

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W POZNANIU
WYDZIAŁ INFORMATYKI I GOSPODARKI ELEKTRONICZNEJ

**Wybór najlepszych prognostycznych modeli
zmienności finansowych szeregów czasowych
za pomocą testów statystycznych**

Eliza Buszkowska

Promotor: prof. UAM dr hab. Ryszard Doman

Poznań 2010

Spis treści

Wstęp	5
1. Zmienność instrumentu finansowego	13
1.1. Miary zmienności.....	14
1.2. Specyfikacja modeli zmienności warunkowej.....	19
1.3. Zmienność implikowana.....	22
1.4. Prognoza zmienności.....	23
1.5. Zmienność zrealizowana.....	24
1.6. Podsumowanie.....	26
2. Rozkłady błędu dla modeli GARCH	27
2.1. Rozkłady uwzględniające grube ogony.....	27
2.2. Rozkłady opisujące skośność szeregów czasowych.....	28
2.3. Podsumowanie.....	29
3. Metody testowania długiej pamięci	30
3.1. Definicja krótkiej pamięci procesu.....	30
3.2. Analiza R/S.....	30
3.3. Test Lo.....	31
3.4. Metoda Geweke'a i Porter-Hudak.....	31
3.5. Podsumowanie.....	32
4. Testowanie nadrzędnej zdolności prognostycznej za pomocą SPA	33
4.1. Statystyki testowe SPA i RC.....	33
4.2. Hipoteza zerowa testu SPA.....	35
4.3. Porównanie testów SPA i RC	36
4.4. Oszacowanie dystrybuanty statystyki testowej.....	39
4.5. Bootstrapowy estymator p -wartości SPA..	40
4.6. Najlepsze modele prognostyczne zmienności indeksu WIG20, typu GARCH, uzyskane metodą SPA.....	43
4.6.1. Dane.....	44
4.6.2. Omówienie wyników empirycznych.....	45
4.7. Podsumowanie.....	50

5. Metoda zbioru ufności modeli, MCS	51
5.1. Statystyki testowe w metodzie MCS i reguła eliminacji.....	53
5.2. <i>P</i> -wartości MCS	
5.3. Poszukiwanie najlepszych modeli prognostycznych zmienności dla indeksu WIG20 przy użyciu metody zbioru ufności modeli.....	58
5.3.1. Statystyki testowe.....	59
5.3.2. Wynik porównywania modeli.....	60
5.4. Wybór najlepszych modeli prognostycznych zmienności indeksu WIG20 spośród modeli z rodziny ARMA-GARCH metodą MCS.....	62
5.4.1. Otrzymane wyniki empiryczne.....	63
5.5. Podsumowanie.....	74
6. Test warunkowej zdolności prognostycznej	75
6.1. Statystyka testowa testu warunkowej zdolności prognostycznej.....	76
6.2. Wielokrokowy test warunkowej zdolności prognostycznej.....	77
6.3 Podsumowanie.....	78
7. Ranking modeli zmienności	80
7.1. Koncepcje równoważności między rankingami.....	81
7.2. Regresja Mincera-Zarnowitza w kontekście rankingu prognoz.....	84
7.3. Podsumowanie.....	85
8. Kombinacje prognoz	86
8.1. Liniowa kombinacja prognoz.....	86
8.2. Kombinacje dwóch prognoz.....	88
8.3. Kombinacje nieliniowe prognoz.....	89
8.4. Porównywanie prognostycznych modeli zmienności i ich kombinacji przy pomocy metody zbioru ufności modeli.....	90
8.4.1. Modele zmienności i ich kombinacje ujęte w badaniu.....	91
8.4.2. Wyniki badania.....	93
8.5. Porównanie kombinacji nieliniowych Donaldsona i Kamstry oraz Pattona i Shepparda.....	97
8.5.1. Wyniki badania.....	97
8.6. Podsumowanie.....	99
9. Wybór najlepszych modeli prognostycznych zmienności dla kursów waluto-	

wych i spółek akcyjnych spośród modeli ARMA-GARCH metodą MCS.....	101
9.1. Badanie dla kursu euro do złotego.....	103
9.1.1. Wyniki badania.....	103
9.2. Badanie dla kursu franka szwajcarskiego do złotego.....	107
9.2.1. Wyniki porównywania modeli.....	107
9.3. Badanie dla kursu funta brytyjskiego do złotego.....	111
9.3.1. Wynik porównywania modeli.....	111
9.4. Modele prognostyczne zmienności dla spółek akcyjnych z GPW.....	116
9.4.1. Wyniki badania.....	117
9.5. Podsumowanie.....	124
10. Modelowanie i prognozowanie zmienności implikowanej indeksu WIG20.....	125
10.1. Całkowita zmienność implikowana klasy opcji.....	126
10.2. Indeks zmienności implikowanej WIV20.....	127
10.3. Model ARFIMA.....	129
10.4. Poszukiwanie najlepszych modeli prognostycznych zmienności implikowanej indeksu WIG20.....	129
10.4.1. Dane.....	130
10.4.2. Wynik porównywania modeli.....	130
10.5. Prognozowanie zmienności implikowanej za pomocą modeli typu GARCH.....	135
10.5.1. Dane.....	135
10.5.2. Wyniki porównania prognoz.....	135
10.6. Podsumowanie.....	137
Zakończenie.....	138
Literatura.....	143

Wstęp

Porównywanie różnych modeli prognostycznych i znajdowanie najlepiej dopasowanego modelu jest ważnym zagadnieniem w ekonometrii finansowej i jednym z celów dysertacji. Innym zadaniem jest zastosowanie metod SPA i MCS do porównywania prognostycznych modeli zmienności. Badania nad modelami zmienności z wykorzystaniem metod SPA i MCS były omawiane szeroko w wielu kontekstach. Celem innych autorów było między innymi sprawdzenie wartości prognostycznej modeli dla różnych miar zmienności na przykład zmienności zrealizowanej, zmienności implikowanej, i zmienności historycznej. W literaturze dokonano wielu ciekawych, teoretycznych porównań pomiędzy metodami SPA i MCS oraz między metodami SPA i RC. Pokazano, że metoda SPA ma przewagę nad testem RC, ponieważ test ten ma większą moc i jest bardziej odporny na złe modele. Natomiast metoda MCS jest lepsza od testu SPA, gdyż nie zależy od modelu wzorcowego. Podaje ponadto zbiór wszystkich modeli najlepszych. W przeciwieństwie do SPA opiera się ona na jednej hipotezie zerowej, a złe modele są eliminowane we wczesnych etapach procedury. Zanim zaproponowano metodę SPA przedstawiono test równej zdolności prognostycznej EPA. Pojawił się on w pracy Diebolda i Mariano (1995) i Westa (1996). Diebold i Mariano zaproponowali metodę porównywania modeli parami. West (1996) Clark i McCracken (2001) uogólnili tę konstrukcję uwzględniając niepewność parametrów i istnienie modeli zagnieżdżonych, natomiast White (2000) i Hansen (2005) badali metody porównywania prognoz więcej niż dwóch modeli. Giacomini i White (2006) uogólnili wynik dla warunkowej informacji. Podejście to bazuje na warunkowych oczekiwaniach, co do prognoz i błędów prognoz zamiast bezwarunkowych.

W pracy Hansena i Lunde'a (2005) pokazano za pomocą metod SPA i RC, że model GARCH(1,1) dobrze prognozuje kurs wymiany DM-\$ ale nie jest najlepszym modelem prognostycznym dla zwrotów IBM. Praca ta zasugerowała autorce pytanie czy model GARCH(1,1) jest dobrym modelem prognostycznym dla aktywów z polskiej giełdy. Problem ten będzie badany w rozdziałach empirycznych.

Literatura na temat modeli zmienności zwrotów instrumentów finansowych jest szeroka. Zaczyna się od modelu ARCH Engla (1982) i GARCH Bollersleva (1986). Powstaje pytanie, który model jest najlepszy?. Trudno na nie odpowiedzieć gdyż zwroty aktywów często nie zawierają dostatecznej informacji żeby wybrać jeden najlepszy model.

Jednym ze stawianych problemów w literaturze było, czy modele o większej liczbie parametrów tak samo dobrze opisują szeregi czasowe jak modele prostsze. Zostało pokazane, że ranking zmienia się, jeśli zamieni się modele wzorcowe w teście SPA, na przykład, jeśli zastąpimy kwadrat zwrotu inną miarą zmienności zrealizowanej. W pracy Hansena i Lunde'a (2006) pokazano, że uszeregowanie modeli zmienności na bazie estymatora zmienności może być niezgodne z rzeczywistym rankingiem. Wyprowadzono warunki, które zapewniają, że prawdziwy ranking i ranking przybliżony są równoważne. Praca Hansena i Lunde (2005) zawiera ocenę progностycznych modeli zmienności dla sześciu różnych funkcji straty. W pracy Kima i innych (1998) znajduje się porównanie modeli zmienności stochastycznej i modeli GARCH, natomiast porównanie modeli zmienności zrealizowanej ARMA z modelami GARCH i innymi modelami jest tematem pracy Andersena i in. (2003) oraz pracy Andersena i in. (2004).

Dokonyamy statystycznej oceny prognoz do stworzenia rankingu prognoz. Prognozowanie ma duże znaczenie w ekonomii. Poprzedza podejmowanie decyzji ekonomicznych. Instytucje rządowe często opierają swoje decyzje na prognozach głównych zmiennych ekonomicznych, a firmy opierają na prognozowaniu zarządzanie i planowanie produkcji. Ekonomiczna ocena prognoz zmienności jest potrzebna do oceny przydatności modeli. Prognozy kowariancji i zmienności mają zastosowanie do podejmowania decyzji w finansach: optymalizacji średniej i wariancji portfela, hedgingu, mierzenia ryzyka i maksymalizacji zysku. Stosuje się je do wyznaczania greckich współczynników i wyceny opcji. Im większa jest zmienność tym instrument charakteryzuje się większym ryzykiem inwestycyjnym. Istnieje ryzyko poniesienia dużych strat wynikających z niekorzystnej dla posiadacza zmiany jego wartości. Przy wycenie opcji, kiedy zmiany cen na rynku są wyższe od przeciętnej wystawca opcji zażąda za podejmowane ryzyko wyższej premii. Kiedy natomiast notowania zmieniają się z dnia na dzień nieznacznie wystawca będzie niżej szacował potencjalne straty. Dla inwestorów kupujących opcje wzrost zmienności instrumentu bazowego oznacza wzrost zarówno opcji kupna jak i sprzedaży. Dla inwestorów wystawiających opcje (zajmujących krótkie pozycje w opcjach kupna i sprzedaży) wzrost zmienności jest natomiast zjawiskiem niepożądanym. Prognozy zmienności wykorzystuje się w strategiach opcyjnych. Zyski przynosi strategia długiego stelaża, gdy oczekujemy znacznej zmiany wartości instrumentu bazowego niezależnie od tego, czy wartość ta wzrośnie czy spadnie. Gdy rynek charakteryzuje mała zmienność można zarobić na strategii małego stelaża. Prognozy zmienności stosuje się do wyznaczania depozytu zabezpieczającego. Co więcej przy

ocenie średniej i wariancji portfela oraz hedgingu znajomość warunkowej wariancji i korelacji prowadzi do lepszych wyników bez dodatkowych silnych założeń. Kolejnym zastosowaniem jest ryzyko portfela, które należy rozumieć jako wariancję lub odchylenie standardowe jego stopy zwrotu. Do jego wyznaczenia wykorzystuje się rachunek ilościowej struktury ryzyka, która odnosi się do konkretnego waloru.. Prognozy wariancji można zastosować do wyznaczenia linii rynku kapitałowego CML. Linia ta pozwala zbadać, czy zbudowany portfel jest efektywny. Można je także wykorzystać do wyznaczenia prognoz współczynnika β . Jest on miarą statystyczną wykorzystywaną w modelowaniu rynku papierów wartościowych. Współczynnik β oznacza stopień wrażliwości danej akcji na zmiany stopy zysku indeksu giełdowego. Wskazuje on o ile procent wzrośnie stopa zysku papieru wartościowego, jeżeli stopa zysku indeksu giełdowego wzrośnie o 1%.

Celem pracy jest ocena modeli prognostycznych zmienności typu GARCH indeksu WIG20, kursów walutowych spółek notowanych na GPW i kombinacji tych modeli, gdyż wybór najlepszych modeli ma znaczenie w zastosowaniach praktycznych. Może przyczynić się do redukcji kosztów estymacji. W oparciu o powyższy cel sformułowano następujące hipotezy badawcze rozprawy. Pierwsza, główna hipoteza mówi, że **przy założeniu istnienia podobnej dynamiki rynku można wyróżnić pewne modele typu ARMA-GARCH jako najlepiej prognozujące zmienność indeksu WIG20 i kursów walutowych względem złotego**. W hipotezie drugiej postulujemy, że dla różnych częstotliwości notowań otrzymuje się te same zbiory modeli najlepszych dla indeksu WIG20. Trzecia hipoteza badawcza stwierdza, że wybór modelu ARMA może poprawić prognozy zmienności modelu GARCH w tzw. modelu typu ARMA-GARCH. Czwarta hipoteza mówi, że polski indeks WIG20 najlepiej prognozują proste modele GARCH i RiskMetrics wśród modeli z istotnymi parametrami. Następną hipotezą jest, że kombinacja Pattona i Shepparda dobrze dopasowuje się do szeregu zmienności i daje lepsze prognozy niż pojedyncze modele. Postulujemy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się podobnie do tego samego szeregu zmienności, co funkcja Donaldsona i Kamstry. Wyznaczenie parametrów jednak szybsze dla funkcji Pattona i Shepparda. W hipotezie kolejnej stwierdzamy, że dla indeksu WIG20, dla różnych typów miar zmienności zrealizowanej dla zbioru szeregów prognoz modeli GARCH zbiory MCS są takie same dla zmienności zrealizowanej przeskalowanej Koopmana i Hol $\sigma_{3,t}^2$ oraz podstawowej zmienności zrealizowanej, określonej jako suma kwadratów zwrotów śród-

dziennych $\sigma_{1,t}^2$ z taką samą funkcją straty, lecz wyniki są odmienne dla estymatora zmienności ze zwrotem nocnym $\sigma_{2,t}^2$. Hipoteza kolejna stwierdza, że modele ARMA-GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność spółek na GPW ze względu na dni o podwyższonej zmienności. Weryfikujemy również hipotezę: modele GARCH mogą dobrze prognozować zmienność kursów walutowych euro do złotówki, franka szwajcarskiego do złotówki i funta do złotówki. Kolejną hipotezą jest, że szereg zmienności implikowanej na indeks WIG20 ma własność długiej pamięci. Ponadto twierdzimy, że zmienność implikowaną indeksu WIG20 dobrze prognozują modele ARMA ARIMA i ARFIMA natomiast źle się dopasowują modele AR(1) i MA(1). Następną hipotezą badawczą mówi, że indeks WIV20 można prognozować lepiej za pomocą ARMA dopasowanego do tego szeregu niż za pomocą modeli GARCH dopasowanych do szeregu zwrotów WIG20. Ostatnią hipotezą badawczą jest, że wszystkie modele ARMA ARIMA i ARFIMA dopasowane dobrze do szeregu WIV20 podobnie prognozują zmienność implikowaną (prognozy prawie się nie różnią od siebie)

Odpowiedzi na przedstawione powyżej problemy staramy się uzyskać badając szeregi logarytmicznych notowań indeksu WIG20, jak również cechujące się mniejszą zmiennością szeregi kursów walutowych oraz szereg zmienności implikowanej WIV20. Wykorzystujemy różne częstotliwości poczynając od danych 5 minutowych a kończąc na danych dziennych. Szeregi prognoz zmienności porównujemy ze zmiennością zrealizowaną wyznaczaną na trzy różne sposoby lub z indeksem zmienności implikowanej WIV20.

Wartością dodaną pracy jest odpowiedź na pytanie czy istnieją najlepsze modele prognostyczne zmienności dla indeksu WIG20, zmienności implikowanej indeksu WIG20, kursów walutowych względem złotego i przykładowych spółek notowanych Na GPW oraz wskazanie modeli najlepszych w oparciu o badania empiryczne dla różnych okresów. Następnie sprawdziliśmy, że dla różnych częstotliwości notowań otrzymuje się te same zbiory modeli najlepszych dla indeksu WIG20. Po trzecie wykazaliśmy, że wybór modelu ARMA może poprawić prognozy zmienności uzyskane z modelu z rodziny GARCH. Ponadto udowodniliśmy, że kombinacja Pattona i Shepparda dobrze dopasowuje się do szeregu zmienności WIG20 i kursów walutowych i daje lepsze prognozy zmienności niż pojedyncze modele. Sprawdziliśmy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się podobnie do tego samego szeregu zmienności co funkcja Donaldsona i Kamstry. Wyznaczenie parametrów jednak szybsze dla funkcji Pattona i

Sheppard. Stwierdzamy, że dla indeksu WIG20, dla różnych typów miar zmienności zrealizowanej dla zbioru szeregów prognoz modeli GARCH zbioru MCS są takie same dla zmienności zrealizowanej przeskalowanej Koopmana i Hol $\sigma_{3,t}^2$ oraz podstawowej zmienności zrealizowanej, określonej jako suma kwadratów zwrotów śróddziennych $\sigma_{1,t}^2$ z taką samą funkcją straty, lecz wyniki są odmienne dla estymatora zmienności ze zwrotem nocnym $\sigma_{2,t}^2$. Okazało się, że modele ARMA-GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność spółek na GPW ze względu na dni o podwyższonej zmienności. Udowodniliśmy, że szereg zmienności implikowanej na indeks WIG20 ma własność długiej pamięci. Ponadto wykazaliśmy, że zmienność implikowaną indeksu WIG20 dobrze prognozują modele ARMA ARIMA i ARFIMA natomiast źle się dopasowują modele AR(1) i MA(1). Sprawdziliśmy, że indeks WIV20 zmienności implikowanej można prognozować lepiej za pomocą modelu ARMA dopasowanego do tego szeregu niż za pomocą modeli GARCH dopasowanych do szeregu zwrotów WIG20. Na końcu pokazaliśmy, że wszystkie modele ARMA ARIMA i ARFIMA dopasowane dobrze do szeregu WIV20 podobnie prognozują zmienność implikowaną (prognozy różnią się nieznacznie od siebie). Układ pracy jest następujący: Rozdział pierwszy poświęcony jest pojęciu zmienności instrumentu finansowego. Po omówieniu różnych aspektów tego pojęcia i konsekwencji nieobserwowalności zmienności przedstawiłam parametryczne modele zmienności typu GARCH. Omówiłam tu również pojęcia i teorię zmienności zrealizowanej oraz zagadnienia związane z prognozowaniem zmienności i bezpośrednią oceną jakości prognoz zmienności. Wyjaśniłam ponadto, czym jest zmienność implikowana

Rozdział drugi zawiera omówienie rozkładów stóp zwrotu wykorzystywanych w modelach GARCH. Przedstawiłam tutaj mieszaninę dwóch rozkładów normalnych, rozkłady uwzględniające grube ogony: rozkład t-Studenta i uogólniony rozkład błędu GED oraz rozkłady opisujące skośność szeregów zwrotów: skośny rozkład t-Studenta oraz rozkłady α – stabilne.

Rozdział trzeci jest poświęcony metodom testowania długiej pamięci. W jego ramach zdefiniowałam krótką pamięć procesu losowego. Zaprezentowałam trzy metody wykrywania długiej pamięci: analizę R/S, test Lo oraz metodę Geweke'a i Porter-Hudak

Rozdział czwarty dotyczy testowania nadrzędnej zdolności prognostycznej modeli za pomocą testu SPA. Przedstawiłam hipotezę zerową i alternatywną testu SPA oraz

statystykę testową. Wymieniłam różne funkcje straty stosowane w teście. Rozkład asymptotyczny statystyki testowej testu SPA nie jest standardowy oraz nie są jednoznacznie określony przy prawdziwej hipotezie zerowej, niemniej możliwe jest otrzymanie zgodnych oszacowań prawdopodobieństw testowych (p -wartości) za pomocą technik bootstrapowych (Politis i Romano 1994), które omówiłam w jednym z podrozdziałów. Opisałam estymatory p -wartości SPA. Omówiłam asymptotyczny rozkład statystyki testowej. Przedstawiłam wyniki badań dotyczące porównania testów RC i SPA. Metoda RC nie eliminuje modeli, które mają zbyt wiele parametrów. Ponadto SPA ma zdecydowanie większą moc niż RC. Na końcu znajduje się badanie własne. Przedstawiłam najlepsze modele prognostyczne zmienności indeksu WIG20, typu GARCH, dla najlepiej dopasowanego modelu średniej ARMA(0,0). Wyniki uzyskałam metodą SPA. Dokonałam wyboru najlepszych modeli prognostycznych indeksu WIG20 przy użyciu testu SPA

Rozdział piąty. W rozdziale piątym przedstawiłam procedurę konstrukcji zbioru ufności modeli (MCS). Podałam twierdzenie, które zapewnia, że w procesie eliminacji MCS otrzymuje się zbiór modeli najlepszych. Po omówieniu ogólnej teorii przedstawiona została przeze mnie koncepcja prawdopodobieństw testowych (p -wartości) metody MCS oraz ich interpretacja. Część teoretyczną rozdziału zamyka omówienie statystyk testowych i reguły eliminacji stosowanej w metodzie MCS. W przedstawionym badaniu empirycznym wyselekcjonowałam najlepsze modele prognostyczne indeksu WIG20 przy użyciu metody zbioru ufności modeli. Zawarłam badanie autorskie na temat najlepszych modeli prognostycznych dla indeksu WIG20 wśród modeli ARMA-GARCH, wybranych metodą MCS. Poszukiwałam modeli zmienności GARCH dla różnej specyfikacji ARMA. Pokazałam, że wybór modelu ARMA średniej może poprawić prognozy zmienności modeli typu GARCH. Pokazałam że w grupie modeli typu ARMA-GARCH można wytypować pzbior modeli najlepszych dla indeksu WIG20. Badanie przeprowadziłam dla różnych szeregów zwrotów indeksu WIG20

Rozdział szósty zawiera omówienie testu warunkowej zdolności prognostycznej. W ramach rozdziału przedstawiłam statystyki testowe testu warunkowej zdolności prognostycznej oraz wielokrokowego testu warunkowej zdolności prognostycznej. Podałam twierdzenia, które zapewniają, że statystyki testowe testów warunkowej zdolności prognostycznej mogą być weryfikowane w oparciu o wartości krytyczne rozkładu χ^2_q .

Rozdział siódmy dotyczy rankingu modeli zmienności. Zgodny ranking prognozytycznych modeli zmienności, tzn. ranking izomorficzny z rankingiem, w którym prognoza zmienności byłaby porównywana z nieobserwowalną zmiennością rzeczywistą, może być przydatny do podejmowania decyzji inwestycyjnych np. w metodzie portfelowej opartej na prognozach zmienności. Przedstawiłam koncepcje równoważności między rankingami. Omówiłam warunki, które zapewniają równoważność rankingów opartych na bazie zmienności rzeczywistej i na bazie estymatora zmienności (Hansen i Lunde 2006). Opisałam również tworzenie rankingu modeli prognozytycznych na podstawie współczynnika regresji Mincera-Zarnowitza.

W rozdziale ósmym omówiłam zagadnienie kombinacji prognoz. Przedstawiłam argumenty świadczące o przewadze kombinacji prognoz nad prognozami otrzymanymi za pomocą pojedynczych modeli. Kombinacja prognoz jest dobrą alternatywą, jeśli nie jest możliwe wyróżnienie jednego dominującego modelu (Timmermann 2006). Ponadto kombinacje prognoz są bardziej stabilne niż indywidualne prognozy (Stock i Watson 2004). W rozdziale opisałam kombinacje liniowe i nieliniowe prognoz, metody estymacji wag kombinacji oraz kombinacje z wagami zmieniającymi się w czasie. Rozdział zawiera również badanie własne na temat porównywania prognozytycznych modeli zmienności indeksu WIG20 i ich kombinacji przy pomocy metody zbioru ufności modeli. Danymi są modele zmienności oraz ich kombinacje liniowe i nieliniowe. Wynikiem badania są zbiory MCS zawierające kombinacje nieliniowe Pattona i Shepparda, jako dające lepsze prognozy niż pojedyncze modele. Rozdział kończy badanie będące porównaniem kombinacji nieliniowych Donaldsona i Kastrzy oraz Pattona i Shepparda

Rozdział dziewiąty to prezentacja badania własnego na temat wyboru najlepszych modeli prognozytycznych dla kursów walutowych i spółek akcyjnych z GPW spośród modeli typu ARMA-GARCH, metodą MCS. Wykonałam badanie dla kursu euro do złotego, kursu franka szwajcarskiego do złotego i kursu funta brytyjskiego do złotego. Badanie przeprowadziłam dla różnych szeregów i odniosłam rezultaty do wyników innych autorów. Ostatni podrozdział dotyczy wyboru modeli prognozytycznych zmienności dla spółek akcyjnych na GPW. W przedstawionym badaniu uwzględniłam spółki PKN Orlen, Handlowy i Agora. Prognozy zmienności porównałam z dzienną zmiennością zrealizowaną. Wykorzystałam dwie funkcje błędu MAD i MSE. Wyciągnęłam wniosek, że modele ARMA-GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność spółek na GPW.

Rozdział dziesiąty jest na temat modelowania i prognozowania zmienności implikowanej indeksu WIG20. Najpierw zdefiniowałam całkowitą zmienność implikowaną klasy opcji. W kolejnym podrozdziale zdefiniowałam model ARFIMA. Następnie poszukiwałam najlepszych modeli prognostycznych indeksu WIV20 spośród modeli $ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,1,q)$ i $ARFIMA(p,q)$ dla $p \in \{0,1,2\}$ i $q \in \{0,1,2\}$. Okazało się, że modele te generują bardzo dobre prognozy WIV20. Następnie porównałam prognozy zmienności najlepszych modeli typu ARMA, ARIMA i ARFIMA z prognozami tych modeli z równocześnie modelowaną prognozowaną wariancją warunkową błędu za pomocą modeli GARCH i jego różnych rozszerzeń. W ostatnim punkcie próbowałam prognozować zmienność implikowaną prognozując zmienność szeregu zwrotów indeksu WIG20 przy użyciu modeli z rodziny typu GARCH.

Prezentowana praca doktorska powstała pod kierunkiem naukowym prof. Ryszarda Domana. Autorka chciałaby serdecznie podziękować Panu Profesorowi za całą udzieloną pomoc, wsparcie naukowe, życzliwe odpowiedzi i poświęcony czas.

1. Zmienność instrumentu finansowego

W zależności od celu analizy funkcjonują różne definicje zmienności. Zmienność ceny instrumentu finansowego opisuje siłę wahań zwrotu tego instrumentu w danym przedziale czasowym. Większa zmienność oznacza podwyższoną niepewność co do przyszłych ruchów kursów. Badanie zmienności instrumentów finansowych należy do szyb-

ko rozwijających się obszarów badawczych. Zmienność odgrywa ważną rolę przy wycenie instrumentów pochodnych, np. opcji optymalizacji portfela. Zmienność występuje ponadto we wzorze na wartość zagrożoną. Procesy zmienności charakteryzują się persistencją i tendencją do tworzenia skupisk. Zmienność ma tendencje do spadku w czasie zaawansowanej bessy, poprzez początek nowej hossy aż do jej dojrzałego stadium. Wpisuje się to w udokumentowany fakt negatywnej korelacji zmienności ze stopą zwrotu. Inną cechą jest nieobserwowalność zmienności. Oznacza to, że zmienności nie można odczytać bezpośrednio. Utrzymywanie się wysokiej zmienności powinno być ostrzeżeniem dla inwestorów do pozostawania poza rynkiem. Konsekwentny spadek zmienności powinien zacząć przyciągać uwagę, tak aby włączyć się do rynku grając na wyżkę. Ponieważ znaczenie praktyczne mają prognozy zmienności pojawia się problem oceny jakości prognozy. Jednym z zagadnień jest zatem poszukiwanie miar zmienności. Wyróżnia się trzy sposoby pomiaru zmienności za pomocą modeli zmienności, implikowane przez ceny rynkowe, np. ceny opcji, oraz obliczanie zmienności zrealizowanej. Wśród parametrycznych modeli zmienności najczęściej wymienia się modele autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej GARCH oraz modele zmienności stochastycznej SV.

W podejściu dynamicznym przyjmuje się założenie, że istnieje możliwość przewidywania przyszłych wartości zwrotów w oparciu o ich przeszłe wartości oraz opóźnione wartości innych zmiennych objaśniających. Szczególne znaczenie ma tutaj występowanie nieliniowych zależności między tymi wielkościami. Koncepcja i specyfikacja modelu, w którym wykorzystano tego typu relację pojawiła się po raz pierwszy w pracy Engle'a dotyczącej zmienności stóp inflacji w Wielkiej Brytanii. Zaproponowany w pracy model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej ARCH(p) opiera się na założeniu istnienia autokorelacji pomiędzy kwadratami zwrotów. W kolejnych latach model ten podlegał licznym rozszerzeniom i modyfikacjom znajdując zastosowania w modelowaniu zmienności finansowych i makroekonomicznych szeregów czasowych.

Alternatywnym podejściem do zaproponowanego przez Engle'a modelu ARCH(p) są modele zmienności stochastycznej. Motywacji ich powstania należy dopatrywać się w powszechnie stosowanym po dzień dzisiejszy modelu Blecka-Scholesa (1973), którego cechuje nierealistyczne założenie o stałości zmienności. Założenie to stało się głównym powodem wprowadzenia przez Hulla i White'a (1987) modelu wyceny opcji, w którym zmienność opisana jest stochastycznym równaniem różniczkowym.

1.1. Miary zmienności

Miary zmienności opierają się na definicji ryzyka jako możliwości osiągnięcia wyniku innego niż oczekiwany. Miarami mierzącymi takie ryzyko są miary dyspersji. Miarą rozproszenia jest odchylenie standardowe. Oblicza się ją na podstawie danych historycznych pochodzących z danego horyzontu czasowego następująco

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (1.1)$$

lub

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad (1.2)$$

gdzie s -odchylenie standardowe, n -liczba danych z określonego przedziału czasowego
 \bar{r} - średnia stopa zwrotu .

Miara ta jest popularna i wykorzystywana zarówno w teorii portfelowej, w wycenie opcji i w szacowaniu wielkości VAR. Wadą tej metody jest to, że przy obliczaniu trzeba się oprzeć na danych historycznych i przez to istnieje problem doboru okresu z jakiego dane te powinny pochodzić. Zbyt krótki okres powoduje, że dane mogą nieść bardzo mało informacji o obecnie panującej sytuacji. Dane mniej odległe powinny w większym stopniu wpływać na wartość odchylenia standardowego. Jest to zawarte w koncepcji ważonego odchylenia standardowego.

$$s = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{i(1-i)^{t-1}}{1-(1-i)^n} (r_t - \bar{r}_w)^2}, \quad (1.3)$$

gdzie

$$\bar{r}_w = \sum_{t=1}^n \frac{i(1-i)^{t-1}}{1-(1-i)^n} r_t,$$

i jest definiowane następująco:

$$i = \frac{2}{n+1}.$$

W oparciu o tę miarę funkcjonują w analizie technicznej tak zwane wstęgi Bollingera

Metoda wstęgi Bollingera została zaproponowana przez Bollingera i polega na tym, że wokół średniej umieszcza się dwie wstęgi, które są odchylone od niej o dwa

(lub inną liczbę) odchylenia standardowe. Przy stosowaniu dwóch odchyłeń standardowych 95% danych cenowych powinna się znaleźć pomiędzy dwiema wstęgami. Jeśli ceny docierają do górnej lub dolnej wstęgi wtedy rynek staje się wykupiony lub wyprzedany. Rozszerzenie wstęg jest tożsame ze wzrostem zmienności. Te wskaźniki są wyliczane na bazie obserwacji przeszłych. Zatem możemy mówić o zmienności historycznej już zrealizowanej.

Odchylenie standardowe jest wrażliwe na wartości skrajne. Problem ten rozwiązuje średnie odchylenie stóp zwrotu od mediany. Mediana jest miarą położenia niewrażliwą na wartości ekstremalne. Dość często przyjmowanym założeniem jest stałość odchylenia standardowego w czasie. Liczne badania przemawiają za odrzuceniem tego założenia i zastosowaniem modeli warunkowej wariancji. Na przykład modeli typu GARCH. Do pomiaru ryzyka służy średni rozstęp między dwoma skrajnymi wartościami stopy zwrotu

Wyraża się następującym wzorem:

$$s = 0.5(r_{\max} - r_{\min}) \quad (1.4)$$

gdzie s - połowa rozstępu, r_{\max} maksymalna stopa zwrotu w zadanym okresie, r_{\min} minimalna stopa zwrotu. Istotnym minusem tej miary jest to, że jej wartość zależy wyłącznie od dwóch skrajnych stóp zwrotu a nie od ich rozkładu. Kolejnym sposobem pomiaru ryzyka jest zastosowanie odchylenia międzykwartalnego, zdefiniowanego jako różnica pomiędzy trzecim i pierwszym kwartylem. Miara ta nie jest tak wrażliwa na wartości ekstremalne, gdyż wyznacza się ją dla większej liczby obserwacji.

Badanie zmienności zwrotów może być prowadzone na dwa sposoby. Pierwszy to podejście statyczne lub historyczne. Zakłada ono niejawnie, że zwroty historyczne nie wnoszą informacji prognostycznych. Zakłada jednak, że przyszłe zwroty są funkcją zwrotów przeszłych.

W podejściu historycznym zmienność instrumentu finansowego jest estymowana jako:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(r_{t-j} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_{t-j} \right)^2 \quad (1.5)$$

Oblicza się zmienność na podstawie zwrotów przeszłych w oknie o długości n . To podejście zakłada, że w przedziale o długości n zwroty są niezależne lub co najmniej nieskorelowane i mają jednakowy rozkład.

W podejściu dynamicznym, uwzględniającym zwroty logarytmiczne, wyznaczone następująco $r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ miarą zmienności jest wariancja warunkowa stopy zwrotu

$$\sigma_t^2 = E\left((r_t - E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right). \quad (1.6)$$

r_t względem σ -algebry \mathcal{F}_{t-1} , (algebry informacji do chwili $t-1$) Oznacza to, że w tym ujęciu zmienność jest prognozowalna, Może być określona na podstawie informacji, które mapływały do momentu $t-1$.

Można również zdefiniować zmienność dla czasu ciągłego. Zakłada się wtedy, że transakcje na rynkach finansowych odbywają się w dowolnych chwilach, a pomiary zmienności zwrotów instrumentów finansowych mogą teoretycznie dotyczyć dowolnie krótkich przedziałów czasu.

Martyngał w teorii prawdopodobieństwa to proces stochastyczny (ciąg zmiennych losowych, w którym warunkowa wartość oczekiwana zmiennej w chwili t , gdy znamy wartości do jakiegoś wcześniejszego momentu s jest równa wartości w momencie s .

Definicja 1.1.

Każdą niemalejącą rodzinę σ ciał $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ nazywamy *filtracją*.

Filtracja może być interpretowana jako historia stanów procesu.

Definicja 1.2.

Najmniejsze przeliczalnie addytywne σ -ciało zbiorów \mathcal{B} zawierające półproste postaci $(-\infty, a]$ nazywamy ciałem zbiorów Borelowskich i oznaczamy je przez \mathcal{B} . Elementy σ ciała \mathcal{B} nazywamy zbiorami Borelowskimi.

Definicja 1.3.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech \mathcal{B} oznacza ciało zbiorów Borelowskich. Funkcję $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ nazywamy zmienną losową gdy jest \mathcal{F} mierzalna czyli

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Definicja 1.4.

Proces X_t nazywamy *adaptowanym do filtracji* \mathcal{F} jeśli dla dowolnego $t \in T$ zmienna losowa X_t jest \mathcal{F}_t -mierzalna.

Inaczej X jest adaptowany jeśli dla każdej realizacji i dla każdego n X_n jest znany w chwili n

Definicja 1.5.

Proces X_t adaptowany do filtracji \mathcal{F} nazywamy martyngałem względem miary \mathbb{P} i filtracji \mathcal{F} jeśli

- a) $E(X_t) < \infty$
- b) dla dowolnego $s < t$

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$$

Definicja 1.6.

Dla ciągu zmiennych losowych X_1, X_2, \dots zmienną losową τ o takiej własności, że dla każdego t to czy zdarzenie $\tau = t$ zrealizowało się zależy wyłącznie od realizacji zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_t , a ponadto $\Pr(\tau < \infty) = 1$ jest prawie wszędzie skończona, nazywamy *momentem zatrzymania*

Definicja 1.7.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech \mathcal{F}_t będzie filtracją. Ponadto niech $(X_t)_{t \in T}$ będzie procesem adaptowanym do filtracji \mathcal{F} . Wówczas mówimy, że X jest *martyngałem lokalnym* jeśli istnieje ciąg momentów zatrzymania τ_k taki, że

- 1) τ_k jest rosnący
- 2) τ_k jest rozbieżny do ∞
- 3) $X_t^{\tau_k} 1_{\{\tau_k > 0\}}$ jest \mathcal{F} martyngałem dla każdego k

W teorii prawdopodobieństwa proces rzeczywisty X jest semimartyngałem jeśli można utworzyć jego dekompozycję na sumę lokalnego martyngału i adaptowanego procesu o skończonej wariancji.

Definicja 1.8.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech \mathcal{F}_t będzie filtracją. Proces $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy *\mathcal{F} -semimartyngałem* jeśli można go rozłożyć na sumę $X_t = \mu_t + A_t$, gdzie μ jest martyngałem lokalnym a A jest procesem adaptowa-

nym do \mathcal{F} , mającym trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami oraz lokalnie ograniczoną wariancję.

Jeśli M jest martyngałem z lokalnie całkwalnym kwadratem to zachodzi równość

$$\text{Var}(M(t) | \mathcal{F}_{t-h}) = E\left(\left(M(t) - M(t-h)\right)^2 | \mathcal{F}_{t-h}\right) \quad (1.7)$$

Jeśli $[X, X]$ jest wariacją kwadratową dla semimartyngału X , określoną wzorem

$$[X, X] = X(t)^2 - X(0)^2 - 2 \int_0^t X(s_-) dX(s), \quad (1.8)$$

gdzie $X(s_-)$ jest granicą lewostronną, to prawdziwa jest następująca własność:

$$E\left(\left(M(t) - M(t-h)\right)^2 | \mathcal{F}_{t-h}\right) = E\left([M, M]_t - [M, M]_{t-h} | \mathcal{F}_{t-h}\right)$$

Zatem kolejną miarą zmienności, na przedziale $[t-h, t]$ jest zmienność wyznaczana ze wzoru:

$$v^2(t, h) = [M, M]_t - [M, M]_{t-h} \quad (1.9)$$

nazwana zmiennością teoretyczną lub zmiennością faktyczną.

W pracy Doman i Doman (2004) pokazano, że zmienność teoretyczna może być aproksymowana sumą kwadratów zwrotów o odpowiednio dużej częstotliwości. Jest to estymator zgodny zmienności teoretycznej.

Zapiszmy model Blacka-Scholesa z uwzględnieniem skoków:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + K(t)dq(t),$$

gdzie rozmiar skoku to

$$K(t) = p(t) - p(t-),$$

$p(t)$ jest logarymiczną ceną instrumentu finansowego w chwili t .

$q(t)$ oznacza proces Poissona, przy czym $q(t) = 1$ lub $q(t) = 0$ w zależności od tego, czy w momencie t następuje skok.

Wtedy z teorii zmienności przy przyjętych założeniach zachodzi zbieżność:

$$v^2_{t+1}(\Delta) \equiv \sum_{j=1}^{1/\Delta} r_{t+j\Delta, \Delta}^2 \rightarrow \int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds + \sum_{t < s \leq t+1} K^2(s) \quad (1.10)$$

W pracy Bandorffa-Nielsen i Shepharda (2004) rozwinięto teorię pozwalającą badać występowania skoków w procesie z czasem ciągłym

1.2. Specyfikacja modeli zmienności warunkowej

W badaniach przedstawionych w rozdziałach empirycznych pracy wykorzystano różne typy modeli GARCH. Model GARCH(p,q) (uogólniony model ARCH) opisuje się równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_t \sim \text{idd}(0,1), \omega > 0, \beta_j \geq 0, \alpha_i \geq 0.$$

Prosty sposób budowania modeli, łatwość ich estymacji oraz istniejąca naturalna interpretacja są powodem popularności tych Modele te zapewniają trwałą w czasie zależność pomiędzy kwadratami zwrotów przy jednoczesnej redukcji liczby opóźnień jaka mogłaby wystąpić w modelu ARCH .

W badaniach wykorzystano opisane poniżej typy modeli GARCH. Pierwszym wariantem modelu GARCH , uwzględniającym efekt asymetrii był GARCH wykładniczy (EGARCH) przedstawiony przez Nelsona w roku 1991.to znaczy model:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q [\alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i (|\varepsilon_{t-i}| - E|\varepsilon_{t-i}|)] + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \log(\sigma_{t-j}^2) \quad (1.12)$$

Wartość oczekiwana $E|\varepsilon_t|$ zależy od przyjętego rozkładu błędu ε_t .

Dla rozkładu normalnego mamy:

$$E|\varepsilon_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Dla skośnego standaryzowanego rozkładu t -Studenta

$$E|\varepsilon_t| = \frac{4\xi^2 \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{(\xi + \xi^{-1}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu-1) \sqrt{\pi}}.$$

gdzie ν jest liczbą stopni swobody standaryzowanego rozkładu t -Studenta a ξ jest współczynnikiem asymetrii.

Dla uogólnionego rozkładu błędu GED

$$E|\varepsilon_t| = \frac{2^{\frac{1}{\nu}} \lambda \Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)},$$

gdzie $\lambda = \left\{ \frac{2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}}$.

W postaci zaproponowanej przez Bollersleva i Mikkelsena w 1996 roku model EGARCH ma następującą specyfikację

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} [1 + \alpha(L)] g(\varepsilon_{t-1}), \quad g(\varepsilon_t) = \gamma_1 \varepsilon_t + \gamma_2 (|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|).$$

Tak jest on zdefiniowany w programie G@RCH Laureata.

W programie TSM Davidsona model EGARCH(1,1) jest postaci:

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| + \nu \varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \log \sigma_{t-1}^2,$$

gdzie ν to parametr asymetrii

W części empirycznej estymujemy za pomocą TSM modele EGARCH(1,1) z parametrem asymetrii równym zero, wtedy:

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_1 \log \sigma_{t-1}^2 \quad (1.13)$$

Model GARCH(p,q) w którym $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ nazywa się zintegrowanym modelem IGARCH. Szczególnym przypadkiem jest model RISKMETRICS, dla którego istnieją dwa współczynniki ARCH i GARCH wyrażone następująco:

$$\sigma_t^2 = \omega + (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2. \quad (1.14)$$

Zintegrowany ułankowo model GARCH został wprowadzony przez Bailie'go, Bolersleva i Mikelsena w roku 1996. Służy do modelowania długiej pamięci w procesie zmienności. Warunkowa wariancja w modelu FIGARCH(1,d,1), w programie TSM jest dana wzorem:

$$\sigma_t^2 = \omega + \left(1 - \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)L}{1 - \beta_1 L} (1 - L)^d \right) y_t^2, \quad (1.15)$$

Kolejnym jest model HYGARCH. Jest to hiperboliczny GARCH. Model HYGARCH(1,1) w programie TSM jest postaci:

$$\sigma_t^2 = \omega + \left(1 - \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)L}{1 - \beta_1 L} \left(1 + k((1-L)^d - 1)\right)\right) y_t^2, \quad (1.16)$$

Występowanie asymetrycznych oddziaływań zwrotów ujemnych i dodatnich na poziom zmienności nazywa się efektem dźwigni. Rozszerzeniem modelu GARCH uwzględniającym ten efekt jest model Glostena, Jagannathana i Runkle z roku 1993 GJR

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_t^- \varepsilon_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2 \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1.17)$$

S_t^- jest zmienną pomocniczą, która przyjmuje wartość 1 kiedy wartość γ_j jest negatywna, a 0 kiedy jest pozytywna.

Model APARCH wprowadzony przez Dinga, Grangera i Engle'a w roku 1993. obejmuje model GJR jako szczególny przypadek. Model ten posiada współczynniki asymetrii oraz daje możliwość dopasowania wykładnika δ , gwarantującego istnienie bezwarunkowego momentu rzędu δ dla procesu σ_t . Model APARCH(p,q) obejmuje jako szczególne przypadki siedem innych rozszerzeń modelu GARCH.

Model APARCH opisuje się równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(|y_{t-i}| - \gamma_i y_{t-i} \right)^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta,$$

gdzie $\delta > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ $i = 1, 2, \dots, q$

natomiast model FIAPARCH(1,1) w programie TSM ma następującą specyfikację:

$$\sigma_t^\eta = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^\eta + \alpha_1 (1-L)^d y_{t-1}^\eta.$$

W dalszych rozdziałach będą również wykorzystywane modele ARMA-GARCH. Są to modele, w których jednocześnie jest szacowana składowa liniowa w postaci ARMA oraz zmienność za pomocą modeli GARCH.

Specyfikacja modelu ARMA(r,s)-GARCH(p,q) jest taka jak poniżej:

$$r_t = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^s b_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie ε_t jest ścisłym białym szumem z zerową średnią, a r i s są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

gdzie $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1)$ $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ oraz $\beta_j \geq 0$.

1.3. Zmienność implikowana

Istnieje taki segment rynku, dla którego zmienność jest kluczowym parametrem decydującym o cenach. Chodzi tu o opcje, niezależnie od instrumentu podstawowego, na który są wystawiane. Z rynkowych kwotowań cen opcji można wyznaczyć aktualną wartość zmienności. Najczęściej wyceny europejskiej opcji call lub put dokonuje się za pomocą modelu Blacka-Scholesa. Zmienność obok ceny instrumentu bazowego, ceny wykonania, czasu do wygaśnięcia, stopy procentowej i dywidendy jest jednym z parametrów uwzględnionym w wycenie. Inaczej, znając wszystkie pozostałe parametry oraz bieżącą, rynkową cenę opcji możemy wyliczyć zmienność. Wtedy jest to tak zwana zmienność implikowana, czyli pozyskiwana za pośrednictwem cen opcji. Otrzymuje się inne wyniki dla różnych cen wykonania i rodzajów opcji kupna i sprzedaży. Trzeba uśrednić zmienności implikowane otrzymane z różnych serii opcji.

1.4. Prognoza zmienności

Jeżeli przez prognozę wartości zmienności σ_{h+l}^2 rozumiemy prognozę w sensie błędu średniokwadratowego, to wyraża się ona następującym wzorem:

$$\sigma_h^2(l) = E(\sigma_{h+l}^2 | \mathcal{F}_t)$$

h - początek prognozy

l - horyzont prognozy

Przy ocenie jakości prognoz stajemy przed problemem, że zmienność jest wielkością nieobserwowalną. Jej prognozy można porównać jedynie z wartościami wybranych estymatorów zmienności. Wymienimy miary błędu prognozy najczęściej stosowane przy ocenie jakości prognoz średniej warunkowej i zmienności. Niech \hat{y}_{T+i} będzie prognozą, y_{T+i} wielkością zaobserwowaną, T to liczba obserwacji w próbie, N jest liczbą prognoz na okres poza próbą, a i – długością horyzontu prognozy.

Najczęściej używaną miarą w przypadku prognoz zmienności jest współczynnik R^2 regresji Mincera-Zarnowitza, mającej następującą postać:

$$y_{T+i} = a + b\hat{y}_{T+i} + u_{T+i},$$

gdzie $i = 1 \dots N$.

Współczynnik ten jest kwadratem współczynnika korelacji. Jeśli wartości tego współczynnika są duże, to oznacza to, że prognozy zmienności są bliskie wartościom rzeczywistym.

Inne stosowane miary błędów to:

błąd średniokwadratowy:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2 \quad (1.18)$$

medianowy błąd kwadratowy MedSE:

$$MedSE = \text{mediana} \left\{ (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2 \right\}_{i=1}^N \quad (1.19)$$

błąd średni ME:

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}) \quad (1.20)$$

średni błąd bezwzględny:

$$MAD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}| \quad (1.21)$$

pierwiastek błędu średniokwadratowego:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2} \quad (1.22)$$

średni bezwzględny błąd procentowy:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}} \right| \quad (1.23)$$

skorygowany średni bezwzględny błąd procentowy:

$$AMAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}}{y_{T+i} + \hat{y}_{T+i}} \right| \quad (1.24)$$

udział prawidłowych znaków:

$$PCS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(\text{sign}(y_{T+i}, \hat{y}_{T+i}), 0) \quad (1.25)$$

współczynnik rozbieżności Theila:

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{T+i}^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_{T+i}^2}} \quad (1.26)$$

logarytmiczna funkcja straty

$$LLF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{\hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}} \right) \quad (1.27)$$

Różne miary błędów pozwalają uchwycić różne cechy prognoz. Na przykład *MSE* jest bardziej wrażliwy na obserwacje nietypowe niż *MAE*

1.5. Zmienność zrealizowana

Ponieważ po przyjęciu kwadratu zwrotu dziennego jako estymatora zmienności dziennej jakość prognoz zmienności jest niezadowalająca Andersen i Bollerslew (1998) zaproponowali inną miarę zmienności, tak zwaną zmienność zrealizowaną. Przez zmienność zrealizowaną autorzy ci rozumieją sumę kwadratów zwrotów śróddziennych o ustalonych częstotliwościach. Przy założeniu że proces logarytmów cen instrumentu finansowego jest ciągłym procesem dyfuzji danym przez stochastyczne równanie różniczkowe

$$dp_t = \sigma_t dW_t,$$

gdzie $t \geq 0$, W_t oznacza standardowy ruch Browna, a σ_t jest procesem ściśle stacjonarym wykazali oni że poprawną dzienną zmienność ceny w dniu $t+1$ można przybliżać przezienne sumy kwadratów zwrotów śróddziennych. Ze względu na niejednorodność notowań względem czasu dodają oni do tej sumy dodatkowo kwadrat zwrotu noc-

nego. Długi okres jakiemu odpowiada zwrot nocny powoduje że miara zmienności ze zwrotem nocnym jest obciążona szumem losowym. Zmienność zrealizowana ze zwrotem nocnym wyraża się następującym wzorem

$$\sigma_{2,t}^2 = \sum_{i=0}^N r_{t,i}^2, \quad (1.28)$$

gdzie zwrot śróddzienny w dniu n i w chwili d jest definiowany następująco:

$$r_{n,d} = 100(\ln P_{n,d} - \ln P_{n,d-1}), \quad r_{n,0} = 100(\ln P_{n,1} - \ln P_{n-1,N}),$$

N jest liczbą okresów w ciągu dnia, a $P_{n,0}$ oznacza kurs otwarcia w dniu n .

Alternatywne podejście, zaproponowane przez Andersena i Bollersleva w roku 1998. polega na wyznaczeniu zmienności zrealizowanej jako sumy zwrotów wyłącznie śróddziennych.

$$\sigma_{1,t}^2 = \sum_{i=1}^N r_{t,i}^2. \quad (1.29)$$

W pracy Andersena i in. (2001) autorzy nazwali ją zmiennością dzienną.

Ostatnią jest zmienność zrealizowana przeskalowana przez Koopmana. Martens (2002) zaproponował pomnożenie $\sigma_{1,t}^2$ przez $(1+c)$, gdzie c jest dodatnią stałą ponieważ badania empiryczne wykazały że zmienność dzienna daje zaniżone oszacowania zmienności zrealizowanej. Koopman i in. (2005) zaproponowali obranie $(\sigma_{co}^2)/\sigma_{oc}^2$ jako stałej c , gdzie $\sigma_{co}^2 = Var(r_{t,0})$ i $\sigma_{oc}^2 = Var(\sum_{i=1}^N r_{t,i})$. σ_{co}^2 oznacza empiryczną wariancję zwrotu między kursem zamknięcia a kursem otwarcia w dniu następnym, σ_{oc}^2 jest empiryczną wariancją zwrotu dziennego. Wtedy zmienność zrealizowana wyraża się wzorem:

$$\sigma_{3,t}^2 = \frac{\sigma_{oc}^2 + \sigma_{co}^2}{\sigma_{oc}^2} \sum_{i=1}^N r_{t,i}^2. \quad (1.30)$$

W przeskalowaniu tym chodzi o uwzględnienie wpływu zwrotu nocnego na zmienność bez wprowadzania szumu losowego, związanego ze zwrotem nocnym.

Pokazano w dysertacji, że dla indeksu WIG20 wartości $\sigma_{3,t}^2$ i $\sigma_{1,t}^2$ są zbliżone. Różnią się jednak znacznie od wartości $\sigma_{2,t}^2$. W przypadku kursów walutowych okazało się, że

wartości współczynnika c są niższe niż dla innych szeregów polskiego rynku finansowego (Domani i Doman 2009). Można zaobserwować (Doman i Doman 2009), że im płynniejszy rynek tym mniejsza wartość c .

Problemem związanym ze stosowaniem zmienności zrealizowanej jest wybór częstotliwości zwrotów śróddziennych. Zbyt duża częstotliwość obserwacji może prowadzić do fałszywych wyników ze względu na efekty mikrostruktury rynku. Do aspektów mikrostruktury rynku należą płynność, zmienność cen, koszty transakcyjne, stopień odzwierciedlenia informacji przez ceny, asymetrię informacji, intensywność procesu napływu informacji oraz zyski transakcyjne. Efekty mikrostruktury rynku wykrywa się analizując dane o wysokiej częstotliwości. Nie powinno się wykorzystywać zwrotów o częstotliwości większej niż 5 minut.

1.6. Podsumowanie

Niniejszy rozdział w całości poświęcony jest pojęciu zmienności i jego różnym rodzajom. Przedstawiliśmy dwa sposoby badania zmienności statyczne i dynamiczne. Zdefiniowaliśmy prognozę zmienności oraz miary błędów prognoz zmienności. Omówiliśmy dwa szczególne rodzaje zmienności zmienność zrealizowaną, wyznaczaną na trzy różne sposoby i zmienność implikowaną, które będą przedmiotem badań w późniejszych rozdziałach. Zaprezentowaliśmy ponadto różne typy modeli zmienności GARCH, które będą wykorzystane w rozdziałach empirycznych.

2. Rozkłady błędu dla modeli GARCH

Często przyjmuje się założenie, o normalności rozkładu innowacji. Dzięki temu można opisać rozkład za pomocą dwóch parametrów, wartości średniej i odchylenia standardowego. Dodatkowo zmienne o rozkładzie normalnym nieskorelowane są niezależne.. Wiadomo jednak, po przeprowadzeniu badań empirycznych, że bezwarunkowe rozkłady błędu nie są normalne, gdyż mają kurtozę większą niż 3. Znanym faktem jest również podwyższona kurtoza rozkładów warunkowych. Ponadto Grube ogony rozkładów empirycznych wskazują na wpływ zdarzeń ekstremalnych na ryzyko. Rozkład normalny

nie opisuje zdarzeń nietypowych. Dlatego rozkład normalny dla zastępuje się innymi rozkładami, takimi jak: kombinacja dwóch rozkładów normalnych, rozkład t Studenta, rozkład skośny t Studenta, uogólniony rozkład błędu GED..

2.1 Rozkłady uwzględniające grube ogony

Mieszanka dwóch rozkładów normalnych, z których jeden charakteryzuje się większym odchyleniem standardowym jest jedną z metod na modelowanie rozkładu finansowych szeregów czasowych o grubych ogonach. W tym przypadku rozkład jest następujący:

$$r = p_1 N(\mu_1, \sigma_1) + (1 - p_1) N(\mu_2, \sigma_2), \quad (2.1)$$

gdzie

r – rozkład stóp zwrotu,

p_1 – wartość parametru z przedziału $[0,1]$.

Metoda kombinacji dwóch rozkładów normalnych pozwalają na dokładniejsze szacowanie rozkładu. Metoda ta wymaga jednak dodatkowych obliczeń

Grube ogony opisują również rozkłady t Studenta, zaproponowany przez Bollersleva (1987) i uogólniony rozkład błędu GED. Funkcja gęstości rozkładu t -Studenta może być zdefiniowana w następujący sposób:

$$f(x) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{1}{(1 + x^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}, \quad (2.2)$$

gdzie Γ jest funkcję gamma zdefiniowaną następująco:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx.$$

Dla $\nu > 4$ standardowy rozkład t -Studenta ma moment czwartego rzędu równy:

$3(\nu - 2)/(\nu - 4)$. Kurtosa rozkładu warunkowego jest większa niż w przypadku rozkładu normalnego.

Innym rozkładem, który może opisywać rozkład błędu jest uogólniony rozkład błędu, wprowadzony przez Nelsona (1991). Jego funkcja gęstości jest zdefiniowana następująco:

$$f(x) = \frac{\nu}{\lambda 2^{(1+\nu)\Gamma(1/\nu)}} e^{1/2(x/\nu)} \quad (2.3)$$

gdzie ν jest parametrem kształtu, a parametr λ jest wyznaczony następująco:

$$\lambda = \left(2^{-(2/\nu)} \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)} \right)^{1/2}.$$

W szczególności gdy $\nu = 2$ rozkład jest rozkładem normalnym. Parametr kształtu decyduje o grubości ogonów. Im mniejsza jest wartość parametru ν tym są one grubsze. Parametr skali λ zapewnia, że wariancja rozkładu jest równa jeden. Rozkład ten opisuje leptokurtozę w szeregach finansowych.

2.2 Rozkłady opisujące skośność szeregów czasowych

Opisane wcześniej rozkłady są symetryczne. Empiryczne szeregi czasowe charakteryzują się często skośnością. W celu uwzględnienia skośności stosuje się skośny rozkład t-Studenta (Fernández, Osiewalski i Steel 1995, Fernández i Steel 1998, Lambert i Laureat 2001, Hansen 1994). Gęstość standaryzowanego skośnego rozkładu t-Studenta wyraża się wzorem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} Sg(\xi(Sz + m)), & \text{gd } z < -\frac{m}{S} \\ \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} Sg((Sz + m)/\xi), & \text{gd } z > -\frac{m}{S} \end{cases}, \quad (2.4)$$

gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t-Studenta z ν stopniami swobody, Współczynnik asymetrii wynosi ξ .

Dla $\nu > 2$ wartość oczekiwana zmiennej o gęstości f wyraża się wzorem:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\xi - \xi^{-1})$$

Odchylenie standardowe natomiast jest równe:

$$S = \sqrt{\xi^2 + \xi^{-2} - 1 - m^2}.$$

Przez niestandardyzowany skośny rozkład t Studenta z ν stopniami swobody i współczynnikiem asymetrii ξ rozumiemy rozkład zmiennej X o gęstości:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} g(\xi \cdot z), & \text{gdy } z < 0 \\ \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} g(z / \xi), & \text{gdy } z \geq 0 \end{cases}$$

gdzie g oznacza gęstość standaryzowanego rozkładu t Studenta

2.3. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiliśmy rozkłady błędów stosowane w modelach GARCH. Rozkłady zostały podzielone na opisujące grube ogony oraz uwzględniające skośność szeregów czasowych. Wszystkie te rozkłady będą wykorzystane w części empirycznej rozprawy

3. Metody testowania długiej pamięci

3.1. Definicja krótkiej pamięci procesu

O procesie kowariancyjnie stacjonarnym r_t mówi się, że ma krótką pamięć, jeśli jego funkcja autokowariancji $\gamma_h = \text{cov}(r_t, r_{t-h})$ jest bezwzględnie sumowana

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_h| < \infty, \quad (3.1)$$

a funkcja gęstości spektralnej

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \exp(-ih\lambda) \quad (3.2)$$

jest różna od zera dla $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ (Bhansali, Kokoszka 2001)

Dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych warunkiem dostatecznym posiadania krótkiej pamięci jest znikanie funkcji autokorelacji w tempie wykładniczym. Jeśli funkcję autokorelacji oznaczymy jako ρ możemy warunek ten zapisać następująco:

$$|\rho(k)| \leq Cr^{-k}, k = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

gdzie $C > 0$ i $0 < r < 1$

3.2. Analiza R/S

Najstarszą i najbardziej znaną metodą wykrywania długiej pamięci jest analiza R/S. Metoda ta została wprowadzona przez Mandelbrota i Wallisa w roku 1968. Załóżmy, że x_t jest szeregiem czasowym, gdzie $t = 1, 2, \dots, n$. Statystyka R/S jest definiowana następująco.

$$(R/S)_n = \frac{1}{S} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{t=1}^i (x_t - \bar{x}) - \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{t=1}^i (x_t - \bar{x}) \right\}, \quad (3.4)$$

gdzie \bar{x} jest średnią z próby a S jest odchyleniem standardowym z próby.

Asymptotycznie wartość statystyki R/S jest równa:

$$(R/S)_n = Cn^H. \quad (3.5)$$

Zatem mamy

$$\ln(R/S)_n = \ln(C) + H \ln(n). \quad (3.6)$$

3.3. Test Lo

Lo w roku 1991 zaproponował zmodyfikowany test R/S. Przedstawił następującą statystykę

$$Q_n = \frac{1}{s_n(q)} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{t=1}^i (x_t - \bar{x}) - \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{t=1}^i (x_t - \bar{x}) \right\}, \quad (3.7)$$

gdzie

$$s_n^2(q) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 + \frac{2}{n} \sum_{t=1}^q \omega_t(q) \left(\sum_{i=t+1}^n (x_i - \bar{x})(x_{i-t} - \bar{x}) \right) = \hat{s}_x^2 + 2 \sum_{t=1}^q \omega_t(q) \hat{\rho}_x,$$

$$\text{i } \omega_t(q) = 1 - \frac{t}{q+1}.$$

Statystyka ta jest rozszerzeniem poprzedniej o estymator kowariancji.

\hat{s}_x^2 to wariancja z próby, a $\hat{\gamma}_x$ to autokowariancja z próby. Jeśli szereg nie ma własności długiej pamięci rozkład statystyki $n^{-0.5}Q_n$ jest asymptotycznie równy

$$W = \max_{0 \leq r \leq 1} V(r) - \min_{0 \leq r \leq 1} V(r), \quad (3.8)$$

gdzie V jest ruchem Browna. Rozkład losowej wartości W jest dany formułą:

$$P(W \leq x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 - 4x^2 j^2) \exp(-2x^2 j^2). \quad (3.9)$$

W rozdziale dwunastym wykorzystaliśmy statystykę Q_n do przetestowania hipotezy zerowej, że istnieje tylko krótka pamięć w danym szeregu..

3.4. Metoda Geweke'a i Porter-Hudak

Inne podejście zostało zaproponowane przez Geweke'a i Porter-Hudak (1983). Weźmy zintegrowany w stopniu ułamkowym proces x_t . Gęstością spektralną tego procesu jest

$$f(\omega) = [2 \sin(\omega/2)]^{-2d} f_u(\omega), \quad (3.10)$$

gdzie ω jest częstotliwością, $f_u(\omega)$ jest widmem szeregu u_t , gdzie u_t jest stacjonarnym zaburzeniem o krótkiej pamięci ze średnią zero. Jeśli szereg czasowy nie ma długiej pamięci ($d = 0$).

Obliczając obustronnie logarytm

$$\ln f(\omega_j) = \ln f_u(\omega_j) - d 2 \ln [2 \sin(\omega_j/2)], \quad (3.11)$$

gdzie ω_j jest zbiorem częstotliwości harmonicznych, $\omega_j = 2\pi j/n$ dla $j = 0, 1, \dots, n/2$ a n jest wielkością próby. \hat{d} jest estymatorem d , semiparametrycznego parametru integracji ułamkowej, otrzymywanym metodą najmniejszych kwadratów z regresji. Geweke i Porter-Hudak (1983) pokazali, że po estymacji $f(\omega)$ periodygramem, jeśli liczba częstotliwości wykorzystana w regresji 3.11 jest funkcją $g(n) = n^\alpha$, gdzie $0 < \alpha < 1$, estymator najmniejszych kwadratów \hat{d} na podstawie równania 3.10 ma asymptotyczny rozkład normalny dla dużych prób, to znaczy:

$$\hat{d} \sim N \left(d, \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (U_j - \bar{U})^2} \right), \quad (3.11)$$

gdzie $U_j = \ln[4 \sin^2(\omega_j / 2)]$.

\bar{U} jest średnią z próby U_j dla $j = 1, 2, \dots, g(n)$. Periodegram jest zdefiniowany następująco:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi m} \left| \sum_{t=1}^n x_t \exp(-i\omega t) \right|^2$$

Można przetestować hipotezę zerową, że szereg czasowy nie ma długiej pamięci ($d = 0$), która jest prawdziwa, jeśli statystyka t postaci:

$$t_{d=0} = \hat{d} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (U_j - \bar{U})^2} \right)^{-0,5} \quad (3.12)$$

ma w granicy standardowy rozkład normalny.

3.5. Podsumowanie

Niniejszy rozdział został poświęcony metodom testowania długiej pamięci. Rozpoczynamy od definicji krótkiej pamięci procesu. Następnie prezentujemy trzy metody wykrywania długiej pamięci: analizę R/S, jej modyfikację - test LO oraz metodę Geweke'a i Porter-Hudak. Testy te zastosowaliśmy w rozdziale empirycznym dotyczącym zmienności implikowanej

4. Testowanie nadrzędnej zdolności prognostycznej za pomocą SPA

Test SPA daje możliwość sprawdzenia czy w zbiorze modeli prognostycznych istnieje model lepszy niż inne modele pod względem zdolności prognostycznej. Test SPA może być również wykorzystywany do porównywania zdolności prognostycznych pewnych zmiennych losowych, do porównywania kombinacji prognoz a także miar, na przykład miar zmienności czy miar błędu oraz do porównywania symulacji. Test SPA został przedstawiony po raz pierwszy przez Hansena w pracy roku 2001. Przydatność metody

została zweryfikowana za pomocą eksperymentów *Monte Carlo* dla modeli progno-
stycznych wyestymowanych dla prognoz rocznej inflacji. Metoda SPA jest to nowe i
konkurencyjne podejście w stosunku do wcześniejszego testu, RC- The Reality Check
for Data Snooping po raz pierwszy wprowadzonego przez White'a w roku 2000. W
pracy Hansena, (2005) pokazano, że test SPA ma większą moc od testu RC i jest mniej
wrażliwy na obecność złych prognoz. Wyniki testu SPA mogą być wykorzystane do
podejmowania decyzji inwestycyjnych na podstawie metod statystycznych. W pracach
Busse, (1999) i Johannesena, i in. (2002) potwierdzona jest przewaga strategii portfelowej
opartej na prognozach zmienności.

4.1. Statystyki testowe testów SPA i RC

Niech $\{\hat{\sigma}_{k,t}^2, k = 0, 1, \dots, m\}$ będzie skończonym zbiorem zmiennych losowych, na
przykład prognoz zmienności wyznaczonych z modeli $k = 0, 1, \dots, m$. Niech $\sigma_{l,t}^2$ będzie
zmienną losową, np. zmiennością zrealizowaną typu k , $l = 1, 2, 3$. Wprowadźmy miarę
zwaną funkcją straty:

$$L(\sigma_{l,t}^2, \hat{\sigma}_{k,t}^2). \quad (4.1)$$

Prognozy oceniamy w terminach względnej straty. Względną stratę definiujemy nastę-
pująco:

$$X_{k,t} = L(\sigma_{l,t}^2, \hat{\sigma}_{0,t}^2) - L(\sigma_{l,t}^2, \hat{\sigma}_{k,t}^2), \quad (4.2)$$

gdzie $k = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, n$.

W teście RC za statystykę testową przyjęto:

$$T_n^{RC} = \max \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_1, \dots, n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_m \right), \quad (4.3)$$

gdzie

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{k,t}$$

jest estymatorem średniej z próby,

Określmy statystykę testową testu SPA:

$$T_n^{SPA} = \max \left[\frac{\max_k n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_k}{\hat{\sigma}_k}, 0 \right] \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

$\hat{\sigma}_k^2 = \widehat{Var} \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_k \right)$ - jest estymatorem wariancji z próby.

Definicja 4.1.

Dla ciągów zmiennych losowych X_1, X_2, \dots niech α_n będzie taką liczbą, że

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha_n, \text{ gdzie } A \in \sigma(X_1, \dots, X_k), B \in \sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}), k \geq 1, n \geq 1.$$

Załóżmy, że $\alpha_n \rightarrow 0$. Zmienne losowe X_k i X_{k+n} są wtedy w przybliżeniu niezależne dla dużych n . Mówimy wówczas, że ciąg $\{X_n\}$ zmiennych losowych jest α -mieszający

Definicja 4.2.

Ciąg δ_m jest rozmiaru $-\lambda$ jeśli $\delta_m = O(m^{-\lambda-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

Sformułujmy następujące założenie:

Założenie 4.1.

Wektor zmiennych $\mathfrak{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt})$ jest ściśle stacjonarny i α -mieszający rozmiaru $-(2 + \delta)(r + \delta)/(r - 2)$,

$$\alpha_n = O \left(n^{\frac{-(2+\delta)(r+\delta)-\varepsilon}{r-2}} \right), \quad \varepsilon > 0,$$

dla pewnych $r > 2, \delta > 0$, gdzie $E|\mathfrak{X}_t|^{r+\delta} < \infty$ i $\text{var}(X_{k,t}) > 0$ dla wszystkich $k = 1, \dots, m$.

Przy powyższym założeniu możemy zastosować uogólnione, centralne twierdzenie graniczne następującej postaci

$$n^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathfrak{X}} - \mu) \xrightarrow{d} N_m(0, \hat{\Omega}),$$

gdzie $\bar{\mathfrak{X}} = \sum_{t=1}^n \mathfrak{X}_t$, $\hat{\Omega}$ jest zgodnym estymatorem zmiennej $\Omega = a \text{var} \left(n^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathfrak{X}} - \mu) \right)$.

Powyższe założenie pozwala również na zastosowanie technik bootstrapowych, gdyż średnie z prób bootstrapowych będą asymptotycznie niezależne.

4.2. Hipoteza zerowa testu SPA

Hipotezą testu SPA jest, że model obrany jako wzorcowy nie jest gorszy od żadnego z modeli alternatywnych w danym zbiorze. **Ta hipoteza może być zapisana następująco,**

$$H_0 : \mu_k = E[X_{k,t}] \leq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

, gdzie $X_{k,t}$ zostały zdefiniowane w 4.2. W teście SPA mamy do czynienia ze złożoną hipotezą zerową, co oznacza, że trzeba rozważyć kilka rozkładów zerowych.

Równoważnie poprzez wektor hipoteza zerowa może być wyrażona tak jak poniżej:

$$H_0 : \mu \leq 0$$

Rozkład statystyki testu SPA przy założeniu hipotezy zerowej $\mu_k \leq 0$ dla wszystkich k nie jest standardowy. Do wyznaczenia rozkładu statystyki T_n^{SPA} stosowany jest bootstrap stacjonarny Politisa i Romano (1994). Istotną zaletę testu SPA jest to, że sprawdza się również w sytuacji, gdy estymator $\hat{\sigma}_k^2$ jest estymatorem niezgodnym parametru σ_k^2 . Jest to jasne w sytuacji, gdy $\hat{\sigma}_k^2 = 1$. Dla tej wartości statystyka testowa przekształca się w statystykę testu RC.

W omawianym teście można wykorzystać różne funkcje straty. Ich wybór ma znaczenie dla wyników testu:

1. Kwadrat błędu

$$L(\xi_t, \delta_{k,t-h}) = (\xi_t - \delta_{k,t-h})^2.$$

2. Bezwzględna strata

$$L(\xi_t, \delta_{k,t-h}) = |\xi_t - \delta_{k,t-h}|^2.$$

3. Niech ξ_t będzie warunkową gęstością na zbiorze R . Statystykę Kolmogorova-Smirnova definiujemy następująco:

$$L(\xi_t, \delta_{k,t-h}) = \sup_{x \in R} \left| \int_{-\infty}^x [\xi_t(y) - \delta_{k,t-h}] dy \right|.$$

4. Kullback-Leibler podali następującą miarę:

$$L(\xi_t, \delta_{k,t-h}) = \int_{-\infty}^{\infty} \log[\delta_{k,t-h}(x) - \xi_t(x)] \cdot \xi_t(x) dx.$$

5. $\delta_{k,t-h}$ może być miarą wartości zagrożonej na poziomie ufności α , wtedy

$$L(\xi_t, \delta_{k,t-h}) = \left| \int_{-\infty}^{\delta_{k,t-h}} \xi_t(x) dx - \alpha \right|.$$

4.3. Porównanie testów RC oraz SPA

W pracy Souzy i in. (2002) pokazano, że moc RC wzrasta wraz z kurtozą modelu wzorcowego. Co więcej test RC nie może być wykorzystywany do porównywania nadrzędnej zdolności prognostycznej. Metoda RC nie eliminuje modeli, które mają zbyt wiele parametrów. Metoda ta wskazuje na modele o jednakowej zdolności prognostycznej. Wartości krytyczne dla testu RC wzrastają im więcej modeli jest porównywanych ze sobą. Wynika to stąd, że statystyka testowa dla modelu najlepszego ma wartość największą, a procedura bootstrapowa wykorzystuje wszystkie modele. Hansen (2005) podał test, który włącza wszystkie modele ale redukuje wpływ złych modeli, to znaczy modeli, dla których $\mu_k < 0$. Dokonał tego za pomocą studentyzacji statystyki testowej. W pracy Hansena (2005) dokonano porównania mocy testów RC i SPA. Testem, który ma wyraźnie większą moc, we wszystkich podanych przypadkach jest test SPA. Moc testu została poprawiona dzięki studentyzacji statystyki testowej i dodaniu dodatkowej informacji za pomocą zależnego od próby rozkładu zerowego. Poprawa mocy była wykazana w eksperymentach symulacyjnych Monte Carlo, w badaniu dla inflacji USA.

Podamy założenie, które zapewnia, że momenty są dobrze zdefiniowane.

Założenie 4.2.

Zdefiniujmy statystykę testową $T_n = \varphi(\Upsilon_n, \Upsilon_n)$, $\Upsilon_n \equiv n^{\frac{1}{2}} \bar{\mathfrak{X}}$ i $\Upsilon_n \xrightarrow{P} \mathfrak{v}_0 \in R^q$, gdzie ν_0 jest pewną stałą. Niech odwzorowanie $\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{v})$ będzie ciągle w punkcie ν w \mathfrak{S}^m i ciągle w punkcie w otoczeniu punktu \mathfrak{v}_0 ponadto spełnione będą warunki:

- (a) $\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) \geq 0$ i $\varphi(0, \mathfrak{v}) = 0$;
- (b) $\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) = \varphi(\mathfrak{v}^+, \mathfrak{v}^+)$ gdzie $u_k^+ = \max(0, u_k)$ $k = 1, \dots, m$;
- (c) $\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) \rightarrow \infty$, jeśli $u_k \rightarrow \infty$ dla wszystkich $k = 1, \dots, m$.

Założenie 4.2. *a* to założenie normalizacyjne. Normalizacja pozwala uniknąć problemu zbieżności do nieskończoności kiedy $\mu < 0$ Założenie 4.2. *b* wnosi, że tylko dodatnie elementy v mają wpływ na wartość statystyki. Założenie 4.2. *c* zapewnia, że statystyka testująca zbiega do nieskończoności kiedy oddalamy się od wartości, dla której hipotezy zerowa jest spełniona.

Statystyka testowa T_n^{SPA} testu *SPA* spełnia założenie 2. Odchylenie standardowe w mianowniku powoduje, że wartość statystyki jest zawsze dodatnia, (przy ujemnym liczniku mianownik jest ujemny), podczas gdy statystyka testowa testu *RC* nie spełnia tego założenia.

Zdefiniujmy odwzorowanie:

$$(\mu, \Omega) \rightarrow \Omega^0 \text{ dane przez } \Omega_{ij}^0 \equiv \Omega_{ij} 1_{[\mu_i = \mu_j = 0]}, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

które definiuje macierz kowariancji wymiaru $m \times m$. Poniższe twierdzenie definiuje asymptotyczny rozkład statystyki przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej dla wszystkich statystyk testowych, które spełniają założenia 4.1. i 4.2.

Twierdzenie 4.1.

Przy założeniu 4.1. oraz 4.2. Niech F_0 będzie funkcją dystrybuanty statystyki $\varphi(\mathbf{C}, v_0)$, gdzie $\mathbf{C} \sim N(0, \Omega^0)$.

Przy założeniu $\mu \leq 0$

$$\varphi\left(n^{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{V}}_n\right) \xrightarrow{d} F_0.$$

gdzie \mathbf{v}_0 jest granicą ciągu $\hat{\mathbf{V}}_n$ według prawdopodobieństwa.

Przy założeniu $\mu > 0$ mamy

$$\varphi\left(n^{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{V}}_n\right) \xrightarrow{p} \infty.$$

Jest możliwe wyznaczenie wartości krytycznych statystyki T_n^{RC} na podstawie twierdzenia 4.1. Zastosowanie tego twierdzenia do statystyki testowej $T_n^{RC} = \max(T_n^{RC}, 0)$, która spełnia założenie 4.2. pozwala na wyznaczenie wartości krytycznych rozkładu.

Test *RC* opiera się na asymptotycznym rozkładzie przy założeniu $\mu_k = 0$ dla wszystkich modeli k , chociaż wszystkie wartości $\mu_k < 0$ też odpowiadają hipotezie ze-

rowej. Oznacza to, że rozkład statystyki T_n^{RC} może być wyznaczony dzięki następującemu twierdzeniu:

Twierdzenie 4.2.

Niech $m_0 \leq m$ będzie liczbą modeli takich, że $\mu_k = 0$ i zdefiniujmy macierz Σ jako podmacierz rzędu $m_0 \times m_0$ macierzy Ω , która zawiera elementy macierzy Ω z indeksami (i, j) jeśli $\mu_i = \mu_j = 0$. Niech ζ_Σ oznacza rozkład zmiennej $Z_{\max} \equiv \max_{j=1, \dots, m_0} Z_j^0$, gdzie $\mathbf{C}^{*0} = (Z_1^0, \dots, Z_{m_0}^0) \sim N_{m_0}(0, \Sigma)$. Wtedy $T_n^{RC} \xrightarrow{d} \zeta_\Sigma$, jeśli $\max_k \mu_k = 0$, podczas gdy $T_n^{RC} \xrightarrow{p} -\infty$ jeśli $\mu_k < 0$ dla wszystkich $k = 1, \dots, m$. Jeśli $\mu_k > 0$, to dla pewnych k zachodzi $T_n^{RC} \xrightarrow{p} \infty$.

RC opiera się na asymptotycznym rozkładzie zerowym, który zakłada, że $\mu_k = 0$, pomimo, że wszystkie ujemne wartości μ_k też są zgodne z hipotezą zerową..

(d oznacza zbieżność według dystrybuant, a p oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa). Twierdzenia 4.1. i 4.2. mówią, że tylko warunek $\mu_k = 0$ ma znaczenie dla rozkładu asymptotycznego. Zasadniczą kwestią jest czy liczba i takich, że $\mu_i = 0$ jest duża w porównaniu do liczby nierówności. Z twierdzenia 4.2 wynika własność zmniejszania mocy testu RC po dodaniu złych modeli, przy zachowaniu liczby dobrych modeli (m_0).

Test Bonferroniego jest metodą do wielokrotnych porównań. Opiera się na pomysśle, że testujemy m niezależnych lub zależnych hipotez na zbiorze danych. Wtedy jednym ze sposobów zachowania poziomu błędu jest testowanie każdej indywidualnej hipotezy na poziomie istotności $1/m$. Jeśli chcemy, żeby poziom istotności dla całej rodziny był przynajmniej równy α wtedy test Bonferroniego byłby testem każdego indywidualnego testu na poziomie α/m . Test Bonferroniego na poziomie α odrzuca hipotezę zerową, jeśli $p_{\min} < \frac{\alpha}{m}$, gdzie p_{\min} oznacza najmniejszą p -wartość dla m porównań modeli parami i m oznacza liczbę modeli. Zatem moc testu RC zmniejsza się po dodaniu złych modeli (takich, że $\mu_k \neq 0$) ponieważ zwiększa to m , ale nie wpływa na p_{\min} . Jest to własność niepożądana.

4.4. Oszacowanie dystrybuanty statystyki testowej

Znany jest test, który pozwala rozważyć wszystkie modele jednocześnie i cechuje się zmniejszonym wpływem złych modeli na rozkład statystyki testowej, która spełnia założenia 4.1 i 4.2., to znaczy modeli, dla których $\mu_k < 0$, Hansen (2005).

Rozważmy rozkład $N_m(\hat{\mu}^c, \hat{\Omega})$, gdzie $\hat{\mu}_k^c$ jest estymatorem średniej, μ_k .

$$\hat{\mu}_k^c = X_k \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{n^2} X_k / \hat{\sigma}_k \leq -\sqrt{2 \log \log n} \right]}, k = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

Statystyka ta spełnia warunki twierdzeń 4.1 oraz 4.2.

Niech

$$\hat{\mu}_k^l = \min(\bar{X}_k, 0), \quad \hat{\mu}_k^u = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Można pokazać, że

$$\hat{\mu}^l \leq \hat{\mu}^c \leq \hat{\mu}^u.$$

Twierdzenie 4.3.

Niech F_n^i będzie dystrybuantą statystyk:

$$\varphi\left(n^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_n^i, \mathbf{v}_n\right),$$

dla $i=l, c$ lub u , gdzie $n^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_n^i - \hat{\mu}_i) \xrightarrow{d} N_m(0, \Omega)$. Niech $\hat{\mu}_i$ będzie estymatorem Z_n^i , a F_0 będzie rozkładem statystyki $\varphi(\mathbf{C}, \mathbf{v}_0)$. Załóżmy, że spełnione są założenia 4.1 i 4.2, wtedy $F_n^c \rightarrow F_0$, jeśli $n \rightarrow \infty$, dla wszystkich punktów ciągłości funkcji F_0 i $F_n^l(x) \leq F_n^c(x) \leq F_n^u(x)$ dla wszystkich n należących do $x \in R$.

Twierdzenie 4.3., pokazuje, że estymator F_n^c jest zgodnym oszacowaniem asymptotycznego rozkładu naszej statystyki testowej. Twierdzenie to podaje również górne i dolne ograniczenie dla rozkładu F_n^c , co ma zastosowanie w praktyce. Znając wartość statystyki $T = T_n(X_1, \dots, X_n)$ jest możliwe zdefiniowanie asymptotycznej p -wartości $p_0(t)$ (ponieważ $p_0(t) \equiv 1 - F_0(t)$). Empiryczna p -wartość może być otrzymana z tego wzoru dla F_n^c ..

Poniższy lemat zapewnia, że $\hat{\mu}^c$ implikuje zgodny estymator p -wartości.

Twierdzenie 4.4.

Rozważmy, rozkład statystyki t Studenta $t = T_n^{SPA}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Niech empiryczna p -wartość, $\hat{p}^c(t)$ będzie wyznaczona na bazie przybliżonego rozkładu $\hat{F}_n^c(t)$, gdzie $\hat{F}_n^c(t) - F_n^c(t) = o(1)$ dla wszystkich t , wtedy $\hat{p}_n^c(t) \xrightarrow{p} p_0(t)$ dla każdego $t > 0$.

Dwa inne estymatory $\hat{\mu}^l, \hat{\mu}^u$ nie pozwalają na wyznaczenie zgodnych estymatorów p -wartości. Z twierdzenia 4.1. wynika bezpośrednio, że tak jest dla $\hat{\mu}^u$ jeśli nie jest spełniony warunek $\mu = 0$. P -wartość dla $\hat{\mu}^l$ jest mniejsza asymptotycznie niż dokładna p -wartość, ponieważ wartość krytyczna dla rozkładu $N(0, \Omega)$ jest większa niż wartość krytyczna dla rozkładu $N_m(n^{1/2} \hat{\mu}^l, \Omega)$, a rozkład F_0 zależy od rozkładu $N(0, \Omega)$.

4.5. Bootstrapowy estymator p -wartości SPA

Rozkłady asymptotyczne statystyk testowych testu SPA nie są standardowe oraz nie są jednoznacznie określone przy prawdziwej hipotezie zerowej, niemniej możliwe jest otrzymanie zgodnych oszacowań prawdopodobieństw testowych (p -wartości) za pomocą technik bootstrapowych (Politis i Romano 1994),

Podstawowy algorytm bootstrapowy jest następujący. Zakładamy, że badamy populację o nieznanym rozkładzie oraz

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

jest próbą prostą wylosowaną z danej populacji natomiast wartości

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$

stanowią realizacje zmiennej losowej

$$X = \{X_i : i = 1, \dots, n\}.$$

Niech $R = (x, F)$ oznacza pewną statystykę określoną na przestrzeni prób.

Rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:

$$P(X_B = x_i) = \frac{l}{n}, \quad l = 1, \dots, n,$$

nazywamy rozkładem bootstrapowym z próby i oznaczamy \hat{F} .

Rozkład statystyki R jest nieznan. Po to by aproksymować ten rozkład losujemy niezależnie według rozkładu \hat{F} wartości $x = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, które traktujemy jak realizacje zmiennej $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ noszącej nazwę próby bootstrapowej. Szczególnym rodzajem algorytmu bootstrapowego jest algorytm, który został wykorzystywany w procedurach SPA oraz MCS. Nosi on nazwę stacjonarnego algorytmu bootstrapowego gdyż

szereg wygenerowany za jego pomocą jest stacjonarny. Jeśli nie ma modelu parametrycznego, który upraszcza proces generowania danych do niezależnego losowania z próby o danym rozkładzie prawdopodobieństwa, bootstrap może być zmodyfikowany. Dane dzieli się na bloki i losuje się bloki niezależnie ze zwracaniem. Bloki mogą być nakładające się i nienakładające się. Bootstrap blokowy wykorzystuje kombinacje bloków o równej długości, podczas gdy bootstrap stacjonarny dotyczy bloków o losowej długości. Próbę bootstrapową otrzymujemy poprzez losowanie z próby losowej bloków losowo, ze zwracaniem, umieszczając je w kolejności wylosowania. Niech τ będzie statystyką testową zmiennej losowej x mającej rozkład $F(x, \theta)$, gdzie θ jest parametrem rozkładu. Oznaczmy $\tau = \tau(F)$. Niech $\hat{F}(x, \hat{\theta})$ będzie estymatorem F z próby i niech $\hat{\tau} = \tau(\hat{F})$, gdzie $\hat{\theta}$ jest estymatorem największej wiarygodności θ . Jeśli rozkład $\hat{\tau}$ nie jest znany wykorzystuje się rozkład bootstrapowy mamy $\hat{\tau}^* = \tau(\hat{F}^*)$. Z definicji asymptotycznej p -wartości wynika, że bootstrapowym estymatorem p -wartości jest

$$\hat{p}^*(\tau) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(x_j^* > \hat{\tau}),$$

gdzie B oznacza liczbę prób bootstrapowych.

Schemat wyznaczania p -wartości metodą bootstrapową w procedurze SPA jest następujący. Wybieramy długość bloku i oznaczamy go przez l . Generujemy B prób bootstrapowych z populacji $\{1, \dots, n\}$ dla $b=1, \dots, B$. Wybieramy liczbę $\xi_{b1} \sim U\{1, \dots, n\}$. Na tej podstawie wyznaczamy próbę bootstrapową $(\tau_{b,1}, \dots, \tau_{b,l}) = (\xi_{b1}, \xi_{b1} + 1, \dots, \xi_{b1} + l - 1)$. Wybieramy liczbę $\xi_{b2} \sim U\{1, \dots, n\}$. Na tej podstawie wyznaczamy próbę bootstrapową $(\tau_{b,1}, \dots, \tau_{b,l}) = (\xi_{b2}, \xi_{b2} + 1, \dots, \xi_{b2} + l - 1)$. Kontynuujemy tworzenie prób bootstrapowych dopóki nie wyczerpiemy zbioru B . Dla każdego modelu dla każdej chwili t wyznaczamy funkcję straty $L_{i,t}$ dla modelu $i=1, \dots, m$ i $t=1, \dots, n$. Zmienne te służą do wyznaczenia średniej straty dla każdego modelu postaci:

$$\bar{L}_i \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{i,t}, i=1, \dots, m$$

Odpowiednie zmienne bootstrapowe są następujące: $L_{b,i,t}^* = L_{i,\tau_{b,t}}$ dla $i=1, \dots, m$ i $t=1, \dots, n$. Obliczamy $\bar{L}_{b,i}^* \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{b,i,t}^*$. Wyznaczamy różnice $(X_{b,1}^*, \dots, X_{b,n}^*)$

$b=1, \dots, B$. Obliczamy średnią z elementów wektora $\bar{\mathfrak{X}}_b^* \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathfrak{X}_{b,t}^*$, $b=1, \dots, B$ ($n^{\frac{1}{2}} \bar{\mathfrak{X}}_{\Omega}^*$ jest zbieżne do $n^{\frac{1}{2}} \bar{X}$ Goncalves, Jong (2003)). Centrujemy zmienne bootstrapowe

$$\bar{Z}_{b,k}^{*,i} = \bar{X}_{b,k}^* - g_i(\bar{X}_k) \quad i=1, c, u,$$

gdzie $g_l(x) = \max(0, x)$, $g_c(x) = x \cdot 1_{\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{2}} x / \hat{\omega}_k} \leq -\sqrt{2 \log \log n} \right]}$, $g_u(x) = 0$, co daje (jak łatwo udowodnić) $E[\bar{Z}_{b,k}^{*,i} / X_1, \dots, X_n] = \hat{\mu}_k^i \leq 0$, dla $i=1, c, u$. Wyznaczamy wartości estymatorów

$$\hat{\omega}_k^2 = \hat{Var} \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_k \right), \quad k=1, \dots, m \text{ następująco:}$$

$$\bar{\omega}_{k,B}^{*2} \equiv B^{-1} \sum_{b=1}^B \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_{k,b}^* - n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_k \right)^2,$$

gdzie $\bar{X}_{k,b}^* = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{k,\tau_{b,t}}$. Obliczamy bootstrapowy estymator T_n^{SPA}

$$T_{b,n}^{SPA*} = \max \left[0, \max_{k=1, \dots, m} \left[n^{\frac{1}{2}} \bar{Z}_{b,k}^* / \hat{\omega}_k \right] \right], \quad b=1, \dots, B$$

Wyznaczamy estymatory p -wartości

$$\hat{p}_{SPA} \equiv \sum_{b=1}^B \frac{1_{\{T_{b,n}^{SPA*} > T_n^{SPA}\}}}{B},$$

gdzie T_n^{SPA} jest estymatorem statystyki testowej z próby. Dla różnych estymatorów: $\hat{\mu}^l$, $\hat{\mu}^c$ oraz $\hat{\mu}^u$ otrzymamy różne wartości estymatora \hat{p}_{SPA} . W podobny sposób możemy wyznaczyć estymator p -wartości dla testu RC podstawiając $\hat{\omega}_k^2 = 1$. Przydatną własnością testu SPA jest jego prawdziwość nawet dla niezgodnych estymatorów $\hat{\omega}_k$

Twierdzenie 4.5.

Przy założeniu 4.1. niech $Z_{b,t}^*$ będą scentrowane wokół μ , dla μ równego $\hat{\mu}^l$, $\hat{\mu}^c$ lub $\hat{\mu}^u$

$$\text{wtedy } \sup_{z \in R^m} \left| P^* \left(n^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{C}_{\Omega}^* - \mu) \leq z \right) - P \left(n^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathfrak{X}} - \mu) \leq z \right) \right| \xrightarrow{p} 0,$$

gdzie $\bar{Z}_{k,b} = n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{k,b,t}^*$, $k=1, \dots, m$.

Twierdzenie to mówi, że można aproksymować rozkład statystyki testowej przy założeniu hipotezy zerowej empirycznym rozkładem, który otrzymujemy z prób bootstrapowych.

4.6 Najlepsze modele prognostyczne zmienności indeksu WIG20, typu GARCH, uzyskane metodą SPA

Przedstawione zostaną otrzymane wyniki empiryczne. Zaprezentowane zostaną szeregi notowań giełdowych, dla których podjęto próbę wytypowania najlepszych modeli prognostycznych. Dogłębna analiza otrzymanych wyników empirycznych będzie wykorzystana do weryfikacji przedstawionych wcześniej hipotez badawczych.

Przedstawimy badanie opisane w pracy Buszkowskiej (2008). Chodzi o wykorzystanie testu SPA do porównania zdolności prognostycznej modeli typu GARCH(1,1) w przypadku prognoz wariancji warunkowej (zmienności) szeregu notowań indeksu WIG20.

Indeks Cenowy WIG20 zadebiutował w trzecią rocznicę działania giełdy warszawskiej. Oblicza się go na podstawie wartości portfela akcji 20 spółek rynku podstawowego. Zmiana listy spółek tworzących WIG20 jest przeprowadzana raz na kwartał. Przy jej ustaleniu bierze się pod uwagę wielkość obrotu poszczególnych spółek i ich wartość rynkową. Indeks jest publikowany od rozpoczęcia sesji do jej zakończenia w 15 sekundowych odstępach czasu, Indeks jest indeksem cenowym, a więc przy jego obliczaniu nie uwzględnia się dochodów z tytułu dywidend i praw poboru. Zmiany składu indeksu przeprowadzane są cztery razy do roku. Lista uczestników indeksu jest tworzona na podstawie specjalnego zestawienia obejmującego spółki o wartości akcji w wolnym obrocie powyżej 10% i 1 mln euro, które nie znajdują się w szczególnej sytuacji zgodnie z regulaminem giełdy. Tak wyselekcjonowane spółki są porządkowane według wartości obrotów za ostatnie 12 miesięcy (waga 0,6) oraz wartości w wolnym obrocie (waga 0,4). Do indeksu trafiają spółki, które w tym zestawieniu zajęły co najmniej 25 pozycję w przypadku rewizji i co najmniej 30 pozycję w przypadku korekty. Udziały spółek w indeksie są aktualizowane podczas każdej rewizji oraz korekty na podstawie aktualnego stanu liczby akcji w wolnym obrocie. Dodatkowo udział pojedynczej spółki w indeksie jest ograniczony do 15%.

Średnią szeregu notowań indeksu WIG20 modelowaliśmy za pomocą najlepiej dopasowanego modelu - stałej. Prognozy zmienności porównaliśmy z dzienną zmiennością zrealizowaną, obliczaną jako suma kwadratów zwrotów śróddziennych. Badaliśmy, czy wyniki otrzymane za pomocą testu SPA zmieniają się dla różnych miar zmienności

zrealizowanej. Następnie porównaliśmy wskazania testu SPA dla zmienności zrealizowanej, wyliczonej na podstawie danych śróddziennych o różnej częstotliwości. Odnieśliśmy się do pracy Pattona i Shepparda (2007), w której podano, że dobrym oszacowaniem zmienności zrealizowanej jest zmienność wyznaczona na podstawie zwrotów śróddziennych, 30 minutowych, podczas gdy użycie danych 5 minutowych nie eliminuje efektu mikrostruktury rynku. Następnie porównaliśmy wskazania testu SPA dla różnych typów funkcji błędu. Odnieśliśmy się również do tezy pracy Souzy i in., że do oceny prognoz zmienności ważny jest wybór funkcji błędu. Jako wzorcowe, przyjęliśmy modele najprostsze: podstawowy GARCH(1,1) i RiskMetrics z różnymi typami rozkładów błędu.

4.6.1. Dane

W przeprowadzonym badaniu do estymacji modeli użyliśmy 1739 dziennych obserwacji indeksu WIG20 od **12.10.2000** do **14.09.2007**. Na ostatnie 265 dni, tj. od **23.08.2006** do **14.09.2007** obliczyliśmy jednodniowe prognozy. W celu oceny jakości prognoz porównaliśmy je z dzienną zmiennością zrealizowaną, obliczoną dla 10-minutowych, 5-minutowych i 30-minutowych zwrotów śróddziennych. Zmienności zrealizowane zostały obliczane są ze wzorów 1.28, 1.29 i 1.30. Podstawowe statystyki opisowe dla szeregu zwrotów dziennych są przedstawione w tabeli 1.

Tabela 4.1.

Podstawowe statystyki opisowe dla szeregu zwrotów dziennych od 12.10.2000 do 14.09.2007

maksimum	minimum	średnia	wariancja	skośność	kurtoza
5,4829	-5,7305	0,0447	2,2437	0,0792	4,0311

Sprawdziliśmy stacjonarność badanego szeregu zwrotów za pomocą testu KPSS

Wyniki testu stacjonarności KPSS dla szereg zwrotów WIG20 są następujące. Wartość statystyki testowej KPSS wynosi 0.280057, a oszacowanie p -wartości to (< 1)

Hipoteza zerowa o stacjonarności nie została odrzucona. Wzięliśmy pod uwagę następujące typy modeli GARCH(1,1) z różnymi rozkładami błędu: RiskMetrics, GARCH, GJR, EGARCH, APARCH, IGARCH, FIGARCH, FIAPARCH i HYGARCH z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta, rozkładem skośnym t Studenta.

Porównywaliśmy 37 modeli typu GARCH. Za pomocą każdego z modeli wyznaczyliśmy 265 jednodniowych prognoz wariancji warunkowej (zmienności) indeksu WIG20. W celu oszacowania p -wartości statystyki testowej testu SPA wyznaczono po

1000 prób bootstrapowych. W stosowanym programie komputerowym, Hansena i in. (2003) wykorzystuje się dwie funkcje straty MSE i MAD . W badaniu dodatkowo stosowano również pierwiastki z wariancji warunkowej i pierwiastki ze zmienności zrealizowanej. Wybór funkcji straty MSE_1 wynika między innymi z wniosków zamieszczonych w pracy Souzy i in. (2002). Jeden z modeli jest modelem wzorcowym. Niska p -wartość (0.05-0.1) informuje, że model wzorcowy jest gorszy od jednego z modeli alternatywnych. Wysoka p -wartość oznacza, że model wzorcowy generuje prognozy nie gorsze niż modele alternatywne. Wykorzystywany program komputerowy, Hansena i in. (2003) podaje wartości trzech estymatorów p -wartości testu SPA: SPA_u , SPA_c i SPA_d . Aproksymuje się rozkład statystyki testowej T_n^{SPA} przy założeniu hipotezy zerowej. Zmienne bootstrapowe są centrowane na trzy różne sposoby po to by wykorzystać odpowiednie rozkłady graniczne. Dla każdego z nich otrzymaliśmy jeden z estymatorów p -wartości: SPA_u , SPA_c i SPA_d , przy czym SPA_c jest estymatorem zgodnym. Szczegółowy opis postaci tych estymatorów można znaleźć w pracy Hansena, (2005).

4.6.2. Omówienie wyników empirycznych

Model najbardziej znaczący, podawany przez program SPA jest to taki model, dla którego wartość statystyki testowej jest najwyższa. Modelami wskazywanymi jako najbardziej znaczące były HYGARCH z rozkładem GED i FIGARCH-BBM ze skośnym rozkładem t Studenta.

Modelem najlepszym, podawanym przez program SPA, jest model, dla którego oczekiwana funkcja straty ma wartość najmniejszą. Można mówić o modelu najlepszym dla danego typu zmienności zrealizowanej i dla danej funkcji błędu. Pięć różnych modeli zostało wskazanych jako najlepsze dla różnych rodzajów zmienności zrealizowanej. Są to modele: RiskMetrics(1,1) z rozkładem błędu GED, RiskMetrics(1,1) ze skośnym rozkładem t Studenta, RiskMetrics z rozkładem Studenta, RiskMetrics z rozkładem Gaussa GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa, GJR z rozkładem błędu t Studenta i GJR ze skośnym rozkładem t Studenta. W przeanalizowanych rankingach najgorszymi były dwa modele FIGARCH(1,1) postaci Chunga ze skośnym rozkładem błędu t Studenta i EGARCH(1,1) ze skośnym rozkładem t Studenta.

Wszystkie modele z najmniejszymi funkcjami straty zostały obrane jako wzorcowe i przeprowadzono dla nich test SPA. Test SPA potwierdził przewagę trzech spośród

tych modeli nad pozostałymi modelami w rozpatrywanym zbiorze (p -wartości testu SPA były znacznie wyższe od 0.05) Modele wyestymowano w programie G@RCH Laureata.

Są to **GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa**

$$\mu = 0,0759(0,0350), \omega = 0,015317(0,0066), \\ \alpha_1 = 0,0403(0,0067), \beta_1 = 0,953(0,0078),$$

RiskMetrics z rozkładem skośnym t -Studenta

$$\mu = 0,0883(0,0307), \lambda = 0,94 \\ \nu = 9,4524 (2,0108), \xi = 0,04322(0,0357).$$

RiskMetrics z rozkładem GED,

$$\mu = 0,0762(0,0297), \lambda = 0,94, \nu = 1.4367 (0.0728).$$

RiskMetrics z rozkładem t Studenta

$$\mu = 0,079(0,0307), \lambda = 0,94, \nu = 9,4884 (2,0336).$$

RiskMetrics z rozkładem Gaussa

$$\mu = 0,0822(0,029), \lambda = 0,94.$$

W przedstawionym badaniu MSE_1 i MAD_1 oznaczają błąd średniokwadratowy i średni błąd bezwzględny, gdzie N to liczba prognoz

$$MSE_1 \equiv N^{-1} \sum_{t=1}^N \left(\sigma_{k,t} - \hat{\sigma}_{l,t} \right)^2, \quad MSE \equiv N^{-1} \sum_{t=1}^N \left(\sigma_{k,t}^2 - \hat{\sigma}_{l,t}^2 \right)^2, \\ MAD_1 \equiv N^{-1} \sum_{t=1}^N \left| \sigma_{k,t} - \hat{\sigma}_{l,t} \right|, \quad MAD \equiv N^{-1} \sum_{t=1}^N \left| \sigma_{k,t}^2 - \hat{\sigma}_{l,t}^2 \right|,$$

gdzie $k \in \{1, 2, 3\}$, a $l \in \{1, \dots, m\}$, jest liczbą modeli z rozważanego zbioru.

$\hat{\sigma}_{l,t}$ – prognoza zmienności modelu l na moment t ,

$\sigma_{k,t}$ - wartość zmienności zrealizowanej w chwili t , typu k

Tabela 4.2.

Oszacowania p -wartości SPA dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{l,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem skośnym t Studenta	GARCH z rozkładem Gaussa

Błąd	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
<i>MSE</i>	0,166	0,21	0,352	0,905	1	1
<i>MAD</i>	0,148	0,249	0,498	0,077	0,206	0,323
<i>MSE</i> ₁	0,188	0,276	0,50	0,2	0,515	0,685
<i>MAD</i> ₁	0,323	0,323	0,79	0,01	0,06	0,12

Tabela 4.3.

Oszacowania *p*-wartości SPA dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{2,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem Skośnym <i>t</i> -Studenta			GARCH z rozkładem Gaussa		
	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
Błąd						
<i>MSE</i>	0,55	0,81	0,84	0,571	0,741	0,932
<i>MAD</i>	0,687	0,955	0,982	0,449	0,649	0,951
<i>MSE</i> ₁	0,57	0,882	0,994	0,663	0,916	0,998
<i>MAD</i> ₁	0,777	0,988	0,995	0,27	0,5	0,777

Tabela 4.4.

Oszacowania *p*-wartości SPA dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{3,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem Skośnym <i>t</i> -Studenta			GARCH z rozkładem Gaussa		
	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
Błąd						
<i>MSE</i>	0,173	0,217	0,363	0,9	1	1
<i>MAD</i>	0,148	0,249	0,5	0,079	0,216	0,332
<i>MSE</i> ₁	0,589	0,892	0,946	0,198	0,51	0,68
<i>MAD</i> ₁	0,777	0,988	0,998	0	0	0,014

Tabela 4.5.

Oszacowania *p*-wartości SPA dla modelu wzorcowego RiskMetrics z rozkładami Gaussa i *t*-Studenta dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{1,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem <i>t</i> Studenta			RiskMetrics z rozkładem Gaussa		
	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
Błąd						
<i>MSE</i>	0,233	0,404	0,564	0,205	0,345	0,502
<i>MAD</i>	0,310	0,598	0,796	0,23	0,513	0,735
<i>MSE</i> ₁	0,407	0,670	0,867	0,305	0,578	0,801
<i>MAD</i> ₁	0,846	0,944	0,991	0,645	0,826	0,965

Tabela 4.6.

Oszacowania p -wartości SPA dla modelu wzorcowego RiskMetrics z rozkładami Gaussa i t Studenta dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{2,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem t Studenta			RiskMetrics z rozkładem Gaussa		
	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
MSE	0,081	0,108	0,109	0,084	0,113	0,114
MAD	0,381	0,671	0,735	0,421	0,072	0,78
MSE_1	0,046	0,068	0,078	0,05	0,075	0,085
MAD_1	0,211	0,523	0,592	0,228	0,554	0,618

Tabela 4.7.

Oszacowania p -wartości SPA dla modelu wzorcowego RiskMetrics z rozkładami Gaussa i t Studenta dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{3,t}^2$ i dla częstotliwości 5, 10 i 30 minut

Model wzorcowy	RiskMetrics z rozkładem T Studenta			RiskMetrics z rozkładem Gaussa		
	SPA_t	SPA_c	SPA_u	SPA_t	SPA_c	SPA_u
MSE	0,239	0,413	0,58	0,215	0,364	0,521
MAD	0,31	0,598	0,8	0,231	0,513	0,733
MSE_1	0,416	0,676	0,87	0,319	0,594	0,812
MAD_1	0,846	0,944	0,991	0,645	0,826	0,964

Modelami najbardziej znaczącymi w zbiorze modeli typu GARCH okazały się HYGARCH(1,1) z rozkładem GED i FIGARCH(1,1) z rozkładem skośnym t Studenta. Zauważamy, że ten sam model najbardziej znaczący pojawia się w rankingach dla danych o różnej częstotliwości, różnych rodzajów modeli wzorcowych i różnie wyznaczonej zmienności zrealizowanej. Najgorszymi okazały się FIGARCH(1,1) wyznaczony metodą Chunga z rozkładem skośnym t Studenta oraz EGARCH z rozkładem skośnym t Studenta. Wybór modelu najbardziej znaczącego zależy od rodzaju błędu spośród MSE , MSE_1 , MAD , MAD_1 . Modelami najlepszymi, wyznaczonymi w różnych rankingach dla naszych danych były modele RiskMetrics(1,1) z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta oraz z rozkładem skośnym t Studenta i GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa, Modele najbardziej znaczące nie należą do zbioru modeli najlepszych. Modele podawane jako najlepsze zostały obrane jako wzorcowe i przeprowadzono dla nich test SPA za pomocą programu SPA, Hansen (2003). Wyniki testu potwierdziły brak przewagi pozostałych modeli nad tymi modelami pod względem zdolności prognostycznej. Wynik ten odczytano na podstawie p -wartości programu SPA. Oszacowane p -wartości były znacznie wyższe od założonego poziomu istotności 0,05. Zauważono, że w celu wyznaczenia

wszystkich modeli najlepszych należy powtarzać test SPA dla różnych modeli wzorcowych, nie wyłącznie tych podawanych jako najlepsze dla ustalonego modelu benchmarkowego. Metoda SPA wymaga zatem wielokrotnego powtarzania testu dla wszystkich modeli obieranych kolejno jako benchmarkowe. Jej algorytm jest dłuższy niż algorytm konkurencyjnej metody zbioru ufności modeli, MCS, która nie wymaga powtórzeń testu dla różnych modeli wzorcowych. Jest zatem gorszy. Zauważyliśmy, że p -wartości powtarzają się dla różnych częstotliwości, dla tych samych pozostałych parametrów. Wystarczy, zatem analiza p -wartości dla jednej obranej częstotliwości. W tabeli jest to częstotliwość 10- minutowa. Wskazany model RiskMetrics jest to model najczęściej używany w praktyce, Jrión (1995). Wynik badania może być przydatny do podejmowania decyzji inwestycyjnych na podstawie metod statystycznych, Nagayasu (2006). W literaturze potwierdzona jest przewaga strategii portfelowej opartej na prognozach zmienności. W pracy wytypowano pewne modele najlepiej prognozujące zmienność indeksu WIG20, co przy założeniu istnienia podobnej dynamiki rynku pozwala na odrzucenie pozostałych modeli typu GARCH bez konieczności ponownego przeprowadzenia pracochłonnej procedury eliminacji.

4.7. Podsumowanie

W rozdziale zaprezentowaliśmy testy statystyczne SPA oraz RC. Określiliśmy statystyki testowe tych testów. Przedstawiliśmy hipotezę zerową testu SPA oraz różne rodzaje wykorzystywanych w tej metodzie funkcji straty. Porównaliśmy moc testów SPA i RC oraz podaliśmy twierdzenie, które definiuje asymptotyczny rozkład statystyk testowych. Przedstawiliśmy zgodne oszacowanie dystrybuanty statystyki testowej oraz sposób obliczania empirycznej wartości. Zaprezentowaliśmy schemat wyznaczania p -wartości metodą bootstrapową w procedurze SPA. Na końcu zaprezentowaliśmy badanie empiryczne z wykorzystaniem testu SPA.

5. Metoda zbioru ufności modeli, MCS

Metoda zbioru ufności modeli, MCS została opisana w artykule Hansena, (2003). Procedura MCS tworzy zbiór modeli najlepszych. Zbiór modeli MCS wyestymowanych dla skorelowanych danych będzie stanowił pojedynczy model. Dane nieskorelowane nie będą pozwalały na dobre rozróżnienie pomiędzy modelami. Wyższością MCS nad metodą SPA jest to, że więcej niż jeden model może być wskazany jako najlepszy, co więcej w metodzie MCS nie trzeba powtarzać algorytmu dla różnych modeli wzorcowych.

Rozważmy zbiór obiektów M_0 zawierający skończony zbiór modeli prognozy stycznych. Zdefiniujmy względną stratę:

$$X_{ij,t} = L(\sigma_{l,t}^2, \hat{\sigma}_{i,t}^2) - L(\sigma_{l,t}^2, \hat{\sigma}_{j,t}^2), \quad (5.1)$$

gdzie $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $t = 1, \dots, n$, i oraz j to modele w zbiorze M_0 , t to długość próby

Zbiór najlepszych modeli został zdefiniowany następująco:

$$M^* = \{i \in M_0 : E(X_{ij,t}) \leq 0, \text{ dla wszystkich } j \in M_0\}. \quad (5.2)$$

Natomiast zbiór gorszych modeli:

$$M^+ = \{i \in M_0 : E(X_{ij,t}) > 0, \text{ dla pewnych } j \in M_0\}. \quad (5.3)$$

Oznaczmy przez M_α^* zbiór, który zawiera tylko najlepsze modele na poziomie ufności równym $1 - \alpha$. Hipoteza zerowa testu MCS jest następująca:

$$H_{0,M} : E(X_{ij,t}) = 0, j, i \in M_0. \quad (5.4)$$

Oznacza ona, że modele w zbiorze MCS mają jednakowe, co do wartości oczekiwanej funkcje straty.

Niech M będzie zbiorem modeli, które są redukowane w procesie eliminacji. Przedstawimy szczegółowy algorytm MCS:

Krok 1: $M = M_0$

Krok 2: Jeśli $H_{0,M}$ jest zaakceptowana definiujemy $\hat{M}_{1-\alpha}^* = M$,

W przeciwnym wypadku definiujemy względną stratę na modelu i w stosunku do średniej straty z pozostałych modeli ze zbioru M

$$\bar{X}_i \equiv \frac{1}{m} \sum_{j \in M} X_{ij}.$$

Najgorszym modelem jest model z indeksem

$$i^+ = \arg \max_{i \in M} \frac{\bar{X}_i}{\sqrt{\hat{Var}(\bar{X}_i)}}.$$

Następnie eliminujemy i^+ ze zbioru M i powtarzamy procedurę zaczynając od kroku 2.

Przyjmujemy oznaczenie $\delta_M = 0$ oraz $\delta_M = 1$ odpowiednio do przypadków, kiedy $H_{0,M}$ są przyjmowane i odrzucane. Przy hipotezach alternatywnych $H_{0,M}$ i $H_{A,M}$ sformułujemy następujące założenia:

Założenie 5.1.

Dla każdego $M \subset M_0$

a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\delta_M = 1/H_{0,M}) \leq \alpha.$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} P(\delta_M = 1 / H_{A,M}) = 1.$$

Dla każdego modelu lepszego

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} P(i \in M^* / H_{A,M}) = 1.$$

Założenie a zapewnia, że rozmiar testu jest równy α asymptotycznie.

Założenie b gwarantuje, że asymptotyczna moc wynosi 1.

Założenie c zapewnia, że lepszy model nie jest eliminowany tak długo jak w M znajdują się gorsze modele.

Oznaczmy przez $M^+ \equiv \{i \in M_0 : E(d_{ij,t}) > 0\}$ zbiór będący dopełnieniem zbioru M^* , a przez $M_{1-\alpha}^*$ zbiór modeli, które pozostały po eliminacji.

Twierdzenie 5.1.

Przy założeniu 3 prawdziwe są następujące nierówności

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^* \subset \hat{M}_{1-\alpha}^*) \geq 1 - \alpha.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(i^+ \in \hat{M}_{1-\alpha}^*) = 0$ dla $i^+ \in M^+.$

Twierdzenie to zapewnia, że zbiór lepszych modeli jest zawarty w MCS, kiedy liczba prognoz jest duża i że wszystkie gorsze modele są odrzucane ze zbioru MCS w procesie eliminacji MCS.

Twierdzenie 5.2.

Przy założeniu 3 i dla zbioru M^ będącego pojedynczym modelem, $M^* = \{i^*\}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^* = M_{1-\alpha}^*) = 1.$$

Załóżmy, że założenie 5.1. jest spełnione i zbiór zawiera jeden model najlepszy. Twierdzenie 5.2. zapewnia, że w procesie eliminacji MCS ten model jest otrzymywany.

5.1. Statystyki testowe w metodzie MCS i reguła eliminacji

Badano specyficzne testy równoważności i regułę eliminacji, dla której spełnione jest założenie 3

Zdefiniujmy zmienne:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{ij} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{ij,t} \\ \bar{X}_{i\cdot} &= \frac{1}{m-1} \sum_{j \in M} \bar{X}_{ij}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Pierwsza zmienna \bar{X}_{ij} mierzy względną zależność między modelami i oraz j . Druga zmienna $\bar{X}_{i\cdot}$ może być interpretowana jako ocena i -tego modelu w stosunku do średniej z pozostałych modeli. Miarą, która pozwala uszeregować modele jest następująca funkcja:

$$V_{i,M} = \frac{\bar{X}_{i\cdot}}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(\sqrt{T} \bar{X}_{i\cdot})}}.\tag{5.6}$$

$\hat{\text{Var}}(X)$ oznacza wariancję z próby.

W metodzie MCS można wykorzystać następujące statystyki testowe:

$$\begin{aligned}TR &= \max_{i,j \in M} \frac{|\bar{X}_{ij}|}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(\bar{X}_{ij})}}, \\ T_{SQ} &= \sum_{i < j} \frac{(\bar{X}_{ij})}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(\bar{X}_{ij})}}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Do wyznaczenia przybliżonych rozkładów tych statystyk stosuje się techniki bootstrapowe.

Założenie 5.2.

- i. Niech $\{X_{ij,t}\}_{i,j \in M_0}$ będzie α -mieszający rzędu $\frac{-r}{r-2}$,
- ii. Dla pewnych $r > 2$, $\gamma > 0$, $E|X_{ij,t}|^{r+\gamma} < \infty$ dla wszystkich $i, j \in M_0$,
i $\{X_{ij,t}\}_{i,j \in M_0}$ jest ściśle stacjonarny.

Założenie to pozwala zastosować metodę bootstrapową, (Hansen 2005).

Szereg $\{L_{i,t}\}$ nie musi być stacjonarny pod warunkiem, że wszystkie modele w zbiorze M_0 mają podobne własności, które zapewniają stacjonarność $X_{ij,t}$. Niech $M \subseteq M_0$, $M = \{i_1, \dots, i_m\}$. Definiujemy wektor strat $L_t \equiv (L_{i_1,t}, \dots, L_{i_m,t})$, $t = 1, \dots, n$ i średnią z próby $\bar{L} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n L_t$,

Niech $l \equiv (1, \dots, 1)'$ będzie to wektor kolumnowy złożony z samych jedynek. Ortogonalnym dopełnieniem l jest macierz l_{\perp} wymiaru $m \times (m-1)$, dla której spełniony jest warunek $l'_{\perp} l = 0$.

Twierdzenie 5.3.

Przy założeniu 4, niech $X_t \equiv l'_{\perp} L_t$. Określmy $\mu \equiv E(X_t)$, wtedy

$$n^{\frac{1}{2}} (\bar{X} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

gdzie $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$ i $\Sigma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{X} \right)$.

Twierdzenie to zapewnia, że hipoteza $H_{0,M}$ może być weryfikowana za pomocą znanych statystyk testowych, które zawierają wektor \bar{X} , takich jak:

$$\begin{aligned} T_Q &\equiv n \bar{X}' \hat{\Sigma}^{\#} \bar{X}, \\ T_F &\equiv \frac{n-q}{q(n-1)} T_Q, \end{aligned} \tag{5.8}$$

gdzie $\hat{\Sigma}$ jest zgodnym estymatorem Σ , $q \equiv \text{rzęd}(\hat{\Sigma})$. $\hat{\Sigma}^{\#}$ - jest uogólnioną macierzą odwrotną.

Ponieważ $\hat{\Sigma} \xrightarrow{p} \Sigma$, mamy (z założenia), z definicji rozkładu $\chi^2(q)$ i z definicji rozkładu F -Snedecory: $T_Q \xrightarrow{d} \chi^2(q)$, $T_F \xrightarrow{d} F(q, n-q)$, gdzie $F(q, n-q)$ jest rozkładem F -Snedecory z $(q, n-q)$ stopniami swobody. Przy prawdziwości hipotezy $H_{A,M}$, na mocy twierdzenia 4.1. T_Q , T_F zbiegają do nieskończoności z prawdopodobieństwem 1.

Problem empiryczny powstaje, kiedy liczba elementów m jest duża w porównaniu do liczebności próby n . W tym przypadku wykorzystujemy testy, które nie wymagają estymacji macierzy kowariancji rzędu $(m-1) \times (m-1)$. Takie testy mogą być konstruowane w oparciu o następujące statystyki:

$$t_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(X_{ij})}}, t_{i\cdot} = \frac{X_{i\cdot}}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(X_{i\cdot})}} \text{ dla } i, j \in M,$$

gdzie:

$$\bar{X}_{ij} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n X_{ij,t},$$

$$\bar{X}_{i\cdot} \equiv m^{-1} \sum_{j \in M} X_{ij},$$

$\hat{V}ar(\bar{X}_{ij})$, $\hat{V}ar(\bar{X}_{i\cdot})$ oznaczają estymatory $Var(\bar{X}_{ij})$, $Var(\bar{X}_{i\cdot})$, natomiast

$$\bar{X}_{i\cdot} = (\bar{L}_i - \bar{L}), \quad (5.9)$$

Gdzie:

$$\bar{L}_i \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n L_{i,t},$$

$$\bar{L} \equiv m^{-1} \sum_{i \in M} \bar{L}_i.$$

Hipoteza zerowa $H_{0,M}$ jest równoważna $E(\bar{X}_{i\cdot})=0$, dla wszystkich $i \in M$ oraz jest równoważna $E(\bar{X}_{ij})=0$ dla wszystkich $i, j \in M$ (z definicji).

Następujące statystyki mogą być użyte do testowania hipotezy $H_{0,M}$. (Statystyka T_D wymaga m porównań, podczas gdy pozostałe $m \cdot (m-1)$.)

$$T_D \equiv \sum_{i \in M} t_i^2,$$

$$T_R \equiv \max_{i,j \in M} |t_{ij}|,$$

$$T_{SQ} = \sum_{i,j \in M} t_{ij}^2.$$

Rozkłady tych statystyk są niestandardowe. Można je wyznaczyć przy użyciu metod bootstrapowych.

Zdefiniujmy wektor

$$\bar{Z} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m)'$$

Twierdzenie 5.4.

Załóżmy, że spełnione jest założenie 4 i wtedy:

$$n^{\frac{1}{2}}(\bar{Z} - \psi) \xrightarrow{d} N_m(0, \Omega) \quad n \rightarrow \infty,$$

gdzie $\psi \equiv E(\bar{Z})$, $\Omega \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} Var\left(n^{\frac{1}{2}}\bar{Z}\right)$. Hipotezie zerowej $H_{0,M}$ towarzyszy warunek $\psi = 0$.

Niech $D \equiv \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_m^2)$ i $\hat{D} = \text{diag}(\hat{\omega}_1^2, \dots, \hat{\omega}_m^2)$ oznaczają macierze diagonalne o elementach $(\omega_1^2, \dots, \omega_m^2)$ na głównej przekątnej, będące estymatorami wariancji.

Twierdzenie 5.5.

Przy założeniu 4 oraz przy założeniu następującym:

$\hat{\omega}_i^2 \equiv \hat{\text{Var}}\left(\frac{1}{n^2} X_{i.}\right) = n \hat{\text{Var}}(X_{i.}) \xrightarrow{p} \omega_i^2$. Gdzie $\omega_i^2, i = 1, \dots, m$ oznaczają diagonalne elementy Ω . Przy prawdziwej hipotezie $H_{0,M}$ mamy?

$$T_D \xrightarrow{d} F_\zeta.$$

Natomiast dla prawdziwej hipotezy $H_{A,M}$

$$T_D \rightarrow \infty.$$

Twierdzenie to pokazuje, że rozkład statystyki T_D zależy od macierzy korelacji ζ .

Rozkład ten wyznacza się w praktyce z użyciem metod bootstrapowych.

Ponadto potrzebna jest reguła eliminacji. Naturalną regułą eliminacji jest $e_M = \arg \max_i t_i$. Pozwala na usunięcie modelu, dla którego różnica X_{ij} jest największa.

Można pokazać, że MCS, który opiera się na statystyce T_D i regule eliminacji $e_M = \arg \max_i t_i$ spełnia założenie 3.

5.2. P-wartości MCS

$\hat{M}_{1-\alpha}^*$ - oznacza, że zbiór ten jest zbiorem modeli najlepszych na poziomie istotności $1 - \alpha$. MCS p -wartości pozwalają stwierdzić, czy model należy do $\hat{M}_{1-\alpha}^*$. Jeśli oznaczymy p -wartość modelu i przez \hat{p}_i to możemy przyjąć hipotezę zerową, jeśli $\alpha \leq \hat{p}_i$. Niech $p(k)$ będzie p -wartością testu k . P -wartość jest równa $1 - F_k(t_k)$, gdzie F_k jest wyestymowanym rozkładem statystyki testowej t_k

Niech m_0 oznacza liczbę modeli w zbiorze M_0 i założmy, że $M_0 = \{k, k + 1, \dots, m_0\}$ są ponumerowane tak, że $k = e_{M(k)}$, $M_{(k)} = \{k, k + 1, \dots, m_0\}$ $k = 1, \dots, m_0$. $e_{M(1)} = 1$ jest pierwszym modelem, który jest eliminowany, jeśli $H_{0,M(1)}$ jest odrzucona, $e_{M(2)} = 2$ jest następnym. Zdefiniujmy p -wartość w

metodzie MCS. Niech $p(k)$ będzie p -wartością przy założeniu hipotezy $H_{0,M(k)}$. Przyjmijmy, że $p(m_0) \equiv 1$, gdyż model ostatni na pewno należy do zbioru modeli najlepszych. p -wartość dla modelu z numerem i definiuje się następująco:

$$\hat{p}_i \equiv \max_{k \leq i} p(k),$$

p -wartość to zatem maksymalna p -wartość uzyskana dla modelu w procesie eliminacji, ponieważ p -wartość jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu I rodzaju.

Schemat metody bootstrapowej w procedurze MCS (Hansen i in. 2005) jest następujący. Wybieramy długość bloku i oznacz go przez l . Generujemy B prób bootstrapowych z populacji $\{1, \dots, n-l\}$ dla $b=1, \dots, B$. Wybieramy $\xi_{b1} \sim U\{1, \dots, n\}$. Na tej podstawie wyznaczamy próbę bootstrapową $(\tau_{b,1}, \dots, \tau_{b,l}) = (\xi_{b1}, \xi_{b1} + 1, \dots, \xi_{b1} + l - 1)$.

Wybieramy $\xi_{b2} \sim U\{1, \dots, n\}$. Na tej podstawie wyznaczamy próbę bootstrapową $(\tau_{b,1}, \dots, \tau_{b,l}) = (\xi_{b2}, \xi_{b2} + 1, \dots, \xi_{b2} + l - 1)$. Kontynuujemy tworzenie prób bootstrapowych dopóki nie wyczerpiemy zbioru B . Dla każdego modelu dla każdej chwili t wyznaczamy funkcję trasy $L_{i,t}$ dla $i=1, \dots, m$ i $t=1, \dots, n$, a następnie średnią względną stratę dla każdego modelu postaci:

$$\bar{L}_i \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{i,t}, \quad i=1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Odpowiednie zmienne bootstrapowe są następujące:

$$L_{n,i,t}^* = L_{i,\tau_{b,t}}$$

Obliczamy $\bar{L}_{b,i}^* \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{b,i,t}^*$. Zapamiętujemy różnicę między średnimi:

$$\bar{\zeta}_{b,i}^* \equiv \bar{L}_{b,i}^* - \bar{L}_i. \quad (5.11)$$

Następnie obliczamy $\bar{L} \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{L}_i$, $\bar{\zeta}_b^* \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{\zeta}_{b,i}^*$, $\hat{\text{Var}}(X_i) \equiv \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\bar{\zeta}_{b,i}^* - \bar{\zeta}_b^*)^2$,

(m oznacza liczbę elementów w zbiorze M).

Definiujemy $t_i \equiv \frac{\bar{X}_i}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(\bar{X}_i)}}$ i obliczamy wartość statystyki testowej

$$T_D = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i^2.$$

Bootstrapowy estymator T_D wyznaczamy następująco, (wzór 6.9)

$$T_{D,b}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_{b,i}^{*2} \text{ dla } b = 1, \dots, B, \text{ gdzie}$$

$$t_{b,i}^* \equiv (\bar{\zeta}_{b,i}^* - \bar{\zeta}_{b,\cdot}^*) / \sqrt{\hat{V}ar(\bar{X}_i \cdot)}.$$

Korzystając z definicji asymptotycznej p -wartości bootstrapową p -wartość dla $H_{M,0}$ obliczamy następująco.

$$\hat{p}(m) \equiv \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B 1_{\{T_{D,b}^* > T_{D,b}^*\}}.$$

Jeśli $\hat{p}(m) < \alpha$, gdzie α jest poziomem istotności testu to $H_{0,M}$ jest odrzucana i $e_M \equiv \arg \max_i t_i$ jest eliminowany z M . Powtarzamy poprzednie kroki dla mniejszej liczby modeli. Zbiór modeli, które pozostały po eliminacji jest oznaczany $\hat{M}_{1-\alpha}^*$ i jest to szukany zbiór MCS

5.3 Poszukiwanie najlepszych modeli prognostycznych zmienności dla indeksu WIG20 przy użyciu metody zbioru ufności modeli

Metoda zbioru ufności modeli (MCS) pozwala przetestować, że dane modele prognostyczne są nieodróżnialne przeciwko hipotezie alternatywnej, że przynajmniej jeden model daje większą oczekiwaną stratę. Poprzez kolejne iteracje MCS konstruuje zbiór modeli, który zawiera najlepszy model prognostyczny z pewnym prawdopodobieństwem. Celem badania jest zastosowanie metody MCS do porównania zdolności prognostycznej różnych modeli zmienności typu GARCH dostosowanych do indeksu WIG20. Średnią błędy modelowaliśmy za pomocą najlepiej dopasowanego modelu - stałej. Oceniliśmy zdolność prognostyczną za pomocą różnych funkcji straty, porównując prognozy do różnych miar zmienności zrealizowanej wyznaczonej dla zwrotów śróddziennych. Przeanalizowaliśmy wyniki dla różnych częstotliwości i różnych statystyk testowych. Metoda MCS jest najlepszym podejściem do problemu szukania najlepszego modelu prognostycznego, na przykład modelu zmienności. Metoda MCS jest alternatywą w stosunku do metod wcześniejszych takich jak test nadrzędnej zdolności prognostycznej, (SPA) Hansena (2001) i test RC White'a (2000). Testy SPA i RC są wykorzystywane do sprawdzania czy szczególny model prognostyczny nie jest znacząco gorszy niż inne modele w danym zbiorze. W przeciwieństwie do MCS wymagają one specyfikacji modelu benchmarkowego.

Badanie z wykorzystaniem metody MCS zostało przedstawione po raz pierwszy w artykule Hansena i innych, (2003). Temat był kontynuowany w artykule Hansena, Lunde, 2005.

5.3.1. Statystyki testowe

Następujące statystyki testowe były wykorzystane w badaniu empirycznym

1. T_Q , statystyka testowa tradycyjnego testu χ^2

$$T_Q \equiv n\bar{X}'\hat{\Sigma}^\# \bar{X} \xrightarrow{d} \chi_{(q)}^2, \quad (9.1)$$

gdzie

$l \equiv (1, \dots, 1)'$, L_t – wektor funkcji strat, $L_t = (L_{i_1,t}, \dots, L_{i_m,t})'$, $X_t \equiv l'_{\perp} L_t$, $\bar{X} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$.

$l'_{\perp} l \equiv 0$. $\Sigma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(n^{1/2} \bar{X})$

$\hat{\Sigma}$ – zgodny estymator Σ .

$\hat{\Sigma}^\#$ – pseudoinwersja $\hat{\Sigma}$.

q – jest liczbą liniowo niezależnych porównań, $q = \text{rank}(\hat{\Sigma})$.

2. T_F , statystyka testowa testu Chi z korekcją wielkością próby

$$T_F \equiv \frac{n-q}{q(n-1)} T_Q \xrightarrow{d} F(q, n-q). \quad (9.2)$$

1. T_R , statystyka ujmująca zakres

$$T_R \equiv \max_{i,j \in M} \frac{|\bar{d}_{ij}|}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{d}_{ij})}}. \quad (9.3)$$

2. T_{SQ} ,

$$T_{SQ} = \sum_{i,j \in M} \frac{(\bar{d}_{ij})^2}{\widehat{\text{Var}}(\bar{d}_{ij})}. \quad (9.4)$$

5.3.2. Wynik porównywania modeli

Badanie zostało przeprowadzone dla poziomu istotności 0.05 . Odrzuciliśmy modele z nieistotnymi parametrami i modele, dla których istniały istotne korelacje w resztach standaryzowanych i w kwadratach reszt standaryzowanych

Tabela 5.1.
Modele w pierwszym zbiorze MCS, wygenerowane przez program MULCOM dla 5, 10, 30 – minutowej częstotliwości i dla następujących parametrów:

Zmiennosc zrealizowana	Funkcja straty	p-wartosc dla model 1	p-wartosc dla model 2
$\sigma_{1,t}^2$	<i>MSE</i>	1	0,5009
$\sigma_{3,t}^2$	<i>MSE</i>	1	0,4828

Otrzymaliśmy dwa modele w zbiorze MCS:

1. GARCH z rozkładem Gaussa, z następującymi parametrami:
 $\omega = 0.01532 (0.00661)$, $\alpha_1 = 0.0403 (0.0067)$, $\beta_1 = 0.9510 (0.0078)$.

2. GJR z rozkładem the Gaussa:
 $\omega = 0.0152(0.0067)$, $\alpha_1 = 0.0405(0.0087)$, $\beta_1 = 0.9538(0.0078)$, $\gamma_1 = -0.0005 (0.0107)$

Zauważamy, że ze względu na niską wartość parametru $\gamma_1 = -0.0005$ model **GJR** może być traktowany jak model **GARCH**.

Tabela 5. 2.
Modele w drugim zbiorze MCS wygenerowane przez program MULCOM dla 5, 10 i 30 minutowej częstotliwości i dla następujących parametrów:

Zmiennosc zrealizowana	Funkcja straty	p-wartosc dla modelu 1	p-wartosc dla modelu 2
$\sigma_{1,t}^2$	<i>MAD</i>	1	0,3832
$\sigma_{1,t}^2$	<i>MSE₁</i>	1	0,4894
$\sigma_{1,t}^2$	<i>MAD₁</i>	1	0,9213
$\sigma_{3,t}^2$	<i>MAD</i>	1	0,3832
$\sigma_{3,t}^2$	<i>MSE₁</i>	1	0,5094
$\sigma_{3,t}^2$	<i>MAD₁</i>	1	0,9213

Otrzymaliśmy dwa modele w zbiorze MCS:

1. RiskMetrics z rozkładem GED z następującymi parametrami:
 $\lambda = 0,94$, $\nu = 1,4367 (0,0729)$

2. RiskMetrics z rozkładem Studenta:
 $\lambda = 0,94$, $\nu = 9,4884 (2,0336)$.

Tabela 5.3.

Modele w trzecim zbiorze MCS wygenerowane przez MULCOM

dla 5, 10 i 30 – minutowej częstotliwości, dla następujących parametrów:

Zmienność zrealizowana	Funkcja straty	<i>p</i> -wartość dla modelu 1	<i>p</i> -wartość dla modelu 2
$\sigma_{2,t}^2$	<i>MAD</i>	1	0,9672

Otrzymaliśmy dwa modele w zbiorze MCS:

1. RiskMetrics z rozkładem GED z następującymi parametrami:

$$\lambda = 0,94, \nu = 1,4367 \text{ (0,0729)}$$

2. RiskMetrics ze skośnym rozkładem Studenta, dla następujących parametrów

$$\lambda = 0,94, \xi = 0,043216 \text{ (0,0307)}, \nu = 9,4527 \text{ (2,0108)}$$

Tabela 5.4.

Modele w czwartym zbiorze MCS wyznaczone przez MULCOM

dla częstotliwości 5, 10, i 30 – minutowej, dla $\sigma_{2,t}^2$ i MAD_1 dla następujących parametrów:

numer modelu	<i>p</i> -wartość
1	0.1923
2	1
3	0.1923
4	0.3169
5	0.1923

Otrzymaliśmy pięć modeli w zbiorze MCS:

1. RiskMetrics z rozkładem GED, z następującymi parametrami:

$$\lambda = 0,94, \nu = 1,4367 \text{ (0,0729)}$$

2. RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta, z następującymi parametrami:

$$\lambda = 0,94, \xi = 0,0432, \nu = 9,4524 \text{ (2,0108)}$$

3. RiskMetrics z rozkładem t-Studenta, z następującymi parametrami:

$$\lambda = 0,94, \nu = 9,4884 \text{ (2,0336)}$$

4. RiskMetrics z rozkładem Gaussa

5. GARCH z rozkładem Gaussa, z następującymi parametrami:

$$\omega = 0,0153 \text{ (0,0066)}, \alpha_1 = 0,0405 \text{ (0,0087)}, \beta_1 = 0,9510 \text{ (0,0078)}$$

Dla różnych typów miar zmienności zrealizowanej zbioru MCS są takie same dla $\sigma_{3,t}^2$

oraz $\sigma_{1,t}^2$ z taką samą funkcją straty, lecz wyniki są odmienne dla $\sigma_{2,t}^2$. Zatem współ-

czynnik c we wzorze 1.29 był nieistotny. Po drugie rodzaj statystyki testowej nie ma wpływu na wynik. Co więcej zbiory MCS nie są jednakowe dla wszystkich rozważanych typów funkcji straty. P - wartości są takie same dla częstotliwości 5, 10 i 30 minutowej w znacznej ilości przypadków. Modele wskazane jako najlepsze modele zmienności dla polskiego indeksu WIG20 to **RiskMetrics** z rozkładem **Gaussa**, **t Studenta**, **skośnego rozkładu Studenta**, **GED** oraz **GARCH** z rozkładem Gaussa. Współczynnik γ modelu GJR jest bardzo mały, więc można traktować go jako GARCH. Możemy wyciągnąć wniosek, że GARCH jest najlepszym modelem dla WIG20.

Modele wskazane jako najlepsze według SPA dla różnych parametrów i zbiory MCS różnią się dla tego samego szeregu danych, zatem metody te nie są komplementarne według prawdopodobieństwa dla szczególnych parametrów. Na przykład RiskMetrics(1,1) z rozkładem błędu t Studenta jest nie gorszy niż inne według SPA dla $\sigma_{1,t}^2$, 5 min i MSE dla p -wartości 0,21, lecz jedynym modelem w zbiorze MCS dla tych parametrów jest GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa, z p -wartością równą 1.

5.4. Wybór najlepszych modeli prognostycznych zmienności indeksu WIG20 spośród modeli z rodziny ARMA-GARCH metodą MCS

Badaliśmy szereg zwrotów indeksu WIG20. W badaniu porównaliśmy ze sobą modele typu GARCH z równocześnie dopasowanymi modelami ARMA, tzn. modelami ARMA(0,0), ARMA(1,0), ARMA(0,1), ARMA(1,1), ARMA(1,2), ARMA(2,1), ARMA(2,2) z rozkładami błędu Gaussa, t Studenta, Skośnym rozkładem Studenta i GED. Badanie wykonaliśmy dla 265 prognoz uwzględniając następujące modele z rodziny GARCH: RiskMetrics, GARCH, GJR, EGARCH, APARCH, IGARCH, FIGARCH, FIAPARCH i HYGARCH z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta, rozkładem skośnym t Studenta. Sprawdziliśmy wniosek z pracy Vilhelmssona (2006), że jeśli dopuści się leptokurtozę w rozkładach błędu to otrzyma się znaczną poprawę prognoz zmienności, natomiast skośność nie poprawia prognoz. (Wynik uzyskali oni dla Standard i Poor's 500 Indeks Futures). Modele wyestymowaliśmy w programie G@RCH Laureata.

5.4.1. Otrzymane wyniki empiryczne

Najpierw do estymacji modeli użyliśmy 1739 dziennych obserwacji indeksu WIG20 od **12.10.2000** do **14.09.2007**. Odrzuciliśmy modele, dla których nie było zbieżności modelu. Odrzuciliśmy również modele z nieistotnymi parametrami

Tabela 5.5.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{3,t}^2$ 5, 10, 30 min częstotliwości i MSE

MCS	p -wartość
GARCH z rozkładem Gaussa	1
ARMA(2,2)-GARCH z rozkładem Gaussa	0,7755

Dla **ARMA(2,2)-GARCH z rozkładem Gaussa** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

$$\mu = 0,0744(0,035), a_1 = -1,0577(0,04652), a_2 = -0,8295(0,04911),$$

$$b_1 = 1,0546(0,0512), b_2 = 0,8164(0,0534), \omega = 0,0136(0,0062),$$

$$\alpha_1 = 0,0376(0,0064), \beta_1 = 0,9566(0,0076)$$

Dla modelu **GARCH z rozkładem Gaussa** oszacowania parametrów są następujące:

$$\mu = 0,07592(0,035), \omega = 0,0153(0,0066), \alpha_1 = 0,0403(0,0067), \beta_1 = 0,953(0,0078)$$

Tabela 5.6.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5, 10 i 30 min i MSE

MCS	p -wartość
ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem GED	0,9903
GARCH z Gaussa	0,9903
EGARCH z rozkładem Gaussa	1

Dla **ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem GED** otrzymaliśmy takie oszacowania parametrów:

$$\mu = 0,0783(0,0295), a_1 = -1,1328(0,0372), a_2 = -0,8685(0,0373),$$

$$b_1 = 1,1378(0,04), b_2 = 0,8607(0,0403), \nu = 1,4258(0,0722),$$

$$\alpha_1 = 0,06, \beta_1 = 0,94$$

Dla **EGARCH z rozkładem Gaussa** uzyskaliśmy natomiast:

$$\mu = 0,0874(0,0353), \omega = 1,075(0,22056), \alpha_1 = 0,0602(0,3428),$$

$$\beta_1 = 0,989(0,0044), \gamma_1 = 0,00239(0,0094), \gamma_2 = 0,1012(0,0296)$$

W podanym okresie otrzymaliśmy modele prognostyczne z rozkładem Gaussa, zatem nie potwierdziła się wynik z pracy Vilhelmssona (2006), że leptokurtoza poprawia pro-

gnozy zmienności.. Dla indeksu WIG20 najlepsze prognozy może dawać model GARCH z rozkładem normalnym.

Następnie wykonaliśmy to samo badanie dla szeregu **od 18.05.2001 do 12. 06. 2008** (w programie TSM Davidsona). **Wyniki testu stacjonarności KPPS** dla szeregu zwrotów WIG20 są następujące. Wartość statystyki testowej wynosi 0.14035, a p -wartość (<1) Zatem hipoteza zerowa o stacjonarności nie została odrzucona.

Na ostatnie 256 dni wyznaczyliśmy prognozy. Otrzymaliśmy następujące zbiory modeli najlepszych:

Tabela 5.7.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 5 min częstotliwości i MSE

MCS	MSE dla $\sigma_{1,t}^2$	p -wartości dla $\sigma_{1,t}^2$	MSE dla $\sigma_{3,t}^2$	p -wartości dla $\sigma_{3,t}^2$
EGARCH z rozkładem t Studenta	3,664851	0,0806	3,665323	0,0805
EGARCH z rozkładem skośnym t Studenta	3,663824	0,8620	3,664298	0,7576
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,636330	0,8620	3,636976	0,8612
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,632166	0,8620	3,632803	0,8612
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	3,615396	1	3,615396	1
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,651188	0,1625	3,651794	0,1623

Dla modelu **EGARCH z rozkładem t Studenta** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ν 8,03941 (1,5532)
 ω 0,06402 (0,0129)
 α_1 0,09561 (0,01703)
 β_1 0,98762 (0,00591)

Dla modelu **EGARCH z rozkładem skośnym t Studenta** oszacowania parametrów są następujące:

ν 8,11502
 ξ 1,01587 (0,0289)
 ω 0,06469 (0,0131)
 α_1 0,09639 (0,0172)
 β_1 0,98755 (0)

Dla modelu **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** otrzymaliśmy natomiast:

a_1 0.06997 (0,02567)
 ω 0.1565 (0,1031)
 α_1 0,06666 (0,01248)

β_1 0,85829 (0,05713)

a dla modelu **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa:**

a_1 0,7422 (0,13098)

b_1 0,70204 (0,14954)

ω 0,14119 (0,0865)

α_1 0,06552 (0,01186)

β_1 0,86682 (0,04861)

Parametry **AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa** dla danego szeregu są następujące

a_1 0,08277 (0,02854)

a_2 0

ω 0,10074 (0,0511)

α_1 0,05835 (0)

β_1 0,89291 (0,03047)

Zbiór MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 5 min, częstotliwości i *MSE* zawiera następujące modele:

Tabela 5.8.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 5 min, częstotliwości i *MSE*

MCS	<i>MSE</i>	<i>p</i> -wartości
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,862534	0,6308
AR(1)-EGARCH z rozkładem Gaussa	3,903671	0,4417
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,865959	0,4417
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	3,844615	1

Dla modelu **AR(1)-EGARCH z rozkładem Gaussa** uzyskaliśmy:

a_1 0,06583 (0,02509)

ω 0,06036 (0,0125)

α_1 0,088460 (0,0167)

β_1 0,98886 (0,00558)

Dla modelu **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ν 1,33181 (0,0785)

a_1 0,78515 (0,09173)

b_1 0,78601 (0,09974)

ω 0,09699 (0,0566)

α_1 0,0622 (0,01144)

β_1 0,89305 (0,03384)

Natomiast oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 10 min, częstotliwości i MSE były następujące:.

Tabela 5.9.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, i 10 min, częstotliwości i MSE

MCS	MSE dla $\sigma_{1,t}^2$	p -wartości dla $\sigma_{1,t}^2$	MSE dla $\sigma_{3,t}^2$	p -wartości dla $\sigma_{3,t}^2$
GARCH z rozkładem Gaussa	3,315736	0,1297	3,316119	0,1297
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,257867	1	3,258325	1
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,265838	0,6174	3,266289	0,6172
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	2,268274	0,7918	3,2686675	0,7929
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	2,290641	0,4982	3,291061	0,4980

Dla modelu **GARCH z rozkładem Gaussa** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ω 0,06638 (0,057)

α_1 0,05617 (0,01221)

β_1 0,91227 (0,03694)

Zbiór MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 10 min, częstotliwości i MSE składał się z czterech modeli. Najmniejszy błąd średniokwadratowy (7,686377) miał model **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED**. P -wartość dla tego modelu wynosiła 1. Pozostałe modele w zbiorze MCS to **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MSE równym 7,708262 i p -wartością 0,6953, **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MSE wynoszącym 7,717030 i p -wartością 0,1737 oraz **AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MSE równym 7,727635 i p -wartością 0,1189.

Tabela 5.10.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 10 min, częstotliwości i MSE

MCS	MSE	p -wartości
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	7,708262	0,6953
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	7,717030	0,1737
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	7,686377	1
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	7,727635	0,1189

Zbiór MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, 10 min, częstotliwości i MSE stanowiły modele: **GARCH z rozkładem Gaussa** z MSE równym 3,316119 i p -

wartością 0,1297, model **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z *MSE* wynoszącym 3,258325 i *p*-wartością 1, **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z *MSE* równym 3,266289 i *p*-wartością 0,6172 oraz modele **ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED** z *MSE* równym 3,2686675 i *p*-wartością 0,7929 i model **AR (2)-GARCH z rozkładem Gaussa** z *MSE* wynoszącym 3,291061 i *p*-wartością 0,4980

Zbiór MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, 30 min, częstotliwości i *MSE* stanowił jeden model **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z błędem średniokwadratowym równym 4,282533.

Tabela 5.11.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 30 min częstotliwości i *MSE*

MCS	<i>MSE</i> dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>p</i> -wartość dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>MSE</i> dla $\sigma_{2,t}^2$	<i>p</i> -wartość dla $\sigma_{2,t}^2$	<i>MSE</i> dla $\sigma_{3,t}^2$	<i>p</i> -wartość dla $\sigma_{3,t}^2$
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	4,282533	1	5,067394	1	4,282525	1

Dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 30 min częstotliwości i *MSE* otrzymaliśmy ten sam model

Dla funkcji błędu *MAD* otrzymaliśmy następujące zbiory MCS:

Tabela 5.12.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 5 min, częstotliwości i *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,295839	1
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,300242	0,2049
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	1,309496	0,2049
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,312791	0,0502

Tabela 5.13.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, 5 min, częstotliwości i *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości
GARCH z rozkładem Gaussa	1,216740	0,2943
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,191985	1
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,194525	0,4969
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	1,204673	0,4969
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,206841	0,2943

Tabela 5.14.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, $\sigma_{3,t}^2$, 10 min, częstotliwości i MAD

MCS	MAD dla $\sigma_{2,t}^2$	p - wartości dla $\sigma_{2,t}^2$	MAD dla $\sigma_{3,t}^2$	p -wartości dla $\sigma_{3,t}^2$
GARCH z rozkładem Gaussa	1,576509	0,0852	1,254283	0,4328
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,556318	1	1,232318	1
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,559266	0,4371	1,234124	0,6791
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	1,563409	0,4371	1,243432	0,6791
AR(2)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,564772	0,4321	1,242756	0,6791

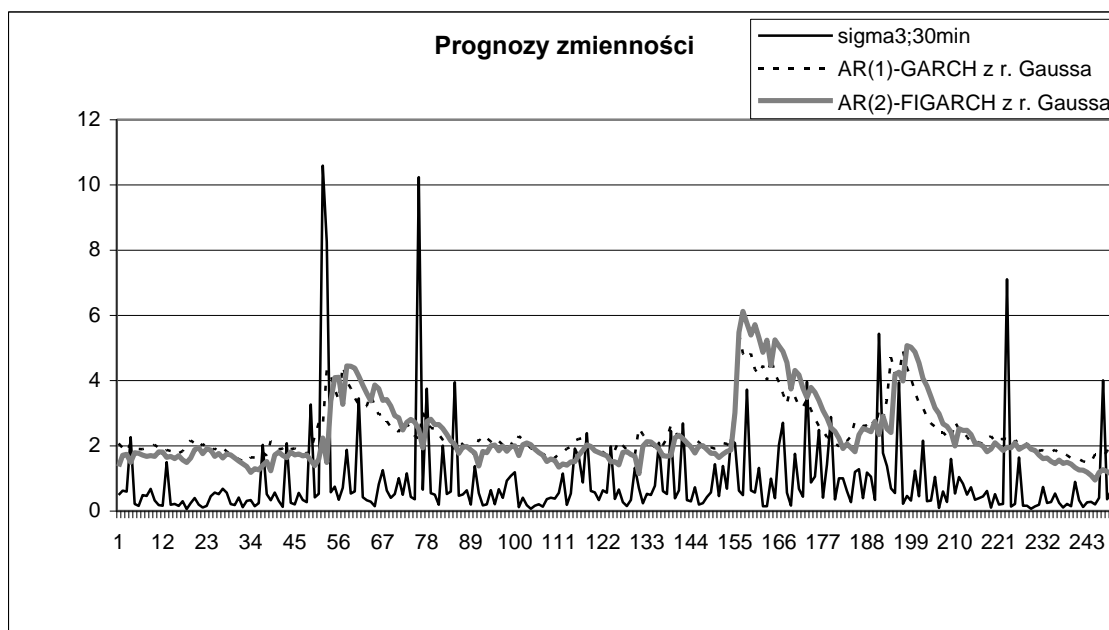
MCS dla dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, 30 min, częstotliwości i MAD zawiera pojedynczy model **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MAD równym 1,790728 i p -wartością równą 1

Tabela 5.15.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, 30 min, częstotliwości i MAD

MCS	MAD	p -wartości
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	1,79076	0,9460
AR(2)-FIGARCH z rozkładem Gaussa	1,788397	1

Prognozy powyższych modeli zostały przedstawione na poniższym rysunku. Można odczytać, że prognozy najlepszych modeli różnią się nieznacznie.



Rysunek 5.1. Prognozy dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, częstotliwości 30 min i funkcji błędu *MAD*

Powtórzyliśmy badanie dla szeregu od **18.05.2001 do 08.05.2009** (w programie TSM Davidsona). Na ostatnie 256 dni od **29. 04. 2008 do 08.05.2009** wyznaczyliśmy prognozy.

Wyniki testu stacjonarności KPSS w badanym okresie dla szeregu zwrotów **WIG20** wartość statystyki testowej KPSS wynosiła 0,262706, dla p-wartości $\{< 1\}$

Hipoteza zerowa o stacjonarności nie została zatem odrzucona dla szeregu WIG20.

W tabelach prezentujemy otrzymane zbiory MCS dla danych z przyjętego okresu

Tabela 5.16.

Oszacowania p-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 5 min, częstotliwości i MSE

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości
	dla $\sigma_{1,t}^2$	dla $\sigma_{1,t}^2$	dla $\sigma_{2,t}^2$	dla $\sigma_{2,t}^2$	dla $\sigma_{3,t}^2$	dla $\sigma_{3,t}^2$
GARCH z rozkładem Gaussa	3,656125	1	3,816296	0,8533	3,656995	1
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,667560	0,168	3,826855	0,1447	3,668453	0,1664
MA(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,667573	0,168	3,826892	0,1447	3,668466	0,1664
Stała-HYGARCH z rozkładem Gaussa	3,662281	0,8571	3,809985	1	3,663214	0,8557
Stała-AR(1)-HYGARCH z rozkładem Gaussa	3,680368	0,1123	3,826423	0,1447	3,681321	0,1114
Stała-MA(1)-HYGARCH z	3,680531	0,1123	3,826606	0,1447	3,681483	0,1114

rozkładem Gaussa						
------------------	--	--	--	--	--	--

Oszacowania parametrów modeli:

GARCH z rozkładem Gaussa

ω 0,07077 (0,0562)
 α_1 0,06009 (0,0132)
 β_1 0,90831 (0,03599)

AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa

a_1 0,05284 (0,02422)
 ω 0,06925 (0,0542)
 α_1 0,06007 (0,01281)
 β_1 0,90895 (0,03475)

MA(1)-GARCH z rozkładem Gaussa

b_1 -0,05239 (0,02398)
 ω 0,06933 (0,05242)
 α_1 0,06006 (0,01281)
 β_1 0,90892 (0,03477)

Stała -HYGARCH z rozkładem Gaussa

μ 0,07171 (0,03309)
 ω 0,2277 (0,1327)
 d 0,5981 (0,0697)
 k 0,87852 (0,0741)
 α_1 -0,050178 (0,09521)
 β_1 0,68262 (0,10113)

AR(1) ze stałą – HYGARCH z rozkładem Gaussa

μ 0,07254 (0,03499)
 a_1 0,05588 (0,02349)
 ω 0,23065 (0,1292)
 d 0,59709 (0,0658)
 k 0,87847 (0,0712)
 α_1 -0,50707 (0,08936)
 β_1 0,6759 (0,09717)

MA(1) ze stałą –HYGARCH z rozkładem Gaussa

μ 0,07262 (0,03486)
 b_1 -0,05554 (0,02325)
 ω 0,23096 (0,1294)
 d 0,59698 (0,066)
 k 0,87831 (0,0713)
 α_1 -0,50686 (0,08956)
 β_1 0,67568 (0,09744)

Dla zmienności zrealizowanych σ_{1t}^2 , σ_{2t}^2 , σ_{3t}^2 , 5 minutowej częstotliwości i *MSE* w zbiorze MCS znalazł się model Stała – RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta z następującymi parametrami:

ν 6,7712 (1,2878)

ξ 1,04346 (0,0305)

μ 0,06906 (0,03287)

ω 0,016 (0,005)

Podobne zbiory modeli otrzymano dla częstotliwości 30 minutowej.

Tabela 5.17.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 30 min, częstotliwości i *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości
	dla $\sigma_{1,t}^2$	dla $\sigma_{1,t}^2$	dla $\sigma_{3,t}^2$	dla $\sigma_{3,t}^2$
GARCH z rozkładem Gaussa	4,013867	0,8631	4,014723	0,8650
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	4,022989	0,1896	4,023845	0,1898
MA(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	4,023262	0,1009	4,02419	0,1015
Stała-HYGARCH z rozkładem Gaussa	4,007943	1	4,008883	1
Stała-AR(1)-HYGARCH z rozkładem Gaussa	4,024787	0,1009	4,025717	0,1015
Stała-MA(1)-HYGARCH z rozkładem Gaussa	4,025039	0,1009	4,025970	0,1015

Tabela 5.18.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 30 min częstotliwości i *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartości
GARCH z rozkładem GED	6,027646	0,2833
FIGARCH z rozkładem GED	5,986030	1
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED	6,024938	0,5654
Stała –GARCH z rozkładem skośnym Studenta	5,996350	0,7967

Oszacowania parametrów wymienionych w powyższej tabeli modeli są następujące:

GARCH z rozkładem GED

ν 1,35756 (0,0838)

ω 0,01502 (0,0048)

FIGARCH z rozkładem GED

ν 1,38342 (0,0721)

ω 0,08545 (0,095)

d 0,50567 (0,2454)

α_1 -0,47563 (0,23607)

β_1 0,72345 (0,17126)

ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem GED

ν 1,40532 (0,0783)
 a_1 0,78602 (0,12383)
 b_1 0,78602 (0,13456)
 ω 0,04616 (0,0259)
 α_1 0,05527 (0,00976)
 β_1 0,9252 (0,01786)

Stała – GARCH z rozkładem skośnym Studenta

ν 7,51165 (1,402)
 ξ 1,04176 (0,0305)
 μ 0,06983 (0,03343)
 ω 0,03765 (0,019)
 α_1 0,05744 (0,00992)
 β_1 0,92862 (0,01394)

Dla *MSE* i częstotliwości 30min dla trzech różnych zmienności zrealizowanych do zbioru MCS zostały wytypowane modele **AR(1)-RiskMetrics z rozkładem Gaussa** i model **Stała-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta**. Wartości *MSE* były duże.

Tabela 5.19.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 10 min, częstotliwości i *MAD*

MCS	<i>MAD</i> dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>p</i> -wartości dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>MAD</i> dla $\sigma_{3,t}^2$	<i>p</i> -wartości dla $\sigma_{3,t}^2$
GARCH z rozkładem Gaussa	3,414478	1	3,415193	1
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,424809	0,1837	3,425525	0,1835
MA(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	3,424641	0,1837	3,425357	0,1835
Stała-HYGARCH z rozkładem Gaussa	3,441622	0,1837	3,442361	0,1835

Tabela 5.20.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$, 10 min, częstotliwości i *MSE*

MCS	<i>MSE</i> dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>p</i> -wartości dla $\sigma_{1,t}^2$	<i>MSE</i> dla $\sigma_{2,t}^2$	<i>p</i> - wartości dla $\sigma_{2,t}^2$	<i>MSE</i> dla $\sigma_{3,t}^2$	<i>p</i> - wartości dla $\sigma_{3,t}^2$
FIGARCH z rozkładem GED	42,843499	0,9174	44,794104	0,9729	42,863592	0,9182
AR(1)-RiskMetrics z	42,971249	0,1114	44,813507	0,1404	42,989014	0,1116

r. Gaussa						
Stała -RiskMetrics z r. skośnym Studenta	42,734558	0,9174	44,542582	1	42,751858	0,9182
Stała- GARCH z r. skośnym Studenta	42,559970	1	44,678578	0,9729	42,581082	1

Oszacowania parametrów są następujące

AR(1)- RiskMetrics z rozkładem Gaussa

a_1 0,05468 (0,02302)

Stała - GARCH z rozkładem skośnym Studenta

ν 7,51165 (1,4009)

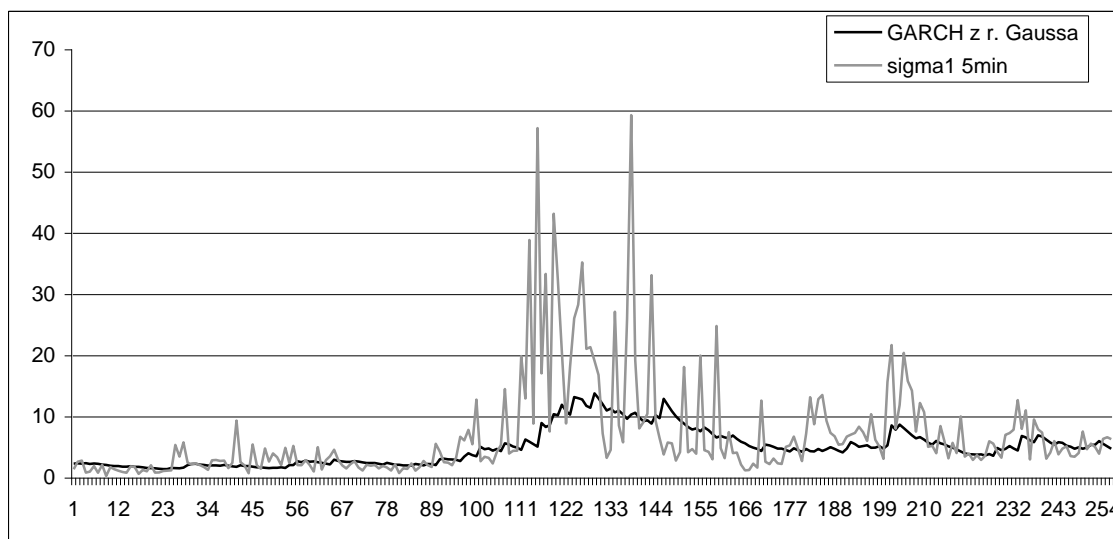
ξ 1,04176 (0,0305)

μ 0,06983 (0,003343)

ω 0,03765 (0,019)

α_1 0,05744 (0,00992)

β_1 0,92862 (0,01394)



Rysunek 5.2. Wykres prognoz zmienności z modelu GARCH z rozkładem Gaussa i wartości zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ dla częstotliwości 5 min

Zauważamy, że można wybrać najlepszy model prognostyczny zmienności w rodzinie rozszerzeń modelu ARMA-GARCH to znaczy model, który występuje we wszystkich zbiorach MCS, prosty model GARCH ale dla różnych szeregów zwrotów indeksu WIG20 metoda MCS wskazała modele GARCH z różną specyfikacją ARMA. Widzimy, że prognozy zmienności indeksu WIG20 modeli typu GARCH może poprawić jednoczesny wybór modelu ARMA. Zauważamy, że wynik powtórzył się dla szeregów zwrotów z różnych okresów. W podanym okresie otrzymaliśmy również modele typu

GARCH z rozkładem Gaussa zatem nie potwierdził się wniosek z pracy Vilhelmssona, (2006) dla indeksu WIG20, że leptokurtოza powoduje znaczną poprawę prognoz wariacji.

5.5. Podsumowanie

W powyższym rozdziale zdefiniowano zbiór modeli najlepszych i zbiór modeli gorszych. Podano hipotezę zerową testu MCS oraz szczegółowy algorytm MCS. Po sformułowaniu odpowiednich założeń przedstawiono twierdzenie, które zapewnia, że zbiór lepszych modeli jest zawarty w MCS, kiedy liczba prognoz jest duża i że wszystkie gorsze modele są odrzucane ze zbioru MCS w procesie eliminacji MCS. Podano możliwe warianty statystyki testowej oraz regułę eliminacji. Zdefiniowano p -wartość dla modelu w teście MCS oraz przedstawiono schemat metody bootstrapowej w procedurze MCS. W rozdziale przedstawiono ponadto otrzymane najlepsze modele zmienności typu GARCH dla indeksu WIG20. Zauważyliśmy, że dla różnych typów miar zmienności zrealizowanej zbiory MCS są takie same dla $\sigma_{3,t}^2$ oraz $\sigma_{1,t}^2$ z taką samą funkcją straty lecz wyniki są odmienne dla $\sigma_{2,t}^2$. Na końcu poszukiwaliśmy najlepszych modeli prognostycznych zmienności spośród modeli ARMA-GARCH metodą MCS dla danych z różnych okresów. Zauważyliśmy, że można wskazać najlepszy model prognostyczny typu GARCH to znaczy model GARCH, który występuje we wszystkich zbiorach MCS jednak nie można dobrać jednej, powtarzającej się dla różnych szeregów zwrotów optymalnej specyfikacji ARMA. Kolejnym wnioskiem jest, że prognozy zmienności indeksu WIG20 modeli typu GARCH zależą od wyboru modelu ARMA i można je poprawić dobierając odpowiedni model

6. Test Warunkowej Zdolności Prognostycznej

Hipoteza jednakowej zdolności prognostycznej dla dwóch funkcji strat w teście warunkowej zdolności prognostycznej może być wyrażona wzorem:

$$H_0^1 : E\left[|Y_{t+\tau} - \hat{f}_{m,\tau}| - |Y_{t+\tau} - \hat{g}_{m,t}| \mid \mathcal{F}_t\right] = 0 \equiv E[\Delta L_{m,\tau} \mid \mathcal{F}_t] = 0. \quad (6.1)$$

lub

$$H_0^2 : E\left[(Y_{t+\tau} - \hat{f}_{m,\tau})^2 - (Y_{t+\tau} - \hat{g}_{m,t})^2 \mid \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad (6.2)$$

Test ten daje dobre wyniki nawet przy braku stacjonarności danych. Pozwala porównywać modele zagnieżdżone (nested) łącznie w przeciwieństwie do wcześniejszych testów. Rozróżnienie modeli zagnieżdżonych i niezagnieżdżonych w teście bezwarunkowym wynika stąd, że asymptotyczny rozkład statystyki testowej zależy od wartości wyestymowanych parametrów, które są różne dla modeli zagnieżdżonych i niezagnieżdżonych. Test ten może być łatwo wykonany przy pomocy standardowych pakietów regresji. Podejście warunkowe pozwala ocenić metodę prognozowania, która zawiera model podczas gdy testy bezwarunkowe pozwalają ocenić jedynie model prognostyczny. Testy warunkowe nie nakładają ograniczeń na procedurę estymacji wykorzystaną do wygenerowania prognoz, podczas gdy klasyczne podejście Westa (1996), (hipoteza bezwarunkowa) wyklucza sami-parametryczną i nieparametryczną estymację Baysowską. W pracy Giacomini i White (2006) zastosowano test warunkowej zdolności prognostycznej do oceny dokładności prognostycznej różnych metod prognozowania. Przy pomocy testu warunkowej zdolności prognostycznej udowodniono, że metody selekcji sekwencyjnej (metoda eliminacji, metoda dołączania i metoda selekcji krokowej) nie są dobrymi metodami doboru modelu natomiast sprawdza się estymacja Baysowską metodą zmniejszania, Giacomini i White (2006). Sprawdzono, że moc testu wzrasta wraz z rozmiarem danych poza próbą. Testy warunkowej zdolności prognostycznej mogą być łatwo przeprowadzane za pomocą standardowych pakietów regresji.

6.1. Statystyka testowa Testu Warunkowej Zdolności Prognostycznej

Zdefiniujmy proces stochastyczny $W \equiv \{W_t : \Omega \rightarrow R^{s+1}, s \in N, t = 1, \dots, T\}$ określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) . Dzielimy wektor obserwacji następująco

$W_t \equiv (Y_t, X_t')$, gdzie $Y_t : \Omega \rightarrow \mathfrak{S}$ jest zmienną zależną a $X_t : \Omega \rightarrow \mathfrak{S}^s$ jest wektorem zmiennych niezależnych. Zdefiniujmy $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_1', \dots, W_t', X_{t+1}')$. Jeśli $\tau = 1$ (mamy prognozę jeden krok ba przód). Hipoteza zerowa oznacza, że $\{\Delta L_{m,t+1}, \mathfrak{F}_t\}$ jest ciągiem różnic martyngałowych. Warunek $E[\Delta L_{m,t+\tau} | \mathfrak{F}_t] = 0$ jest zatem równoważny warunkowi $E[h_t \Delta L_{m,t+\tau}] = 0$ dla wszystkich F_t mierzalnych funkcji h_t . Dla m standaryzowanych argumentów statystyka testu warunkowej zdolności prognostycznej typu Walda ma następującą postać:

$$T_{n,m}^h = n \left(n^{-1} \sum_{t=m}^{T-1} h_t \Delta L_{m,t+1} \right)' \hat{\Omega}_n^{-1} \left(n^{-1} \sum_{t=m}^{T-1} h_t \Delta L_{m,t+1} \right) = n \bar{Z}_{m,n}' \hat{\Omega}_n^{-1} \bar{Z}_{m,n}, \quad (6.3)$$

gdzie $\bar{Z}_{m,n} \equiv n^{-1} \sum_{t=m}^{T-1} Z_{m,t+1}$, $Z_{m,t+1} \equiv h_t \Delta L_{m,t+1}$, $\hat{\Omega}_n = n^{-1} \sum_{t=m}^{T-1} Z_{m,t+1} Z_{m,t+1}'$.

Twierdzenie 6.1.

Dla okresu prognozy $\tau = 1$, maksimum wielkości okna $m < \infty$ i i szeregu testowanego h_t

- i. $\{W_t\}$, $\{h_t\}$ są ciągami ciągami ϕ mieszającymi wymiaru $-r/(2r-1)$, $r \geq 1$ lub wymiaru $-r/(r-1)$ dla $r > 1$.
- ii. $E|Z_{m,t+1,i}|^{2(r+\delta)} < \Delta < \infty$ dla pewnych $\delta > 0$, $i = 1, \dots, q$ i dla wszystkich t ;
- iii. $\Omega_n \equiv n^{-1} \sum_{t=m}^{T-1} E[Z_{m,t+1} Z_{m,t+1}']$ jest stale dodatnia

Wtedy, przy założeniu hipotezy zerowej

$$T_{n,m}^h \xrightarrow{d} \chi_q^2, \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

Założenie (i) mówi, że dane mogą być niejednorodne. Zauważamy, że nie ma założenia o stacjonarności szeregu. Asymptotyczny rozkład jest otrzymany dla liczby prognoz dążącej do nieskończoności. Założenie (iii) dotyczy dodatniości asymptotycznej wariancji. Twierdzenie to zapewnia że statystyka testowa testu warunkowej zdolności prognostycznej ma rozkład χ_q^2 . Zatem może być weryfikowana w oparciu o wartości krytyczne dla tego rozkładu.

Korelacja wielokrotna w statystyce jest miarą tego jak dobrze zmienna zależna może być przewidywana na podstawie liniowej kombinacji zmiennych niezależnych

$$R = 1 - \frac{\text{błąd średniokwadratowy}}{\text{wariancja wektora}}$$

Twierdzenie 6.2.

Przy założeniu twierdzenia 10 statystyka testowa $T_{n,m}^h$ może być obliczona jako nR^2 , gdzie R^2 jest kwadratem współczynnika korelacji wielokrotnej regresji dla wektora $(h_t \Delta L_{m,t+1})$ wymiaru $1 \times q$ dla $t = m, \dots, T-1$.

Test może być przeprowadzony poprzez odrzucenie hipotezy zerowej o równej zdolności prognostycznej, jeśli $nR^2 > \chi_{q,1-\alpha}^2$

Zbadamy zachowanie statystyki testowej $T_{n,m}^h$ przy założeniu hipotezy alternatywnej $H_{A,h}$

$$H_{A,h} : E[\bar{Z}'_{m,n}]E[\bar{Z}_{m,n}] \geq \delta > 0 \text{ dla dostatecznie dużych wartości } n$$

Twierdzenie 6.3.

Przy założeniach i, ii, iii twierdzenia 10 i przy założeniu hipotezy $H_{A,h}$ dla każdej stałej $c \in R$, $P[T_{n,m}^h > c] \rightarrow 1$, przy $n \rightarrow \infty$.

Własności testu zależą od przyjętej funkcji straty.

6.2. Wielokrokový test warunkowej zdolności prognostycznej

Dla horyzontu prognozy $\tau > 1$ hipoteza zerowa

$$H_{0,\tau} : E[\Delta L_{m,t+\tau} | \mathcal{F}_t] = 0 \quad t=1,2,\dots \tag{6.4}$$

o jednakowej warunkowej zdolności prognostycznej prognoz f i g implikuje, że F_t mierzalny test funkcji ciągu $\{h_t \Delta L_{m,t+\tau}\}$ ma skończone korelacje tak, że

$$\text{cov}(h_t \Delta L_{m,t+\tau}, h_{t-j} \Delta L_{m,t+\tau-j}) = 0 \text{ dla wszystkich } j \geq \tau$$

Naturalnym uogólnieniem testu dla prognoz wiele kroków na przód jest test, w którym

$$H_{0,\tau} : E[\Delta L_{m,t+\tau} | \mathcal{F}_t] = 0$$

$$H_{A,h,\tau} : E[\bar{Z}'_{m,n}]E[\bar{Z}_{m,n}] \geq \delta > 0 \text{ dla dostatecznie dużych } n,$$

gdzie $\bar{Z}_{m,n} \equiv n^{-1} \sum_{t=m}^{T-\tau} Z_{m,t+\tau}$, $Z_{m,t+\tau} = h_t \Delta L_{m,t+\tau}$.

Test opiera się na statystyce testowej

$$T_{n,m,\tau}^h = n \left(n^{-1} \sum_{t=m}^{T-\tau} h_t \Delta L_{m,t+\tau} \right)' \hat{\Omega}_n^{-1} \left(n^{-1} \sum_{t=m}^{T-\tau} h_t \Delta L_{m,t+\tau} \right) = n \bar{Z}'_{m,n} \tilde{\Omega}_n^{-1} \bar{Z}_{m,n}, \quad (6.5)$$

gdzie

$$\tilde{\Omega}_n \equiv n^{-1} \sum_{t=m}^{T-\tau} Z_{m,t+\tau} Z'_{m,t+\tau} + n^{-1} \sum_{j=1}^{\tau-1} w_{n,j} \sum_{t=m+j}^{T-\tau} \left[Z_{m,t+\tau} Z'_{m,t+\tau-j} + Z_{m,t+\tau-j} Z'_{m,t+\tau} \right]$$

$w_{n,j}$ są funkcjami wagowymi takimi, że $w_{n,j} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ dla $j=1, \dots, \tau-1$

Twierdzeniu 6.1. odpowiada dla przypadku prognozy wielokrokowej następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.3.

Dla okresu prognozy $\tau > 1$ i dla długości próby $m < \infty$ i ciągu h_t założmy, że $\{W_t\}, \{h_t\}$ są ciągami ϕ mieszającymi rozmiaru $-r/(2r-2), r \geq 2$ lub α mieszającymi rozmiaru $-r/(r-2), r > 2$.

ii $E|Z_{m,t+1,i}|^{r+\delta} < \Delta < \infty$ dla pewnego $\delta > 0, i=1, \dots, q$ dla wszystkich t ;

iii $\Omega_n \equiv n^{-1} \sum_{t=m}^{T-\tau} E[Z_{m,t+\tau} Z'_{m,t+\tau}] + n^{-1} \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{t=m+j}^{T-\tau} \left(E[Z_{m,t+\tau} Z'_{m,t+\tau-j}] + E[Z_{m,t+\tau-j} Z'_{m,t+\tau}] \right)$ jest stale

dodatnia.

wtedy przy założeniu $H_{0,\tau}$

$$T_{n,m,\tau}^h \xrightarrow{d} \chi_q^2, n \rightarrow \infty;$$

przy założeniu $H_{A,h,\tau}$ dla dowolnej stałej $c \in R$,

$$P[T_{n,m,\tau}^h > c] \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Twierdzenie to pozwala zapewnić, że statystyka testowa testu ma asymptotycznie rozkład χ_q^2 . Zatem może być weryfikowana w oparciu o wartości krytyczne dla tego rozkładu.

6.3. Podsumowanie

Rozdział jest poświęcony testowi warunkowej zdolności progностycznej. We wstępie podano hipotezę jednakowej zdolności progностycznej w teście warunkowej zdolności progностycznej. Wymieniono zalety tego testu. Podano statystykę testową Walda testu warunkowej zdolności progностycznej oraz twierdzenie, które zapewnia, że ta statystyka testowa ma asymptotycznie rozkład χ_q^2 . Odpowiednie twierdzenie zapewnia, że statystyka testowa Walda może być wyznaczana jako nR^2 , gdzie R^2 jest kwadratem współczynnika korelacji wielokrotnej regresji. Na końcu opisano wielokrotkowy test zdolności progностycznej jako naturalne uogólnienie poprzedniego testu dla

prognoz wiele kroków na przód. Podano twierdzenie o asymptotycznym rozkładzie χ_q^2 statystyki testowej w teście wielokrokowym warunkowej zdolności progностycznej.

7. Ranking modeli zmienności

Zgodny ranking progностycznych modeli zmienności, tzn. ranking izomorficzny z rankingiem, w którym prognoza zmienności byłaby porównywana z nieobserwowalną zmiennością rzeczywistą, może być przydatny do podejmowania decyzji inwestycyjnych np. w metodzie portfelowej opartej na prognozach zmienności. Przedstawimy

koncepcje równoważności między rankingami. Omówimy warunki, które zapewniają równoważność rankingów opartych na bazie zmienności rzeczywistej i na bazie estymatora zmienności (Hansen i Lunde 2006). Opisane zostanie również tworzenie rankingów modeli prognostycznych na podstawie współczynnika regresji Mincera-Zarnowitza.

Niech X będzie zmienną losową stochastyczną. Zmienna ta będzie oceniana za pomocą wartości oczekiwanej pewnej funkcji straty, którą oznaczono jako L . Ponieważ L nie jest w pełni wyznaczalna wprowadzono estymator L , który oznaczono przez L' . Przedstawimy warunki, które zapewnią, że

$$E(L(X)) \geq E(L(Y)),$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$E(L'(X)) \geq E(L'(Y)).$$

X i Y reprezentują ciągi zmiennych losowych, które są oceniane i porównywane w terminie oczekiwanej straty. W kontekście modeli zmienności X i Y oznaczają dwa ciągi prognoz, które są produkowane przez konkurencyjne modele.

Zbiorem A niech będzie zbiór ciągów losowych. Elementy zbioru A są postaci $\mathfrak{X}(\omega) = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\}$. Są one zdefiniowane na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) i przyjmują wartości w przestrzeni $(R^\infty, \mathfrak{B}_\infty)$.

Założenie 7.1.

Niech $L(X), \tilde{L}(X)$ będą funkcjami rzeczywistymi. Niech $L_t(X_t) = L(\theta_t, X_t)$

i $\tilde{L}_t(X_t) = L(\tilde{\theta}_t, X_t)$. Zdefiniujmy zmienną losową $\psi_n(\mathfrak{X}) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \tilde{L}_t(X_t)$. Dla wszystkich $\mathfrak{X} \in \mathfrak{A}$:

- i. $L_t(X_t)$ i $\tilde{L}_t(X_t)$ są funkcjami pierwotnymi dla wszystkich t
- ii. $\psi(\mathfrak{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n E[L(X_t)]$, $\tilde{\psi}(\mathfrak{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n E[\tilde{L}(X_t)]$ istnieją i są skończone.
- iii. $\hat{\psi}(\mathfrak{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\mathfrak{X})$ istnieje i jest skończona

$\psi, \tilde{\psi}, \hat{\psi}$ służą jako kryteria do porównywania alternatyw ze zbioru A , to znaczy wyznaczają rankingi w A . Dla $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{A}$ oznaczono przez $\mathfrak{X} \succeq \mathfrak{Y}$, jeśli $\psi(\mathfrak{X}) \leq \psi(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{X} \succeq^a \mathfrak{Y}$, jeśli $\tilde{\psi}(\mathfrak{X}) \leq \tilde{\psi}(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{X} \succeq_n \mathfrak{Y}$, jeśli $\hat{\psi}_n(\mathfrak{X}) \leq \hat{\psi}_n(\mathfrak{Y})$, $n = 1, 2, \dots$. Relacje te tworzą rankingi, które nazywa się odpowiednio rankingiem prawdziwym, rankingiem przybli-

zonym i rankingiem empirycznym. Wprowadzono następujące oznaczenia: $\boxtimes \sim \Psi$, jeśli $\boxtimes \succeq \boxstar$ oraz $\boxtimes \preceq \boxstar$. $\boxtimes \succ \Psi$, jeśli $\boxtimes \succeq \boxstar$ i $\neg(\boxtimes \preceq \boxstar)$

7.1. Koncepcje równoważności między rankingami

Niech \succeq', \succeq'' będą relacjami porządkującymi. Niech \succeq''_n , $n=1, 2, \dots$ będzie ciągiem nowych relacji porządkujących, wyznaczających rankingi w zbiorze A . Dla wszystkich $\boxtimes, \boxstar \in \mathfrak{V}$ zachodzi:

- 1) Jeśli, $\boxtimes \succeq' \boxstar \Leftrightarrow \boxtimes \succeq'' \boxstar$, to \succeq', \succeq'' są równoważne w A
- 2) Jeśli $\boxtimes \succeq' \boxstar \Leftrightarrow P(\boxtimes \succeq''_n \boxstar)_{n \rightarrow \infty}$ to \succeq''_n jest asymptotycznie równoważna relacji \succeq w A
- 3) Jeśli $\boxtimes \succ' \boxstar \Leftrightarrow P(\boxtimes \succ''_n \boxstar)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, to \succeq''_n jest asymptotycznie słabo równoważna relacji \succeq w A

Należy zauważyć, że definicje równoważności są charakterystyczne dla danego zbioru A . Dwie relacje porządkujące równoważne w zbiorze A nie muszą być równoważne w większym zbiorze \mathfrak{V}

Twierdzenie 7.1.

Zdefiniujmy: $\nu(\boxtimes) = \psi(\boxtimes) - \tilde{\psi}(\boxtimes)$, oraz $\nu_n(\boxtimes) = \tilde{\psi}(\boxtimes) - \hat{\psi}_n(\boxtimes)$. Zdefiniujmy

$$\delta(\boxtimes, \boxstar) = \nu(\boxtimes) - \nu(\boxstar), \quad \delta_n(\boxtimes, \boxstar) = \nu_n(\boxtimes) - \nu_n(\boxstar),$$

- a) Jeśli $\delta(\boxtimes, \boxstar) = 0$ dla wszystkich $\boxtimes, \boxstar \in \mathfrak{V}$, to \succeq, \succeq^a są równoważne.
- b) Jeśli $\delta_n(\boxtimes, \boxstar) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ dla wszystkich $\boxtimes, \boxstar \in \mathfrak{V}$, to \succeq jest asymptotycznie słabo równoważna \succeq_n^e .

$\delta(\boxtimes, \boxstar)$ może być interpretowana jako miara różnicy między relacjami \succeq, \succeq^a , $\delta_n(\boxtimes, \boxstar)$ natomiast jako miara różnicy między \succeq, \succeq_n^e .

Zakłada się, że funkcje straty L_t i \tilde{L} dla wszystkich $t=1, \dots, n$ różnią się tylko parametrami

Założenie 7.2.

Niech $\tilde{\theta}_t$ oznacza estymator θ_t , $t=1, 2, \dots$.a.s.wyjaśnić

$$i. \quad \text{Dla wszystkich } \boxtimes \in \mathfrak{V} \text{ zachodzi } L_t(X_t) \stackrel{a.s.}{=} L(\theta_t, X_t) \text{ i } \tilde{L}_t(X_t) \stackrel{a.s.}{=} L(\tilde{\theta}_t, X_t).$$

Zdefiniujmy $\eta_t = \tilde{\theta}_t - \theta_t$. Niech X_t oraz θ_t będą $\{\mathcal{F}_{t-1}\}$ mierzalne dla $t=1, 2, \dots$

ii.

Albo

$$a) \quad L(\theta, X) = \partial L(\theta, X) / \partial \theta \text{ istnieje i nie zależy od } X$$

albo

b) $L''(\theta, X) = \partial^2 L(\theta, X) / \partial^2 \theta$ istnieje i nie zależy od X i $\{\eta_t, \mathcal{F}_t\}$ jest ciągiem różnic martyngałowych.

W zastosowaniach θ_t jest warunkową wariancją.

Twierdzenie 7.2.

Przy założeniach 7.1. (i-ii) oraz 7.2. relacje porządkujące \succeq oraz \succeq^a są równoważne.

Zatem przy przedstawionych założeniach można wybrać modele najlepsze w oparciu o ranking modeli dla estymatora. W sytuacji, gdy założenie 7.2. nie jest spełnione, im większa jest wariancja $Var(\eta_t)$ tym większa jest rozbieżność δ , a więc na mocy twierdzenia 7.1. istnieje większe prawdopodobieństwo, że uszeregowania na podstawie relacji \succeq oraz \succeq^a są różne.

Twierdzenie 7.3.

Niech spełnione będą założenia 7.1.(i-ii) oraz 7.2.(i) i założenie 7.2.(ii) jest niezachowanie. Niech przybliżony ranking na bazie kryterium $\tilde{\psi}_\lambda$ będzie zdefiniowany następująco:

$\tilde{\theta}_{\lambda,t} \equiv \theta_t + \lambda \eta_t$, $t=1, \dots, n$ dla pewnych $\lambda \in \mathfrak{K}$, gdzie $E(\eta_t | \mathcal{F}_{t-1}) \stackrel{a.s.}{=} 0$ oraz

$$Var(\eta_t | \mathcal{F}_{t-1}) > 0, \quad \tilde{\psi}_\lambda(\mathfrak{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n E[L(\tilde{\theta}_{\lambda,t}, X_t)].$$

Zdefiniujmy miarę różnicy $\delta_\lambda(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \equiv [\psi(\mathfrak{X}) - \tilde{\psi}_\lambda(\mathfrak{X})] - [\psi(\mathfrak{Y}) - \tilde{\psi}_\lambda(\mathfrak{Y})]$

- i. Jeśli druga pochodna $\partial^2 L(\theta, X) / \partial \theta \partial \theta'$ i ma dolne ograniczenie w X większe niż 0, wtedy dla dowolnych \mathfrak{X} i \mathfrak{Y}

$$|\delta_\lambda(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})| \rightarrow \infty, \text{ jeśli } \lambda \rightarrow \infty.$$
- ii. Przy odpowiednich założeniach $|\delta_\lambda(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})|$ ściśle rośnie w przedziale $|\lambda|$ dla pewnych $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$

Twierdzenie to mówi, że wzrost warunkowej wariancji $var(\theta_t - \tilde{\theta}_{\lambda,t} | \mathcal{F}_{t-1})$ powoduje

niezgodność pomiędzy \succeq oraz \succeq^a jeśli założenie 7.2.(ii) nie jest spełnione.

Bez znajomości miary probabilistycznej P nie jest możliwe ocenienie wartości oczekiwanej $E[L(\theta, X)]$, ponieważ $\int L(\theta, X) dP$. Zatem nie jest możliwe uszeregowanie mo-

deli przy pomocy relacji \succeq oraz \succeq^a . Przy pewnych dodatkowych założeniach wartość oczekiwana może być aproksymowana średnią z próby.

Twierdzenie 7.4.

Przy założeniu 7.1. i 7.2. (i), jeśli szereg $L(\tilde{\theta}, X_t)$ $t=1,2,\dots$ jest stacjonarny i ergodyczny dla wszystkich $\tilde{\theta} \in \mathfrak{V}$, wtedy $\underset{e}{\succeq}_n$ jest prawie na pewno asymptotycznie słabo równoważny $\underset{a}{\succeq}$.

Twierdzenie to podaje warunki, które zapewniają słabą równoważność $\underset{e}{\succeq}$ oraz $\underset{a}{\succeq}$. Zatem przy poczynionych założeniach

$$\hat{\psi}_n(X) = n^{-1} \sum_{t=1}^n L(\tilde{\theta}, X_t) \xrightarrow{p} \tilde{\psi}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n E[L(\tilde{\theta}, X_t)].$$

Ponieważ $\underset{a}{\succeq}$ jest asymptotycznie równoważny $\underset{e}{\succeq}$ a $\underset{e}{\succeq}$ jest asymptotycznie równoważny $\underset{a}{\succeq}$ można zatem wykorzystać estymator wartości średniej do utworzenia właściwego rankingu modeli.

Przykład 1

Rozszerzeniem Taylora $L(\tilde{\sigma}_t^2, h_t) = (\tilde{\sigma}_t^2 - h_t)^2$ jest $L(\tilde{\sigma}_t^2, h_t) = L(\sigma_t^2, h_t) + 2(\sigma_t^2 - h_t)\eta_t + \eta_t^2$, gdzie $\eta_t = \tilde{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2$. Po podstawieniach $L(\sigma_t^2, h_t) = (\sigma_t^2 - h_t)^2$ i $\eta_t = \tilde{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2$ założenie 7.2. jest spełnione, założenie 7.1. też trywialnie, gdyż dane są tylko dwie funkcje straty. (Granice są więc skończone). Zatem na mocy powyższych twierdzeń $L(\sigma_t^2, h_t)$ oraz $L(\tilde{\sigma}_t^2, h_t)$ generują te same rankingi. W szczególności mamy

$$\arg \min_{\mathfrak{V}} E \left[n^{-1} \sum_{t=1}^n L(\sigma_t^2, h_{i,t}) \right] = \arg \min_{\mathfrak{V}} E \left[n^{-1} \sum_{t=1}^n L(\tilde{\sigma}_t^2, h_{i,t}) \right],$$

gdzie \mathfrak{V} to zbiór prognoz.

Zatem najlepszy model zmienności to model, który minimalizuje przybliżoną funkcję straty. Można więc wyznaczyć najlepszy model prognostyczny znając estymator zmienności, np. zmienność zrealizowaną.

Przykład 2

Dla MSE^* , średniego względnego błędu kwadratowego,

$$L(\sigma_t^2, h_t) = [\log(h_t / \sigma_t^2)]^2 = [\log(\sigma_t^2) - \log(h_t)]^2.$$

Dwie pierwsze pochodne są następujące:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_t^2} = 2 \frac{\log(\sigma_t^2 / h_t)}{\sigma_t^2},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_i^2} = 2 \frac{1 - \sigma_i^2 \log(\sigma_i^2 / h_i)}{\sigma_i^2}.$$

Funkcje te zależą od h_i , zatem nie jest spełnione założenie 7.2. (ii). Oznacza to, że ocena oparta na oczekiwanej funkcji straty $E[L(\sigma_i^2, \cdot)]$ nie musi być tym samym co wybór oparty na funkcji $E[L(\sigma_i^2, \cdot)]$.

7.2. Regresja Mincera-Zarnowitza w kontekście rankingu prognoz

Alternatywą dla wykorzystywania funkcji straty do porównywania modeli ekonometrycznych jest tworzenie rankingu na podstawie współczynnika R^2 regresji Mincera-Zarnowitza. Równanie regresji Mincera-Zarnowitza ma następującą postać

$$\varphi(\sigma_i^2) = \alpha + \beta \varphi(h_i) + u_i, \quad t = 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

Zazwyczaj za funkcję φ bierze się funkcję identycznościową $\varphi(x) = x$ lub funkcję logarytmiczną $\varphi(x) = \log(x)$. Otrzymuje się wtedy dwa różne równania regresji

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \alpha + \beta h_i + u_i, \quad t = 1, \dots, n. \\ \log \sigma_i^2 &= \alpha + \beta \log h_i + u_i, \quad t = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

W zastosowaniach sprawdza się bardziej funkcja logarytmiczna, ponieważ jest bardziej odporna na wartości skrajne.

Niech

$$\psi(H) \equiv \text{cov}(\varphi(\sigma_i^2), \varphi(h_i)) [\text{var}(\varphi(h_i))]^{-1} \text{cov}(\varphi(\sigma_i^2), \varphi(h_i)), \quad (7.2)$$

Kryterium na bazie współczynnika R^2 , z definicji tego współczynnika jako kwadratu współczynnika korelacji jest następujące:

$$\psi(H) / \text{Var}(\varphi(\sigma_i^2))$$

Kryterium R^2 daje takie samo uporządkowanie jak $\psi(H)$, gdzie H jest szeregiem $(h_{i,1}, h_{i,2}, \dots)$, a $i = 1, \dots, m$. Jednakowe uszeregowanie wynika stąd, że wariancja jest stała i nie zmienia rankingu.

Kryterium definiuje się następująco:

$$\tilde{\psi}(H) \equiv \text{cov}(\varphi(\sigma_i^2), \varphi(h_i)) [\text{Var}(\varphi(h_i))]^{-1} \text{cov}(\varphi(h_i), \varphi(\sigma_i^2)). \quad (7.3)$$

Założenie 7.3.

Załóżmy, że $\eta_t \equiv \sigma_t^2 - \bar{\sigma}_t^2$, a funkcja $\varphi(x)$ posiada pochodną dowolnego stopnia i spełniony jest warunek:

$$\left[E\left((\eta)^j \mid \mathcal{F}_t\right) \frac{\partial^j \varphi(x)}{\partial (x)^j} \right]_{x=\bar{\sigma}_t^2} \stackrel{a.s.}{=} c_j$$

dla pewnych stałych $c_j \in R$ i $t = 1, 2, \dots$, i dla wszystkich $j = 1, 2, \dots$

Twierdzenie 7.5.

Przy założeniu 7.3. kryteria $\psi(H)$ oraz $\tilde{\psi}(H)$ są równoważne.

Zatem przy nowym założeniu ranking może być utworzony na podstawie funkcji $\tilde{\psi}(H)$

7.3 Podsumowanie

Omówiliśmy warunki, które zapewniają równoważność rankingów opartych na bazie zmienności i na bazie estymatora zmienności. Zdefiniowaliśmy ranking prawdziwy, ranking przybliżony i „ranking empiryczny”. Przedstawiliśmy koncepcje równoważności między rankingami. Omówiliśmy tworzenie rankingu na bazie współczynnika regresji Minzera-Zarnowitza.

8. Kombinacje prognoz

Omówimy zagadnienie kombinacji prognoz. Przedstawione zostaną argumenty świadczące o przewadze kombinacji prognoz nad prognozami otrzymanymi za pomocą pojedynczych modeli. Kombinacja prognoz jest dobrą alternatywą, jeśli nie jest możliwe wyróżnienie jednego dominującego modelu (Timmermann 2006). Ponadto kombinacje prognoz są bardziej stabilne niż indywidualne prognozy (Stock i Watson 2004). W rozdziale opiszemy kombinacje liniowe i nieliniowe prognoz, metody estymacji wag kombinacji oraz kombinacje z wagami zmieniającymi się w czasie. Według Stocka i Watsona (2004) kombinacja modeli generuje lepsze prognozy niż pojedynczy model. Innym

argumentem za kombinacją jest brak stacjonarności w procesie generowania danych, co może jednak prowadzić do braku stabilności w wagach kombinacji.

8.1. Liniowa kombinacja prognoz

Kombinację liniową dwóch prognoz można określić następująco:

$$f(h_t^A, h_t^B; \theta) = \beta_1 h_t^A + \beta_2 h_t^B.$$

Poniższy test rozstrzyga, czy funkcja kilku prognoz daje lepszą prognozę niż pojedyncza prognoza:

$$\begin{aligned} H_0^A : E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_t^A)] &= E[L(\hat{\sigma}_t^2, f(h_t^A, h_t^B, \theta))], \\ H_0^A : E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_t^A)] &> E[L(\hat{\sigma}_t^2, f(h_t^A, h_t^B, \theta))] \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} H_0^B : E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_t^A)] &= E[L(\hat{\sigma}_t^2, f(h_t^A, h_t^B, \theta))], \\ H_1^B : E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_t^A)] &\leq E[L(\hat{\sigma}_t^2, f(h_t^A, h_t^B, \theta))] \end{aligned}$$

Kombinacje prognoz są bardziej stabilne niż indywidualne prognozy (Stock i Watson, 2004). Najprostszą kombinacją jest kombinacja liniowa z identycznymi współczynnikami i z sumą wag równą jeden

$$g(\hat{y}_{t+h}; \omega_{t+h,t}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_{t+h,t,j}$$

gdzie $\hat{y}_{t+h,t}$ jest prognozą a $\omega_{t+h,t}$ jest wagą zmieniającą się w czasie.

Błąd prognozy można zdefiniować następująco

$$e_{t+h,t}^c = y_{t+h} - g(\hat{y}_{t+h,t}; \omega_{t+h,t}).$$

y_{t+h} jest realizacją zmiennej.

Parametry optymalnych kombinacji prognoz w tym przypadku są rozwiązaniem następującego problemu

$$\omega^* = \arg \min_{\omega \in W_t} E[L(e^c(\omega))], \quad (8.1)$$

gdzie L oznacza błąd średniokwadratowy (MSE).

Dla MSE wagi kombinacji zależą od pierwszych dwóch momentów łącznego rozkładu

y_{t+h} i $\hat{y}_{t+h,t}$

$$\begin{pmatrix} y_{t+h} \\ \hat{y}_{t+h} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mu_{y_{t+h,t}} \\ \mu_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{y_{t+h,t}}^2 & \sigma'_{y\hat{y}_{t+h,t}} \\ \sigma_{y\hat{y}_{t+h,t}} & \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix}$$

Dla MSE Timmermann (2006) otrzymał następujące wagi optymalne zmieniające się w czasie:

$$\omega_{0t+h,t}^* = \mu_{y_{t+h,t}} - \omega^* \mu_{\hat{y}_{t+h,t}}, \omega_{t+h,t}^* = \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}^{-1} \sigma_{y\hat{y}_{t+h,t}} \quad (8.2)$$

Kombinacja, która nie uwzględnia korelacji pomiędzy prognozami ma przewagę nad bardziej wyrafinowanymi układami. Założenie, że indywidualne prognozy są nieobciążone implikuje nieobciążoną kombinację prognoz przy założeniu, że wagi sumują się do jedynki i stała jest poprawna, (Timmermann 2006).

Inny układ może być stworzony na bazie rankingu, Aiolfi i Timmermann (2006). Niech R_i będzie pozycją i -tego modelu w rankingu. Wagi kombinacji są następujące

$$\hat{\omega} = R_i^{-1} / \left(\sum_{i=1}^N R_i^{-1} \right). \quad (8.3)$$

Ta kombinacja nie ujmuje korelacji pomiędzy prognozami. Jest ona niewrażliwa na wartości ekstremalne.

Problem optymalnych wag może być przedstawiony jako zadanie optymalizacyjne minimalizacji oczekiwanej wariancji błędu prognoz, $\Sigma_e = E[ee']$ gdzie $e = \hat{y} - y$ z warunkiem, że suma wag wynosi jeden i indywidualne prognozy są nieobciążone:

$$\min \omega' \Sigma_e \omega. \quad (8.4)$$

$$\omega' \mathbf{1} = 1.$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest wektorem jedynek.

Dla odwracalnej macierzy Σ_e Timmerman (2006) otrzymał następujący wzór

$$\omega^* = (\mathbf{1}' \Sigma_e^{-1} \mathbf{1})^{-1} \Sigma_e^{-1} \mathbf{1}.$$

Przy założeniu hipotezy zerowej statystyka testowa ma rozkład normalny

8.2. Kombinacje dwóch prognoz

Niech \hat{y}_1, \hat{y}_2 będą dwoma prognozami. Niech e_1 i e_2 oznaczają błędy prognoz. Przy założeniu, że $e_1 \sim (0, \sigma_1^2)$, $e_2 \sim (0, \sigma_2^2)$, gdzie $\sigma_1^2 = \text{Var}(e_1)$, $\sigma_2^2 = \text{Var}(e_2)$ i $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ jest macierzą kowariancji pomiędzy e_1 i e_2 , a ρ_{12} jest korelacją. Optymalne wagi kombinacji według Timmermanna (2006) w tym przypadku mają postać:

$$\omega^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \quad 1 - \omega^* = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

Identyczne wagi są optymalne, jeśli wariancje prognoz są takie same niezależnie od korelacji pomiędzy prognozami pod warunkiem, że prognozy są nieobciążone (Timmermann 2006). Naturalnym przykładem jest układ dwóch prognoz:

$$(1/2) * (\hat{y}_1 + \hat{y}_2).$$

Jeśli prognozy są nieobciążone Timmermann (2006) proponuje kombinację, która nadaje dopełniające się wagi prognozom przy założeniu, że korelacja jest równa zero:

$$\omega_{inv} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad 1 - \omega_{inv} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Dla N prognoz można założyć, że $0 \leq \omega_{ni} \leq 1$, $i = 1, \dots, N$ żeby wartości kombinacji leżały w przedziale wartości indywidualnych prognoz.

Niech $\hat{y}_c = \omega y_1 + (1 - \omega) \hat{y}_2$, $y - \hat{y}_1 = e_1 \sim (0, \sigma^2)$, $y - \hat{y}_2 = e_2 \sim (\mu_2, \sigma^2)$. Zatem \hat{y}_2 jest obciążoną prognozą. Dodatkowo zakłada się, że $\text{cov}(e_1, e_2) = \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma^2$.

Wtedy prawdziwa jest następująca równość, wynikająca z definicji MSE (Timmermann 2006)

$$MSE(\hat{y}_c) - MSE(\hat{y}_1) = (1 - \omega)\sigma^2 \left((1 - \omega) \left(\frac{\mu_2}{\sigma} \right)^2 - 2\omega(1 - \rho_{12}) \right).$$

Zatem jeśli

$$\left(\frac{\mu_2}{\sigma} \right)^2 > \frac{2\omega(1 - \rho_{12})}{1 - \omega^2},$$

wtedy

$$MSE(\hat{y}_c) > MSE(\hat{y}_1).$$

Warunek zawsze zachodzi dla $\rho_{12} = 1$. W tym przypadku prognoza kombinacji modeli nie przewyższa nieobciążonej prognozy pojedynczego modelu. Co więcej im większe

jest obciążenie prognozy tym większy jest błąd kombinacji. Jeśli prognozy są obciążone wtedy identyczne wagi są optymalne, jeśli błędy prognoz mają taką samą wariancję i identyczną korelację pomiędzy prognozami (Timmermann 2006)

Jeśli

$$\begin{aligned} \sigma(y - \hat{y}_1) &> \sigma(y - \hat{y}_2) \\ \text{cov}(y - \hat{y}_1, y - \hat{y}_2) &\neq \sigma(y - \hat{y}_2)\sigma(y - \hat{y}_1), \end{aligned}$$

modelem optymalnym jest kombinacja prognoz, Timmermann (2006).

8.3. Kombinacje nieliniowe prognoz

Mogą wystąpić dwa typy kombinacji nieliniowych. Nieliniowa funkcja prognoz i nieliniowa kombinacja wag.

Nieliniowa funkcja prognoz:

$$\hat{y}^c = \omega_0 + \omega' C(\hat{y})$$

i nieliniowa kombinacja wag

$$\hat{y}^c = C(\hat{y}, \omega)$$

Donaldson i Kamsatra (1996) proponują nieliniową kombinację z nieliniowymi wagami z funkcją logistyczną, która wyróżnia wartości ekstremalne prognoz. Zmiany wartości funkcji logistycznej są minimalne, jeśli wartości zmiennych są mniejsze niż pewna ustalona wielkość i funkcja rośnie do jedynki, jeśli zmienne przekroczą tą wartość.

$$\hat{y}^c = \beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j y_j + \sum_{i=1}^p \delta_i g(z_i, \gamma_i), \quad (8.5)$$

$$g(z_i, \gamma_i) = \left(1 + \exp \left(-1 \cdot \left(\gamma_{0i} + \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} z_j \right) \right) \right)^{-1},$$

$$z_j = (\hat{y}_j - \bar{y}) / \hat{\sigma}_y, \quad p \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

gdzie

\bar{y} - jest estymatorem średniej wartości mean value wektora y .

$\hat{\sigma}$ - jest estymatorem odchylenia standardowego wektora y .

Dla błędu $\hat{\varepsilon}_t = R_t - \hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_1 R_{t-1}$ model średniej ruchomej wariancji to:

$$MAV_t = (1/n) \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_{t-i}^2.$$

Donaldson i Kamsatra udowodnili, że ich kombinacja, zastosowana do modeli średniej ruchomej wariancji oraz GARCH(1,1) przewyższa inne tradycyjne metody. Optymalne współczynniki kombinacji nieliniowej nie mogą być wyznaczone analitycznie z równania 8.1. Potrzebna jest nieliniowa estymacja najmniejszych kwadratów. Takie samo trzeba postąpić w przypadku geometrycznej średniej prognoz, która pozwala uniknąć problemu ujemnych zmienności, zaproponowanej przez Pattona i Shepparda w roku 2007. Wzór tej kombinacji jest następujący:

$$y^c = \exp(\omega_1 \ln(\hat{y}_1) + \omega_2 \ln(\hat{y}_2)). \quad (8.6)$$

Żeby wyznaczyć wagi można zastosować w tym przypadku, algorytm Gaussa-Newtona, który pozwala numerycznie rozwiązać problem 8.1. W części empirycznej pokazano, że funkcja nieliniowa Pattona i Shepparda dopasowuje się dobrze do szeregów prognoz zmienności i daje lepsze wyniki niż pojedyncze modele.

8.4 Porównywanie prognostycznych modeli zmienności i ich kombinacji przy pomocy metody zbioru ufności modeli

Przedmiotem badania jest porównanie najlepszych modeli prognostycznych dla indeksu WIG20 otrzymanych w pracy (Buszkowska 2008) oraz dla kursów walutowych z optymalnymi prognostycznymi modelami zmienności dla różnych specyfikacji ARMA. Innym celem jest porównanie wcześniejszych rezultatów z prognozami optymalnych liniowych i nieliniowych kombinacji najlepszych modeli. Chcieliśmy zweryfikować, czy istnieje lepszy model prognostyczny dla WIG20 niż otrzymany w pracy (Buszkowska 2008) i czy optymalna liniowa kombinacja prognoz dla WIG20 ma przewagę nad nieliniową. Dobraliśmy optymalne współczynniki dla liniowych i nieliniowych kombinacji dwóch prognoz rozwiązując nieliniowy problem najmniejszych kwadratów i stosując wzory przedstawione przez Timmermanna (2006) dla przypadku liniowego. Porównaliśmy prognozy zmienności z dzienną zmiennością zrealizowaną obliczoną jako suma kwadratów zwrotów dziennych. Badaliśmy wyniki otrzymane metodą Zbioru Ufności Modeli (MCS) Hansena i innych (2003) dla różnych miar zmienności zrealizowanej. Zgodnie z wnioskiem z pracy (Buszkowskiej 2008) zakłożyliśmy 5 minutową częstotliwość notowań. Porównaliśmy zbiory MCS dla funkcji błędu MCS znanej jako odporna funkcja błędu (Patton, Sheppard 2007).

8.4.1. Modele zmienności i ich kombinacje ujęte w badaniu

Rozważamy modele wskazane jako najlepsze przy założeniu podobnej dynamiki rynku w pracy Buszkowska (2008). Są to:

1 GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa,

$$\omega = 0,015(0,0066), \alpha_1 = 0,0403(0,0067), \beta_1 = 0,953(0,0078),$$

2 RiskMetrics z rozkładem $\nu = 9,4884(2,0357)$ i $\lambda = 0,94$

3 RiskMetrics z rozkładem GED dla $\lambda = 0,94$ i $\nu = 1,4367(0,0728)$

4 RiskMetrics z rozkładem Skośnym Studenta dla $\lambda = 0,94$, $\nu = 9,4524 (2,0108)$

$$\xi = 0,0432(0,0357)$$

5 RiskMetrics z rozkładem Gaussa dla $\lambda = 0,94$

I 446 modeli typu GARCH wyestymowanych dla różnych typów ARMA: GARCH(1,1), AR(1)-GARCH(1,1), MA(1)-GARCH(1,1), ARMA(1,1)-GARCH, ARMA(1,2)-GARCH(1,1), ARMA(2,1)- GARCH(1,1), ARMA(2,2)-GARCH(1,1) z rozkładami Gaussa, t Studenta, skośnym t Studenta i GED ponieważ typ ARMA ma wpływ na prognozy zmienności z modeli GARCH. Odrzuciliśmy modele z nieznaczącymi parametrami. W badaniu empirycznym wykorzystujemy 1739 dziennych obserwacji indeksu WIG20 od 12 października 2000 do 14 września 2007 do estymacji modeli.

Tabela 8.1.

Statystyki opisowe dla szeregu zwrotów (od 12 października 2000 do 14 września 2007)

Max	Min	Średnia	Od. standardowe	Skośność	Kurtoza
5,4829	-6,4418	0,04833	1,4864	0,03617	4,0927

Następne 265 notowań od 28 sierpnia 2006 do 14 września 2007 było wykorzystanych do obliczenia 1-dniowych prognoz zmienności. Żeby ocenić jakość prognoz porównaliśmy je z dzienną zmiennością zrealizowaną obliczona dla 5-minutowych zwrotów intraday. Zmienność zrealizowana została obliczona ze wzorów 1.28, 1.29 i 1.30

Dla prognoz modeli typu GARCH jako przykładów z pracy Buszkowska (2008), rozważamy.

Dla 5 modeli typu GARCH

$$y_1^c = (1/5)\hat{y}_1 + (1/5)\hat{y}_2 + (1/5)\hat{y}_3 + (1/5)\hat{y}_4 + (1/5)\hat{y}_5.$$

Identyczne wagi mogą być optymalne, jako że badane błędy prognoz mają z dokładnością 0,01 taką samą wariancję i taką samą korelację pomiędzy prognozami.

3. Kombinacja na bazie MCS według wzoru wykorzystującego ranking prognoz

$$\text{dla } \sigma_{1,t}^2, (10), y_2^c = 0,4379\hat{y}_1 + 0,219\hat{y}_3 + 0,1460\hat{y}_2 + 0,1095\hat{y}_5 + 0,0876\hat{y}_4.$$

$$\text{dla } \sigma_{2,t}^2, (9), y_3^c = 0,4379\hat{y}_1 + 0,219\hat{y}_4 + 0,1460\hat{y}_5 + 0,1095\hat{y}_2 + 0,0876\hat{y}_3.$$

$$\text{dla } \sigma_{3,t}^2, (11), y_4^c = 0,4379\hat{y}_1 + 0,219\hat{y}_3 + 0,1460\hat{y}_2 + 0,1095\hat{y}_5 + 0,0876\hat{y}_4.$$

$$\omega_1 = 1/(1+1/2+1/3+1/4+1/5) = 0,4379.$$

$$\omega_2 = 1/(2 \cdot (1+1/2+1/3+1/4+1/5)) = 0,219.$$

$$\omega_3 = 1/(3 \cdot (1+1/2+1/3+1/4+1/5)) = 0,1460.$$

$$\omega_4 = 1/(4 \cdot (1+1/2+1/3+1/4+1/5)) = 0,1095.$$

$$\omega_5 = 1/(5 \cdot (1+1/2+1/3+1/4+1/5)) = 0,0876.$$

Suma współczynników wynosi 1.

3. Kombinacja dwóch prognoz według wzoru 8.2 ponieważ prognozy są obciążone.

$$\text{dla } \sigma_{2,t}^2, (9), y_5^c = -0,6953 + 0,5158\hat{y}_1 + 0,7287\hat{y}_4.$$

$$\text{dla } \sigma_{1,t}^2, (10) y_7^c = -0,5841 + 0,4173\hat{y}_1 + 0,5231\hat{y}_3.$$

$$\text{dla } \sigma_{3,t}^2, (11), y_8^c = -0,5921 + 0,4204\hat{y}_1 + 0,5266\hat{y}_3.$$

4. Nieliniowa kombinacja dla optymalnej proporcji według Pattona and Sheppard (2006), wyznaczona metodą Gaussa-Newtona.

$$\text{dla } \sigma_{1,t}^2, (10), y_9^c = \exp(-1,073 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_3)),$$

$$y_{10}^c = \exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_2)).$$

$$\text{dla } \sigma_{2,t}^2, (9), y_{11}^c = \exp(0,256 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 0,66 \cdot \ln(\hat{y}_4)).$$

$$\text{dla } \sigma_{3,t}^2, (11), y_{12}^c = \exp(-1,07 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,54 \cdot \ln(\hat{y}_3)),$$

$$y_{13}^c = \exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_2)).$$

Po pierwsze w badaniu przeanalizowaliśmy 5 modeli typu GARCH otrzymanych jako najlepsze modele prognostyczne przy założeniu podobnej dynamiki rynku w pracy Buszkowska (2008). Rozważamy również wymienione wcześniej kombinacje

$$y_1^c, y_2^c, y_3^c, y_4^c, y_5^c, y_6^c, y_7^c, y_8^c, y_9^c, y_{10}^c, y_{11}^c, y_{12}^c.$$

8. 4.2. Wyniki badania

Dla 5 min częstotliwości notowań i MSE otrzymaliśmy następujące wyniki:

Tabela 8.2

Estymacje p-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, częstotliwości 5 min, 10 min i 30 min i MSE

The MSE	p-wartość
$\exp(1,538 \cdot \ln(\hat{y}_3) - 1,073 \cdot \ln(\hat{y}_1))$	0,7624
$\exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_2))$	1

Table 8.3

Estymacje p-wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 5 min, 10min i 30 min i MSE

The MSE	p-wartość
$(1/3)\hat{y}_1 + (2/3)\hat{y}_4$	0,7790
$\exp(0,5 \ln(\hat{y}_1) + 0,5 \ln(\hat{y}_4))$	0,7790
$\exp(0,256 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 0,66 \cdot \ln(\hat{y}_4))$	1

Tabela 8.4

Estymacje p-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, 5 min, 10 min i 30 min częstotliwości i MSE

The MSE	p-wartość
$\exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_2))$	1

Dla σ_1^2 i σ_3^2 zbiory są prawie takie same. Dla σ_2^2 zbiór MCS jest inny niż dla σ_1^2 dla σ_3^2 . Zauważamy, że dla σ_2^2 liniowa kombinacja z identycznymi wagami daje gorsze prognozy niż kombinacja $(1/3)\hat{y}_1 + (2/3)\hat{y}_4$, mimo, że warunek równych wariancji i korelacji Timmermanna jest spełniony. Zatem liniowa kombinacja bez stałej może przewyższać optymalną kombinację ze stałą.. Wzieliśmy pod uwagę następujące liniowe kombinacje liniowe ze wzoru 8.2.

$$\sigma_{1,t}^2, -0,8316 + 0,5201\hat{y}_{11} + 0,5299\hat{y}_{12}$$

$$\sigma_{3,t}^2, -0,84024 + 0,5237\hat{y}_{11} + 0,5332\hat{y}_{12}$$

gdzie

\hat{y}_{11} - GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa

\hat{y}_{12} -ARMA(2,2)-GARCH(1,1) z rozkładem Gaussa

$$\sigma_{2,t}^2, -0,81566 + 0,621432\hat{y}_{13} + 0,7568353\hat{y}_{14}$$

gdzie

\hat{y}_{13} - ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem GED

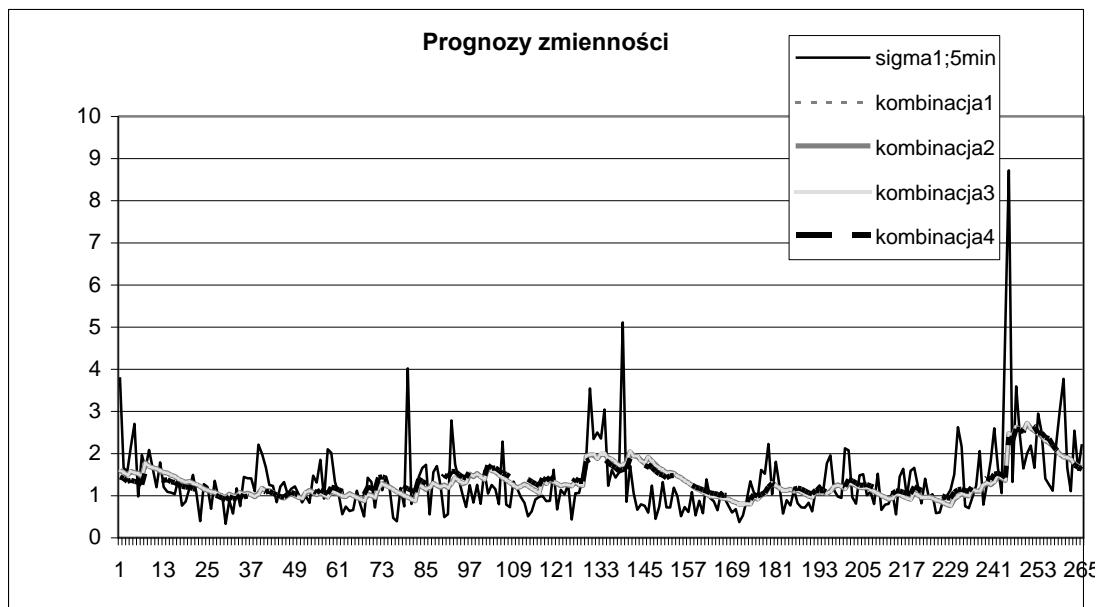
\hat{y}_{14} - EGARCH(1,1) z rozkładem Gaussa. (nieistotne parametry)

Otrzymaliśmy następujące wyniki:

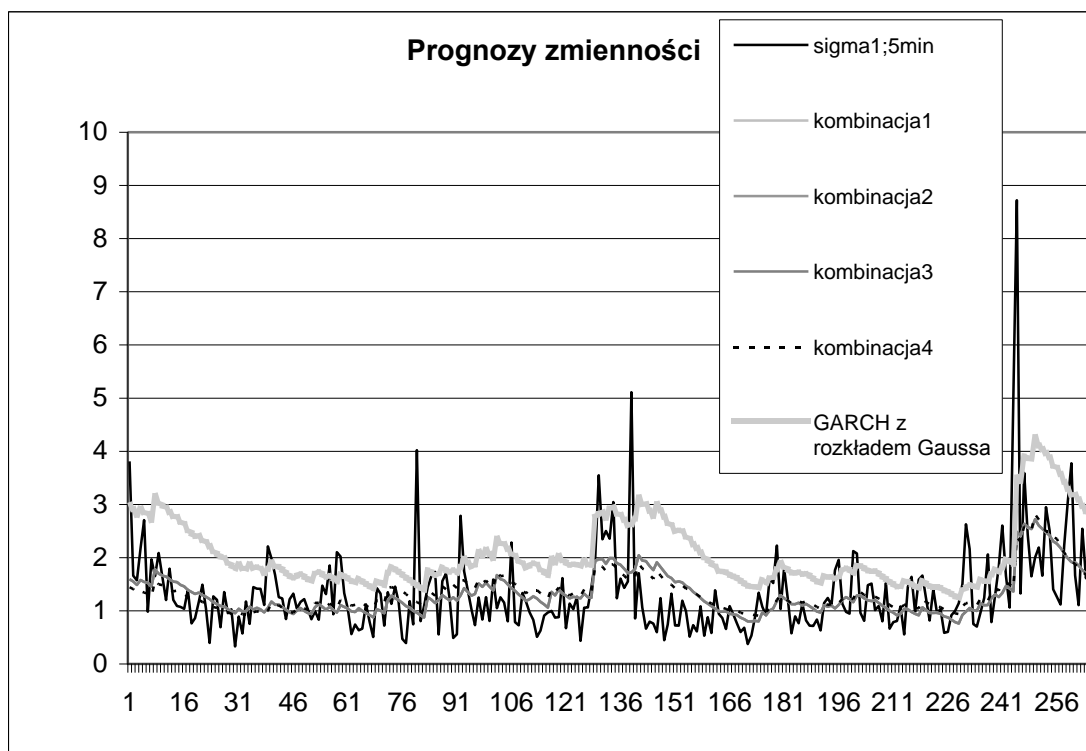
Tabela 8.5

Estymacje p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, częstotliwości 5 min
 częstotliwości i MSE

The MCS	p -value
Kombinacja 1: $\exp(-1,073 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_3))$.	0.6064
Kombinacja 2: $\exp(-1,078 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,542 \cdot \ln(\hat{y}_2))$	0.6064
Kombinacja 3: $\exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_4))$.	1
Kombinacja 4: $\exp(9,6387 \cdot \ln(\hat{y}_{11}) - 9,1916 \cdot \ln(\hat{y}_{12}))$.	0.6064



Rysunek 8.1 Kombinacje prognoz z tabeli 12.5 zestawione ze zmiennością zrealizowaną $\sigma_{1,t}^2$, dla częstotliwości 5 min



Rysunek 8.2. Kombinacje prognoz z tabeli 12.5 zestawione ze zmiennością zrealizowaną $\sigma_{1,t}^2$ i z prognozami modelu GARCH z rozkładem Gaussa, dla częstotliwości 5 min

Z powyższego rysunku wynika, że pojedynczy model GARCH daje znacznie gorsze prognozy niż kombinacje nieliniowe modeli typu GARCH, ze zbioru MCS jednakże pokazuje tak samo dobrze trendy wzrostowe i spadkowe

Tabela 8.6,

Estymacje p -wartości dla MCS zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 5 min i MSE

The MCS	p -wartość
$\exp((1/2) \cdot \ln(\hat{y}_1) + (1/2) \cdot \ln(\hat{y}_4))$	0.7141
$\exp(0,256 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 0,66 \cdot \ln(\hat{y}_4))$	0.7141
$\exp(0,49097 \cdot \ln(\hat{y}_{13}) + 0,50022 \cdot \ln(\hat{y}_{14}))$	1

Tabela 8.7.

Estymacje p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{3,t}^2$, częstotliwości 5 min i MSE

The MCS	p -wartość
$\exp(1,086 \cdot \ln(\hat{y}_1) - 1,55 \cdot \ln(\hat{y}_4))$	1
$\exp(-1,069 \cdot \ln(\hat{y}_1) + 1,538 \cdot \ln(\hat{y}_2))$	0.0758
$\exp(1,54 \cdot \ln(\hat{y}_3) - 1,07 \cdot \ln(\hat{y}_1))$	0.0758

$\exp(9,68230 \cdot \ln(\hat{y}_{11}) - 9,2306 \cdot \ln(\hat{y}_{12}))$	0.0758
--	--------

Można zauważyć, że zbiory dla $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$ są podobne, ale bardzo różnią się dla $\sigma_{2,t}^2$. Wyniki dla różnych częstotliwości są prawie takie same. Innym spostrzeżeniem jest, że nieliniowe kombinacje prognoz przewyższają prognozy z pojedynczego modelu i z optymalnej kombinacji liniowej dla wszystkich miar zmienności zrealizowanej, $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$. Nieliniowa funkcja prognoz z optymalnymi współczynnikami postaci $\exp(\beta_1 \cdot \ln(\hat{y}_A) + \beta_2 \cdot \ln(\hat{y}_B))$ może być wykorzystana z sukcesem do wygenerowania lepszych prognoz.

Porównaliśmy prognozy zmienności ze zbioru modeli ARMA-GARCH przy pomocy metody MCS. Po pierwsze stworzyliśmy zbiór najlepszych modeli GARCH dla indeksu WIG20 i porównaliśmy ich prognozy z optymalnymi liniowymi i nieliniowymi kombinacjami dwóch prognoz. Analiza została przeprowadzona dla opisanych typów kombinacji dwóch prognoz. Wyciągnęliśmy wniosek, że nieliniowe kombinacje dwóch prognoz przewyższają optymalne liniowe kombinacje dwóch prognoz i przedstawiliśmy optymalne wagi nieliniowych kombinacji otrzymane metodą Gaussa-Newtona. Następnie utworzyliśmy zbiór modeli ARMA-GARCH dla różnych specyfikacji ARMA i wybraliśmy najlepsze modele prognostyczne za pomocą metody MCS. Dla najlepszych modeli ze zbioru utworzyliśmy liniowe i nieliniowe kombinacje dwóch prognoz. Na końcu porównaliśmy prognozy modeli ARMA-GARCH z optymalnymi kombinacjami dwóch prognoz. W zaprezentowanych tabelach zbiory $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$ są podobne, ale różnią się dla $\sigma_{2,t}^2$. Wyniki prawie nie różnią się dla różnych częstotliwości. Co więcej nieliniowe kombinacje dwóch prognoz przewyższają prognozy z pojedynczego modelu i z optymalnej kombinacji liniowej dla wszystkich miar zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$. Dla $\sigma_{2,t}^2$, liniowa kombinacja bez stałej przewyższa optymalną kombinację ze stałą. Nieliniowa funkcja prognoz z optymalnymi współczynnikami postaci $\exp(\beta_1 \cdot \ln(\hat{y}_A) + \beta_2 \cdot \ln(\hat{y}_B))$ może być z sukcesem wykorzystana do wygenerowania lepszych prognoz. Przy założeniu stałej dynamiki rynku uzyskane współczynniki mogą traktowane jako właściwe dla kombinacji nieliniowych Pattona i Sheparda prognoz zmienności dla indeksu WIG20,

Utworzyliśmy również kombinacje nieliniowe Pattona i Shepparda modeli prognozy zmienności kursów walutowych. Zauważyliśmy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się do dobrze do szeregów prognoz zmienności kursów walutowych

8.5. Porównanie kombinacji nieliniowych Donaldsona i Kamstry oraz Pattona i Shepparda

Sprawdzimy, czy uproszczona nieliniowa kombinacja Donaldsona i Kamstry, zaproponowana w pracy z 1996 roku przewyższa nieliniową kombinację Pattona i Shepparda z pracy z roku 2007. Badanie zostało przeprowadzone dla 1739 dziennych obserwacji indeksu WIG20 od **12.10.2000** do **14.09.2007**. Zauważamy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się lepiej do szeregu zmienności.

8.5.1. Wyniki badania

Dla funkcji Pattona i Shepparda następującej postaci:

$$\exp(9,6387 \cdot \ln(G) - 9,1916 \ln(H)),$$

gdzie

G: GARCH z rozkładem Gaussa

H: ARMA(2,2)-GARCH z rozkładem Gaussa

Dla szeregu zmienności zrealizowanej y ($\sigma_{1,t}^2$) i częstotliwości 5 min uzyskaliśmy dla indeksu WIG20 następujące wyniki metodą Gaussa-Newtona

$$\sum_i |r_i| = \sum_i (y_i - \exp(9,6387 \ln(G_i) - 9,1916 \ln(H_i))) = 130,84$$

$$\mathbf{MAD=0.4918}$$

$$\sum_i r_i^2 = \sum_i (y_i - \exp(9,6387 \cdot \ln(G_i) - 9,1916 \ln(H_i)))^2 = 155,718$$

$$\mathbf{MSE=0.5854}$$

Dla funkcji Donaldsona i Kamstry z optymalnymi współczynnikami, wyznaczonymi metodą Gaussa-Newtona, dla tego samego szeregu danych postaci:

$$(1 + \exp((10791,061) \cdot (J_i) - (11133,03) \cdot (K_i)))^{-1},$$

gdzie

J: szereg wystandaryzowanych prognoz modelu GARCH z rozkładem Gaussa,

K: szereg wystandaryzowanych prognoz modelu ARMA(2,2)-GARCH z rozkładem Gaussa,

$$\frac{J_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}_y}, \frac{K_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}_y},$$

$\bar{y}, \hat{\sigma}_y$ - to średnia i odchylenie standardowe, wyznaczone dla szeregu zmienności zrealizowanej. Dla drugiej funkcji prognoz uzyskaliśmy:

$$\sum_i |r_{i,2}| = \sum_i (y_i - (1 + \exp((10791,061) \cdot (J_i) + (-11133,03) \cdot (K_i))))^{-1} = 106,81$$

$$\sum_i r_{i,2}^2 = \sum_i (y_i - (1 + \exp(1 + \exp((10791,061) \cdot (J_i) + (-11133,03) \cdot (K_i))))^{-1})^2 = 118,82.$$

$$\mathbf{MAD=0,47054}$$

$$\mathbf{MSE=0,52347}$$

Wnioskujemy, że. wyniki dla obu kombinacji różnią się nieznacznie. Funkcja Pattona i Szepparda dopasowała się podobnie do tego samego szeregu danych. Wyznaczenie współczynników metodą Gaussa-Newtona jest jednak szybsze dla funkcji Pattona i Szepparda. Dodatkowo postać pochodnej i funkcji jest prostsza.

Dla szeregu zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, dla częstotliwości 30 minutowej:

Dla funkcji Pattona i Szepparda

$$\sum_i r_i^2 = \sum_i (y_i - \exp(2,024 \cdot \ln(L_i) - 1,1157 \ln(M_i)))^2 = 450,138,$$

gdzie

L: GARCH z rozkładem Gaussa

M: EGARCH z rozkładem Gaussa

Dla funkcji Donaldsona i Kamstry z optymalnymi współczynnikami, wyznaczonymi metodą Gaussa-Newtona, dla tego samego szeregu danych, gdzie

N: szereg wystandaryzowanych prognoz modelu GARCH z rozkładem Gaussa,

O: szereg wystandaryzowanych prognoz modelu EGARCH z rozkładem Gaussa,

$$\sum_i r_{i,2}^2 = \sum_i (y_i - (1 + \exp(1 + \exp((10791,061) \cdot (N_i) + (-11133,03) \cdot (O_i))))^{-1})^2 = 758,3$$

Zatem funkcja Pattona i Szepparda wypadła lepiej.

Dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i częstotliwości 10 minut

$$\sum_i |r_{i,2}| = \sum_i \left(y_i - (1 + \exp((723,336) \cdot (J_i) + (-912,298) \cdot (K_i))) \right)^{-1} = 96$$

$$\sum_i r_{i,2}^2 = \sum_i \left(y_i - (1 + \exp(1 + \exp((723,336) \cdot (J_i) + (-912,298) \cdot (K_i)))) \right)^{-1} = 97,9.$$

$$\sum_i |r_i| = \sum_i (y_i - \exp(1,1 \cdot \ln(G_i) - 0,7095 \cdot \ln(H_i))) = 93,47$$

$$\sum_i r_i^2 = \sum_i (y_i - \exp(1,1 \cdot \ln(G_i) - 0,7095 \cdot \ln(H_i)))^2 = 79,32$$

$$\text{Zatem } \sum_i r_{i,2}^2 > \sum_i r_i^2, \text{ i } \sum_i |r_{i,2}| > \sum_i |r_i|$$

Wnioskujemy, że w obliczone błędy są porównywalne. Zatem obie funkcje można wykorzystać do tworzenia kombinacji prognoz zmienności indeksu WIG20. Łatwiej jednak jest stosować funkcję Pattona i Shepparda ze względu na prostszą postać pochodnej.

8.6. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono zagadnienie kombinacji prognoz. Na początku omówiono liniowe kombinacje prognoz, na przykład kombinację na bazie rankingu prognoz. Przedstawiono problem optymalnych wag jako zagadnienie optymalizacyjne minimalizacji oczekiwanej wariancji błędu. Podano optymalne kombinacje dwóch prognoz dla prognoz obciążonych i nieobciążonych oraz warunek na to, by identyczne wagi były optymalne. Kolejny podrozdział dotyczy kombinacji nieliniowych prognoz.

Na koncu porównujemy najlepsze modele prognostyczne dla indeksu WIG20 oraz kursów walutowych typu GARCH z optymalnymi prognostycznymi modelami zmienności typu GARCH, dla różnej specyfikacji ARMA. Następnie zestawiamy uzyskane wyniki z prognozami optymalnych liniowych i nieliniowych kombinacji najlepszych modeli. Chcemy sprawdzić czy istnieje lepszy model prognostyczny dla WIG20 niż otrzymane wcześniej modele typu GARCH i jak wygląda optymalna kombinacja prognoz dla WIG20. Bierzymy pod uwagę różne rodzaje kombinacji prognoz. Przedstawiamy optymalne wagi kombinacji. Porównujemy również kombinacje prognoz modeli GARCH z równocześnie dopasowanymi modelami ARMA. Wyciągamy wniosek, że nieliniowa funkcja prognoz z optymalnymi współczynnikami postaci $\exp(\beta_1 \ln(\hat{y}_A) + \beta_2 \ln(\hat{y}_B))$ daje bardzo dobre prognozy zmienności kursów walutowych i indeksu WIG20. Dodatkowo porównujemy kombinację Pattona i Shepparda z uproszczoną kombinacją Donaldsona i Kastry. Wnioskujemy, że funkcje te dają porównywalne błędy prognoz. Postać pochodnej jest jednak prostsza dla funkcji Pattona i Shepparda

9. Wybór najlepszych modeli prognostycznych dla kursów walutowych i dla spółek akcyjnych spośród modeli typu ARMA-GARCH metodą MCS

W pracy Doman i Doman (2009) pokazano, że przypadku kursów walutowych prognozy zmienności są przeważnie nieoszacowane. Ponadto autorzy ci zauważyli, że błędy *MSE*, *MedSE*, *ME* oraz *MAE* są niższe niż dla indeksu WIG20. Jest to spowodowane przede wszystkim niższym poziomem zmienności kursów.

Przez pojęcie kursu walutowego rozumie się cenę jednej waluty wyrażoną w drugiej walucie. Może to być cena płacona w walucie krajowej za jednostkę waluty obcej lub cena jednostki waluty krajowej wyrażona w jednostce waluty obcej. Kurs waluty, będący ceną pieniądza zagranicznego spełnia funkcję informacyjną i cenotwórczą. Występując w funkcji informacyjnej kurs walutowy informuje osoby fizyczne i prawne w danym kraju o cenie walut obcych. Cenotwórcza funkcja kursu polega na przenoszeniu przez kurs walutowy zagranicznego układu cen i zagranicznych relacji cen na krajowe.

Cenotwórcza funkcja kursu walutowego występuje w gospodarce rynkowej przy istnieniu wymiennalności walut. Kurs walutowy wpływa pośrednio na ceny towarów na rynku wewnętrznym. Kurs walutowy jest istotnym elementem polityki gospodarczej. Jest również ważnym czynnikiem decyzyjnym i jednym z najważniejszych instrumentów pośredniego zarządzania handlem zagranicznym. Nie jest jedynie formalnym instrumentem rachunkowym, ponieważ wpływa na koszty i dochody przedsiębiorstw biorących udział w wymianie międzynarodowej zarówno po stronie importu jak i eksportu. Na poziom kursu walutowego wpływa szereg czynników ekonomicznych, politycznych i psychologicznych.. Najważniejszymi czynnikami ekonomicznymi są podaż walut obcych na krajowym rynku walutowym i popyt na nie, stan bilansu handlowego i płatniczego, różnice stóp procentowych i stóp inflacji danym krajem a innymi krajami, poziom cen w kraju i za granicą, przepływy kapitałów, polityka walutowa pieniężno-kredytowa oraz koniunktura i stan gospodarki w kraju, a także w krajach, z którymi utrzymuje on stosunki ekonomiczne i finansowe. Najbardziej istotnymi skutkami zmian kursów walut jest ich wpływ na bilans handlowy i płatniczy, inflację oraz obroty kapitału.

Najpierw zbadamy zmienność kursu euro do złotego. Strefa euro zaczęła funkcjonować od stycznia 1999 roku. Charakterystyczną cechą jest istnienie jednolitego rynku wewnątrz krajów członkowskich UE, wspólnej waluty, wspólnej polityki handlowej wobec krajów trzecich, wspólnego banku centralnego oraz swobodnego przepływu towarów, usług, siły roboczej i kapitałów. W tej strefie funkcjonuje również jednolity obszar gospodarczy i walutowy. Wspólna waluta krajów członkowskich jest także wykorzystywana w Polsce w charakterze waluty rezerwowej, transakcyjnej i lokacyjnej. Dała ona uczestnikom różnych rynków większe możliwości wyboru walut do przeprowadzania operacji depozytowych, kredytowych i lokacyjnych oraz operacji pośredniczących, dokonywanych przez banki komercyjne w skali narodowej, regionalnej i międzynarodowej. Należy zaznaczyć, że posługiwanie się przez uczestników życia gospodarczego euro jako walutą transakcyjną i lokacyjną ogranicza ryzyko kursowe i stwarza tym uczestnikom bardziej stabilne niż dotąd warunki gospodarowania.

Następnie zbadamy zmienność kursu walutowego franka szwajcarskiego. Frank szwajcarski jest najczęściej wybieraną walutą przez osoby chcące zaciągnąć długoterminowy kredyt na wysoką kwotę. Kredyt ten obecnie jest dwukrotnie tańszy niż kredyt

złotówkowy. W porównaniu z kredytem we frankach droższe są kredyty dolarowe i w euro. Dla szwajcarskiej waluty najwyższa jest też zwykle zdolność kredytowa.

Na końcu zajmiemy się zmiennością kursu walutowego funta brytyjskiego do złotego. Kurs ten jest ważny ze względu na dużą w ostatnich latach emigrację Polaków do Angli.

W badaniu porównaliśmy ze sobą 446 modeli typu GARCH(1,1), AR(1)-GARCH(1,1), MA(1)-GARCH(1,1), ARMA(1,1)-GARCH, ARMA(1,2)-GARCH(1,1), ARMA(2,1)-GARCH(1,1), ARMA(2,2)-GARCH(1,1) z rozkładami Gaussa, t Studenta, Skośnym rozkładem Studenta i GED. Uwzględniliśmy następujące modele typu GARCH: RiskMetrics, GARCH, GJR, EGARCH, APARCH, FIGARCH, FIAPARCH, HYGARCH z rozkładami Gaussa, GED, t -Studenta, rozkładem skośnym t Studenta. Badanie wykonano dla częstotliwości 10- minutowej. Odrzuciliśmy modele, dla których nie było zbieżności modelu. Odrzuciliśmy również modele z nieistotnymi parametrami. Modele estymowaliśmy w programie TSM Davidsona.

9.1. Badanie dla kursu euro do złotego

9.1.1. Wyniki badania

Wynik dla szeregu zwrotów od **14.11.2001** do **14.09.2007**, dla zmienności $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{2,t}^2$, dla częstotliwości 10 min i 30 min. Na ostatnie 260 dni wyznaczyliśmy prognozy.

Wyniki testu stacjonarności KPPS dla szeregu zwrotów EUR/PLN są następujące. Wartość statystyki testowej wynosi 0,439699, a oszacowanie p -wartości to (< 0.1) Hipoteza o stacjonarności nie została odrzucona

Modele, dla których nie było istotnych korelacji w kwadratach reszt standaryzowanych, dla podanych w opisie tabel parametrów znajdują się w poniższych tabelach.

Tabela 9.1.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ 30 min i 10 min częstotliwości

EUR/PLN				
MCS	<i>MSE</i> dla 30 min	<i>p</i> -wartość dla 30 min	<i>MAD</i> dla 10 min	<i>p</i> -wartość dla 10 min
RiskMetrics z rozkładem GED	0,01647	0,9942	0,080515	1
MA(1)- RiskMetrics z rozkładem GED	0,016469	1	0,080853	0,0844

Dla **RiskMetrics z rozkładem GED** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ν 1,5176 (0,0886)
 ω 0.00314 (0.0009)

Natomiast dla **MA(1)- RiskMetrics z rozkładem GED** uzyskaliśmy:

ν 1,4454 (0,091)
 b_1 1 0.1218 (0,0306)
 ω 0.0032 (0.0009)

Dla *MAD* oraz $\sigma_{1,t}^2$ w zbiorze MCS znalazł się jeden model **RiskMetrics z rozkładem GED** z *MAD*=0,089152

Dla *MSE* oraz $\sigma_{1,t}^2$ do zbioru MCS został wybrany model **MA(1)- RiskMetrics z rozkładem GED** z *MSE*=0, 016808

Tabela 9.2.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ 30 i 10 min częstotliwości i *MSE*

EUR/PLN				
MCS	<i>MSE</i> dla 30min	<i>p</i> -wartość dla 30 min	<i>MSE</i> dla 10 min	<i>p</i> -wartość dla 10min
AR(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	0,038633	1	0.041998	0.5445
AR(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	0,038635	0,8947	0.042011	0.1864
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	0,038634	0,9394	0.041989	1
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	0,038635	0,2446	0.042001	0.5445

Tabela 9.3.

Oszacowania *p*-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ 30 min częstotliwości i *MAD*

EUR/PLN		
MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartość
RiskMetrics z rozkładem GED	0,106687	1
MA(1)- RiskMetrics z rozkładem GED	0,107009	0,0912

AR(1) - RiskMetrics z rozkładem Studenta ma następujące parametry:

ν 6,69498 (1,3317)
 a_1 -0,10779 (0,02911)
 ω 0,00353 (0,02911)

natomiast **AR(1) - RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta**

ν 6,8078 (1,382)
 ξ 1,08518 (0,0448)
 a_1 -0,10847 (0,0283)
 ω 0,0035 (0,001)

MA(1) -RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta

ν 6,74195 (1,3697)

ξ 1,08633 (0,0449)

b_1 0,11129 (0,0292)

ω 0,00352 (0,001)

Tabela 9.4.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ 10 min częstotliwości i MAD

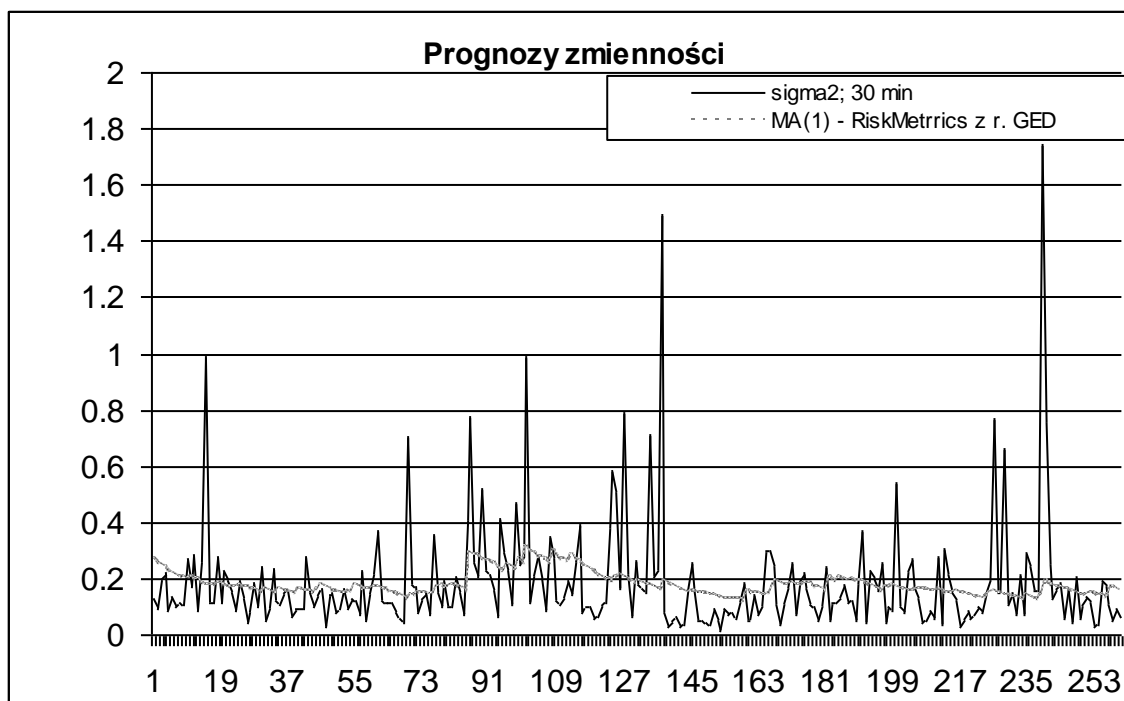
EUR/PLN		
MCS	MAD	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem GED	0.099475	1
AR(1)-RiskMetrics z rozkładem Gaussa	0.099696	0.1721
MA(1)- RiskMetrics z rozkładem GED	0.099627	0.4247

AR(1)-RiskMetrics z rozkładem Gaussa miał następujące parametry:

a_1 -0,09128

ω 0,00325 (0,0009)

Prognozy zmienności wymienionych w tabeli modeli zostały przedstawione na wykresie. Można zauważyć duże różnice między prognozami zmienności a zmiennością zrealizowaną.



Rysunek 9.1. Prognozy dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 30 min i funkcji błędu MSE

Wyniki dla szeregu zwrotów od **20.05.2003** do **09.04.2009**, dla 227 prognoz, dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{2,t}^2$ i częstotliwości 10 min i 30 min. Modele estymowaliśmy w programie TSM Davidsona.

Wyniki testu stacjonarności KPPS dla danego szeregu zwrotów EUR/PLN są następujące. Wartość statystyki testowej wynosi 0,233305 natomiast oszacowanie p -wartości to (<1). Hipoteza o stacjonarności nie została odrzucona

Modele, w zbiorach MCS, dla których nie było istotnych korelacji w kwadratach reszt standaryzowanych, dla podanych w opisie parametrów znajdują się w poniższych tabelach:

Tabela 9.5.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ 10 min częstotliwości, MSE i MAD

EUR/PLN				
MCS	MAD	p -wartość dla MAD	MSE	p -wartość dla MSE
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem Studenta	0,765276	1	2,148225	0,5056
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem GED	0,765652	0,2711	2,147304	1

Dla **MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem Studenta** otrzymaliśmy następujące parametry:

ν 6,75524 (1,1912)
 μ -0,03931 (0,01067)
 b_1 0,06229 (0,02679)
 ω 0 (0)

a dla **MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem GED** uzyskaliśmy:

ν 1,43337 (0,0868)
 μ -0,03692 (0)
 b_1 0,07094 (0,02685)
 ω 0 (0)

Tabela 9.6.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ 10 min częstotliwości, MSE i MAD

EUR/PLN				
MCS	MSE	p -wartość dla MSE	MAD	p -wartość dla MAD
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem Studenta	3,876610	0,2267	0,970036	1
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem GED	3,874454	1	0,970124	0,7971

To samo badanie wykonaliśmy dla częstotliwości 30 minutowej. Wyniki dla podanych parametrów zawierają poniższe tabele:

Tabela 9.7.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ 30 min częstotliwości i MSE

EUR/PLN		
MCS	MSE	p -wartość
MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem Studenta	2,944361	0,5491
MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem GED	2,943382	1

Zbiór MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ 30 min częstotliwości i MAD stanowi pojedynczy model **stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta** z MAD wynoszącym 0,872096 i p -wartością równą 1.

Tabela 9.8.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ 30 min częstotliwości, MSE i MAD

EUR/PLN				
MCS	MSE	p -wartości dla MSE	MAD	p -wartości dla MAD
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem Studenta	5,251772	0,2937	1,072853	1
MA(1) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem GED	5,249671	1	1,072928	0,8267

Rezultaty są zgodne z wnioskiem Doman i Doman 2003, że odpowiednim modelem dla szeregu zwrotów kursu EUR/PLN jest najprostszy z rozważanych modeli GARCH(1,1). (W pracy Doman i Doman szeregi zwrotów pochodzą z okresu od 02.01 2003 do 30.05.2003.)

9.2. Badanie dla kursu franka szwajcarskiego do złotego

9.2.1 Wyniki porównywania modeli

Wynik został uzyskany dla szeregu zwrotów z okresu od **15.09.1999** do **22.01.2007**, dla 97 prognoz, dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{2,t}^2$ i częstotliwości 10 min i 30 min. Odrzucono modele, dla których istniały istotne korelacje w kwadratach reszt standaryzowanych i w resztach standaryzowanych. **Wyniki testu stacjonarności KPPS** dla szeregu zwrotów CHF/PLN są następujące. Wartość statystyki testowej wynosi 0,0281982 a p -wartość (<1). Hipoteza zerowa o stacjonarności nie została odrzucona dla szeregu CHF/PLN.

Modele wyestymowano w programie TSM Davidsona. Otrzymane zbiory MCS dla podanych w opisie parametrów znajdują się poniżej:

W zbiorach MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 10 min i MSE znalazł się model **stała -RiskMetrics z rozkładem GED** z $MSE=0,01599$ i p -wartością równą 1.

Dla modelu **stała -RiskMetrics z rozkładem GED** otrzymaliśmy:

$$\mu -0,04127(0,01727)$$

$$\nu 1,30359(0,0847)$$

To samo badanie wykonaliśmy dla 30 minutowej częstotliwości notowań.

Tabela 9.9.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, 30 min, częstotliwości MSE i MAD

CHF/PLN				
MCS	MSE	p -wartość dla MSE	MAD	p -wartość dla MAD
stała -RiskMetrics z rozkładem GED	0,02435	1	0,119249	1

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 30 min, częstości i MAD są następujące. MCS składa się z jednego modelu **stała - RiskMetrics z rozkładem GED**. MAD dla tego modelu wynosi 0,138615, a p -wartość jest równa 1

Tabela 9.10.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 30 min, częstości MSE .

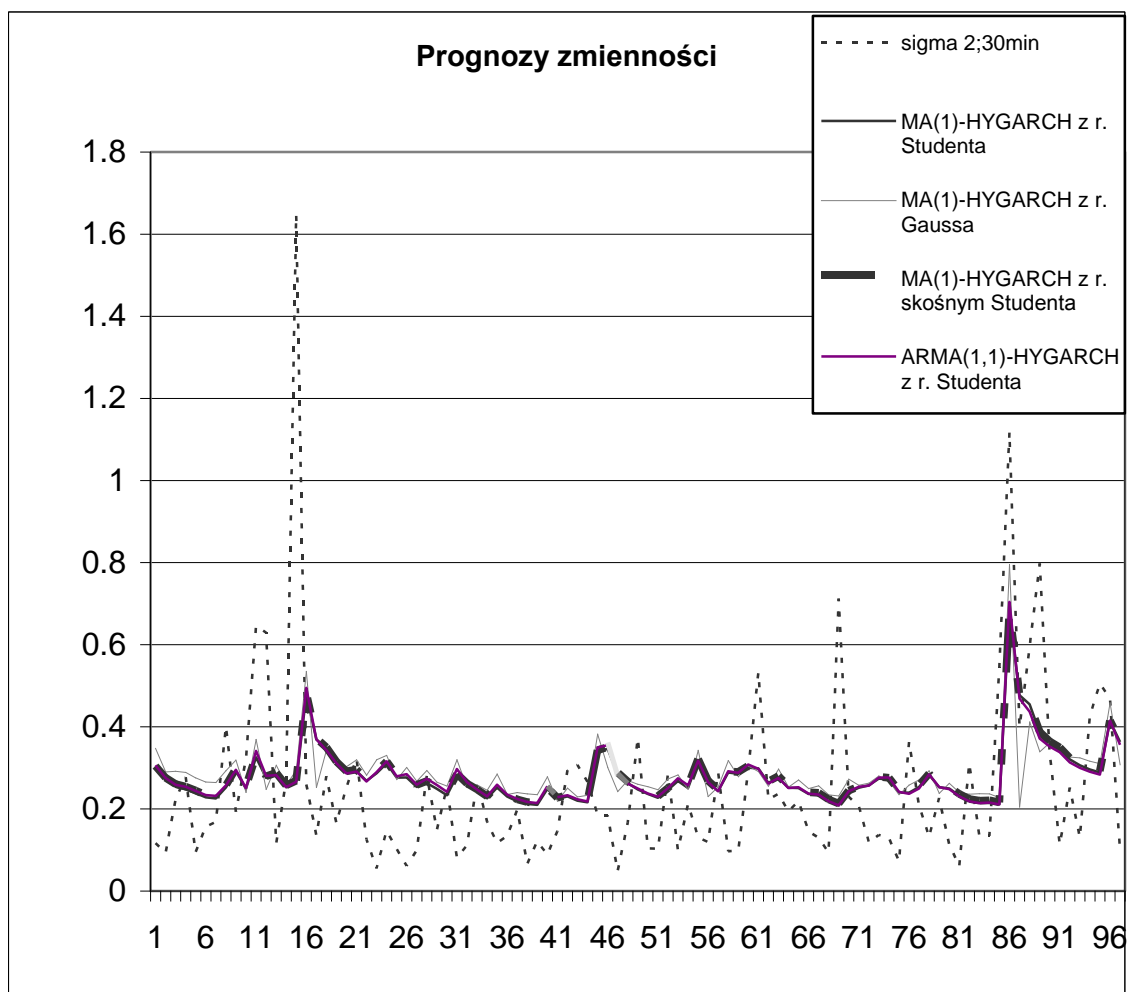
CHF/PLN		
MCS	MSE	p -wartość
MA(1)-HYGARCH z rozkładem Gaussa	0,045766	0,1988
MA(1)-HYGARCH z rozkładem Studenta	0,045200	1
MA(1)-HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	0,045544	0,1988
ARMA(1,1)-HYGARCH z rozkładem Studenta	0,045544	0,1356

Dla modelu **MA(1) - HYGARCH z rozkładem Gaussa** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

b_1 0,07833 (0,0248)
 d 0,70347 (0,0663)
 k 0,79166 (0,0534)
 α_1 -0,48438 (0,06872)
 β_1 0,6535 (0,04719)

Dla **MA(1)-HYGARCH z rozkładem Studenta** uzyskaliśmy natomiast:

ν 7,23063 (1,3017)
 ω 0,07526 (0,02701)
 d 0,6951 (0,0825)
 k 0,83441 (0,061)
 α_1 -0,48307 (0,09622)
 β_1 0,67094 (0,0764)



Rysunek 9.2. Prognozy dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 30 min i funkcji błędu MSE

Poza jednym przypadkiem, dla $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 30 min i MSE najlepszy okazał się model GARCH. Nie można określić najlepszego modelu typu ARMA-GARCH. Najlepsza specyfikacja ARMA w modelu prognostycznym zmienności jest różna dla różnych parametrów

Rezultaty dla okresu od **05. 01. 1993** do **08.05.2009**. Prognozy zostały wyznaczone na ostatnie 244 dni od 19.05 2008. Modele wyestymowano w programie TSM .
Wyniki testu stacjonarności KPPS są następujące. Dla szeregu zwrotów CHF/PLN statystyka testowa wynosi 0,584041 a p -wartość ($< 0,025$). Hipoteza zerowa o stacjonarności została odrzucona dla szeregu CHF/PLN. Prezentowane poniżej tabele zawierają otrzymane zbiory MCS dla podanych w opisie parametrów wejściowych.

Tabela 9.11.

Oszacowania p -wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, 10 min, częstotliwości MSE

CHF/PLN		
MCS	MSE	p-wartość
stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta	6,740291	0,2846
ARMA(1,2) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem Gaussa	6,707951	1

Dla **ARMA(1,2) ze stałą – RiskMetrics z rozkładem Gaussa** otrzymaliśmy parametry:

$$\mu -0.03445 (0,01204)$$

$$a_1 0.83657 (0,19498)$$

$$b_1 0.86327 (0,18944)$$

$$b_2 -0.00976 (0,02504)$$

Tabela 9.12.

Oszacowania p-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, 10 min, częstotliwości MAD.

CHF/PLN		
MCS	MAD	p-wartość
stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta	1,461212	1
stała - RiskMetrics z rozkładem GED	1,461217	0,9832

Dla modelu **stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

$$\nu 7,10887 (1,501)$$

$$\mu -0,0419 (0,01453)$$

a dla **stała- RiskMetrics z rozkładem GED** :

$$\nu 1,47485 (0,0908)$$

$$\mu -0,03938 (0,01573)$$

MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 10 min częstotliwości *MSE* stanowi pojedynczy model **ARMA(1,2) ze stałą- RiskMetrics z rozkładem Gaussa** z *MSE* równym 14,684396 i *p*-wartością 1.

Tabela 9.13.

Oszacowania p-wartości MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, 10 min, częstotliwości MAD

CHF/PLN		
MCS	MAD	p-wartość

stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta	1,893693	0,7523
ARMA(1,2) ze stałą RiskMetrics z rozkładem Gaussa	1,892275	1

Zauważamy, że dla kursu CHF/PLN rezultaty są zgodne z wynikami Doman i Doman dla prognoz z okresu od 02.01.2003 do 30.05.2003 Autorzy ci podają model GARCH(1,1) z rozkładem skośnym t-Studenta jako najlepszy model prognostyczny dla kursu CHF/PLN. Doman i Doman otrzymali model z następującymi parametrami: α_1 0,0817 (0,0303), β_1 0,8463 (0,0594).

9.3. Badanie dla kursu funta brytyjskiego do złotego

9.3.1 Wyniki porównywania modeli

Wynik został otrzymany dla szeregu zwrotów od **10.19.2001** do **9.14.2007**, dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{2,t}^2$, dla częstotliwości 10 min i 30 min i dla 249 prognoz. Modele wyestymowano w programie TSM. **Wyniki testu stacjonarności KPPS** w badanym okresie dla szeregu zwrotów GBP/PLN są następujące. Wartość statystyki testowej wynosi 0,157675 a p -wartość (< 1). Hipoteza o stacjonarności nie została odrzucona. Modele, dla których nie było istotnych korelacji w kwadratach reszt standaryzowanych i w resztach standaryzowanych znajdują się w poniższych tabelach:

Tabela 9.14.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 10 min i MSE

GBP/PLN		
MCS	MSE	p -wartość
AR (1)-GARCH z rozkładem Gaussa	2,073305	1
AR(1)-GARCH z rozkładem GED	2,102463	0,3828

MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, częstotliwości 10 min i MAD zawiera jeden model najlepszy **ARMA(0,0)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MAD równym 0,565425 i p -wartością równą 1

Modele wyznaczone dla $\sigma_{2,t}^2$, dla których nie było istotnych korelacji w kwadratach reszt standaryzowanych i w resztach standaryzowanych są wymienione poniżej:

Tabela 9.15.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 10 min i MSE

GBP/PLN		
The MCS	MSE	p -wartość
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	6,280557	1
AR(1)-GARCH z rozkładem skośnym t Studenta	6,380121	0,2591
AR(1)-GARCH z rozkładem GED	6,353572	0,3259

W zbiorze MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$, częstotliwości 10 min i MAD znalazł się jeden model najlepszy **GARCH z rozkładem Gaussa** z MAD wynoszącym 0,832621 i p -wartością równą 1.

To samo badanie dla szeregu zwrotów kursu walutowego GBP/PLN zostało wykonane dla częstotliwości notowań 30 minut.

MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, częstotliwości 30 min i MSE składa się z jednego modelu: Do zbioru MCS został wytypowany model **AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa** z MSE 1.576740 i p -wartością równą 1.

W zbiorze MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, częstotliwości 30 min i MAD znalazł się jeden model najlepszy **GARCH z rozkładem Gaussa** z MAD równym 0,577979 i p -wartością równą 1.

Tabela 9.16.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 30 min i MSE

GBP/PLN		
The MCS	MSE	p -wartość
AR(1)-GARCH z rozkładem Gaussa	4,578165	1
AR(1)-GARCH z rozkładem Studenta	4,629635	0,3703
AR(1)-GARCH z rozkładem GED	4,620095	0,3703

Dla **AR(1)- GARCH z rozkładem Studenta** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów

ν 8,56174 (2,1237)
 ω 0,05621 (0,0268)
 α_1 0,09164 (0,02424)
 β_1 0,86408 (0,04237)

Natomiast dla **AR(1)-GARCH z rozkładem GED** uzyskaliśmy parametry:

ν 1,46547 (0,1014)
 ω 0,05367 (0,0263)

α_1 0,09199 (0,02524)
 β_1 0,86613 (0,04306)

MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 30 min i *MAD* zawiera jeden model **GARCH z rozkładem Gaussa** z *MAD* równym 0,832394 i *p*-wartością równą 1

Zauważamy, że rezultat jest zgodny z wynikiem Doman i Doman (2004), że najlepszym modelem prognostycznym dla GBP/PLN jest prosty model GARCH

Badanie zostało wykonane dla funta brytyjskiego, w okresie od **07. 04 2003** do **09.04.2009**. Modele wyestymowano w programie TSM. **Wyniki testu stacjonarności KPSS** dla szeregu zwrotów GBP/PLN jest następujący. Wartość statystyki testowej KPSS wynosi 0,0378343 a *p*-wartość wynosi (<1). Hipoteza o stacjonarności nie została odrzucona.

Tabela 9.17.

Oszacowania *p*-wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 10 min i *MSE*

GBP/PLN		
MCS	<i>MSE</i>	<i>p</i> -wartość
FIGARCH z rozkładem Gaussa	63,274332	1
FIGARCH z rozkładem Studenta	64,834614	0,2512
FIGARCH z rozkładem skośnym Studenta	64,766572	0,6611
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	64,559363	0,6611
ARMA(1,1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	64,500183	0,6611
ARMA(1,1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	64,506658	0,6611
stała -RiskMetrics z rozkładem Studenta	64,617259	0,6611
MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem Studenta	64,540751	0,6611
MA(1) ze stałą - RiskMetrics z rozkładem GED	64,62043	0,2512

Model **FIGARCH z rozkładem Gaussa** miał następujące parametry:

ω 0,04943 (0,0365)
 d 0,37698 (0,1087)
 α_1 -0,32539 (0,10853)
 β_1 0,56208 (0,17132)

Tabela 9.18.

Oszacowania *p*-wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 10 min i *MAD*

GBP/PLN

MCS	MAD	p-wartość
HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,828993	0,097
stała - FIAPARCH z rozkładem GED	2,722936	1
stała - HYGARCH z rozkładem Studenta	2,827768	0,097

Model **FIAPARCH z rozkładem GED** oszacowaliśmy następująco:

ν 1.43945

ω 0

d 1,0112 (0,0642)

η 0,98219 (0,3394)

α_1 -0,93292 (0,07495)

β_1 0,95861 (0,01181)

Tabela 9.19.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 10 min i MSE

GBP/PLN		
MCS	MSE	p-wartość
FIGARCH z rozkładem Gaussa	196,821434	1
ARMA(1,1) -RiskMetrics z rozkładem Studenta	197,905796	0,4366

Tabela 9.20.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 10 min i MAD

GBP/PLN		
MCS	MAD	p-wartość
FIGARCH z rozkładem Gaussa	4,793329	0,9001
FIGARCH z rozkładem Studenta	4,799614	0,7755
FIGARCH z rozkładem skośnym Studenta	4,798772	0,9001
HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	4,840487	0,0910
stała - FIAPARCH z rozkładem GED	4,763654	1
stała - HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	4,838377	0,3914
MA(1) ze stałą -FIGARCH z rozkładem Gaussa	4,837726	0,3914

Tabela 9.21.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 30 min i MSE

GBP/PLN		
MCS	MSE	p-wartość
FIGARCH z rozkładem Gaussa	82,445991	1

MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	83,145042	0,4120
ARMA(1,1)- RiskMetrics z rozkładem Studenta	83,116863	0,6835
ARMA(1,1)- RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	83,1209	0,6835
stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta	83,207577	0,1524
stała -FIAPARCH z rozkładem GED	83,16034	0,792
MA(1) ze stałą- RiskMetrics z rozkładem Studenta	83,127324	0,5729
MA(1) ze stałą- RiskMetrics z rozkładem GED	83,204458	0,1224

Tabela 9.22.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 30 min i MAD

GBP/PLN		
MCS	MAD	p -wartość
HYGARCH z rozkładem GED	2,899210	0,1233
MA(1)-HYGARCH z rozkładem GED	2,899259	0,1231
stała -FIAPARCH z rozkładem GED	2,791056	1

Tabela 9.23.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 30 min i MSE

GBP/PLN		
MCS	MSE	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem Studenta	208,578851	0,0501
RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	208,587037	0,0501
FIGARCH z rozkładem Gaussa	207,958973	1
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	208,507683	0,0501
ARMA(1,1)- RiskMetrics z rozkładem Studenta	208,214421	0,8771
ARMA(1,1)- RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	208,235652	0,0534
stała - RiskMetrics z rozkładem Studenta	208,551174	0,0501
MA(1) ze stałą- RiskMetrics z rozkładem Studenta	208,479164	0,0501

Tabela 9.24.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 30 min i MAD

GBP/PLN		
The MCS	MAD	p -wartość
HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	4,720537	0,1248
stała - FIAPARCH z rozkładem GED	4,628790	1

stała - HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	4,719078	0,1248
MA(1) ze stałą-FIGARCH z rozkładem Gaussa	4,719080	0,1028

Można wyciągnąć wniosek, że model GARCH dla funta brytyjskiego nie ma przewagi nad innymi modelami. Nie zawsze modele GARCH dobrze prognozują zmienność zwrotów kursów walutowych. W tabelach pojawiły się wysokie błędy prognoz.

9. 4. Modele prognostyczne zmienności dla spółek akcyjnych na GPW

W badaniu uwzględniliśmy trzy spółki PKNORLEN, HANDLOWY oraz AGORA. Szeregi zwrotów pochodzą z okresu od **26.09.2001 do 14.09. 2007**. Modele estymowaliśmy w programie TSM. Dla spółki HANDLOWY wyznaczyliśmy prognozy na ostatnie 256 dni, a dla spółki PKNORLEN na ostatnie 265 dni natomiast dla spółki AGORA na ostatnie 260 dni Prognozy zmienności porównaliśmy z dzienną zmiennością zrealizowaną, obliczoną dla, 5-minutowych zwrotów śróddziennych. Zmienności zrealizowane zostały obliczane są ze wzorów 1.28 i 1.29. Wzięliśmy pod uwagę prognozy wszystkich modeli typu $ARMA(p,q)$ -GARCH(1,1). Nie uwzględniliśmy prognoz modeli, których parametry były nieistotne (gdy p -wartości dla wyestymowanych parametrów były większe od 0,05).

9.4.1. Wyniki badania

Wynik testu stacjonarności KPSS dla zwrotów spółki PKNPRLEN z okresu od 26.09.2001 do 14.09.2007 jest następujący . Wartość statystyki testowej KPSS wynosi 0,102594 a p -wartość wynosi (< 1). Zauważamy na podstawie wyniku testu KPSS, że wymieniony szereg zwrotów PKNORLEN jest stacjonarny. Wniosek ten jest zgodny z teorią, która mówi, że szeregi zwrotów są stacjonarne.

Tabela 9.25.
Wyniki testu Engla w badanym okresie

Dane	Wartość statystyki testu Engla
szereg zwrotów PKNORLEN	ChiKw (1)=3,0235 (0,082)
	ChiKw(5)=22,1215 (0)
	ChiKw(10)=27,1492 (0)

Zauważamy, że test Engla odrzucił warunkową homoskedastyczność dla dwóch opóźnień.. Zatem wnioskujemy, że podany szereg ma zmienną warunkową wariancję i można go prognozować za pomocą modeli GARCH.

Tabele zawierają te modele spośród modeli dobrze dopasowanych, które znalazły się w zbiorach MCS najlepszych modeli prognostycznych dla notowań PKNORLEN

Tabela 9.26.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 5 min i MAD

PKNORLEN		
$\sigma_{1,t}^2$	MAD	p -wartość
GARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,06745	1
MA(1)-GARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,06804	0,4243

Poniżej podano specyfikację modeli, które znalazły się w zbiorze MCS.

GARCH z rozkładem skośnym Studenta

ν 9,53734 (2,3227)
 ξ 1,03339 (0,04356)
 ω 0,11047 (0,0557)
 α_1 0,03603 (0,01312)
 β_1 0,93203 (0,0237)

MA(1)-GARCH z rozkładem skośnym Studenta

ν 9,43915 (2,3818)
 ξ 1,03286 (0,0453)
 b_1 0,00811 (0,03357)
 α_1 0,03571 (0,01329)
 β_1 0,93276 (0,02408)

Tabela 9.27.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 5 min i MSE

PKNORLEN		
$\sigma_{1,t}^2$	MSE	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem Gaussa	10,1301	0,2297
RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	10,1324	0,2259
RiskMetrics z rozkładem GED	10,1275	0,9554
MA(1)- RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	10,1269	1

Specyfikacja modeli, które znalazły się w zbiorze MCS jest następująca

RiskMetrics z rozkładem Gaussa:

ω 0,0241(0,0095)

RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta:

ν 7,9214 (1,7658)

ξ 1,045 (0,481)

ω 0,02431 (0,01)

RiskMetrics z rozkładem GED:

ν 1,4996 (0,0966)

MA(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta:

ν 7,82384 (1,8179)

ξ 1,04403 (0,0478)

b_1 0,009 (0,03165)

ω 0,0245 (0,01)

Tabela 9. 28.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5 min i MSE

PKNORLEN		
$\sigma_{2,t}^2$	MSE	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem t Studenta	41,0915	0,8855
stała - RiskMetrics z rozkładem t Studenta	41,0871	1

Dla modelu **RiskMetrics z rozkładem t Studenta** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ν 7,6464 (1,6474)

ω 0,02623 (0,0102)

a dla **stała - RiskMetrics z rozkładem t Studenta** uzyskaliśmy:

ν 7,8666 (1,738)

μ 0,1024 (0,0492)

ω 0,0258 (0,01)

Tabela 9.29.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5 min i MAD

PKNORLEN		
$\sigma_{2,t}^2$	MAD	p -wartość

RiskMetrics z rozkładem Gaussa	2,893534	0,7007
RiskMetrics z rozkładem t Studenta	2,8926	1
RiskMetrics z rozkładem skośnym t Studenta	2,8934	0,7007
RiskMetrics z rozkładem GED	2,8936	0,7842
APARCH z rozkładem Studenta	2,9254	0,4146
APARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,9262	0,2622
APARCH z rozkładem GED	2,926777	0,2622
EGARCH z rozkładem t Studenta	2,926473	0,4146
EGARCH z rozkładem skośnym t Studenta	2,924123	0,4146
stała -RiskMetrics z rozkładem Gaussa	2,899951	0,4146
stała - RiskMetrics z rozkładem t Studenta	2,898405	0,4146
stała - RiskMetrics z rozkładem skośnym t -Studenta	2,899899	0,4146
stała-APARCH z rozkładem t Studenta	2,925024	0,3461
stała - APARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,922447	0,3933
stała - EGARCH z rozkładem Studenta	2,927544	0,1318
stała -EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,922224	0,4146
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	2,892875	0,9276
ARMA(1,1) ze stałą -GARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,9267	0,1318
ARMA(1,1) ze stałą-EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,919542	0,4146
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem t Studenta	2,928253	0,2622
ARMA(1,1)-GARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,928549	0,1318
ARMA(1,1)-APARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,926580	0,3461
ARMA(1,1)-EGARCH z rozkładem t Studenta	2,926580	0,3461
ARMA(1,1)-EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	2,925129	0,3461

Tabela poniżej podaje wynik testu stacjonarności KPSS dla zwrotów spółki HAN-DLOWY z okresu **od 26.09.2001 do 14.09.2007**. Wartość statystyki testowej KPSS

wynosi 0,205179, a p -wartość wynosi (< 1). Zauważamy, że szereg zwrotów HANDLOWY jest stacjonarny. Wniosek ten jest zgodny z teorią, która mówi, że szeregi zwrotów są stacjonarne.

Tabela 9.30.

Wyniki testu Engla w badanym okresie

Dane	Wartość statystyki testu Engla
szereg zwrotów HANDLOWY	ChiKw (1)=59,7933 (0)
	ChiKw(5)=90,866 (0)
	ChiKw(10)=(0)

Zauważamy, że test Engla odrzucił warunkową homoskedastyczność dla wszystkich trzech wartości opóźnienia p . Zatem wnioskujemy, że podany szereg ma zmienną warunkową wariancję i można go prognozować za pomocą modeli GARCH.

Poniższe tabele zawierają otrzymane zbiory MCS najlepszych modeli prognostycznych zmienności zwrotów spółki HANDLOWY dla podanych w opisie tabel parametrów:

Tabela 9.31.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 5 min MAD i MSE

HANDLOWY				
MCS dla $\sigma_{1,t}^2$	MAD	p-wartość dla MAD	MSE	p-wartość dla MSE
ARMA(2,1)-GARCH Rozkładem t Studenta	5,548859	0,5284	90,728521	1
ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	5,452556	1	90,798987	0,9838

Tabela 9.32.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5 min i MAD i MSE

HANDLOWY				
MCS dla $\sigma_{2,t}^2$	MAD	p-wartość dla MAD	MSE	p-wartość dla MSE
ARMA(2,1)-GARCH z rozkładem t Studenta	6,3541	0,4937	116,7442	0,8392
ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	6,2432	1	115,9441	1

Model **ARMA(2,1)-GARCH z rozkładem Studenta** ma następujące parametry:

ν 4,2879 (0,6038)

a_1 -0,48071(0,21587)

a_2 0

b_1 -0,45519 (0,21513)

ω 0,21829 (0,0894)

$$\alpha_1 0,26439 (0,0719)$$

$$\beta_1 0,64554(0,08829)$$

Natomiast model **ARMA(2,2)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta** został oszacowany następująco:

$$v 3,55669 (0,3977)$$

$$\xi 1,01601 (0,0224)$$

$$a_1 -0,4489 (0,0211)$$

$$a_2 0,3163 (0,1429)$$

$$b_1 -0,44713 (0,02488)$$

$$b_2 0,30902 (0,15742)$$

$$\omega 0,02331(0,0095)$$

Zauważamy, że modelem najlepszym w wielu przypadkach okazał się model RiskMetrics.

Wyniki testu stacjonarności KPSS w okresie od 26.09.2001 do 14.09.2007 dla szeregu zwrotów spółki AGORA jest następujący. Wartość statystyki testowej KPSS wynosi 0,0738904, a p -wartość wynosi (< 1).. Zauważamy, że szereg zwrotów AGORA jest stacjonarny. Wniosek ten jest zgodny z teorią, która mówi, że szeregi zwrotów są stacjonarne.

Tabela 9.33.
Wyniki testu Engla w badanym okresie

Dane	Wartość statystyki testu Engla
szereg zwrotów AGORA	ChiKw (1)=21,9035 (0)
	ChiKw(5)=48,4695 (0)
	ChiKw(10)=62,1441 (0)

Zauważamy, że test Engla odrzucił warunkową homoskedastyczność dla wszystkich trzech wartości opóźnienia p . Zatem wnioskujemy, że podany szereg ma zmienną warunkową wariancję i można go prognozować za pomocą modeli GARCH.

Poniższe tabele zawierają otrzymane zbiory MCS najlepszych modeli prognostycznych zmienności zwrotów spółki AGORA w danym okresie dla podanych w opisie tabel parametrów.

Tabela 9.34.
Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 5 min i MAD

AGORA		
$\sigma_{1,t}^2$	MAD	p -wartość

GARCH z rozkładem Studenta	3,606251	0,4686
APARCH z rozkładem Gaussa	3,613238	0,4686
APARCH z rozkładem skośnym Studenta	3,606407	0,4686
EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	3,605050	0,4686
ARMA(1,1)-EGARCH z rozkładem Studenta	3,595290	0,4686
ARMA(2,1)-EGARCH z rozkładem Studenta	3,595056	0,8727
ARMA(2,2)-EGARCH z rozkładem Studenta	3,595798	0,8727
ARMA(2,2)-EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	3,598258	0,4686
stała -APARCH z rozkładem Gaussa	3,613264	0,4686
ARMA(1,1) ze stałą -EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	3,593918	1

Tabela 9.35.

Oszacowania wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$ częstotliwości 5 min i MSE

AGORA		
$\sigma_{1,t}^2$	MSE	Wartość
RiskMetrics z rozkładem t Studenta	26,938721	0,0966
RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	26,89871	1
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem t Studenta	27,052334	0,0966
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	27,0144649	0,0966

Tabela 9.36.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5 min i błędu MAD

AGORA		
$\sigma_{1,t}^2$	MAD	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem Gaussa	14,821821	0,0608
RiskMetrics z rozkładem Studenta	14,786704	0,1068
RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	14,783129	1
RiskMetrics z rozkładem GED	14,813173	0,0608
GARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,94964	0,0608
APARCH z rozkładem Gaussa	14,949462	0,0608
APARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,949618	0,0608
EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,961179	0,0608

MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Gaussa	14,826203	0,0608
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem Studenta	14,792935	0,1068
MA(1)-RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	14,789390	0,1068
ARMA(1,1)-APARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,992020	0,0608
AR (2)-GARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,989849	0,0608
stała - RiskMetrics z rozkładem Gaussa	14,822457	0,0608
MA(1) ze stałą -RiskMetrics z rozkładem Gaussa	14,826443	0,0608
ARMA(1,1) ze stałą -EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	14,958747	0,0608

Tabela 9.37.

Oszacowania p -wartości dla MCS dla zmienności zrealizowanej $\sigma_{2,t}^2$ częstotliwości 5 min i błędu MSE

AGORA		
$\sigma_{2,t}^2$	MSE	p -wartość
RiskMetrics z rozkładem t Studenta	26552,1	0,287
RiskMetrics z rozkładem skośnym Studenta	26551,44	1
MA(1) -RiskMetrics z rozkładem Studenta	26553,78	0,2870

Zauważamy, że modele GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność zwrotów spółek na GPW, gdyż pojawiły się duże błędy średniokwadratowe prognoz, pomimo że wykryta została warunkowa heteroskedastyczność szeregów za pomocą testu Engla. Okazało się, że zbiory MCS dla $\sigma_{2,t}^2$ były większe niż dla $\sigma_{1,t}^2$ i zmienności te wyznaczały rozłączne zbiory modeli najlepszych. Modelem prognostycznym dla AGORA, który pojawił się w zbiorze ufności wielokrotnie był model RiskMetrics.

9.5. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale omówiliśmy pojęcie kursu walutowego oraz jego funkcje. Wymieniliśmy czynniki, które wpływają na poziom kursu walutowego oraz skutki zmian kursów. Opisaliśmy kurs złotego w okresie przemian. Omówiliśmy korzyści wynikające ze wspólnej waluty euro i znaczenie franka szwajcarskiego oraz funta brytyjskiego dla Polaków obecnie. Otrzymaliśmy, że odpowiednim modelem prognostycznym zmienności dla szeregu zwrotów kursu EURPLN jest GARCH(1,1) a dla CHFPLN

model RiskMetrics z r Gaussa i r Studenta. Dla funta brytyjskiego w pierwszym badanym okresie najlepszy okazał się model GARCH natomiast w drugim okresie model GARCH nie ma przewagi nad innymi modelami. Na końcu badaliśmy zmienność zwrotów trzech spółek notowanych na GPW. Zauważamy, że modele GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność tych szeregów, gdyż pojawiły się duże błędy średniokwadratowe prognoz. Modelami otrzymanymi jako najlepsze były dla badanych spółek również modele RiskMetrics i GARCH

10. Modelowanie i prognozowanie zmienności implikowanej indeksu WIG20

W pracy Płuciennik, Buszkowska (2006) obliczyliśmy dzienną zmienność implikowaną z opcji na indeks WIG20. Najpierw przetestowaliśmy własność długiej pamięci w szeregu czasowym otrzymanym w ten sposób, a następnie modelowaliśmy i prognozowaliśmy go jako proces ARFIMA-GARCH. Specjalnym przypadkiem zmienności jest zmienność implikowana, pewien typ zmienności otrzymywany z wartości opcji. Opcje na polski rynek zostały wprowadzone 22 września, 2003 zatem można skonstruować długi szereg czasowy zmienności implikowanej. Próbowaliśmy modelować i prognozować zmienność implikowaną przy pomocy parametrycznych modeli zmienności. Dowiedliśmy, że szereg zmienności implikowanej ma własność długiej pamięci. To oznacza, że korelogram zmienności implikowanej maleje w tempie hiperbolicznym

wraz ze wzrostem wielkości opóźnienia. Proces ten może być modelowany za pomocą modelu ARFIMA(p,d,q), w szczególności dla $d \in (0,0.5)$.

W pracy zaprezentujemy metodę obliczania zmienności implikowanej w oparciu o metodę Blacka-Scholesa (1973) na opcje kupna i sprzedaży. Przez zmienność implikowaną rozumiemy zmienność obliczoną z ceny rynkowej instrumentu pochodnego na dany instrument bazowy w oparciu o pewien teoretyczny model cen. W naszym przypadku wykorzystaliśmy jako derywatywy opcje kupna i sprzedaży. Zmienność implikowana ma zazwyczaj większą wartość niż zmienność zrealizowana.

W modelu Blacka-Scholesa (1973) cena europejskiej opcji call na akcję bez dywidendy jest dana wzorem:

$$C_0^E = SN(d_1(S, T)) - K \exp(-rt)N(d_2(S, T)), \quad (10.1)$$

a cena europejskiej opcji put na akcją bez dywidendy jest dana wzorem

$$P_0^E = SN(d_1(S, T)) - K \exp(-rT)N(d_2(S, T)),$$

gdzie

$$d_1(S, T) = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2(S, T) = d_1(S, T) - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

S jest aktualną ceną akcji, K to cena oferowana, czyli cena, po której właściciel opcji może kupić lub sprzedać instrument bazowy. r jest oprocentowaniem przy zerowym ryzyku. T to czas opcji. N jest łączną dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego. Natomiast σ^2 jest współczynnikiem zmienności ceny akcji. Ponieważ bezpośrednio wyznaczenie implikowanej zmienności ze wzoru 10.1 jest niemożliwe w pracy Płuciennik, Buszkowska (2006), zmienność implikowaną wyznaczyliśmy numerycznie za pomocą algorytmu Newtona-Raphsona zaproponowanego przez Manstera i Koehlera (1982). Algorytm jest następujący:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}.$$

W naszym przypadku dla europejskich opcji call mamy:

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} - \frac{SN(d_1(S, T)) - K \exp(-rT)N(d_2(s, T))}{V_c},$$

gdzie V_c jest współczynnikiem wrażliwości i równa się:

$$V_c = \frac{\partial C_0^E}{\partial \sigma} = S_n(d_1(S, T))\sqrt{T}.$$

Monaster S. oraz Koehler G. zaproponowali optymalny punkt startowy dla algorytmu:

$$\sigma = \left[\ln \frac{S}{K} + rT \right] \frac{2}{T}.$$

Zauważono, że błąd modeli zmienności implikowanej opartych na wzorze Blacka-Scholsa jest najmniejszy dla opcji near at the money i opcji clone-to-maturity. Dlatego tylko takie opcje były brane pod uwagę.

10.1. Całkowita zmienność implikowana dla klasy opcji

Często jest więcej niż jedna opcja na instrumenty wymienne na rynku akcji. Z tego powodu musieliśmy wybrać jedną z metod żeby wyznaczyć całkowitą zmienność implikowaną. Pierwszy estymator był zaproponowany przez Schmalensee R. i Trippi R w roku (1978). Autorzy obliczyli całkowitą zmienność implikowaną jako średnią arytmetyczną ze zmienności implikowanej otrzymanej ze wszystkich znanych opcji. Bardziej dokładną wartość całkowitej zmienności implikowanej daje estymator zaproponowany przez Chirasa i Manastera w roku (1978). To jest średnia ważona z wagami zwanymi współczynnikami giętkości odchylenia standardowego. Estymator ten może być wyrażony następującą formułą

$$\bar{\sigma}_{kt} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{kt}} \left(\frac{\partial C_{ikt}}{\partial \sigma_{ikt}} \frac{\sigma_{ikt}}{C_{ikt}} \sigma_{ikt} \right)}{\sum_{i=1}^{N_{kt}} \left(\frac{\partial C_{ikt}}{\partial \sigma_{ikt}} \frac{\sigma_{ikt}}{C_{ikt}} \right)}, \quad (10.2)$$

gdzie $\frac{\partial C_{ikt}}{\partial \sigma_{ikt}} \frac{\sigma_{ikt}}{C_{ikt}}$ są współczynnikami giętkości (elastyczności) dla $i = 1, \dots, n$. Elastyczność jest to reakcja ceny na procentową zmianę odchylenia standardowego.

10.2. Indeks zmienności implikowanej WIV20

Indeks WIV20 jest indeksem zmienności implikowanej w cenach opcji na indeks WIG20 notowanych od 22 września 2003 na GPW. Wielkość tą podaje Rafał Rudzki wraz z wartościami historycznymi na stronie internetowej. Wartość indeksu zmienności implikowanej można interpretować dwojako. Po pierwsze indeks ujawnia poziom cen w ujęciu stosowanym przez traderów zgodnie z zasadą że handel opcjami to handel zmiennością. Indeks zmienności implikowanej pokazuje oczekiwania uczestników rynku, co do kształtowania się poziomu zmienności w najbliższej przyszłości zatem może być traktowany jako barometr nastrojów panujących na giełdzie.

Indeks zmienności implikowanej WIV20 na daną sesję giełdową obliczany będzie jako średnia ważona otrzymanych poziomów parametru σ dla wszystkich opcji out of the money zgodnie z poniższą formułą :

$$WIV20 = \frac{\sum_i \sigma_i z_i v_i}{\sum_i z_i v_i} \cdot 100\% ,$$

gdzie

σ_i – zmienność implikowana i-tej opcji

z_i – cena i-tej opcji P lub C , jak przy wyznaczaniu zmienności implikowanej

v_i - wolumen obrotu na i-tej opcji na danej sesji giełdowej

Kalkulację zmienności implikowanej dla pojedynczej opcji autor opiera o klasyczny model wyceny opcji europejskiej Fischera, Mertona i Scholesa, a konkretnie o jego rozwinięcie zaproponowane przez Mertona, uwzględniające stopę wypłaty dywidendy.

$$\begin{aligned} C &= S e^{-dT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \\ P &= -S e^{-dT} N(-d_1) + K e^{-rT} N(-d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r - d + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

gdzie

C – premia opcji call,

P -premia opcji put

S -aktualny kurs instrumentu bazowego,

K - kurs wykonania opcji

r - stopa procentowa wolna od ryzyka

d -stopa wypłaty dywidendy

T - czas do wygaśnięcia opcji w latach

σ -zmiennosc kursu instrumentu bazowego

$N(x)$ -wartosc skumulowanej funkcji gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Na potrzeby kalkulacji proponowanego indeksu zmienności implikowanej powyższy model był nieco zmodyfikowany. W Pierwszym kroku wykonano poniższe przekształcenie:

$$C = [Se^{(r-d)T} N(d_1) - KN(d_2)]e^{-rT},$$
$$P = [-Se^{(r-d)T} N(-d_2) + KN(-d_2)]e^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{\ln(Se^{(r-d)T} / K) + (\sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

W kolejnym wykorzystując relację między ceną instrumentu bazowego a opiewającego na niego kontraktu futures/ Forward $F = Se^{(r-d)T}$ otrzymano ostateczny wariant modelu wyceny opcji.

Autorzy za F przyjęli aktualny kurs kontraktu futures/forward opiewającego na ten sam instrument bazowy i posiadający ten sam termin wygaśnięcia co opcja. Za C lub P przyjęli średnią arytmetyczną czterech cen transakcyjnych wybranej opcji na WIG20 osiągniętych na danej sesji otwarcia, najwyższej, najniższej i zamknięcia. Za F podstawili średnią arytmetyczną z czterech cen transakcyjnych kontraktu terminowego na WIG20 o tym samym terminie wygaśnięcia co wybrana opcja, osiągniętych na danej sesji otwarcia, najwyższej, najniższej i zamknięcia.

Przez K oznaczyli kurs wykonania wybranej opcji, przez T czas do wygaśnięcia wybranej opcji a przez R średnią ważoną stopę rentowności 13-tygodniowych bonów skarbowych z ostatniego przetargu.

10.3. Model ARFIMA

Niech $\Phi(L)$ i $\theta(L)$ oznaczają wielomiany postaci:

$$\eta(L) = 1 - \eta_1 L - \dots - \eta_r L^r$$

rzędu p i q odpowiednio.

ARFIMA(p,d,q) jest dany wzorem:

$$\Phi(L)(1-L)^d(y_t - \gamma) = \theta(L)\varepsilon_t,$$

gdzie ε_t jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie.

Wyrażenie $(1-L)^d$ jest równe:

$$(1-L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} b_i L^i,$$

$$\text{gdzie } b_0 = 1, b_i = \frac{-d\Gamma(i-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(i+1)} = \frac{i-d-1}{i} b_{i-1} \text{ dla } i \geq 1.$$

Proces ARFIMA(p,d,q) dla $d > 0$ ma długą pamięć, co oznacza, że funkcja autokorelacji nie znika w tempie wykładniczym

10.4. Poszukiwanie najlepszych modeli prognostycznych zmienności implikowanej indeksu WIG20

W badaniu porównaliśmy ze sobą prognozy zmienności implikowanej otrzymane za pomocą modeli typu ARMA(p,q) dla $p, q \in \{0,1,2\}$ i ARFIMA(p,d,q) dla $p, q \in \{0,1,2\}$ i ARIMA($p,1,q$) $p, q \in \{0,1,2\}$ dla z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta, rozkładem skośnym t Studenta z prognozami zmienności implikowanej z modeli typu ARMA(p,q), ARFIMA(p,q) i ARIMA(p,q) dla równocześnie modelowanej wariancji warunkowej błędu za pomocą GARCH(1,1), EGARCH(1,1), FIGARCH(1,1), APARCH(1,1), FIAPARCH(1,1) i HYGARCH(1,1). Do porównywania prognoz zmienności implikowanej różnych modeli wykorzystujemy metodę MCS. Modele estymowaliśmy w programie TSM

10.4.1. Dane

W przeprowadzonym badaniu do estymacji modeli wykorzystaliśmy szereg zmienności implikowanej (indeks WIV20) od dnia 22.09.2003 do dnia 08.09.2009. Na ostatnie 200 dni obliczyliśmy jednodniowe prognozy. Prognozy zmienności porównaliśmy z szeregiem zmienności implikowanej indeksu WIG20 (WIV20).

Tabela 10.1
Wyniki testu stacjonarności KPPS

Dane	Wartości statystyki testowej KPPS
Szereg WIV20	0,727943(<0,025)

Hipoteza zerowa o stacjonarności dla szeregu WIV20 została odrzucona.

Wyniki testu długiej pamięci dla WIV20:

Tabela 10.2

Wyniki testów długiej pamięci Lo

Dane	Lo
Indeks WIV20	4,0618 (<0,005)

Hipoteza zerowa została odrzucona

10.4.2. Wynik porównywania modeli

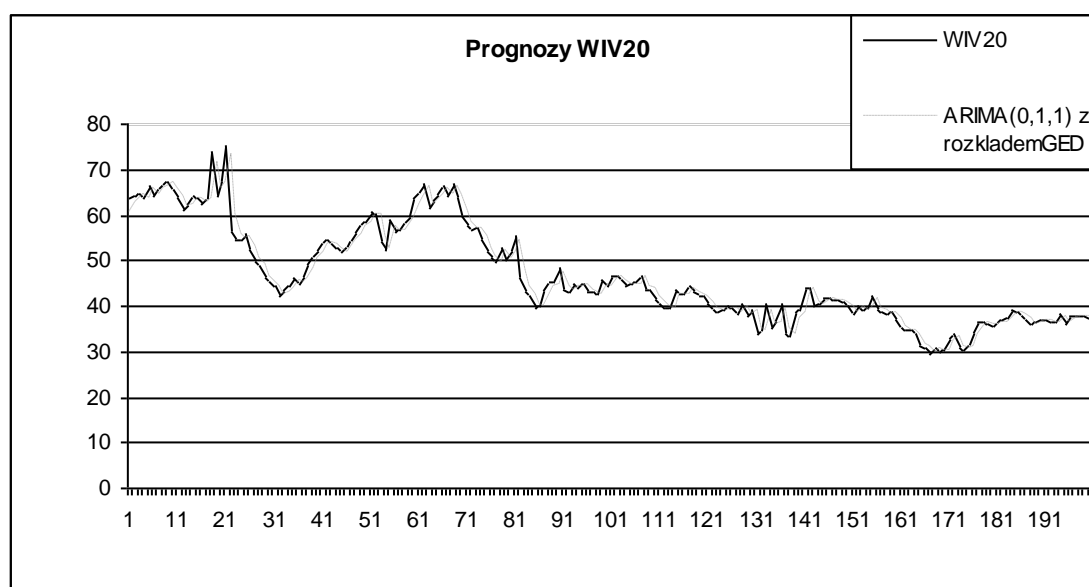
Badanie zostało przeprowadzone dla poziomu istotności 0,05. Odrzuciliśmy modele z nieistotnymi parametrami i modele, dla których istniały istotne korelacje w resztach standaryzowanych i w kwadratach reszt standaryzowanych. Były to wszystkie modele AR i MA. Za pomocą programu MULCOM otrzymaliśmy wyniki dla funkcji błędu *MSE* i *MAD*. Do badania najpierw pobraliśmy tylko modele średniej warunkowej szukaliśmy najlepszych pomiędzy nimi, a w kolejnym kroku porównaliśmy prognozy tych modeli z prognozami modeli typu $ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,q)$ i $ARFIMA(p,q)$ dla równocześnie dopasowanego modelu błędu GARCH i jego rozszerzeń, modeli EGARCH(1,1), FIGARCH(1,1), APARCH(1,1), FIAPARCH(1,1) i HYGARCH(1,1). Wyniki pierwszego badania znajdują się w tabelach 11.3 i 11.4

Tabela 10.3.

Oszacowania *p*-wartości dla dla *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartość
ARIMA(0,1,1) z rozkładem Gaussa	1,902857	0,5621
ARIMA(0,1,1) z rozkładem Studenta	1,889956	0,5621
ARIMA(0,1,1) z rozkładem skośnym Studenta	1,891086	0,5621
ARIMA(0,1,1) z rozkładem GED	1,888844	1
ARFIMA(0,d,1) z rozkładem Gaussa	1,906497	0,5621
ARFIMA(0,d,1) z rozkładem Studenta	1,889198	0,9018
ARFIMA(0,d,1) z rozkładem skośnym Studenta	1,890402	0,5621
ARFIMA(2,0,1) z rozkładem GED	1,917356	0,5621
ARFIMA(1,d,0) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,902360	0,5621
ARFIMA(0,d,1) ze stałą z rozkładem Studenta	1,899491	0,5621
ARFIMA(0,d,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,902251	0,5621
ARFIMA(1,d,2) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,940036	0,2770

ARFIMA(1,2) ze stałą z rozkładem Studenta	1,898732	0,5621
ARMA(2,0) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,899530	0,5621
ARMA(1,1) z rozkładem Gaussa	1,932286	0,1497
ARMA(1,1) z rozkładem Studenta	1,899028	0,5621
ARMA(1,1) z rozkładem skośnym Studenta	1,902942	0,5621
ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,929591	0,1497
ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,902097	0,5621
ARMA(1,2) z rozkładem Gaussa	1,933025	0,1497
ARMA(1,2) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,929476	0,27770
ARMA(2,0) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,899530	0,5621



Rysunek 10.1 Prognozy indeksu WIV20 dla MAD

Zauważamy, że modele ARMA, ARIMA i ARFIMA podobnie prognozują zmienność implikowaną. Należy zwrócić uwagę na bardzo dobrą jakość prognoz modeli, które znalazły się w zbiorze MCS. Zatem zmienność implikowaną (indeks WIV20) można bardzo dokładnie prognozować za pomocą wymienionych modeli..

Tabela 10.4.

Oszacowania p -wartości dla dla MSE

MCS	MSE	p -wartość
ARIMA(0,1,1) z rozkładem Studenta	7,363530	0,6132
ARIMA(0,1,1) z rozkładem GED	7,363029	0,6940
ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	7,327913	1

Dla **ARMA(1,1) ze stałą, z rozkładem skośnym Studenta** otrzymaliśmy następujące oszacowania parametrów:

ν 2,57143 (0,2148)

ξ 1,07238 (0,056)

μ 35.5369 (17,653)

a_1 0.99604 (0,00695)

b_1 0.26118 (0,04725)

σ_ε 3.81764 (0,9472)

Natomiast dla **ARIMA(0,1,1) z rozkładem GED** oszacowania parametrów były następujące

ν 0,86251 (0,0474)

b_1 0,2343 (0,00096)

σ_ε 2.53558 (0.2175)

Modelem w zbiorze MCS dla funkcji błędu *MSE* był również model **ARIMA(0,1,1) z rozkładem Studenta** z następującymi oszacowaniami parametrów:

ν 2,53167 (0,2071)

b_1 0,23703 (0,04596)

σ_ε 3,99571 (1,0519)

Zbiór MCS dla modeli średniej warunkowej z równocześnie dopasowanymi modelami wariancji warunkowej z rodziny GARCH

Tabela 10.5.
Oszacowania *p*-wartości dla dla *MAD*

MCS	<i>MAD</i>	<i>p</i> -wartość
ARIMA(0,1,1) z rozkładem Gaussa	1,902857	0,0558
ARIMA(0,1,1) z rozkładem Studenta	1,889956	0,5577
ARIMA(0,1,1) z rozkładem GED	1,888844	0,9927
ARFIMA(0,d,1) z rozkładem Studenta	1,889198	0,5577
ARFIMA(0,d,1) z rozkładem skośnym Studenta	1,890402	0,5577
ARFIMA(1,d,0) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,902360	0,3954
ARFIMA(0,d,1) ze stałą z rozkładem Studenta	1,899491	0,4090
ARFIMA(0,d,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,90221	0,0558
ARFIMA(1,d,2) ze stałą z rozkładem Studenta	1,899530	0,4379
AR(2) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,899530	0,3954
ARMA(1,1) z rozkładem Studenta	1,989028	0,4379
ARMA(1,1) z rozkładem skośnym Studenta	1,902942	0,0558
ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	1,902097	0,0558
AR(2) ze stałą z rozkładem Gaussa	1,899530	0,3954
AR(2) - GARCH z rozkładem Studenta	1,896020	0,4379
AR(2) - GARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,900924	0,0558
AR(2) ze stałą - GARCH z rozkładem Gaussa	1,907288	0,0558

AR(2) ze stałą - GARCH z rozkładem Studenta	1,896419	0,4379
AR(2) ze stałą - GARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,900777	0,4379
AR(2) ze stałą - GARCH z rozkładem GED	1,900494	0,3954
ARIMA(1,1,0) - APARCH z rozkładem Gaussa	1,898508	0,3949
ARIMA(1,1,0) - APARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,895908	0,4379
ARIMA(1,1,0) - APARCH z rozkładem GED	1,895367	0,4379
AR (2) - APARCH z rozkładem Studenta	1,893876	0,4379
AR (2) - APARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,898137	0,4090
AR (2) ze stałą – APARCH z rozkładem Gaussa	1,903533	0,3410
ARIMA(1,1,0) - EGARCH z rozkładem Studenta	1,893794	0,4379
ARIMA(1,1,0) - EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,895910	0,4379
ARIMA(1,1,0) - EGARCH z rozkładem GED	1,894549	0,4379
ARFIMA(0,d,1)- EGARCH z rozkładem Studenta	1,901825	0,3380
ARFIMA(0,d,1)- EGARCH z rozkładem GED	1,888752	0,9927
AR(2)- EGARCH z rozkładem Gaussa	1,887699	1
AR(2) - EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,897898	0,4090
AR(2) ze stałą - EGARCH z rozkładem Studenta	1,892227	0,5577
AR(2) ze stałą - EGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,896092	0,4379
AR(2) ze stałą - EGARCH z rozkładem GED	1,895087	0,4379
ARIMA(1,1,0) - FIGARCH z rozkładem Studenta	1,894461	0,4379
ARIMA(1,1,0) - FIGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,89677	0,4379
ARIMA(1,1,0)- FIGARCH z rozkładem GED	1,897032	0,4379
AR(2) ze stałą - FIGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,899395	0,4379
ARIMA(1,1,0) - FIAPARCH z rozkładem Studenta	1,894186	0,4379
ARIMA(1,1,0) - FIAPARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,896461	0,4379
AR(2) - FIAPARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,898516	0,3954
AR(2) ze stałą - FIAPARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,897801	0,4379
ARIMA(1,1,0) - HYGARCH z rozkładem Studenta	1,894782	0,4379
ARIMA(1,1,0) - HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,896906	0,4379
ARIMA(1,1,0) - HYGARCH z rozkładem GED	1,894991	0,4379
AR(2) - HYGARCH z rozkładem Gaussa	1,900541	0,0558
AR(2) ze stałą - HYGARCH z rozkładem GED	1,894786	0,4379
AR(2) ze stałą - HYGARCH z rozkładem Studenta	1,895308	0,4379
AR(2) ze stałą - HYGARCH z rozkładem skośnym Studenta	1,897797	0,4379
AR(2) ze stałą – HYGARCH z rozkładem GED	1,897934	0,4379

Następnie wygenerowaliśmy zbiór MCS dla funkcji błędu średniokwadratowego. Wy-
nik zawiera poniższa tabela

Tabela 10.6.

Oszacowania p -wartości dla dla MSE

MCS	MSE	p -wartość
ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta	7,327913	1
ARMA(1,1) ze stałą - APARCH z rozkładem Studenta	7,33077	0,9755
ARMA(1,1) ze stałą - APARCH z rozkładem skośnym Studenta	7,337588	0,2688
ARMA(1,1) ze stałą - EGARCH z rozkładem Studenta	7,337166	0,2688

Można wywnioskować, że modele ARIMA dobrze się dopasowują i prognozują zmienność implikowaną indeksu WIG20. Do prognozowania i modelowania tej zmienności nadają się również dopasowane modele ARFIMA, modele AR(2) i modele ARMA. Nie można natomiast modelować i prognozować zmienności implikowanej WIV20 za pomocą modeli AR oraz MA. Modelami prognostycznymi z najmniejszą funkcją błędu prognozy okazały się w badanym okresie modele oraz ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta, dla mse oraz ARIMA(0,1,1) z rozkładem GED dla MAD. Za pomocą tych modeli można modelować i prognozować szereg zmienności implikowanej podanej w procentach. Rozpatrywane modele nie dopasowują się dobrze do szeregu zmienności implikowanej podanej w ułamkach dziesiętnych.

Dla modeli zmienności ARMA i ARFIMA z równocześnie dopasowanymi modelami wariancji warunkowej błędu z rodziny typu GARCH, dla MAD na 178 dopasowane modele prognostyczne w zbiorze modeli najlepszych znalazło się aż 55 modeli. Zauważyliśmy, że wartości wszystkich funkcji straty MAD modeli różnią się o nie więcej niż 0.1%, a wartości funkcji MSE o nie więcej niż 0.2%. Zatem wszystkie rozpatrywane modele dają prognozy podobnej jakości i do prognozowania tego indeksu można wykorzystać dowolny z nich. Najlepszy dla funkcji MAD okazał się model **AR(2)-EGARCH z rozkładem Gaussa:**

$$a_1 \ 0,74137 \ (0,04041)$$

$$a_2 \ 0,25826 \ (0,04038)$$

$$\omega \ 0,35288 \ (0,1024)$$

$$\alpha_1 \ 0,68957 \ (0,2266)$$

$$\beta_1 \ 0,77563 \ (0,1358),$$

a dla funkcji MSE model ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta.

10.5. Prognozowanie zmienności implikowanej za pomocą modeli typu GARCH

W badaniu porównaliśmy ze sobą prognozy zmienności indeksu WIG20, otrzymane z modeli typu GARCH dla równocześnie dopasowanych modeli średniej warunkowej typu ARMA z szeregiem zmienności implikowanej (indeksem WIV20). Wzięliśmy pod uwagę następujące typy modeli GARCH(1,1) z różnymi rozkładami błędu: RiskMetrics, GARCH, GJR, EGARCH, APARCH, IGARCH, FIGARCH, FIAPARCH i HYGARCH z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta, rozkładem skośnym t Studenta. Wykorzystaliśmy metodę MCS.

10.5.1. Dane

W przeprowadzonym badaniu do estymacji modeli użyliśmy 1525 dziennych obserwacji indeksu WIG20 od **18.08.2003** do **08.09.2009** Na ostatnie 107 dni, tj. obliczyliśmy jednodniowe prognozy.

10.5.2. Wynik porównania prognoz

Dla poziomu istotności 0.05 otrzymaliśmy następujące zbiory modeli najlepszych:

Tabela 10.5.

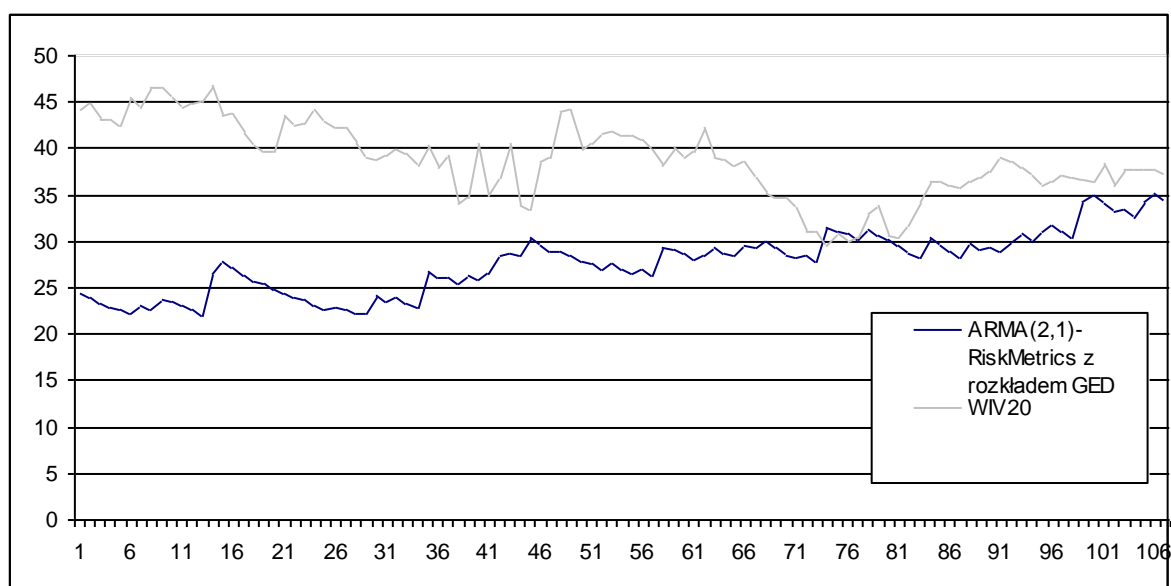
Oszacowania p -wartości dla MAD

Model	MAD	p -wartość
ARMA(2,1)-RiskMetrics z rozkładem GED	11,15493%	1

Tabela 10.6.

Oszacowania p -wartości dla dla MSE

Model	MSE	p -wartość
ARMA(2,1)-RiskMetrics z rozkładem GED	167,479941%	1



Rysunek 10.1. Prognozy najlepszego modelu ARMA(2,1)-RiskMetrics z rozkładem GED porównane z WIV20.

Można wywnioskować, że modele GARCH dopasowane do szeregu zwrotów WIG20 nie prognozują dobrze zmienności implikowanej indeksu WIG20. Ich prognozy są gorsze niż prognozy otrzymane przy użyciu modeli ARMA i ARFIMA i AR(2). Wynika to stąd, że zmienność implikowana to zmienność w całym okresie życia opcji a modele GARCH dają prognozy zmienności na jeden dzień na przód. Zatem do prognozowania zmienności indeksu WIV20 nadają się modele ARMA, ARFIMA i AR(2).

10. 6. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale sprawdziliśmy własność długiej pamięci w szeregu indeksu WIV20, gdyż ten szereg był stacjonarny. W przedstawionym badaniu porównaliśmy ze sobą prognozy zmienności implikowanej otrzymane z modeli typu AR(1), MA(1), ARMA(p,q), ARFIMA, ARFIMA(p,d,q) i ARIMA($p,1,q$) dla $p,q \in \{0,1,2\}$ (z rozkładami Gaussa, GED, t Studenta, rozkładem skośnym t Studenta oraz prognozami zmienności modeli typu ARMA(p,q) ARIMA($p,1,q$) i ARFIMA(p,d,q) z równocześnie dopasowanymi modelami błędu z rodziny typu GARCH(1,1): GARCH(1,1), EGARCH(1,1), FIGARCH(1,1), APARCH(1,1), FIAPARCH(1,1) i HYGARCH(1,1). Zauważamy, że modele ARMA, ARIMA, ARFIMA i AR(2) dobrze się dopasowują i prognozują indeks WIV20. Za pomocą tych modeli można jednak prognozować szereg WIV20 podany w procentach. Modele te nie dopasowują się dobrze do WIV20 podanego w ułamkach dziesiętnych. Źle sprawdzają się natomiast modele AR i MA. Dla modeli ARMA(p,q) i ARIMA($p,1,q$) i ARFIMA(p,d,q) z równocześnie dopasowanymi modelami GARCH(1,1) i jego rozszerzeniami funkcje błędu różnią się o nie więcej niż 0,2%. Zatem wszystkie te modele dają prognozy podobnej jakości.

W ostatnim badaniu prognozowaliśmy zmienność implikowaną za pomocą modeli z rodziny GARCH dopasowanych do szeregu zwrotów indeksu WIG20. Wnioskujemy, że nie jest to dobry sposób prognozowania zmienności implikowanej (indeksu WIV20).

Zakończenie

Udało nam się zweryfikować wszystkie postawione hipotezy:

Przy założeniu istnienia podobnej dynamiki rynku można wyróżnić pewne modele typu ARMA-GARCH jako najlepiej prognozujące zmienność indeksu WIG20 i kursów walutowych względem złotego.

Na podstawie przedstawionych badań wnioskujemy, że można wyróżnić modele typu GARCH najlepiej prognozujące zmienność indeksu WIG20 pomiędzy modelami: RiskMetrics, GARCH, GJR, EGARCH, APARCH, FIGARCH, FIAPARCH, HY-GARCH. Polski indeks WIG20 najlepiej prognozują proste modele GARCH i RiskMetrics wśród modeli z istotnymi parametrami. Nie uzyskaliśmy natomiast najlepszego modelu średniej ARMA równocześnie dopasowanego do szeregu zwrotów WIG20 w modelach ARMA-GARCH. Okazało się, że dla indeksu WIG20 nie jest prawdziwy wynik z pracy Vilhelmssona (2006), że leptokurtoza w rozkładach błędów poprawia prognozy zmienności. Szukaliśmy również modeli prognostycznych zmienności dla trzech najczęściej wykorzystywanych w Polsce kursów walutowych: kursu walutowego euro do złotego, kursu walutowego franka szwajcarskiego do złotego i kursu walutowego funta brytyjskiego do złotego. Dla kursu walutowego EUR/PLN rezultaty są zgodne z wnioskiem Doman i Doman 2003, że odpowiednim modelem dla szeregu zwrotów kursu EUR/PLN jest model GARCH(1,1). Zauważamy, że również dla kursu CHF/PLN wyniki są zgodne z otrzymanymi przez Doman i Doman dla prognoz z okresu od 02.01.2003 do 30.05.2003 Autorzy ci podają model GARCH(1,1) z rozkładem

skośnym t Studenta jako najlepszy model prognostyczny dla kursu CHFPLN. Ponadto można wyciągnąć wniosek, że model GARCH dla funta brytyjskiego nie ma przewagi nad innymi modelami. Zatem nie zawsze proste modele GARCH dobrze prognozują zmienność zwrotów kursów walutowych.

W hipotezie drugiej postulujemy, że *dla różnych częstotliwości notowań otrzymuje się te same zbiory modeli najlepszych dla indeksu WIG20.*

Hipoteza ta została zweryfikowana pozytywnie. Dla częstotliwości notowań 5, 10 i 30 minutowej uzyskaliśmy te same zbiory najlepszych modeli prognostycznych indeksu WIG20. Zatem częstotliwość notowań nie wpływa znacząco na wybór najlepszych modeli prognostycznych zmienności dla tego indeksu.

Trzecia hipoteza badawcza stwierdza, że *wyбір modelu ARMA może poprawić prognozy zmienności modelu GARCH w tzw modelu ARMA-GARCH.*

Możemy zauważyć na podstawie wykonanych badań, że równocześnie dopasowany model ARMA może poprawić prognozy zmienności modelu GARCH. Dla modeli ARMA o różnej specyfikacji otrzymaliśmy różne prognozy zmienności modeli GARCH.

Następną hipotezą jest, że *kombinacja Pattona i Shepparda dobrze dopasowuje się do szeregu zmienności i daje lepsze prognozy niż pojedyncze modele.* Chcieliśmy sprawdzić, czy istnieje lepszy model prognostyczny dla WIG20 niż otrzymany w pracy (Buszkowska 2008) i czy optymalna liniowa kombinacja prognoz dla WIG20 ma przewagę nad nieliniową. Porównaliśmy prognozy zmienności z dzienną zmiennością zrealizowaną obliczoną jako suma kwadratów zwrotów śróddziennych, dla funkcji błędu MSE znanej jako odporna funkcja błędu (Patton, Sheppard 2007). Porównaliśmy również prognozy zmienności ze zbioru modeli ARMA-GARCH przy pomocy metody MCS. Po pierwsze stworzyliśmy zbiór najlepszych modeli GARCH dla indeksu WIG20 i porównaliśmy ich prognozy z optymalnymi liniowymi i nieliniowymi kombinacjami dwóch prognoz. Analiza została przeprowadzona dla opisanych typów kombinacji dwóch prognoz. Wyciągneliśmy wniosek, że nieliniowe kombinacje dwóch prognoz przewyższają optymalne liniowe kombinacje dwóch prognoz i przedstawiliśmy optymalne wagi nieliniowych kombinacji otrzymane metodą Gaussa-Newtona. Następnie utworzyliśmy zbiór modeli ARMA-GARCH dla różnych specyfikacji ARMA i wybraliśmy najlepsze modele prognostyczne za pomocą metody MCS. Dla najlepszych modeli ze zbioru utworzyliśmy liniowe i nieliniowe kombinacje dwóch prognoz. Na końcu po-

równaliśmy prognozy modeli ARMA-GARCH z optymalnymi kombinacjami dwóch prognoz.

W zaprezentowanych tabelach zbiory $\sigma_{1,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$ są podobne, ale różnią się dla $\sigma_{2,t}^2$. Wyniki prawie nie różnią się dla różnych częstotliwości. Co więcej nieliniowe kombinacje dwóch prognoz przewyższają prognozy z pojedynczego modelu i z optymalnej kombinacji liniowej dla wszystkich miar zmienności zrealizowanej $\sigma_{1,t}^2$, $\sigma_{2,t}^2$ i $\sigma_{3,t}^2$. Wyciągamy wniosek, że nieliniowa funkcja prognoz z optymalnymi współczynnikami postaci $\exp(\beta_1 \cdot \ln(\hat{y}_A) + \beta_2 \cdot \ln(\hat{y}_B))$ może być wykorzystana do wygenerowania lepszych prognoz. Potwierdzamy, że kombinacja Pattona i Shepparda dobrze dopasowuje się do szeregu zmienności i daje lepsze prognozy niż pojedyncze modele.

Postulujemy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się podobnie do tego samego szeregu zmienności co uproszczona funkcja Donaldsona i Kamstry. Wyznaczenie parametrów jednak szybsze dla funkcji Pattona i Shepparda.

Ta hipoteza na podstawie przeprowadzonego badania porównującego kombinacje za pomocą dwóch funkcji błędu została zweryfikowana pozytywnie. Na podstawie badania wnosimy, że funkcja Pattona i Shepparda dopasowuje się podobnie do tego samego szeregu zmienności indeksu WIG20 co uproszczona funkcja Donaldsona i Kamstry. Wyznaczenie parametrów jednak szybsze dla funkcji Pattona i Shepparda ze względu na małą liczbę parametrów. Zatem obie funkcje można wykorzystać do tworzenia kombinacji prognoz zmienności indeksu WIG20. Łatwiej jednak jest stosować funkcję Pattona i Shepparda ze względu na prostszą postać pochodnej

W hipotezie kolejnej stwierdzamy, że dla indeksu WIG20, dla różnych typów miar zmienności zrealizowanej dla zbioru szeregów prognoz modeli GARCH zbiory MCS są takie same dla zmienności zrealizowanej przeskalowanej Koopmana i Holsa $\sigma_{3,t}^2$ oraz podstawowej zmienności zrealizowanej, określonej jako suma kwadratów zwrotów śróddziennych $\sigma_{1,t}^2$ z taką samą funkcją straty, lecz wyniki są odmienne dla estymatora zmienności ze zwrotem nocnym $\sigma_{2,t}^2$.

Pokazaliśmy, że dla indeksu WIG20 wartości zmienności zrealizowanych $\sigma_{3,t}^2$ i $\sigma_{1,t}^2$ są zbliżone. Różnią się jednak znacznie od wartości $\sigma_{2,t}^2$. Dla zmienności zrealizowanych $\sigma_{3,t}^2$ i $\sigma_{1,t}^2$ otrzymaliśmy bowiem te same zbiory MCS, ale wyniki były różne dla $\sigma_{2,t}^2$.

Hipoteza kolejna stwierdza, że *modele ARMA-GARCH nie zawsze dobrze prognozują zmienność spółek na GPW ze względu na dni o podwyższonej zmienności.*

W części empirycznej pracy poszukiwaliśmy najlepszych modeli prognostycznych zmienności dla szeregów notowań przykładowych trzech spółek z GPW. Okazało się, że modele GARCH mogą źle prognozować zmienność zwrotów spółek na GPW, gdyż w tabelach wynikowych pojawiły się duże błędy średniokwadratowe prognoz.

Ponadto twierdzimy, że *zmienność implikowaną indeksu WIG20 dobrze prognozują modele ARMA, ARIMA i ARFIMA natomiast źle się dopasowują modele AR(1) i MA(1).*

Poszukiwaliśmy najlepszych modeli prognostycznych indeksu WIV20 zmienności implikowanej pomiędzy modelami $ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,q)$ i $ARFIMA(p,q)$. Stwierdzamy, że wszystkie modele ARMA, ARIMA i ARFIMA dopasowane dobrze do szeregu WIV20 podobnie prognozują ten indeks (prognozy prawie się nie różnią od siebie). Zatem do prognozowania WIV20 należy wykorzystać najprostszy model ARMA. Ponadto do prognozowania WIV20 nie nadają się modele AR(1) i MA(1). Dla tych modeli wyestymowane współczynniki były nieistotne lub pojawiły się istotne korelacje w resztach standaryzowanych. Za pomocą modeli ARMA, ARIMA i ARFIMA można modelować i prognozować szereg zmienności WIV20 podany w procentach. Rozpatrywane modele nie dopasowują się dobrze do szeregu WIV20 podanego w ułamkach dziesiętnych. Najlepszym modelem prognostycznym (z najmniejszą funkcją błędu prognozy) okazał się $ARMA(1,1)$ ze stałą z rozkładem skośnym Studenta.

Następna hipoteza badawcza mówi, że *zmienność implikowaną WIG20 można prognozować lepiej za pomocą ARMA dopasowanego do szeregu zmienności implikowanej niż za pomocą modeli z rodziny typu GARCH dopasowanych do szeregu zwrotów indeksu WIG20.*

Zauważamy, że w przeciwieństwie do wcześniejszych modeli GARCH i jego rozszerzenia dopasowane do szeregu zwrotów WIG20 nie prognozują dobrze indeksu WIV20. Ich prognozy są gorsze niż prognozy otrzymane przy użyciu modeli $ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,1,q)$, $ARFIMA(p,d,q)$ i AR(2). Wynika to stąd, że zmienność implikowana to zmienność w całym okresie życia opcji, a modele GARCH dają prognozy zmienności zwrotów indeksu WIG20 na jeden dzień na przód.

Ostatnią hipotezą badawczą jest, że *wszystkie modele ARMA, ARIMA i ARFIMA dopasowane dobrze do szeregu zmienności implikowanej podobnie prognozują tę zmienność (prognozy prawie się nie różnią od siebie).* Niezależnie niezależnie od tego czy są to

modele typu ARMA(1,1), ARMA(1,2), ARMA(2,1), ARMA(2,2), ARMA(2,0), ARIMA(0,1,1), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,2), ARIMA(1,1,0), ARIMA(2,1,2), ARIMA(2,1,0) ARFIMA(1,1), ARFIMA(1,2), ARFIMA(2,1) czy ARFIMA(2,2) otrzymujemy zbliżone błędy prognoz, jeśli tylko model jest dobrze oszacowany. Zatem do prognozowania zmienności implikowanej indeksu WIG20 należy wykorzystać najprostszy model ARMA(1,1). W badaniu testowaliśmy również modele zmienności ARMA, ARIMA i ARFIMA z równocześnie dopasowanymi modelami wariancji warunkowej błędu typu GARCH. Szukaliśmy najlepszych modeli prognostycznych w tej grupie. Zauważamy, że wartości wszystkich funkcji straty *MAD* dla dopasowanych modeli różnią się o nie więcej niż 0.1%, a wartości funkcji *MSE* o nie więcej niż 0.2%. Zatem wszystkie rozpatrywane modele dają prognozy podobnej jakości i do prognozowania tego indeksu można wykorzystać dowolny z nich. Najlepszy dla funkcji *MAD* okazał się model AR(2)-EGARCH z rozkładem Gaussa, a dla funkcji straty model *MSE* model ARMA(1,1) ze stałą z rozkładem skośnym Studenta. Widzimy, że prognozy modeli ARMA można poprawić jednoczesne dopasowując model wariancji warunkowej błędu typu GARCH.

LITERATURA

- Andersen T.G., Bollerslev T. (1997), *Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets*. Journal of Empirical Finance, 4.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1998), *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, International Economic Review, 39,885– 905.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Ebense H., (2001), *The distribution of realized stock return volatility*, Journal of Financial Economics, 61, 43-76.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P., (2001), *The Distribution of Exchange Rate Volatility*. Journal of American Statistical Association, 96.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P., (2003) *Modeling and Forecasting Realized Volatility*, Econometrica, 71, 3-29.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Meddahi N. (2004), *Analytic Evaluation of Volatility Forecasts*, International Economic Review, 42, 579-625.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2004), *Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps*, Journal of Financial Econometrics, 2, 1-148
- Bhansali R. J., Kokoszka P. S. (2001), *Prediction of Long Memory Time Series. An Overview*, Estadística, 53, 41-96.
- Boutahar, M. (2005), *Optimal Prediction with Nonstationary ARFIMA Model*, Groupement de Recherche en Economie Quantitative d'Aix-Marseille - UMR-CNRS 6579 Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales Universités d'Aix-Marseille II et III
- Bollerslev T. (1987), *A conditionally Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics, 69, 542-547.

- Buszkowska E. (2008), *Porównanie zdolności prognostycznej modeli zmienności indeksu WIG20 za pomocą testu SPA*, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, 10, 383-393.
- Busse J.A.(1999), *Volatility Timing In Mutual Funds: Evidence from Daily Returns*, Review of Financial Studies, 12.
- Chiras, D., Manaster, S. (1978), *The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency*, Journal of Financial Economics 6. North-Holland Publishing Company, 213-234.
- Clarac T.E., MacCracken M.W. (2001), *Test of equal forecast accuracy and encompassing for nested models*, Journal of Econometrics, 105, 85-110.
- Diebold F.X., Mariano R.S. (1995), *Comparing predictive accuracy*. Journal of Business and Economic Statistics, 13, 253-263.
- Doman M., Doman R.(2004), *Ekonometryczne Modelowanie Dynamiki Polskiego Rynku Finansowego*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- Doman M., Doman R. (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka*. Wydawnictwo Wolters Kluwer Polska
- Donaldson R.G., Kamsatra M. (1996), *Forecast Combining with Neural Networks*, Journal of Forecasting 15, 49-61
- Fernández C., Osiewalski J., Steel M. F. J.(1995), *Modelling and Inference with v-spherical Distributions*, Journal of the American Statistical Association, 90, 1331-1340.
- Fernández C, Steel M. F. J. (1998), *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, Journal of the American Statistical Association, 93, 359-371.
- Giacomini R., White H. (2006), *The Test of Conditional Predictive Ability*, Econometrica, 74.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983), *The estimation and application of long-memory time series models*. Journal of Time Series Analysis, 4, 221–237.
- Goncalves S., De Jong R., (2003), *Consistency of the Stationary Bootstrap under Weak Moment Conditions*, Economic Letters, 81, 273-278.
- Hansen B. E. (1994), *Autoregressive Conditional Density Estimation*, International Economic Review, 35, 705-730.
- Hansen P.R.(2001), *An unbiased and powerful test for superior predictive ability*. Brown University, Department of Economics Working Paper, 01-06.
- Hansen P.R., (2005), *A Test for Superior Predictive Ability.*, Journal of Business and

- Economic Statistics, 23, 365-380.
- Hansen P. R., Lunde A. (2005), *A Forecast Comparison of Volatility Models. Does Anything Beat a GARCH (1, 1)?* Journal of Applied Econometrics, 20.
- Hansen P. R., Kim J., Lunde A. (2003), *Testing for Superior Predictive Ability using Ox. A Manual for SPA for Ox.*
- Hansen P.R., Lunde A., Nason J. H. (2005), *Model Confidence Set for Forecasting Models*, Working Papers, 7.
- Hansen P.R., Lunde A., Nason J. H. , (2003), *Choosing the Best Volatility Models. The Model Confidence Set Approach*, Oxford Bulletin of Economics & Statistics, 65, 839-861.
- Hansen P.R., Lunde A. (2006), *Consistent Ranking of Volatility Models*, Journal of Econometrics 127, 97-121
- Johannes M., Polson N., Stroud J., (2002), *Sequential Optimal Portfolio Performance: Market and Volatility Timing*. Wharton School, University of Pennsylvania, Working Paper
- Kim S, Shephard N., Chib S. (1998), *Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models*, Review of Economic Studies, 65, 361-393
- Koopman, S.J., Jungbacker, B., Hol, E. (2005), *Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realized and Implied Volatility Measurement*. Journal of Empirical Finance, 12.
- Lambert P., Laurent S. (2001), *Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovation*, [Discussion Paper 01-25], Institut de Statistique, Université Catholique de Lovain, Lovain-la-Neuve.
- Lo, A. (1991), *Long term memory in stock market prices*, Econometrica, 59, 451-474.
- Mandelbrot, B.B. and Wallis, J.R. (1968), *Noah, Joseph and operational hydrology*, Water Resources Research, 4, 909-918
- Martens, M. (2002), *Measuring and Forecasting S&P 500 Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data*, Journal of Futures Markets, 22, 497 – 518.
- Nagayasu J. (2006), *Modeling and Predicting Japanese Stock Returns Based on ARFIMA-FIGARCH*, Financial Markets, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Nelson D.B. (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns. A New Approach*, Econometrica, 59, 347-370.

- Patton A. J. (2006), *Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies*, Quantitive Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, Research Paper, 175.
- Patton A.J. Sheppard K. (2007), *Evaluating Volatility and Correlation Forecasts*, Oxford –Man institute of Quantitative Finance, Working Paper.
- Pluciennik P., Buszkowska E. (2006), *Modeling and Forecasting the Implied Volatility of the WIG20 Index*, Proceedings of the Thirty Third International Conference,.
- Politis D. N., Romano J.P. (1994), *The Stationary Bootstrap*. Journal of the American Statistical Association.
- Souza L., Veiga A., Medeiros M., C. (2002), *Evaluating the Forecasting Performance of GARCH Models Using White's Reality Check*. Departament de Economia PUC- RIO. Texto Para Discussao, 453
- Stock J.H., Watson M. (2004), *Combination forecasts of output growth in seven-country data set*, Journal of Forecasting , 23, 405-430.
- Timmerman A., (2006), *Forecast combinations*, Handbook of Economic Forecasting, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 135-196.
- Vilhelmsson A. (2006), *GARCH forecasting performance under different distribution assumptions*, Journal of Forecasting, Vol25, 561-578
- White H. (2000), *A reality check for data snooping*, Econometrica, 68, 1097-1126.

