

## INTERPOLACYJNA METODA OKREŚLANIA ZAPOTRZEBOWANIA NA SIŁĘ ROBOCZĄ W WIELKICH ZAKŁADACH PRZEMYSŁOWYCH

### I. WSTĘP

Cechą charakteryzującą obecny rozwój gospodarczy kraju jest ścisły jego związek z przekształceniami struktury społecznej. Wiąże się to ze wzrostem zapotrzebowania na kwalifikowaną siłę roboczą<sup>1</sup>, zdeterminowaną przez typ postępu technicznego. Przez pojęcie siły roboczej rozumiemy część społeczeństwa, mającą określone cechy wyznaczające przydatność do wykonywania pracy<sup>2</sup>. Zapotrzebowanie na siłę roboczą (albo popyt pracy) to liczba wolnych miejsc pracy. Jest ono realizowane przez zakład przemysłowy na rynku pracy, przez pojęcie którego rozumiemy miejsce zetknięcia się podaży pracy z jej popytem. Podaż pracy stanowią ludzie oferujący gotowość podjęcia pracy<sup>3</sup>, popyt pracy może być planowy, wynikający z nowych inwestycji, rozbudowy zakładów, odtworzenia ubytku naturalnego lub pozaplanowy zdeterminowany fluktuacją pracowników<sup>4</sup>.

Obecnie przeanalizujemy podaż pracy w Polsce w latach 1970-1975, co widać na ryc. 1. W 1975 r. zarejestrowano 15,2 tys. osób poszukujących pracy na 94,6 tys. wolnych miejsc pracy zgłoszonych przez zakłady przemysłowe. Oznacza to, że 79,4 tys. miejsc zostało nie obsadzonych z braku podaży pracy. Spośród zarejestrowanych osób 20,4% to robotnicy wykwalifikowani, 50,6% niewykwalifikowani, 27,6% to pracownicy na stanowiska nierobotnicze, zaś pozostała część — 1,4% to młodociani. Z

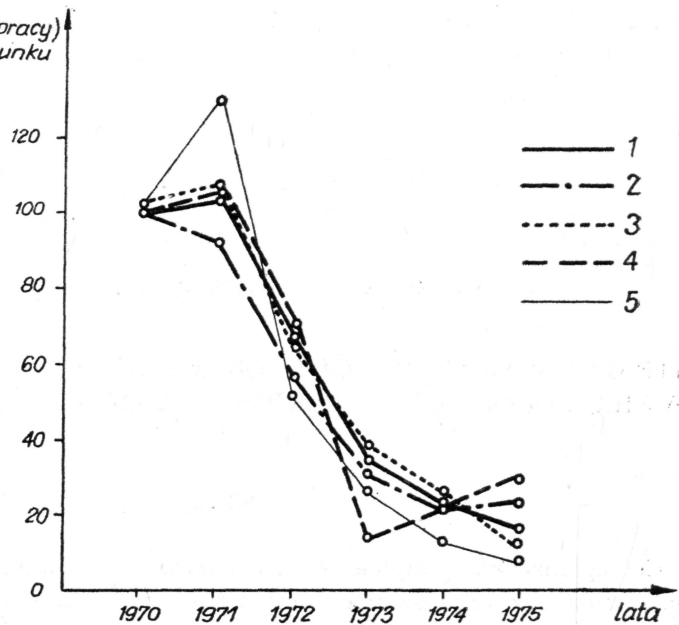
<sup>1</sup> *Węzłowe problemy polityki zatrudnienia w Polsce w latach 1975 - 1990*, Gospodarka Planowa 1975, nr 7, s. 415.

<sup>2</sup> J. Pietrucha, *Programowanie zatrudnienia w gospodarce socjalistycznej*, Katowice 1971, s. 4; *Mała Encyklopedia Ekonomiczna*, Warszawa 1974, s. 740; *Metodologia statystycznych bilansów siły roboczej*, Warszawa, 1967, s. 2; *Mała Encyklopedia Statystyki*, Warszawa 1976 s. 55.

<sup>3</sup> L. Sobczak, *Rynek pracy w Polsce Ludowej*, Warszawa 1971, s. 14; L. Sobczak, *Główne zjawiska na rynku pracy w Polsce*, Praca i Zabezpieczenie Społeczne 1969, nr 2.

<sup>4</sup> A. Balicki, *Stabilność kadr pracowniczych*, Warszawa 1976, s. 28; J. Pietrucha, op. cit., s. 58,

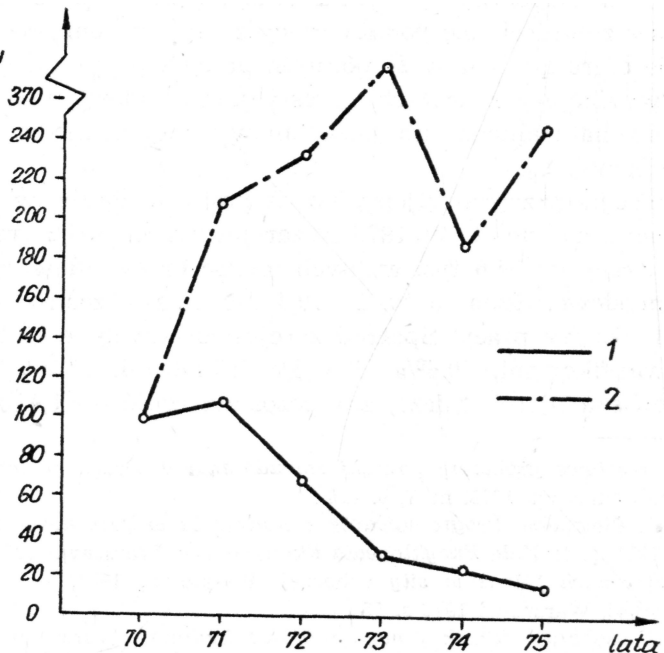
Procentowa podaż (pracy)  
siły roboczej w stosunku  
do 1970r.



Ryc. 1. Struktura podaży pracy zarejestrowanej przez pośrednictwo pracy w latach 1970 - 1975

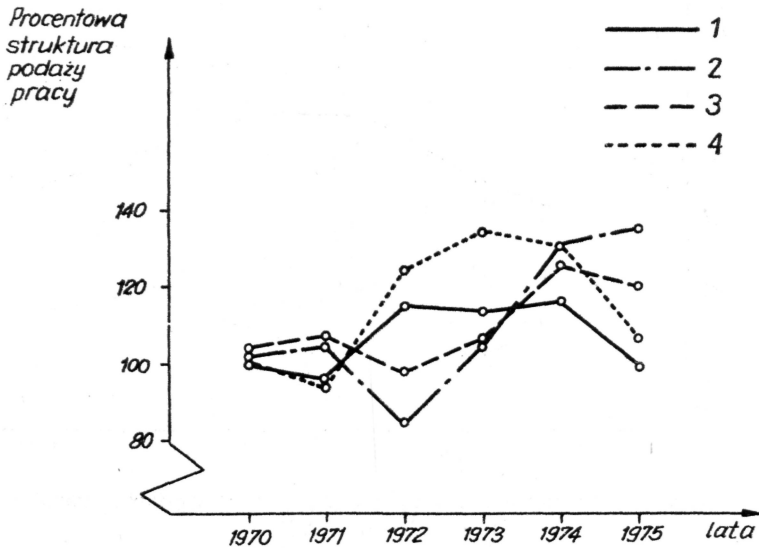
1 — ogółem, 2 — robotnicy wykwalifikowani, 3 — robotnicy niewykwalifikowani, 4 — pracownicy na stanowiskach nierobotniczych, 5 — młodociani

Dynamika  
podaży i popytu  
pracy



Ryc. 2. Podaż i zapotrzebowanie na siłę roboczą w latach 1970 - 1975 w przemyśle społecznym

1 — pracownicy poszukujący pracy ogółem, 2 — wolne miejsca pracy



Ryc. 3. Struktura wykształcenia absolwentów szkół podejmujących pracę w przemyśle uspołecznionym w latach 1970 - 1975  
 1 — wyższe, 2 — policealne zawodowe, 3 — techniczne, 4 — ogólnokształcące

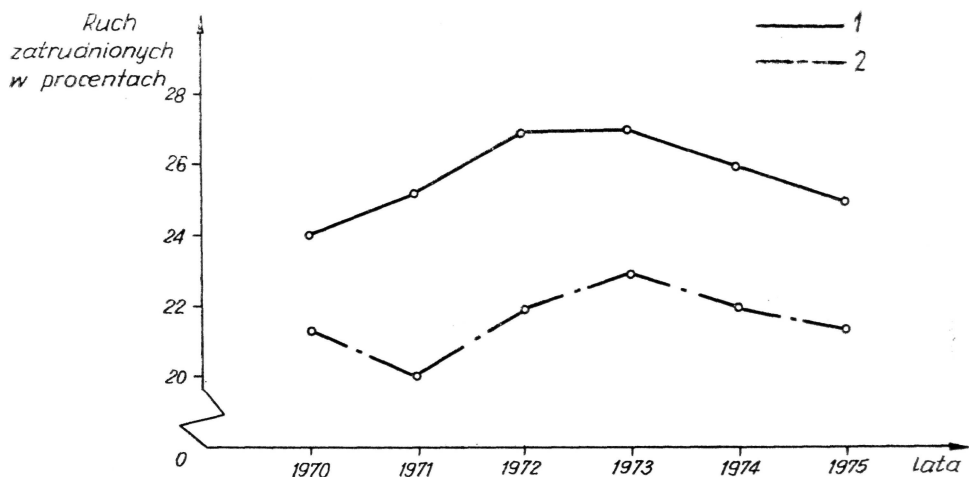
ryc. 1 wynika, że na przestrzeni minionych pięciu lat jedynie w 1971 r. istniał wzrost podaży pracy<sup>5</sup>. Obecnie porównamy zapotrzebowanie na siłę roboczą z podażą pracy. Z ryciny 2 wynika, że zapotrzebowanie na siłę roboczą jest większe niż możliwość jej pokrycia przez istniejącą podaż pracy. Przeprowadzimy analizę struktury zapotrzebowania na siłę roboczą z punktu widzenia kwalifikacji i źródeł podaży pracy<sup>6</sup>. W 1975 r. na 100% przyjętych pracowników 4,1% było z wyższym wykształceniem, 1,8% po licealnej szkole zawodowej, 18,6% z wykształceniem technicznym, 4,8% to pracownicy po liceum ogólnokształcącym. Pozostałą część tzn. 70,7% stanowią pracownicy z wykształceniem zasadniczym zawodowym (ryc. 3).

Spośród osób przyjętych do pracy 98% pochodziła z pozarolniczych źródeł podaży pracy, zaś 2% z rolnictwa. Analiza tego zjawiska w ciągu minionych lat wskazuje na spadek od 1973 r. zatrudnienia pracowników pochodzących z rolnictwa. Jest to prawidłowość wynikająca z wyczerpywania się rezerw siły roboczej w rolnictwie<sup>7</sup>.

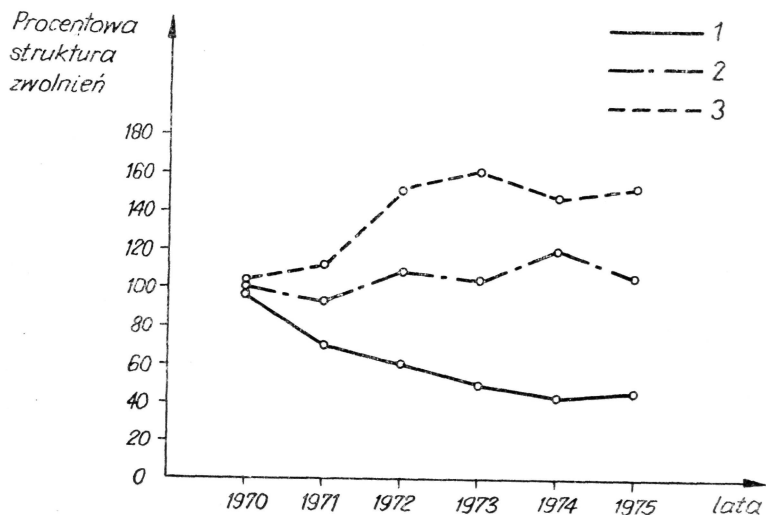
<sup>5</sup> *Rocznik Statystyczny GUS*, Warszawa 1976, s. 64.

<sup>6</sup> *Rocznik Statystyczny Przemysłu GUS*, Warszawa 1976, s. 122.

<sup>7</sup> Metodologiczne aspekty zagadnienia rezerw siły roboczej w rolnictwie są omawiane w pozycjach: S. Borowski, *Rezerwy siły roboczej w rolnictwie jako przedmiot badań statystycznych*, *Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny* 1963, z. 2; S. Borowski, *Kryteria klasyfikacji i rejonizacji rezerw siły roboczej w rolnictwie*, *Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny* 1963, z. 3.



Ryc. 4. Współczynniki przyjęcia i zwolnień z pracy w gospodarce społecznej w latach 1970-1975  
1 — przyjęcia, 2 — zwolnienia



Ryc. 5. Struktura zwolnień w przemyśle społecznym w latach 1970 - 1975  
1 — z inicjatywy zakładu pracy, 2 — na własną prośbę, 3 — samowolnie opuścili pracę

Zaprezentowane zjawiska na rynku pracy wpływają negatywnie na sytuację kadrową w zakładach przemysłowych. Konsekwencją jest brak stabilności pracowników<sup>8</sup> wyrażony wzmożoną fluktuacją (ryc. 4). Ryc. 4 obrazuje ruch zatrudnionych w gospodarce społecznej zwymiarowany za pomocą współczynników przyjęć i zwolnień, rozumianych jako stosu-

<sup>8</sup> Rocznik Statystyczny... s. 64.

nek wyrażony w procentach, liczby pracowników przyjętych (odpowiednio zwolnionych) w okresie sprawozdawczym do stanu zatrudnienia w końcu okresu poprzedzającego okres sprawozdawczy<sup>9</sup>. W przemyśle społecznym w 1975 r. współczynnik przyjęć wynosił 20,7%, natomiast zwolnień 18,7%<sup>10</sup>. Strukturę zwolnień ilustruje ryc. 5.

Pomiędzy ryc. 2, 4, 5 widzimy rysującą się wyraźnie prawidłowość, dotyczącą szczególnie lat 1972-1973. W okresie tym jest duże zapotrzebowanie na siłę roboczą i zatrudniono też największą liczbę pracowników. W obliczu niskiej podaży pracy nowo przyjęci pracownicy pochodzili przede wszystkim z pozarolniczych źródeł podaży pracy.

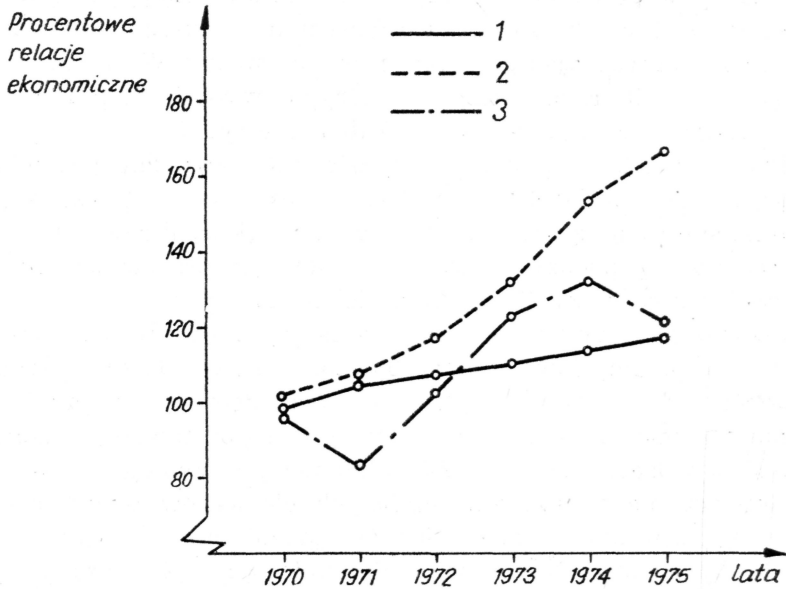
Z powyższego wynika, że rozwiązanie wymaga problem określania przez zakłady przemysłowe zapotrzebowania na siłę roboczą. Permanentny niedobór pracowników zarówno pod względem liczby, jak i jakości (kwalifikacje) skłania do zwrócenia uwagi na podstawowe relacje ekonomiczne zachodzące pomiędzy zatrudnieniem, produkcją i wydajnością pracy. Jednoczesna analiza wspomnianych elementów wytwarzania powoduje korektę w obliczeniach (bieżąca analiza) zapotrzebowania na siłę roboczą w ujęciu statycznym, jak i dynamicznym (prognoza popytu na pracę)<sup>11</sup>. W obliczu naturalnej bariery wielkości zasobów siły roboczej, analiza relacji zjawisk jest niezbędnym elementem w zachowaniu równowagi procesu wytwarzania. W związku z tym koniecznością staje się adaptacja popytu na siłę roboczą zakładów przemysłowych do aktualnej sytuacji na rynku pracy. Jednym z warunków tej adaptacji jest rezygnacja z ekstensywnego gospodarowania zasobami pracy i przejście na intensywne czynniki wzrostu gospodarczego. Miernikiem takiego działania jest m. in. wzrost technicznego uzbrojenia pracy<sup>12</sup>. Przeanalizujemy kształtowanie się relacji ekonomicznych pomiędzy wspomnianymi zjawiskami (ryc. 6). Z ryciny 6 wynikają następujące wnioski: produkcja globalna wytwarzana jest głównie na drodze wzrostu zatrudnienia. Dzieje się to do 1972 r. W latach następnych zaczyna się okres stosowania intensywnych metod gospodarowania, gdyż dalszy wzrost produkcji stymulowany jest wzrostem wydajności pracy. Przyczyn tego stanu można dopatrzeć się we wzroście technicznego uzbrojenia pracy, które w ciągu badanego pięciolecia zwiększyło się o 36,9%. Zaprezentowane wyniki wskazują na istotność poruszonych problemów, szczególnie w odniesieniu do stworzenia warunków zachowania rytmiczności produkcji w zakładach przemysłowych. Oszacowanie wielkości zapotrzebowania na siłę ro-

<sup>9</sup> *Zatrudnienie w gospodarce narodowej 1971*, Warszawa 1972, s. 123.

<sup>10</sup> *Rocznik Statystyczny ...*, s. 64; *Rocznik Statystyczny Przemysłu ...*, s. 126.

<sup>11</sup> *Prognoza rozwoju zatrudnienia i kształcenia w Polsce, 1972*; A. Rajkiewicz, *Węzłowe problemy polityki zatrudnienia w PRL*, *Ekonomista* 1971, nr 2, s. 198.

<sup>12</sup> J. Bury, *Racjonalna gospodarka czynnikiem ludzkim*, *Zarządzanie* 1963, nr 6-7, s. 2-4; M. Kabaj, *Zasoby ludzkie a rozwój gospodarki polskiej 1950-1990*, *Ekonomista* 1974, nr 3, s. 612.



Ryc. 6. Relacje pomiędzy tempem przyrostu zatrudnienia, produkcją globalną i wydajnością pracy w przemyśle społecznym w 1970 - 1975

1 — zatrudnienie, 2 — produkcja globalna, 3 — wydajność pracy

boczą w połączeniu z produkcją oraz wydajnością pracy jest problemem; który stanowi przedmiot niniejszej pracy. Nie będziemy rozważać tego w ujęciu bilansowym<sup>13</sup>, lecz modelowym<sup>14</sup>, gdyż tylko ono daje nam zwiększoną obiektywizację metod i możliwości ich stosowania, nawet przy niepełnym zasobie informacji statystycznych. Problem ten postanowiono rozwiązać za pomocą metod interpolacyjnych bazując na materiale empirycznym zebrany w jednym z wielkich zakładów przemysłowych m. Poznania.

## II. OKREŚLANIE POPYTU PRACY W UJĘCIU METODY KLASYCZNEJ

W wielkich zakładach przemysłowych zapotrzebowanie na siłę roboczą (popyt pracy) dla okresów jednorocznych i wieloletnich można ustalić na podstawie produkcji bieżącej, produkcji docelowej i ustalonego dyrektywnie wskaźnika pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności pracy. Do rozważań należy przyjąć wartościową produkcję bie-

<sup>13</sup> K. Dzieńo, M. Gołacka, *Bilanse siły roboczej*, PWE Warszawa 1971, s. 205; *Naukowe podstawy prognozowania ekonomicznego*, PWN Warszawa 1974, s. 389.

<sup>14</sup> D. J. Bartholomew, *The Statistical Approach to Manpower Planning*, *The Statistician*, Vol. 20, No 1; A. D. Butlers, *An Analysis of Flows in Anpower System*, *The Statistician*, Vol. 20, No 1.

żącą i docelową celem uzyskania porównywalności obliczeń. Dla zwartości i łatwości rozważań przyjmujemy następujące oznaczenia:  $P_t$  — wartość produkcji towarowej w roku  $t$ ,  $P_{t-k}$  — wartość produkcji towarowej w roku  $t-k$ ,  $\alpha_{t-k}$  — wskaźnik wydajności pracy w roku  $t-k$ ,  $Z_t$  — zatrudnienie w roku  $t$ ,  $\beta$  — wskaźnik pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności. Pomiedzy wymienionymi pojęciami istnieją naturalne związki. Pierwszy z nich

$$\alpha_{t-k} = \frac{P_{t-k}}{Z_{t-k}} \quad (2.1)$$

stanowi podstawę obliczania wskaźnika wydajności pracy w roku  $t-k$ , drugi zaś

$$\Delta P_k = \frac{P_t}{P_{t-k}} \cdot 100\% \quad (2.2)$$

oznacza procentowy przyrost produkcji w ciągu  $k$  lat.

Na podstawie wprowadzonych pojęć oraz związków (2.1) i (2.2) można podać sposób obliczania zapotrzebowania na siłę roboczą w okresie  $k$  lat przy założeniu stałego wskaźnika pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności. Algorytm obliczeniowy niniejszego zagadnienia wygląda następująco: a) obliczenie wskaźnika wydajności pracy w roku  $t-k$  za pomocą wzoru (2.1), b) obliczenie procentowego przyrostu produkcji w ciągu  $k$  lat za pomocą wzoru (2.2), c) obliczenie części przyrostu produkcji, która będzie pokryta przyrostem wydajności pracy przy założeniu stałego wskaźnika pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności

$$\gamma = \frac{\Delta P_k \% - 100\%}{100} \cdot \beta, \quad (2.3)$$

d) obliczanie wskaźnika wydajności w roku  $t$  na podstawie wskaźnika wydajności w roku  $t-k$  oraz współczynnika  $\gamma$ , tj. część przyrostu produkcji spowodowanej wzrostem wydajności pracy (2.4)

$$\alpha_t = \alpha_{t-k} (1 + \gamma), \quad (2.4)$$

e) obliczanie zapotrzebowania na siłę roboczą za pomocą wzoru

$$Z_t = \frac{P_t}{\alpha_t}. \quad (2.5)$$

Jeśli wskaźnik  $\beta$  pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności pracy jest zmienny w przedziale  $\langle t-k, t \rangle$ , to przedział ten dzielimy na podprzedziały o identycznym wskaźniku pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności, a następnie stosujemy powyższą metodę dla każdego podprzedziału niezależnie. Wyniki uzyskane z podprzedziału o niższym indeksie rocznym służą jako dane wyjściowe do obliczeń dla

podprzedziału o indeksie rocznym o jeden większym. Po podstawienia (2.1), (2.2.), (2.3), (2.4) do (2.5) otrzymujemy wzór na wielkość zapotrzebowania na siłę roboczą w roku  $t$ .

$$Z_t = \frac{\frac{P_t}{P_{t-k}}}{\frac{1}{Z_{t-k}} \left( 1 + \frac{(P_t - P_{t-k}) \cdot 100\% \cdot \beta}{P_{t-k} \cdot 100} \right)} \quad (2.6)$$

W przypadkach granicznych, gdy  $P_t=0$  to  $Z_t=0$ , a gdy  $P_t \rightarrow \infty$ , to  $Z_t = \frac{P_{t-k} \cdot 100}{\beta_{t-k} \cdot 100}$ . Z ostatniego wzoru wynika, że przy nieograniczonym wzroście produkcji, zatrudnienie jest ustalone i zależy wprost proporcjonalnie od produkcji w roku  $P_{t-k}$  i odwrotnie proporcjonalnie od dyrektywnego wskaźnika pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności pracy oraz od wskaźnika wydajności pracy w roku  $t-k$ .

W celu zilustrowania metody klasycznej dokonano obliczeń zapotrzebowania na siłę roboczą na podstawie informacji statystycznych zebranych w zakładzie przemysłowym w 1976 r. Dane empiryczne dotyczyły okresu 1971 - 1976 i ilustrowały wielkość zatrudnienia pracowników ogółem, robotników bezpośrednio produkcyjnych oraz grupy zawodowej szlifiery (tab. 1). W zakładzie tym zebrano też informacje statystyczne do-

Tabela 1

## Zatrudnienie w przeliczeniu na pełnozatrudnionych

Wyszczególnienie	Zatrudnienie					
	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Ogółem	2661	2654	2696	2719	2714	2820
Robotnicy bezpośrednio produkcyjni	987	1019	1015	1007	1025	1095
Szlifierze	415	432	425	422	429	428

Źródło: dane z zakładu przemysłowego.

tyczące produkcji towarowej w ujęciu wartościowym, przy czym od 1977 r. uwzględniono dane planowe (tab. 2). Na podstawie przeprowadzonych obliczeń określono popyt pracy w latach 1977, 1978, 1979 i 1980 dla poszczególnych grup pracowników (tab. 3). Z tabeli 3 wynika, iż przy wzroście produkcji towarowej i wskaźników pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności pracy ( $\gamma=0,8$ ) zatrudnienie ogółem w przeliczeniu na pełnozatrudnionych wzrośnie o 205 pracowników. Przewiduje się także wzrost 165 pracowników bezpośrednio produkcyjnych oraz 29 szlifiery.

Tabela 2

Produkcja towarowa w ujęciu wartościowym<sup>15</sup>

Lata	Produkcja towarowa
	w mln
1971	744,4
1972	775,9
1973	846,7
1974	899,7
1975	1013,0
1976	1144,0
1977	1675,0
1978	1875,0
1979	2160,0
1980	2370,0

Źródło: dane z zakładu przemysłowego.

Tabela 3

Zapotrzebowanie na siłę roboczą obliczone metodą klasyczną

Lata	Zapotrzebowanie na siłę roboczą „ogółem”	Zapotrzebowanie na siłę roboczą wśród robotników bezpośrednio produkcyjnych	Zapotrzebowanie na siłę roboczą w grupie zawodowej szlifierze
1977	3011	1169	457
1978	3077	1193	467
1979	3160	1225	477
1980	3216	1334	486

Źródło: obliczenia własne.

### III. INTERPOLACYJNA METODA OKREŚLANIA ZAPOTRZEBOWANIA NA SIŁĘ ROBOCZĄ

Podamy obecnie pojęcia i oznaczenia dotyczące interpolacji i ekstrapolacji celem ich ujednolicenia. Interpolacja i ekstrapolacja to dwa różne aspekty tego samego postępowania. Interpolacja polega na wyznaczeniu wartości funkcji w pewnym punkcie leżącym wewnątrz rozważanego przedziału. Ekstrapolacja polega na wyznaczeniu wartości funkcji w punkcie leżącym poza tym przedziałem. W obydwu przypadkach uzyskane wartości funkcji są aproksymowanymi wartościami.

Poniżej sformalizujemy pojęcie interpolacji i ekstrapolacji. Ze względu na dalsze zastosowania będziemy zajmowali się tylko wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a<sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Od r. 1977 uwzględniono dane planowe.

<sup>16</sup> A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa 1971 s. 49.

Interpolacją paraboliczną nazywamy przybliżone przedstawienie funkcji  $f(x)$  wielomianem  $P(x) \equiv P_n(x)$  stopnia nie niższego niż  $n$ , którego wartości w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pokrywają się z danymi wartościami funkcji  $f(x)$

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Punkty  $x_0, x_1, \dots, x_n$  nazywa się węzłami interpolacji. Wielomian interpolacyjny  $P(x)$  w sposób jednoznaczny określa węzły interpolacji i wartości funkcji w tych węzłach. Ponieważ interpolacja zachowuje wartości funkcji w węzłach, więc zachowuje ona również wszystkie błędy pomiarów tych wartości, tzn. zachowuje, albo nawet zwiększa rozrzut danych.

Wielomian interpolacyjny  $P(x)$  zapisujemy w postaci wzoru Lagrange'a

$$P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i. \quad (3.2)$$

gdzie wielomiany

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (3.3)$$

( $i=0, 1, \dots, n$ ) są określone tylko węzłami interpolacji i przyjmują w nich wartości

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases} \quad (3.4)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest funkcją Kroneckera.

Wzór (3.2) daje proste wyrażenie na wielomian interpolacyjny przez zadane wartości funkcji  $y_i$ .

Błąd interpolacji parabolicznej można zapisać następująco

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (3.5)$$

gdzie  $\xi$  jest punktem pośrednim z przedziału zawierającego wszystkie węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n$  oraz punkt  $x$ . Jeżeli w tym przedziale znana jest największa wartość funkcji ( $f^{(n+1)}(x)$ ) oznaczona przez  $\mu_{(n+1)}$ , to można otrzymać następujące oszacowanie błędu

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|, \quad (3.6)$$

Z (3.6) wynika, że błąd jest najmniejszy, gdy  $x$  leży w pobliżu środka przedziału rozpiętego na węzłach. Na odwrót, jeśli  $x$  leży poza przedziałem rozpiętym na węzłach (jak w przypadku ekstrapolacji), to błąd znacznie rośnie. Ekstrapolacja jest więc wewnątrznie bardziej niedokładna niż interpolacja, dlatego należy ją stosować z ostrożnością.

W szczególnym przypadku interpolacji liniowej, tj. interpolacji funkcji  $f(x)$  funkcją liniową  $P(x)$  dla dwu węzłów  $x_0$  i  $x_1$  wzór Lagrange'a przyjmuje postać

$$P(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1. \quad (3.7)$$

Wzór ten wygodnie jest zapisać za pomocą wyznacznika

$$P(x) = \frac{1}{x_1-x_0} \begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_1 & y_1 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Błąd interpolacji liniowej określa się wielkością

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\mu_2}{2} |(x-x_0)(x-x_1)|, \quad (3.9)$$

gdzie  $\mu_2$  jest największą wartością  $|f''(x)|$  w przedziale zawierającym punkty  $x_0, x_1, x$ .

Problem będący przedmiotem rozważań sformułujemy następująco: dana jest funkcja dyskretna  $f(x)$ , której wartości są znane w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  zwanych węzłami. W naszym przypadku zmienne  $x_0, x_1, \dots, x_n$  oznaczają wartości produkcji towarowej w latach  $0, 1, \dots, n$ , zaś  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  oznaczają wielkość zatrudnienia w tych latach. Za pomocą powyższych danych oraz stosując wielomian interpolacyjny Lagrange'a<sup>17</sup> stopnia  $n$  możemy obliczyć:

a) zatrudnienie  $f(x_{n+k})$  w roku  $n+k$  — tym na podstawie wartości produkcji towarowej  $x_{n+k}$  w roku  $n+k$ -tym,

b) zatrudnienie  $f(x_i)$  w roku  $i$ -tym na podstawie wartości produkcji towarowej  $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  w latach  $0, 1, \dots, i, \dots, n$ , jeśli zatrudnienie w roku  $i$ -tym nie jest znane.

W obydwu przypadkach możliwe jest obliczenie zatrudnienia zarówno „ogółem” jak i w poszczególnych grupach pracowniczych oraz zatrudnienia robotników bezpośrednio produkcyjnych. Jeśli przeprowadzamy obliczenia dla poszczególnych grup zawodowych, to zakładamy, że udział poszczególnych grup w planowanym wzroście produkcji jest jednakowy.

Obecnie pokażemy sposób zastosowania wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a do aproksymacji zatrudnienia na przykładzie pewnego zakładu przemysłowego w Poznaniu. Otrzymane wyniki porównamy z wynikami uzyskanymi metodą klasyczną opisaną w rozdziale 2. Przyjmujemy do rozważań dane zawarte w tabeli 2 dla 1976 i 1980. Wielomian interpolacyjny przybierze wtedy postać (ze wzoru 3.7):

a) dla ogółu pracowników

$$P(x) = \frac{x-2370}{1144-2370} \cdot 2820 + \frac{x-1144}{2370-1144} \cdot 3216,$$

<sup>17</sup> K. S. Kunc, *Czislitelnyj analiz*, Kiew 1964, s. 94 - 104.

b) dla robotników bezpośrednio produkcyjnych

$$P(x) = \frac{x-2370}{1144-2370} \cdot 1095 + \frac{x-1144}{2370-1144} \cdot 1124,$$

c) dla grupy zawodowej szlifierzy

$$P(x) = \frac{x-2370}{1144-2370} \cdot 428 + \frac{x-1144}{2370-1144} \cdot 473.$$

Na podstawie powyższych wielomianów interpolacyjnych można określić zapotrzebowanie na siłę roboczą w latach 1977, 1978, 1979. Przy tych obliczeniach korzystamy z tabeli 2, a wyniki obliczeń zawarte są w tabeli 4. W tabeli 4 zestawiono wyniki otrzymane metodą interpolacji i wyznaczono względny błąd obliczeń mieszczący się w ustalonych granicach<sup>18</sup>.

Tabela 4

Zapotrzebowanie na siłę roboczą obliczone za pomocą liniowych wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a

Lata	Pracownicy ogółem	Błąd	Grupa zawodowa szlifierzy	Błąd
1977	2990	0,6	453	0,8
1978	3057	0,6	462	1,0
1979	3148	0,3	476	0,2
1980	3216	0	486	0

Źródło: obliczenia własne.

Zapotrzebowanie na siłę roboczą w latach 1977-1980 można określić za pomocą ekstrapolacji wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a. W zależności od stopnia przyjętego wielomianu interpolacyjnego uzyskujemy ekstrapolację, z różną dokładnością, wynikającą z zastosowania różnej ilości informacji z lat poprzednich. Im większa liczba informacji tym większa dokładność obliczeń, ale i też zwiększona ich ilość.

### III. WNIOSKI

W wyniku zastosowania wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a uzyskano zależność liniową pomiędzy wartością produkcji towarowej a wielkością zatrudnienia w zakładzie przemysłowym. Zależność ta jest prawidłowa ze względu na stały charakter współczynnika  $\gamma$ , tzn. współczynnika pokrycia przyrostu produkcji przyrostem wydajności pracy. W przypadku zmiennych wartości współczynnika należy budować wielo-

<sup>18</sup> Przyjęto, że górna granica błędu wynosi 2%.

miany interpolacyjne o większej niż 2 ilości węzłów. Przy takim sposobie postępowania zależność wielkości zatrudnienia od planowanej wartości produkcji towarowej przyjmowałaby postać krzywej.

Należy stwierdzić, że otrzymane wyniki badań mieszczą się w granicach błędu. Sama metoda jest mniej skomplikowana i mniej pracochłonna niż metoda klasyczna. Jest ona bardziej elastyczna, tzn. prostsza staje się korekta danych w przypadku zmian w planowanej wartości produkcji towarowej niż w metodzie klasycznej. Niewielkie błędy jakimi obciążone są wyniki interpolacji nie mają praktycznego znaczenia dla potrzeb planowania zatrudnienia.

#### ON THE DETERMINATION OF LABOUR FORCE REQUIREMENTS IN THE LARGE INDUSTRIAL PLANTS

##### Summary

This article deals with the possibility of determining the amount of manpower demand in a large industrial plant. The reason for studying such problems is the present situation on the labour market characterized by a restricted amount of manpower. This means that manpower demand should be closely related with work efficiency.

In this paper the following methodological attempt is presented, namely classical and interpolation methods. Both methods are verified using empirical statistical information collected in some industrial plant in Poznań (Poland 1976).

It has been proved that Lagrange interpolation polynomial used for interpolation and extrapolation of manpower employment is the suitable mathematical tool for such studies.