2 \left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)} \right) = \varphi \left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)} v_0 \right) - \varphi_1(v_0) < \varphi \left(\frac{\varphi^{-1}(\varphi_1(v_0))}{v_0} v_0 \right) - \varphi_1(v_0) = 0.$$

Ale $\varphi_2 \geq 0$, zatem widzimy, że musi zachodzić nierówność $v_0 \leq \varphi_1^{-1}(u)$ dla $u > u_0 \geq 0$. W rezultacie

$$\varphi_2 \left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)} \right) = \varphi \left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)} v_0 \right) - \varphi_1(v_0) \leq \varphi \left(\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)} v_0 \right) \leq \varphi \left(\varphi^{-1}(u) \right) = u,$$

tzn. $\varphi^{-1}(u) \leq \varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u)$ gdy $u > u_0 \geq 0$.

c) Przypuśćmy tym razem, że φ_2 spełnia warunek Δ_2 dla dużych argumentów, w szczególności $b_{\varphi_2} = \infty$. Oznacza to, że istnieje stała $C \geq 1$ taka, że $\varphi_2(2u) \leq C\varphi_2(u)$ dla wszystkich $u \geq u_0$. Podobnie jak wcześniej możemy uzasadnić, że dla dowolnego $w > 0$ istnieje $v_0 = v_0(w) > 0$ takie, że $\varphi_2(w) = \varphi(wv_0) - \varphi_1(v_0)$. Niech $u > u_1$, gdzie $u_1 = \varphi_2(u_0)$. Przyjmując $w = \varphi_2^{-1}(u)$ mamy

$$u = \varphi_2[\varphi_2^{-1}(u)] = \varphi[\varphi_2^{-1}(u)v_0] - \varphi_1(v_0) > 0, \quad (4.61)$$

tzn. $\varphi_2^{-1}(u) \geq \frac{\varphi^{-1}[\varphi_1(v_0)]}{v_0}$. Zatem z Lematu 4.2.20 (ii) wynika, że

$$1 \geq \frac{\varphi^{-1}[\varphi_1(v_0)]}{v_0 \varphi_2^{-1}(u)} \geq \frac{\varphi_1^{-1}[\varphi_1(v_0)] \varphi_2^{-1}[\varphi_1(v_0)]}{2v_0 \varphi_2^{-1}(u)} = \frac{\varphi_2^{-1}[\varphi_1(v_0)]}{2 \varphi_2^{-1}(u)}.$$

Stąd oraz na mocy założenia $\varphi_2 \in \Delta_2(\infty)$, dla $u > u_1 > 0$ mamy

$$v_0 \leq \varphi_1^{-1}[\varphi_2(2 \varphi_2^{-1}(u))] \leq \varphi_1^{-1}(Cu),$$

ponieważ warunek $u > u_1$ implikuje, że $\varphi_2^{-1}(u) > u_0$. Z (4.61) dostaniemy $\varphi^{-1}[u + \varphi_1(v_0)] = \varphi_2^{-1}(u)v_0$ i dalej

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(u) &\leq \frac{\varphi_1^{-1}(Cu)}{v_0} \varphi^{-1}(u) \leq \frac{\varphi_1^{-1}(Cu)}{v_0} \varphi^{-1}[u + \varphi_1(v_0)] \\ &\leq \frac{\varphi_1^{-1}(Cu)}{v_0} \varphi_2^{-1}(u)v_0 = \varphi_1^{-1}(Cu) \varphi_2^{-1}(u) \leq C \varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u) \end{aligned}$$

dla $u > u_1 \geq 0$, co kończy dowód przypadku c).

(ii) Jeśli $E = L^\infty$, to teza oczywiście zachodzi, gdyż wtedy $E_\psi = L^\infty$, dla każdej funkcji Orlicza ψ . Załóżmy zatem, że $E \neq L^\infty$. Oznacza to, że $f_E(0^+) = 0$, gdyż w przeciwnym razie, tłumacząc jak w punkcie (f) Przykładu 4.2.23, dostalibyśmy $E \subset L^\infty$ i w konsekwencji zachodziłaby równość $E = L^\infty$. Przypuśćmy, że

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uw)}{\varphi_1(u)} < \infty, \quad (4.62)$$

dla pewnego $v > 0$. Wtedy istnieje stała $K > 0$ taka, że $\varphi(uw) \leq K\varphi_1(u)$ dla dużych u . Ponadto z Twierdzenia 2.3 w [52] wynika inkluzja $E_{\varphi_1} \hookrightarrow E_\varphi$. Zatem $L^\infty \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$. Z drugiej strony, przypuśćmy dla otrzymania sprzeczności, że $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uw)}{\varphi_1(u)} = \eta > 0$ dla pewnego $w > 0$ oraz $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) \neq L^\infty$. Zdefiniujmy nową funkcję

$$\psi(u) = \frac{2}{\eta} \varphi(uw).$$

Wtedy, ponownie z [52, Twierdzenie 2.3] wynika, że $E_\varphi = E_\psi$, więc $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = M(E_{\varphi_1}, E_\psi)$. Ponadto funkcja fundamentalna f_M przestrzeni $M(E_{\varphi_1}, E_\psi)$ spełnia warunek $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_M(t) = 0$, ponieważ $M(E_{\varphi_1}, E_\psi) \neq L^\infty$ (zob. dowód punktu (f) w Przykładzie 4.2.23). Ponadto

$$1 = \left\| \frac{\chi_{[0,t]}}{f_M(t)} \right\|_{M(E_{\varphi_1}, E_\psi)} \geq \left\| \frac{\chi_{[0,t]}}{f_M(t)} \frac{\chi_{[0,t]}}{f_{E_{\varphi_1}}(t)} \right\|_{E_\psi} = \frac{1}{f_M(t)} \frac{f_{E_\psi}(t)}{f_{E_{\varphi_1}}(t)}$$

oraz $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_M(t) = 0$, więc także $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{E_\psi}(t)}{f_{E_{\varphi_1}}(t)} = 0$. Stąd i z równości $f_E(0^+) = 0$ otrzymujemy

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{E_\psi}(t)}{f_{E_{\varphi_1}}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_1^{-1}(1/f_E(t))}{\psi^{-1}(1/f_E(t))} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1^{-1}(u)}{\psi^{-1}(u)}.$$

Jednak założyliśmy, że

$$\eta = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uw)}{\varphi_1(u)} = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{\eta}{2}\psi(u)}{\varphi_1(u)},$$

zatem znajdziemy ciąg $u_n \rightarrow \infty$ taki, że $\psi(u_n) \geq \varphi_1(u_n)$. Podstawiając $v_n = \psi(u_n)$ widzimy, że $v_n \geq \varphi_1(\psi^{-1}(v_n))$, skąd $\frac{\varphi_1^{-1}(v_n)}{\psi^{-1}(v_n)} \geq 1$, co przeczy wcześniejszej równości $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1^{-1}(u)}{\psi^{-1}(u)} = 0$.

(iii) Istnienie stałych $K, u_0, M > 0$ takich, że $\varphi(Ku) \leq M\varphi_1(u)$ dla wszystkich $u > u_0$ jest konieczne, aby zachodziła inkluzja $E_{\varphi_1} \hookrightarrow E_\varphi$ (zob. [52], Twierdzenie 2.4). Ponadto, w przypadku przestrzeni symetrycznych, inkluzja ta jest konieczna, aby przestrzeń $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$ była nietrywialna (zob. Twierdzenie 4.1.6). Jednak $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uw)}{\varphi_1(u)} = \infty$ oznacza, że wyżej wspomniane stałe nie istnieją, co kończy dowód. ■

Rozdział 5

Przestrzenie iloczynowe i faktoryzacja

5.1 Przestrzeń iloczynowa $X \odot Y$

Niech X i Y będą przestrzeniami Köthe'go nad tą samą przestrzenią miary. Zdefiniujemy **przestrzeń iloczynową** $X \odot Y$ jako

$$X \odot Y = \{xy : x \in X, y \in Y\},$$

z funkcjonalem

$$\|z\|_{X \odot Y} := \inf \{\|x\|_X \|y\|_Y : |z| = xy, x \in X_+, y \in Y_+\},$$

(zob. np. [110], [94] lub [105]).

W dalszym ciągu pokażemy, że przestrzeń $\langle X \odot Y, \|\cdot\|_{X \odot Y} \rangle$ jest przestrzenią quasi - Köthe'go. Zauważmy na początek, że podobnie jak w przypadku konstrukcji Calderóna-Łozanowskiego funkcjonał $\|\cdot\|_{X \odot Y}$ możemy równoważnie zdefiniować jako

$$\|z\|_{X \odot Y} = \inf \{\|x\|_X \|y\|_Y : |z| \leq xy, x \in X_+, y \in Y_+\}. \quad (5.1)$$

Rzeczywiście, gdy $|z| \leq xy$, to możemy przyjąć, że $\text{supp}(x) = \text{supp}(y)$. Definiując $y_0 = \frac{|z|}{x} \chi_{\text{supp}(x)}$ widzimy, że $y_0 \leq y$ więc $y_0 \in Y$ oraz $|z| = xy_0$. Zatem równość (5.1) jest prawdziwa. Wynika stąd też, że przestrzeń $X \odot Y$ posiada własność ideału. Rzeczywiście, niech $z \in X \odot Y$ oraz $|w| \leq |z|$. Na podstawie definicji funkcjonału $\|\cdot\|_{X \odot Y}$, dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $x \in X_+, y \in Y_+$ takie, że $|z| = xy$ oraz

$$\|x\|_X \|y\|_Y \leq \|z\|_{X \odot Y} + \varepsilon.$$

Zdefiniujmy $h(t) = \frac{w(t)}{z(t)}$, gdy $z(t) \neq 0$ oraz $h(t) = 0$ w pozostałych przypadkach. Wtedy $|w| = |hz| = |hx|y$ i skoro $|hx| \leq |x|$, to $hx \in X$ i w konsekwencji $w \in X \odot Y$. Mamy też

$$\|w\|_{X \odot Y} \leq \|hx\|_X \|y\|_Y \leq \|x\|_X \|y\|_Y \leq \|z\|_{X \odot Y} + \varepsilon,$$

co ze względu na dowolność $\varepsilon > 0$ daje $\|w\|_{X \odot Y} \leq \|z\|_{X \odot Y}$. Zauważmy jeszcze, że korzystaliśmy tylko z własności ideału przestrzeni X , wystarczy więc, żeby tylko jedna z przestrzeni X, Y była idealna, aby przestrzeń $X \odot Y$ też była.

Przejdźmy do zbadania dalszych własności konstrukcji $X \odot Y$. Okaze się, że bardzo przydadzą się przestrzenie Calderóna-Łozanowskiego. Zaczniemy od własności przestrzeni Calderóna-Łozanowskiego, która została dokładnie zbadana w pracy [60], jednak przy założeniu, że przestrzenie X i Y mają własność Fatou. Opuścimy obecnie to założenie, lecz w zamian rozważymy tylko szczególne funkcje ρ .

Lemat 5.1.1. *Niech X i Y będą przestrzeniami Köthe'go nad tą samą przestrzenią miary. Wtedy*

$$\begin{aligned} \|z\|_{X^{1/p}Y^{1/q}} &= \inf \left\{ \max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} : |z| = x^{1/p}y^{1/q}, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\ &= \inf \left\{ \max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} : |z| = x^{1/p}y^{1/q}, \|x\|_X = \|y\|_Y, x \in X_+, y \in Y_+ \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$.

Dowód. Niech $z \in X^{1/p}Y^{1/q}$. Wtedy $|z| = x^{1/p}y^{1/q}$ dla pewnych $x \in X_+, y \in Y_+$. Przypuśćmy, że $\frac{\|x\|_X}{\|y\|_Y} = a > 1$ i zdefiniujmy

$$x_1 = a^{-\frac{p}{p+q}}x, \quad y_1 = a^{\frac{q}{p+q}}y.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|x_1\|_X &= \left(\frac{\|x\|_X}{\|y\|_Y} \right)^{-\frac{p}{p+q}} \|x\|_X = \|x\|_X^{\frac{q}{p+q}} \|y\|_Y^{\frac{p}{p+q}} = \\ &= \left(\frac{\|x\|_X}{\|y\|_Y} \right)^{\frac{q}{p+q}} \|y\|_Y = \|y_1\|_Y \end{aligned}$$

oraz $|z| = x_1^{1/p}y_1^{1/q}$. Oczywiście

$$\max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} = \|x\|_X > \|x_1\|_X = \max \{ \|x_1\|_X, \|y_1\|_Y \}.$$

Podobnie postąpimy, gdy $\frac{\|x\|_Y}{\|y\|_X} = b > 1$. Wystarczy wtedy przyjąć

$$x_1 = a^{\frac{p}{p+q}}x, \quad y_1 = a^{-\frac{q}{p+q}}y.$$

Zatem równoważnie infimum można zdefiniować po elementach o tej samej normie. ■

Przypomnijmy, że **p - uwypukleniem** przestrzeni quasi - Köthe'go X , dla $p \geq 1$, nazywamy przestrzeń $X^{(p)}$ zdefiniowaną wzorem

$$X^{(p)} = \left\{ u \in L^0 : |u|^p \in X \right\},$$

z quasi - normą

$$\|u\|_{X^{(p)}} = (\| |u|^p \|_X)^{1/p}.$$

W przypadku, gdy $p < 1$ analogiczną operację nazywamy **p - uwklęśnieniem** (zob. np. [72] lub (1.16)).

Twierdzenie 5.1.2. Niech X i Y będą przestrzeniami Köthe'go nad tą samą przestrzenią miary.

(i) Jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, to

$$X^{(p)} \odot Y^{(q)} \equiv X^{1/p}Y^{1/q}.$$

(ii) Dla $0 < \theta < \infty$

$$(X \odot Y)^{(\theta)} \equiv X^{(\theta)} \odot Y^{(\theta)}.$$

(iii) Zachodzi równość

$$X \odot Y \equiv \left(X^{1/2}Y^{1/2}\right)^{1/2},$$

a w szczególności

$$\begin{aligned} \|z\|_{X \odot Y} &= \inf \{ \|x\|_X \|y\|_Y : |z| = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \} = \\ &= \inf \left\{ \max \left\{ \|x\|_X^2, \|y\|_Y^2 \right\} : |z| = xy, \|x\|_X = \|y\|_Y, x \in X_+, y \in Y_+ \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dowód. (i) Niech $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Równość zbiorów $X^{(p)} \odot Y^{(q)}$ i $X^{1/p}Y^{1/q}$ wynika wprost z definicji. Widzimy bowiem, że gdy $z \in X^{(p)} \odot Y^{(q)}$, to $|z| = gh$ dla pewnych $g \in X_+^{(p)}$, $h \in Y_+^{(q)}$. Stąd $|z| = x^{1/p}y^{1/q}$, gdzie $g = x^{1/p}$, $h = y^{1/q}$ oraz $x \in X_+$, $y \in Y_+$, czyli $z \in X^{1/p}Y^{1/q}$. Analogiczne rozumowanie dowodzi inkluzji przeciwnej. Pokażemy równość norm. Niech $z \in X^{(p)} \odot Y^{(q)} = X^{1/p}Y^{1/q}$. Stosując Lemat 5.1.1 oraz definicję p -uwypuklenia dostaniemy

$$\begin{aligned} \|z\|_{X^{(p)} \odot Y^{(q)}} &= \inf \left\{ \|g\|_{X^{(p)}} \|h\|_{Y^{(q)}} : |z| = gh, g \in X_+^{(p)}, h \in Y_+^{(q)} \right\} \\ &= \inf \left\{ \|x\|_X^{1/p} \|y\|_Y^{1/q} : |z| = x^{1/p}y^{1/q}, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\ &= \inf_{a>0} \left\{ \inf \left\{ \|x\|_X^{1/p} \|y\|_Y^{1/q} : |z| = x^{1/p}y^{1/q}, \frac{\|x\|_X}{\|y\|_Y} = a, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \right\} \\ &= \inf_{a>0} \left\{ \inf \left\{ a^{1/p} \|u\|_X^{1/p} \|y\|_Y^{1/q} : |z| = a^{1/p}u^{1/p}y^{1/q}, \|u\|_X = \|y\|_Y, u \in X_+, y \in Y_+ \right\} \right\} \\ &= \inf_{a>0} \left\{ a^{1/p} \inf \left\{ \|u\|_X : \frac{|z|}{a^{1/p}} = u^{1/p}y^{1/q}, \|u\|_X = \|y\|_Y, u \in X_+, y \in Y_+ \right\} \right\} \\ &= \inf_{a>0} \left\{ a^{1/p} \left\| \frac{|z|}{a^{1/p}} \right\|_{X^{1/p}Y^{1/q}} \right\} = \|z\|_{X^{1/p}Y^{1/q}}. \end{aligned}$$

(ii) Jak wcześniej, równość zbiorów $(X \odot Y)^{(\theta)}$ i $X^{(\theta)} \odot Y^{(\theta)}$ wynika z definicji. Aby pokazać równość norm weźmy $z \in (X \odot Y)^{(\theta)} = X^{(\theta)} \odot Y^{(\theta)}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|z\|_{(X \odot Y)^{(\theta)}} &= \left(\| |z|^\theta \|_{X \odot Y} \right)^{1/\theta} \\ &= \inf \left\{ \|x\|_X^{1/\theta} \|y\|_Y^{1/\theta} : |z|^\theta = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\ &= \inf \left\{ \|u^\theta\|_X^{1/\theta} \|v^\theta\|_Y^{1/\theta} : |z|^\theta = u^\theta v^\theta, u \in X_+^{(\theta)}, v \in Y_+^{(\theta)} \right\} \\ &= \inf \left\{ \|u\|_{X^{(\theta)}} \|v\|_{Y^{(\theta)}} : |z| = uv, u \in X_+^{(\theta)}, v \in Y_+^{(\theta)} \right\} = \|z\|_{X^{(\theta)} \odot Y^{(\theta)}}. \end{aligned}$$

(iii) Dowód jest natychmiastową konsekwencją punktów (i) oraz (ii), ponieważ

$$X \odot Y \equiv \left((X \odot Y)^{(2)} \right)^{(1/2)} \equiv \left(X^{1/2} Y^{1/2} \right)^{(1/2)}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \|z\|_{X \odot Y} &= \|z\|_{(X^{1/2} Y^{1/2})^{(1/2)}} = \left(\| |z|^{1/2} \|_{X^{1/2} Y^{1/2}} \right)^2 \\ &= \left[\inf \left\{ \max \{ \|x\|_X, \|y\|_Y \} : \sqrt{|z|} = \sqrt{xy}, \|x\|_X = \|y\|_Y, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \right]^2 \\ &= \inf \left\{ \max \{ \|x\|_X^2, \|y\|_Y^2 \} : |z| = xy, \|x\|_X = \|y\|_Y, x \in X_+, y \in Y_+ \right\}. \end{aligned}$$

■

Dzięki powyższemu utożsamieniu przestrzeni $X \odot Y$ z $1/2$ -uwklęśnieniem przestrzeni Calderóna-Łozanowskiego $X^{1/2} Y^{1/2}$ podstawowe własności konstrukcji $X \odot Y$ wynikają ze znanych własności przestrzeni $X^{1/2} Y^{1/2}$.

Twierdzenie 5.1.3. *Niech X i Y będą przestrzeniami Köthe'go nad tą samą przestrzenią miary.*

(i) $X \odot Y$ jest przestrzenią quasi - Köthe'go. Ponadto nierówność trójkąta jest spełniona ze stałą 2, tzn. dla $x, y \in X \odot Y$

$$\|x + y\|_{X \odot Y} \leq 2 \left(\|x\|_{X \odot Y} + \|y\|_{X \odot Y} \right).$$

(ii) Jeśli X i Y są symetryczne, to także $X \odot Y$ jest symetryczna.

(iii) Jeśli X i Y spełniają własność Fatou, to także $X \odot Y$ ma tę własność.

(iv) Przestrzeń $X \odot Y$ jest porządkowo ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy para (X, Y) nie jest wspólnie porządkowo nieciągła (zob. Def. 2.0.10).

Dowód. (i) Fakt ten jest konsekwencją reprezentacji $X \odot Y \equiv \left(X^{1/2} Y^{1/2} \right)^{1/2}$, ponieważ $X^{1/2} Y^{1/2}$ jest przestrzenią Köthe'go. Zatem $X \odot Y$ jest przestrzenią quasi - Köthe'go, jako uwklęśnienie przestrzeni Köthe'go. Ponadto dla $x, y \in X \odot Y$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{X \odot Y} &\leq \| |x| + |y| \|_{X \odot Y} \\ &= \left\| (|x| + |y|)^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}}^2 \\ &\leq \left\| |x|^{1/2} + |y|^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}}^2 \\ &\leq \left(\left\| |x|^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}} + \left\| |y|^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| |x|^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}}^2 + \left\| |y|^{1/2} \right\|_{X^{1/2} Y^{1/2}}^2 \right) \\ &= 2 \left(\|x\|_{X \odot Y} + \|y\|_{X \odot Y} \right). \end{aligned}$$

(ii) Jeśli wiemy, że przestrzeń Calderóna-Łozanowskiego $X^{1/2} Y^{1/2}$ jest symetryczna, gdy X i Y są symetryczne, to dzięki reprezentacji $X \odot Y \equiv \left(X^{1/2} Y^{1/2} \right)^{(1/2)}$,

także $X \odot Y$ jest symetryczna, gdyż dowolne funkcje f, g spełniają relację $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{|f|} \sim \sqrt{|g|}$. Stąd, jeśli $f \sim g \in (X^{1/2}Y^{1/2})^{(1/2)}$, to $\sqrt{|f|} \sim \sqrt{|g|} \in X^{1/2}Y^{1/2}$, więc symetria przestrzeni $X^{1/2}Y^{1/2}$ oznacza, że $\sqrt{|f|} \in X^{1/2}Y^{1/2}$ i

$$\|f\|_{(X^{1/2}Y^{1/2})^{(1/2)}} = \left\| \sqrt{|f|} \right\|_{X^{1/2}Y^{1/2}}^2 = \left\| \sqrt{|g|} \right\|_{X^{1/2}Y^{1/2}}^2 = \|g\|_{(X^{1/2}Y^{1/2})^{(1/2)}}.$$

Oczywiście wiadomo, że przestrzeń $X^{1/2}Y^{1/2}$ (lub ogólnie $\rho(X, Y)$) jest symetryczna, gdy X i Y są, jednak ze względu na elementarność tego faktu trudno znaleźć pracę, w której został on wykazany (w każdym razie autorowi nie udało się takiego źródła znaleźć). Zatem dla kompletności wykładu przedstawiamy przykładowy dowód dla $X^{1/2}Y^{1/2}$ (dla $\rho(X, Y)$ argumentacja wygląda dokładnie tak samo). Na podstawie Lematu 4.3 w [68], str. 93 wystarczy pokazać, że dla każdego $z \in X^{1/2}Y^{1/2}$ oraz każdego nierozszerzającego przekształcenia miary ω (tzn. $\mu(\omega^{-1}(A)) \leq \mu(A)$ dla każdego $A \in \Sigma$), $z(\omega) \in X^{1/2}Y^{1/2}$ oraz zachodzi nierówność $\|z(\omega)\|_{X^{1/2}Y^{1/2}} \leq \|z\|_{X^{1/2}Y^{1/2}}$. Oczywiście, gdy $z \in X^{1/2}Y^{1/2}$, to $|z| = \sqrt{xy}$ dla pewnych $x \in X_+, y \in Y_+$. Więc dla dowolnego nierozszerzającego przekształcenia miary ω mamy $|z(\omega)| = \sqrt{x(\omega)y(\omega)}$, gdzie $x(\omega) \in X_+, y(\omega) \in Y_+$, ponieważ przestrzenie X i Y są symetryczne. Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \|z(\omega)\|_{X^{1/2}Y^{1/2}} &= \inf \{ \max \{ \|x\|_X \|y\|_Y \} : |z(\omega)| = \sqrt{xy}, x \in X_+, y \in Y_+ \} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \inf \left\{ \max \{ \|f(\omega)\|_X \|g(\omega)\|_Y \} : |z(\omega)| = \sqrt{f(\omega)g(\omega)}, f \in X_+, g \in Y_+ \right\} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \inf \left\{ \max \{ \|f\|_X \|g\|_Y \} : |z| = \sqrt{fg}, f \in X_+, g \in Y_+ \right\} = \|z\|_{X^{1/2}Y^{1/2}}, \end{aligned}$$

gdzie nierówność (1) wynika z faktu, że jeśli $|z(\omega)| = \sqrt{f(\omega)g(\omega)}$ i $f \in X_+, g \in Y_+$, to dla $x = f(\omega), y = g(\omega)$ zachodzi równość $|z(\omega)| = \sqrt{xy}$, gdzie $x \in X_+, y \in Y_+$. Aby zobaczyć nierówność (2) zauważmy, że jeśli $|z| = \sqrt{fg}$, to $|z(\omega)| = \sqrt{f(\omega)g(\omega)}$, a ponadto $\|f(\omega)\|_X \leq \|f\|_X$ i $\|g(\omega)\|_Y \leq \|g\|_Y$ na podstawie Lematu 4.3 w [68], str. 93.

(iii) Przestrzeń $X^{1/2}Y^{1/2}$ posiada własność Fatou, o ile $X, Y \in (FP)$ (zob. np. [77] lub [86], Wniosek 3, str. 185), zatem wprost z definicji uwklęśnienia wynika, że przestrzeń $(X^{1/2}Y^{1/2})^{1/2}$ też ma własność Fatou.

(iv) Funkcja $\rho(u, v) = u^{1/2}v^{1/2}$ spełnia warunek $\Delta_2(P, L, \mathbb{R}_+)$, zatem z Twierdzenia 2.0.12 wynika, że $X^{1/2}Y^{1/2} \in (OC)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(X, Y) \notin (JOD)$.

■

W dalszym ciągu zajmujemy się przestrzeniami symetrycznymi. Aby znaleźć wzór na funkcję fundamentalną przestrzeni $X \odot Y$ udowodnimy nierówność, którą możemy nazwać odwrotną nierównością Czebyszewa (zob. [38]).

Lemat 5.1.4. *Przypuśćmy, że dla pewnego mierzalnego względem miary Lebesgue'a m zbioru $A \subset \mathbb{R}_+$ zachodzi równość $f(t)g(t) = a > 0$, dla każdego $t \in A$, gdzie $0 \leq f, g \in L^1[A, \Sigma, m]$. Wtedy*

$$m(A) \int_A fg dm \leq \int_A f dm \int_A g dm.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $s, t \in A$ mamy

$$(f(s) - f(t))(g(s) - g(t)) \leq 0,$$

ponieważ $f(t)g(t) = a$ dla każdego $t \in A$. Całkując powyższą nierówność po s i t otrzymamy

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_A \left(\int_A (f(s) - f(t))(g(s) - g(t)) dm(t) \right) dm(s) = \\ &= 2m(A) \int_A fg dm - 2 \int_A f dm \int_A g dm, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Uwaga 5.1.5. Powyższą nierówność można też udowodnić wykorzystując nierówność Jensena. Ponadto, jeśli przyjmiemy $0 \leq f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[i-1, i]}$, $0 \leq g = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{[i-1, i]}$, to bezpośrednio z powyższego uzyskamy odpowiednią nierówność dla ciągów, tj.

$$n \sum_{i=1}^n b_i a_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i,$$

o ile $b_i a_i = a > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie 5.1.6. Niech X, Y będą symetrycznymi, funkcyjnymi przestrzeniami Köthe'go z funkcjami fundamentalnymi f_X i f_Y , odpowiednio. Wtedy funkcja fundamentalna $f_{X \odot Y}$ przestrzeni $X \odot Y$ wyraża się wzorem

$$f_{X \odot Y}(t) = f_X(t) f_Y(t),$$

dla każdego $t \in I$.

Dowód. Niech $t \in I$. Nierówność $f_{X \odot Y}(t) \leq f_X(t) f_Y(t)$ jest oczywista na mocy definicji $\|\cdot\|_{X \odot Y}$, ponieważ

$$\begin{aligned} \|\chi_{(0,t)}\|_{X \odot Y} &= \inf \left\{ \|x\|_X \|y\|_Y : \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \leq \\ &\leq \|\chi_{(0,t)}\|_X \|\chi_{(0,t)}\|_Y = f_X(t) f_Y(t). \end{aligned}$$

Udowodnimy nierówność przeciwną. Przypomnijmy, że każda symetryczna przestrzeń Köthe'go X spełnia inkluzję $X \xrightarrow{1} M_{f_X}$, gdzie M_{f_X} jest przestrzenią Marcinkiewicza (zob. np. [8], [68]). Stąd, dla dowolnego $x \in X$ takiego, że $\text{supp}(x) \subset [0, t]$, mamy

$$\|x\|_X \geq \sup_{0 < v \leq t} \left(\frac{f_X(v)}{v} \int_0^v x^*(s) ds \right).$$

Zatem z nierówności Hardy'ego oraz Lematu 5.1.4 wynika, że

$$\|\chi_{(0,t)}\|_{X \odot Y} = \inf \left\{ \|x\|_X \|y\|_Y : \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&\geq \inf \left\{ \sup_{0 < v \leq t} \left(\frac{f_X(v)}{v} \int_0^v x^*(s) ds \right) \sup_{0 < v \leq t} \left(\frac{f_Y(v)}{v} \int_0^v y^*(s) ds \right) : \right. \\
&\quad \left. \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\
&\geq \inf \left\{ \left(\frac{f_X(t)}{t} \int_0^t x^*(s) ds \right) \left(\frac{f_Y(t)}{t} \int_0^t y^*(s) ds \right) : \right. \\
&\quad \left. \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\
&\geq f_X(t) f_Y(t) \inf \left\{ \left(\frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \right) \left(\frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \right) : \right. \\
&\quad \left. \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\
&\geq f_X(t) f_Y(t) \inf \left\{ \left(\frac{1}{t} \int_0^t x(s) y(s) ds \right) : \right. \\
&\quad \left. \chi_{(0,t)} = xy, x \in X_+, y \in Y_+ \right\} \\
&= f_X(t) f_Y(t).
\end{aligned}$$

■

Uwaga 5.1.7. Na mocy Uwagi 5.1.5 wnosimy, że powyższe twierdzenie pozostaje prawdziwe w przypadku symetrycznych, ciągowych przestrzeni Köthe'go. To znaczy

$$f_{X \odot Y}(n) = f_X(n) f_Y(n), \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

gdzie przez $(f_X(n))$ rozumiemy ciąg fundamentalny przestrzeni ciągowej X , tzn.

$$f_X(n) = \|\chi_{\{1,2,\dots,n\}}\|_X.$$

5.2 Iloczyn przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego

Na początek zajmijmy się inkluzją

$$E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}.$$

Twierdzenie 5.2.1. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go oraz niech φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza.

- (i) Jeśli $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów, to $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$.
- (ii) Jeśli $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów oraz $L^\infty \hookrightarrow E$, to $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$.
- (iii) Jeśli $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów oraz $E \hookrightarrow L^\infty$, to $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$.
- (iv) Jeśli E jest funkcyjną przestrzenią Köthe'go taką, że $E_a \neq \{0\}$ oraz $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$, to $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.
- (v) Jeśli E jest funkcyjną przestrzenią Köthe'go taką, że $\text{supp} E_a = \Omega$, $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz jeśli $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_{\varphi}$, to $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

- (vi) Jeśli e jest ciągłą przestrzenią Köthe'go taką, że $\sup_i \|e_i\|_e < \infty$, $l^\infty \not\hookrightarrow e$ oraz jeśli $e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2} \hookrightarrow e_\varphi$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

Dowód. Punkty (i) – (iii) są bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 4.2.4. Rzeczywiście, z Twierdzenia 4.2.4 wynika, że $E_{\varphi_2} \hookrightarrow M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$. Oznacza to, że dla dowolnego $x \in E_{\varphi_2}$ oraz dla każdego $y \in E_{\varphi_1}$

$$xy \in E_\varphi.$$

Jednak przestrzeń $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ według definicji składa się z iloczynów xy , gdzie $x \in E_{\varphi_2}$, $y \in E_{\varphi_1}$. Stąd $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_\varphi$.

Punkty (iv), (v) wynikają jak poprzednio, z wcześniej udowodnionego twierdzenia. To znaczy, jeśli $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_\varphi$, to dla dowolnego $x \in E_{\varphi_2}$ oraz dla każdego $y \in E_{\varphi_1}$, $xy \in E_\varphi$. Oznacza to, że $x \in M(E_{\varphi_1}, E_\varphi)$. Zatem na podstawie Twierdzenia 4.2.5 zachodzi relacja $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ odpowiednio dla wszystkich lub dla dużych argumentów.

W analogiczny sposób punkt (vi) wynika z Twierdzenia 4.2.8. ■

Uwaga 5.2.2. Zwróćmy uwagę, że założenie $E_a \neq \{0\}$ w punkcie (iv) jest uzasadnione. Jeśli bowiem $E = L^\infty$ to $E_\varphi = E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} = L^\infty$ dla dowolnych funkcji Orlicza $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$. Wtedy oczywiście $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} = E_\varphi$ i żadna zależność między tymi funkcjami nie jest konieczna. Warunek $E_a \neq \{0\}$ w powyższym można osłabić jak w uwadze po Twierdzeniu 4.2.5, tzn. w dowodzie potrzebujemy tylko, aby

$$\exists_{a>0} \forall_{0<t<a} \exists_{A \in \Sigma} \|\chi_A\|_E = t.$$

Jako natychmiastowy wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujące uogólnienie wyników O'Neil'a (zob. Twierdzenia 6.5, 6.6 i 6.7 z [93]) z przestrzeni Orlicza na przestrzenie E_φ .

Wniosek 5.2.3. (i) Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go taką, że $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz $\text{supp} E_a = \Omega$. Wówczas $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

(ii) Niech E będzie funkcyjną przestrzenią Köthe'go taką, że $L^\infty \hookrightarrow E$ oraz $E_a \neq \{0\}$. Wówczas $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.

(iii) Niech e będzie ciągłą przestrzenią Köthe'go taką, że $l^\infty \not\hookrightarrow e \hookrightarrow l^\infty$ oraz $\lim \sup_i \|e_i\|_e < \infty$. Wówczas $e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2} \hookrightarrow e_\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \prec \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

Zajmiemy się obecnie inkluzją $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

Twierdzenie 5.2.4. Niech E będzie przestrzenią Köthe'go oraz niech φ, φ_1 i φ_2 będą funkcjami Orlicza.

- (i) Jeśli $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów, to $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

- (ii) Jeśli $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów i $L^\infty \hookrightarrow E$, to $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.
- (iii) Jeśli $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla małych argumentów i $E \hookrightarrow L^\infty$, to $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.
- (iv) Jeśli E jest symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $E_a \neq \{0\}$ oraz $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.
- (v) Jeśli E jest symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $\text{supp}E_a = \Omega$, $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.
- (vi) Jeśli e jest symetryczną, ciągową przestrzenią Köthe'go, $e \in (OC)$ oraz $e_\varphi \hookrightarrow e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2}$, to $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

Dowód. (i) Niech $z \in E_\varphi \setminus \{0\}$. Oznaczmy

$$y = \varphi \left(\frac{|z|}{\|z\|_{E_\varphi}} \right),$$

$$z_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^{-1}(y(t)) \sqrt{\frac{|z|(t)}{\varphi_1^{-1}(y(t))\varphi_2^{-1}(y(t))}} & \text{gdy } t \in \text{supp}(z), \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases} \quad (5.3)$$

dla $i = 1, 2$. Odnotujmy najpierw, że elementy z_i są dobrze zdefiniowane. Rzeczywiście, jeśli $a_\varphi = 0$ to $y(t) > 0$ dla μ -p.w. $t \in \text{supp}(z)$. Jeśli natomiast $a_\varphi > 0$, to z założenia $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ wynika, że $a_{\varphi_1} > 0$ oraz $a_{\varphi_2} > 0$. Istotnie, gdyby $a_\varphi > 0$ oraz $a_{\varphi_1} = 0$ (lub $a_{\varphi_2} = 0$), to nierówność $D\varphi_1^{-1}(u)\varphi_2^{-1}(u) \geq \varphi^{-1}(u)$ nie byłaby spełniona przy $u \rightarrow 0$. W konsekwencji $\varphi_1^{-1}(0) = a_{\varphi_1}$ i $\varphi_2^{-1}(0) = a_{\varphi_2}$. Ponadto, jeśli stała $D > 0$ jest jak w (4.32), to gdy $u \rightarrow 0^+$, dostaniemy $a_\varphi \leq Da_{\varphi_1}a_{\varphi_2}$. Udowodnimy obecnie, że

$$\varphi_i \left(\frac{z_i}{\sqrt{D}\|z\|_{E_\varphi}} \right) \leq y, \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Jeśli $y(t) = 0$, to

$$z_i(t) = \sqrt{\frac{|z|(t)}{a_{\varphi_1}a_{\varphi_2}}} \varphi_i^{-1}(0) \leq \sqrt{\frac{\|z\|_{E_\varphi} a_\varphi}{a_{\varphi_1}a_{\varphi_2}}} \varphi_i^{-1}(0) \leq \sqrt{D\|z\|_{E_\varphi}} \varphi_i^{-1}(0)$$

i w rezultacie

$$\varphi_i \left(\frac{z_i(t)}{\sqrt{D}\|z\|_{E_\varphi}} \right) = 0 = y(t).$$

Jeśli natomiast $y(t) > 0$, to

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \sqrt{\frac{|z|(t)}{\varphi_1^{-1}(y(t))\varphi_2^{-1}(y(t))}} \varphi_i^{-1}(y(t)) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{D|z|(t)}{\varphi_1^{-1}(y(t))}} \varphi_i^{-1}(y(t)) = \sqrt{D\|z\|_{E_\varphi}} \varphi_i^{-1}(y(t)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

zatem dowiedliśmy nierówność (5.4). Stosując (5.4) dostaniemy

$$I_{\varphi_1} \left(\frac{z_1}{\sqrt{D} \|z\|_{E_\varphi}} \right) \leq \|y\|_E \leq 1.$$

To znaczy, że $\|z_1\|_{E_{\varphi_1}} \leq \sqrt{D} \|z\|_{E_\varphi}$. Podobnie $\|z_2\|_{E_{\varphi_2}} \leq \sqrt{D} \|z\|_{E_\varphi}$. Oczywiście, $|z| = z_1 z_2$. Stąd $z \in E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ oraz $\|z\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}} \leq D \|z\|_{E_\varphi}$.

(ii) Zauważmy, iż założenie $L^\infty \hookrightarrow E$ implikuje, że $L^\infty \hookrightarrow E_\varphi$, $L^\infty \hookrightarrow E_{\varphi_1}$ i $L^\infty \hookrightarrow E_{\varphi_2}$. Jeśli ponadto $b_\varphi < \infty$, to $E_\varphi \hookrightarrow L^\infty$. Stąd

$$E_\varphi = L^\infty = L^\infty \odot L^\infty \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2},$$

zatem twierdzenie jest prawdziwe, gdy $b_\varphi < \infty$.

Przypuśćmy, że $b_\varphi = \infty$. Ustalmy $\gamma = \varphi^{-1}(u_0)$, gdzie u_0 jest jak w (4.32) oraz niech $\gamma_1 > 0$ będzie taka, że

$$\max \{ \varphi_1(\gamma_1), \varphi_2(\gamma_1) \} \|\chi_\Omega\|_E \leq 1/2.$$

Niech $z \in S(E_\varphi)$. Zdefiniujmy

$$A = \{t \in \text{supp}(z) : |z(t)| \geq \gamma\},$$

$$B = \text{supp}(z) \setminus A = \{t \in \text{supp}(z) : |z(t)| < \gamma\}.$$

Dalej oznaczmy

$$y = \varphi(|z|) \text{ oraz } z_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^{-1}(y(t)) \sqrt{\frac{|z(t)|}{\varphi_1^{-1}(y(t)) \varphi_2^{-1}(y(t))}} & \text{gdy } t \in A, \\ \sqrt{|z(t)|} & \text{gdy } t \in B, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

dla $i = 1, 2$. Ponieważ $\varphi(\gamma) > 0$, to elementy z_i są dobrze zdefiniowane. Jeśli $t \in A$, to

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \varphi_i^{-1}(y(t)) \sqrt{\frac{|z(t)|}{\varphi_1^{-1}(y(t)) \varphi_2^{-1}(y(t))}} \leq \\ &\leq \varphi_i^{-1}(y(t)) \sqrt{\frac{D|z(t)|}{\varphi^{-1}(y(t))}} \leq \sqrt{D} \varphi_i^{-1}(y(t)), \end{aligned}$$

skąd

$$I_{\varphi_1} \left(\frac{z_1}{2\sqrt{D}} \chi_A \right) \leq \frac{1}{2} I_{\varphi_1} \left(\frac{z_1}{\sqrt{D}} \chi_A \right) \leq \frac{1}{2} \|y\|_E \leq 1/2.$$

Położmy $\lambda_0 = \sqrt{\gamma}/\gamma_1$. Wtedy

$$I_{\varphi_1} \left(\frac{z_1}{\lambda_0} \chi_B \right) \leq \varphi_1(\gamma_1) \|\chi_\Omega\|_E \leq 1/2.$$

Zatem, dla $\eta = \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{2\sqrt{D}} \right\}$, dostaniemy

$$I_{\varphi_1}(\eta z_1) \leq 1.$$

Oznacza to, że $\|z_1\|_{E_{\varphi_1}} \leq \frac{1}{\eta}$. Analogicznie $\|z_2\|_{E_{\varphi_2}} \leq \frac{1}{\eta}$. Oczywiście $|z| = z_1 z_2$, więc $z \in E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ oraz $\|z\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}} \leq \frac{1}{\eta^2}$. W konsekwencji

$$\|z\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}} \leq \frac{1}{\eta^2} \|z\|_{E_{\varphi}}$$

dla każdego niezerowego $z \in E_{\varphi}$.

(iii) Jeśli $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla małych argumentów, to na podstawie Lematu 4.2.2(ii)(a), istnieje stała $D_1 > 0$ taka, że

$$\varphi^{-1}(u) \leq D_1 \varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u) \quad (5.6)$$

dla wszystkich $u \leq M$, gdzie M jest stałą włożenia $E \xrightarrow{M} L^\infty$.

Zatem definiując

$$y = \varphi \left(\frac{|z|}{\|z\|_{E_{\varphi}}} \right)$$

dostaniemy, że $\|y\|_E \leq 1$ co dalej oznacza, że $\|y\|_{L^\infty} \leq M \|y\|_E \leq M$. Możemy więc postąpić dokładnie jak w dowodzie punktu (i), ponieważ oszacowania (5.5) pozostaną prawdziwe na podstawie (5.6).

(iv) Przypuśćmy, że warunek $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ nie jest spełniony dla dużych argumentów. Wtedy istnieje ciąg (u_n) rosnący do nieskończoności i taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$2^n \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) \leq \varphi^{-1}(u_n). \quad (5.7)$$

Pokażemy, że istnieje ciąg (z_n) taki, że

$$\frac{\|z_n\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}}}{\|z_n\|_{E_{\varphi}}} \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

co będzie oznaczało, że włożenie $E_{\varphi} \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ nie zachodzi. Przyjmijmy więc $z_n = x_n y_n$, gdzie

$$x_n = \varphi_1^{-1}(u_n) \chi_{A_n}, \quad y_n = \varphi_2^{-1}(u_n) \chi_{A_n}$$

oraz zbiory A_n są wybrane tak, że

$$\|u_n \chi_{A_n}\|_E = 1,$$

(zob. dowód Twierdzenia 4.2.5 (i)). Niech $\varphi_1 \in \mathcal{Y}^{(1)} \cup \mathcal{Y}^{(2)}$ (zob. def. (4.29)). Wtedy dla $\lambda < 1$, korzystając z wypukłości funkcji φ_1 i Lematu 4.2.1(v) dostaniemy

$$\begin{aligned} I_{\varphi_1} \left(\frac{x_n}{\lambda} \right) &= \left\| \varphi_1 \left(\frac{\varphi_1^{-1}(u_n)}{\lambda} \right) \chi_{A_n} \right\|_E \geq \frac{1}{\lambda} \left\| \varphi_1 \left(\varphi_1^{-1}(u_n) \right) \chi_{A_n} \right\|_E = \\ &= \frac{1}{\lambda} u_n \|\chi_{A_n}\|_E > 1. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $\varphi_1 \in \mathcal{Y}^{(3)}$, to $I_{\varphi_1} \left(\frac{x_n}{\lambda} \right) = \infty$ dla $\lambda < 1$ i dostatecznie dużych n . Zatem $\|x_n\|_{E_{\varphi_1}} \geq 1$ i podobnie $\|y_n\|_{E_{\varphi_2}} \geq 1$. Stosując Twierdzenia 5.1.3(ii) i 5.1.6, dostaniemy

$$\begin{aligned} \|z_n\|_{E_{\varphi_1} \circ E_{\varphi_2}} &= \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) f_{E_{\varphi_1} \circ E_{\varphi_2}}(\gamma_n) \\ &= \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) f_{E_{\varphi_1}}(\gamma_n) f_{E_{\varphi_2}}(\gamma_n) \\ &= \|x_n\|_{E_{\varphi_1}} \|y_n\|_{E_{\varphi_2}} \geq 1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdzie $\gamma_n = m(A_n)$. Ponadto z nierówności (5.7), wypukłości funkcji φ_1 i Lematu 4.2.2 wnosimy, że

$$\begin{aligned} I_{\varphi}(2^n z_n) &= \left\| \varphi \left(2^n \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) \right) \chi_{A_n} \right\|_E \leq \left\| \varphi \left(\varphi^{-1}(u_n) \right) \chi_{A_n} \right\|_E \\ &\leq \|u_n \chi_{A_n}\|_E = 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Zatem $\|z_n\|_{E_{\varphi}} \leq 1/2^n$, co razem z nierównością (5.9) daje warunek (5.8).

(v) Załóżmy, że warunek $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ nie zachodzi dla małych argumentów. Wtedy znajdziemy ciąg (u_n) zbieżny do zera spełniający nierówność (5.7). Dalej, postępując jak w Twierdzeniu 4.2.5 (ii) znajdziemy ciąg zbiorów (A_n) taki, że $\|u_n \chi_{A_n}\|_E = 1$. Wtedy wystarczy postąpić, jak w punkcie (iv) powyżej.

(vi) Przypuśćmy, że warunek $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ nie jest spełniony dla małych argumentów. Wtedy znajdziemy ciąg (u_n) zbieżny do zera i taki, że

$$2^n \varphi_1^{-1}(u_n) \varphi_2^{-1}(u_n) \leq \varphi^{-1}(u_n).$$

Skoro $e \in (OC)$ i $e \in (FP)$, to $\lim_i \left\| \sum_{k=0}^i e_k \right\|_e \rightarrow \infty$. W konsekwencji, dla każdego n istnieje i_n takie, że

$$u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \leq 1 < u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n+1} e_k \right\|_e.$$

Ponadto symetria przestrzeni e implikuje, że $\sup_i \|e_i\|_e = \|e_1\|_e = M$, więc $u_n \|e_{i_n+1}\|_e = M u_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Ale

$$1 \leq u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n+1} e_k \right\|_e \leq u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e + u_n \|e_{i_n+1}\|_e,$$

więc

$$0 \leq 1 - u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \leq u_n \|e_{i_n+1}\|_e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem

$$u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \leq 1 \text{ i } u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \rightarrow 1^-,$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Podstawiając

$$x_n = \varphi_1^{-1}(u_n) \sum_{k=0}^{i_n} e_k \text{ oraz } y_n = \varphi_2^{-1}(u_n) \sum_{k=0}^{i_n} e_k$$

dostaniemy

$$I_{\varphi_1}(x_n) \leq 1.$$

Ponadto, dla dużych n zachodzi równość $\varphi_1(\varphi_1^{-1}(u_n)) = u_n$, więc dla takich n mamy

$$I_{\varphi_1}(2x_n) = \varphi_1(2\varphi_1^{-1}(u_n)) \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \geq 2u_n \left\| \sum_{k=0}^{i_n} e_k \right\|_e \rightarrow 2 \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

Zatem, dla odpowiednio dużych n , $1 \geq \|x_n\|_{e_{\varphi_1}} \geq 1/2$, podobnie $1 \geq \|y_n\|_{e_{\varphi_2}} \geq 1/2$. W konsekwencji, biorąc $z_n = x_n y_n$ i tłumacząc jak w (5.9), na mocy Uwagi 5.1.7 mamy $\|z_n\|_{e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2}} \geq 1/4$. Z drugiej strony, analogicznie jak w (5.10), dostaniemy $I_{\varphi}(2^n z_n) \leq 1$, co implikuje warunek (5.8) i kończy dowód. ■

Wniosek 5.2.5. (1) Niech E będzie symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz $\text{supp}E_a = \Omega$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

(b) $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

(2) Niech E będzie symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $L^\infty \hookrightarrow E$ oraz $E_a \neq \{0\}$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.

(b) $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

(3) Niech e będzie symetryczną, ciągową przestrzenią Köthe'go oraz $e \in (OC)$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \succ \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

(b) $e_\varphi \hookrightarrow e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2}$.

Z wyżej udowodnionych Twierdzeń 5.2.1 i 5.2.4 wprost wynika wniosek.

Wniosek 5.2.6. (1) Niech E będzie symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $L^\infty \not\hookrightarrow E$ oraz $\text{supp}E_a = \Omega$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów.

(b) $E_\varphi = E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

(2) Niech E będzie symetryczną, funkcyjną przestrzenią Köthe'go, $L^\infty \hookrightarrow E$ oraz $E_a \neq \{0\}$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów.

(b) $E_\varphi = E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$.

(3) Niech e będzie symetryczną, ciągową przestrzenią Köthe'go oraz $e \in (OC)$. Niżej wymienione warunki są równoważne:

(a) $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla małych argumentów.

(b) $e_\varphi = e_{\varphi_1} \odot e_{\varphi_2}$.

Podobnie jak w rozdziale dotyczącym przestrzeni multiplikatorów, pozostaje pytanie jak konstruować funkcję φ , tak aby dla danych φ_1, φ_2 zachodziła relacja

$$\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}.$$

Funkcję $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ definiujemy wzorem

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) = \inf_{u=vw} \{\varphi_1(v) + \varphi_2(w)\},$$

dla $u \geq 0$, gdzie φ_1, φ_2 są funkcjami Orlicza. Operacja $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ została zdefiniowana w [110] i [28], a później była badana też w pracach [13], [86], [88] i [106]. Okazuje się, że tak skonstruowana funkcja posiada porządane własności. Punkt (ii) następującego twierdzenia został udowodniony w pracy [110] dla niezdegenerowanych funkcji Orlicza, a w pracy [106] nawet dla ciągłych i rosnących funkcji na \mathbb{R}_+ , jednak autorzy nie dopuszczali funkcji, które zerują się poza zerem lub przyjmują „wartość” ∞ . Dla kompletności wykładu zamieszczamy poniżej dowód obejmujący też takie przypadki.

Twierdzenie 5.2.7. *Niech φ_1, φ_2 będą funkcjami Orlicza oraz niech $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$.*

(i) *Funkcja φ jest lewostronnie ciągła, niemalejąca i $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.*

(ii) *Zachodzi nierówność*

$$\varphi^{-1}(u) \leq \varphi_1^{-1}(u) \varphi_2^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(2u), \quad (5.11)$$

dla wszystkich $u \geq 0$.

Dowód. (*) Zauważmy na początek, że infimum w definicji funkcji $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ możemy zastąpić przez minimum, tzn.

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) &= \inf_{u=vw} \{\varphi_1(v) + \varphi_2(w)\} = \\ &= \min_{u=vw} \{\varphi_1(v) + \varphi_2(w)\}, \end{aligned}$$

dla wszystkich $u > 0$. Rzeczywiście, ustalmy $u > 0$ takie, że $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) < \infty$ i przypuśćmy, że ciągi $(w_n), (v_n)$ realizują powyższe infimum, tzn. $u = w_n v_n$ i $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n)$. Jeśli byłoby $\limsup_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$, to $\varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n) \rightarrow \infty$, co przeczyłoby założeniu $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) < \infty$, podobnie (v_n) nie może być nieograniczony. Z drugiej strony, gdyby $\liminf_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, to musiałoby być $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$, co jak wcześniej pokazaliśmy jest niemożliwe. Zatem ciągi $(w_n), (v_n)$ posiadają punkty skupienia $u, v > 0$. Jeśli $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(u) = \infty$, to znaczy, że każda para realizuje infimum.

(i) Na początek wykażemy monotoniczność. Niech $0 < u_1 < u_2$. Jeśli $v_2 w_2 = u_2$ oraz $\varphi_1(v_2) + \varphi_2(w_2) = \varphi(u_2)$ (z (*) wynika, że takie liczby istnieją), to definiując $v_1 = v_2, w_1 = \frac{u_1}{v_2} < \frac{u_2}{v_2} = w_2$, na podstawie monotoniczności φ_2 dostaniemy

$$\varphi_1(v_1) + \varphi_2(w_1) \leq \varphi_1(v_2) + \varphi_2(w_2),$$

co pokazuje, że

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= \inf_{u_1=v_1 w_1} \{\varphi_1(v_1) + \varphi_2(w_1)\} \\ &\leq \varphi_1(v_2) + \varphi_2(w_2) = \varphi(u_2). \end{aligned}$$

Aby pokazać, że φ jest lewostronnie ciągła, ustalmy dowolne $u_0 > 0$ i na początek załóżmy, że $\varphi(u_0) < \infty$. Przypuśćmy, że φ nie jest lewostronnie ciągła w u_0 . Wtedy, na mocy monotoniczności φ , oznacza to, że istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $u < u_0$ zachodzi nierówność

$$\varphi(u_0) > \varphi(u) + \delta. \quad (5.12)$$

Zdefiniujmy liczby

$$a_1 = \sup \{t > 0 : \varphi_1(t) \leq \varphi(u_0) + \delta\},$$

$$a_2 = \sup \{t > 0 : \varphi_2(t) \leq \varphi(u_0) + \delta\}.$$

Dalej, niech $u_n \nearrow u_0$. Na podstawie (*) znajdziemy $v_n, w_n > 0$ takie, że $v_n w_n = u_n$ oraz

$$\varphi(u_n) = \varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n).$$

Wtedy $v_n \leq a_1$ i $w_n \leq a_2$ dla każdego n . Stąd przechodząc do podciągów, na podstawie zwartości przedziałów $[0, a_1]$ i $[0, a_2]$ możemy przyjąć, że $v_n \rightarrow v_0 \leq a_1$ i $w_n \rightarrow w_0 \leq a_2$, skąd $u_0 = v_0 w_0$. Ale φ_1 i φ_2 są ciągłe na przedziałach $[0, a_1]$ i $[0, a_2]$, więc

$$\varphi(u_n) = \varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n) \rightarrow \varphi_1(v_0) + \varphi_2(w_0) \geq \varphi(u_0),$$

co jest sprzeczne z nierównością (5.12).

Przypuśćmy, że $\varphi(u_0) = \infty$ i $\varphi(u) < \infty$, dla każdego $u < u_0$. Niech $u_n \nearrow u_0$. Znajdziemy $v_n, w_n > 0$ takie, że $v_n w_n = u_n$ i

$$\varphi(u_n) = \varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n). \quad (5.13)$$

Pokażemy, że $\varphi(u_n) \rightarrow \infty$. Z równości (5.13) i założenia $\varphi(u_n) < \infty$ wynika, że $v_n \leq b_{\varphi_1}$ i $w_n \leq b_{\varphi_2}$ dla każdego n . Zatem przechodząc w razie konieczności do podciągu, możemy przyjąć, że $v_n \rightarrow v_0 \leq b_{\varphi_1}$ i $w_n \rightarrow w_0 \leq b_{\varphi_2}$. Stąd $u_0 = v_0 w_0$. Rozważmy dwa przypadki. Jeśli $\max\{\varphi_1(v_n), \varphi_2(w_n)\} \rightarrow \infty$, to na podstawie (5.13), $\varphi(u_n) \rightarrow \infty$, więc φ jest lewostronnie ciągła w u_0 . Jeśli $\max\{\varphi_1(v_n), \varphi_2(w_n)\} \leq M$ dla każdego n , to z ciągłości funkcji φ_1 i φ_2 wynika, że też $\max\{\varphi_1(v_0), \varphi_2(w_0)\} \leq M$. Stąd

$$\varphi(u_0) \leq \varphi_1(v_0) + \varphi_2(w_0) \leq 2M,$$

co przeczy założeniu, że $\varphi(u_0) = \infty$, a zatem kończy dowód lewostronnej ciągłości funkcji φ .

Pozostało pokazać, że $\varphi(u) \rightarrow \infty$, gdy $u \rightarrow \infty$. Niech $u_n \rightarrow \infty$ i $v_n, w_n > 0$, $v_n w_n = u_n$ będą jak w (5.13). Warunek $u_n \rightarrow \infty$ oznacza jednak, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ lub $\limsup_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$, co z kolei daje

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(v_n) + \varphi_2(w_n) \\ &\geq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(v_n), \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_2(w_n) \right\} = \infty. \end{aligned}$$

Stąd i z monotoniczności φ wnosimy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) = \infty$, a ze względu na dowolność (u_n) dostajemy $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

(ii) Zauważmy, że wystarczy pokazać tylko lewą nierówność z warunku (5.11), ponieważ druga wynika wprost z definicji konstrukcji $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ oraz dowodu Uwagi 4.2.3. Odnotujmy, że we wspomnianym dowodzie korzystaliśmy z Lematu 4.2.1, który jednak pozostanie prawdziwy także dla funkcji $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, choć nie musi być ona wypukła, ponieważ nigdzie w dowodzie nie korzystaliśmy z wypukłości, a jedynie z monotoniczności i lewostronnej ciągłości. Niech $0 < t < \infty$ będzie dowolne i ustalone, przyjmijmy $u = \varphi^{-1}(t)$. Wtedy z Lematu 4.2.1 mamy $\varphi(u) = \varphi(\varphi^{-1}(t)) \leq t < \infty$. Niech ponadto $w, v > 0$, $u = vw$ będą takie, że

$$\varphi(u) = \varphi_1(v) + \varphi_2(w).$$

Wtedy $\varphi(u) \geq \varphi_1(v)$ i $\varphi(u) \geq \varphi_2(w)$. Ponadto $\varphi_1(v) < \infty$ oraz $\varphi_2(w) < \infty$ i z Lematu 4.2.1 dostaniemy

$$v \leq \varphi_1^{-1}(\varphi(u)) \text{ oraz } w \leq \varphi_2^{-1}(\varphi(u)).$$

Zatem

$$u = vw \leq \varphi_2^{-1}(\varphi(u)) \varphi_1^{-1}(\varphi(u)).$$

Skoro $u = \varphi^{-1}(t)$, to $\varphi(u) \leq t$ i mamy

$$\varphi^{-1}(t) \leq \varphi_2^{-1}(t) \varphi_1^{-1}(t).$$

Ze względu na prawostronną ciągłość funkcji φ^{-1} , φ_2^{-1} i φ_1^{-1} nierówność pozostaje prawdziwa też dla $t = 0$. ■

Dolny indeks Matuszewskiej - Orlicza definiuje się jako

$$\alpha(\varphi) = \sup \left\{ p \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \forall u > 0, a \in (0, 1) \varphi(au) \leq Ma^p \varphi(u) \right\}. \quad (5.14)$$

W pracy [52] pokazano, że jeśli funkcja $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest lewostronnie ciągła, niemalejąca, $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$ oraz $\alpha(\varphi) > 0$, to przestrzeń Calderóna - Łozanowskiego E_φ jest przestrzenią quasi - Köthe'go. Ponadto, gdy $\alpha(\varphi) \geq 1$, to istnieje na E_φ norma równoważna do oryginalnej quasi - normy, z którą przestrzeń E_φ jest przestrzenią Köthe'go. Oczywiście, jeśli φ jest funkcją Orlicza, to z wypukłości funkcji φ , na podstawie Lematu 1.2.2 wynika, że $\alpha(\varphi) \geq 1$.

Lemat 5.2.8. Niech φ_1, φ_2 będą funkcjami Orlicza. Jeśli $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, to

$$\alpha(\varphi) \geq \frac{\min \{ \alpha(\varphi_1), \alpha(\varphi_2) \}}{2}.$$

Dowód. Niech $\alpha' = \min \{ \alpha(\varphi_1), \alpha(\varphi_2) \}$ i ustalmy dowolne $\alpha < \alpha'$. Ponadto, przyjmijmy $M(\alpha) = \max \{ M_1, M_2 \}$, gdzie M_1, M_2 są jak w definicji (5.14), tzn. $\varphi_1(au) \leq M_1 a^\alpha \varphi_1(u)$ oraz $\varphi_2(au) \leq M_2 a^\alpha \varphi_2(u)$ dla wszystkich $u > 0$ i $a \in (0, 1)$. Mamy

$$\begin{aligned} \varphi(au) &= \inf_{au=vw} \{ \varphi_1(v) + \varphi_2(w) \} = \\ &= \inf_{u=st} \{ \varphi_1(\sqrt{as}) + \varphi_2(\sqrt{at}) \} \leq \\ &\leq Ma^{\alpha/2} \inf_{u=st} \{ \varphi_1(s) + \varphi_2(t) \} = Ma^{\alpha/2} \varphi(u), \end{aligned}$$

dla każdego $u > 0$ i $a \in (0, 1)$. Ponieważ $\alpha < \alpha'$ była dowolne, to przechodząc do supremum, otrzymujemy żądany wynik. ■

Twierdzenie 5.2.9. Niech φ_1, φ_2 będą funkcjami Orlicza, $\varphi := \varphi_1 \oplus \varphi_2$ oraz E będzie przestrzenią Köthe'go. Wtedy $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} = E_\varphi$.

Dowód. Zaczniemy od inkluzji $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \hookrightarrow E_\varphi$. Z definicji funkcji $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ wynika, że

$$\varphi(uv) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$$

dla wszystkich $u, v > 0$. Niech $z \in E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$, $z \neq 0$. Wybierzmy dowolne $0 \leq x \in E_{\varphi_1}$, $0 \leq y \in E_{\varphi_2}$ tak, aby $|z| = xy$. Ponieważ $\alpha(\varphi_1) \geq 1$ i $\alpha(\varphi_2) \geq 1$, to z Lematu 5.2.8 wynika, że $\alpha(\varphi) \geq 1/2$. Zatem, dla $p = 1/3$ istnieje $M > 0$ taka, że $\varphi(au) \leq Ma^p \varphi(u)$ dla wszystkich $u > 0, a \in (0, 1)$. Ustalmy $a > 0$ takie, że $2a^{1/3}M \leq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_\varphi \left(\frac{az}{\|x\|_{E_{\varphi_1}} \|y\|_{E_{\varphi_2}}} \right) &\leq Ma^{1/3} \left\| \varphi \left(\frac{x}{\|x\|_{E_{\varphi_1}}} \frac{y}{\|y\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \right\|_E \\ &\leq Ma^{1/3} \left(\left\| \varphi_1 \left(\frac{x}{\|x\|_{E_{\varphi_1}}} \right) \right\|_E + \left\| \varphi_2 \left(\frac{y}{\|y\|_{E_{\varphi_2}}} \right) \right\|_E \right) \\ &\leq 2a^{1/3}M \leq 1. \end{aligned}$$

Zatem $\|z\|_{E_\varphi} \leq \frac{1}{a} \|x\|_{E_{\varphi_1}} \|y\|_{E_{\varphi_2}}$ i w rezultacie $\|z\|_{E_\varphi} \leq \frac{1}{a} \|z\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}}$, czyli $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \xrightarrow{1/a} E_\varphi$. Zastanówmy się nad inkluzją $E_\varphi \hookrightarrow E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$. Niech $z \in E_\varphi \setminus \{0\}$. Niech ponadto y, z_1 i z_2 będą jak w (5.3). Identycznie jak w Twierdzeniu 5.2.4 dowodzimy, że

$$\varphi_i \left(\frac{z_i}{\sqrt{\|z\|_{E_\varphi}}} \right) \leq y, \quad i = 1, 2. \quad (5.15)$$

Wtedy

$$I_{\varphi_i} \left(\frac{z_i}{\sqrt{\|z\|_{E_\varphi}}} \right) \leq \|y\|_E \leq 1,$$

zatem $\|z_1\|_{E_{\varphi_1}} \leq \sqrt{\|z\|_{E_\varphi}}$ oraz $\|z_2\|_{E_{\varphi_2}} \leq \sqrt{\|z\|_{E_\varphi}}$. Oczywiście $|z| = z_1 z_2$, więc $z \in E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ oraz $\|z\|_{E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}} \leq \|z\|_{E_\varphi}$. ■

Uwaga 5.2.10. Postać przestrzeni $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2}$ można uzyskać też z Twierdzenia 5.1.2 oraz twierdzenia reiteracyjnego dla przestrzeni Calderóna-Łozanowskiego (zob. Przykład 5 na str. 180 w [86]), które mówi, że

$$\rho_0(\rho_1(X, Y), \rho_2(X, Y)) = \rho(X, Y),$$

gdzie $\rho(s, t) = \rho_0(\rho_1(s, t), \rho_2(s, t))$. Wiemy jednak, że $E_{\varphi_1} \equiv \rho_{\varphi_1}(E, L^\infty)$, $E_{\varphi_2} \equiv \rho_{\varphi_2}(E, L^\infty)$, gdzie $\rho_{\varphi_1}, \rho_{\varphi_2}$ są zdefiniowane jak w (1.9). Wtedy dla $\rho_1 = \rho_{\varphi_1}$, $\rho_2 = \rho_{\varphi_2}$ oraz $\rho_0(s, t) = s^{1/2}t^{1/2}$ mamy $\rho = \rho_{\varphi_1}^{1/2}\rho_{\varphi_2}^{1/2}$. Zatem dla $s, t > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \rho(s, t) &= \left(t\varphi_1^{-1} \left(\frac{s}{t} \right) \right)^{1/2} \left(t\varphi_2^{-1} \left(\frac{s}{t} \right) \right)^{1/2} = \\ &= t \left(\varphi_1^{-1} \left(\frac{s}{t} \right) \varphi_2^{-1} \left(\frac{s}{t} \right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Stąd, przyjmując $\psi^{-1} = (\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1})^{1/2}$, mamy $\rho = \rho_\psi$ zgodnie z definicją (1.9). Czyli reiterując dostajemy

$$E_{\varphi_1}^{1/2}E_{\varphi_2}^{1/2} = \rho_\psi(E, L^\infty) \equiv E_\psi$$

Ponadto, na podstawie Twierdzenia 5.1.2 dostaniemy

$$E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} \equiv (E_{\varphi_1}^{1/2}E_{\varphi_2}^{1/2})^{(1/2)} = E_\psi^{(1/2)}.$$

Widzimy też, że

$$E_\psi^{(1/2)} = E_\varphi,$$

gdzie $\varphi(t) = \psi(\sqrt{t})$. Ostatecznie

$$E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} = E_\varphi,$$

gdzie

$$\varphi(t) = \psi(\sqrt{t}). \quad (5.16)$$

Pozostaje jeszcze zauważyć, że gdy funkcje φ i ψ są niezdegenerowane (tzn. różnowartościowe), to z ostatniej równości wynika, że $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} = \varphi^{-1}$. Rzeczywiście, mamy

$$\varphi(t) = \psi(\sqrt{t}) \Leftrightarrow \sqrt{t} = \psi^{-1}(\varphi(t)).$$

Stąd, podstawiając $t = \varphi^{-1}(u)$ dostaniemy

$$[\varphi^{-1}(u)]^{1/2} = \psi^{-1}(u),$$

czyli

$$(\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1})^{1/2} = (\varphi^{-1})^{1/2}.$$

5.3 Faktoryzacja

Twierdzenie faktoryzacyjne Łozanowskiego mówi, że dla przestrzeni Köthe'go X zachodzi równość

$$X \odot X' \equiv L^1,$$

gdzie X' oznacza Köthe dual przestrzeni X ([77], zob. też [37], [86], [101]). Możemy więc powiedzieć, że przestrzeń L^1 faktoryzuje się przez dowolną przestrzeń Köthe'go X lub, że X faktoryzuje L^1 . Powstaje pytanie o uogólnienie tego twierdzenia, tzn. czy przestrzeń Köthe'go Y można faktoryzować przez przestrzeń X , to znaczy, czy i kiedy

$$X \odot M(X, Y) \equiv Y? \quad (5.17)$$

Zwróćmy uwagę, że na przestrzeń $M(X, Y)$ możemy spojrzeć jak na „iloraz” przestrzeni Y przez X . Wtedy pytanie o faktoryzację jest pytaniem, czy przestrzeń Y „podzielona” i „pomnożona” przez X jest nadal tą samą przestrzenią.

Już na podstawie poprzedniego rozdziału nietrudno zauważyć, że w ogólności odpowiedź na tak postawione pytanie jest negatywna (np. gdy $M(X, Y) = \{0\}$). Można jednak podać też ciekawsze przykłady, kiedy faktoryzacja typu (5.17) nie zachodzi, nawet co do równoważności norm.

Przykład 5.3.1. Oznaczmy $\eta_p(t) = t^{1/p}$ dla $1 < p < \infty$ oraz niech Λ^p oznacza przestrzeń Lorentz'a Λ_{η_p} na $I = [0, 1]$, a M^p odpowiednią przestrzeń Marcinkiewicza M_{η_p} . Oczywiście $L^q \hookrightarrow M^q$ i $\Lambda^p \hookrightarrow L^p$, na podstawie (4.11), gdy $1 < p, q < \infty$. Z Twierdzenia 3 w [88] wynika, że

$$f_{M(\Lambda^p, L^p)}(t) = \sup_{0 < s < t} \frac{1}{s^{1/p}} f_{L^p}(s) = 1, \text{ dla każdego } 0 < t \leq 1.$$

Stąd $M(\Lambda^p, L^p) = L^\infty$ (zob. np. dowód punktu (f) w Przykładzie 4.2.23) a zatem dla $1 < p < \infty$

$$\Lambda^p \odot M(\Lambda^p, L^p) = \Lambda^p \odot L^\infty \equiv \Lambda^p \subsetneq L^p. \quad (5.18)$$

Ponadto, na mocy ogólnej własności (VI) ze wstępu do czwartego rozdziału wnosimy, że

$$M(\Lambda^p, L^p) \equiv M((L^p)', (\Lambda^p)') \equiv M(L^q, M^q), \text{ gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

a ostatnia równość wynika z reprezentacji przestrzeni dualnej odpowiednio do przestrzeni Lebesgue'a i przestrzeni Lorentz'a (zob. np. [68], Twierdzenie 5.2). W konsekwencji dla każdego $1 < q < \infty$ mamy

$$L^q \odot M(L^q, M^q) \equiv L^q \odot L^\infty \equiv L^q \subsetneq M^q. \quad (5.19)$$

Pozostaje uzasadnić, że odpowiednie inkluzje w (5.18) i (5.19) są właściwe. Niech $f(t) = t^{-1/q}$. Wtedy nietrudno sprawdzić, że $f \in M^q$, ale $f \notin L^q$. Stąd $L^q \neq M^q$ oraz przez dualność wnosimy, że także $\Lambda^p \neq L^p$. Czyli faktoryzacja (5.17) nie zachodzi nawet co do równości zbiorów.

Pytanie, kiedy faktoryzacja (5.17) zachodzi, było rozważane przez wielu autorów, np. w pracach [12], [94], [101], [105]. Omówmy pokrótce najbardziej znane wyniki tego typu.

1) Pierwszym twierdzeniem tego typu jest twierdzenie Łozanowskiego. Łozanowski oparł dowód na udowodnionym przez siebie twierdzeniu o dualu do przestrzeni $X^{1/2}(X')^{1/2}$ (zob. [77] oraz [101]). Później, niezależnie twierdzenie to zostało udowodnione przez Gillespie (zob. [37]), który użył znacznie dłuższego, ale elementarnego argumentu. W przypadku ciągowym bardzo ładny dowód podali Jamison i Ruckle (zob. [46]), a swoje rozumowanie oparli na równoważnym sformułowaniu twierdzenia Brouwer'a o punkcie stałym.

2) Bollobás i Leader w [12] uogólnili metodę z [46], aby pokazać, że gdy X, Y są skończone - wymiarowymi przestrzeniami Banacha, a $B(X), B(Y)$ ich kulami jednostkowymi, to przy pewnych założeniach dotyczących własności geometrycznych $B(M(X, Y))$ i $B(Y)$, zachodzi faktoryzacja $B(X) \odot B(M(X, Y)) \equiv B(Y)$.

3) Nilsson w [94, Lemat 2.5] pokazał, że jeśli X jest p -wypukła ze stałą 1 i posiada własność Fatou, to $X \odot M(X, L^p) \equiv L^p$. Dowód zaprezentowany przez Nilssona jest natychmiastową konsekwencją znanego twierdzenia faktoryzacyjnego Maurey'a (zob. [90]). Z drugiej strony w [99] Reisner zastosował rezultat Pisier z [96] i pokazał, że $X \odot M(X, L^p) \equiv L^p$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest p -wypukła ze stałą 1. W [105] Schep udowodnił równoważność wspomnianych warunków z L^p

- doskonałością przestrzeni X , tj. $M(M(X, L^p), L^p) \equiv X$. Ponadto wykazał, że gdy X jest p -wypukła ze stałą 1, a Y jest p -wkłęsa ze stałą 1, to $X \odot M(X, Y) \equiv Y$ oraz X jest Y -doskonała. Dowód Schepa wykorzystuje twierdzenie Łozanowskiego o dualu do $X^\theta (X')^{1-\theta}$.

Odnotujmy, że wszystkie z powyższych rezultatów wykorzystują znane i „mocne” twierdzenia, a równość $X \odot M(X, Y) \equiv Y$ dowodzona jest bez znajdowania $M(X, Y)$ i $X \odot M(X, Y)$ „oddzielnie”. Ponadto wydaje się, że aby uzyskać faktoryzację z równością norm, właśnie takie postępowanie jest konieczne. Jeśli jednak zapytamy tylko o równość zbiorów, tj. $X \odot M(X, Y) = Y$, to możemy uzyskać wyniki dla znacznie szerszej klasy przestrzeni obliczając kolejno $M(X, Y)$ i $X \odot M(X, Y)$. Właśnie w ten sposób autorzy pracy [63] udowodnili twierdzenia faktoryzacyjne dla przestrzeni Marcinkiewicza i Lorentza. Podobnie, jako wniosek z tego i poprzedniego rozdziału możemy podać twierdzenie faktoryzacyjne dla przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego E_φ .

Twierdzenie 5.3.2. *Niech φ_1, φ będą funkcjami Orlicza, natomiast E przestrzenią Köthe’go. Jeśli istnieje funkcja Orlicza φ_2 taka, że*

- i) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów,
 - ii) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów, gdy $L^\infty \hookrightarrow E$,
 - iii) $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla małych argumentów, gdy $E \hookrightarrow L^\infty$,
- to E_{φ_1} faktoryzuje E_φ , tzn.

$$E_{\varphi_1} \odot M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_\varphi$$

oraz E_{φ_1} jest E_φ -doskonała co do równoważności norm, tzn.

$$M(M(E_{\varphi_1}, E_\varphi), E_\varphi) = E_{\varphi_1}.$$

Dowód. Wystarczy zastosować Wniosek 4.2.16 oraz Twierdzenia 5.2.1 i 5.2.4. Przypuśćmy, że $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla wszystkich argumentów. Wtedy z Wniosku 4.2.16 mamy $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_{\varphi_2}$. Ponadto, znów na podstawie założenia $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$, z Twierdzeń 5.2.1 i 5.2.4 wynika, że zachodzi równość $E_{\varphi_1} \odot E_{\varphi_2} = E_\varphi$, co kończy dowód przypadku i). Pozostałe przypadki dowodzimy analogicznie. Aby zobaczyć, że E_{φ_1} jest E_φ -doskonała co do równoważności norm udowodnimy następujące stwierdzenie: Niech E, F będą przestrzeniami Köthe’go z własnością Fatou. Jeśli $E \odot M(E, F) = F$, to $M(M(E, F), F) = E$. Rzeczywiście, wykorzystując Twierdzenie 2.8 z [105] i ogólną własność (II), mamy

$$M(M(E, F), F) = M(M(E, F), E \odot M(E, F)) = E.$$

■

Jeśli zastosujemy Twierdzenie 4.2.24 i), to uzyskamy konkretne warunki, które zapewnią że funkcja φ_2 , dla której $\varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ będzie istniała.

Twierdzenie 5.3.3. *Niech φ_1, φ będą funkcjami Orlicza takimi, że $a_\varphi = a_{\varphi_1} = 0$ i $b_\varphi = b_{\varphi_1} = \infty$ oraz E będzie przestrzenią Köthe’go taką, że $L^\infty \hookrightarrow E$. Jeśli $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} = 0$ dla każdego $v > 0$ i zachodzi jeden z poniższych warunków:*

- a) funkcja $f_v(u) = \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)}$ jest nierosnąca na $(0, \infty)$ dla każdego $v > 0$,
 b) $\frac{\varphi^{-1}(u)}{\varphi_1^{-1}(u)}$ jest rosnąca dla dużych u ,
 c) funkcja $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ spełnia warunek Δ_2 dla dużych argumentów, to przestrzeń E_{φ_1} faktoryzuje E_φ , tzn.

$$E_{\varphi_1} \odot M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = E_\varphi.$$

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 4.2.24(i) pokazujemy, że przy powyższych założeniach funkcja $\varphi_2 = \varphi \ominus \varphi_1$ spełnia relację $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \approx \varphi^{-1}$ dla dużych argumentów. Zatem na mocy Twierdzenia 5.3.2 ii) zachodzi teza. ■

Oczywiście przestrzeń E_{φ_1} nie musi faktoryzować E_φ . Trywialne przykłady wynikają wprost z Twierdzenia 4.2.24(iii), tj. gdy $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(uv)}{\varphi_1(u)} = \infty$ dla wszystkich $v > 0$, to $M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = \{0\}$, więc $E_{\varphi_1} \odot M(E_{\varphi_1}, E_\varphi) = \{0\}$.

Przykład 5.3.4. Niech funkcje φ oraz ψ będą jak w Przykładzie 4.2.23. Pokazaliśmy, że wtedy

$$M(L^\psi, L^\varphi) = L^\infty.$$

Zatem

$$L^\psi \odot M(L^\psi, L^\varphi) = L^\psi \odot L^\infty = L^\psi \subsetneq L^\varphi,$$

czyli L^ψ nie faktoryzuje przestrzeni L^φ chociaż $M(L^\psi, L^\varphi) \neq \{0\}$.

Bibliografia

- [1] M. A. Akcoglu, L. Sucheston, *On uniform monotonicity of norms and ergodic theorems in function spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser., Suppl. 8 (1985), 325–335.
- [2] Yu. A. Abramovich, *Operators preserving disjointness on rearrangement invariant spaces*, Pacific J. Math. 148 (1991), no. 2, 201–206.
- [3] J. M. Anderson and A. L. Shields, *Coefficient multipliers of Bloch functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 224 (1976), no. 2, 255–265.
- [4] T. Ando, *On products of Orlicz spaces*, Math. Ann. 140 (1960), 174–186.
- [5] J. Appell and P. P. Zabrejko, *On the degeneration of the class of differentiable superposition operators in function spaces*, Analysis 7 (1987), no. 3-4, 305–312.
- [6] J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [7] S. V. Astashkin, *Rademacher functions in symmetric spaces*, J. Math. Sci. (N. Y.) 169 (2010), no. 6, 725–886 [Russian version in: Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. 32 (2009), 3–161].
- [8] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston 1988.
- [9] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Providence, RI 1967.
- [10] E. I. Bereznoi, L. Maligranda, *Representation of Banach ideal spaces and factorization of operators*, Canad. J. Math. 57 (2003), no. 5, 897–940.
- [11] B. Bollobás and I. Leader, *Generalized duals of unconditional spaces and Lozanovskii's theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 6, 583–588.
- [12] B. Bollobás and I. Leader, *Products of unconditional bodies*, in: Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel, 1992–1994), 13–24, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [13] Cz. Bylka and W. Orlicz, *On some generalizations of the Young inequality*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), no. 2, 115–123.

- [14] J. M. Calabuig, O. Delgado and E. A. Sánchez Pérez, *Generalized perfect spaces*, Indag. Math. (N.S.) 19 (2008), no. 3, 359–378.
- [15] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation*, *Studia Math., Special Series 1 (1963)*, 31–34.
- [16] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, *Studia Math.* 24 (1964), 113–190.
- [17] J. Cerdá, H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, *Positivity* 2 (1998), 311–337.
- [18] J. Cerdá, H. Hudzik and M. Mastyło, *On the geometry of some Calderón-Lozanovskii interpolation spaces*, *Indag. Math. N.S.* 6 (1995), no. 1, 35–49.
- [19] J. Chen, *The lattice almost isometric copies of l^1 and l^∞ in Banach lattices*, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N. S.)* 22 (2006), no. 1, 73–76 (electronic).
- [20] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, *Dissertationes Math.* 356 (1996), 1–204.
- [21] S. Chen, Y. Cui, H. Hudzik and T. Wang, *On some solved and unsolved problems in geometry of certain classes of Banach function spaces*, in: *Unsolved Problems on Mathematics for the 21st Century*, J. M. Abe&Tanaka (Eds.) IOS Press, 2001.
- [22] S. Chen and H. Sun, *Reflexive Orlicz spaces have uniformly normal structure*. *Studia Math.* 109 (1994), no. 2, 197–208.
- [23] K. M. Chong and N. M. Rice, *Equimeasurable rearrangements of functions*, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, No. 28, Queen's University, Kingston, Ont. 1971, vi+177 pp.
- [24] M. Ciesielski, A. Kamińska, P. Kolwicz and R. Pluciennik, *Monotonicity and rotundity of Lorentz spaces $\Gamma_{p,\omega}$* , *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 2713–2723.
- [25] G. Crofts, *Generating classes of perfect Banach sequence spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 36 (1972), 137–143.
- [26] Y. Cui, R. Pluciennik and T. Wang, *On property (β) in Orlicz spaces*, *Arch. Math.* 69 (1997), 57–69.
- [27] M. Cwikel and P. G. Nilsson, *Interpolation of weighted Banach lattices. A characterization of relatively decomposable Banach lattices*, *Mem. Amer. Math. Soc.* 165 (2003), vi+127 pp.
- [28] G. Dankert and H. König, *Über die Hödersche Ungleichung in Orlicz-Räumen*, *Arch. Math.* 18 (1967), 61–75.

- [29] O. Delgado and E. A. Sánchez Pérez, *Summability properties for multiplication operators on Banach function spaces*, Integral Equations Operator Theory 66 (2010), no. 2, 197–214.
- [30] P. B. Djakov and M. S. Ramanujan, *Multipliers between Orlicz sequence spaces*, Turk. J. Math. 24 (2000), 313–319.
- [31] I. Dobrakov, *On submeasures I*, Dissertationes Math. 62 (1974).
- [32] T. Dominguez, H. Hudzik, G. López, M. Mastyło and B. Sims, *Complete characterization of Kadec-Klee properties in Orlicz spaces*, Houston J. Math. 29 (2003), no. 4, 1027–1044.
- [33] P. Fernandez-Martinez, A. Manzano and E. Pustylnik, *Absolutely continuous embeddings of rearrangement - invariant spaces*, Mediterr. J. Math. 7 (2010), no. 4, 539–552.
- [34] P. Foralewski, *On some geometric properties of generalized Calderón-Lozanovskiĭ spaces*, Acta Math. Hung. 80 (1998), no. 1-2, 55–66.
- [35] P. Foralewski and H. Hudzik, *Some basic properties of generalized Calderón-Lozanovskiĭ spaces*, Collectanea Math. 48 (1997), no. 4-6, 523–538.
- [36] P. Foralewski and H. Hudzik, *On some geometrical and topological properties of generalized Calderón-Lozanovskiĭ sequence spaces*, Houston J. Math 25 (1999), no. 3, 523–542.
- [37] T. A. Gillespie, *Factorization in Banach function spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 43 (1981), no. 3, 287–300.
- [38] H. P. Heinig and L. Maligranda, *Chebyshev inequality in function spaces*, Real Anal. Exchange 17 (1991/92), no. 1, 211–247.
- [39] H. Hudzik, A. Kamińska, *Monotonicity properties of Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 9, 2715–2721.
- [40] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *Geometric properties of some Calderón-Lozanovskiĭ spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston J. Math. 22 (1996), 639–663.
- [41] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices*, Rocky Mountain J. Math. 30 (2000), no. 3, 933–949.
- [42] H. Hudzik, M. Mastyło, *Almost isometric copies of l^∞ in some Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), no. 1, 209–215.
- [43] H. Hudzik and L. Maligranda, *Amemiya norm equals Orlicz norm in general*, Indag. Mathem. N.S., 11 (2000), no. 4, 573–585.

- [44] H. Hudzik and A. Narloch, *Local monotonicity structure of Calderón-Lozanovskii spaces*, Indag. Math. N.S. 15 (2004), no. 1, 1–12.
- [45] H. Hudzik and A. Narloch, *Relationships between monotonicity and complex rotundity properties with some consequences*, Math. Scand. 96 (2005), 289–306.
- [46] R. E. Jamison and W. H. Ruckle, *Factoring Absolutely Convergent Series*, Math. Ann. 224 (1976), no. 2, 143–148.
- [47] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 19 (1979), no. 217, v+298 pp.
- [48] A. Kamińska, *On uniform convexity of Orlicz spaces*, Proc. Konink. Nederl. Ak. Wet. Amsterdam A 85 (1982), no. 1, 27–36.
- [49] A. Kamińska, *On some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces*, in: Proceedings of the 12th Winter School on Abstract Analysis (Srni 1984), Rend. Circ. Mat. Palermo 2 (1984), no. 5, 63–72.
- [50] A. Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Nachr. 147 (1990), 29–38.
- [51] A. Kamińska, *Uniform convexity of generalized Lorentz spaces*, Arch. Math. 56 (1991), 181–188.
- [52] A. Kamińska, L. Maligranda and L. E. Persson, *Indices, convexity and concavity of Calderón-Lozanovskii spaces*, Math. Scand. 92 (2003), 141–160.
- [53] A. Kamińska, P.K. Lin and H. Sun, *Uniformly normal structure of Orlicz-Lorentz spaces*, Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability, Columbia, Missouri (1994), 229–238, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 175, Dekker, New York, 1996.
- [54] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow 1977; English transl. Pergamon Press, Oxford-Elmsford, New York 1982.
- [55] P. Kolwicz, *On property (β) in Banach lattices, Calderón-Lozanovskii and Orlicz-Lorentz spaces*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 111 (2001), no. 3, 319–336.
- [56] P. Kolwicz, *Orthogonal uniform convexity in Köthe spaces and Orlicz spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 50 (2002), no. 4, 395–412.
- [57] P. Kolwicz, *On property (β) and orthogonal convexities in generalized Calderón-Lozanovskii sequence spaces*, in: Function Spaces VI, World Scientific Publishers, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong (2003), 138–159.
- [58] P. Kolwicz, *Property (β) and orthogonal convexities in some class of Köthe sequence spaces*, Publ. Math. Debrecen 63 (2003), no. 4, 587–609.

- [59] P. Kolwicz, *Rotundity properties in Calderón-Lozanovskii spaces*, Houston J. Math. 31 (2005), no. 3, 883–912.
- [60] P. Kolwicz and K. Leśnik, *Topological and geometrical structure of Calderón-Lozanovskii construction*, Math. Inequal. Appl. 13 (2010), 175–196.
- [61] P. Kolwicz and K. Leśnik, *Property (β) of Rolewicz and orthogonal convexities of Calderón-Lozanovskii spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 13, 4352–4368.
- [62] P. Kolwicz, K. Leśnik and L. Maligranda, *Pointwise multipliers of Calderón-Lozanovskii spaces*, (wysłana do druku).
- [63] P. Kolwicz, K. Leśnik and L. Maligranda, *Pointwise products of some Banach function spaces and factorization*, (w przygotowaniu).
- [64] P. Kolwicz and R. Płuciennik, *On uniform rotundity in every direction in Calderón-Lozanovskii spaces*, J. Conv. Anal. 14 (2007), no. 3, 621–645.
- [65] P. Kolwicz and R. Płuciennik, *Local $\Delta_2^E(x)$ condition as a crucial tool for local structure of Calderón-Lozanovskii spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 356 (2009), 605–614.
- [66] P. Kolwicz and R. Płuciennik, *Points of upper local uniform monotonicity in Calderón-Lozanovskii spaces*, J. Conv. Anal. 17 (2010), no. 1, 111–130.
- [67] M. A. Krasnoselskiĭ and Ja. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen 1961.
- [68] S. G. Krein, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Amer. Math. Soc., Providence 1982 [Russian version in: Nauka, Moscow 1978].
- [69] W. Kurc, *Strictly and uniformly monotone Musielak-Orlicz spaces and applications to best approximation*, J. Approx. Theory 69 (1992), no. 2, 173–187.
- [70] D. N. Kutzarova, *On condition (β) and Δ -uniform convexity*, C. R. Acad. Bulgar Sci. 42 (1989), no. 1, 15–18.
- [71] D. N. Kutzarova, *k - (β) and k -nearly uniformly convex banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 322–338.
- [72] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York 1979.
- [73] K. Leśnik, *Wybrane własności topologiczne i geometryczne w przestrzeniach Calderón - Łozanowskiego, praca magisterska, Poznań 2007*.
- [74] G. Ja. Lozanovskii, *On topologically reflexive KB - spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 158 (1964), 516–519; English transl. in Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 1253–1256.

- [75] G. Ja. Lozanovskii, *On reflexive spaces generalizing the reflexive space of Orlicz*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 163 (1965), 573–576; English transl. in: Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 968–971.
- [76] G. Ja. Lozanovskii, *Banach lattices of Calderón*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 172 (1967), 1018–1020; English transl. in Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 224–227.
- [77] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices*, Sibirsk. Mat. Zh. 10 (1969), no. 3, 584–599; English transl. in Siberian Math. J. 10 (1969), 419–431.
- [78] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices. II*, Sibirsk. Mat. Zh. 12 (1971), 562–567; English transl. in Siberian Math. J. 12 (1971), 397–401.
- [79] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices. III*, Sibirsk. Mat. Zh. 13 (1972), no. 6, 1304–1313; English transl. in Siberian Math. J. 13 (1972), 910–916.
- [80] G. Ya. Lozanovskii, *A remark on a certain interpolation theorem of Calderón*, Funkcional. Anal. i Priložen. 6 (1972), no. 4, 89–90; English transl. in Functional Anal. Appl. 6 (1972), 333–334.
- [81] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices. IV*, Sibirsk. Mat. Zh. 14 (1973), 140–155; English transl. in: Siberian. Math. J. 14 (1973), 97–108.
- [82] G. Ya. Lozanovskii, *Mappings of Banach lattices of measurable functions*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 192 (1978), no. 5, 84–86; English transl. in: Soviet Math. (Iz. VUZ) 22 (1978), 61–63.
- [83] G. Ya. Lozanovskii, *Transformations of ideal Banach spaces by means of concave functions*, Qualitative and Approximate Methods for the Interpolation of Operator Equations, No. 3, pp. 122–148, Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslavl', 1978 (Russian).
- [84] R. Lozanovskaya, *G. Ya. Lozanovskii: his life*, Function Spaces, The Fifth Conference: Proc. of the Conference in Poznań, Marcel Dekker, Inc. 2000.
- [85] L. Maligranda, *Calderón-Lozanovskii spaces and interpolation of operators*, Semesterbericht Functionalanalysis, Tübingen 8 (1985), 83–92.
- [86] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Mathematics 5, University of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989.
- [87] L. Maligranda and E. Nakai, *Pointwise multipliers of Orlicz spaces*, Arch. Math. 95 (2010), no. 3, 251–256.
- [88] L. Maligranda and L. E. Persson, *Generalized duality of some Banach function spaces*, Indag. Math. 51 (1989), no. 3, 323–338.
- [89] L. Maligranda and W. Wnuk, *Landau type theorem for Orlicz spaces*, Math. Z. 208 (1991), no. 1, 57–63.

- [90] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p* , Astérisque 11 (1974), 1–163.
- [91] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math. 1034 (1983), 1–222.
- [92] E. Nakai, *Pointwise multipliers*, Memoirs of the Akashi College of Technology 37 (1995), 85–94.
- [93] R. O’Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 300–328.
- [94] P. Nilsson, *Interpolation of Banach lattices*, Studia Math. 82 (1985), no. 2, 135–154.
- [95] V. I. Ovchinnikov, *Interpolation theorem resulting from an inequality of Grothendieck’s*, Functional Anal. i Prilozen 10 (1976), 45–54 (Russian).
- [96] G. Pisier, *Some applications of the complex interpolation method to Banach lattices*, J. D’Analyse Math. 35 (1979), 264–281.
- [97] Y. Raynaud, *On Lorentz - Sharpley spaces*, in: Interpolation Spaces and Related Topics (Haifa, 1990), 207–228, Israel Math. Conf. Proc., 5, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan 1992.
- [98] Y. Raynaud, *On duals of Calderón-Lozanovskiĭ intermediate spaces*, Studia Math, 124 (1997), no 1, 9–36.
- [99] S. Reisner, *A factorization theorem in Banach lattices and its applications to Lorentz spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 31 (1981), no. 1, 239–255.
- [100] S. Reisner, *On two theorems of Lozanovskiĭ concerning intermediate Banach lattices*, Lecture Notes in Math. 1317, Springer, Berlin 1988.
- [101] S. Reisner, *Some remarks on Lozanovskiy’s intermediate norm lattices*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 41 (1993), no. 3, 189–196 (1994).
- [102] S. Rolewicz, *On Δ - uniform convexity and drop property*, Studia Math. 87 (1987), 181–191.
- [103] H. L. Royden, *Real Analysis*, Third edition, Macmillan Publ., New York 1988.
- [104] Ja. B. Rutickiĭ, *On some properties of one operation over spaces*, in: Operator Methods in Differential Equations, Voronezh 1979, 79–84 (Russian).
- [105] A. R. Schep, *Products and factors of Banach function spaces*, Positivity 14 (2010), 301–319.
- [106] T. Strömberg, *An operation connected to a Young-type inequality*, Math. Nachr. 159 (1992), 227–243.

- [107] B. Turett, *Rotundity of Orlicz spaces*, Indag. Math., Ser. A, 79 (1976), no. 5, 462–468.
- [108] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Polish Scientific Publisher PWN, Warszawa 1999.
- [109] P. P. Zabreiko, *Nonlinear integral operators*, Voronezh. Gos. Univ. Trudy Sem. Funkcional Anal. no. 8 (1966), 3–152 (Russian).
- [110] P. P. Zabreiko and Ja. B. Rutickii, *Several remarks on monotone functions*, Uchebn. Zap. Kazan. Gos. Univ. 127 (1967), no. 1, 114–126 (Russian).
- [111] M. Zippin, *Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant function spaces*, J. Funct. Anal. 7 (1971), 267–284.