

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Fizyki
Instytut Obserwatorium Astronomiczne

Krzysztof Langner

**Kanoniczne zmienne
Kustaanheimo-Stiefela w
zagadnieniach satelitarnych**

Canonical Kustaanheimo-Stiefel Variables in Satellite Problems

Rozprawa Doktorska

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Sławomira Breitera
w Instytucie Obserwatorium Astronomiczne
Wydziału Fizyki UAM



2019

Spis treści

Streszczenie	4
Abstract	6
Wstęp	8
1 Zmienne KS	11
1.1 Ruch keplerowski	11
1.2 Przekształcenie Sundmana	11
1.3 Kanoniczne przekształcenie Sundmana	13
1.4 Transformacja LC	14
1.5 Rozszerzenie kanoniczne transformacji LC	17
1.6 Transformacja KS	19
1.7 Opis kwaternionowy transformacji KS	21
1.8 Transformacja KS z dowolnym wektorem definiującym	23
1.9 Transformacja odwrotna	23
1.10 Rozszerzenie kanoniczne transformacji KS	25
1.11 Ruch keplerowski w zmiennych KS	26
1.12 Powiązania między całkami ruchu oscylatora i orbity keplerowskiej	28
1.13 Wpływ niezmiennika $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$ na dynamikę	31
1.14 Płaszczyzna Leviego-Civita	31
1.15 Obracający się układ współrzędnych	32
1.16 Ruch keplerowski w obracającym się układzie odniesienia	34
1.17 Zmienne KS3	36
2 Potencjał zaburzający w zmiennych KS	39
2.1 Harmoniki sferyczne	39
2.2 Obroty harmonik sferycznych, macierz Wignera D	41
2.3 Transformacja KS dla funkcji sferycznych	42
2.4 Pochodne funkcji Wignera względem zmiennych KS	44
2.5 Własności funkcji Wignera i równania rekurencyjne	47
2.6 Geopotencjał	51
2.7 Potencjał perturbacji wywołanych przez trzecie ciało	52
2.8 Rozwinięcie w szereg	55
2.9 Ciśnienie promieniowania	55
3 Zastosowanie zmiennych KS do całkowania numerycznego orbit sztucznych satelitów	57
3.1 Metoda podziału	57

3.2	Integrator Laskara-Robutela	59
3.3	Integrator Laskara-Robutela, a zmienne KS	60
3.4	Korektor symplektyczny	61
3.5	Dokładność obliczeń	62
3.6	Wpływ mimośrodu orbity na dokładność obliczeń	63
3.7	Badanie stabilności orbit	66
3.8	Równania wariacyjne dla sztucznego satelity	68
3.9	Obliczanie MEGNO	71
3.10	Integrator	73
3.11	Orbity geosynchroniczne	74
4	Zmienne Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela	81
4.1	Transformacja Lissajous	81
4.2	Interpretacja geometryczna	82
4.3	Rozszerzona transformacja LC	82
4.4	Wybór parametru α	85
4.5	Rozszerzona transformacja Lissajous	85
4.6	Transformacja Lissajous a zagadnienie keplerowskie	87
4.7	Transformacja Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela	88
4.8	Redukcja i ostateczna postać transformacji	92
4.9	Powiązanie zmiennych LKS z elementami orbity	93
4.10	Orbity szczególne w zmiennych LKS	96
4.11	Transformacja LKS z dowolnym wektorem definiującym	99
4.12	Zastosowanie do zagadnienia Lidowa-Kozai	99
	Podsumowanie	106
	A Algebra kwaternionów	108
	B Wyprowadzenie równań na pochodne funkcji Wignera	111
	Bibliografia	113

Streszczenie

Zmienne Kustaanheimo-Stiefela (KS) stosowane są w trójwymiarowym zagadnieniu keplerowskim. Transformacja KS regularyzuje i linearyzuje to zagadnienie przekształcając je w czterowymiarowy oscylator harmoniczny. Celem tej pracy jest rozwinięcie formalizmu transformacji KS oraz zastosowanie jej do zagadnień związanych z dynamiką sztucznych satelitów Ziemi, stosując zarówno metody numeryczne jak i analityczne.

Pierwszy rozdział pracy zawiera przedstawienie transformacji KS oraz jej dwuwymiarowego odpowiednika – transformacji Leviego-Civita – zarówno w ujęciu klasycznym, jak i z wykorzystaniem formalizmu kanonicznego. Przy opisie wykorzystany został formalizm kwaternionowy, który jest wygodnym narzędziem do opisu transformacji KS. Przedstawiona jest także interpretacja geometryczna tej transformacji oraz jej związek z obrotami w trzech wymiarach. Sama transformacja zostaje uogólniona przez wprowadzenie tak zwanego wektora definiującego, który uniezależnia opis od wyboru układu współrzędnych. Dzięki tej swobodzie, odpowiedni wybór wektora definiującego może pozwolić na prostsze wyrażenie sił perturbujących ruch keplerowski, zwłaszcza gdy posiadają one pewną oś symetrii. Jako przykład przedstawiono rozwiązanie równań ruchu keplerowskiego w obracającym się układzie współrzędnych i pokazano, że odpowiedni wybór wektora definiującego pozwala uprościć rozwiązanie i ograniczyć obrót w przestrzeni KS do dwóch stopni swobody.

W drugim rozdziale przedstawione zostały siły zaburzające ruch sztucznego satelity: geopotencjał, oddziaływanie grawitacyjne ciał trzecich (na przykład Słońca lub Księżyca) oraz ciśnienie promieniowania słonecznego. Potencjał tych zaburzeń został wyrażony jawnie w zmiennych KS. W przypadku geopotencjału, stosowane zazwyczaj harmoniki sferyczne zastąpione zostały w przestrzeni KS swoim czterowymiarowym odpowiednikiem – funkcjami Wignera. Funkcje te najczęściej są wykorzystywane do opisu obrotu i mogą być przedstawione jako funkcje kątów Eulera lub kwaternionu opisującego dany obrót. Wykorzystując związek transformacji KS z obrotem, geopotencjał został wyrażony poprzez funkcje Wignera, których argumentem są zmienne KS. Przedstawione zostały własności tych funkcji oraz ich pochodne dowolnego rzędu a także wzory rekurencyjne pozwalające w dogodny sposób wyliczać funkcje kolejnych rzędów.

Oddziaływanie trzeciego ciała (grawitacyjne oraz wynikające z ciśnienia promieniowania) do zastosowań analitycznych zostało rozwinięte w szereg wielomianów Legendre'a, a następnie wyrażone przez funkcje Wignera zmiennych KS, otrzymując postać analogiczną z geopotencjałem. Jednak do zastosowań numerycznych stosowane jest proste podstawienie równań transformacji KS do potencjału w zmiennych kartezjańskich.

W trzecim rozdziale przedstawiono zastosowanie transformacji KS w obliczeniach numerycznych. W tym celu wykorzystano samodzielnie stworzony integrator numeryczny wykorzystujący symplektyczną metodę całkowania Laskara-Robutela. Opisana została zasada jego działania oraz zbadany został wpływ mimośrod orbit na dokładność obliczeń, a integrator został użyty do zbadania długookresowej ewolucji orbit geosynchronicznych. Równoległe z równaniami ruchu całkowane były równania wariacyjne umożliwiając zbadanie stabilności orbit z użyciem wskaźnika MEGNO (pokrewnego z wykładnikiem Lapunowa).

Czwarty rozdział skupia się na metodach analitycznych. Wprowadzony zostaje nowy rodzaj zmiennych typu ką-t-działanie: zmienne Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela (LKS). Zmienne te powstają przez połączenie transformacji KS oraz dwóch transformacji Lissajous. Każda z transformacji Lissajous obejmuje dwa z czterech stopni swobody. Samą transformację Lissajous uogólniono, umożliwiając jej stosowanie w rozszerzonej przestrzeni fazowej, co pozwala na bezproblemowe stosowanie całego formalizmu do zagadnień z jawną zależnością od czasu. Zaproponowane zmienne LKS posiadają użyteczną właściwość – są nieosobliwe dla orbit prostoliniowych. Jako przykład zastosowania transformacji LKS przeanalizowane zostało klasyczne zagadnienie rezonansu Lidowa-Kozai. Użycie tego zestawu zmiennych umożliwiło łatwiejszą analizę orbit o mimośrodku zbliżonym do jedności oraz orbit prostoliniowych.

Abstract

Kustaanheimo-Stiefel (KS) variables are used in three-dimensional Keplerian problem. They serve to regularize and linearize the problem, and to transform it into a four-dimensional harmonic oscillator. The main goal of this thesis is to improve the formalism of the KS transformation and to apply it in artificial satellite dynamics, using both numerical and analytical treatment.

In the first chapter, the KS transformation and its two-dimensional equivalent, the Levi-Civita transformation, are introduced using classical and canonical formulations. The KS transformation is described in the convenient language of quaternions. Connection between the KS transformation and rotation in three dimensions is also shown. The KS variables are generalized by introduction of the so called defining vector, which allows to formulate the transformation without specifying the reference frame, and creates a family of KS transforms. A proper choice of the defining vector can simplify perturbing potentials, especially if given problem contains a symmetry axis and the defining vector is parallel to this axis. As an example, the unperturbed Keplerian problem is solved in a rotating reference frame. If the defining vector has the same direction as the rotation axis, the rotation in KS space can be restricted to two degrees of freedom only.

In the second chapter, the main perturbing forces in the satellite problem are described using the KS variables. They are: the geopotential, a third body gravitational force and the Solar radiation pressure. The geopotential is traditionally expressed by spherical harmonics. In the KS space, the harmonics are replaced by their four dimensional equivalent, Wigner D functions. The Wigner functions are commonly used to describe rotation of spherical harmonics and can be expressed by the Euler angles or the quaternions of rotation. The connection between the KS variables and rotation is used to express the geopotential in terms of the KS variables by means of the Wigner functions. Some properties of these functions, their derivatives with respect to the KS variables, and recurrence formulas are also described.

Third body perturbations (both gravitational and the radiation pressure) can be expanded into Taylor series using the Legendre polynomials. Then, the Legendre functions can be replaced by spherical harmonics and later by the Wigner functions of KS variables. In effect, the geopotential and the third body perturbations can be derived with a similar formulation. However, for numerical applications the third body potential can also be handled by a simple substitution of the KS variables into the Cartesian variables.

The third chapter is focused on the numerical application of the KS transformation. A numerical integrator, using the Laskar-Robutel symplectic method and the KS variables, has been designed and programmed. The influence of high eccentricity on the integration precision has been investigated, and the software has been applied to study geosynchronous orbits. The variational equations have been integrated alongside with the equations of motion to provide the stability maps using the MEGNO indicator (related to the Lyapunov exponent).

The fourth chapter is focused on analytical methods. A new set of the action-angle variables for regularized Keplerian problem is introduced, named the Lissajous-Kustaanheimo-Stiefel variables (LKS). They are created by combining the Lissajous transformation of a two-dimensional harmonic oscillator with the KS transformation.

Two Lissajous transforms are constructed – one for each pair of degrees of freedom in the four degrees of freedom KS space. An extension of the Lissajous transform is proposed to allow the use this formalism in explicitly time-dependent problems. The new set of variables is nonsingular for radial orbits and can be effectively applied to high eccentricity orbits. As an example, the classical Lidov-Kozai resonance is described in terms of the LKS variables.

Wstęp

Względne zagadnienie dwóch ciał (nazywane też dalej zagadnieniem keplerowskim) opisuje ruch jednego punktu materialnego wokół drugiego, znajdującego się w środku układu współrzędnych, pod wpływem siły wzajemnej grawitacji. W zagadnieniu tym występuje osobliwość: gdy punkt materialny zbliża się do środka układu współrzędnych, wtedy odległość między punktami dąży do zera, a wartość siły grawitacji dąży do nieskończoności. Z tego powodu z analizy trzeba wyłączyć trajektorie które mają swój początek w środku układu współrzędnych, a na trajektoriach, które przez niego przechodzą w skończonym czasie, prędkość osiąga nieskończoną wartość. Według Cordaniego [13] przez regularyzację, w ogólnym tego słowa znaczeniu, należy rozumieć dodanie do przestrzeni fazowej tych brakujących trajektorii. W przypadku zagadnienia względnego dwóch ciał taką regularyzacją jest transformacja Sundmana, która polega na zastąpieniu fizycznego czasu nową zmienną, na przykład anomalią mimośrodową. Umożliwia ona sparametryzowanie dowolnych trajektorii, w tym również tych przechodzących przez początek układu współrzędnych. Oczywiście, osobliwość nie jest jedynie matematyczna, ale odpowiada ona fizycznemu zderzeniu się obu ciał. O ile więc trajektorie kolizyjne nie są na ogół interesujące, to regularyzacja usprawnia analizę orbit w otoczeniu tych trajektorii, a więc orbit o dużych mimośrodkach (rozumianych jako mimośrodory orbit eliptycznych zbliżone do wartości 1 – orbity paraboliczne i hiperboliczne nie są brane w pod uwagę w tej pracy).

Cordani wymienia trzy sposoby regularyzacji: metodę Mosera, Souriau oraz Kustaanheimo-Stiefela (KS) i ta ostatnia jest tematem tej rozprawy. Nowszym podejściem do regularyzacji jest sformułowanie DROMO [38]. Podejście to posiada pewną wadę: transformacja wykorzystuje wektor momentu pędu. Wektor ten jest wektorem zerowym dla orbit prostoliniowych, przez co cała transformacja jest osobliwa dla takich orbit nawet poza punktem kolizji, co jest sprzeczne z podstawowym powodem stosowania regularyzacji. Mimo to, ma ona pewne praktyczne zastosowania [39] i może być użyta na przykład do planowania misji kosmicznych. Jest to jednak regularyzacja w sensie słabszym, czyli zniwelowanie wpływu drugiego prawa Keplera i zapewnienie jednostajnego ruchu po orbicie.

Transformacja KS została wynaleziona przez Paula Kustaanheimo [29] i rozpropagowana przez Kustaanheimo i Stiefela [30], a rozwinięta przez Stiefela i Scheifele [43]. Istotną zaletą tej transformacji jest to, że poza regularyzacją, dodatkowo linearyzuje trójwymiarowe zagadnienie Keplerowskie przekształcając je w czterowymiarowy oscylator harmoniczny. Transformacja KS wymaga wprowadzenia dodatkowego stopnia swobody, przez co nie jest ona wzajemnie jednoznaczna – jednemu punktowi w przestrzeni kartezjańskiej odpowiada cały zbiór punktów w przestrzeni KS, zwany włóknem. Zaletą transformacji KS jest możliwość użycia formalizmu kanonicznego.

Celem tej pracy jest rozwinięcie formalizmu transformacji KS w kontekście za-

stosowania do badania dynamiki sztucznych satelitów, a następnie zastosowanie go zarówno w obliczeniach numerycznych jak i analitycznych. Transformacja KS może być zastosowana do zagadnień związanych z dynamiką sztucznego satelity, przede wszystkim dla satelitów o dużym mimośrodku. Dla obiektów na orbitach geocentrycznych istnieje fizyczne ograniczenie maksymalnego mimośrodu jaki mogą osiągnąć, a gdy jest ono przekroczone satelita wchodzi w gęste partie atmosfery albo dochodzi do kolizji z powierzchnią Ziemi. Satelity na niskich orbitach muszą więc mieć orbity prawie kołowe, dlatego stosowanie dla nich regularyzacji nie ma większego sensu. W przypadku wysokich orbit mimośród może być większy i regularyzacja powinna usprawnić obliczenia. Dla wysokich orbit opór atmosfery jest pomijalny, co umożliwia stosowanie formalizmu kanonicznego i wykorzystanie jego zalet.

Analizę transformacji KS warto zacząć od zbadania jej szczególnych geometrycznych własności. Już od czasów Stiefela i Scheifele znane jest powiązanie zmiennych KS z kwaternionami. Algebra kwaternionów okazała się być wygodnym narzędziem, dzięki któremu można w prostszy i bardziej czytelny sposób wyprowadzić i pokazać własności transformacji KS, co jest głównym celem rozdziału pierwszego. Własności te mogą być później wykorzystane do sformułowania w zmiennych KS zagadnienia ruchu sztucznego satelity pod wpływem określonych sił perturbujących.

Wyrażenie w sposób praktyczny potencjału zaburzającego oraz jego pochodnych przez te zmienne jest więc głównym celem rozdziału drugiego niniejszej rozprawy. Główne siły zaburzające ruch sztucznego satelity to siła pochodząca od geopotencjału oraz oddziaływanie Słońca i Księżyca (lunisolarne). Najprostsze podejście do wyliczania potencjału i jego pochodnych polega na prostym podstawieniu równań transformacji do wyrażenia potencjału przez zmienne kartezjańskie, a w przypadku pochodnych – na wykorzystaniu macierzy Jacobiego. Znalezienie sposobu na wyrażenie potencjału i jego pochodnych wprost poprzez zmienne KS, bez potrzeby przechodzenia przez współrzędne, może być jednak wydajniejszą metodą. Dlatego w drugim rozdziale wyprowadzone zostaną praktyczne wzory na wyrażenie potencjału zaburzającego przez zmienne KS (dla geopotencjału i zaburzeń lunisolarnych) oraz jego pochodnych dowolnego rzędu w postaci wygodnej do zastosowania w obliczeniach numerycznych albo dalszego przekształcenia w podejściu analitycznym.

Mając odpowiednio sformułowane zagadnienie, można przejść do właściwych obliczeń. W tym celu wykorzystano integrator symplektyczny wykorzystujący transformację KS i zastosowano go do całkowania orbit sztucznych satelitów, co pokazane jest w rozdziale trzecim. Metody symplektyczne są stabilne na długim odcinku czasu i zachowują funkcję Hamiltona, to znaczy podczas całkowania błąd w funkcji Hamiltona nie posiada trendu wiekowego (poza błędem zaokrąglenia). Umożliwia to badanie długookresowej dynamiki satelitów. Metody symplektyczne wymagają jednak stałego kroku całkowania, co sprawia że stosowanie ich do orbit o dużym mimośrodku jest niewydajne. Zastosowanie regularyzacji pozwala obejść tę niedogodność, zastępując stały krok czasu stałym krokiem nowej zmiennej niezależnej. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie integratora symplektycznego do badania długookresowych zmian mimośrodu dla wysokich orbit.

Rozdział czwarty skupia się na podejściu analitycznym, a jego głównym celem jest wprowadzenie nowych zmiennych typu ką-t-działanie. Rozważania analityczne z użyciem formalizmu transformacji KS były już proponowane przez Stiefela i Scheifele [43], ale uzmiennili oni amplitudy oscylatora, co nie było zbyt wygodne, ani nie uwzględniało degeneracji układu. Późniejsze podejścia (np. Zhao [49]) były lepsze,

ale proponowane zmienne były osobliwe dla orbit prostoliniowych, a ich stosowanie stawało się kłopotliwe gdy perturbacje zależą jawnie od czasu. Dlatego też w czwartym rozdziale zostały zaproponowane nowe zmienne typu ką-działanie, oparte na transformacji Lissajous i zmiennych KS, które są nieosobliwe dla orbit prostoliniowych, a całe przekształcenie jest w pełni kanoniczne i może być stosowane dla perturbacji jawnie zależnych od czasu.

Rozdział 1

Zmienne KS

1.1 Ruch keplerowski

Ruch punktu materialnego o masie m wokół punktu o masie m_0 pod wpływem siły wzajemnej grawitacji jest opisany przy pomocy kartezjańskiego wektora położenia $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, przez równania

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

gdzie $\mu = k^2(m + m_0)$ to parametr grawitacyjny równy iloczynowi kwadratu stałej Gaussa k i sumy mas obu ciał, a $r = \|\mathbf{x}\|$. To samo równanie (1.1) opisuje także ruch masy m wokół barycentrum układu; wtedy jednak parametr grawitacyjny jest zdefiniowany jako $\mu = k^2 m_0^3 (m + m_0)^{-2}$. Zagadnienie dwóch ciał może zostać także opisane za pomocą kanonicznych równań Hamiltona. Mają one postać

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_i}, \quad \dot{X}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad (i = 1..3), \quad (1.2)$$

gdzie \mathbf{X} to wektor pędów kanonicznie sprzężonych z \mathbf{x} , a

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (1.3)$$

to funkcja Hamiltona. W postaci jawnej równania (1.2) przyjmują postać

$$\dot{x}_i = X_i, \quad \dot{X}_i = -\frac{\mu}{r^3}x_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Powyższe równania ruchu są silnie nieliniowe oraz posiadają osobliwość dla $r = 0$, a więc w środku układu współrzędnych. Odpowiada ona kolizji obu ciał zarówno w przypadku względnym jak i barycentrycznym.

1.2 Przekształcenie Sundmana

Aby wyeliminować osobliwość kolizyjną, zagadnienie dwóch ciał można zregularyzować. Regularyzacja odbywa się poprzez wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej, czasu Sundmana τ – fikcyjnego czasu zdefiniowanego poprzez zależność

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta}{r}, \quad (1.5)$$

gdzie β jest dowolną stałą. Przekształcenie to zostało zaproponowane przez Sundmana [44], który jednak używał bezwymiarowego $\beta = 1$. Lepszym wyborem jest parametr, który ma wymiar długości, dzięki czemu nowa zmienna τ ma wymiar czasu. Można też przyjąć $\beta = na$, gdzie n to ruch średni, zaś a to półoś wielka orbity eliptycznej, które powiązane są ze sobą trzecim prawem Keplera $\mu = n^2 a^3$; wtedy nowa zmienna jest równa anomalii mimośrodowej E w ruchu keplerowskim, zdefiniowanej równaniem różniczkowym

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r}. \quad (1.6)$$

Oznaczając przez $'$ pochodną względem τ , pochodne względem czasu dowolnej funkcji f można wyrazić jako

$$\dot{f} = \frac{\beta}{r} f', \quad (1.7)$$

$$\ddot{f} = \frac{\beta^2}{r^2} f'' - \frac{\beta^2}{r^3} r' f'. \quad (1.8)$$

Równanie (1.1) po zamianie zmiennej niezależnej i pomnożeniu przez r^3 zostaje przekształcone w

$$\beta^2 r \mathbf{x}'' - \beta^2 r' \mathbf{x}' + \mu \mathbf{x} = 0. \quad (1.9)$$

Dzięki regularyzacji nowe równanie nie jest osobliwe dla $r = 0$. Osobliwość ta ma jednak charakter fizyczny (zderzenie obu mas), więc nie znika bez śladu: czas rzeczywisty t w momencie zderzenia ma pochodną $t' = 0$, a równanie definiujące czas Sundmana (1.5) jest w tym punkcie osobliwe.

Równanie (1.9) można rozwiązać wykorzystując całki pierwsze zagadnienia dwóch ciał – całkę Laplace'a

$$\mu \mathbf{e} = \left(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \frac{\beta^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{x} - \frac{\beta^2}{r^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{x}', \quad (1.10)$$

oraz całkę energii

$$h = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \beta^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}. \quad (1.11)$$

Z (1.10) wynika, że

$$\beta^2 r' \mathbf{x}' = -\mu r \mathbf{e} - \mu \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \beta^2}{r} \mathbf{x}, \quad (1.12)$$

co po wstawieniu do (1.9) daje

$$\beta^2 r \mathbf{x}'' + \mu r \mathbf{e} - \left(\frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \beta^2}{2r} - \mu \right) 2\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

Wykorzystując (1.11) otrzymujemy

$$\mathbf{x}'' = \frac{2h\mathbf{x}}{\beta^2} - \frac{\mu\mathbf{e}}{\beta^2}. \quad (1.14)$$

Jest to liniowe równanie oscylatora harmonicznego z częstotliwością

$$\omega = \sqrt{-\frac{2h}{\beta^2}}, \quad (1.15)$$

i stałym wymuszeniem $-\frac{\mu\mathbf{e}}{\beta^2}$.

Charakter ruchu zależy od wartości h . Gdy $h < 0$, wtedy ω jest liczbą rzeczywistą i rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{x}(\tau) = (\mathbf{x}(\tau_0) + a\mathbf{e}) \cos \omega(\tau - \tau_0) + \frac{\mathbf{x}'(\tau_0)}{\omega} \sin \omega(\tau - \tau_0) - a\mathbf{e}, \quad (1.16)$$

gdzie a to pólś wielka orbity, która wynosi $a = -\frac{\mu}{2h}$. Dla $h > 0$, częstość ω jest liczbą urojoną, więc funkcje trygonometryczne są zastąpione hiperbolicznymi

$$\mathbf{x}(\tau) = (\mathbf{x}(\tau_0) - a\mathbf{e}) \cosh \omega(\tau - \tau_0) + \frac{\mathbf{x}'(\tau_0)}{\omega} \sinh \omega(\tau - \tau_0) + a\mathbf{e}, \quad (1.17)$$

gdzie $a = \frac{\mu}{2h}$ oznacza pólś rzeczywistą hiperboli. W skrajnym przypadku, gdy $h = \omega = 0$, rozwiązaniem jest parabola

$$\mathbf{x}(\tau) = -\frac{\mu\mathbf{e}}{2\beta^2}(\tau - \tau_0)^2 + \mathbf{x}'(\tau_0)(\tau - \tau_0) + \mathbf{x}(\tau_0). \quad (1.18)$$

Transformacja Sundmana regularyzuje zagadnienie dwóch ciał, a z wykorzystaniu całek ruchu możliwa jest linearyzacja i sprowadzenie do postaci oscylatora harmonicznego ze stałym przesunięciem zależnym od wektora Laplace'a.

1.3 Kanoniczne przekształcenie Sundmana

Zmiana zmiennej niezależnej jest także możliwa w przypadku równań kanonicznych. Niech $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$ będzie dowolną funkcją Hamiltona, a \mathbf{x} i \mathbf{X} będą odpowiednio wektorami położeń i kanonicznie sprzężonych pędów. Transformacja Sundmana wymaga rozszerzenia przestrzeni fazowej poprzez wprowadzenie nowego hamiltonianu $\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, v^*, V^*)$ z nową parą zmiennych: położenia v^* i pędu V^* , którego wartość jest taka, że

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, v^*) + V^* = 0. \quad (1.19)$$

Nowa zmienna v^* zastępuje w hamiltonianie fizyczny czas t , gdyż

$$\dot{v}^* = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial V^*} = 1, \quad (1.20)$$

a więc $v^* = t + \Delta$, gdzie $\Delta = \text{const}$. Następnie wprowadzamy nowy hamiltonian

$$\mathcal{K} = \frac{dt}{d\tau}(\mathcal{H} + V^*) = 0. \quad (1.21)$$

Nawias Poissona dowolnej funkcji $f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, v^*)$ z tym hamiltonianem wynosi

$$\{f, \mathcal{K}\} = \frac{dt}{d\tau} \{f, \mathcal{H} + V^*\} = \frac{dt}{d\tau} \frac{df}{dt} = f', \quad (1.22)$$

a zatem nawias Poissona dowolnej funkcji z hamiltonianem \mathcal{K} jest pochodną tej funkcji względem czasu Sundmana τ . Należy pamiętać, że powyższa równość jest prawdziwa tylko gdy $\mathcal{H} + V^* = 0$. W szczególności, dla dowolnego położenia x_i oraz pędu X_i

$$x'_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X_i}, \quad X'_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_i} \quad (1.23)$$

oraz

$$(v^*)' = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial V^*} = \frac{dt}{d\tau}, \quad (V^*)' = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial v^*}. \quad (1.24)$$

Jeśli zastosujemy tę transformację do zagadnienia dwóch ciał z hamiltonianem (1.3), to

$$\mathcal{K} = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{2\beta} r + \frac{V^*}{\beta} r - \frac{\mu}{\beta}. \quad (1.25)$$

Składnik $-\frac{\mu}{\beta}$ jest stały i nie wpływa na równania ruchu, ale nie powinien on być pomijany, gdyż bez niego nie byłby spełniony warunek $\mathcal{K} = 0$. Równania ruchu (1.23) mają postać

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{X}r}{\beta}, \quad \mathbf{X}' = -\frac{\mathbf{x}}{r\beta} \left(\frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{2} + V^* \right). \quad (1.26)$$

Równanie dla pędów można uprościć do postaci

$$\mathbf{X}' = -\frac{\mathbf{x}}{r^2} \left(\mathcal{K} + \frac{\mu}{\beta} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{r^2} \frac{\mu}{\beta}. \quad (1.27)$$

Otrzymane równania nie są liniowe, a równanie dla pędów nadal posiada osobliwość dla $r = 0$. Jeśli z równań kanonicznych (1.26) wyprowadzimy równanie drugiego rzędu

$$\mathbf{x}'' = \frac{1}{\beta} (\mathbf{X}'r + r'\mathbf{X}) = \frac{1}{\beta} \left(r'\mathbf{X} - \frac{\mathbf{x}\mu}{r\beta} \right), \quad (1.28)$$

to podstawiając $X = \dot{x} = \frac{\beta}{r}x'$ otrzymamy zregularyzowane równanie (1.9), które można zlinearyzować wykorzystując całki pierwsze, tak jak pokazano wcześniej. Jeśli jednak chcemy pozostać przy równaniach kanonicznych pierwszego rzędu, to do linearyzacji i regularyzacji zagadnienia konieczna jest dodatkowa transformacja położeń i pędów.

1.4 Transformacja LC

Ruch w zagadnieniu keplerowskim odbywa się po krzywej płaskiej lub wzdłuż prostej, a więc może być opisany jako ruch w dwuwymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej z wektorem położenia $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$. Levi-Civita zaproponował linearyzację dwuwymiarowego zagadnienia dwóch ciał [33] poprzez transformację przy użyciu zmiennych zespolonych $x = x_1 + ix_2$, oraz $v = v_1 + iv_2$, daną równaniem

$$\alpha x = v^2, \quad (1.29)$$

co jest równoznaczne z przekształceniem zmiennych rzeczywistych

$$\alpha x_1 = v_1^2 - v_2^2, \quad (1.30)$$

$$\alpha x_2 = 2v_1v_2, \quad (1.31)$$

gdzie α jest dowolnym stałym parametrem większym od zera. Podobnie jak w przypadku przekształcenia Sundmana, zazwyczaj przyjmuje się bezwymiarowe $\alpha = 1$, ale lepiej jest, tak jak Deprit i Williams [16], wprowadzić dowolne α i gdy parametr ma wymiar długości, wtedy v także ma wymiar długości. Przekształcenie to nosi

nazwę przekształcenia Lewiego-Civity (LC) i jest ono przekształceniem konforemnym przestrzeni zespolonej, które nie jest jednoznaczne, to znaczy prawie każdemu punktowi x (poza $x = 0$) przyporządkowane są dwa punkty: v i $-v$.

Liczby zespolone można przedstawić jako macierze

$$a + ib = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

przy czym dodawanie i mnożenie zespolone zostaje zastąpione dodawaniem i mnożeniem macierzy. Zapisując w ten sposób przekształcenie LC

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

a następnie biorąc pod uwagę tylko pierwsze kolumny macierzy

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

otrzymujemy transformację w postaci wektorowej, zaproponowanej przez Stiefela i Scheifele [43], z macierzą przekształcenia

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

która jest macierzowym zapisem liczb zespolonej v .

Geometryczne znaczenie tego przekształcenia można poznać wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej

$$x = r \exp i\phi, \quad v = \pm \sqrt{r\alpha} \exp i\frac{\phi}{2}. \quad (1.36)$$

Argument liczby zespolonej zmniejszył się o połowę, a moduł $|v|$ jest pierwiastkiem modułu $|\alpha x|$, co oznacza że odległość

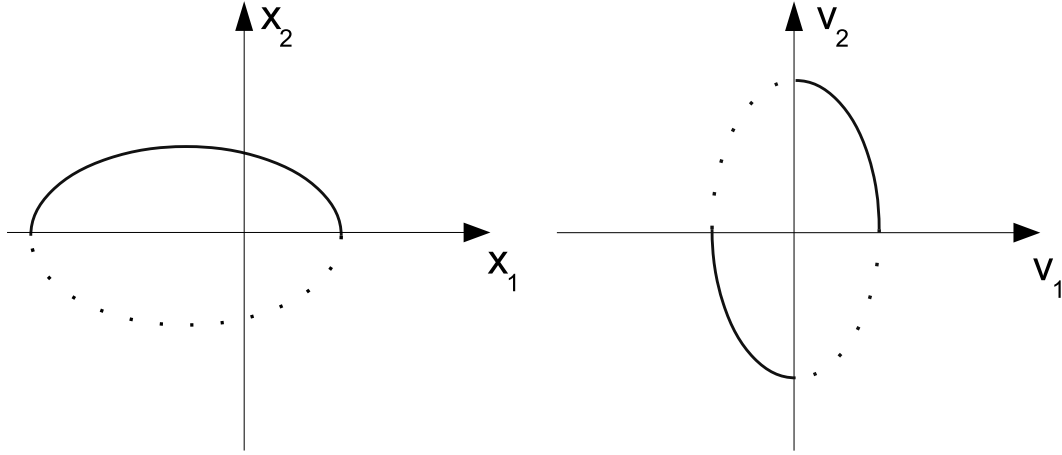
$$r = |x| = \frac{|v|^2}{\alpha}. \quad (1.37)$$

Można to zobrazować obserwując jak transformuje się elipsa keplerowska. W zmiennych kartezjańskich, eliptyczny ruch keplerowski wyraża się za pomocą anomalii mimośrodowej wzorami

$$x_1 = a(\cos E - e), \quad x_2 = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (1.38)$$

Powyższe równania są parametrycznymi równaniami opisującymi elipsę o półosi wielkiej a , mimośrodku e i półosi małej $a\sqrt{1 - e^2}$ ze środkiem przesuniętym wzdłuż osi x_1 o odległość ogniskową ae . Punkt najbliższy środkowi układu współrzędnych (perycentrum orbity) ma $E = 0$, a najdalszy (apocentrum) $E = \pi$ i znajdują się one na końcach obu półosi wielkich. Gdy zastosujemy transformację LC do elipsy (1.38) i przyjmiemy $\alpha = a$, równania przyjmują postać

$$v_1 = \pm a\sqrt{(1 - e)} \cos \frac{E}{2}, \quad v_2 = \pm a\sqrt{(1 + e)} \sin \frac{E}{2}. \quad (1.39)$$



Rysunek 1.1: Połowa elipsy keplerowskiej we współrzędnych (x_1, x_2) przekształca się w dwie ćwiartki elipsy na płaszczyźnie (v_1, v_2)

Kąt E został podzielony przez 2, co oznacza, że połowa elipsy na płaszczyźnie (x_1, x_2) odpowiada dwóm przeciwległym ćwiartkom elipsy na płaszczyźnie (v_1, v_2) (rys. 1.1). Środek elipsy na płaszczyźnie (v_1, v_2) jest przesunięty do środka układu współrzędnych. Perycentrum zostało odwzorowane na dwa punkty znajdujące się na końcach obu półosi małych, a apocentrum na punkty na końcach półosi wielkich nowej elipsy. Odległość tych punktów od środka układu współrzędnych jest średnią geometryczną odpowiednio odległości perycentrum lub apocentrum i półosi wielkiej a (w ogólności parametru α).

Gdy zróżniczkujemy (1.38) względem czasu, otrzymamy prędkości

$$\dot{x}_1 = -a \sin E \dot{E} = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (1.40)$$

$$\dot{x}_2 = a\sqrt{1 - e^2} \cos E \dot{E} = \frac{na\sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (1.41)$$

Równania te są równaniami parametrycznymi opisującymi pewną krzywą zwaną hodografem i w tym przypadku opisują okrąg o środku w punkcie $(0, \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}})$ i promieniu $\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$ (rys. 1.2a). Jeśli obliczymy prędkości względem czasu Sundmana (w tym przypadku anomalii mimośrodowej), wtedy otrzymamy równania

$$x'_1 = -a \sin E, \quad (1.42)$$

$$x'_2 = a\sqrt{1 - e^2} \cos E, \quad (1.43)$$

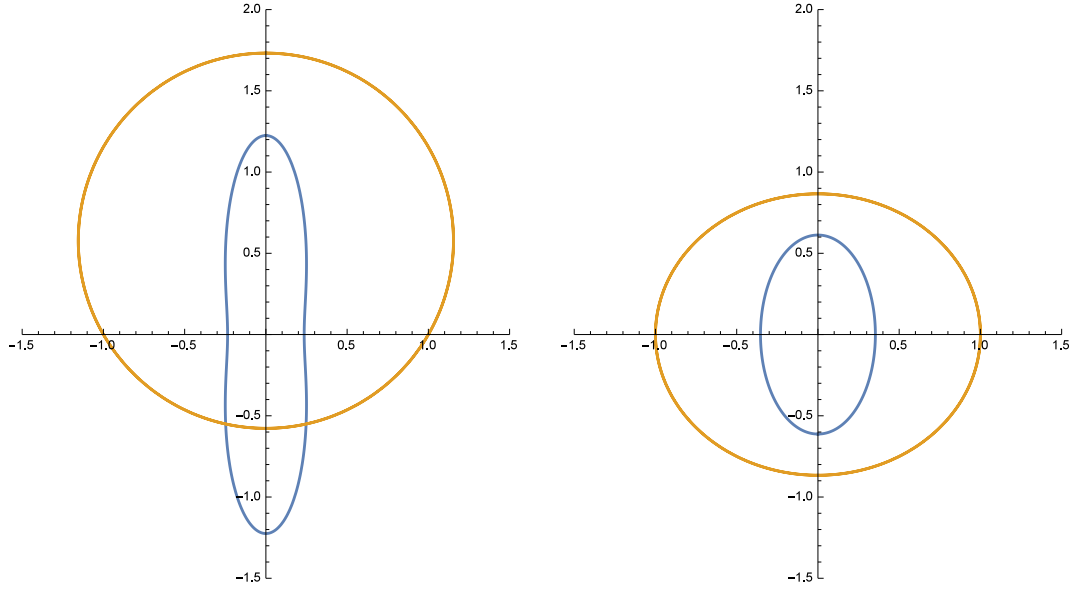
które opisują elipsę o środku w początku układu współrzędnych, półosi wielkiej a i półosi małej $b = a\sqrt{1 - e^2}$ (rys. 1.2b). Zróżniczkowanie równań w zmiennych LC (1.39) daje równania

$$v'_1 = \pm -\frac{1}{2}a\sqrt{(1 - e)} \sin \frac{E}{2}, \quad v'_2 = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(1 + e)} \cos \frac{E}{2}, \quad (1.44)$$

które opisują dwie połowy elipsy o półosiach $\frac{1}{2}a\sqrt{(1+e)}$ i $\frac{1}{2}a\sqrt{(1-e)}$ (rys. 1.2b). Półosie te mają długości będące średnimi geometrycznymi półosi wielkiej orbity oraz odpowiednio odległości apocentrum i perycentrum. Prędkości liczone względem czasu fizycznego wynoszą

$$\dot{v}_1 = \pm -\frac{na\sqrt{(1-e)}\sin\frac{E}{2}}{2(1-e\cos E)}, \quad \dot{v}_2 = \pm\frac{na\sqrt{(1+e)}\cos\frac{E}{2}}{2(1-e\cos E)} \quad (1.45)$$

i opisują nieco bardziej skomplikowaną krzywą zamkniętą (rys. 1.2a).



(a) Hodograf dla prędkości \dot{x} i \dot{v}

(b) Hodograf dla prędkości x' i v'

Rysunek 1.2: Hodografy dla $e = 0.5$ i $n = 1$, $a = 1$ dla różnych prędkości kartezjańskich (pomarańczowe) i LC (niebieskie) liczonych jako pochodne względem czasu fizycznego (lewy wykres) lub anomalii mimośrodowej (prawy wykres)

1.5 Rozszerzenie kanoniczne transformacji LC

Transformacja (1.34) jest transformacją punktową, a więc nowy wektor pędów \mathbf{V} sprzężonych z \mathbf{v} można otrzymać stosując rozszerzenie kanoniczne. Można tu zastosować transformację Mathieu, w której zachowana jest forma różniczkowa

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{v}. \quad (1.46)$$

Wprowadzając wielkości zespolone $X = X_1 + iX_2$, $V = V_1 + iV_2$, $x = x_1 + ix_2$, $v = v_1 + iv_2$ i oznaczając sprzężenie zespolone dowolnej liczby a jako \bar{a} , możemy zapisać (1.46) w postaci

$$\frac{1}{2}(Xd\bar{x} + \bar{X}dx) = \frac{1}{2}(Vd\bar{v} + \bar{V}dv). \quad (1.47)$$

Różniczkując (1.29) otrzymujemy

$$dx = \frac{2v}{\alpha}dv, \quad (1.48)$$

co po wstawieniu do (1.47) daje

$$\frac{1}{\alpha} (X\bar{v}d\bar{v} + \bar{X}v dv) = \frac{1}{2} (Vd\bar{v} + \bar{V}dv). \quad (1.49)$$

Porównując współczynniki przy $d\bar{v}$ lub dv otrzymujemy transformację pędów

$$V = \frac{2}{\alpha}\bar{v}X, \quad X = \frac{1}{2r}vV, \quad (1.50)$$

która w zapisie rzeczywistym ma postać

$$V_1 = \frac{2}{\alpha}(v_1X_1 + v_2X_2), \quad (1.51)$$

$$V_2 = \frac{2}{\alpha}(-v_2X_1 + v_1X_2),$$

oraz

$$X_1 = \frac{1}{2r}(v_1V_1 - v_2V_2), \quad (1.52)$$

$$X_2 = \frac{1}{2r}(v_2V_1 + v_1V_2). \quad (1.53)$$

W przeciwieństwie do przekształcenia położeń, transformacja ta dla wybranej wartości v jest wzajemnie jednoznaczna.

Funkcja Hamiltona w nowych zmiennych ma postać

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{8r}|V|^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\alpha}{8|v|^2}|V^2| - \frac{\alpha\mu}{|v|^2}. \quad (1.54)$$

Hamiltonian ten posiada osobliwość dla $r = 0$, ale można go zapisać jako $\mathcal{H} = \frac{\alpha}{4r} \left(\frac{|V|^2}{2} - \frac{4\mu}{\alpha} \right)$ i w tej postaci czynnik w nawiasie nie posiada osobliwości.

Kolejnym krokiem na drodze do linearyzacji zagadnienia jest zastosowanie kanonicznego przekształcenia Sundmana dla czasu. Wprowadzamy rozszerzoną przestrzeń fazową oraz czas Sundmana zdefiniowany równaniem (1.5). Wybierając

$$\beta = \frac{\alpha}{4}, \quad (1.55)$$

oraz korzystając z (1.21) otrzymujemy nowy hamiltonian

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + \frac{4}{\alpha^2}V^*\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\mu}{4\alpha} = 0, \quad (1.56)$$

z równaniami ruchu

$$v_1' = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial V_1} = V_1, \quad V_1' = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial v_1} = -\frac{8V^*}{\alpha^2}v_1 \quad (1.57)$$

$$v_2' = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial V_2} = V_2, \quad V_2' = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial v_2} = -\frac{8V^*}{\alpha^2}v_2, \quad (1.58)$$

$$(v^*)' = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial V^*} = \frac{4r}{\alpha}, \quad (V^*)' = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial v^*} = 0. \quad (1.59)$$

Równania (1.57) i (1.58) są liniowe i są równaniami dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego ze stałą częstością

$$\omega = \sqrt{\frac{8V^*}{\alpha^2}}. \quad (1.60)$$

Wyraz stały $-\frac{\mu}{4\alpha}$ w funkcji Hamiltona \mathcal{K} nie ma wpływu na równania ruchu, ale jego obecność ma znaczenie dla wartości V^* wynikającej z konieczności przyjęcia $V^* + \mathcal{H} = 0$. Od wartości V^* zależy charakter ruchu. Gdy $V^* > 0$, wtedy częstość ω jest liczbą rzeczywistą i ruch w zmiennych v odbywa się po krzywej zamkniętej – elipsie. Gdy $V^* < 0$, częstość jest liczbą urojoną i ruch odbywa się po hiperboli, a w szczególnym przypadku gdy $V^* = 0$ torem ruchu jest linia prosta. Po przejściu do zmiennych kartezjańskich tor eliptyczny w zmiennych v nadal ma kształt elipsy, a hiperboliczny nadal ma kształt hiperboli (choć ich kształt się zmienia i należy pamiętać że jednemu punktowi x odpowiadają dwa punkty v_1 i v_2 , patrz rysunek (1.1)), ale prosta na płaszczyźnie v staje się parabolą na płaszczyźnie kartezjańskiej (x_1, x_2) .

1.6 Transformacja KS

Odpowiednikiem transformacji LC dla trójwymiarowego zagadnienia dwóch ciał jest transformacja Kustaanheimo-Stiefela (KS), zaproponowana przez Paula Kustaanheimo [29] i rozwinięta przez Kustaanheimo i Stiefela [30]. Pierwszym podejściem do regularyzacji trójwymiarowego zagadnienia Keplerowskiego było wykorzystanie spinorów, zaproponowane przez Kustaanheimo [29]. Oznaczmy przez σ_i macierze spinowe Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Powyższa definicja przyjęta przez Kustaanheimo [29] różni się kolejnością oznaczeń $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ od zwyczajowo przyjmowanej (zazwyczaj $\sigma_x = \sigma_3, \sigma_y = \sigma_1, \sigma_z = \sigma_2$). Niech $\mathbf{s} = (S_1, S_2)$ będzie dwuwymiarowym wektorem zespolonym, a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Zdefiniujmy macierz

$$\mathbf{S} = 2 \begin{pmatrix} S_1 \bar{S}_1 & S_1 \bar{S}_2 \\ \bar{S}_1 S_2 & S_2 \bar{S}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

a wektorowi \mathbf{x} przypiszmy macierz

$$\mathbf{X} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} r + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & r - x_1 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Transformacja Kustaanheimo jest zdefiniowana poprzez przyrównanie tych macierzy

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}. \quad (1.64)$$

Z przekształcenia macierzowego można łatwo wyprowadzić przekształcenie dla poszczególnych zmiennych

$$\begin{aligned} x_1 &= S_1 \bar{S}_1 - S_2 \bar{S}_2, \\ x_2 &= S_1 \bar{S}_2 + \bar{S}_1 S_2, \\ x_3 &= i(S_1 \bar{S}_2 - \bar{S}_1 S_2), \end{aligned} \quad (1.65)$$

a także

$$r = S_1 \bar{S}_1 + S_2 \bar{S}_2 = |\mathbf{s}|^2 \quad (1.66)$$

W ten sposób przekształcamy trójwymiarowy wektor kartezjański \mathbf{x} w dwie liczby zespolone, co oznacza dodanie dodatkowego stopnia swobody. Podobnie jak w przypadku transformacji LC, drugim krokiem jest regularyzacja poprzez wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej. Kustaanheimo użył uogólnionej transformacji Sundmana

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta}{r} \exp\left(-\int K dt\right), \quad (1.67)$$

gdzie β to dowolna stała a K to dowolna rzeczywista funkcja t, \mathbf{x} i $\dot{\mathbf{x}}$. Zazwyczaj jednak przyjmuje się $K = 0$ i wtedy otrzymujemy zwykłą transformację Sundmana (1.5).

Dzięki transformacji Kustaanheimo problem keplerowski zostaje przekształcony w zagadnienie oscylatora harmonicznego z równaniami ruchu

$$\mathbf{s}'' = \frac{h}{2}\mathbf{s}, \quad (1.68)$$

gdzie h jest stałą energii. Uzyskanie takiej postaci wymaga przyjęcia dodatkowego założenia

$$\bar{S}_1 S_1' - S_1 \bar{S}_1' + \bar{S}_2 S_2' - S_2 \bar{S}_2' = 0. \quad (1.69)$$

Takie założenie jest możliwe, gdyż jak zauważył Kustaanheimo, zdefiniowana w (1.69) forma dwuliniowa nie zmienia swojej wartości pod wpływem perturbacji będących funkcjami położeń i prędkości kartezjańskich oraz czasu.

Transformację Kustaanheimo można w prosty sposób zredukować do transformacji Leviego-Civity, wystarczy na przykład przyjąć, że S_1 i S_2 są liczbami rzeczywistymi, wtedy

$$\begin{aligned} x_1 &= S_1^2 - S_2^2, \\ x_2 &= 2S_1 S_2, \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Ruch został ograniczony do płaszczyzny $x_3 = 0$ i otrzymaliśmy w ten sposób przekształcenie dwuwymiarowego wektora (x_1, x_2) w wektor (S_1, S_2) , które jest równoznaczne z transformacją LC (1.31). Alternatywnie można też przyjąć, że S_1 i S_2 są liczbami czysto urojonymi, co da nam podobny wynik, tylko w tym wypadku ruch ograniczy się do płaszczyzny $x_2 = 0$.

Przekształcenie zaproponowane przez Kustaanheimo zostało później rozwinięte przez Kustaanheimo i Stiefela [30] oraz Stiefela i Scheifele [43]. Porzucony został przez nich pomysł wykorzystania spinorów i liczb zespolonych, a zastosowany został formalizm macierzowo-wektorowy i liczby rzeczywiste. Jeśli do równań (1.65) wstawimy $S_1 = v_1 + iv_4$ oraz $S_2 = v_2 + iv_3$, to otrzymamy transformację w postaci rzeczywistej, w formie przedstawionej przez Kustaanheimo i Stiefela [30]

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2, \\ x_2 &= 2(v_1 v_2 + v_3 v_4), \\ x_3 &= 2(v_1 v_3 - v_2 v_4), \end{aligned} \quad (1.71)$$

które zostało także przedstawione przy pomocy macierzy

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 & -v_3 & v_4 \\ v_2 & v_1 & -v_4 & -v_3 \\ v_3 & v_4 & v_1 & v_2 \\ v_4 & -v_3 & v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \quad (1.72)$$

w postaci wektorowo-macierzowej jako

$$\mathbf{x} = L(\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (1.73)$$

W powyższym równaniu czwarta składowa wektora \mathbf{x} zawsze wynosi zero. Przy takiej notacji niezmiennik (1.69) ma postać

$$v'_1 v'_4 - v_4 v'_1 + v_2 v'_3 - v_3 v'_2 = 0. \quad (1.74)$$

Transformacja KS wyróżnia w pewien sposób pierwszą oś układu współrzędnych. Współrzędna x_1 wyraża się przez kombinację liniową kwadratów zmiennych KS, podczas gdy dwie pozostałe współrzędne mają postać sumy bądź różnicy iloczynów dwóch różnych zmiennych.

Dzięki pracom Kustaanheimo i Stiefela [30] oraz Stiefela i Scheifele [43] postać macierzowa transformacji była powszechnie stosowana, w przeciwieństwie do nieco zapomnianego pierwotnego sformułowania tego przekształcenia przy pomocy liczb zespolonych i spinorów. Oba te sposoby przedstawienia transformacji KS, zarówno reprezentacja spinorowa jak i macierzowa, ukazują pewien związek tej transformacji z algebrą kwaternionów [8]. Macierz L wykazuje pewne podobieństwo do reprezentacji kwaternionu jako rzeczywistej macierzy o wymiarach 4×4 , co zostało zauważone przez Stiefela i Scheifele [43], ale uznane za mało istotną ciekawostkę. Algebra spinorów w trzech wymiarach jest izomorficzna do algebry kwaternionów¹. Ten związek z kwaternionami został jednak wykorzystany dopiero przez Vivarelli [48], a później został rozwinięty przez Deprit, Elipe i Ferrera [15].

1.7 Opis kwaternionowy transformacji KS

Aby opisać przekształcenie KS za pomocą kwaternionów, zdefiniujmy $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ oraz $\mathbf{v} = (v_0, \mathbf{v}) = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, a także przyjmijmy kwaterniony jednostkowe

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= (1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{e}_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Korzystając z tych oznaczeń, transformacja KS w postaci kwaternionowej przedstawionej przez Deprit, Elipe i Ferrera [15], może zostać opisana jako

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{v} \mathbf{e}_1 \bar{\mathbf{v}}. \quad (1.76)$$

Ta definicja różni się od poprzednich. Wprowadzony został dodatkowo stały czynnik α , który ma wymiar długości i pełni taką samą rolę jak w przypadku transformacji Leviego-Civita, a więc sprawia, że \mathbf{v} ma także wymiar długości. Dodatkowo, zamiast v_4 występuje tutaj v_0 jako skalarna część kwaternionu. Transformacja dla

¹Podstawowe informacje o algebrze kwaternionów znajdują się w dodatku A.

poszczególnych składowych ma postać

$$\begin{aligned}\alpha x_0 &= 0, \\ \alpha x_1 &= v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2, \\ \alpha x_2 &= 2(v_1 v_2 - v_3 v_0), \\ \alpha x_3 &= 2(v_1 v_3 + v_2 v_0),\end{aligned}\tag{1.77}$$

którą da się sprowadzić do postaci (1.71) podstawiając $\alpha = 1$ oraz $v_0 = -v_4$.

W praktyce kwaterniony często wykorzystywane są do opisu obrotu wektora w trzech wymiarach. Kwaternion jednostkowy

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\theta}{2} \right),\tag{1.78}$$

pozwała pisać obrót dowolnego wektora \mathbf{y} wokół osi $\hat{\mathbf{n}}$ o kąt θ , w rezultacie którego otrzymujemy wektor \mathbf{z} jako

$$(0, \mathbf{z}) = \mathbf{q}(0, \mathbf{y})\bar{\mathbf{q}}.\tag{1.79}$$

Powyższe równanie przypomina definicję transformacji KS (1.76) – jeśli zastąpimy kwaternion jednostkowy \mathbf{q} kwaternionem zmiennych KS \mathbf{v} , wektor \mathbf{z} wektorem $\alpha \mathbf{x}$, a wektor \mathbf{y} zastąpimy wersorem \mathbf{e}_1 , to otrzymamy dokładnie równanie transformacji KS. Oznacza to że **znormalizowany kwaternion zmiennych KS $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ opisuje obrót wektora \mathbf{e}_1 na kierunku wektora położenia \mathbf{x}** . Oczywiście, każdy obrót w trzech wymiarach można opisać przy pomocy macierzy obrotu. Taką macierz $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ można wyrazić poprzez składowe kwaternionu \mathbf{q} , nazywane parametrami Eulera-Rodriguesa, jako

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_0 & q_0^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_1^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{pmatrix}.\tag{1.80}$$

Dzięki powiązaniu zmiennych KS z obrotem, możemy zapisać transformację KS przy pomocy macierzy jako

$$\alpha \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{v})\mathbf{e}_1.\tag{1.81}$$

Powiązanie transformacji KS z obrotem zostało zauważone przez Stiefela i Scheifele [43], ale nie zbadali oni tego dokładnie. Później to powiązanie rozważała także Vivarelli [48], a następnie Saha [41].

Już od pierwszego sformułowania transformacji przez Kustaanheimo, we wzorach ją opisujących, widać, że w pewien sposób wyróżniona jest pierwsza oś układu współrzędnych. Jest to szczególnie widoczne w formalizmie kwaternionowym [15], gdzie we wzorze opisującym transformację występuje kwaternion \mathbf{e}_1 . Tymczasem w wielu zagadnieniach tradycyjnie wyróżnioną osią jest trzecia oś układu współrzędnych. Wybór pierwszej osi może wynikać z faktu, że Kustaanheimo, przed opublikowaniem pracy poświęconej regularyzacji zagadnienia keplerowskiego za pomocą spinorów, używał formalizmu spinorowego w szczególnej teorii względności, gdzie tradycyjnie w przekształceniu Lorentza prędkość skierowana jest wzdłuż pierwszej osi. Inną definicję zastosowali Cordani [13] i Saha [41] wyróżniając trzecią oś układu, ale ten fakt nie został wykorzystany w żaden istotny sposób. Okazuje się jednak, że jak pokażemy dalej, wybór odpowiedniej definicji transformacji KS może prowadzić do uproszczenia niektórych wyrażeń i w rezultacie uproszczenia obliczeń.

1.8 Transformacja KS z dowolnym wektorem definiującym

Do zdefiniowania innych wariantów transformacji KS użyjemy transformacji w postaci Deprit, Elipse i Ferrera, ale kwaternion \mathbf{e}_1 zastąpimy dowolnym kwaternionem jednostkowym $\mathbf{c} = (0, \mathbf{c})$, otrzymując

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{v} \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}}. \quad (1.82)$$

Oczywiście możliwa jest jeszcze ogólniejsza definicja, w której $\mathbf{c} = (c_0, \mathbf{c})$, ale dla takiej transformacji dodatkowa składowa wektora kartezjańskiego nie wynosi zero i ma wartość

$$x_0 = \frac{c_0}{\alpha} (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = c_0 r. \quad (1.83)$$

Z tego powodu przyjmujemy więc $c_0 = 0$. Transformację (1.82) możemy zapisać przy pomocy macierzy \mathbf{R} (1.80) jako

$$\alpha \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{v}) \mathbf{c}. \quad (1.84)$$

Alternatywnie można wykorzystać zapis wektorowy

$$\alpha \mathbf{x} = (v_0^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{c} + 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + 2v_0 \mathbf{v} \times \mathbf{c}. \quad (1.85)$$

Podobnie jak wcześniej, transformacja KS może być interpretowana jako złożenie obrotu wektora \mathbf{c} na wektor \mathbf{x} i jego skalowania. Obrót wektora w trzech wymiarach opisywany jest przez kwaternion jednostkowy $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, a czynnikiem skalującym jest $r = |\mathbf{x}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\alpha}$.

Łatwo zauważyć, że transformacja ma najprostszą postać w trzech przypadkach: gdy $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ (klasyczna transformacja KS), $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ lub gdy $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ (wariant transformacji stosowany np. przez Cordaniego [13]), a więc gdy wektor \mathbf{c} jest skierowany wzdłuż jednej z osi przyjętego układu współrzędnych. Nazwijmy te transformacje odpowiednio KS1, KS2 i KS3. W pozostałych przypadkach prawe strony równań transformacji będą kombinacjami liniowymi prawych stron równań dla tych trzech podstawowych wariantów transformacji KS.

1.9 Transformacja odwrotna

Istotną cechą transformacji KS, znaną już od pierwszej publikacji Kustaanheimo, jest to, że nie jest ona wzajemnie jednoznaczna. Jeden kwaternion w przestrzeni KS \mathbf{v} odpowiada jednemu wektorowi w przestrzeni kartezjańskiej \mathbf{x} , ale temu samemu wektorowi \mathbf{x} można przypisać różne kwaterniony zmiennych KS. W przypadku transformacji z wektorem definiującym \mathbf{c} , jeśli \mathbf{v} odpowiada wektorowi \mathbf{x} , to dla dowolnego kąta ϕ kwaternion

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}(\cos \phi, \mathbf{c} \sin \phi), \quad (1.86)$$

będzie generował ten sam wektor \mathbf{x} . Udowodnić to można wstawiając powyższe do definicji (1.82) i zauważając, że

$$(\cos \phi, \mathbf{c} \sin \phi) \mathbf{c} (\cos \phi, -\mathbf{c} \sin \phi) = \mathbf{c}. \quad (1.87)$$

Zbiór wszystkich kwaternionów odpowiadających danemu wektorowi kartezjańskiemu nazywany jest włóknem (ang. fiber, patrz [40]), albo włóknem Hopfa (który jako pierwszy, na długo przed pracą Kustaanheimo opisał przekształcenie trójwymiarowej sfery na sferę dwuwymiarową, ale bez powiązania tego z dynamiką [25]). Ze względu na tę niejednoznaczność, transformację odwrotną można zdefiniować na wiele sposobów. Jeśli weźmiemy pod uwagę interpretację transformacji KS jako obrotu wektora definiującego \mathbf{c} na wektor \mathbf{x} , to najbardziej oczywistym takim obrotem jest obrót o kąt θ między tymi wektorami wokół osi prostopadłej do obydwu z nich (czyli wokół wektora $\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \mathbf{x}$). Jeśli weźmiemy

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{c}||\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{r}, \quad \hat{n} \sin \theta = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{c}||\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{r},$$

to

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{2r}}, \quad \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{\sqrt{2r(r + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x})}}.$$

Następnie, korzystając z definicji kwaternionu \mathbf{q} reprezentującego obrót (1.78) i z faktu, że $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{q} = \sqrt{\alpha r}\mathbf{q}$, otrzymujemy

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{r + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}, \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{\sqrt{(r + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x})}} \right). \quad (1.88)$$

Ta transformacja może być stosowana jedynie gdy $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}} > -1$. Gdy $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -1$, powyższe równanie posiada osobliwość. Wynika to z faktu, że wektory \mathbf{c} i \mathbf{x} są wtedy antyrównoległe i wektor \mathbf{n} prostopadły do nich nie może być wyznaczony za pomocą iloczynu wektorowego. W tej sytuacji musimy przyjąć definicję

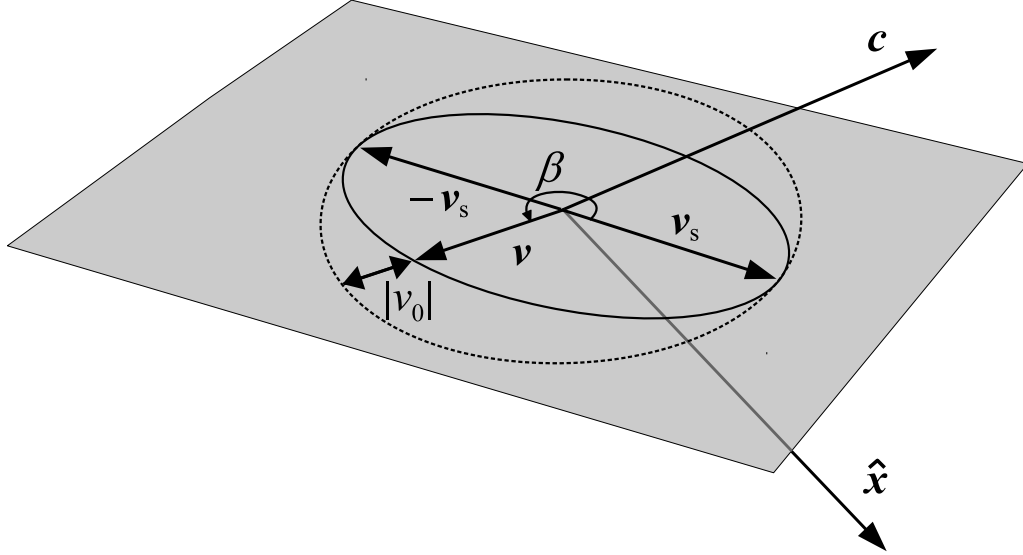
$$\mathbf{v} = \sqrt{\alpha r} (0, \hat{n}), \quad (1.89)$$

gdzie \hat{n} to dowolny wektor prostopadły do \mathbf{c} i \mathbf{x} , czyli taki, że $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Kwaternion $(0, \hat{n})$ odpowiada obrotowi o 180° wokół $\hat{\mathbf{n}}$. Inny wariant transformacji odwrotnej podał Saha [41], przyjmując że część skalarna \mathbf{v} wynosi zero. Można to uzyskać mnożąc prawa stronę poprzedniej definicji (1.88) prawostronnie przez $(0, \mathbf{c})$, co na mocy (1.86) powoduje jedynie zmianę położenia na włóknie, a więc takie zmienne odpowiadają temu samemu wektorowi \mathbf{x} . Tego typu zmienne nazwiemy wektorem Sahy i będziemy oznaczać jako \mathbf{v}_S . Otrzymany wynik ma prostą postać

$$\mathbf{v}_S = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2r(1 + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}})}} (0, \mathbf{x} + r\mathbf{c}), \quad \text{dla } \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}} > -1. \quad (1.90)$$

Gdy $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -1$ stosujemy definicję taką samą jak poprzednio (1.89). Jeśli zinterpretujemy zmienne KS jako obrót, to kwaternion $\mathbf{v}_S/|\mathbf{v}_S|$ odpowiada obrotowi wokół osi znajdującej się między wektorami \mathbf{c} i \mathbf{x} o kąt 180° . Możliwe jest także przyjęcie innych wariantów transformacji odwrotnej, dostając inne wartości \mathbf{v} należące do tego samego włókna odpowiadającego wektorowi \mathbf{x} . Dla dowolnego kwaternionu \mathbf{v} z $\mathbf{v}_0 \neq 0$ można wyliczyć \mathbf{v}_S na tym samym włóknie korzystając z formuły

$$\mathbf{v}_S = \pm \mathbf{v}\mathbf{q}_S, \quad (1.91)$$



Rysunek 1.3: Rzut włókna na przestrzeń trójwymiarową [7].

gdzie

$$\mathbf{q}_S = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}, v_0 \mathbf{c})}{\sqrt{v_0^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})^2}}. \quad (1.92)$$

Dzięki takiej redukcji możliwe jest przedstawienie ewolucji zmiennych KS w trzech wymiarach, jako wykres $\mathbf{v}_s(t)$.

Na rysunku (1.3) przedstawiono geometryczną interpretację włókna. Narysowana została część wektorowa wszystkich kwaternionów należących do jednego włókna odpowiadającego wektorowi położenia \mathbf{x} . Końce wektorów tworzą elipsę znajdującą się na płaszczyźnie zawierającej wektor $\hat{c} + \hat{x}$ i prostopadłej do płaszczyzny zawierającej wektory \mathbf{c} i \mathbf{x} . Półś wielka tej elipsy skierowana jest wzdłuż wektora Sahy, a kąt β opisuje pozycję na tym włóknie. Mimośród elipsy zależy od kąta pomiędzy wektorami \mathbf{c} i \mathbf{x} . Gdy są one antyrównoległe, elipsa staje się okręgiem, a gdy są równoległe elipsa degeneruje się do postaci odcinka skierowanego wzdłuż wektora \mathbf{c} . Część skalarna v_0 ma taką wartość, aby włókno w przestrzeni czterowymiarowej było okręgiem, czyli taką, że $v_0^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}_s|^2$. Oznacza to, że część skalarna jest największa gdy kąt β wynosi 90° lub 270° , czyli gdy wektor \mathbf{v} jest skierowany wzdłuż półosi małej elipsy i jest prostopadły do \mathbf{v}_s .

1.10 Rozszerzenie kanoniczne transformacji KS

Gdy chcemy korzystać z formalizmu Hamiltona konieczne jest znalezienie pędów \mathbf{V} sprzężonych kanonicznie ze zmiennymi \mathbf{v} . Transformacja KS (1.82) jest transformacją punktową, więc jej rozszerzenie kanoniczne możemy znaleźć przy pomocy transformacji Mathieu, badając zachowanie formy różniczkowej

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{v}, \quad (1.93)$$

gdzie \mathbf{X} to pędy kanonicznie sprzężone z \mathbf{x} . Przyjmujemy przy tym że $X_0 = 0$. Procedura znalezienia pędów nie różni się od tej, którą przedstawili Deprit i in. [15] lub Kurcheeyeva [28] dla klasycznej transformacji z wektorem \mathbf{e}_1 . Zastępując go

dowolnym \mathbf{c} , otrzymujemy

$$\mathbf{X} = \frac{V\mathbf{c}\bar{v}}{2r}. \quad (1.94)$$

Część wektorowa ma postać

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2r} [(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v})\mathbf{V} + (v_0V_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V})\mathbf{c} + (V_0\mathbf{v} + v_0\mathbf{V}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{V})\mathbf{v}]. \quad (1.95)$$

Część skalarną X , która zgodnie z wcześniejszym założeniem powinna wynosić zero, można przedstawić jako

$$X_0 = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}}{2r}, \quad (1.96)$$

gdzie wektor \mathbf{J} można przedstawić przy pomocy iloczynu wektorowego kwaternionów

$$\mathbf{J} = [\bar{v} \wedge \bar{V}]^{\natural} = -v_0\mathbf{V} + V_0\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{V}. \quad (1.97)$$

Jeśli hamiltonian \mathcal{H} jest funkcją położeń i pędów kartezjańskich (to znaczy zależy jedynie od wektorów \mathbf{x} i \mathbf{X}) oraz czasu, to $X_0 = \text{const}$. Najprostszym uzasadnieniem tej własności może być proste spostrzeżenie: $\dot{X}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_0} = 0$. Jednakże ze względu na specyficzny charakter zmiennej x_0 , lepszym uzasadnieniem jest zbadanie nawiasów Poissona $\{X_0, x_i\}$ oraz $\{X_0, X_i\}$, które (jak stwierdzili Deprit i in. [15]) mają wartość zero. Początkowo przyjęta wartość $X_0 = 0$ nie ulegnie zmianie. Wyrażenie $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$ odpowiada niezmiennikowi (1.69) w sformułowaniu Kustaanheimo.

Mimo znalezienia kanonicznego rozszerzenia transformacji KS należy pamiętać, że nie jest to w pełni transformacja kanoniczna, gdyż ze względu na zwiększenie liczby stopni swobody z trzech (wektor kartezjański) do czterech (kwaternion KS) nie jest ona wzajemnie jednoznaczna, ale zachowuje ona równania Hamiltona.

Transformacja odwrotna pędów ma postać

$$\mathbf{V} = \frac{2X\mathbf{v}\bar{c}}{\alpha}. \quad (1.98)$$

Ta postać jest jednoznaczna, ale wartość \mathbf{V} zależy od \mathbf{v} . Ponieważ jednemu ustalonemu \mathbf{x} odpowiada zbiór różnych \mathbf{v} , jednej parze \mathbf{x} i \mathbf{X} odpowiada zbiór par kwaternionów \mathbf{v} i \mathbf{V} .

1.11 Ruch keplerowski w zmiennych KS

Funkcja Hamiltona zagadnienia keplerowskiego (1.1) zależy jedynie od długości wektorów położenia i pędu oraz od stałego parametru μ . Jeśli obliczymy normy kwaternionów w równaniach (1.82) oraz (1.94), to otrzymamy długości wektorów pędu i położenia wyrażone przez zmienne KS

$$|\mathbf{x}| = r = \frac{1}{\alpha} |\mathbf{v}|^2, \quad (1.99)$$

$$|\mathbf{X}| = \frac{\alpha}{2} \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{v}|}.$$

Ponieważ $x_0 = 0$, to $|\mathbf{x}| = |\mathbf{v}|$. W przypadku transformacji pędów także $X_0 = 0$, ale X_0 jest funkcją zmiennych KS i może mieć niezerowe pochodne cząstkowe, więc formalnie

$$|\mathbf{X}|^2 = |\mathbf{X}|^2 - X_0^2 = \frac{1}{2r} |\mathbf{V}|^2 - X_0^2. \quad (1.100)$$

Zmienna X_0 występuje w kwadracie, co oznacza, że jej pierwsze pochodne cząstkowe także wynoszą zero, więc może ona zostać w praktyce pominięta. W sytuacji gdy istotne są drugie i dalsze pochodne (np. w równaniach wariacyjnych) człon X_0^2 będzie wpływał na otrzymany wynik. Równości (1.99) nie zależą od przyjętego wektora definiującego \mathbf{c} , co oznacza, że zarówno odległość od środka układu współrzędnych r jak i kwadrat długości wektora pędów $|\mathbf{X}|^2$ mają identyczną postać dla każdego wariantu zmiennych KS, a funkcja Hamiltona dla zagadnienia keplerowskiego w zmiennych KS ma postać

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\alpha}{4r} \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (1.101)$$

Następnym krokiem jest zastosowanie kanonicznej transformacji Sundmana. Po przez rozszerzenie przestrzeni fazowej o zmienną v^* oraz stowarzyszony z nią pęd V^* , wprowadzamy nową funkcję Hamiltona

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{H}_0 + V^* = 0, \quad (1.102)$$

a następnie definiujemy nową zmienną niezależną określoną równaniem różniczkowym

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\alpha}{4r}, \quad (1.103)$$

i nową funkcję Hamiltona

$$\mathcal{K}_0 = \frac{dt}{d\tau} \mathcal{M}. \quad (1.104)$$

Hamiltonian keplerowski po takiej transformacji ma postać

$$\mathcal{K}_0 = \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \frac{8V^*}{\alpha^2} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \frac{\mu}{4\alpha}. \quad (1.105)$$

Dzięki regularyzacji, z części keplerowskiej zniknęła osobliwość dla $r = 0$. Co więcej, równania ruchu

$$v'_i = \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial V_i} = V_i, \quad V'_i = \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial v_i} = -\omega^2 v_i, \quad i = 0..3, \quad (1.106)$$

gdzie

$$\omega^2 = \frac{8V^*}{\alpha^2}. \quad (1.107)$$

Można to zapisać za pomocą kwaternionów jako

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}' = -\omega^2 \mathbf{v}. \quad (1.108)$$

Równania te trzeba uzupełnić równaniami dla zmiennych v^* oraz V^* , które mają postać

$$(v^*)' = \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial V^*} = \frac{4r}{\alpha}, \quad (V^*)' = 0. \quad (1.109)$$

Równania ruchu keplerowskiego stały się w ten sposób równaniami czterowymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego o stałej częstotliwości ω , zależącej tylko od wartości V^* , która jest stała i równa $-\mathcal{H}_0$ (w ogólności, w zagadnieniu zaburzonym $V^* = -\mathcal{H}$, czyli ma wartość równą całemu hamiltonianowi z zaburzeniem i

niekoniecznie jest stałe). Od znaku V^* zależy charakter ruchu. Gdy $V^* > 0$, wtedy $\omega^2 > 0$ i ruch jest ograniczony, a rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u} \cos \omega\tau + \frac{\mathbf{U}}{\omega} \sin \omega\tau, \quad \mathbf{V}(\tau) = \mathbf{U} \cos \omega\tau - \mathbf{u}\omega \sin \omega\tau, \quad (1.110)$$

gdzie $\mathbf{u} = \mathbf{v}(0)$, $\mathbf{U} = \mathbf{V}(0)$ to wartości początkowe. W przypadku gdy $\omega^2 < 0$, wtedy funkcje trygonometryczne są zastąpione hiperbolicznymi, ruch nie jest ograniczony, a rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u} \cosh \omega\tau + \frac{\mathbf{U}}{\omega} \sinh \omega\tau \quad \mathbf{V}(\tau) = \mathbf{U} \cosh \omega\tau + \mathbf{u}\omega \sinh \omega\tau. \quad (1.111)$$

W przypadku granicznym, gdy $\omega^2 = 0$, ruch w zmiennych KS jest ruchem jednostajnym prostoliniowym

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u} + \mathbf{U}\tau \quad \mathbf{V}(\tau) = \mathbf{U}. \quad (1.112)$$

Ruch po elipsie i hiperboli w czterowymiarowej przestrzeni zmiennych KS przekłada się na ruch eliptyczny lub hiperboliczny w zmiennych kartezjańskich. Z kolei ruch po prostej odpowiada ruchowi po paraboli w przestrzeni kartezjańskiej.

1.12 Powiązania między całkami ruchu oscylatora i orbity keplerowskiej

Hamiltonian \mathcal{K}_0 , jeśli nie dodamy do niego żadnych zaburzeń, może zostać podzielony na cztery osobne oscylatory jednowymiarowe

$$\mathcal{K}_0 = -\frac{4\mu}{\alpha} + \sum_{i=0}^3 \mathcal{N}_i = 0, \quad (1.113)$$

gdzie

$$\mathcal{N}_i = \frac{1}{2} (V_i^2 + \omega^2 v_i^2) = E_i. \quad (1.114)$$

Każde \mathcal{N}_i jest całką ruchu tego zagadnienia, ale tylko trzy z nich są niezależne, gdyż są one powiązane zależnością $\mathcal{K}_0 = 0$. Dla tego układu możemy znaleźć więcej całek. W tym celu wprowadźmy czterowymiarowy tensor Fradkina [19]:

$$F_{ij} = \frac{V_i V_j}{\omega} + \omega v_i v_j. \quad (1.115)$$

Ze względu na symetrię daje to 10 różnych całek, z których nie wszystkie są niezależne, przy czym $F_{ii} = 2E_i/\omega$. Inny zestaw całek pochodzi z tensora momentu pędu

$$L_{ij} = v_i V_j - v_j V_i. \quad (1.116)$$

Tworzy on antysymetryczną macierz, w której znajdujemy 6 całek (także nie są niezależne). Łatwo można pokazać, że

$$L_{ij}^2 = F_{ii} F_{jj} - F_{ij}^2. \quad (1.117)$$

Elementy tensora L można powiązać z iloczynem wektorowym kwaternionów

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{V})^{\natural} = (L_{01} + L_{23})\mathbf{e}_1 + (L_{02} + L_{31})\mathbf{e}_2 + (L_{03} + L_{12})\mathbf{e}_3, \quad (1.118)$$

oraz

$$(\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{V}})^{\natural} = (L_{10} + L_{23})\mathbf{e}_1 + (L_{20} + L_{31})\mathbf{e}_2 + (L_{30} + L_{12})\mathbf{e}_3. \quad (1.119)$$

Biorąc pod uwagę, że $X_0 = (\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{V}}) \cdot \mathbf{c}/2r = 0$, otrzymujemy pewne ograniczenie dla momentu pędu oscylatora.

Z jednej strony, układ opisywany przez \mathcal{K} jest czterowymiarowym oscylatorem harmonicznym, z drugiej strony wciąż jest to hamiltonian, który opisuje ruch keplerowski, a więc klasyczne całki ruchu zagadnienia keplerowskiego (całka energii, momentu pędu oraz wektor Laplace'a) także muszą być całkami ruchu i powinny się wyrażać poprzez całki oscylatora. Najprostszy jest przypadek całki energii

$$h = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (1.120)$$

która jest równa co do wartości pierwotnemu hamiltonianowi \mathcal{H}_0 , przed rozszerzeniem przestrzeni fazowej i regularyzacją. Całka h jest więc równa

$$h = \frac{\alpha}{4r}\mathcal{K}_0 - V^*. \quad (1.121)$$

W przypadku całki momentu pędu \mathbf{G} , zwanej także całką pól, wyrażonej wzorem

$$\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \mathbf{X}, \quad (1.122)$$

warto zacząć od zauważenia, że

$$\mathbf{x} \times \mathbf{X} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{X})^{\natural} + X_0\mathbf{x}. \quad (1.123)$$

W powyższym równaniu pominięty został składnik $-x_0\mathbf{X}$, który pojawiłby się z prawej strony, gdybyśmy rozpatrywali dowolne kwaterniony. W tym przypadku wykorzystujemy fakt, że $x_0 = 0$. Pomimo że X_0 także jest równe co do wartości zeru, nie pomijamy go, gdyż w przeciwieństwie do x_0 , jest on pewną funkcją zmiennych KS, która ma niezerowe pochodne, co niekiedy może być istotne. Oczywiście, często (na przykład kiedy interesuje nas tylko wartość momentu pędu) składnik $X_0\mathbf{x}$ jest także pomijalny. Mając (1.123) możemy podstawić definicję transformacji KS i wykorzystując własności iloczynu mieszanego (A.13) uzyskać

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{X} = \frac{(\mathbf{vc}\bar{\mathbf{v}}) \wedge (\mathbf{Vc}\bar{\mathbf{v}})}{2\alpha r} = \frac{(\mathbf{vc}) \wedge (\mathbf{Vc}\bar{\mathbf{v}})}{2\alpha r} = \frac{(\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{Vc}\bar{\mathbf{c}})}{2} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{V}}{2}, \quad (1.124)$$

co oznacza że

$$\mathbf{G} = \frac{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{V})^{\natural}}{2} + X_0\mathbf{x} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{V} + \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}}{\alpha r} \mathbf{vc}\bar{\mathbf{v}} \right)^{\natural}. \quad (1.125)$$

Ten sam wynik pojawił się w pracy [15], ale został uzyskany przy pomocy obliczeń z wykorzystaniem oprogramowania do obliczeń symbolicznych. Tymczasem wykorzystanie algebry kwaternionów pozwoliło uzyskać powyższy wynik w dość prosty sposób. Idąc dalej uzyskujemy

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} ((L_{01} + L_{23})\mathbf{e}_1 + (L_{02} + L_{31})\mathbf{e}_2 + (L_{03} + L_{12})\mathbf{e}_3) + X_0\mathbf{x}. \quad (1.126)$$

Wektor definiujący \mathbf{c} nie występuje w definicji \mathbf{G} , pojawia się jedynie pośrednio poprzez X_0 .

Wektor Laplace'a (zwany czasem wektorem Laplace'a-Rungego-Lenza, albo po prostu wektorem mimośrodowym) wyraża się poprzez zmienne kartezjańskie jako

$$\mu \mathbf{e} = \mathbf{X} \times \mathbf{G} - \mu \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.127)$$

Aby opisać go przy pomocy zmiennych KS, warto przekształcić podwójny iloczyn wektorowy $\mathbf{X} \times \mathbf{G} = \mathbf{X} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{X})$, otrzymując postać ze wzoru 1.10

$$\mu \mathbf{e} = \left(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{X}. \quad (1.128)$$

Wyrażenie $\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}$ traktujemy w podobny sposób jak poprzednio iloczyn wektorowy $\mathbf{x} \wedge \mathbf{X}$, tym razem wykorzystując własność (A.13)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{X} = \frac{(\mathbf{v} \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{V} \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}})}{2\alpha r} = \frac{\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}}}{2\alpha r} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2}. \quad (1.129)$$

Pozwala to nam zapisać wektor Laplace'a przy pomocy zmiennych KS

$$\mu \mathbf{e} = \frac{1}{2r} \left[\left(\left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} - \frac{2\mu}{\alpha} + \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{c})^2}{2\alpha r} \right) \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2} \mathbf{V} \right) \mathbf{c} \bar{\mathbf{v}} \right]^{\sharp}. \quad (1.130)$$

Otrzymane wyrażenie jest dość złożone, ale można je przekształcić do postaci

$$\mu \mathbf{e} = -\frac{\alpha \omega}{4} \mathbf{E} \mathbf{c} - X_0 \mathbf{G} + \frac{\alpha \mathcal{K}_0}{4r} \mathbf{x}. \quad (1.131)$$

Dwa ostatnie składniki wynoszą zero, gdyż $X_0 = 0$, a $\mathcal{K}_0 = 0$ dla niezaburzonego zagadnienia keplerowskiego. Macierz \mathbf{E} ma postać

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & F_{12} - F_{03} & F_{13} + F_{02} \\ F_{12} + F_{03} & E_{22} & F_{23} - F_{02} \\ F_{13} - F_{02} & F_{23} + F_{01} & E_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.132)$$

z elementami na przekątnej

$$E_{11} = \frac{F_{00} + F_{11} - F_{22} - F_{33}}{2} = \frac{\mathcal{K}_0}{\omega} + \frac{4\mu}{\alpha \omega} - F_{22} - F_{33}, \quad (1.133)$$

$$E_{22} = \frac{F_{00} - F_{11} + F_{22} - F_{33}}{2} = \frac{\mathcal{K}_0}{\omega} + \frac{4\mu}{\alpha \omega} - F_{11} - F_{33}, \quad (1.134)$$

$$E_{33} = \frac{F_{00} - F_{11} - F_{22} + F_{33}}{2} = \frac{\mathcal{K}_0}{\omega} + \frac{4\mu}{\alpha \omega} - F_{11} - F_{22}. \quad (1.135)$$

Łatwo zauważyć podobieństwo macierzy \mathbf{E} do macierzy obrotu \mathbf{R} obecnej przy transformacji KS (1.80). W przeciwieństwie do momentu pędu \mathbf{G} , w sposób jawny występuje tutaj wektor definiujący \mathbf{c} , a więc postać wektora mimośrodowego zależy od wyboru tego wektora.

1.13 Wpływ niezmiennika $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$ na dynamikę

W poprzednim podrozdziale uzyskano definicje całek ruchu wyrażonych przy pomocy zmiennych KS. W definicjach tych pojawia się czynnik $X_0 = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}}{2r}$. Transformacja KS ograniczona jest do podprzestrzeni $X_0 = 0$, więc przy obliczaniu wartości liczbowych pominięcie lub uwzględnienie tego składnika nie zmienia wyniku. Niezmiennik ten ma jednak niezerowe pochodne względem położenia i pędów KS, więc jego obecność w funkcji Hamiltona zmienia równania ruchu. Warto więc zbadać jego wpływ na trajektorię badanego układu.

Zacznijmy od oczywistej obserwacji, że nawias Poissona $\{X_0, X_i\} = \{X_0, x_i\} = 0$ dla $i \neq 0$. Oznacza to że dowolna funkcja postaci $\mathcal{M} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{c}\Phi$, dodana do funkcji Hamiltona, nie zmienia trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej. Co więcej, jeśli oryginalny hamiltonian \mathcal{K} jest funkcją tylko i wyłącznie kartezjańskich położenia i pędów (czyli odpowiada jakiemuś fizycznemu układowi, a nie jest dowolną funkcją zmiennych KS), to nawias Poissona $\{\mathcal{K}, \mathcal{M}\} = 0$, co oznacza, że rozwiązanie dla równań ruchu będzie złożeniem rozwiązań generowanych przez obie te funkcje osobno. Korzystając z formalizmu kwaternionowego, kanoniczne równania ruchu generowane przez \mathcal{M} można zapisać jako

$$\mathbf{v}' = \{\mathbf{v}, \mathcal{M}\} = -\Phi \mathbf{v} \mathbf{c}, \quad \mathbf{V}' = \{\mathbf{V}, \mathcal{M}\} = -\Phi \mathbf{V} \mathbf{c}. \quad (1.136)$$

Rozwiązaniem takiego układu równań jest

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} (\cos \phi, \sin \phi \mathbf{c}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{u} (\cos \phi, \sin \phi \mathbf{c}), \quad (1.137)$$

gdzie \mathbf{u} i \mathbf{U} to stałe, a ϕ to pewna funkcja spełniająca $\Phi = -\phi'$. Można to udowodnić w prosty sposób, wykorzystując (A.27):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u} (-\sin \phi, \cos \phi \mathbf{c}) \phi' = \mathbf{u} (\cos \phi, \sin \phi \hat{c}) (0, \hat{c}) \phi' = \mathbf{v} \mathbf{c} \phi', \quad (1.138)$$

i podstawiając $\Phi = -\phi'$, co prowadzi do wyjściowego układu równań.

Jeśli porównamy ten wynik z (1.82), to okazuje się, że wszystkie punkty należące do trajektorii wyznaczonej przez to rozwiązanie leżą na jednym włóknie, co dodatkowo potwierdza, że dodanie \mathcal{M} do funkcji Hamiltona nie zmienia rozwiązania dla zmiennych kartezjańskich (\mathbf{x}, \mathbf{X}) , ale wpływa na trajektorię w zmiennych KS, generując dodatkowy ruch na włóknie.

1.14 Płaszczyzna Leviego-Civity

Wyrażenie $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$ pełni kluczową rolę w transformacji KS. Dla dowolnych kwaternionów zdefiniujemy formę dwuliniową

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\bar{\mathbf{u}} \wedge \bar{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{c} = -u_0 \mathbf{w} \cdot \mathbf{c} + w_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.139)$$

Jeśli ruch ogranicza się do podprzestrzeni rozpiętej przez dwa kwaterniony, dla których $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, transformacja KS redukuje się do transformacji LC. Taka podprzestrzeń została nazwana przez Stiefela i Scheifele [43] płaszczyzną Leviego-Civity. Dla dowolnego kwaternionu jednostkowego \mathbf{u} , drugi kwaternion bazowy \mathbf{w} można uzyskać dzięki równaniu

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}(0, \mathbf{f}), \quad (1.140)$$

gdzie \mathbf{f} to dowolny jednostkowy wektor prostopadły do wektora definiującego \mathbf{c} . Mając zdefiniowaną tę płaszczyznę należy spytać, w jaki sposób ruch w płaszczyźnie LC przekłada się na ruch w przestrzeni kartezjańskiej. Niech wektor w przestrzeni KS będzie kombinacją liniową wektorów bazowych

$$\mathbf{v} = \psi \mathbf{u} + \eta \mathbf{w} = \mathbf{u}(\psi, \eta \mathbf{f}), \quad (1.141)$$

gdzie ψ i η są rzeczywiste i mają wymiar długości. Stosując transformację KS otrzymujemy

$$\alpha \mathbf{x} = \mathbf{u}(\psi, \eta \mathbf{f}) \mathbf{c}(\psi, -\eta \mathbf{f}) \bar{\mathbf{u}}. \quad (1.142)$$

Wyrażenie pośrodku można wyliczyć wykorzystując definicję mnożenia kwaternionów i rozwijając podwójny iloczyn wektorowy

$$(\psi, \eta \mathbf{f}) \mathbf{c}(\psi, -\eta \mathbf{f}) = (0, (\psi^2 - \eta^2) \mathbf{c} + 2\psi \eta \mathbf{f} \times \mathbf{c} + 2\eta^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f}). \quad (1.143)$$

Wstawiając to do wcześniejszego równania, otrzymujemy

$$\alpha \mathbf{x} = (\psi^2 - \eta^2) \mathbf{u}(0, \mathbf{c}) \bar{\mathbf{u}} + 2\psi \eta \mathbf{u}(0, \mathbf{f} \times \mathbf{c}) \bar{\mathbf{u}} + 2\eta^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{u}(0, \mathbf{f}) \bar{\mathbf{u}}. \quad (1.144)$$

Gdy zgodnie z przyjętym założeniem wektory \mathbf{f} i \mathbf{c} są prostopadłe, całość redukuje się do postaci

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha} (\psi^2 - \eta^2) \mathbf{x}_1 + \frac{1}{\alpha} 2\psi \eta \mathbf{x}_2, \quad (1.145)$$

gdzie

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}(0, \mathbf{c}) \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{u}(0, \mathbf{f} \times \mathbf{c}) \bar{\mathbf{u}}. \quad (1.146)$$

Kwaterniony \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 mają część skalarną wynoszącą zero. Ruch w przestrzeni kartezjańskiej odbywa się więc w płaszczyźnie rozpiętej przez dwa wektory \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 , będące częściami wektorowymi tych kwaternionów. Równanie (1.145) jest też identyczne z równaniem transformacji LC, a parametry ψ i η pełnią rolę zmiennych LC. Oznacza to, że ruch keplerowski w płaszczyźnie $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ przekształca się na dwuwymiarowy oscylator harmoniczny w płaszczyźnie Leviego-Civity.

1.15 Obracający się układ współrzędnych

W wielu zagadnieniach mechaniki nieba wprowadza się obracający się układ odniesienia. Często pozwala to usunąć jawną zależność od czasu z potencjału. W zagadnieniu ruchu sztucznych satelitów układ, którego osie obracają się wraz z planetą pozwala usunąć jawną zależność od czasu z tesselalnej części geopotencjału (np. Segerman i Coffey [42]). Z kolei w ograniczonym kołowym zagadnieniu trzech ciał jedną z osi układu współrzędnych określa się tak, aby przechodziła przez dwa główne ciała (np. Szebehely [45] lub Kurcheeva [28]). W zagadnieniu ruchu komet w Obłoku Oorta zaburzanego przez pływy galaktyczne wygodnie jest umieścić pierwszą oś układu tak aby była skierowana do centrum Galaktyki, a środek układu odniesienia znajdował się w barycentrum Układu Słonecznego (np. Breiter et. al [4]).

Ze względu na wykorzystanie kwaternionów do opisu transformacji KS, przejście do obracającego się układu współrzędnych wygodnie będzie opisać także za pomocą tego formalizmu. Jeśli \mathbf{x} to wektor położenia w układzie nieobracającym się, a

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ to ten sam wektor w układzie obracającym się wokół osi \mathbf{n} ze stałą prędkością kątową Ω , to korzystając z definicji kwaternionu opisującego obrót (1.78),

$$(0, \mathbf{x}^*) = \left(\cos \frac{\Omega t}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) (0, \mathbf{x}) \left(\cos \frac{\Omega t}{2}, -\mathbf{n} \sin \frac{\Omega t}{2} \right). \quad (1.147)$$

Następnie możemy znaleźć rozszerzenie kanoniczne takiej transformacji badając zachowanie formy

$$-\mathcal{H}dt + \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = -\mathcal{H}^*dt + \mathbf{X}^* \cdot d\mathbf{x}^*. \quad (1.148)$$

Jeśli

$$d\mathbf{x}^* = [\mathbf{q}(d\mathbf{x})\bar{\mathbf{q}} + (\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\dot{\bar{\mathbf{q}}}) dt]^{\natural} = [\mathbf{q}(d\mathbf{x})\bar{\mathbf{q}} + (\dot{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^*\dot{\bar{\mathbf{q}}}) dt]^{\natural}, \quad (1.149)$$

to

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{q}(d\mathbf{x})\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\mathbf{X}^*\bar{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.150)$$

a więc transformacja pędów polega także na obrocie

$$\mathbf{X} = \mathbf{q}\mathbf{X}^*\bar{\mathbf{q}}. \quad (1.151)$$

Transformacja ta jest jawnie zależna od czasu, więc do funkcji Hamiltona dodana zostaje reszta

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* - \mathbf{X}^* \cdot (\dot{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^*\dot{\bar{\mathbf{q}}}). \quad (1.152)$$

Jeśli zauważymy, że

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{\Omega}{2}(0, \mathbf{n}), \quad (1.153)$$

to zamieniając cyklicznie zmienne w iloczynie mieszanym (zgodnie z (A.13)) otrzymujemy

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* - \frac{\Omega}{2}(0, \mathbf{c}) \cdot (\bar{\mathbf{X}}^*\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*\mathbf{X}^*) = \mathcal{H}^* - \Omega(0, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x}^* \times \mathbf{X}^*). \quad (1.154)$$

Wielkość $\mathbf{x}^* \times \mathbf{X}^*$ to moment pędu, który oznaczymy jako \mathbf{G} . Reszta jest więc rzutem wektora momentu pędu na oś obrotu pomnożonym przez prędkość obrotu Ω . Obrót nie zmienia długości wektorów

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}^*| = r, \quad |\mathbf{X}| = |\mathbf{X}^*|, \quad (1.155)$$

więc hamiltonian zagadnienia Keplera będzie miał postać

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{X}^*}{2} - \frac{\mu}{r} + \Omega \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.156)$$

Aby przejść do zmiennych KS wykonujemy standardową transformację dla zmiennych w nowym układzie odniesienia

$$\alpha \mathbf{x}^* = \mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}, \quad 2r\mathbf{X}^* = \mathbf{V}\mathbf{c}\bar{\mathbf{v}}. \quad (1.157)$$

oraz regularyzację przekształceniem Sundmana. Moment pędu w zmiennych KS został znaleziony wcześniej i wyraża się przez równanie (1.126), a jego rzut na oś obrotu

nie zmienia się pod wpływem tego obrotu. Hamiltonian zagadnienia keplerowskiego w obracającym się układzie odniesienia w zmiennych KS ma więc postać

$$\mathcal{K} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \frac{8V^* \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} - \frac{4\mu}{\alpha} - \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{V} + \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}}{\alpha r} \mathbf{x} \right) \cdot (0, \mathbf{n}). \quad (1.158)$$

W tym hamiltonianie pojawia się wyraz zawierający czynnik $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$. Zgodnie z podrozdziałem 1.13 możemy dodać do funkcji Hamiltona dowolne wyrażenie zawierające ten czynnik, co nie będzie miało wpływu na ruch w przestrzeni kartezjańskiej. Dodajmy więc

$$\frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}}{\alpha r} \mathbf{x} \cdot (0, \mathbf{n}), \quad (1.159)$$

dzięki czemu otrzymamy funkcję Hamiltona

$$\mathcal{K}' = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \frac{8V^* \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} - \frac{4\mu}{\alpha} - \frac{2\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{V}) \cdot (0, \mathbf{n}). \quad (1.160)$$

1.16 Ruch keplerowski w obracającym się układzie odniesienia

Rozwiązanie równań ruchu keplerowskiego w obracającym się układzie współrzędnych było także opisywane jako rozwiązanie tworzące ograniczonego kołowego zagadnienia trzech ciał w przypadku granicznym, gdy stosunek mas dwóch głównych mas dąży do zera. Rozwiązanie tego problemu w zmiennych KS wyprowadzili Ahmad i Huda [1], ale jak pokazał Hassan [23], użyte zostały niewłaściwe i zbyt szczególne wartości stałych całkowania. Przedstawił on swoje rozwiązania w pracach [23] i [24]. Niestety, rozwiązania te wyrażone są przez elementy keplerowskie orbity, przez co ich zastosowanie wymaga przechodzenia do współrzędnych kartezjańskich. Pełne rozwiązanie wyrażone w całości przez zmienne KS z wykorzystaniem formalizmu kanonicznego zostało wyprowadzone przez Langnera i Bretera [31]. Używane były jednak klasyczne zmienne KS1. Tymczasem, użycie transformacji KS z dowolnym wektorem definiującym umożliwia znaczne uproszczenie całego rozwiązania.

Hamiltonian (1.160) tworzy równania ruchu

$$v'_0 = V_0 + \frac{2\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{V} - \frac{2\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} (v_0 \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{v}), \quad (1.161)$$

$$V'_0 = -\omega^2 v_0 + \frac{2\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{V}' = -\omega^2 \mathbf{v} - \frac{2\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} (V_0 \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{V}), \quad (1.162)$$

gdzie częstość ω jest funkcją położeń i pędów

$$\omega^2 = \frac{8}{\alpha^2} (V^* - \Omega G_3). \quad (1.163)$$

Częstość ta jest stała w niezaburzonym zagadnieniu keplerowskim, gdyż zarówno moment pędu, jak V^* są całkami ruchu. Oprócz tych równań potrzebne są także równania dla zmiennych v^* i V^* , które mają taką samą postać jak w układzie nieobracającym się

$$(v^*)' = \frac{4\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2}, \quad (1.164)$$

$$(V^*)' = 0. \quad (1.165)$$

Równania ruchu można zapisać w jeszcze bardziej zwartej postaci wykorzystując formalizm kwaternionowy

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V} + \frac{2\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{n}\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{1}{2} (v^*)' \Omega \mathbf{n}\mathbf{v}, \quad (1.166)$$

$$\mathbf{V}' = -\omega^2 \mathbf{v} + \frac{2\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{n}\mathbf{V} = -\omega^2 \mathbf{v} + \frac{1}{2} (v^*)' \Omega \mathbf{n}\mathbf{V}. \quad (1.167)$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest

$$\mathbf{v}(\tau) = \left(\cos \frac{\Omega t(\tau)}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\Omega t(\tau)}{2} \right) \left[\mathbf{v}(0) \cos \omega\tau + \frac{\mathbf{V}(0)}{\omega} \sin \omega\tau \right], \quad (1.168)$$

$$\mathbf{V}(\tau) = \left(\cos \frac{\Omega t(\tau)}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\Omega t(\tau)}{2} \right) [\mathbf{V}(0) \cos \omega\tau - \mathbf{v}(0)\omega \sin \omega\tau], \quad (1.169)$$

gdzie

$$t(\tau) = v^*(\tau) - v^*(0). \quad (1.170)$$

Podobnie jak przy badaniu wpływu niezmiennika $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$ na dynamikę (podrozdział 1.13), w znalezieniu rozwiązania pomaga znajomość specyficznych własności kwaternionu jednostkowego $\left(\cos \frac{\Omega t(\tau)}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\Omega t(\tau)}{2} \right)$, który oznaczmy jako $\mathbf{q}(\mathbf{n}, \tau)$ (patrz dodatek A). Okazuje się, że

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{q}(\mathbf{n}, \tau) = \frac{\Omega t'(\tau)}{2} \mathbf{n}\mathbf{q}(\mathbf{n}, \tau). \quad (1.171)$$

Wykorzystanie tej własności pozwala łatwo sprawdzić przedstawione rozwiązanie poprzez jego zróżniczkowanie i porównanie z równaniami ruchu. Rozwiązanie to wymaga jeszcze znajomości $v^*(\tau)$. Do jego znalezienia wyznaczmy zależność od czasu Sundmana odległości $r(\tau) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/\alpha$. Wielkość ta nie powinna zależeć od przyjętego obrotu układu współrzędnych. Z rozwiązania (1.168) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) &= \frac{\mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0)}{2\omega^2} + \frac{-\mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0)}{2\omega^2} \cos 2\omega\tau \\ &\quad + \frac{\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{V}(0)}{\omega} \sin 2\omega\tau. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Rozwiązanie to jest identyczne jak dla ruchu w inercjalnym układzie współrzędnych i zależy ono jedynie od początkowych wartości położeń i pędów oraz czasu τ . Dzięki temu równanie opisujące zależność zmiennej v^* od czasu można uzyskać poprzez prostą całkę

$$v^*(\tau) - v^*(0) = \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\tau \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{v}(s) ds, \quad (1.173)$$

która wynosi

$$\begin{aligned} v^*(\tau) - v^*(0) &= \frac{2(\mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0))}{\alpha^2 \omega^2} \tau \\ &\quad + \frac{-\mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0)}{\alpha^2 \omega^3} \sin 2\omega\tau + \frac{2\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{V}(0)}{\alpha^2 \omega^2} (\sin \omega\tau)^2. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Rozwiązanie dla ruchu w obracającym się układzie współrzędnych nie zależy od wyboru konkretnej postaci transformacji KS. Okazuje się jednak, że jeśli wybierzemy

wektor definiujący skierowany wzdłuż osi obrotu, to znaczy $\mathbf{c} = \mathbf{n}$ (alternatywnie $\mathbf{c} = -\mathbf{n}$), wtedy możliwe jest pewne uproszczenie rozwiązania. Do funkcji Hamiltona (1.160) możemy dodać wyrażenie

$$\mathcal{P} = -\frac{2\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{c}, \quad (1.175)$$

będące wielokrotnością $\mathbf{J} \cdot \mathbf{c}$. Otrzymamy wtedy funkcję Hamiltona

$$\mathcal{K}'' = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \frac{8V^* \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \frac{1}{2} - \frac{4\mu}{\alpha} - \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.176)$$

Dzięki temu otrzymujemy nowe równania ruchu

$$v'_0 = V_0 \quad \mathbf{v}' = \mathbf{V} - \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{c} \times \mathbf{v}, \quad (1.177)$$

$$V'_0 = -\omega^2 v_0, \quad \mathbf{V}' = -\omega^2 \mathbf{v} - \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{c} \times \mathbf{V}. \quad (1.178)$$

Wybór wektora definiującego $\mathbf{c} = \mathbf{n}$ umożliwił więc uproszczenie równań ruchu w taki sposób, że obrót nie wpływa na zmianę części skalarnej kwaternionów \mathbf{v} i \mathbf{V} . Co więcej, nie wpływa on również na rzuty wektorów $\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}$ i $\mathbf{V} \cdot \mathbf{c}$. Obrót w przestrzeni KS odbywa się więc w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{c} . Prędkość obrotu (w przestrzeni KS) jest dwa razy większa niż bez stosowania tego uproszczenia.

Alternatywnie, zamiast dodawać do funkcji Hamiltona wyrażenie \mathcal{P} , można je odjąć, co prowadzi do równań ruchu

$$v'_0 = V_0 + \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{V} - \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} v_0 \mathbf{c}, \quad (1.179)$$

$$V'_0 = -\omega^2 v_0 + \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{c} \quad \mathbf{V}' = -\omega^2 \mathbf{v} - \frac{4\Omega\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} V_0 \mathbf{c}, \quad (1.180)$$

co z kolei ogranicza obrót do płaszczyzny $(\mathbf{e}_0, \mathbf{c})$.

1.17 Zmienne KS3

Wybór wektora definiującego skierowanego wzdłuż osi obrotu umożliwił uproszczenie równań ruchu tak, aby obrót wpływał tylko na część zmiennych. W rozważaniach tych nie był wybrany konkretny układ współrzędnych, co daje pewną swobodę przy jego wyborze. Wybór układu w którym wektor \mathbf{c} jest skierowany wzdłuż jednej z osi tego układu prowadzi do najprostszej postaci transformacji KS. Rozpatrzmy zatem jakie skutki ma taki wybór układu współrzędnych na ruch keplerowski w obracającym się układzie współrzędnych na przykładzie $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ (zmienne KS3).

Stosując opisane wcześniej uproszczenie otrzymujemy równania ruchu

$$\begin{aligned}
v'_0 &= V_0 \\
v'_1 &= V_1 + \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} v_2, \\
v'_2 &= V_2 - \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} v_1, \\
v'_3 &= V_3, \\
V'_0 &= -\omega^2 v_0, \\
V'_1 &= -\omega^2 v_1 + \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} V_2, \\
V'_2 &= -\omega^2 v_2 - \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} V_1, \\
V'_3 &= -\omega^2 v_3.
\end{aligned} \tag{1.181}$$

Dla dwóch stopni swobody otrzymane zostały równania ruchu oscylatora harmonicznego, a obrót wpływa jedynie na zmienne w płaszczyźnie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Rozwiązaniem równań ruchu dla tych par zmiennych jest

$$\begin{aligned}
v_1(\tau) &= \left(v_1(0) \cos \omega\tau + \frac{V_1(0)}{\omega} \sin \omega\tau \right) \cos \Omega t + \left(v_2(0) \cos \omega\tau + \frac{V_2(0)}{\omega} \sin \omega\tau \right) \sin \Omega t, \\
v_2(\tau) &= \left(v_2(0) \cos \omega\tau + \frac{V_2(0)}{\omega} \sin \omega\tau \right) \cos \Omega t - \left(v_1(0) \cos \omega\tau + \frac{V_1(0)}{\omega} \sin \omega\tau \right) \sin \Omega t, \\
V_1(\tau) &= (V_1(0) \cos \omega\tau - v_1(0)\omega \sin \omega\tau) \cos \Omega t + (V_2(0) \cos \omega\tau - v_2(0)\omega \sin \omega\tau) \sin \Omega t, \\
V_2(\tau) &= (V_2(0) \cos \omega\tau - v_2(0)\omega \sin \omega\tau) \cos \Omega t - (V_1(0) \cos \omega\tau - v_1(0)\omega \sin \omega\tau) \sin \Omega t.
\end{aligned} \tag{1.182}$$

Rozwiązanie to jest złożeniem ruchu harmonicznego w płaszczyznach (v_1, V_1) i (v_2, V_2) z niejednostajnym (względem czasu τ) obrotem układu współrzędnych w płaszczyznach (v_1, v_2) oraz (V_1, V_2) .

Jeśli zastosowane zostałyby alternatywne uproszczenie, w którym zamiast dodawać, odjelibyśmy od funkcji Hamiltona wyrażenie \mathcal{P} , to uzyskalibyśmy równania ruchu

$$\begin{aligned}
v'_0 &= V_0 + \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} v_3, \\
v'_1 &= V_1, \\
v'_2 &= V_2, \\
v'_3 &= V_3 - \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} v_0 \\
V'_0 &= -\omega^2 v_0 + \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} V_3 \\
V'_1 &= -\omega^2 v_1, \\
V'_2 &= -\omega^2 v_2, \\
V'_3 &= -\omega^2 v_3 - \frac{4\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\alpha^2} V_0.
\end{aligned} \tag{1.183}$$

W tym wypadku rozwiązanie jest analogiczne, ale obrót ogranicza się do płaszczyzny $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3)$.

Przedstawione rozwiązanie różni się od przedstawionego w [31] tym, że obrót został ograniczony do dwóch z czterech stopni swobody (ale prędkość obrotu została podwojona). Redukcja taka jest możliwa jedynie przy wybraniu odpowiedniego wariantu transformacji KS, w której wektor definiujący skierowany jest wzdłuż osi obrotu. Dodatkowym atutem jest możliwość wyboru jednego z dwóch wariantów płaszczyzn, na których odbywa się obrót w przestrzeni KS. Warto też zauważyć, że żadna z tych płaszczyzn nie jest płaszczyzną Leviego-Civity zdefiniowaną w podrozdziale 1.14.

Rozdział 2

Potencjał zaburzający w zmiennych KS

Zagadnienie ruchu sztucznego satelity wokół Ziemi można przedstawić jako zaburzone zagadnienie dwóch ciał z równaniami ruchu

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ jest siłą zaburzającą. W przypadku sztucznego satelity jest to szereg różnych oddziaływań, z których najważniejszym zazwyczaj jest siła wynikająca z niesferycznego rozkładu masy wewnątrz Ziemi. Dla wysokich satelitów istotne jest także oddziaływanie grawitacyjne pochodzące od Słońca i Księżyca oraz ciśnienie promieniowania słonecznego (dalej nazywane oddziaływaniami lunisolarnymi). Dla niskich ważny jest opór atmosfery. Zarówno siła związana z niesferycznością Ziemi jak i oddziaływania lunisolarne są potencjalne, to znaczy istnieje taka funkcja skalarna $P(\mathbf{x}, t)$, że

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}}P(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

co pozwala to zastosować formalizm kanoniczny z funkcją Hamiltona $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}) + P(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathcal{H}_0(\mathbf{x})$ to hamiltonian niezaburzonego zagadnienia względnego dwóch ciał (w tym przypadku ruchu satelity wokół idealnie punktu materialnego o masie Ziemi).

Tradycyjnie geopotencjał, czyli potencjał pola grawitacyjnego Ziemi opisywany jest przy pomocy harmonik sferycznych. Co więcej, potencjał oddziaływań lunisolarnych można także rozwinąć w szereg wyrażony przez harmoniki sferyczne. Dlatego też w dalszej części przedstawione zostaną podstawowe własności tych funkcji, które następnie zostaną wykorzystane do wyrażenia ich przez zmienne KS, co pozwoli zapisać geopotencjał oraz jego pochodne względem zmiennych KS w dogodnej postaci.

2.1 Harmoniki sferyczne

Harmoniki sferyczne to funkcje zdefiniowane na jednostkowej sferze S^2 . Najczęściej wyraża się je za pomocą dwóch kątów opisujących położenie na tej sferze: długości $\lambda \in [0; 2\pi)$ i odległości biegunowej $\theta \in [0; \pi]$. Razem z promieniem sfery r , kąty te tworzą sferyczny układ współrzędnych, który powiązany jest z kartezjańskim rów-

nianiami

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \lambda, \\x_2 &= r \sin \theta \sin \lambda, \\x_3 &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Harmoniką sferyczną (lub funkcją sferyczną) stopnia $n \in \mathbb{N}$ i rzędu $m \in \{-n, -n + 1, \dots, n - 1, n\}$ nazywamy funkcję Y_n^m , która wyraża się wzorem [2]

$$Y_n^m(\lambda, \theta) = (-1)^m \left(\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta) \exp i m \lambda,\tag{2.4}$$

gdzie P_n^m to stowarzyszona funkcja Legendre'a stopnia n i rzędu m . Można ją wyrazić równaniem

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),\tag{2.5}$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem Legendre'a stopnia n . U różnych autorów powyższa definicja może różnić się czynnikiem $(-1)^m$ zwanym fazą Condon-Shortleya (czasem wyrażenie to zawarte jest w definicji funkcji Legendre'a). Może także pojawić się inny czynnik normalizujący harmonikę sferyczną.

Gdy kąt $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$, to kąt λ jest nieokreślony, ale dla $m \neq 0$, funkcja Legendre'a $P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0$ i cała funkcja $Y_n^m(\lambda, 0) = Y_n^m(\lambda, \pi) = 0$. Gdy $m = 0$, wtedy kąt $m\lambda = 0$, a więc harmoniki sferyczne są określone także na biegunach sfery, mimo że jedna ze współrzędnych sferycznych nie jest tam określona.

Gdy rząd funkcji sferycznej m wynosi zero, wtedy przyjmuje ona wartości rzeczywiste, i wyraża się ona przez wielomian Legendre'a

$$Y_n^0(\lambda, \theta) = \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} P_n^0(\cos \theta).\tag{2.6}$$

Zamiast współrzędnych sferycznych można wyrazić harmoniki sferyczne przez współrzędne kartezjańskie \mathbf{x} , podstawiając

$$\cos \theta = \frac{x_3}{r},\tag{2.7}$$

$$\exp i \lambda = \frac{x_1 + i x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},\tag{2.8}$$

$$r = |\mathbf{x}|.\tag{2.9}$$

Otrzymujemy wtedy

$$Y_n^m(\mathbf{x}) = (-1)^m \left(\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_n^m\left(\frac{x_3}{r}\right) \left(\frac{x_1 + i x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^m.\tag{2.10}$$

W dalszej części pracy będzie stosowana powyższa definicja harmonik sferycznych jako funkcji wektora \mathbf{x} (w tym wypadku wektor niekoniecznie musiałby być jednostkowy, gdyż przy takiej definicji jego norma nie wpływa na wartość funkcji).

Ogólniejsze od harmonik sferycznych są harmoniki bryłowe (ang. solid harmonics), które są funkcjami określonymi na całej przestrzeni $\mathbb{R}^3/0$. Dzielą się one na

harmoniki regularne $R_n^m(\mathbf{x})$ i nieregularne $I_n^m(\mathbf{x})$, zdefiniowane jako

$$R_n^m(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} r^n Y_n^m(\hat{x}), \quad (2.11)$$

$$I_n^m(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{x}). \quad (2.12)$$

Istotną własnością tych funkcji jest, to że są one rozwiązaniami różniczkowego równania Laplace'a w trzech wymiarach

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) y(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2.13)$$

2.2 Obroty harmonik sferycznych, macierz Wignera D

Transformacja wektora \mathbf{x} przy obrocie układu odniesienia może być przedstawiona przy pomocy macierzy obrotu R bądź kwaternionu jednostkowego \mathbf{q} (patrz rozdział 1.7). Otrzymujemy wtedy nowy wektor \mathbf{y}

$$(0, \mathbf{y}) = \mathbf{q}(0, \mathbf{x})\bar{\mathbf{q}}, \quad (2.14)$$

lub

$$\mathbf{y} = R\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Nowe współrzędne y_1, y_2, y_3 są liniowymi kombinacjami starych x_1, x_2, x_3 , a więc

$$y_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j, \quad (2.16)$$

gdzie R_{ij} jest funkcją obrotu (wyrażoną np. przez kąty Eulera, bądź współczynniki kwaternionu). W podobny sposób można przetransformować harmoniki sferyczne

$$Y_n^m(\mathbf{y}) = \sum_{j=-m}^m (D_{k,m}^n)^* Y_n^k, \quad (2.17)$$

gdzie $D_{k,m}^n$ są funkcjami obrotu, zwanymi funkcjami Wignera, które tworzą macierz Wignera D^n o wymiarach $(2n+1) \times (2n+1)$. Zazwyczaj funkcje te wyraża się poprzez kąty Eulera 3-2-3 (np. [46]) lub 3-1-3. Dla kątów typu 3-2-3 (α, β, γ) funkcja Wignera ma postać

$$D_{k,m}^n = d_{k,m}^n(\beta) \exp(-i(m\alpha + k\gamma)), \quad (2.18)$$

gdzie $d_{k,m}^n$ to

$$d_{k,m}^n(\beta) = (-1)^{k-m} \sqrt{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!} \quad (2.19)$$

$$\sum_s (-1)^s \frac{(\cos \frac{\beta}{2})^{2n-2s-m-k} (\sin \frac{\beta}{2})^{2s+k-m}}{s!(n-k-s)!(n+m-s)!(k-m+s)!}. \quad (2.20)$$

Sumowanie przebiega po wszystkich możliwych całkowitych indeksach s , dla których argumenty silni w mianowniku są nieujemne.

Funkcje Wignera zazwyczaj wyrażane są przez kąty Eulera, ale można je także wyrazić przy pomocy współczynników kwaternionu \mathbf{q} opisującego dany obrót (taką postać podaje na przykład Louck [2])

$$D_{k,m}^n(\mathbf{q}) = \sqrt{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!} \sum_s \frac{(q_0 - iq_3)^{n+k-s} (-iq_1 - q_2)^{m-k+s} (-iq_1 + q_2)^s (q_0 + iq_3)^{n-m-s}}{s!(n-m-s)!(n+k-s)!(m-k+s)!}. \quad (2.21)$$

Sumowanie w powyższym równaniu także odbywa się po wszystkich s , całkowitych dla których argumenty silni są nieujemne. Powyższa definicja funkcji Wignera pozwala także zdefiniować funkcje o stopniu połówkowym, to znaczy o stopniu $n = j + \frac{1}{2}$, gdzie j jest nieujemną liczbą całkowitą. Indeksy m i k muszą wtedy także przyjmować wartości połówkowe, dzięki czemu wykładniki potęg oraz silnie w mianowniku dalej będą miały wartości całkowite. Funkcje stopnia połówkowego nie mają zastosowania przy transformacji układu współrzędnych harmonik sferycznych, ale dalej okażą się przydatne podczas liczenia pochodnych potencjału wyrażonego przez te funkcje. Z definicji (2.21) wynika, także że funkcje te są wielomianami jednorodnymi stopnia $2n$ zmiennych q , a więc funkcje o stopniu połówkowym będą wielomianami nieparzystego stopnia.

2.3 Transformacja KS dla funkcji sferycznych

Poza podstawowym zastosowaniem do transformacji układu współrzędnych, funkcje Wignera możemy zastosować do wyrażenia harmonik sferycznych poprzez zmienne KS. W tym celu rozważmy obrót układu współrzędnych, opisywany przez kwaternion \mathbf{q} taki że pewien wektor \mathbf{c} po obrocie będzie wskazywał kierunek kartezjańskiego wektora położenia \mathbf{x} , to znaczy

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{q}(0, \mathbf{c})\bar{\mathbf{q}}. \quad (2.22)$$

Powyższe równanie można zestawić z definicją zmiennych KS z wektorem definiującym \mathbf{c} (1.82), co pozwala stwierdzić, że

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.23)$$

Odpowiada to interpretacji zmiennych KS jako kwaternionu opisującego obrót i skalowanie wektora \mathbf{c} na wektor \mathbf{x} .

Harmoniki sferyczne transformują się za pomocą funkcji Wignera, a więc jeśli rozważymy obrót układu współrzędnych opisywany przez kwaternion \mathbf{q} , to harmoniki sferyczne, których argumentami są wektory \mathbf{x} i \mathbf{c} , są powiązane równaniem transformacyjnym

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sum_{k=-m}^m D_{k,m}^n(\mathbf{q}) Y_n^k(\mathbf{c}) = \sum_{k=-m}^m D_{k,m}^n\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) Y_n^k(\mathbf{c}). \quad (2.24)$$

Funkcja sferyczna kartezjańskiego wektora \mathbf{x} jest więc równa pewnej kombinacji liniowej funkcji Wignera od jednostkowego kwaternionu KS.

Zgodnie z definicją (2.21), funkcja Wignera jest jednorodnym wielomianem współczynników kwaternionu rzędu $2n$, dzięki czemu normę wektora wyciągnąć przed funkcję

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sum_{k=-m}^m \frac{1}{|\mathbf{v}|^{2n}} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) Y_n^k(\hat{c}). \quad (2.25)$$

Trzeba przy tym pamiętać, że o ile wcześniej funkcja Wignera opisywała obrót i jej argumentem był kwaternion jednostkowy, tak teraz argumentem tej funkcji jest kwaternion zmiennych KS, który nie musi być jednostkowy, więc funkcja ta nie opisuje już obrotu. Otrzymaliśmy tym samym wyrażenie harmoniki sferycznej $Y_n^m(\mathbf{x})$ przez funkcje Wignera zmiennych KS z wektorem definiującym \mathbf{c} (wymnożone przez stałe współczynniki $Y_n^k(\hat{c})$).

W takim podejściu problematyczne jest to, że jedną funkcję zastępujemy kombinacją liniową $2n + 1$ funkcji, co może znacznie wydłużyć dalsze obliczenia. Jeśli jednak przyjmiemy pewien konkretny wektor definiujący skierowany wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych (to znaczy $\mathbf{c} = \pm \hat{e}_3$, dla uproszczenia rozważymy tylko wariant $\mathbf{c} = \hat{e}_3$), wtedy wszystkie funkcje $Y_n^k(\hat{e}_3) = 0$, za wyjątkiem funkcji rzędu zero. Dostajemy wtedy proste wyrażenie

$$Y_n^m(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^{2n}} D_{m,0}^n(\mathbf{v}) Y_n^0(\hat{e}_3), \quad (2.26)$$

a po wstawieniu definicji harmonik sferycznych do prawej strony i zauważeniu, że $P_n(1) = 1$, otrzymujemy

$$Y_n^m(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\alpha r}\right)^n (-1)^m \left(\frac{(2n+1)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} D_{m,0}^n(\mathbf{v}). \quad (2.27)$$

Tym samym otrzymaliśmy wyrażenie pozwalające zamienić harmoniki sferyczne, będące funkcjami wektora kartezjańskiego na funkcje Wignera w zmiennych KS. Otrzymana zależność przypomina znany związek między harmonikami sferycznymi a funkcjami Wignera

$$Y_n^m(\alpha, \beta) = (-1)^m \left(\frac{(2n+1)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} D_{m,0}^n(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.28)$$

gdzie kąt γ ma dowolną wartość.

Wyprowadzając powyższe równania, niestandardowo rozszerzyliśmy definicję funkcji Wignera, która w definicji (2.21) jest funkcją kwaternionu jednostkowego (a więc punktu na trójwymiarowej sferze S^3), a w końcowej postaci jest funkcją dowolnego kwaternionu \mathbf{v} . Obie funkcje łączy równość

$$D_{m,k}^n(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^{2n} D_{m,k}^n\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right). \quad (2.29)$$

Ta definicja jest analogiczna do wspomnianych wcześniej harmonik regularnych (2.11) i na tej samej zasadzie możemy zdefiniować odpowiednik nieregularnych harmonik bryłowych (2.12)

$$E_{m,k}^n(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^{-2(n+1)} D_{m,k}^n\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right). \quad (2.30)$$

Analogia z harmonikami bryłowymi sięga głębiej i okazuje się że obie wprowadzone funkcje (D i E) spełniają równanie Laplace'a w czterech wymiarach

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_3^2} \right) y(v_0, v_1, v_2, v_3) = 0. \quad (2.31)$$

Wygodnym faktem jest też występowanie w powyższych wzorach potęg $2n$ oraz $-2(n+1)$, gdyż jeśli \mathbf{v} jest kwaternionem KS to $\alpha r = |\mathbf{v}|^2$ i harmoniki regularne i nieregularne można powiązać z funkcjami D i E (cały czas zakładając, że korzystamy z transformacji z wektorem definiującym skierowanym wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych)

$$R_n^m(\mathbf{x}) = \alpha^{-n} (-1)^m D_{m,0}^n(\mathbf{v}), \quad (2.32)$$

$$I_n^m(\mathbf{x}) = \alpha^{-n} (-1)^m E_{m,0}^n(\mathbf{v}). \quad (2.33)$$

Dzięki tym równościom możliwe jest w prosty sposób przetransformowanie dowolnej funkcji wyrażonej przez harmoniki sferyczne w zmiennych kartezjańskich (\mathbf{x}) i wyrażenie jej przez zmienne KS (\mathbf{v}). Ze względu na symetrię względem obrotu wokół trzeciej osi układu współrzędnych, występującą w definicji harmonik sferycznych, wykorzystujemy przy tym zmienne KS3 z wektorem definiującym skierowanym wzdłuż tej osi. Wykorzystanie innego zestawu zmiennych jest możliwe, ale wtedy harmonika sferyczna zastępowana byłaby kombinacją liniową funkcji Wignera.

2.4 Pochodne funkcji Wignera względem zmiennych KS

Samo wyrażenie potencjału w zmiennych KS nie wystarcza do opisanie dynamiki, gdyż w równaniach ruchu występują pochodne potencjału względem tych zmiennych. Potrzebne zatem będą wzory pozwalające obliczyć te pochodne, najlepiej w postaci wyrażonej przez te same funkcje.

Do wyznaczenia pochodnych dowolnego rzędu zastosowane będzie podejście podobne do użytego w pracy Métris, Xu i Wytrzyśczak [36] dla harmonik sferycznych – użyte będą zespolone operatory różniczkowe, które działając na funkcje specjalne będą zmieniały jej stopień i rząd, a następnie poprzez odpowiednie kombinacje tych operatorów otrzymamy wzory na dowolne pochodne tych funkcji. W tym celu zdefiniujemy cztery operatory

$$\begin{aligned} \partial_A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right), \\ \partial_B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} - i \frac{\partial}{\partial v_3} \right), \\ \partial_C &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_2} + i \frac{\partial}{\partial v_1} \right), \\ \partial_D &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial v_2} + i \frac{\partial}{\partial v_1} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Operatory te działając na funkcje Wignera zmieniają rząd i stopień funkcji o $\frac{1}{2}$ w

następujący sposób (wyprowadzenie tych równości znajduje się w dodatku B)

$$\begin{aligned}
\partial_A D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{n+m}\sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_B D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{n-m}\sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_C D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{n+m}\sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_D D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{n-m}\sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\partial_A E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -\sqrt{n-m+1}\sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_B E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -\sqrt{n+m+1}\sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_C E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -\sqrt{n-m+1}\sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\partial_D E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -\sqrt{n+m+1}\sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

W ogólności możemy zdefiniować operator

$$\partial_{(a,b,c,d)} = \partial_A^a + \partial_B^b + \partial_C^c + \partial_D^d, \tag{2.37}$$

będący złożeniem zdefiniowanych wcześniej operatorów. Jego działanie na funkcje Wignera zmienia rząd i stopień tej funkcji

$$\begin{aligned}
\partial_{(a,b,c,d)} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sigma_1(n, k, m, a, b, c, d) D_{k+\frac{1}{2}(-a+b+c-d), m+\frac{1}{2}(-a+b-c+d)}^{n-\frac{1}{2}(a+b+c+d)}(\mathbf{v}), \\
\partial_{(a,b,c,d)} E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sigma_2(n, k, m, a, b, c, d) E_{k+\frac{1}{2}(-a+b+c-d), m+\frac{1}{2}(-a+b-c+d)}^{n+\frac{1}{2}(a+b+c+d)}(\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

gdzie współczynniki normalizujące wynoszą

$$\begin{aligned}
\sigma_1(n, k, m, a, b, c, d) &= \\
&= \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!}{(n+m-a-c)!(n-m-b-d)!(n+k-a-d)!(n-k-b-c)!}}, \\
\sigma_2(n, k, m, a, b, c, d) &= \\
&= \sqrt{\frac{(n+m+b+d)!(n-m+a+c)!(n+k+b+c)!(n-k+a+d)!}{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!}}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Warto w tym momencie zauważyć, że dla dowolnego całkowitego j działając operatorami $\partial_{(a+j, b+j, c-j, d-j)}$ i $\partial_{(a,b,c,d)}$ na funkcje Wignera otrzymamy taki sam wynik. Wynika to ze wspomnianego wcześniej faktu, że funkcje Wignera spełniają równanie Laplace'a w czterech wymiarach (2.31), co w szczególności oznacza że

$$\partial_A \partial_B D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \partial_C \partial_D D_{k,m}^n(\mathbf{v}), \tag{2.40}$$

$$\partial_A \partial_B E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \partial_C \partial_D E_{k,m}^n(\mathbf{v}). \tag{2.41}$$

Przedstawione równości można następnie wykorzystać w celu uzyskania równań na pierwsze pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_0} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= (\partial_A + \partial_B) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= \sqrt{n+m} \sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n-m} \sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\frac{\partial}{\partial v_1} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -i(\partial_C + \partial_D) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= -i \left(\sqrt{n+m} \sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n-m} \sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) \right), \\
\frac{\partial}{\partial v_2} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= (\partial_C - \partial_D) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= \sqrt{n+m} \sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) - \sqrt{n-m} \sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \quad (2.42) \\
\frac{\partial}{\partial v_3} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -i(\partial_A - \partial_B) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= -i \left(\sqrt{n+m} \sqrt{n+k} D_{k-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n-m} \sqrt{n-k} D_{k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) \right),
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_0} E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= (\partial_A + \partial_B) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= \sqrt{n-m+1} \sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n+m+1} \sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \\
\frac{\partial}{\partial v_1} E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -i(\partial_C + \partial_D) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= -i \left(\sqrt{n-m+1} \sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n+m-1} \sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) \right), \\
\frac{\partial}{\partial v_2} E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= (\partial_C - \partial_D) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= \sqrt{n-m+1} \sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) - \sqrt{n+m+1} \sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}), \quad (2.43) \\
\frac{\partial}{\partial v_3} E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= -i(\partial_A - \partial_B) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \\
&= -i \left(\sqrt{n-m+1} \sqrt{n-k+1} E_{k-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) + \sqrt{n+m+1} \sqrt{n+k+1} E_{k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) \right).
\end{aligned}$$

Różniczkowanie powoduje zwiększenie lub zmniejszenie rzędu funkcji o $\frac{1}{2}$. W przypadku pochodnych wyższych rzędów trzeba złożyć odpowiednie operatory, na przykład

$$\frac{\partial^2}{\partial v_0^2} D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = (\partial_{(2,0,0,0)} + 2\partial_{(1,0,0,1)} + \partial_{(0,0,0,2)}) D_{k,m}^n, \quad (2.44)$$

a następnie zastosować równania (2.38).

Jeśli początkowo mamy do czynienia z funkcjami sferycznymi, którym odpowiadają funkcje Wignera z jednym z dolnych indeksów równym zero, to ich pierwsze pochodne względem położeń KS, będą wyrażone funkcjami stopnia połówkowego.

Drugie pochodne będą znów wyrażały się funkcjami stopnia całkowitego (różniącym się od pierwotnego o ± 1 , w zależności od rodzaju funkcji). Ich dolne indeksy niekoniecznie jednak będą miały wartość zero. Oznacza to, że kolejne pochodne potencjału wyrażonego przez harmoniki sferyczne względem zmiennych KS nie będą wyrażone przez kombinacje liniowe harmonik sferycznych, tak jak to jest gdy różniczkujemy te funkcje względem zmiennych kartezjańskich (jak pokazał Métris i in. [36]). Jest to istotna niedogodność, gdyż zwiększa ona ilość funkcji które trzeba obliczyć. Jeśli potencjał jest kombinacją liniową funkcji $D_{m,0}^n$, to obliczenie jego pochodnych będzie wymagało obliczenia funkcji $D_{m\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$, a drugie pochodne będą wymagały dodatkowo obliczenia $D_{m,\pm 1}^{n-1}$, $D_{m\pm 1,\pm 1}^{n-1}$, $D_{m\pm 1,0}^{n-1}$. Dlatego warto zastosować pewne własności i symetrie funkcji Wignera, które umożliwią skrócenie obliczeń.

2.5 Własności funkcji Wignera i równania rekurencyjne

Funkcje Wignera i harmoniki sferyczne mają zastosowanie także w fizyce – zwłaszcza w kwantowej teorii momentu pędu. Dlatego wiele własności tych funkcji zostało dobrze zbadanych i można je odnaleźć w publikacjach na ten temat. Ogromny zbiór użytecznych wzorów można znaleźć u Varshalovicha [46], a te, które będą przydatne w dalszych obliczeniach, zostaną przytoczone w tym podrozdziale. Niestety, funkcje Wignera są wyrażone tam poprzez kąty Eulera, dlatego jeśli chcemy jest zastosować w przypadku potencjału wyrażonego przez zmienne KS, konieczne jest przekształcenie ich do postaci, w której funkcje wyrażone są przez elementy kwaternionu oraz dostosowane do stosowania z wprowadzonymi tutaj funkcjami z kwaternionem niejednostkowym¹. Aby upewnić się, że przejście ze zmiennych katowych będzie wykonane prawidłowo, porównamy najprostsze funkcje stopnia $n = 1/2$ (łatwo popełnić błąd ponieważ różni autorzy stosują różne konwencje oznaczeń, dlatego takie porównanie pozwoli stworzyć pewnego rodzaju słownik pozwalający przejść z jednego zestawu zmiennych w drugi i przetłumaczyć potrzebne wzory na język kwaternionów). U Varshalovicha mamy

$$\begin{aligned}
D_{1/2,1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &= \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\
D_{-1/2,-1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &= \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\
D_{1/2,-1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\sin \frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \\
D_{-1/2,1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &= \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

¹Większość podanych dalej wzorów ma podobną postać dla obu funkcji $D_{m,k}^n(\mathbf{v})$ i $E_{m,k}^n(\mathbf{v})$, dlatego aby uniknąć niepotrzebnego dublowania, będą wypisane tylko wzory dla funkcji D . Wzory dla funkcji E można łatwo uzyskać mnożąc obie strony równości przez odpowiednią potęgę $|\mathbf{v}|$.

natomiast korzystając z definicji (2.21) mamy

$$\begin{aligned}
D_{1/2,1/2}^{1/2}(\mathbf{q}) &= q_0 - iq_3, \\
D_{-1/2,-1/2}^{1/2}(\mathbf{q}) &= q_0 + iq_3, \\
D_{1/2,-1/2}^{1/2}(\mathbf{q}) &= -iq_1 + q_2, \\
D_{-1/2,1/2}^{1/2}(\mathbf{q}) &= -iq_1 - q_2,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

co pozwala stwierdzić, że

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}, \\
q_1 &= -\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2}, \\
q_2 &= -\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}, \\
q_3 &= \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Dodatkowo trzeba pamiętać, że stosujemy niestandardową definicję funkcji Wignera, w której kwaternion nie musi być kwaternionem jednostkowym – wykorzystana została do tego własność, że funkcje te są jednorodnymi wielomianami składowych kwaternionu stopnia $2n$. Trzeba to uwzględnić, przez co w niektórych równaniach konieczne jest przemnożenie niektórych składników przez normę kwaternionu podniesioną do odpowiedniej potęgi.

Jedną z najbardziej użytecznych własności jest symetria

$$D_{m,k}^n(\mathbf{v}) = (-1)^{m-k} (D_{-m,-k}^n)^*(\mathbf{v}), \tag{2.48}$$

dzięki której możemy ograniczyć się do obliczenia funkcji i jej pochodnych z jednym z indeksów nieujemnym, a pozostałe uzyskać poprzez sprzężenie zespolone. Tym samym zmniejszamy ilość potrzebnych obliczeń niemal o połowę.

W praktyce obliczanie wartości funkcji specjalnych różnego stopnia i rzędu korzystając jedynie z definicji jest nieefektywne. Dużo lepiej jest skorzystać z odpowiednich równań rekurencyjnych, pozwalających wyznaczyć funkcję wyższego stopnia znając wartość tej funkcji dla niższego stopnia. W przypadku funkcji Wignera mamy do czynienia z dwoma rodzajami funkcji: stopnia całkowitego i połówkowego.

Poniższe równania pozwalają powiązać je ze sobą

$$\begin{aligned}
(2n+1)(q_0 + iq_3)D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= |\mathbf{q}|^2 \sqrt{(n+k)(n+m)} D_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{(n-k+1)(n-m+1)} D_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
(2n+1)(q_0 - iq_3)D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= |\mathbf{q}|^2 \sqrt{(n-k)(n-m)} D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{(n+k+1)(n+m+1)} D_{k+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
(2n+1)(-q_2 - iq_1)D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= -|\mathbf{q}|^2 \sqrt{(n+k)(n-m)} D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{(n+k+1)(n-m+1)} D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
(2n+1)(q_2 - iq_1)D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= -|\mathbf{q}|^2 \sqrt{(n-k)(n+m)} D_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{(n-k+1)(n+m+1)} D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Z tych wzorów można uzyskać bardziej praktyczne równości

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{q}|} D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{n-k}{n-m}} (q_0 + iq_3) D_{k+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{\frac{n+k}{n-m}} (q_2 - iq_1) D_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}), \quad (m \neq n), \\
\frac{1}{|\mathbf{q}|} D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{n-k}{n+m}} (-q_2 - iq_1) D_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) \\
&\quad + \sqrt{\frac{n+k}{n+m}} (q_0 - iq_3) D_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{q}), \quad (m \neq -n),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

które pozwalają obliczyć wartość funkcji znając jedynie funkcje stopnia niższego o $1/2$.

Jest to użyteczne, gdyż do obliczenia pochodnej funkcji Wignera używana jest wartość tej funkcji stopnia i rzędu różnego o $\pm \frac{1}{2}$. Jeśli potencjał w zmiennych kartezjańskich był wyrażony przez harmoniki sferyczne Y_m^n , to w zmiennych KS będzie on wyrażony przez funkcje Wignera $D_{m,0}^n$. Jeśli znana jest wartość tych funkcji dla określonego stopnia n i wszystkich możliwych wartości m , to korzystając z tych równości można wyznaczyć wartości funkcji $D_{m\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, które to są potrzebne do wyliczenia pochodnych zgodnie z równaniami wyprowadzonymi w podrozdziale 2.4. Co więcej, jeśli potrzebne są drugie lub dalsze pochodne, proces ten można powtórzyć otrzymując potrzebne funkcje z ostatnim indeksem równym ± 1 lub wyższym.

Poza wzorami pozwalającymi zmienić stopnień o połowę, istnieje też wzór rekurencyjny umożliwiający pominięcie funkcji stopnia półkowego

$$\begin{aligned}
D_{k,m}^n(\mathbf{q}) &= \frac{(n)(2n-1)}{\sqrt{(n^2-k^2)(n^2-m^2)}} \left((q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - \frac{km}{n(n-1)} |\mathbf{q}|^2 \right) D_{k,m}^{n-1}(\mathbf{q}) \\
&\quad - \frac{n\sqrt{((n-1)^2-k^2)((n-1)^2-m^2)}}{(n-1)\sqrt{((n-1)^2-m^2)((n-1)^2-k^2)}} |\mathbf{q}|^4 D_{k,m}^{n-2}(\mathbf{q}),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

którego nie można stosować dla $m = \pm n$ i $k = \pm n$. W takich przypadkach trzeba skorzystać z

$$\begin{aligned}
D_{n,m}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{2n(2n-1)}{n^2-m^2}}(q_0 - iq_3)(-iq_1 - q_2)|\mathbf{q}|^2 D_{n-1,m}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{-n,m}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{2n(2n-1)}{n^2-m^2}}(q_0 + iq_3)(-iq_1 + q_2)|\mathbf{q}|^2 D_{-(n-1),m}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{k,n}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{2n(2n-1)}{n^2-k^2}}(q_0 - iq_3)(-iq_1 + q_2)|\mathbf{q}|^2 D_{k,n-1}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{k,-n}^n(\mathbf{q}) &= \sqrt{\frac{2n(2n-1)}{n^2-k^2}}(q_0 + iq_3)(-iq_1 - q_2)|\mathbf{q}|^2 D_{k,-(n-1)}^{n-1}(\mathbf{q}),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

a gdy oba dolne indeksy przyjmują wartości ekstremalne – z równań, które mają bardzo prostą postać

$$\begin{aligned}
D_{n,n}^n(\mathbf{q}) &= (q_0 - iq_3)^2 D_{n-1,n-1}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{-n,-n}^n(\mathbf{q}) &= (q_0 + iq_3)^2 D_{-(n-1),-(n-1)}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{n,-n}^n(\mathbf{q}) &= (-iq_1 - iq_2)^2 D_{n-1,-(n-1)}^{n-1}(\mathbf{q}), \\
D_{-n,n}^n(\mathbf{q}) &= (-iq_1 + iq_2)^2 D_{-(n-1),n-1}^{n-1}(\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Wykorzystując te równania można stworzyć algorytm pozwalający rekurencyjnie obliczać funkcje Wignera. Dla funkcji stopnia całkowitego ogólna procedura może wyglądać następująco:

- ustawienie $D_{0,0}^0 = 1$ oraz wyliczenie funkcji stopnia pierwszego ($D_{k,m}^1$) z odpowiednich równań rekurencyjnych,
- wyliczenie funkcji kolejnych stopni n , wykorzystując znane funkcje stopnia $n-1$ i $n-2$.

Natomiast dla funkcji połówkowych:

- ustawienie $D_{\pm 1/2, \pm 1/2}^{1/2}$ zgodnie z (2.46) oraz wyliczenie funkcji stopnia $3/2$ z odpowiednich równań rekurencyjnych,
- wyliczenie funkcji kolejnych stopni n , wykorzystując znane funkcje stopnia $n-1$ i $n-2$.

W zastosowaniu do perturbacji opisywanych harmonikami sferycznymi, potrzebne będą najczęściej funkcje z drugim dolnym indeksem równym zero oraz jej pierwsza i czasem druga pochodna, więc niepotrzebne jest wyznaczanie wszystkich możliwych funkcji (których liczba byłaby proporcjonalna do n^3). Zamiast tego można ograniczyć się do funkcji całkowitego stopnia z drugim indeksem równym zero, gdyż równania rekurencyjne nie wymagają znajomości pozostałych. Co więcej, wystarczy znaleźć funkcje z pierwszym dolnym indeksem nieujemnym i skorzystać z symetrii (2.48). Następnie, do wyznaczenia pierwszych pochodnych, potrzebne funkcje połówkowe można wyznaczyć rekurencyjnie (ograniczając się tylko do funkcji z drugim dolnym indeksem $1/2$, a te z indeksem $-1/2$ wyznaczyć korzystając z symetrii) albo wykorzystując równania (2.50). W podobny sposób można obliczyć funkcje z drugim dolnym indeksem równym ± 1 , potrzebne do obliczenia drugich pochodnych.

2.6 Geopotencjał

W zagadnieniu ruchu sztucznego satelity najistotniejszą siłą zaburzającą jest zaburzenie wynikające z nieizotropowego rozkładu masy ciała wokół którego odbywa się ruch (w tym przypadku Ziemi). Potencjał tego zaburzenia najczęściej przedstawia się jako

$$\mathcal{H}_{geo} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_n^m(\cos \theta) (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda). \quad (2.54)$$

Kąty θ i λ to odległość od bieguna północnego i długość geograficzna, R_0 to promień równikowy Ziemi, a $C_{n,m}$ i $S_{n,m}$ to współczynniki stopnia n i rzędu m danego modelu pola grawitacyjnego. P_n^m to stowarzyszona funkcja Legendre'a. W praktyce, ze względu na skończony czas obliczeń i skończoną wielkość modelu pola grawitacyjnego sumowanie trzeba zakończyć na jakiejś określonej wartości n_{\max} . Współczynniki potencjału o stopniu i rzędzie $n = m = 0$, odpowiadają ruchowi keplerowskiemu, a przy układzie współrzędnych, którego środek znajduje się w środku masy, mamy $C_{1,m} = S_{1,m} = 0$, tak więc pierwsze sumowanie odbywa się od $n = 2$ do $n = n_{\max}$. Często korzysta się ze znormalizowanych współczynników geopotencjału $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$, ze współczynnikiem normalizacyjnym

$$N_{n,m} = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0,m})}{(n+m)!}}. \quad (2.55)$$

Jeśli używamy współczynników znormalizowanych, dla których

$$C_{n,m} = N_{n,m} \bar{C}_{n,m}, \quad S_{n,m} = N_{n,m} \bar{S}_{n,m}, \quad (2.56)$$

to funkcję Legendre'a w (2.54) zastępuje się funkcją znormalizowaną

$$\bar{P}_n^m = N_{n,m} P_n^m. \quad (2.57)$$

Dzięki normalizacji współczynniki geopotencjału mają zbliżony rząd wielkości nawet dla dużych wartości n i m . Ma to duże znaczenie przy obliczeniach numerycznych, gdyż może wpływać na ich dokładność.

Geopotencjał można wyrazić przez harmoniki sferyczne; wymaga to użycia zespolonych współczynników potencjału

$$J_{n,m} = \bar{C}_{n,m} - i\bar{S}_{n,m}. \quad (2.58)$$

Pozwala to zapisać potencjał jako

$$\mathcal{H}_{geo} = -\sqrt{4\pi}\mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sqrt{2-\delta_{0,m}} (R_0)^n r^{-(n+1)} \Re(J_{n,m} Y_n^m(\lambda, \theta)). \quad (2.59)$$

Jeśli oznaczymy $J_{n,-m} = (-1)^m J_{n,m}^* = (-1)^m (C_{n,m} - iS_{n,m})$, to potencjał można przedstawić jako

$$\mathcal{H}_{geo} = \sqrt{4\pi}\mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (R_0)^n r^{-(n+1)} (2-\delta_{0,m})^{-\frac{1}{2}} (J_{n,m} Y_n^m(\lambda, \theta)). \quad (2.60)$$

Zmienne kątowe θ i λ można zastąpić wektorem kartezjańskim $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ w równikowym układzie współrzędnych (wprowadzając przy tym obracający się układ współrzędnych z obrotem wokół trzeciej osi z prędkością równą prędkości obrotowej Ziemi), korzystając z relacji

$$\cos \theta = \frac{x_3}{r}, \quad \exp im\lambda = \left(\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^m, \quad (2.61)$$

a następnie przeprowadzając transformację KS otrzymujemy

$$\mathcal{H}_{geo} = \mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (R_0)^n \sqrt{\frac{2n+1}{2-\delta_{0,m}}} r^{-(n+1)} J_{n,m} D_{m,0}^n \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right). \quad (2.62)$$

W tym miejscu warto zastosować funkcję E , przekształcając hamiltonian do postaci

$$\mathcal{H}_{geo} = \mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (R_0)^n \sqrt{\frac{2n+1}{2-\delta_{0,m}}} \alpha^{n+1} J_{n,m} E_{m,0}^n(\mathbf{v}). \quad (2.63)$$

W ten sposób geopotencjał jest wyrażony jako kombinacja liniowa funkcji Wignera $E_{m,0}^n(\mathbf{v})$. Taka postać geopotencjału umożliwi obliczanie jego pochodnych stosując wzory na pochodne funkcji Wignera wprowadzone w podrozdziale 2.4.

2.7 Potencjał perturbacji wywołanych przez trzecie ciało

Poza zaburzeniami wynikającymi z niesferycznego rozkładu masy wewnątrz Ziemi, w ruchu sztucznego satelity istotnymi perturbacjami są perturbacje lunisolarne, czyli grawitacyjne oddziaływanie Słońca i Księżyca. Grawitacja oddziałuje bezpośrednio na satelitę, ale także pośrednio poprzez oddziaływanie grawitacyjne na Ziemię. W skutek tego oddziaływania układ współrzędnych, którego środek znajduje się w środku masy Ziemi, jest układem nieinercyjnym. Przyspieszenie jakiegokolwiek satelita względem Ziemi wskutek grawitacji trzeciego ciała będzie więc różnicą oddziaływania bezpośredniego i przyspieszenia środka układu współrzędnych. Potencjał oddziaływania bezpośredniego trzeciego ciała, \mathcal{H}_b wynosi

$$\mathcal{H}_b = -\frac{GM}{\|\Delta\|}. \quad (2.64)$$

G jest stałą grawitacji, a M to masa trzeciego ciała². Wektor Δ opisuje położenie trzeciego ciała względem satelity (rysunek 2.1). Jeśli \mathbf{R} to położenie trzeciego ciała względem Ziemi, to

$$\Delta = \mathbf{R} - \mathbf{r}. \quad (2.65)$$

Oddziaływanie pośrednie ma potencjał

$$\mathcal{H}_p = GM \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{R}\|^3}, \quad (2.66)$$

²gdymówimy o konkretnym ciele, będzie stosowany odpowiedni indeks dolny przy dotyczących go wielkościach, na przykład M_{\odot} i \mathbf{R}_{\odot} będą oznaczać odpowiednio masę i położenie Słońca

a łączny potencjał oddziaływania trzeciego ciała wynosi

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_p = -GM \left(\frac{1}{\|\Delta\|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{R}\|^3} \right). \quad (2.67)$$

Potencjał \mathcal{H}_b można rozpisać jako

$$\mathcal{H}_b = -\frac{GM}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{R}\|^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}} = -\frac{GM}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right) \hat{R} \cdot \hat{r}}}. \quad (2.68)$$

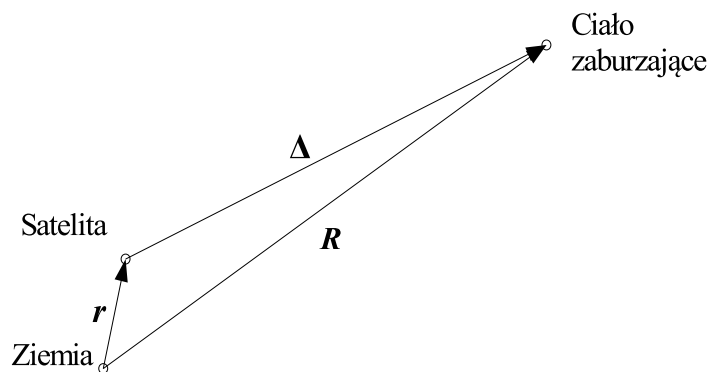
Jeśli rozwiniemy w szereg Taylora powyższą równość względem ilorazu $\frac{r}{R}$ w otoczeniu zera, to otrzymamy potencjał wyrażony poprzez wielomiany Legendre'a

$$\mathcal{H}_b = -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\hat{R} \cdot \hat{r}). \quad (2.69)$$

W tym szeregu wyraz $n = 1$ jest równy co do wartości bezwzględnej oddziaływaniu pośredniemu trzeciego ciała, ale ma przeciwny znak. Z kolei wyraz z $n = 0$ (równy $-\frac{GM}{R}$) zależy jedynie od odległości między Ziemią a trzecim ciałem, więc jest on jawną funkcją czasu. Jeśli nie korzystamy z rozszerzonej przestrzeni fazowej, wyraz ten nie ma wpływu na równania ruchu i może być pominięty, co oznacza że łączne oddziaływanie grawitacyjne trzeciego ciała będzie zawierało sumowanie od $n = 2$

$$\mathcal{H}_3 = -\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\hat{R} \cdot \hat{r}). \quad (2.70)$$

Trochę więcej ostrożności wymagane jest przy usunięciu wyrazu z $n = 0$ w przy-



Rysunek 2.1: Wektory \mathbf{r} , \mathbf{R} i Δ .

padku stosowania rozszerzonej przestrzeni fazowej oraz regularyzacji. Jeśli wyraz ten nie będzie pominięty, wpłynie on na początkową wartość energii (V^*). Sam wyraz zacznie też wpływać na równania ruchu dla zmiennych, ponieważ zostanie przemnożony przez czynnik regularyzujący zależny od położeń (na przykład $\frac{4r}{\alpha}$). Co więcej, wartość tego wyrazu może być duża, na przykład w przypadku oddziaływania Słońca na satelitę może ona przekraczać wartość części keplerowskiej hamiltonianu (opisującej niezaburzony ruch satelity wokół Ziemi). Może to w istotny sposób wpływać na

dokładność niektórych numerycznych metod propagacji orbity, zwłaszcza gdy stosowany integrator numeryczny zakłada, że mamy do czynienia z zaburzeniem, które jest niewielkie (jak integrator Laskara Robutela opisywany w następnym rozdziale). Z tego powodu składnik $n = 0$ powinien być pominięty. Odnosi się to także do sytuacji, kiedy hamiltonian nie jest rozwijany w szereg Taylora. Wtedy przyjmujemy, że

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_p = -GM \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^3} \right). \quad (2.71)$$

Niestety, takie podejście ma pewną istotną wadę. W powyższym równaniu mamy do czynienia z odejmowaniem bliskich sobie liczb. Jeśli trzecie ciało jest odległe (odległość satelity od Ziemi r jest dużo mniejsza od odległości trzeciego ciała R) to wyrazy $\frac{1}{\Delta}$ i $\frac{1}{R}$ są tego samego rzędu wielkości, a ich różnica ma z kolei zbliżony rząd wielkości do wyrazu $\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^3}$. Powoduje to utratę miejsc znaczących w wypadku obliczeń numerycznych. Problem ten można rozwiązać stosując przekształcenie

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{R} = \frac{R - \Delta}{R\Delta} = \frac{R^2 - \Delta^2}{R\Delta(R + \Delta)}, \quad (2.72)$$

a następnie wstawiając $\Delta^2 = R^2 + r^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{R} = \frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - r^2}{R\Delta(R + \Delta)}. \quad (2.73)$$

W ten sposób można usunąć odejmowanie dwóch bliskich liczb, które były rzędu $1/R$, dostając w wyniku wyrażenie rzędu $1/R^2$. Odejmowanie $2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - r^2$ nie jest tak problematyczne, gdyż oba wyrazy mają na ogół różny rząd wielkości. Kolejnym krokiem może być połączenie tej różnicy z wyrazem oddziaływania pośredniego ($\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^3}$). Wyraz ten jest rzędu $1/R^2$, takiego samego jak uzyskana wcześniej różnica i znowu następuje odejmowanie bliskich sobie liczb. Postępując podobnie jak poprzednio można doprowadzić całe wyrażenie do postaci rzędu $1/R^3$

$$\frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - r^2}{R\Delta(R + \Delta)} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^3} = -\frac{r^2}{R\Delta(R + \Delta)} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \left(\frac{2}{R\Delta(R + \Delta)} - \frac{1}{R^3} \right). \quad (2.74)$$

Wyrażenie w nawiasie przekształcamy dalej, otrzymując

$$\begin{aligned} \frac{2}{R\Delta(R + \Delta)} - \frac{1}{R^3} &= \frac{(2R + \Delta)(R - \Delta)}{R^3\Delta(R + \Delta)} = \frac{(2R + \Delta)(R^2 - \Delta^2)}{R^3\Delta(R + \Delta)^2} \\ &= \frac{(2R + \Delta)(2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - r^2)}{R^3\Delta(R + \Delta)^2}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Po tych przekształceniach potencjał ma postać, w której składa się on z wyrazów rzędu $1/R^3$:

$$\mathcal{H}_3 = -GM \left(-\frac{r^2}{R\Delta(R + \Delta)} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}(2R + \Delta)(2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - r^2)}{R^3\Delta(R + \Delta)^2} \right). \quad (2.76)$$

Unikamy w ten sposób problemu odejmowania bliskich liczb, bez konieczności rozwijania potencjału w szereg, które spowodowałyby znaczne wydłużenie obliczeń.

2.8 Rozwinięcie w szereg

Rozwinięcie potencjału trzeciego ciała w szereg może być użyteczne w przypadku rozważań analitycznych. Dlatego wychodząc z równania (2.71) możemy dalej przekształcić ten szereg tak, aby uzyskać postać dogodną do dalszych obliczeń. Pierwszym krokiem będzie rozdzielenie iloczynu skalarne go dwóch wektorów. W tym celu wykorzystana zostanie własność

$$P_n(\hat{u} \cdot \hat{v}) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\hat{u}|\epsilon) Y_n^m(\hat{v}|\epsilon), \quad (2.77)$$

która pozwala zamienić wielomian Legendre'a na sumę iloczynów dwóch funkcji sferycznych od obu wektorów, przy czym oba wektory muszą być opisywane w tym samym dowolnie wybranym układzie odniesienia ϵ . W przypadku ruchu sztucznego satelity, gdy uwzględniamy geopotencjał, dogodnym wyborem będzie wybór układu równikowego eq

$$\mathcal{H}_3 = -\frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\hat{R}|eq) Y_n^m(\hat{r}|eq). \quad (2.78)$$

Następnie możemy wprowadzić harmoniki bryłowe

$$\mathcal{H}_3 = -GM \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^{m*}(\mathbf{R}|eq) R_n^m(\mathbf{r}|eq) \quad (2.79)$$

oraz, tak jak dla geopotencjału, zamienić funkcję sferyczną na funkcję Wignera zmiennych KS

$$\mathcal{H}_3 = -GM \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha^{-n} I_n^{m*}(\mathbf{R}|eq) D_n^m(\mathbf{v}). \quad (2.80)$$

Dzięki temu przekształceniu, potencjał trzeciego ciała wyrażony jest jako wielomian zmiennych KS, co ułatwi ewentualne wprowadzenie zmiennych typu ką t działania. Funkcja $I_n^{m*}(\mathbf{R}|eq)$ zależy tylko od położenia trzeciego ciała, jest więc jawnie zależna od czasu. Niekiedy wygodnie będzie zmienić układ odniesienia tej funkcji na związany z orbitą trzeciego ciała, stosując równanie (2.17) i funkcje Wignera.

Łączny potencjał oddziaływania grawitacyjnego wynikającego z geopotencjału oraz wpływu ciał trzecich daje się więc wyrazić jako kombinacja liniowa dwóch rodzajów funkcji Wignera. Współczynniki tej kombinacji mogą być jawnie zależne od czasu, czyli w przestrzeni rozszerzonej od dodatkowej zmiennej v^* .

2.9 Ciśnienie promieniowania

Poza zaburzeniami wynikającymi z działania siły grawitacji, na ruch sztucznego satelity wpływają także siły niegravitacyjne. Poza oporem atmosfery, istotnym oddziaływaniem jest ciśnienie promieniowania elektromagnetycznego padającego na satelitę. Większość tego promieniowania to padające bezpośrednio promieniowanie słoneczne. Siła oddziaływania zależy od wielkości oświetlonej powierzchni satelity i jej odległości od Słońca. Dokładne wyznaczenie tej siły wymaga więc znajomości

kształtu oraz orientacji w przestrzeni badanego obiektu, co wykracza poza zakres tej pracy. Dlatego konieczne jest stosowanie pewnego przybliżenia. Zgodnie z Montenbruckiem i in. [37], przyspieszenie wywoływane przez ciśnienie promieniowania $\ddot{\mathbf{x}}$ można przedstawić jako

$$\ddot{\mathbf{x}} = -P_{\odot} C_R \frac{A}{m} \frac{\Delta_{\odot}}{\Delta_{\odot}^3} (1 \text{ au})^2, \quad (2.81)$$

gdzie P_{\odot} to wartość ciśnienia promieniowania w odległości 1 au od Słońca, która wynosi

$$P_{\odot} \approx 4.56 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (2.82)$$

współczynnik $C_R = 1 + \epsilon$, gdzie ϵ opisuje jaka część promieniowania jest odbijana przez powierzchnię. Oddziaływanie to zależy od stosunku powierzchni A do masy m , co oznacza na ogół, że jest silniejsze dla mniejszych obiektów (masa skaluje się z trzecią potęgą rozmiaru, a powierzchnia z jego kwadratem). Dla takiego oddziaływania możemy zdefiniować potencjał

$$\mathcal{H}_{RAD} = P_{\odot} C_R \frac{A}{m} \frac{(1\text{au})^2}{\Delta_{\odot}}, \quad (2.83)$$

który ma niemal identyczną postać co potencjał bezpośredniego oddziaływania grawitacyjnego Słońca, różni się jedynie stałym czynnikiem, który dodatkowo ma przeciwny znak. W porównaniu z oddziaływaniem grawitacyjnym nie występuje tutaj oddziaływanie pośrednie, gdyż wpływ ciśnienia promieniowania na Ziemię jest znikomym. Łączne oddziaływanie grawitacyjne i wynikające z ciśnienia promieniowania bywa nazywane oddziaływaniem fotograwitacyjnym.

Dla perturbacji wywołanych przez ciśnienie promieniowania pojawia się jeszcze jedno, niekiedy istotne zjawisko – efekt cienia. Przez pewien okres czasu satelita może znajdować się w cieniu Ziemi, to znaczy Ziemia znajduje się między satelitą a Słońcem, przez co promieniowanie nie dociera do satelity. Uwzględnienie tego zjawiska wymaga pomnożenia siły pochodzącej od ciśnienia promieniowania przez dodatkowy czynnik, funkcję cienia. Najprostszy model takiego cienia zakłada, że cień ma kształt walca o średnicy równaj średnicy Ziemi. Dla takiego modelu funkcja cienia przyjmuje wartość 0 gdy satelita znajduje się w cieniu i 1 poza nim. Istnieją też dokładniejsze, bardziej realistyczne modele w których cień ma kształt stożka w środku którego Słońce jest całkowicie przesłonięte, a wokół niego znajduje się strefa półcienia. Wtedy w takim półcieniu funkcja cienia przyjmuje wartości między zerem a jeden. Istotnym problemem jest to że funkcja cienia nie jest funkcją ciągłą (w przypadku prostego modelu walcowego), albo nie jest funkcją gładką (dla modelu z półcieniem). Z tego powodu jej uwzględnienie może być niekiedy kłopotliwe, zwłaszcza dla stosowanego w tej pracy formalizmu kanonicznego. Rozwiązanie tego problemu zaproponowali Hubaux i in. [26] przybliżając funkcję cienia pewną funkcją ciągłą.

Okres czasu w którym satelita przebywa w cieniu zależy od parametrów jego orbity. W przypadku niskich orbit ten czas jest długi w porównaniu do okresu orbitalnego i tylko satelity o bardzo dużym nachyleniu orbity względem ekliptyki mogą w ogóle nie wejść w cień w trakcie całego obiegu. Obiekty na orbitach o dużej półosi wielkiej przez krótszą część swojego okresu obiegu znajdują się w cieniu całkowitym, a dla wielu przypadków nie wchodzi w niego w ogóle.

Rozdział 3

Zastosowanie zmiennych KS do całkowania numerycznego orbit sztucznych satelitów

3.1 Metoda podziału

Symplektyczne metody całkowania numerycznego to metody wykorzystujące specyficzne własności układów kanonicznych. Najważniejszą cechą tych metod jest przybliżone zachowanie funkcji Hamiltona opisującej dany układ dynamiczny – błąd w wartości funkcji Hamiltona podczas całkowania ma charakter quasi-okresowy i nie posiada trendu wiekowego innego niż spowodowany błędem zaokrąglenia. Dzięki temu metody te są stabilne i mogą być wykorzystywane do całkowania orbit na długim odcinku czasu [22].

Niech $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ będzie funkcją Hamiltona pewnego układu kanonicznego z położeniami \mathbf{q} i pędami \mathbf{Q} . Równania ruchu dla tego układu można zapisać jako

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \{Q_i, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (3.1)$$

Nawias klamrowy oznacza kanoniczny nawias Poissona. Można te równania zapisać wykorzystując operator różniczkowy $L_{\mathcal{X}}$, zwany pochodną Liego, zdefiniowany jako

$$L_{\mathcal{X}}f = \{f, \mathcal{X}\}, \quad (3.2)$$

gdzie f i \mathcal{X} są funkcjami zmiennych kanonicznych. Równania ruchu można zapisać za pomocą tego operatora jako

$$\dot{q}_i = L_{\mathcal{H}}Q_i, \quad \dot{Q}_i = L_{\mathcal{H}}q_i. \quad (3.3)$$

Formalnym rozwiązaniem takiego układu równań jest

$$q_i(t) = \exp tL_{\mathcal{H}}q_i(0), \quad Q_i(t) = \exp tL_{\mathcal{H}}Q_i(0). \quad (3.4)$$

Znalezienie operatora $\exp tL_{\mathcal{H}}$ oznacza rozwiązanie układu równań i jest możliwe tylko w przypadku układów całkowalnych.

Metoda podziału, będąca przykładem metody symplektycznej, zakłada, że Hamiltonian $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ może zostać podzielony na sumę dwóch części: jednej zależnej

tylko od pędów, a drugiej zależnej od położeń, czyli $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = T(\mathbf{Q}) + V(\mathbf{q})$. Traktowane jako osobny układ kanoniczny, $\mathbf{q}, \mathbf{Q}, T(\mathbf{Q})$ oraz $\mathbf{q}, \mathbf{Q}, V(\mathbf{Q})$ są całkowalne i posiadają znane rozwiązania. W pierwszym przypadku mamy równania ruchu

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q}, T(\mathbf{Q})\}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \{\mathbf{Q}, T(\mathbf{Q})\} = 0, \quad (3.5)$$

a rozwiązaniem jest

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \{\mathbf{q}, T(\mathbf{Q})\} t, \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0). \quad (3.6)$$

Analogicznie, drugi układ ma równania

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q}, V(\mathbf{q})\} = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \{\mathbf{Q}, V(\mathbf{q})\}, \quad (3.7)$$

z rozwiązaniem

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0), \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0) + \{\mathbf{Q}, V(\mathbf{q})\} t. \quad (3.8)$$

Rozwiązania tych równań pozwalają zdefiniować operatory symplektyczne $\exp tL_T$ i $\exp tL_V$. Metoda podziału polega na przybliżeniu prawdziwego rozwiązania układu równań, wyrażonego przez operator $\exp tL_{\mathcal{H}}$, poprzez odpowiednie złożenie pewnej liczby operatorów $\exp t_j L_T$ i $\exp t_j L_V$, na przykład

$$\exp tL_{\mathcal{H}} \approx \exp t_1 L_T \circ \exp t_2 L_V \circ \dots \circ \exp t_{n-1} L_T \circ \exp t_n L_V. \quad (3.9)$$

Pojedynczy krok całkowania polega więc na naprzemiennym stosowaniu tych operatorów z odpowiednio dobranymi krokami t_j .

Najprostszy przykład takiej metody jest symplektyczna metoda Eulera. Pojedynczy krok całkowania o długości $t = h$ polega na zastosowaniu operatora

$$\exp hL_{\mathcal{H}} \approx \exp hL_V \circ \exp hL_T. \quad (3.10)$$

Sprowadza się to w n -tym kroku do zmiany pędów

$$Q_i(nh) = Q_i((n-1)h) - h \frac{\partial V}{\partial q_i}((n-1)h), \quad (3.11)$$

a następnie zmiany położeń

$$q_i(nh) = q_i((n-1)h) + h \frac{\partial T}{\partial Q_i}(nh). \quad (3.12)$$

Różni się to od klasycznej metody Eulera tym, że w klasycznej mielibyśmy

$$q_i(nh) = q_i((n-1)h) + h \frac{\partial T}{\partial Q_i}((n-1)h). \quad (3.13)$$

Podział na T i V jest możliwy dla wielu układów dynamicznych i zazwyczaj oznacza podział na energię kinetyczną i potencjalną. Stosowanie metody podziału nie ogranicza się jednak jedynie do takiego przypadku. W ogólności, jeśli hamiltonian \mathcal{H} możemy podzielić na sumę dwóch składników \mathcal{H}_1 i \mathcal{H}_2 , które osobno tworzą układy całkowalne ze znanymi rozwiązaniami, to także można zastosować tę metodę.

3.2 Integrator Laskara-Robutela

Symplektyczna metoda Eulera jest prosta w implementacji, ale aby uzyskać lepszą dokładność przy dłuższych krokach całkowania, lepiej jest stosować metody wyższych rzędów. Laskar i Robutel [32] opisali rodzinę takich metod.

Niech funkcja Hamiltona ma postać $\mathcal{H} = A + \epsilon B$, gdzie hamiltonian dzielimy na dwa składniki A i ϵB , a ϵ jest pewnym małym parametrem. Innymi słowy, jeden ze składników ma mniejszy rząd wielkości od drugiego. Laskar i Robutel zdefiniowali integratory typu $SABA_n$ jako

$$SABA_n : \exp c_1 L_A \exp d_1 L_B \exp c_2 L_A \exp d_2 L_B \dots \exp d_{n/2} L_B \exp c_{n/2} L_A \exp d_{n/2} L_B \dots \exp d_2 L_B \exp c_2 L_A \exp d_1 L_B \exp c_1 L_A, \quad (3.14)$$

dla n parzystego i

$$SABA_n : \exp c_1 L_A \exp d_1 L_B \exp c_2 L_A \exp d_2 L_B \dots \exp c_{(n+1)/2} L_A \exp d_{(n+1)/2} L_B \exp c_{(n+1)/2} L_A \dots \exp d_2 L_B \exp c_2 L_A \exp d_1 L_B \exp c_1 L_A, \quad (3.15)$$

dla n nieparzystego. Długości kroków c_i i d_i muszą być odpowiednio dobrane w zależności od metody i są odpowiednimi częściami kroku całkowania h . Litera S w nazwie metody oznacza że jest ona symetryczna, to znaczy że operator odwrotny do powyższego można uzyskać biorąc ujemny krok całkowania $-h$. Oprócz metod $SABA$ zdefiniowano również metody $SBAB$, w których inna jest kolejność stosowanych operatorów

$$SBAB_n : \exp d_1 L_B \exp c_2 L_A \exp d_2 L_B \dots \exp d_{n/2} L_B \exp c_{n/2+1} L_A \exp d_{n/2} L_B \dots \exp d_2 L_B \exp c_2 L_A \exp d_1 L_B, \quad (3.16)$$

dla n nieparzystego i

$$SBAB_n : \exp d_1 L_B \exp c_2 L_A \exp d_2 L_B \dots \exp c_{n/2+1} L_A \exp d_{n/2+1} L_B \exp c_{n/2+1} L_A \dots \exp d_2 L_B \exp c_2 L_A \exp d_1 L_B, \quad (3.17)$$

dla n parzystego.

Integratory te zostały skonstruowane tak, aby błąd w funkcji Hamiltona był rzędu $O(h^{2n}\epsilon + h^2\epsilon^2)$. Parametr ϵ powinien być więc dostatecznie mały, aby człon $O(h^2\epsilon^2)$ nie wpływał mocno na dokładność obliczeń. Przy małym kroku całkowania h człon ten nadal będzie ograniczał dokładność. Sposobem na poradzenie sobie z tym jest użycie integratora z korektorem symplektycznym. Polega to na dodaniu do kroku całkowania dodatkowego elementu $\exp -\tau^2 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{A,B\},B}$, z odpowiednio dobranym ułamkiem kroku c . Jeśli S oznacza integrator bez korektora to integrator z korektorem S_c ma postać

$$S_c : \exp \left[-\tau^2 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{A,B\},B} \right] S \exp \left[-\tau^2 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{A,B\},B} \right] \quad (3.18)$$

Dodatkowym warunkiem jest to, aby układ kanoniczny z hamiltonianem $\{\{A, B\}, B\}$ był całkowalny. Jeśli A jest funkcją kwadratową pędów kanonicznych, a B zależy tylko i wyłącznie od położeń, to założenie jest spełnione. Poprawienie dokładności odbywa się kosztem większej złożoności obliczeniowej, gdyż wymagane jest obliczenie drugich pochodnych funkcji Hamiltona B . Koszt ten nie musi być całkiem stracony, gdyż drugie pochodne będą dalej używane do rozwiązywania równań wariacyjnych. Użycie korektora pozwala zmniejszyć rząd błędu do $O(\tau^4 \epsilon^2) + O(\tau^k \epsilon)$.

3.3 Integrator Laskara-Robutela, a zmienne KS

Połączenie integratora sympletycznego ze zmiennymi KS nie jest nowym pomysłem. Na przykład Breiter [3] połączył zmienne KS z integratorem Wisdom-Holmana i pokazał, że zmienne zregularyzowane pozwalają obejść jedną z wad integratorów symplektycznych – konieczność stosowania stałego kroku całkowania. Pokazał też, że integrator ze zmiennymi KS daje dokładniejsze wyniki. Nieco później Breiter i in. [5] połączyli integrator Laskara-Robutela ze zmiennymi KS i zastosowali go do całkowania orbit komet w obłoku Oorta pod wpływem oddziaływania grawitacyjnego pochodzącego od dysku i centrum Galaktyki. Przypadek kometarny jest o tyle interesujący, że mimośrodowość orbit mogą być zbliżone do wartości 1, co praktycznie uniemożliwia stosowanie w standardowy sposób integratorów stałokrokowych. Zagadnienie to zostało później ponownie podjęte przez Langnera i Breitera [31], przy czym w tym wypadku dodano obracający się układ współrzędnych, co pozwoliło nieco uprościć obliczenia dzięki wyeliminowaniu jawnej zależności od czasu w tym zagadnieniu.

Zagadnienie satelitarne ma nieco inną specyfikę od zagadnienia ruchu komety. W obu przypadkach mamy do czynienia z zaburzeniem dwóch ciał, ale zaburzenia mają różny charakter. Główną siłą zaburzającą ruch satelity jest wpływ geopotencjału Ziemi i jej uwzględnienie jest dość kosztowne obliczeniowo. Siła ta jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do czwartej potęgi odległości satelity od środka Ziemi (w przypadku największej z harmonik J_2), przez co zaburzenie rośnie gwałtownie w miarę zbliżania się satelity do powierzchni planety, a więc rośnie wraz ze wzrostem mimośrodowości. Tymczasem w przypadku komety zaburzenie od pływów galaktycznych ma charakter różnicowy (to znaczy siła oddziaływania jest różnicą między oddziaływaniem Galaktyki na Słońce i komety) i rośnie wraz z odległością. Na satelitę z kolei działają siły różnicowe pochodzące od innych obiektów Układu Słonecznego. Te siły najmocniej działają na obiekt w apocentrum orbity. Inną istotną różnicą jest zakres mimośrodkowości. Niskie satelity muszą mieć niemal kołowe orbity, a w przypadku wysokich satelitów także istnieje górna granica mimośrodkowości, powyżej której satelita wchodzi głęboko w atmosferę lub nawet uderza w Ziemię. Na przykład dla orbity geostacjonarnej, przy założeniu że perycentrum znajduje się tuż nad powierzchnią Ziemi, mimośród wyniósłby około 0,85. Dlatego tę metodę całkowania numerycznego oplaca się stosować dopiero dla satelitów o większej półosi wielkiej, dla których mimośród może być odpowiednio wysoki, a nawet wtedy mimośród nie może fizycznie osiągnąć tak ekstremalnych wartości jak w przypadku komet.

W zagadnieniach związanych z ruchem sztucznych satelitów mamy do czynienia z zaburzeniem dwóch ciał. Jeśli ograniczymy się tylko do zaburzeń, które są potencjalne, możemy to zagadnienie opisać w formalizmie kanonicznym z funkcją Hamiltona $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, gdzie \mathcal{H}_0 opisuje niezaburzone względne zagadnienie dwóch ciał – ruch satelity względem kulistej Ziemi, a \mathcal{H}_1 to człon zawierający wszystkie uwzględniane perturbacje, który zależy tylko od położenia i czasu. Taki podział umożliwia w naturalny sposób zastosowanie opisanej wcześniej metody całkowania, czyli integratora symplektycznego Laskara-Robutela $SBAB_n$ lub $SABA_n$, gdzie funkcją A będzie \mathcal{H}_0 , a funkcją B będzie \mathcal{H}_1 . Oba podukłady są całkowalne, ale w przypadku zagadnienia dwóch ciał w zmiennych kartezjańskich ściśle rozwiązanie wymaga rozwiązywania równania Keplera, co wydłuża obliczenia.

Jeśli zastosujemy regularyzację i zmienne KS, wtedy zagadnienie będzie opisywane przez nową funkcję Hamiltona

$$\mathcal{K} = \frac{4r}{\alpha} (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + V^*) = 0, \quad (3.19)$$

którą dzielimy na część keplerowską

$$\mathcal{K}_0 = \frac{4r}{\alpha} (\mathcal{H}_0 + V^*), \quad (3.20)$$

oraz zaburzenie

$$\mathcal{K}_1 = \frac{4r}{\alpha} \mathcal{H}_1. \quad (3.21)$$

Rozwiązanie równań ruchu dla części keplerowskiej zagadnienia dla inercjalnego oraz w obracającego się układu odniesienia zostały przedstawione w rozdziale pierwszym. Zdecydowaną zaletą stosowania zmiennych KS jest jawna postać tego rozwiązania. W przeciwieństwie do stosowania zmiennych kartezjańskich, unikamy rozwiązywania równania Keplera.

Hamiltonian \mathcal{K}_1 tworzy równania ruchu dla pędów kanonicznych

$$\frac{d}{d\tau} V_i = -\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v_i} = -\frac{4r}{\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v_i} - \frac{8v_i}{\alpha^2} \mathcal{H}_1, \quad (3.22)$$

oraz współrzędnych

$$\frac{d}{d\tau} v_i = \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial V_i} = 0, \quad (3.23)$$

dla $i = 0..4$. Jeśli zaburzenie jest jawnie zależne od czasu, to dodatkowo trzeba uwzględnić równania dla zmiennych w rozszerzonej przestrzeni fazowej

$$\frac{d}{d\tau} V^* = -\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v_*} = -\frac{4r}{\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v_*}, \quad \frac{d}{d\tau} v^* = \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial V^*} = 0. \quad (3.24)$$

Podczas całkowania działanie zaburzenia \mathcal{K}_1 nie zmienia wartości współrzędnych v_i oraz czasu v^* , dzięki czemu prawe strony powyższych równań mają stałą wartość podczas pojedynczego etapu całkowania. Zaburzenie powoduje więc liniową zmianę wartości pędów (oraz energii V^* gdy zaburzenie zależy jawnie od czasu) proporcjonalną do kroku całkowania h

$$V_i(\tau + h) = V_i(\tau) - \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v_i} h. \quad (3.25)$$

3.4 Korektor symplektyczny

Zastosowanie integratora z korektorem symplektycznym jest także możliwe w przypadku stosowania zmiennych KS. Równania ruchu dla korektora generowane są przez Hamiltonian $\{\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1\}, \mathcal{K}\}$, który ma postać

$$\{\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1\}, \mathcal{K}_1\} = \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v_j} \right)^2. \quad (3.26)$$

Zależy on znów jedynie od położenia oraz czasu, tworzy więc on układ całkowny w którym zmienia się jedynie wartość pędów oraz V^* , proporcjonalnie do kroku korektora h_c

$$V_i^{\text{cor}} = V_i - 2h_c \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v_j} \frac{\partial^2 \mathcal{K}_1}{\partial v_j \partial v_i} \right). \quad (3.27)$$

Warto też zauważyć, że pierwsze i drugie pochodne \mathcal{K}_1 nie ulegają zmianom pod wpływem ruchu wywołanego zarówno przez \mathcal{K}_1 , jaki i przez korektor, a jedynie gdy działamy członem keplerowski \mathcal{K}_0 . Jeśli korektor jest stosowany bezpośrednio przed lub po kroku z hamiltonianem \mathcal{K}_1 , to nie trzeba osobno obliczać tych pochodnych. Z tego powodu lepiej jest stosować integratory $SBAB_c$ niż $SABA_c$ i tylko te pierwsze będą dalej używane.

3.5 Dokładność obliczeń

Podstawowym sposobem oszacowania dokładności całkowania numerycznego może być sprawdzenie wartości funkcji Hamiltona. W przypadku integratorów symplektycznych błąd w funkcji Hamiltona nie powinien posiadać trendu wiekowego, a ze względu na stosowanie kanonicznej transformacji Sundmana pozbawiona błędów numerycznych funkcja Hamiltona ma wartość zero.

Integrator z korektorem $SBAB3_c$ ma teoretyczny błąd funkcji Hamiltona rzędu $O(h^4\epsilon^2) + O(h^8\epsilon)$, zależny od kroku całkowania h oraz od małego parametru ϵ . Ze względu na to, że działamy w rozszerzonej przestrzeni fazowej, funkcja Hamiltona $\mathcal{K} = 0$ i przy jakimkolwiek podziale na sumę dwóch składników oba będą miały ten sam rząd wielkości. Mogłoby to sugerować że $\epsilon = 1$, co znacznie pogorszyłoby dokładność obliczeń. Jeśli jednak przeanalizujemy równania ruchu dla hamiltonianu $\mathcal{K}_1 = \frac{4r}{\alpha} \mathcal{H}_1$ z $\mathcal{H}_1 \approx \epsilon \mathcal{H}_0$, to

$$V_i' = -\frac{4v_i}{\alpha^2} (\mathcal{H}_1) - \frac{4r}{\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v_i} \approx O(\mathcal{H}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v_i}) \approx O(\epsilon), \quad (3.28)$$

oraz dla $\mathcal{K}_0 = \frac{4r}{\alpha} (\mathcal{H}_0 + V^*)$, gdzie $\mathcal{H}_0 + V^*$ jest równe co do wartości \mathcal{H}_1 ,

$$V_i' = -\frac{4v_i}{\alpha^2} (\mathcal{H}_0 + V^*) - \frac{4r}{\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_i} \approx O(\mathcal{H}_1) + O(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_i}) \approx O(\mathcal{H}_0). \quad (3.29)$$

Okazuje się więc, że pomimo równej wartości obu funkcji Hamiltona podczas całkowania ich wpływ na zmienne będzie różny, a wpływ zaburzenia będzie tego rzędu co mały parametr ϵ .

Warto w tym miejscu wspomnieć o pewnym paradoksie. Oczywistym faktem jest, że w formalizmie kanonicznym dodanie do funkcji Hamiltona \mathcal{H} dowolnej stałej C (lub dowolnej funkcji zależnej jedynie od czasu) nie ma wpływu na równania ruchu. Rozszerzenie przestrzeni fazowej i regularyzacja takiego hamiltonianu przy pomocy kanonicznej transformacji Sundmana spowoduje, że w nowej funkcji Hamiltona $\mathcal{K} = \frac{4r}{\alpha} (\mathcal{H} + V^* + C) = 0$ wartość V^* będzie inna niż gdybyśmy nie dodawali stałej. Zmieni się też postać równań ruchu – zamiast V^* pojawi się $V^* + C$ o tej samej wartości, ale rozwiązanie pozostanie takie samo (w przypadku gdy C jest funkcją czasu, wartość V^* będzie się zmieniać, ale $V^* + C$ będzie dalej miało wartość taką samą jaką by miało V^* bez dodawania do hamiltonianu funkcji C). W przypadku

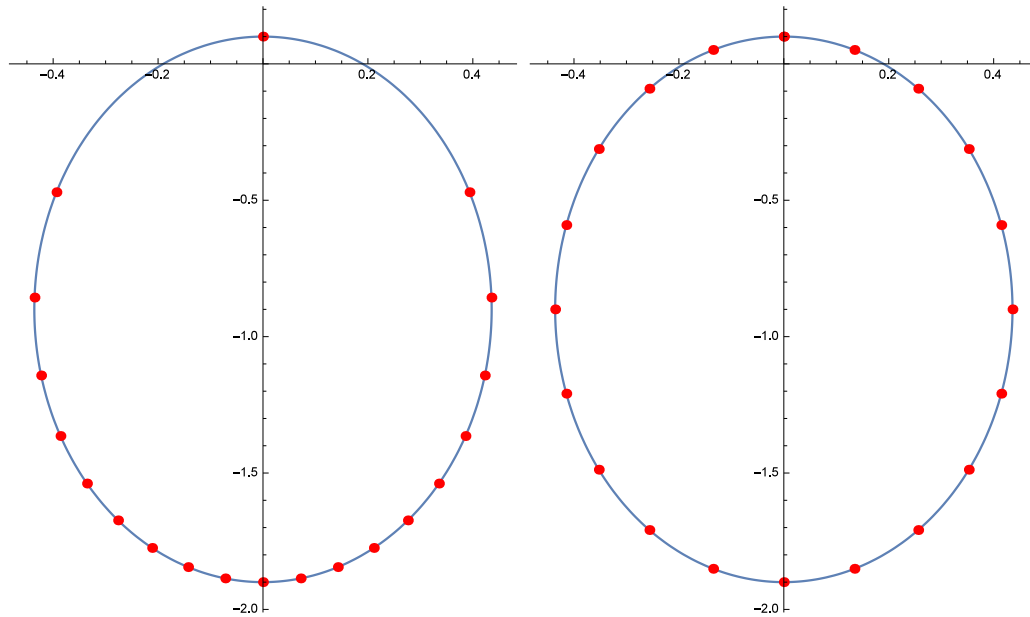
gdy stosujemy całkowanie metodą podziału, trzeba być jednak ostrożnym. Jeżeli C będzie duże i dodamy je do małej funkcji \mathcal{H}_1 , to może się okazać że \mathcal{K}_1 nie będzie już funkcją rzędu ϵ , co spowoduje znaczący spadek dokładności obliczeń, mimo iż właściwe rozwiązanie pozostanie takie samo. Problem ten nie jest czysto teoretyczny, pojawia się gdy chcemy uwzględnić zaburzenie pochodzące od grawitacji Słońca. Hamiltonian ma wtedy postać (patrz 2.7)

$$\mathcal{H}_1 = -GM_\odot \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{R}_\odot \cdot \mathbf{r}}{R_\odot^3} \right), \quad (3.30)$$

i dla wyższych satelitów jest on w przybliżeniu tego samego rzędu co potencjał grawitacji Ziemi. Jednak po odjęciu od niego zależnej jedynie od czasu funkcji $GM_\odot \frac{1}{R_\odot}$ (tak jak pokazano w rozdziale 2.7), rząd wielkości zaburzenia zmniejsza się, co znacząco poprawia precyzję obliczeń.

3.6 Wpływ mimośrodów orbity na dokładność obliczeń

Jednym z podstawowych celów dla których stosowana jest regularyzacja, jest zwiększenie dokładności i szybkości obliczeń w przypadku orbit o dużym mimośrodku. Stały krok całkowania, który jest konieczny w przypadku stosowania opisywanego integratora symplektycznego, powoduje, że bez stosowania regularyzacji miejsca w których znajdzie się obiekt na orbicie keplerowskiej na koniec poszczególnych kroków całkowania będą nierównomiernie rozłożone na orbicie, z największą gęstością przy apocentrum orbity i najmniejszą w okolicach perycentrum. W zagadnieniu ruchu sztucznego satelity wokół Ziemi, zaburzenie wynikające z niesferycznego rozkładu masy wewnątrz Ziemi zwiększa się gdy wysokość satelity nad powierzchnią ziemi maleje, a więc ma największy wpływ na ruch w okolicach perygeum orbity. Oba te fakty oznaczają, że w punkcie orbity gdzie satelita podlega silnym zaburzeniom całkowanie jest najmniej dokładne. W wyniku regularyzacji stały krok całkowania będzie odnosił się do czasu Sundmana, a nie do czasu fizycznego, co sprawi, że poszczególne kroki całkowania będą rozkładały się równomiernie na orbicie. Nierównomierny rozkład kroków całkowania nie jest jedyną przyczyną zmniejszonej dokładności w przypadku całkowania orbit o dużym mimośrodku. W zagadnieniu satelitarnym perturbacje od geopotencjału wzrastają gdy maleje wysokość nad powierzchnią Ziemi. W stosowanej metodzie całkowania błąd w funkcji Hamiltona jest proporcjonalny do pierwszej lub drugiej potęgi małego parametru ϵ , którego wartość jest większa gdy zbliżamy się do powierzchni Ziemi, więc błąd powinien rosnąć w okolicach perycentrum. Aby sprawdzić wpływ mimośrodu na błąd w funkcji Hamiltona wykonano całkowanie metodą $SBAB3_c$ z uwzględnieniem harmonik geopotencjału do rzędu czwartego, z uwzględnieniem perturbacji lunisolarnych i ciśnienia promieniowania słonecznego ($A/m = 1\text{m}^2/\text{kg}$). Orbita początkowa była orbitą geosynchroniczną z półosią wielką 6.61075 promienia Ziemi i nachyleniem 45 stopni. Początkowa długość węzła, argument perycentrum i anomalia średnia wynosiły zero, a przyjęty krok całkowania wyniósł około 0.01152 niezaburzonego okresu obiegu (krok całkowania definiowany jest jako pewien odstęp czasu Sundmana i za każdym razem odpowiada różnemu odstępowi czasu fizycznego; dokładną fizyczną długość kroku można określić dopiero po zakończeniu całkowania sprawdzając wartości v^*). Całkowanie przeprowadzono

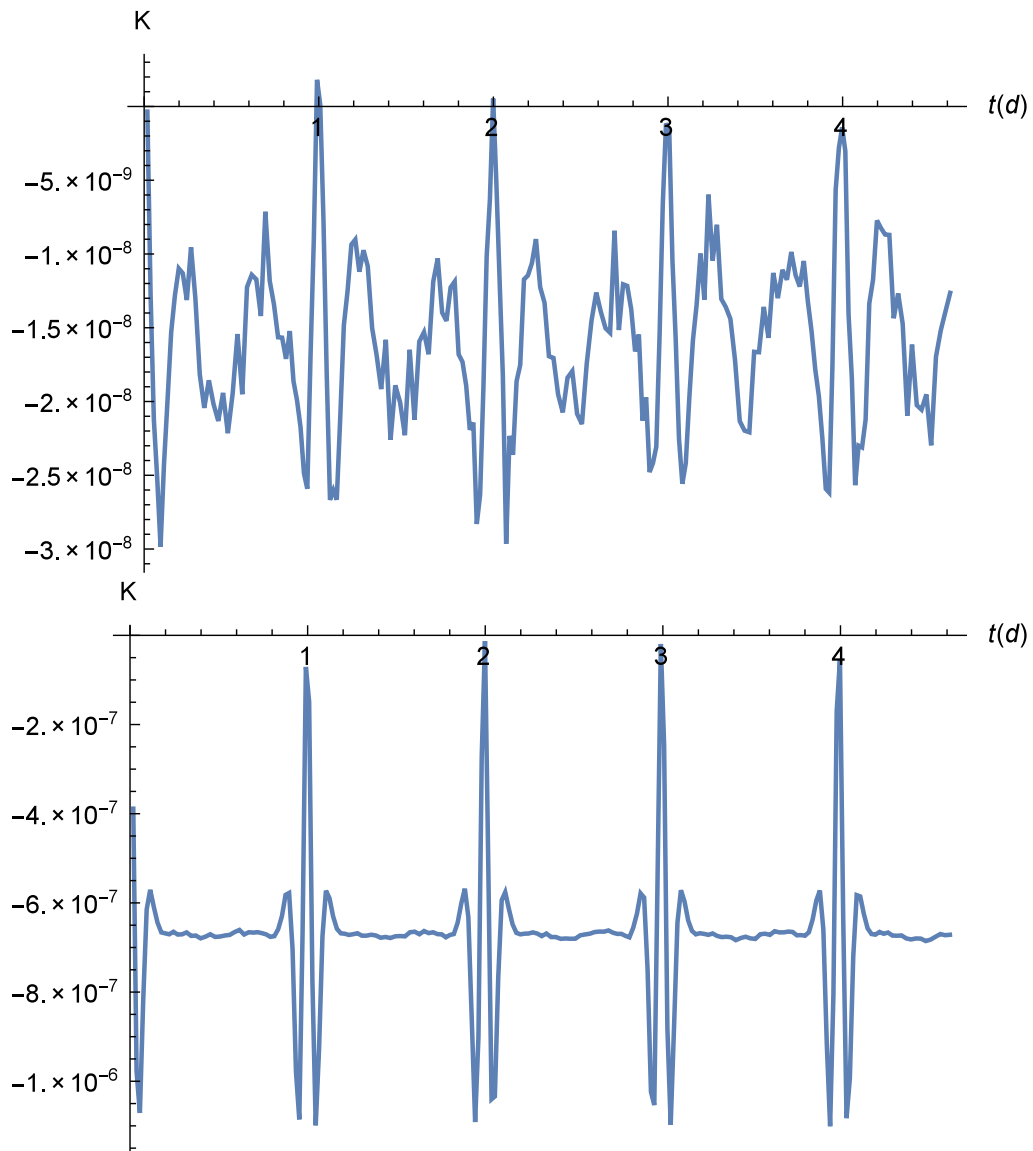


Rysunek 3.1: Orbita o mimośrodku 0.9 i półosi wielkiej 1. Kolejne czerwone punkty oddalone są od siebie o ten sam odstęp czasu fizycznego (lewy obrazek) lub czasu Sundmana (prawy obrazek)

dla dwóch różnych wartości mimośrodu $e = 0.2$ i $e = 0.5$ i sprawdzono wartość funkcji Hamiltona \mathcal{K} (wykres 3.2). Na obu wykresach widać oscylacje wartości hamiltonianu wokół pewnej wartości średniej. Wartość ta nie wynosi zero, czyli występuje pewne przesunięcie względem założonej wartości hamiltonianu. W odstępach czasu równych okresowi orbitalnemu (czyli w tym wypadku 1 doba) obserwujemy krótkotrwałe, silne oscylacje wokół wartości średniej, co jest bardziej widoczne dla większego mimośrodu. Jeśli na osi poziomej zamiast czasu fizycznego odłożymy wartość anomalii średniej, składając na jednym wykresie kolejne okresy orbitalne, to okazuje się że ten pik odchylenia znajduje się w okolicach perycentrum orbity (rysunek 3.3).

Test ten powtórzono dla tej samej orbity, ale innych wartości początkowej anomalii średniej i argumentu perycentrum aby uniknąć przypadkowej zbieżności i za każdym razem uzyskiwano podobny rezultat (rysunek 3.4). Zauważyć można jednak pewną subtelną różnicę – średnia wartość funkcji Hamiltona posiada widoczne odchylenie od zera, jeśli na początku obliczeń anomalia średnia ma wartość zbliżoną do zera. Natomiast dla początkowej anomalii różnej od zera (z dala od perycentrum) średnie odchylenie jest zbliżone do zera. Biorąc pod uwagę, że kanoniczna transformacja KS ograniczona jest do rozmaitości $\mathcal{H} = 0$, ten rozkład odchylenia może mieć pewien niewielki wpływ na dokładność obliczeń i w sytuacjach gdy początkowa wartość anomalii średniej nie ma większego znaczenia a mimośród jest wysoki, warto rozpocząć całkowanie z dala od perycentrum. Obliczenia powtórzono także dla orbit o innej półosi wielkiej i nachyleniu, aby upewnić się że na ten wynik nie wpłynął wybór konkretnej orbity (w tym wypadku będącej w rezonansie ruchu średniego) i wyniki okazały się być spójne z tymi dla satelity geosynchronicznego.

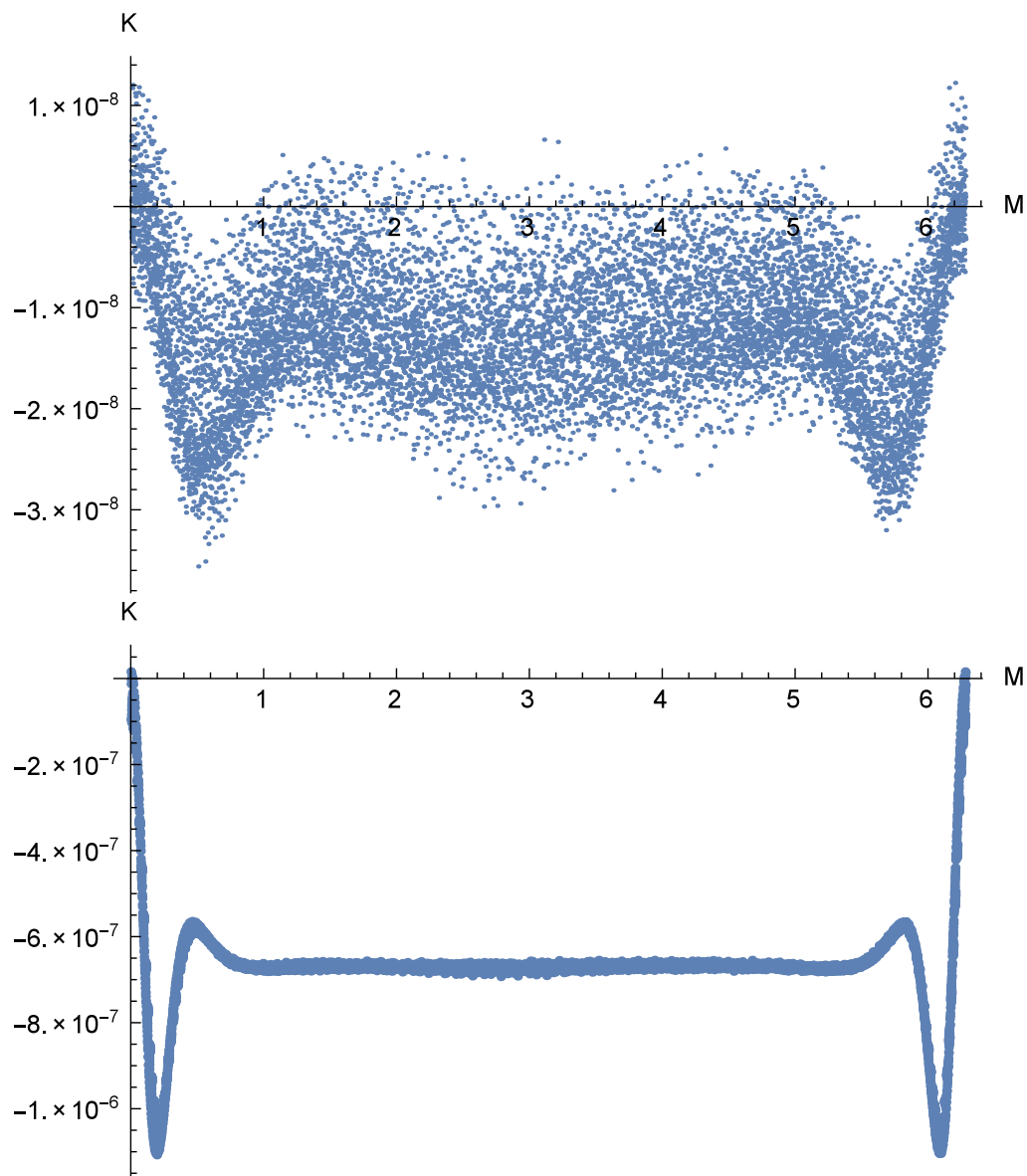
Przyczyną wzrostu błędu w okolicy perycentrum orbity jest czynnik $1/r^n$ pojawiający się w geopotencjale. Regularyzacja znacząco ogranicza wpływ czynnika $1/r$ w zagadnieniu keplerowskim dzięki pomnożeniu hamiltonianu przez r . Niestety,



Rysunek 3.2: Wartość funkcji Hamiltona w zależności od czasu dla orbity o mimośrodku 0.2 (górny wykres) i 0.5 (dolny)

w zaburzeniu dalej występować będą czynniki $1/r^{n-1}$. Ich wpływ na dokładność można potwierdzić wykonując całkowanie bez uwzględnienia geopotencjału, a jedynie z perturbacjami lunisolarnymi. Wtedy podbicie błędu w okolicy perygeum znika (rys. 3.5), a nawet błąd staje się nieznacznie większy w okolicy apogeum, gdzie perturbacje lunisolarne są największe.

Aby pokazać wpływ rosnącego mimośrodu na dokładność, na rysunku 3.6 pokazano wyniki całkowania numerycznego satelity geosynchronicznego o początkowym mimośrodku równym 0.01 i nachyleniu 63° (początkowa wartość anomalii średniej, argumentu perygeum i długości węzła wyniosły zero), na długim odcinku czasu ponad 300 lat. Mimośród początkowo rośnie do niemal maksymalnej dopuszczalnej fizycznie wartości, po czym spada i zaczyna oscylować. Te zmiany umożliwiły pokazanie błędu funkcji Hamiltona dla tej orbity w funkcji jej mimośrodu. Błąd gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem mimośrodu i maleje wraz z jego spadkiem. Oczywiście, wyniki po pierwszym maksimum mimośrodu są нефизyczne, gdyż przy

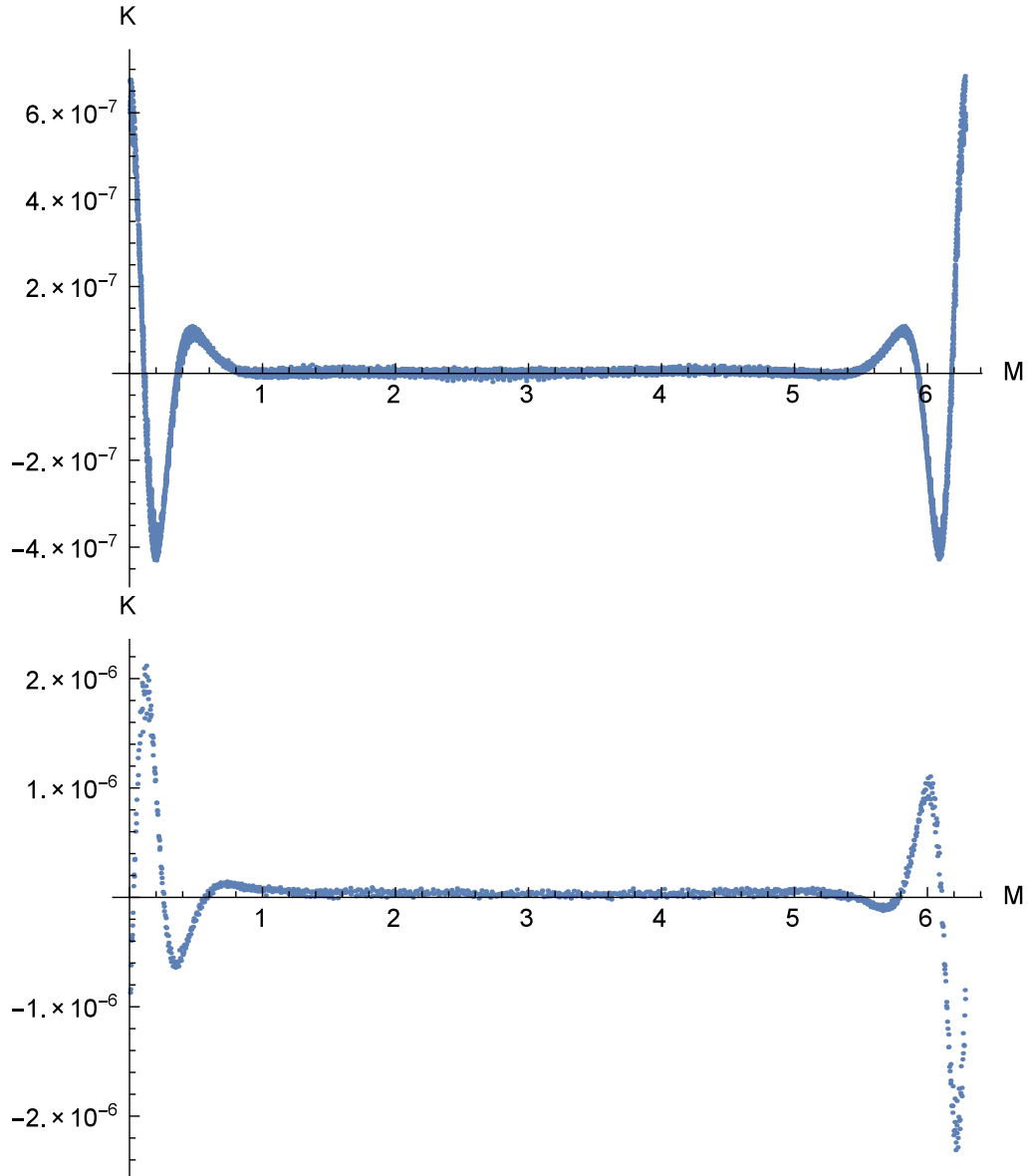


Rysunek 3.3: Wartość funkcji Hamiltona w zależności od anomalii średniej dla orbity o mimośrodku 0.2 (górny) i 0.5 (dolny). Na rysunkach przedstawiono złożenie 200 kolejnych okresów orbitalnych.

takim mimośrodku na satelicie działałaby mocno atmosfera lub też uderzyłby w Ziemię, ale pozwalają zbadać zachowanie się integratora.

3.7 Badanie stabilności orbit

Jednym ze sposobów na jakościową analizę dynamiki danego zagadnienia jest ustalenie stopnia jego chaotyczności, czyli określenie jak bardzo zachowanie się obiektu jest podatne na drobną zmianę w warunkach początkowych, którą oznaczymy jako wektor δ . Jednym z podstawowych narzędzi stosowanych w tym celu jest określenie największego wykładnika Lapunowa σ . Wykładnik ten określa jak szybko oddalają się od siebie wykładniczo dwie infinitezymalnie bliskie sobie orbity. Zdefiniowany



Rysunek 3.4: Wartość funkcji Hamiltona w zależności od anomalii średniej dla początkowej anomalii średniej 168 stopni dla argumentu perycentrum 0 (górny) i 123 stopnie (dolny). Złożenie 200 kolejnych okresów orbitalnych.

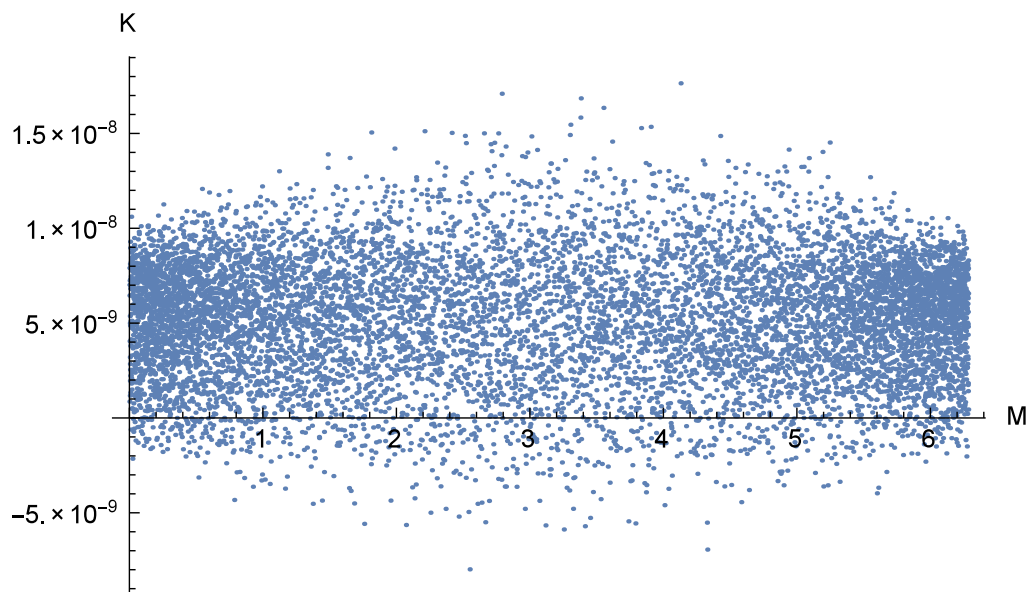
jest on jako

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta(0)}, \quad (3.31)$$

albo w postaci całki

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} ds, \quad (3.32)$$

Dobre wyznaczenie tego wykładnika wymaga odpowiednio długich obliczeń, tak aby czas t był wystarczająco duży. Cincotta i Simó [11] zaproponowali alternatywny wskaźnik MEGNO (ang. Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits – średni wykładniczy czynnik wzrostu bliskich orbit), który oznaczmy jako $Y(t)$.



Rysunek 3.5: Wartość funkcji Hamiltona w zależności od anomalii średniej dla mimośrodu 0.5, bez uwzględniania perturbacji pochodzących od geopotencjału. Złożenie 200 kolejnych okresów orbitalnych.

Zdefiniowany jest on jako

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds. \quad (3.33)$$

Wskaźnik ten zazwyczaj posiada pewne okresowe zmiany i dlatego stosuje się jego wartość uśrednioną

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds. \quad (3.34)$$

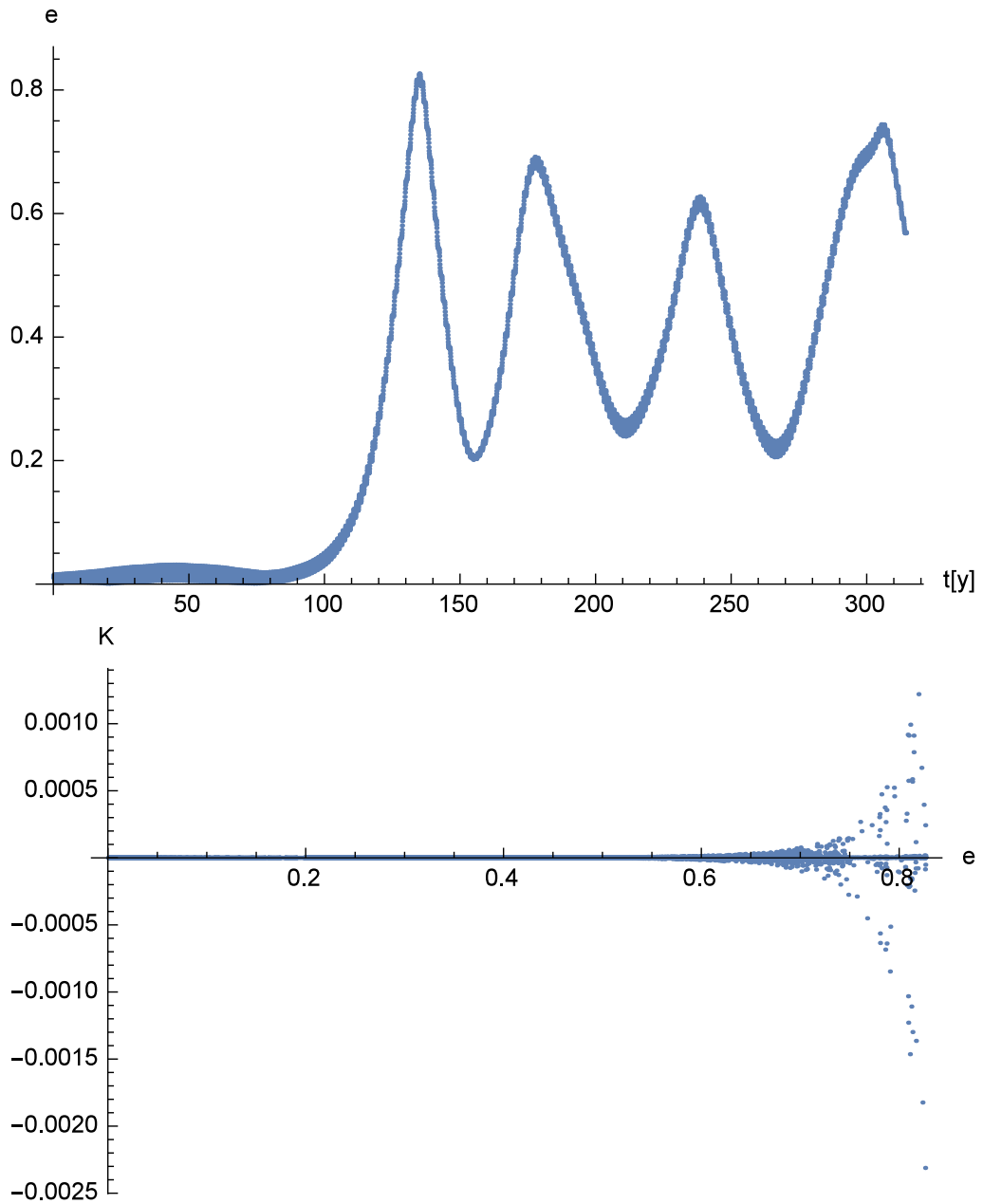
Dla orbit które są regularne, wartość tego współczynnika dąży do 2. W przypadku orbit chaotycznych dąży on liniowo do nieskończoności, przy czym

$$\frac{\bar{Y}(t)}{t} = \frac{\sigma}{2}, \quad (3.35)$$

a więc MEGNO jest ściśle powiązane z wykładnikiem Lapunowa, ale jego zaletą jest szybsza zbieżność. Pozwala to więc na zaoszczędzenie czasu podczas obliczeń i całkowanie równań ruchu na krótszym odcinku czasu, aby uzyskać dostatecznie dobry wynik.

3.8 Równania wariacyjne dla sztucznego satelity

Do wyznaczenia wskaźnika MEGNO konieczne jest wyznaczenie ewolucji w czasie wektora δ . Dla zagadnienia satelitarnego w zmiennych KS, wektor ten będzie składał się z różniczek dla wszystkich zmiennych $\delta \mathbf{v}$ i $\delta \mathbf{V}$ oraz δv^* i δV^* , których ewolucja w czasie będzie całkowana równoległe z równaniami ruchu. Dzięki temu, że dla równań ruchu korzystamy z formalizmu kanonicznego, równania wariacyjne możemy zapisać



Rysunek 3.6: Wyniki całkowania numerycznego – mimośród w funkcji czasu i hamiltonian w funkcji mimośrodu.

w postaci

$$\begin{aligned}
 \delta v_i' &= \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q \partial V_i} \delta q, \\
 \delta V_i' &= - \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q \partial v_i} \delta q, \\
 \delta (v^*)' &= \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q \partial V_i} \delta q, \\
 \delta (V^*)' &= - \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q \partial v_i} \delta q,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

gdzie sumowanie względem q przebiega po wszystkich zmiennych kanonicznych: V_j , v_j , v^* i V^* . Drugie pochodne funkcji Hamiltona są wyliczone z rozwiązania równań ruchu sztucznego satelity, czyli są funkcjami czasu τ . Jest to więc liniowy układ równań ze współczynnikami jawnie zależnymi od czasu. Co więcej, jest on kanoniczny jeśli przyjmiemy dla niego funkcję Hamiltona

$$\mathcal{H}_\delta = \sum_p \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q \partial p} \frac{1}{1 + \delta_{p,q}} \delta p \delta q, \quad (3.37)$$

gdzie sumowania względem p i q ponownie odbywają się po wszystkich zmiennych. W powyższym równaniu mylące może być użycie delty Kroneckera $\delta_{p,q}$ dla skrócenia zapisu – nie należy jej mylić z różniczkami. Operator różniczkowania jest operatorem liniowym, a więc ta funkcja jest liniowa ze względu na \mathcal{K} , co pozwala podzielić ją na dwa składniki tworzone przez \mathcal{K}_0 i \mathcal{K}_1 , co umożliwia włączenie równań wariacyjnych do stosowanego integratora symplektycznego. Konieczne jest więc wyznaczenie rozwiązań równań wariacyjnych utworzonych z obu części funkcji Hamiltona.

Dla części keplerowskiej zagadnienia, rozwiązanie równań wariacyjnych można uzyskać poprzez zróżniczkowanie rozwiązania dla zmiennych przedstawionego w rozdziale pierwszym. Jeśli rozwiązanie dla zmiennych v_i i V_i ma postać

$$v_i(\tau) = v_i(0) \cos \omega \tau + \frac{V_i(0)}{\omega} \sin \omega \tau, \quad (3.38)$$

$$V_i(\tau) = V_i(0) \cos \omega \tau - v_i(0) \omega \sin \omega \tau, \quad (3.39)$$

to po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta v_i(\tau) &= \delta v_i(0) \cos \omega \tau + \frac{\delta V_i(0)}{\omega} \sin \omega \tau + \\ &\quad \left(-v_i(0) \sin \omega \tau + \frac{V_i(0)}{\omega} \cos \omega \tau \right) \tau \delta \omega - \delta \omega \frac{V_i(0)}{\omega^2} \sin \omega \tau \\ &= \delta v_i(0) \cos \omega \tau + \frac{\delta V_i(0)}{\omega} \sin \omega \tau + \frac{\delta \omega}{\omega} \left(V_i(\tau) \tau - \frac{V_i(0)}{\omega} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

oraz

$$\begin{aligned} \delta V_i(\tau) &= \delta V_i(0) \cos \omega \tau - \delta v_i(0) \omega \sin \omega \tau + \\ &\quad (-V_i(0) \sin \omega \tau - v_i(0) \omega \cos \omega \tau) \delta \omega \tau - v_i(0) \delta \omega \sin \omega \tau \\ &= \delta V_i(0) \cos \omega \tau - \delta v_i(0) \omega \sin \omega \tau - \omega v_i(\tau) \delta \omega \tau - v_i(0) \delta \omega \sin \omega \tau. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Jeżeli wprowadzony układ współrzędnych obracający się z prędkością kątową Ω , to rozwiązania dla przynajmniej jednej pary zmiennych v_i , v_j (w zależności od wybranej osi obrotu) mają postać

$$\begin{aligned} v_i(\tau) &= v_i^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) + v_j^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau), \\ v_j(\tau) &= v_j^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) - v_i^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau), \\ V_i(\tau) &= V_i^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) + V_j^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau), \\ V_j(\tau) &= V_j^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) - V_i^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau), \end{aligned} \quad (3.42)$$

gdzie v^n to wartość zmiennej w nieobrcającym się układzie współrzędnych, przedstawione wcześniej. Wtedy różniczki będą równe

$$\begin{aligned}
\delta v_i(\tau) &= \delta v_i^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) + \delta v_j^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau) + v_j \Omega \delta v^*, \\
\delta v_j(\tau) &= \delta v_j^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) - \delta v_i^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau) - v_i \Omega \delta v^*, \\
\delta V_i(\tau) &= \delta V_i^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) + \delta V_j^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau) + V_j \Omega \delta v^*, \\
\delta V_j(\tau) &= \delta V_j^n(\tau) \cos \Omega v^*(\tau) - \delta V_i^n(\tau) \sin \Omega v^*(\tau) - V_i \Omega \delta v^*.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Równania dla różniczek dodatkowej pary zmiennych, wynikających z rozszerzenia przestrzeni fazowej, nie zależą od przyjętego układu współrzędnych. Różniczka δV^* jest stała, gdyż V^* jest stałe, a δv^* jest równa

$$\begin{aligned}
\delta v^*(\tau) &= \delta v^*(0) - \frac{2\delta\omega}{\omega} (v^*(\tau) - v^*(0)) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2 \omega^2} \left[4(\mathbf{V}(0) \cdot \delta \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \delta \mathbf{v}(0))\tau + 2(-\mathbf{V}(0) \cdot \delta \mathbf{V}(0) \right. \\
&+ \left. \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \delta \mathbf{v}(0) \frac{\sin 2\omega\tau}{\omega} \right) + 2(\mathbf{v}(0) \cdot \delta \mathbf{V}(0) + \mathbf{V}(0) \cdot \delta \mathbf{v}(0))(\sin \omega\tau)^2 \Big] \\
&+ \frac{\delta\omega}{\alpha^2 \omega^3} [2\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0)(2\omega\tau + \sin 2\omega\tau) \\
&+ (-\mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) + \omega^2 \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(0)) \left(2 \cos 2\omega\tau - \frac{\sin 2\omega\tau}{\omega} \right) \\
&+ 2\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{V}(0)\tau \sin 2\omega\tau].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Pojawiająca się w równaniach różniczka $\delta\omega$ jest stała podczas ruchu keplerowskiego i może zostać obliczona poprzez zróżniczkowanie częstości ω i wstawienie początkowych wartości położeń i pędów oraz różniczek.

Dla perturbacji, które zależą jedynie od zmiennych typu położenie, równania wariacyjne będą zmieniały tylko wartości różniczek pędów

$$\begin{aligned}
\delta V_i(\tau) &= \delta V_i(0) - \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}_1}{\partial q \partial v_i} \delta q \tau, \\
\delta V^*(\tau) &= \delta V_i(0) - \sum_q \frac{\partial^2 \mathcal{K}_1}{\partial q \partial v^*} \delta q \tau.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

W ten sposób można propagować wartości różniczek równoległe z całkowaniem równań ruchu.

3.9 Obliczanie MEGNO

W wyniku całkowania otrzymywać będziemy wartości różniczek, a z nich długość wektora $|\delta|$. Przy obliczaniu długości tego wektora pojawia się problem różnych jednostek dla konkretnych różniczek (składowymi wektora są wielkości δv_i w jednostkach długości i δV_i wyrażone w jednostkach prędkości itd.). Możliwe jest wprowadzenie pewnych stałych normalizujących, ale do obliczania MEGNO istotny jest eksponencjalny przyrost tych wielkości i dlatego stosowane będzie nie do końca ściśle podejście, które jednak jest powszechnie stosowane - długość wektora różniczek

będzie pierwiastkiem z sumy kwadratów jego składowych z pominięciem jednostek. Jako że mamy tylko kolejne wartości długości tego wektora (które oznaczymy jako δ_k , gdzie k to numer kroku całkowania) w konkretnych momentach czasu, a nie pełen przebieg, to wartość MEGNO zamiast z całki może być obliczona z wykorzystaniem dyskretnych równań (Cincotta i in. [12])

$$Y(n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \right). \quad (3.46)$$

dla MEGNO i

$$\bar{Y}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y(k), \quad (3.47)$$

dla jego wartości średniej. W praktyce, aby zaoszczędzić pamięć podczas obliczeń, lepiej jest skorzystać z wygodniejszych w użyciu równań rekurencyjnych (Breiter i in. [5])

$$Y(n) = \frac{n-1}{n} Y(n-1) + 2 \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \right), \quad (3.48)$$

oraz

$$\bar{Y}(n) = \frac{(n-1)\bar{Y}(n-1) + Y(n)}{n}. \quad (3.49)$$

Wymagają one tylko znajomości wartości MEGNO wyliczonej w poprzednim kroku oraz długości wektora różniczek. Ze względu na liniowość układu równań wariacyjnych, jeśli pomnożymy wartość początkową różniczek przez tę samą dowolną stałą, to ich wartość po pojedynczym kroku całkowania także zostanie zwiększona o ten sam czynnik. Taka zmiana nie wpływa też w żaden sposób na wyznaczoną wartość MEGNO, gdyż ona zależy od względnego przyrostu długości wektora różniczek ($\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$). Dzięki temu możliwa jest renormalizacja tego wektora w trakcie całkowania, na przykład ustawianie go na długość równą 1 co krok całkowania, co pozwala na uniknięcie przekroczenia zakresu zmiennej przy dłuższym całkowaniu (jest to możliwe przy eksponencjalnym przyroście). Upraszcza to też formułę pozwalającą wyliczyć MEGNO do

$$Y(n) = \frac{n-1}{n} Y(n-1) + 2 \ln(\delta_n). \quad (3.50)$$

O ile początkowa długość wektora różniczek nie ma znaczenia, to jego kierunek może być istotny. Breiter i in. [5] zastosowali proste podejście – wektor różniczek został wybrany tak, aby był prostopadły do prawych stron równań ruchu dla ruchu keplerowskiego. Dokładniejszym wyborem jest wektor prostopadły do prawych stron równań ruchu całego zagadnienia. Można też tak dobrać różniczki, aby zachowana była wartość funkcji Hamiltona lub niezmiennika transformacji KS $J \cdot c$ (to znaczy, gdy dodamy do wektora zmiennych wektor różniczek, wartość tych funkcji pozostanie taka sama). Pierwsze testy wykonane w ramach tej pracy pokazały jednak, że nie wpływa to w widoczny sposób na wynik, dlatego też stosowane było prostsze

podejście i wybrano wektor prostopadły do keplerowskiej części równań ruchu

$$\begin{aligned}\delta v_i(0) &= -V'_i = \omega v_i, \\ \delta V_i(0) &= v'_i = V_i, \\ \delta v^*(0) &= -V'_i = 0,\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\delta v^*(0) = v'_i = \frac{4r}{\alpha}.\tag{3.52}$$

Tak wybrany wektor różniczek, po znormalizowaniu do jednostkowej długości, będzie używany w całkowaniu równań wariacyjnych, a wynik tego całkowania umożliwi określenie MEGNO.

3.10 Integrator

Do przeprowadzenia obliczeń opisaną w tym rozdziale metodą zostało przygotowane odpowiednie oprogramowanie, napisane w języku C++. Integrator ten wykorzystuje metodę *SBAB3_c* (opcjonalnie metody wyższych rzędów) i uwzględnia zaburzenia pochodzące od geopotencjału (dowolnego rzędu i stopnia), grawitacji Słońca i Księżyca oraz ciśnienie promieniowania słonecznego, wyliczane tak jak opisano w poprzednim rozdziale tej rozprawy. Poza całkowaniem równań ruchu i równań wariacyjnych oraz obliczaniem MEGNO, dodatkowo wyznaczany jest maksymalny mimośród orbity w trakcie całkowania. Wielkość ta nie jest wyznaczana z elementów oskulacyjnych orbity, tylko wyznaczany jest punkt największego zbliżenia się satelity do Ziemi, czyli minimalna odległość perycentrum q_{min} , z której mimośród wyznacza się z prostej zależności

$$e_q = 1 - \frac{q}{a}.\tag{3.53}$$

Zazwyczaj półos wielka a ulega tylko bardzo niewielkim oscylacjom wokół wartości średniej, więc zamiast wartości półosi w danym momencie używana jest jej wartość początkowa. Mimośród e_q , wyznaczany z monitorowanej podczas całkowania odległości perycentrum, nie jest tożsamy z oskulacyjnym mimośrodem e . Jest on tak określony, gdyż w trakcie symulacji istotną wielkością będzie odległość maksymalnego zbliżenia się satelity do Ziemi, a jej znajomość pozwala określić czy satelita wchodzi w atmosferę.

Obrana metoda całkowania nie jest metodą bardzo dokładną i nie powinna być stosowana do precyzyjnego wyznaczania położenia satelitów. Celem tych symulacji jest zbadanie dynamiki obiektów w dłuższym okresie czasu (kilkadziesiąt lub więcej lat i tysiące lub więcej obiegów satelity wokół Ziemi), z zachowaniem odpowiednio krótkiego czasu całkowania (na przeciętnym PC jest to czas rzędu sekund na pojedynczą symulację, składającą się z 300000 kroków całkowania). Metoda ta nie wykorzystuje żadnego uśrednienia, co może okazać się istotne gdy badane są orbity znajdujące się w rezonansie ruchu średniego. Stosowanie integratora symplektycznego pozwala zachować odpowiednią dokładność na tak długim odcinku czasu, a wykorzystanie zmiennych KS umożliwia badanie orbit o dużym mimośrodku.

Oczywiście, metoda ta ma też swoje wady. Wykorzystanie równań kanonicznych uniemożliwia uwzględnienie perturbacji niepotencjalnych, zwłaszcza oporu atmosfery i dlatego nie może być ona stosowana dla niskich orbit. Nie jest ona też tak szybka jak gdyby stosować równania dla zmiennych średnich.

Obliczanie perturbacji lunisolarnych wymaga znajomości położeń Słońca i Księżyca w danym momencie czasu. W rozszerzonej przestrzeni fazowej pochodne funkcji Hamiltona względem czasu (v^*) będą pojawiały się w równaniach ruchu dla dodatkowej zmiennej V^* , przez co wymagana jest też znajomość prędkości tych ciał. Ponadto w równaniach wariacyjnych pojawia się druga pochodna względem czasu, a więc przyspieszenie Słońca i Księżyca. Zazwyczaj efemerydy (np. dokładna efemeryda horizons JPL¹) podają jedynie wektory położenia i prędkości. Dodatkowym utrudnieniem jest to, że momenty czasu dla kolejnych kroków całkowania są wyliczane w trakcie samego całkowania (poprzez zmienną v^*), co uniemożliwia wcześniejsze przygotowanie efemeryd z zewnętrznego źródła. Dlatego też efemerydy są generowane przez kod programu w trakcie całkowania. W przypadku Słońca wykorzystana jest efemeryda niskiej precyzji opisana w *Astronomical Almanach* publikowanym przez USNO. Porównanie z efemerydą JPL na odcinku 50 lat od roku 2000, dało średni błąd w położeniu Słońca rzędu kilku tysięcy kilometrów i maksymalny wynoszący około 30000 km. Daje to maksymalny błąd względny rzędu 10^{-4} i błąd średni o jeden rząd mniejszy; podobny błąd jest w wektorze prędkości Słońca. Dokładność ta jest niewielka, ale w tym zastosowaniu jest ona wystarczająca, a zaletą jest prostota i szybkość samej procedury obliczania. Procedura wyliczania prędkości i przyspieszenia Słońca powstała w wyniku różniczkowania wzorów na położenie względem czasu.

Do wyznaczenia położenia Księżyca zastosowano nieco bardziej precyzyjne podejście. Użyto półanalitycznej efemerydy ELP 2000-85 [9], przy czym wyrazy szeregu zostały ucięte tak, aby uzyskać błąd pozycji Księżyca mniejszy niż 1000 kilometrów. Półanalityczna postać efemerydy umożliwiła uzyskanie wektora przyspieszenia poprzez różniczkowanie szeregu definiującego prędkość względem czasu.

W przypadku efemeryd należy pamiętać, że gdy całkujemy z użyciem zmiennych KS, to czas jest jedną ze zmiennych i sam jest obciążony pewnym błędem całkowania, co wpływa też na dokładność samej efemerydy.

3.11 Orbity geosynchroniczne

Długoterminowe symulacje dynamiki sztucznego satelity mają sens w kontekście problemu śmieci kosmicznych. Niefunkcjonalny obiekt może pozostawać na orbicie wokół Ziemi przez setki lat, ale istnieją także orbity, na których w skutek perturbacji dochodzi do szybszego zwiększenia mimośrod orbit, co skutkuje naturalną deorbitacją. Istotnym czynnikiem, który warto zbadać, jest więc czas życia na danej orbicie i wzrost mimośrodu.

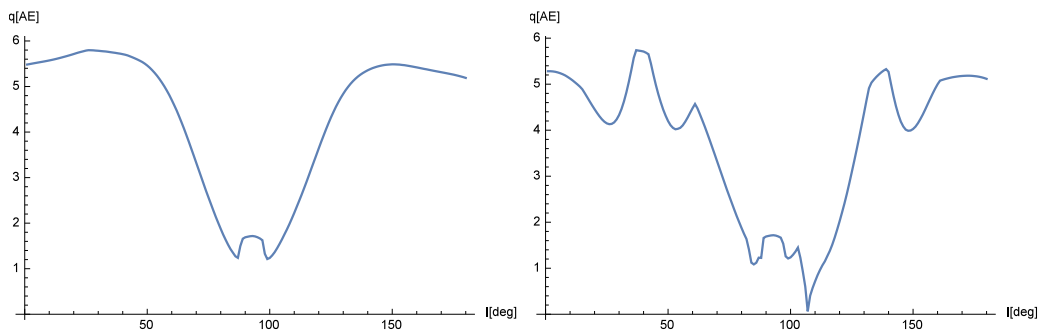
Do zaprezentowania działania integratora wybrane zostały orbity geosynchroniczne, czyli takie, których okres orbitalny równy jest jednej dobie gwiazdowej, ale w przeciwieństwie do orbit geostacjonarnych nie muszą być orbitami równikowymi i kołowymi. Półoś wielka takiej orbity wynosi około 42164 km. Ta wartość półosi oznacza, że w trakcie symulacji mimośród może urosnąć do wartości ponad 0.8 zanim satelita wejdzie w gęste partie atmosfery. Jest to więc dobre zagadnienie, aby zastosować opisywaną tutaj metodę całkowania. Badanie orbit geosynchronicznych pod względem wzrostu mimośrodu przeprowadzili Gkolias i Collombo [21]. Używali oni do tego celu integratora wykorzystującego zmienne średnie. Powtórzenie tych wyli-

¹<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

czeń z użyciem opisywanego tutaj integratora z jednej strony pozwoli przetestować metodę, a z drugiej umożliwi sprawdzenie, czy pominięcie zależności od anomalii średniej wpływa znacząco na wynik obliczeń.

Pierwsze testy pokazały, że do znaczącego wzrostu mimośrod, a co za tym idzie obniżenia perygeum może dochodzić pod warunkiem, że nachylenie orbity będzie odpowiednio duże. Przeprowadzono całkowanie dla warunków początkowych: półoś wielka $a = 6.61701$ promieni Ziemi, mimośród $e = 0.1$, anomalia średnia $M = 45^\circ$, długość węzła i argument perygeum $\Omega = \omega = 0^\circ$ i dla nachyleń od zera do 180° z krokiem co jeden stopień. Pojedynczy krok całkowania obejmował około 0.1152 okresu orbitalnego (co daje około 9 kroków całkowania na okres), uwzględniono geopotencjał do czwartego stopnia i rzędu, perturbacje lunisolarne oraz ciśnienie promieniowania (ze stosunkiem powierzchni do masy 1 kg/m^2). Przeprowadzono trzy serie obliczeń: w pierwszej ilość kroków wyniosła 10^5 , co odpowiada ok 31.5 latom, w drugiej i trzeciej ilość kroków odpowiednio podwojono i potrojono uzyskując okres całkowania 63 i 94.5 lat. Wartości czasowe można podawać jedynie w przybliżeniu, gdyż dokładny czas obliczany jest dopiero w trakcie całkowania.

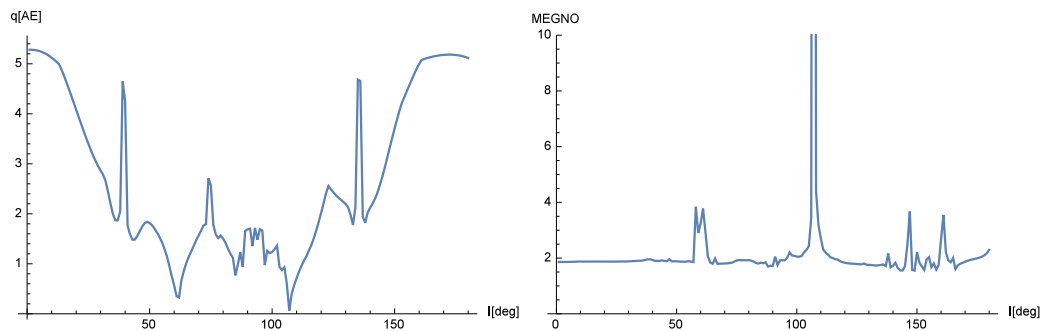
Całkowanie pokazało, że dla orbit o dużym nachyleniu już po 30 latach wzrost mimośrod może być znaczny (rys. 3.7). Po 60 latach dla części orbit perygeum obniżyło się poniżej jednego promienia Ziemi, co oczywiście oznacza spadek satelity, który byłby na takiej orbicie. Dłuższe całkowanie pokazuje też bardziej złożoną strukturę całego zagadnienia. Po ponad 90 latach (rys. 3.8) widać, że istnieją pewne wartości nachyleń dla których wzrost mimośrod jest wyraźnie mniejszy niż dla innych orbit w ich otoczeniu. Powtórzenie obliczeń dla innych parametrów początkowych, zmieniając argument perygeum na 45 i 90 stopni, pokazało, że nie jest to jedynie zależność od nachylenia (rys. 3.9). Zawsze jednak wzrost mimośrod jest większy dla orbit o dużym nachyleniu, a dla orbit w płaszczyźnie równika perygeum obniża się nieznacznie.



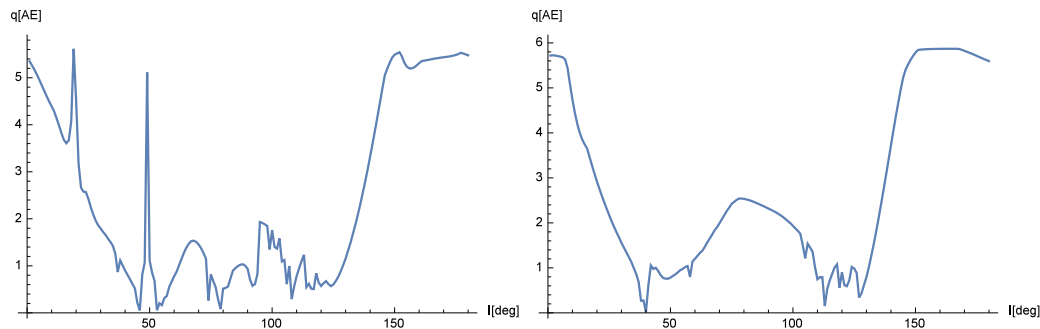
Rysunek 3.7: Odległość perygeum (w promieniach Ziemi) po 31 i 63 latach w zależności od początkowego nachylenia orbity.

Wyznaczenie wskaźnika MEGNO pokazało, że okres niecałych 100 lat może być zbyt mały aby dobrze oszacować ten parametr. W dużej części wykresu MEGNO jest mniejsze niż 2, są też obszary, w których wskaźnik wyraźnie przekracza tę wartość. Przeprowadzona regresja liniowa tego wskaźnika dla ostatnich 20 procent kroków całkowania dała dla orbity o najwyższym MEGNO współczynnik kierunkowy około 0.0004 d^{-1} . Oznacza to, że po 100 latach całkowania, MEGNO będzie wynosiło ok. 14. Orbity słabiej chaotyczne, które miałyby ten wskaźnik mniejszy o niecały rząd wielkości, miałyby jednak MEGNO w okolicach dwójki, co oznacza, że do oceny ich stabilności wymagany jest dłuższy czas całkowania. Wyniki te pokazują też, niestety,

że dla części orbit czas całkowania potrzebny do oceny ich stabilności jest dłuższy niż ich czas życia na orbicie. Z tego powodu dla krótszych okresów całkowania numerycznego lepszym wyznacznikiem stabilności są zmiany mimośrodów.



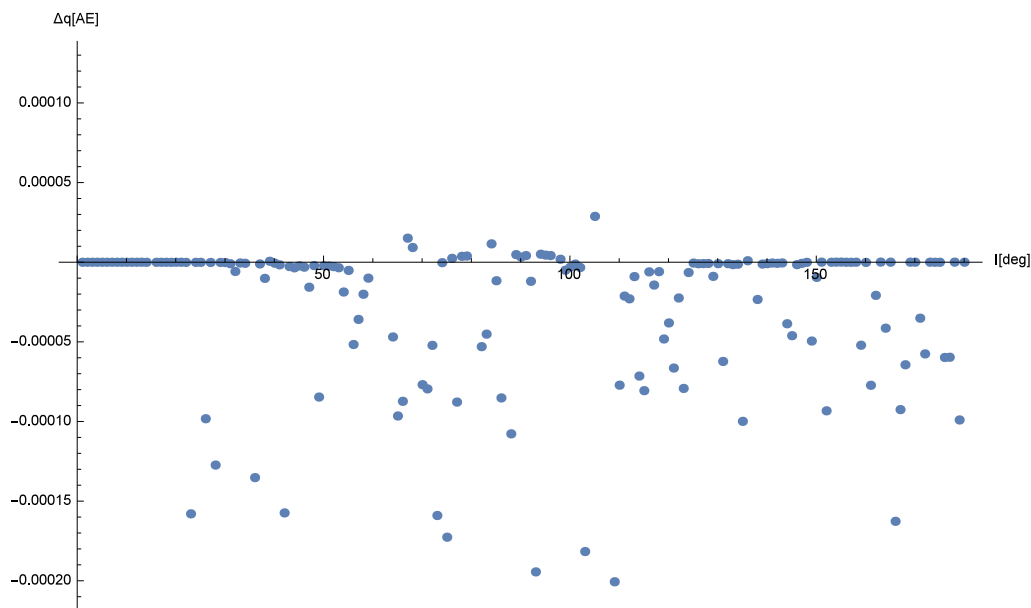
Rysunek 3.8: Odległość perygeum (w promieniach Ziemi) po 94 latach oraz wartość wskaźnika MEGNO (obcięta w zakresie 0-10).



Rysunek 3.9: Odległość perygeum (w promieniach Ziemi) po 94 latach dla początkowych wartości argumentu perygeum 45 i 90 stopni.

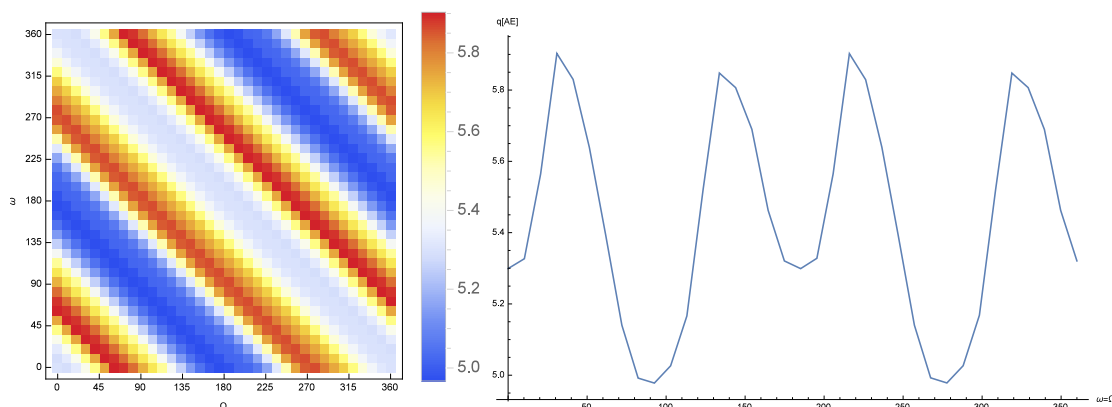
W tych obliczeniach użyty został duży krok całkowania (mniej niż 9 kroków na okres orbitalny). Aby oszacować dokładność uzyskanego wyniku powtórzono obliczenia zwiększając dwukrotnie ilość kroków i o połowę zmniejszając ich długość. Następnie obliczono różnicę otrzymanych odległości maksymalnego zbliżenia satelity do Ziemi po 90 latach na orbicie (rys 3.10). W wielu przypadkach otrzymane różnice są na poziomie 10^{-6} promienia Ziemi, ale niekiedy błąd sięga tysięcznych części promienia Ziemi, czyli kilku lub kilkunastu kilometrów. Gdy różnica jest duża niższa wysokość perygeum otrzymujemy w wyniku dokładniejszego całkowania – odstające punkty na wykresie znajdują się prawie zawsze poniżej poziomej osi liczbowej. W przypadku tych mocniej odstających punktów błąd nie wynika jednak z dokładności całkowania, a ze sposobu wyznaczenia minimalnej odległości perygeum. Brane pod uwagę są jedynie odległości na koniec każdego kroku całkowania i co za tym idzie istnieje szansa, że w momencie największego zbliżenia kolejne kroki całkowania będą nieco oddalone od perygeum. Zwiększenie ilości kroków na okres orbitalny pozwoliło lepiej pokryć orbitę kolejnymi punktami i lepiej uchwycić moment najniższego perygeum, przez co otrzymany wynik jest mniejszy. Uzyskana dokładność jest jednak wystarczająca przy tego typu jakościowej analizie.

Zmiana mimośrodu w zależności od kątów M, ω, Ω jest dość złożonym problemem. Wpływ początkowej anomalii średniej jest bardzo niewielki w porównaniu do zmiany pozostałych parametrów (na ogół rzędu 10^{-2} promienia Ziemi po 50 latach).



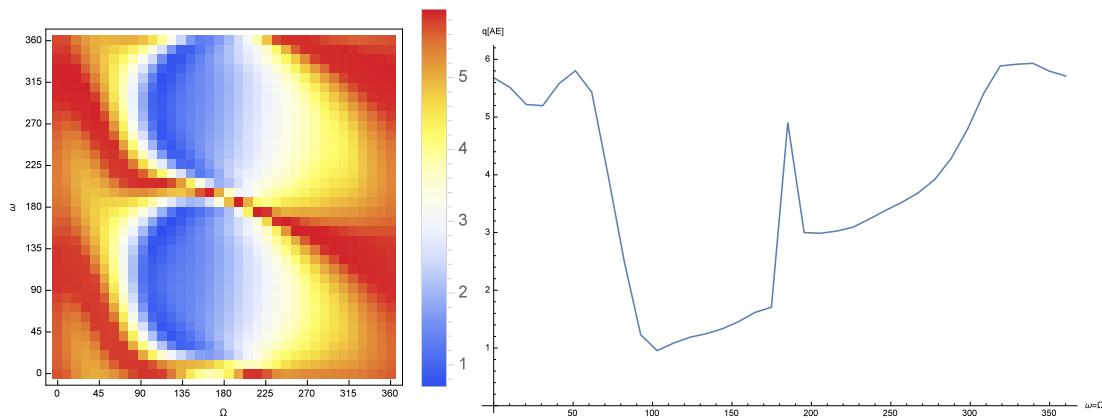
Rysunek 3.10: Dokładność wyznaczenia minimalnej odległości perygeum w zależności od nachylenia początkowej orbity ($\omega = 45^\circ$).

Oznacza to, że metoda z wykorzystaniem zmiennych średnich użyta przez Gkoliasa i Collombo [21] jest wystarczająca mimo obecnego rezonansu ruchu średniego. Z kolei zależność od kątów ω, Ω jest mocno zależna od nachylenia orbity. Przy małym nachyleniu istotna jest suma $\Omega + \omega$ (rysunek (3.11)). Dla bardziej nachylonych orbit sytuacja jest bardziej złożona (rysunek 3.12). Na rysunku 3.13 pokazano minimalną odległość perygeum po 47 latach na płaszczyźnie nachylenie-długość węzła wstępującego dla argumentu perygeum $\omega = 0^\circ$. Na rysunku 3.14 jest ten sam wykres dla $\omega = 90^\circ$. Przyjęty krok całkowania wyniósł około 17 kroków na okres orbitalny.

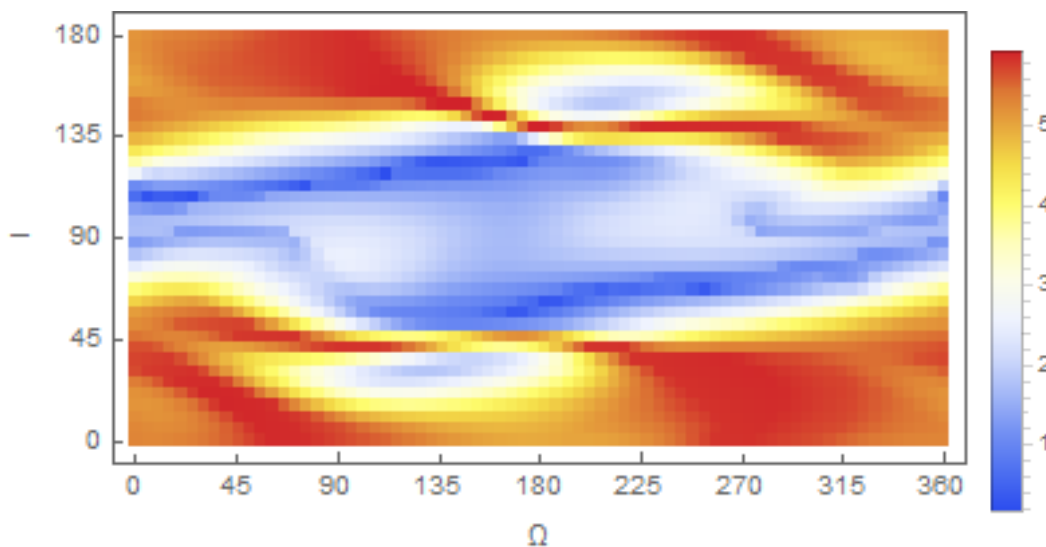


Rysunek 3.11: Minimalna odległość perygeum na płaszczyźnie ω, Ω dla nachylenia równego zero. Na prawym rysunku przekrój wzdłuż prostej $\omega = \Omega$.

Zmiany mimośrodów są efektem działania rezonansu Lidowa-Kozai (który będzie także przeanalizowany w następnym rozdziale). Jak pokazali Aleksandrova i in. [20], istotnym czynnikiem, który może wpływać na tempo wzrostu mimośrodów jest efekt ciśnienia promieniowania słonecznego, zwłaszcza dla orbit prawie kołowych. Dla obiektów o dużym stosunku powierzchni do masy może on zarówno przyspieszać wzrost mimośrodów, jak i go spowalniać. Na rysunku 3.15 przedstawiono wynik tych



Rysunek 3.12: Minimalna odległość perygeum na płaszczyźnie ω, Ω dla nachylenia równego 40° . Na prawym rysunku przekrój wzdłuż prostej $\omega = \Omega$.

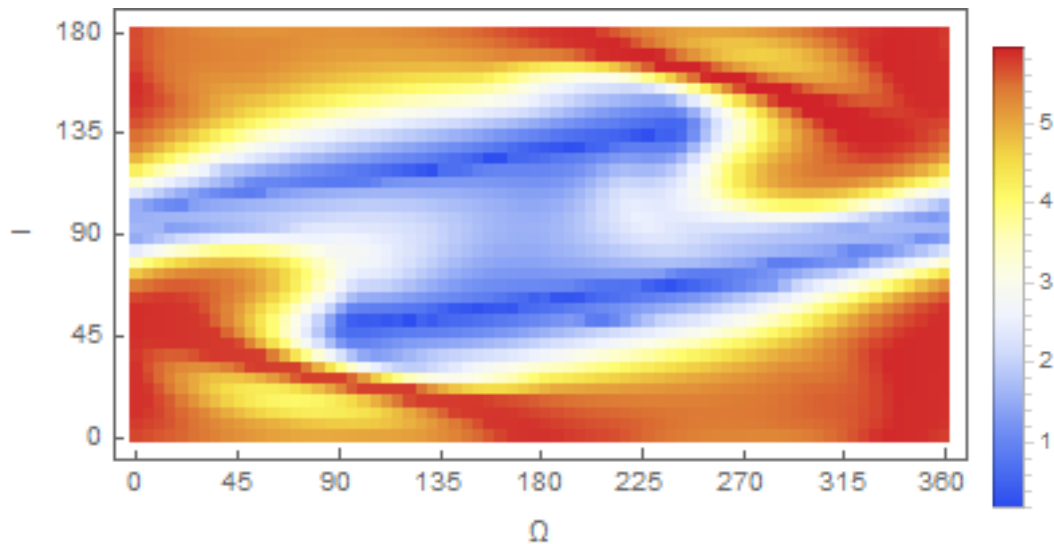


Rysunek 3.13: Odległość perygeum po 47 latach. Początkowy mimośród wynosił $e = 0.1$, a argument perygeum $\omega = 0^\circ$.

samych obliczeń co na rysunku 3.14, ale zamiast stosunku powierzchni do masy $1 \text{ m}^2/\text{kg}$ przyjęto wartość $0.012 \text{ m}^2/\text{kg}$. Różnice w minimalnej odległości perygeum między tymi wykresami przedstawiono na wykresie 3.16.

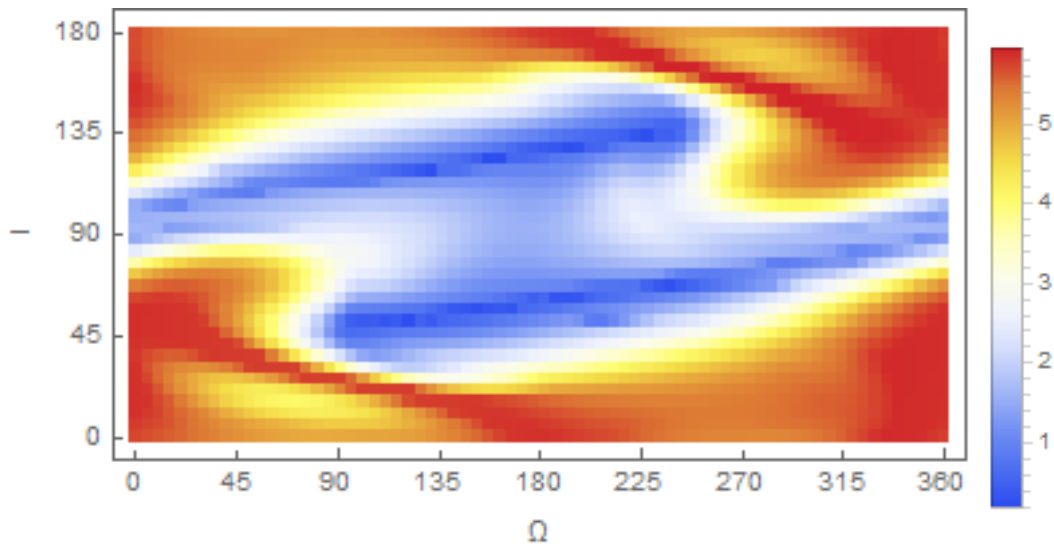
Wykresy przedstawiające odległość perygeum na płaszczyźnie nachylenie-długość węzła wstępującego są (do pewnego stopnia dokładności) symetryczne względem obrotu całego wykresu o 180 stopni. Inaczej mówiąc, orbity o początkowym nachyleniu I i długości węzła wstępującego Ω mają podobną ewolucję mimośrodu do orbit o nachyleniu $180^\circ - I$ i długości węzła wstępującego $360^\circ - \Omega$. Wykres 3.16 pokazuje jednak, że zmiana wartości ciśnienia promieniowania nie ma tak symetrycznego wpływu na orbitę. Oczywiście, istotna w tym przypadku jest również zależność od początkowego argumentu perygeum.

Przedstawiona metoda całkowania pozwala badać długookresową dynamikę sztucznych satelitów. Nie jest ona tak wydajna jak integratory działające na zmiennych średnich, ale pozwala uwzględnić zmiany krótkookresowe oraz zbadać zależność dynamiki od anomalii średniej, co może mieć znaczenia przy zastosowaniu jej do orbit w rezonansach tesselalnych (w przypadku sztucznego satelity) lub rezonansach ruchu

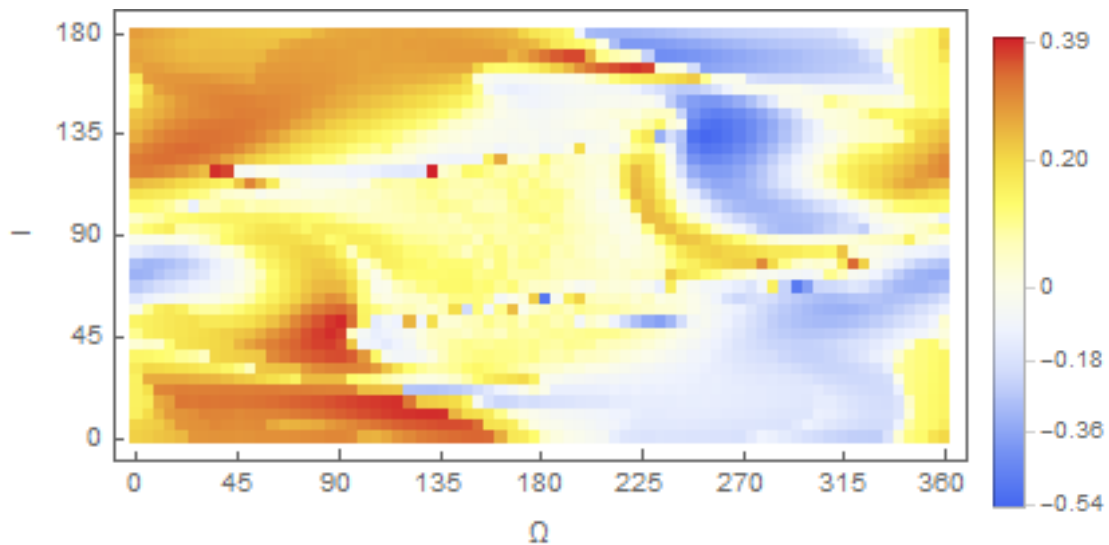


Rysunek 3.14: Odległość perygeum po 47 latach. Początkowy mimośród wynosił $e = 0.1$, a argument perygeum $\omega = 90^\circ$.

średniego (na przykład planetoidy). Jak się okazało, efekty tesseralne dla satelitów geosynchronicznych nie mają aż tak wielkiego znaczenia, a w zmianach mimośrodu decydującą rolę pełniły oddziaływania grawitacyjne Słońca i Księżyca (w szczególności rezonans Lidowa-Kozai).



Rysunek 3.15: Odległość perygeum po 47 latach. Początkowy mimośród wynosił $e = 0.1$, a argument perygeum $\omega = 90^\circ$. Stosunek powierzchni do masy był mniejszy niż na rysunku 3.14 i wyniósł $0.012 \text{ m}^2/\text{kg}$.



Rysunek 3.16: Różnica w minimalnej odległości perygeum osiągniętej podczas dwóch całkowań numerycznych. Wykres powstał przez odjęcie danych z rysunków 3.14 oraz 3.15.

Rozdział 4

Zmienne

Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela

4.1 Transformacja Lissajous

Transformacje Leviego-Civity i Kuustanheimo-Stiefela pozwalają przekształcić zagadnienie keplerowskie (odpowiednio dwu i trójwymiarowe) w izotropowy oscylator harmoniczny. W obu przypadkach istotne jest przyjęcie stałego poziomu energii, który definiuje częstość oscylatora. W przypadku stosowania formalizmu kanonicznego, transformacja odbywa się w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Dla oscylatora harmonicznego można wprowadzić zmienne typu ką-działanie. W przypadku transformacji LC jako pierwszy zrobił to Alain Chenciner w 1986 roku [10], ale jego praca pozostała mało znana. Powrócił do niej Jacques Fejoz [17], ale nieco wcześniej Deprit i Williams [14] uzyskali podobny zestaw zmiennych ką-działanie, wprowadzając w serii publikacji tzw. transformację Lissajous. Deprit zaproponował trzy oddzielne warianty tej transformacji, ale przedstawiony i dalej wykorzystany zostanie tylko jeden z nich.

Niech y_1 i y_2 będą kanonicznymi położeniami, a Y_1 i Y_2 sprzężonymi z nimi pędami. Transformacją Lissajous będziemy nazywać transformację, która przekształca zbiór (y_1, y_2, Y_1, Y_2) na nowe położenia l, g i sprzężone z nimi pędy L, G i wyraża się równaniami

$$\begin{aligned}y_1 &= \sqrt{\frac{L+G}{2\omega}} \cos(l+g) - \sqrt{\frac{L-G}{2\omega}} \cos(l-g), \\y_2 &= \sqrt{\frac{L+G}{2\omega}} \sin(l+g) + \sqrt{\frac{L-G}{2\omega}} \sin(l-g), \\Y_1 &= -\sqrt{\frac{\omega(L+G)}{2}} \sin(l+g) + \sqrt{\frac{\omega(L-G)}{2}} \sin(l-g), \\Y_2 &= \sqrt{\frac{\omega(L+G)}{2}} \cos(l+g) + \sqrt{\frac{\omega(L-G)}{2}} \cos(l-g).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Transformacja ta zależy od jednego parametru ω . Jeśli zastosujemy tę transformację do hamiltonianu dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} (Y_1^2 + Y_2^2) + \frac{\omega^2}{2} (y_1^2 + y_2^2),\tag{4.2}$$

to uzyskamy nowy hamiltonian

$$\mathcal{K}_0 = \omega L, \quad (4.3)$$

który zależy tylko od jednego z pędów. Z powyższych równań wprost wynika, że $-L \leq G \leq L$, a kiedy $G = \pm L$, kąty l i g są nieokreślone, ale określona jest albo ich suma, albo różnica. W przypadku gdy $L = G = 0$ oba kąty są nieokreślone, tak samo jak ich suma i różnica – odpowiada to sytuacji gdy $Y_1 = Y_2 = y_1 = y_2 = 0$.

Zmienne te są zmiennymi typu kąt-działanie, ponieważ zgodnie z transformacją (4.1), zmienne y_1, y_2, Y_1, Y_2 są 2π okresowe względem l i g , a nowy hamiltonian zależy tylko od pędu L . Brak zależności od G wynika z uwzględnienia degeneracji układu i sprawia, że ruch dla jednego ze stopni swobody jest trywialny ($\dot{g} = \dot{G} = 0$, niezależnie od warunków początkowych).

4.2 Interpretacja geometryczna

W przypadku dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego ruch odbywa się po elipsie o środku w początku układu współrzędnych. Zmienne Lissajous opisują tę elipsę. Kwadrat odległości od środka układu współrzędnych wynosi

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{\omega} \left(L - \sqrt{L^2 - G^2} \cos 2l \right). \quad (4.4)$$

Jedyną wielkością, która się zmienia w tym wypadku jest kąt l . Łatwo więc stwierdzić, że odległość jest najmniejsza gdy $\cos 2l = 1$, a największa gdy $\cos 2l = -1$. Jeśli więc a i b to odpowiednio pół wielka i pół mała elipsy, to mamy

$$a^2 = \frac{1}{\omega} \left(L + \sqrt{L^2 - G^2} \right), \quad b^2 = \frac{1}{\omega} \left(L - \sqrt{L^2 - G^2} \right), \quad (4.5)$$

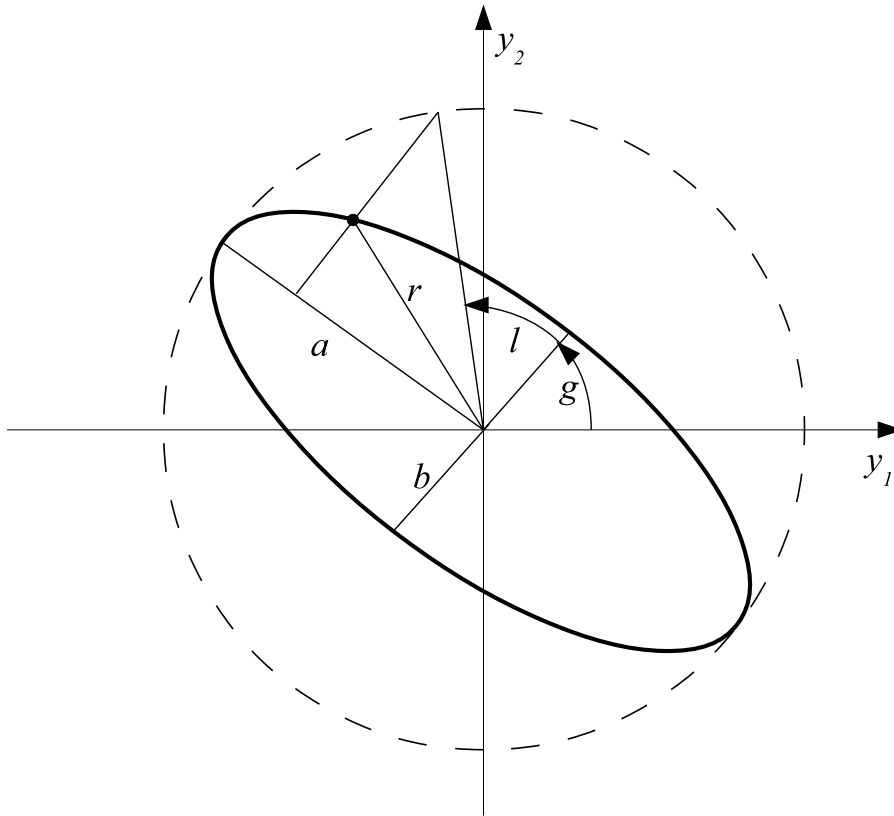
a więc pędy określają wielkość i kształt elipsy, a dokładniej

$$L = \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2), \quad G = \pm \omega ab. \quad (4.6)$$

Kiedy $l = 0$, a więc wtedy, gdy znajdujemy się na końcu półosi małej, wtedy $\hat{y} \cdot \hat{e}_1 = \cos g$, a więc g jest kątem między półosią małą elipsy a pierwszą osią układu współrzędnych. Taka interpretacja tych zmiennych pozwala zrozumieć sytuacje osobliwe. Gdy $G = \pm L$, kwadrat odległości od początku układu współrzędnych jest stały, co oznacza że kąt g musi być nieokreślony, ponieważ nie możemy zdefiniować położenia półosi małej. Co ważne, zmienne te nie posiadają osobliwości gdy $G = 0$. Jest to sytuacja w której długość półosi małej wynosi zero, a elipsa degeneruje się do postaci odcinka. Kąt g jest wtedy kątem między prostą prostopadłą do tego odcinka, a pierwszą osią układu współrzędnych.

4.3 Rozszerzona transformacja LC

W powyższych równaniach widoczny jest związek zmiennych Lissajous z kwadratami półosi elipsy. Ten związek sprawia, że połączenie tej transformacji z transformacją paraboliczną LC wydaje się być dość naturalnym wyborem. Pojawia się tu jednak pewien problem, wskazany już przez Deprita i Williamsa [16]: w transformacji kanonicznej LC musi dojść do rozszerzenia przestrzeni fazowej, a sama transformacja



Rysunek 4.1: Elipsa Lissajous (przypadek $G > 0$).

zakłada ustalony poziom energii, od którego zależy częstość oscylatora w nowych zmiennych. Częstość ta zależy od wartości pędu V^* oraz wybranej wartości parametru α poprzez równość

$$\alpha\omega = \sqrt{8V^*}. \quad (4.7)$$

Tymczasem w transformacji Lissajous parametrem jest owa częstość, która z założenia powinna być stała. Przyjęcie ω jako funkcji pędu V^* powoduje, że transformacja Lissajous przestaje być kanoniczna. Istnieją oczywiście sposoby, które obchodzą ten problem, na przykład można przyjąć że V^* jest stałą liczbową, albo w transformacji Lissajous użyć parametru ω który nie jest funkcją V^* , a jedynie posiada odpowiednią wartość. Takie podejście ma jednak bardzo zasadnicze wady. Jeśli rozpatrywane jest zaburzone zagadnienie keplerowskie, w którym zaburzenie w sposób jawny zależy od czasu, to wtedy wartość V^* nie jest stała, a więc także i częstość ω się zmienia. Rozwiązaniem tego problemu jest przeprowadzenie transformacji LC i Lissajous bez zakładania stałości parametrów α i ω . Takie rozwiązanie opublikowali niedawno Breiter i Langner [6]. Wcześniej podobne rezultaty uzyskał Zhao [50] dla szczególnego przypadku ruchu prostoliniowego.

Aby wprowadzić rozszerzoną transformację, zachowamy używaną wcześniej definicję kanonicznej transformacji LC dla położeń i pędów, ale przyjmujemy że para-

metr α jest pewną funkcją zmiennych kanonicznych. Dodatkowo transformacja musi także objąć parę zmiennych V^* i v^* , tak aby uzyskać transformację kanoniczną, przy czym przyjmujemy nowe zmienne S, s takie że nowy pęd będzie równy staremu, czyli $S = V^*$, a położenie s będzie pewną funkcją starych położeń i pędów. Aby transformacja była kanoniczna, wykorzystamy formę różniczkową spełniającą

$$V^* dv^* + \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} - S ds - \mathbf{V} \cdot d\mathbf{v} = d\Phi, \quad (4.8)$$

gdzie Φ jest pewną funkcją zmiennych kanonicznych. Jeśli przyjmujemy, że

$$v^* = s + B(\mathbf{v}, \mathbf{V}, V^*), \quad (4.9)$$

to po podstawieniu definicji transformacji LC (1.31) i (1.53) do powyższej formy różniczkowej uzyskamy warunek

$$V^* dB - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} = d\Phi. \quad (4.10)$$

To równanie łatwo jest rozwiązać gdy α jest funkcją jedynie V^* . Wtedy, przyjmując

$$B = B_0(V^*) \mathbf{y} \cdot \mathbf{Y}, \quad \Phi = \Phi_0(V^*) \mathbf{y} \cdot \mathbf{Y}, \quad (4.11)$$

dostajemy

$$[V^* B_0 - \Phi_0] d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2\alpha} \left[\frac{d\alpha}{dV^*} + 2\alpha \left(\frac{d\Phi_0}{dV^*} - V^* \frac{dB_0}{dV^*} \right) \right] = 0. \quad (4.12)$$

Aby czynnik przy różniczce $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ wynosił zero, zakładamy $\Phi_0 = V^* B_0$, a więc także $\Phi = V^* B$, a wtedy równanie upraszcza się do postaci

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2\alpha} \left[\frac{d\alpha}{dV^*} + 2\alpha B_0 \right] = 0, \quad (4.13)$$

czyli

$$B = -\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{Y}}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dV^*}. \quad (4.14)$$

Oznacza to, że rozszerzona transformacja LC jest kanoniczna gdy

$$v^* = s - \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{Y}}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dV^*}. \quad (4.15)$$

Hamiltonian keplerowski po przeprowadzeniu transformacji będzie miał dalej postać

$$\mathcal{K} = \frac{V \cdot V}{2} + \frac{\omega^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{4\mu}{\alpha}, \quad (4.16)$$

z częstością uzależnioną od wybranej funkcji α

$$\omega(V^*) = \frac{\sqrt{8V^*}}{\alpha(V^*)}. \quad (4.17)$$

Kosztym takiego uogólnienia jest zmiana zmiennej v^* , która wcześniej odpowiadała czasowi fizycznemu t , na nową zmienną s . Konkretny wybór parametru α wpływa także na wymiar zmiennych LC. Wcześniej przyjmowaliśmy że α ma wymiar długości, dzięki czemu nowe zmienne \mathbf{v} także miały wymiar długości, a czas Sundmana, do którego zdefiniowania także wykorzystaliśmy parametr α , miał wymiar czasu. Chcąc zachować tą wygodną konwencję, można pomnożyć α przez pewną stałą o określonym wymiarze, co nie wpływa na równania transformacji, ani nie zmienia funkcji B , co wynika z (4.14).

4.4 Wybór parametru α

Obserwując zależność częstości od parametru α można zastanowić się nad odpowiednim wyborem tego parametru.

Dość oczywistym wyborem wydaje się $\alpha = \sqrt{8V^*}$, dzięki czemu częstość nie będzie zależała od energii, a będzie miała stałą wartość $\omega = 1$. Odpowiada to podejściu Chencinera [10], który stosował bezwymiarowy czas Sundmana i parametr α zależny od energii. Takie podejście umożliwia od razu zastosowanie transformacji Lissajous, gdyż częstość może być już wykorzystana jako stały parametr tej transformacji. W dalszej części pokazane zostanie jednak ogólniejsze rozwiązanie dla dowolnego α .

Wcześniej w pracy przyjęta była konwencja Deprita [15], gdzie α miało wymiar długości, co pozwalało zachować wymiar długości dla położenia i wymiar prędkości (długość przez czas) dla pędów. W przedstawionym tutaj formalizmie można to osiągnąć na przykład wybierając

$$\alpha = \frac{\mu}{V^*}. \quad (4.18)$$

Taki wybór daje nam częstość

$$\omega = \frac{\sqrt{8(V^*)^3}}{\mu}. \quad (4.19)$$

W zagadnieniu czystko keplerowskim energia powiązana jest z półosią wielką orbity a i w tym wypadku $V^* = \frac{\mu}{2a}$. Wartość parametru wynosi wtedy $\alpha = 2a$, a częstość $\omega = \sqrt{\mu a^3}$. Częstość jest więc wtedy równa wartości ruchu średniego n . Taki wybór pozwala łatwo powiązać wartości poszczególnych parametrów z fizycznymi wielkościami opisującymi orbitę.

4.5 Rozszerzona transformacja Lissajous

Aby uzyskać kanoniczną rozszerzoną transformację Lissajous, postąpimy tak samo jak poprzednio w przypadku transformacji LC. Punktem wyjścia są rozszerzone zmienne LC $(\mathbf{v}, \mathbf{V}, s, S)$, na których dokonujemy transformacji Lissajous (4.1) zastępując wektory \mathbf{y} i \mathbf{Y} zmiennymi LC \mathbf{v} i \mathbf{V} i zakładając, że parametr ω jest dowolną funkcją energii S . Podobnie jak poprzednio, aby uzyskać transformację kanoniczną badamy zachowanie formy różniczkowej z pewną nieznaną funkcją Λ , takiej że

$$Sds + \mathbf{V} \cdot d\mathbf{v} - Ldl - Gdg - S^*ds^* = d\Lambda. \quad (4.20)$$

Wprowadzamy nowy pęd $S^* = S = V^*$ i sprzężoną z nim współrzędną s^* . Po podstawieniu transformacji Lissajous otrzymujemy

$$(ds - ds^*)S + \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})}{2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2\omega} d\omega = d\Lambda. \quad (4.21)$$

Podobnie jak poprzednio, przyjmujemy

$$s^* = s + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} b_0(S^*), \quad \Lambda = \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \Lambda_0(S^*), \quad (4.22)$$

co po wstawieniu do poprzedniego równania daje nam

$$\left(\frac{1}{2} + S^* b_0 - \Lambda_0 \right) d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \left(S^* \frac{db_0}{dS^*} - \frac{d\Lambda_0}{dS^*} - \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{dS^*} \right) ds^* = 0. \quad (4.23)$$

Równanie to jest spełnione gdy

$$\Lambda_0 = S^* b_0 + \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

oraz

$$b_0 = -\frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{dS^*}. \quad (4.25)$$

Gdy połączymy transformację Lissajous z transformacją Leviego-Civity uzyskamy przekształcenie płaszczyzny kartezjańskiej na zbiór zmiennych Lissajous. To przekształcenie będzie dalej nazywane przekształceniem Lissajous-Leviego-Civity (LLC). Przekształcenie w rozszerzonej przestrzeni obejmuje także zmianę dodatkowej pary zmiennych $V^* = S^*$ oraz

$$v^* = s^* - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2\alpha\omega} \left(\omega \frac{d\alpha}{dV^*} + \alpha \frac{d\omega}{dV^*} \right), \quad (4.26)$$

a biorąc pod uwagę że $\alpha\omega = \sqrt{8V^*}$, to całość upraszcza się do postaci

$$v^* = s^* - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{4V^*}, \quad (4.27)$$

a wstawiając $\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}$, mamy

$$v^* = s^* - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}}{2V^*}. \quad (4.28)$$

Położenia i pędy kartezjańskie wyrażają się przez zmienne Lissajous wzorami

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2\alpha\omega} \left[(L+G) \cos(2l+2g) + (L-G) \cos(2l-2g) - 2\sqrt{L^2-G^2} \cos 2g \right], \\ x_2 &= \frac{1}{2\alpha\omega} \left[(L+G) \sin(2l+2g) - (L-G) \sin(2l-2g) - 2\sqrt{L^2-G^2} \sin 2g \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$X_1 = \frac{-1}{4r} [(L+G) \sin(2l+2g) + (L-G) \sin(2l-2g)],$$

$$X_2 = \frac{-1}{4r} [(L+G) \cos(2l+2g) - (L-G) \cos(2l-2g)],$$

gdzie

$$r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \frac{L - \sqrt{L^2 - G^2} \cos 2l}{\alpha\omega}. \quad (4.30)$$

To przekształcenie nie zależy od przyjętych parametrów α i ω , a jedynie od ich iloczynu równego $\sqrt{8V^*}$. Kanoniczność transformacji zapewnia przekształcenie zmiennych

$$v^* = s^* - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}}{2V^*} = s^* - \frac{\sqrt{L^2 - G^2} \sin 2l}{4S^*}, \quad V^* = S^*. \quad (4.31)$$

Wybór parametrów ma jednak znaczenie, gdyż podczas regularyzacji w kanonicznym przekształceniu Sundmana hamiltonian mnożony jest przez czynnik $4r/\alpha$, co powoduje że parametry α i ω pojawią się w funkcji Hamiltona i co za tym idzie także w równaniach ruchu.

4.6 Transformacja Lissajous a zagadnienie keplerowskie

Stosując przekształcenie LLC do hamiltonianu keplerowskiego w zagadnieniu płaskim

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}{2} - \frac{\mu}{r},$$

uzyskujemy nową funkcję Hamiltona

$$\mathcal{K}_0 = \omega L - \frac{4\mu}{\alpha}, \quad (4.32)$$

oraz równania ruchu

$$l' = \omega \quad (4.33)$$

$$(s^*)' = L \frac{\partial \omega}{\partial S^*} + \frac{4\mu}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial S^*} \quad (4.34)$$

$$g' = L' = G' = (S^*)' = 0. \quad (4.35)$$

Zarówno funkcja Hamiltona jak i równania ruchu zależą od przyjętych parametrów α i ω . W podrozdziale 4.4 omówiono dwa specjalne wybory parametru α . Jeśli wybierzemy $\alpha = \sqrt{8V^*}$ to $\omega = 1$, a więc

$$l' = 1, \quad (s^*)' = \frac{4\mu}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial S^*} = \frac{\mu}{\sqrt{2(S^*)^3}}. \quad (4.36)$$

W tym wypadku l rośnie tak samo jak czas Sundmana. Z kolei jeśli podstawimy energię orbity keplerowskiej wyrażoną przez pólś wielką orbity ($S^* = \mu/(2a)$), to

$$(s^*)' = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (4.37)$$

Gdy przyjmiemy $\alpha = \frac{\mu}{V^*}$, to $\omega = \sqrt{8(V^*)^3} \mu^{-1}$. Wprowadzając pólś wielką otrzymujemy wtedy

$$\omega = \mu^{1/2} a^{-3/2}.$$

Częstość ma zatem wartość równą ruchowi średniemu n na orbicie keplerowskiej (ale l zmienia się jednostajnie z tą częstością w czasie Sundmana τ , a nie fizycznym t , dlatego l nie może być utożsamiane z anomalią średnią).

Zmienne Delaunaya to zmienne typu ką-działanie dla zagadnienia keplerowskiego. W przypadku zagadnienia płaskiego obejmują one dwa kąty: anomalię średnią l_D oraz długość perycentrum g_D oraz sprzężone z nimi pędy $L_D = \sqrt{\mu a}$ i $G_D = L_D \sqrt{1 - e^2}$. W tym miejscu konieczne jest dopowiedzenie, że pólś wielka zdefiniowana jest poprzez wartość energii części keplerowskiej hamiltonianu (\mathcal{H}_0) zależnością $\mathcal{H}_0 = -\mu/(2a)$, a więc

$$L_D^2 = -\frac{\mu^2}{2\mathcal{H}_0}. \quad (4.38)$$

Natomiast pęd G_D to całkowity moment pędu układu

$$G_D = \|\mathbf{x} \times \mathbf{X}\|. \quad (4.39)$$

Powiązanie momentu pędu ze zmiennymi LLC można wyprowadzić wprost, podstawiając do powyższego definicję (4.29) i otrzymując

$$G_D = \frac{|G|}{2}. \quad (4.40)$$

Ta relacja jest prosta i nie zależy od rozpatrywanego zagadnienia. Dużo bardziej problematyczne jest powiązanie pędu L . W tym celu wyrażmy hamiltonian $\mathcal{H}_0 = \frac{\alpha}{4r}\mathcal{K}_0 - S^*$ poprzez zmienne LLC

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\sqrt{8S^*}L}{4r} - \frac{\mu}{r} - S^* = -\frac{\mu^2}{2L_D^2}, \quad (4.41)$$

co po przekształceniu daje

$$L = \frac{4\mu}{\sqrt{8V^*}} + \frac{2r}{\sqrt{8V^*}} \left(2V^* - \frac{\mu^2}{L_D^2} \right). \quad (4.42)$$

Ten wynik zgadza się z uzyskanym przez Deprita i Williamsa [16]. Pojawia się tu zależność od V^* , a więc całkowitej energii układu, której wartość w zaburzonem ruchu keplerowskim zależy od konkretnego zagadnienia, a nie tylko od początkowych położenia i pędów.

4.7 Transformacja Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela

Wprowadzenie zmiennych ką-działanie dla ruchu keplerowskiego w zmiennych KS pozwoliłoby na pełne wykorzystanie zalet formalizmu kanonicznego w rachunkach analitycznych. Pierwsze próby podjęli już Stiefel i Scheifele [43]. Użyli oni symplektycznych zmiennych biegunowych osobno dla każdego stopnia swobody. To podejście ma jednak poważne wady. Po pierwsze, nie uwzględnia ono tego, że cały układ jest zdegenerowany, przez co stosowanie metod opartych na uśrednianiu jest znacznie utrudnione. Po drugie, ten zestaw zmiennych nie uwzględnia możliwości redukcji zagadnienia do postaci trójwymiarowej z wykorzystaniem odpowiednich ograniczeń, które pojawiają się w transformacji KS. Znacznie lepsze podejście zaprezentował Zhao [49], który wprowadził oskulacyjną dwuwymiarową płaszczyznę Leviego-Civity, po której odbywa się ruch, i na niej zastosował opisaną wcześniej w tym rozdziale transformację Lissajous. Informacja o orientacji tej płaszczyzny w przestrzeni zawarta jest w trzeciej parze zmiennych, która jest odpowiednikiem pary zmiennych Delaunay'a zazwyczaj oznaczanych jako H i h , będących odpowiednio rzutem momentu pędu na trzecią oś układu współrzędnych i kątem opisującym długość węzła wstępującego orbity. Ten zestaw zmiennych nie zawiera wad, które miało podejście Stiefela i Scheifele. Funkcja Hamiltona niezaburzonego zagadnienia keplerowskiego zawiera tylko jedną ze zmiennych typu działanie, a więc tylko jeden kąt jest szybko zmienny. Z kolei czwarty stopień swobody ukryty został w definicji płaszczyzny Leviego-Civity. Ścisłe powiązanie ze zmiennymi Delaunay'a niesie ze sobą te same wady, które towarzyszą tym zmiennym. Są one osobliwe dla orbit prostoliniowych, ponieważ niemożliwe jest wtedy wyznaczenie orientacji orbity w oparciu o zerowy wektor momentu pędu.

Wprowadzenie zestawu zmiennych, które byłyby nieosobliwe dla orbit prawie prostoliniowych, wymaga innego podejścia i użycia zmiennych, które nie są mocno

związane ze zmiennymi Delaunay'a. Taki zestaw zmiennych został zaproponowany (Breiter i Langner [7]) jako połączenie dwóch transformacji Lissajous, opisanych wcześniej w tym rozdziale osobno dla dwóch par stopni swobody. Rozpatrywana będzie transformacja dla zmiennych KS z wektorem definiującym skierowanym wzdłuż trzeciej osi ($\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$), ale możliwe jest także zdefiniowanie takiej transformacji dla dowolnego wektora \mathbf{c} . Kluczowe jest odpowiednie podzielenie przestrzeni kwaternionów na dwie podprzestrzenie. W wypadku zmiennych KS3 są nimi P_{03} rozpięta przez kwaterniony bazowe \mathbf{e}_0 i \mathbf{e}_3 oraz P_{12} rozpięta przez \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 . Żadna z tych podprzestrzeni nie jest płaszczyzną Leviego-Civity (które są opisane w podrozdziale 1.14), gdyż dla $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$

$$\mathcal{J}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3) = 1, \quad \mathcal{J}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -1. \quad (4.43)$$

Okazuje się też, że dowolny punkt $\mathbf{v} = v_0\mathbf{e}_0 + v_3\mathbf{e}_3$, leżący w podprzestrzeni P_{03} , odpowiada punktowi w przestrzeni kartezjańskiej

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}(v_0\mathbf{e}_0 + v_3\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3(v_0\mathbf{e}_0 - v_3\mathbf{e}_3) = \frac{1}{\alpha}(v_0^2 + v_3^2)\mathbf{e}_3, \quad (4.44)$$

który leży na półprostej skierowanej wzdłuż wektora bazowego $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$. Podobnie punkty należące do drugiej podprzestrzeni $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ odpowiadają kartezjańskim punktom

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3(-v_1\mathbf{e}_1 - v_2\mathbf{e}_2) = -\frac{1}{\alpha}(v_1^2 + v_2^2)\mathbf{e}_3, \quad (4.45)$$

które znajdują się na półprostej skierowanej przeciwnie do wektora definiującego.

Dla obu tych podprzestrzeni przeprowadzamy osobno transformację Lissajous:

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\frac{L_{ij} + G_{ij}}{2\omega}} \cos(l_{ij} + g_{ij}) - \sqrt{\frac{L_{ij} - G_{ij}}{2\omega}} \cos(l_{ij} - g_{ij}), \\ v_j &= \sqrt{\frac{L_{ij} + G_{ij}}{2\omega}} \sin(l_{ij} + g_{ij}) + \sqrt{\frac{L_{ij} - G_{ij}}{2\omega}} \sin(l_{ij} - g_{ij}), \\ V_i &= -\sqrt{\frac{\omega(L_{ij} + G_{ij})}{2}} \sin(l_{ij} + g_{ij}) + \sqrt{\frac{\omega(L_{ij} - G_{ij})}{2}} \sin(l_{ij} - g_{ij}), \\ V_j &= \sqrt{\frac{\omega(L_{ij} + G_{ij})}{2}} \cos(l_{ij} + g_{ij}) + \sqrt{\frac{\omega(L_{ij} - G_{ij})}{2}} \cos(l_{ij} - g_{ij}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Wstawiając $i = 0, j = 3$, lub $i = 1, j = 2$. Podobnie jak dla transformacji Lissajous dla dwuwymiarowych zmiennych LC, pozwalamy, by współczynnik ω mógł być funkcją energii V^* , którą w nowym zestawie zmiennych zastępujemy przez $S = V^*$, a kanoniczność całej transformacji zapewniamy przez odpowiedni wybór sprzężonej z nią zmiennej s , badając formę różniczkową

$$L_{03}dl_{03} + G_{03}dg_{03} + L_{12}dl_{12} + G_{12}dg_{12} + Sds - \mathbf{V} \cdot d\mathbf{v} - V^*dv^* = dQ^*, \quad (4.47)$$

gdzie

$$Q^* = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2} \left(1 - \frac{S}{\omega} \frac{d\omega}{dS} \right). \quad (4.48)$$

Nowa zmienna s jest powiązana ze starymi zależnością

$$s = v^* - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{2\omega} \frac{d\omega}{dV^*}, \quad (4.49)$$

albo

$$v^* = s - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} d\omega}{2\omega dS}, \quad (4.50)$$

gdzie iloczyn skalarny kwaternionów można też wyrazić przez zmienne Lissajous

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} = \sqrt{L_{03}^2 - G_{03}^2} \sin 2l_{03} + \sqrt{L_{12}^2 - G_{12}^2} \sin 2l_{12}. \quad (4.51)$$

Jeśli wyrazimy hamiltonian zagadnienia dwóch ciał w zmiennych KS przez te nowe zmienne, to otrzymamy

$$\mathcal{K}'_0 = \omega(S)(L_{03} + L_{12}) - \frac{4\mu}{\alpha(S)} + \frac{\alpha(G_{03} - G_{12})^2}{8|\mathbf{v}|^2}. \quad (4.52)$$

Oba pędy G_{03} i G_{12} muszą być sobie równe, gdyż

$$\frac{G_{03} - G_{12}}{2} = (\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{V}}) \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (4.53)$$

Wynika to z faktu, że niezmiennik $\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_3$ musi być równy zero, a jego występowanie w kwadracie w funkcji Hamiltona nie wpływa na równania ruchu (patrz podrozdział 1.13). Równość wartości G_{ij} powoduje, że ruch na obu elipsach w obu podprzestrzeniach odbywa się w tę samą stronę. Elipsy mogą jednak mieć różne mimośrodory i długości półosi (ze względu na różne L_{ij}). Kąty g_{ij} pozostają niezmiennie, a kąty l_{ij} zmieniają się z tą samą częstotliwością ω .

Jeśli rozważymy kwaterniony \mathbf{u} i \mathbf{U} , które leżą na tym samym włóknie co \mathbf{v} i \mathbf{V} , czyli $\mathbf{u} = \mathbf{v}(\cos \phi, \sin \phi \mathbf{e}_3)$ oraz $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\cos \phi, \sin \phi \mathbf{e}_3)$, dla dowolnego rzeczywistego ϕ , to po wstawieniu równań transformacji Lissajous otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{\frac{L_{03} + G_{03}}{2\omega}} \cos(l_{03} + g_{03} + \phi) - \sqrt{\frac{L_{03} - G_{03}}{2\omega}} \cos(l_{03} - g_{03} - \phi), \\ u_3 &= \sqrt{\frac{L_{03} + G_{03}}{2\omega}} \sin(l_{03} + g_{03} + \phi) + \sqrt{\frac{L_{03} - G_{03}}{2\omega}} \sin(l_{03} - g_{03} - \phi), \\ U_0 &= -\sqrt{\frac{\omega(L_{03} + G_{03})}{2}} \sin(l_{03} + g_{03} + \phi) + \sqrt{\frac{\omega(L_{03} - G_{03})}{2}} \sin(l_{03} - g_{03} - \phi), \\ U_3 &= \sqrt{\frac{\omega(L_{03} + G_{03})}{2}} \cos(l_{03} + g_{03} + \phi) + \sqrt{\frac{\omega(L_{03} - G_{03})}{2}} \cos(l_{03} - g_{03} - \phi), \end{aligned} \quad (4.54)$$

oraz

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{L_{12} + G_{12}}{2\omega}} \cos(l_{12} + g_{03} - \phi) - \sqrt{\frac{L_{12} - G_{03}}{2\omega}} \cos(l_{12} - g_{12} + \phi), \\ u_2 &= \sqrt{\frac{L_{12} + G_{12}}{2\omega}} \sin(l_{12} + g_{03} - \phi) + \sqrt{\frac{L_{12} - G_{03}}{2\omega}} \sin(l_{12} - g_{12} + \phi), \\ U_1 &= -\sqrt{\frac{\omega(L_{12} + G_{12})}{2}} \sin(l_{12} + g_{12} - \phi) + \sqrt{\frac{\omega(L_{12} - G_{12})}{2}} \sin(l_{12} - g_{12} + \phi), \\ U_2 &= \sqrt{\frac{\omega(L_{12} + G_{12})}{2}} \cos(l_{12} + g_{12} - \phi) + \sqrt{\frac{\omega(L_{12} - G_{12})}{2}} \cos(l_{12} - g_{12} + \phi). \end{aligned} \quad (4.55)$$

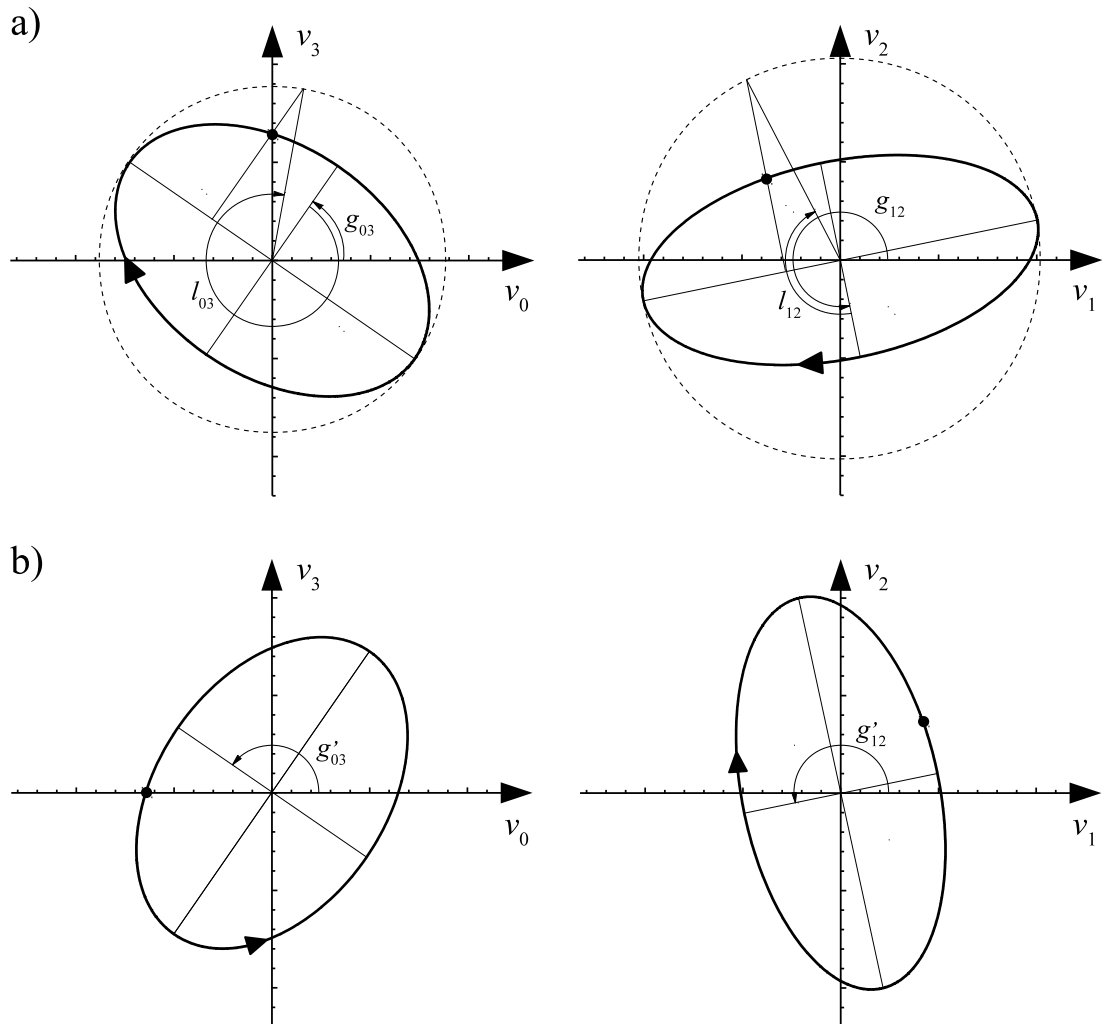
Jeśli przez L', G', l' i g' oznaczymy zmienne Lissajous odpowiadające kwaternionowi \mathbf{u} , to z powyższych równań można wywnioskować że

$$L'_{ij} = L_{ij}, \quad G'_{ij} = G_{ij}, \quad l'_{ij} = l_{ij}, \quad (4.56)$$

ale

$$g'_{03} = g_{03} + \phi, \quad g'_{12} = g_{12} - \phi. \quad (4.57)$$

Ruch na włóknie nie zmienia więc wielkości i kształtu elips (nie zmieniając L i G), zmienia za to ich orientację (zmieniając g_{ij}), ale w taki sposób że suma $g_{03} + g_{12}$ pozostaje niezmienna (rys. 4.2). Ta informacja, wraz z faktem że $G_{03} = G_{12}$, pozwalają wykonać kolejny krok w transformacji, który zredukuje zagadnienie o jeden stopień swobody.



Rysunek 4.2: Ruch w dwóch płaszczyznach. Przypadek b) odpowiada tym samym wartościom zmiennych kartezjańskich co a), ale różnemu położeniu na włóknie [7].

4.8 Redukcja i ostateczna postać transformacji

Kolejnym krokiem po wprowadzeniu dwóch par zmiennych Lissajous będzie proste kanoniczne przekształcenie zmiennych

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{1}{2}(l_{12} + l_{03}), & L &= L_{12} + L_{03}, \\
 \lambda &= \frac{1}{2}(l_{12} - l_{03}), & \Lambda &= L_{12} - L_{03}, \\
 g &= \frac{1}{2}(g_{12} + g_{03}), & G &= G_{12} + G_{03}, \\
 \gamma &= \frac{1}{2}(g_{12} - g_{03}), & \Gamma &= G_{12} - G_{03}.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Zmienne s i S pozostają niezmienione. Jeśli złożymy oba te przekształcenia razem z transformacją KS to w rezultacie otrzymamy słabo kanoniczne przekształcenie zmiennych kartezjańskich w zmienne, które nazwiemy zmiennymi Lissajous-Kustaanheimo-Stiefela (LKS), to jest otrzymamy transformację

$$\zeta : (\mathbf{x}, \mathbf{X}, x^*, X^*, t) \rightarrow (l, \lambda, g, \gamma, L, \Lambda, G, \Gamma, s, S, \tau). \tag{4.59}$$

Hamiltonian keplerowski \mathcal{H}_0 przekształca się pod wpływem tej transformacji w nowy hamiltonian \mathcal{M}_0 o postaci

$$\mathcal{M}_0 = \omega(S)L - \frac{4\mu}{\alpha(S)} + \frac{\Gamma^2}{8r}. \tag{4.60}$$

Aby wyrazić zmienne kartezjańskie przez zmienne LKS wygodnie jest wprowadzić współczynniki zależne od pędów

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L+G)^2 - (\Lambda+\Gamma)^2}, \\
 A_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L-G)^2 - (\Lambda-\Gamma)^2}, \\
 B_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L+\Lambda)^2 - (G+\Gamma)^2}, \\
 B_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L-\Lambda)^2 - (G-\Gamma)^2}, \\
 C_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L+\Gamma)^2 - (G+\Lambda)^2}, \\
 C_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{(L-\Gamma)^2 - (G-\Lambda)^2},
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

dzięki którym możliwe jest sformułowanie w zwartej formie wyrażen dla położeń

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0, \\
 x_1 &= \frac{1}{\sqrt{8S}} (A_1 \sin 2(l+g) - A_2 \sin 2(l-g) \\
 &\quad - C_1 \sin 2(g+\lambda) - C_2 \sin 2(g-\lambda)), \\
 x_2 &= \frac{1}{\sqrt{8S}} (-A_1 \cos 2(l+g) - A_2 \cos 2(l-g) \\
 &\quad + C_1 \cos 2(g+\lambda) + C_2 \cos 2(g-\lambda)), \\
 x_3 &= \frac{1}{\sqrt{8S}} (-\Lambda + B_1 \cos 2(l+\lambda) - B_2 \cos 2(l-\lambda)),
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

oraz dla pędów

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\Gamma}{2r} = 0, \\
X_1 &= \frac{A_1 \cos 2(l+g) - A_2 \cos 2(l-g)}{2r}, \\
X_2 &= \frac{A_1 \sin 2(l+g) + A_2 \sin 2(l-g)}{2r}, \\
X_3 &= \frac{-B_1 \sin 2(l+\lambda) - B_2 \sin 2(l-\lambda)}{2r}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Można zauważyć, że poza zmiennymi z indeksem zero, mamy

$$X_i = \frac{\sqrt{8S}}{2r} \frac{\partial x_i}{\partial l}. \tag{4.64}$$

Długość promienia wodzącego r także może być w prosty sposób wyrażona przez nowe zmienne

$$r = \frac{L - B_1 \cos 2(l+\lambda) - B_2 \cos 2(l-\lambda)}{\sqrt{8S}}, \tag{4.65}$$

podobnie jak czas fizyczny z rozszerzenia przestrzeni fazowej

$$x^* = s - \frac{B_1 \sin 2(l+\lambda) + B_2 \sin 2(l-\lambda)}{4S} = s - \frac{1}{\sqrt{8S}} \frac{\partial r}{\partial l}. \tag{4.66}$$

Żadna ze zmiennych kartezjańskich nie zależy od kąta γ . Oznacza to, że sprzężony z nim pęd Γ jest stały pod warunkiem, że pierwotny hamiltonian był funkcją zmiennych kartezjańskich oraz czasu. Umożliwia to redukcję całego zagadnienia o jeden stopień swobody, gdyż para zmiennych Γ i γ nie będzie miała wpływu na żadne wielkości fizyczne w danym zagadnieniu. Można więc ograniczyć się do podprzestrzeni $\Gamma = 0$, a także zignorować zmienność kąta γ , gdyż jego wartość nie ma wpływu na ewolucję pozostałych zmiennych. Drugim istotnym faktem jest brak zależności od wybranych parametrów α i ω , które pojawiają się jedynie jako iloczyn $\alpha\omega = \sqrt{8S}$. Wybór tych parametrów nie wpływa więc na ostateczną postać transformacji ze zmiennych kartezjańskich, a jedynie ma wpływ na kolejne jej kroki. Z drugiej strony, parametry te pojawiają się w funkcji Hamiltona \mathcal{M} . Wynika to z faktu, że w przekształceniu Sundmana czas τ zdefiniowany jest przy pomocy parametru α , zatem wybór parametrów wpłynie na ostateczną postać równań ruchu.

4.9 Powiązanie zmiennych LKS z elementami orbity

Podczas konstrukcji transformacji LKS, przestrzeń kwaternionów została początkowo podzielona na dwie podprzestrzenie nie będące płaszczyznami Leviego-Civita. Odeszliśmy tym od podejścia, w którym rozpatrujemy osobno ruch w płaszczyźnie orbity oraz jej orientację w przestrzeni. Dlatego powiązanie tego zestawu zmiennych z klasycznymi elementami orbity będzie mniej intuicyjne. W zamian za to, zmienne LKS nie powinny mieć tych osobliwości, które posiadają zmienne kątdziałanie wprost oparte na elementach orbity, jak na przykład klasyczne zmienne Delaunaya, a w przypadku stosowania regularyzacji i transformacji KS, wspomniane wcześniej zmienne wprowadzone przez Zhao [49].

Interpretację zmiennych LKS najłatwiej zacząć od pędów. Wcześniej udało się ustalić, że

$$\Gamma = \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{V}) = 0. \quad (4.67)$$

Zmienną G można powiązać z elementami orbity dzięki wyrażeniu przez zmienne LKS wektora momentu pędu (oznaczonego w tym rozdziale przez \mathbf{G}_0 , aby nie mylił się ze zmienną G)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= \mathbf{x} \times \mathbf{X} \\ &= \frac{1}{2} (C_1 \sin 2(g + \lambda) - C_2 \sin 2(g - \lambda)) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} (-C_1 \cos 2(g + \lambda) + C_2 \cos 2(g - \lambda)) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{G}{2} \mathbf{e}_3 + \frac{\Gamma \mathbf{x}}{2r}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Po wstawieniu $\Gamma = 0$, okazuje się, że połowa G równa jest rzutowi wektora momentu pędu na trzecią oś układu współrzędnych, czyli G jest dwukrotnością H_0 w zmiennych Delaunaya.

W przypadku zmiennej L istnieje podobny problem jak przy dwuwymiarowej transformacji LLC. Jeśli ograniczymy się do zagadnienia czysto keplerowskiego, to hamiltonian M_0 (4.60) będzie miał wartość równą zero i po wstawieniu $\Gamma = 0$ otrzymujemy

$$L = \frac{4\mu}{\alpha\omega} = \frac{2\mu}{\sqrt{2S}}. \quad (4.69)$$

W zagadnieniu keplerowskim całkowita energia S powiązana jest z półosią wielką $a = -\frac{\mu}{2S}$, co pozwala dalej stwierdzić, że

$$L = 2\sqrt{\mu a} = 2L_0, \quad (4.70)$$

a więc L jest równe co do wartości dwukrotności zmiennej L_0 Delaunaya. Podobnie jak w przypadku zmiennych LLC, nie oznacza to ich równoważności. Pochodne liczone względem tych zmiennych mogą być różne (patrz Deprit i Williams [16]), a wartość L zależy od postaci całej funkcji Hamiltona wraz z ewentualnymi perturbacjami (w przeciwieństwie do L_0 , którego wartość jest zawsze powiązana z wartością części keplerowskiej funkcji Hamiltona H_0). Zmienna L jest więc powiązana z energią i co za tym idzie z rozmiarem orbity (w szczególności z półosią wielką), ale związek ten jest skomplikowany i zależy także od perturbacji w danym zagadnieniu.

Ostatni z pędów, Λ także powiązany jest z jedną z całek ruchu, w tym przypadku z wektorem Laplace'a-Rungego-Lenza $L_0 \mathbf{e}$, będącym wektorem mimośrodowo przemnożonym przez L_0 . Wyrażony przez zmienne LKS, wektor ten ma postać (dla uproszczenia wstawiono $\Gamma = 0$)

$$\begin{aligned} L_0 \mathbf{e}_0 &= L_0 \left(\frac{\mathbf{X} \times \mathbf{G}_0}{\mu} - \frac{\mathbf{x}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} (C_1 \sin 2(g + \lambda) + C_2 \sin 2(g - \lambda)) \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} (C_1 \cos 2(g + \lambda) + C_2 \cos 2(g - \lambda)) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{\Lambda}{2} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Powyższe równanie zostało wyprowadzone zakładając, że mamy do czynienia z czysto keplerowskim zagadnieniem, co pozwoliło wstawić $2SL_0^2 = \mu^2$. W przypadku zaburzonym konieczne jest użycie ogólnego wyrażenia tego wektora przez zmienne KS (podrozdział 1.12) i przetransformowanie go do postaci zależnej od zmiennych LKS. Jest to niedogodność analogiczna do występującej dla zmiennej L . Przy tych zastrzeżeniach zmienna Λ odpowiada dwukrotności rzutu wektora Laplace'a-Rungego-Lenza na trzecią oś układu współrzędnych.

Pędy LKS mają dość prostą interpretację i z pewnymi zastrzeżeniami odpowiadają całkom ruchu zagadnienia dwóch ciał oraz niezmiennikowi transformacji KS. Kąty z kolei są nieco bardziej niestandardowe. Kąt γ , jak wcześniej wspomniano, jest zmienną cykliczną i nie występuje w hamiltonianie. Opisuje on położenie na włóknie i może być pominięty (położenie na włóknie może mieć jednak wpływ na topologiczną stabilność orbit, jak pokazali Roa i in. [40]).

Kąt l jest jedynym kątem szybkim, musi on więc wskazywać położenie na orbicie. Podobnie jak dla pędów, jeśli ograniczymy się do czysto keplerowskiego zagadnienia, wtedy

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial L} \frac{\alpha(S)}{4r} = \frac{\alpha(S)\omega(S)}{4r} = \frac{\sqrt{2S}}{r} = \frac{\mu}{2L_0 r} = \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}, \quad (4.72)$$

czyli zmienia się on dwa razy wolniej niż anomalia mimośrodowa E . W zagadnieniu zaburzonym, podobnie jak w przypadku pędów, dokładne wyrażenie tego kąta przez elementy oskulacyjne orbity będzie złożone i będzie zależało od konkretnego zaburzenia.

Aby zbadać dwa pozostałe kąty obliczmy normy wektorów momentu pędu i Laplace'a-Rungego-Lenza

$$G_0 = L_0 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} \sqrt{G^2 + C_1^2 + C_2^2 - 2C_1 C_2 \cos 4\lambda}, \quad (4.73)$$

$$L_0 e = \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda^2 + C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos 4\lambda}. \quad (4.74)$$

Występowanie kąta λ pokazuje, że nie jest to kąt obrotu i ma on pewien związek z mimośrodem orbity. Dalsze znaczenie tych kątów ukazuje się gdy wprowadzimy tak zwane wektory Cartana¹, zwane czasem wektorami Pauliego (Cordani [13])

$$\mathbf{M} = \frac{L_0 \mathbf{e} + \mathbf{G}_0}{2} = \frac{C_1}{2} \sin 2(g + \lambda) \mathbf{e}_1 - \frac{C_1}{2} \cos 2(g + \lambda) \mathbf{e}_2 + \frac{\Lambda + G}{4} \mathbf{e}_3, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{N} = \frac{L_0 \mathbf{e} - \mathbf{G}_0}{2} = \frac{C_2}{2} \sin 2(g - \lambda) \mathbf{e}_1 - \frac{C_2}{2} \cos 2(g - \lambda) \mathbf{e}_2 + \frac{\Lambda - G}{4} \mathbf{e}_3. \quad (4.76)$$

Wektory te mają normę wynoszącą $\frac{L}{4}$ i znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do orbity, a w przypadku orbit zdegenerowanych są sobie równe i skierowane wzdłuż orbity prostoliniowej. Kąt między tymi wektorami θ zależy jedynie od mimośrodu orbity

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}}{MN} = 2e^2 - 1. \quad (4.77)$$

Kąt θ' między rzutami tych kątów na płaszczyznę $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ wynosi

$$\cos \theta' = \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{N}'}{M'N'} = \cos 4\lambda, \quad (4.78)$$

¹definicja wektora \mathbf{N} różni się znakiem od najczęściej przyjmowanej

gdzie \mathbf{M}' i \mathbf{N}' są rzutami wektorów \mathbf{M} i \mathbf{N} na tę płaszczyznę

$$\mathbf{M}' = \frac{L_0 \mathbf{e} + \mathbf{G}_0}{2} = \frac{C_1}{2} \sin 2(g + \lambda) \mathbf{e}_1 - \frac{C_1}{2} \cos 2(g + \lambda) \mathbf{e}_2, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{N}' = \frac{L_0 \mathbf{e} - \mathbf{G}_0}{2} = \frac{C_2}{2} \sin 2(g - \lambda) \mathbf{e}_1 - \frac{C_2}{2} \cos 2(g - \lambda) \mathbf{e}_2. \quad (4.80)$$

Jeśli przyjmiemy, że kąt ten jest mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od \mathbf{N}' do \mathbf{M}' , to

$$\sin \theta' = \frac{\|\mathbf{M}' \times \mathbf{N}'\|}{M' N'} = \sin 4\lambda. \quad (4.81)$$

Zatem

$$\lambda = \frac{1}{4} \theta', \quad (4.82)$$

czyli kąt λ jest czterokrotnie mniejszy od kąta między rzutami tych wektorów. Oznacza to też, że jest on funkcją mimośrod, nachylenia i argumentu perygeum (gdyż od tych wielkości zależy kąt θ').

Jeśli spojrzysz się na równania (4.79) i (4.80), to łatwo można dostrzec, że zmiana kąta g spowoduje jednoczesny obrót tych wektorów o ten sam kąt równy dwukrotności zmiany g , a także pośrednio obrót płaszczyzny orbity wokół trzeciej osi układu współrzędnych, co oznacza że kąt ten powiązany jest z długością węzła wstępującego.

4.10 Orbity szczególne w zmiennych LKS

Aby lepiej zrozumieć, co reprezentują poszczególne zmienne, zbadane zostanie dla jakich wartości kątów i działań otrzymujemy szczególne przypadki orbit keplerowskich.

Orbity kołowe posiadają mimośród równy zeru, co oznacza że wektor $L_0 \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Wynika z tego, że każda orbita kołowa posiada $\Lambda = 0$, co z kolei oznacza że $C_1 = C_2 = \sqrt{L^2 - G^2}/2$. Przy tych warunkach wektor Laplace'a można zapisać jako

$$L_0 \mathbf{e} = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - G^2} \cos 2\lambda (\mathbf{e}_1 \sin 2g - \mathbf{e}_2 \cos 2g), \quad (4.83)$$

i dalej sprawdzić kiedy jest on wektorem zerowym. Dla $\cos 2\lambda = 0$ (czyli $\lambda = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$), otrzymujemy orbity kołowe z dowolnym nachyleniem równym $\cos I = G/L$. Jeśli $|G| = L$ mimośród jest także równy zero niezależnie od wartości λ . Są to orbity w płaszczyźnie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ i ze względu na kontekst satelitarny tej pracy dalej nazywane będą umownie równikowymi. Orbity te mają ruch prosty gdy $G = L$, i wsteczny dla $G = -L$.

Oba warunki można łatwiej zrozumieć stawiając warunek stałej odległości r i analizując orbitę jako złożenie ruchu po dwóch elipsach Lissajous (rys. 4.2). Warunek $|G| = L$ i $\Lambda = 0$ oznacza że $L_{03} = L_{12} = |G|/2$ i elipsy stają się okręgami o równych promieniach, których złożenie oczywiście daje ruch po okręgu. Druga możliwość to dwie elipsy tych samych rozmiarów ($\Lambda = L_{12} - L_{03} = 0$) o takim samym mimośrodku, w których ruch jest przesunięty w fazie o $\pi/2$ (ponieważ $l_{12} - l_{03} = 2\lambda = \pi/2 + k\pi$). Mimośród zerowy oznacza też, że wektory Cartana \mathbf{M} i \mathbf{N} muszą być antyrównoległe, a więc kąt θ' między ich rzutami na płaszczyznę równika (poza przypadkiem kołowych orbit równikowych, gdzie te rzuty są wektorami zerowymi) musi wynosić π , co umożliwia znalezienie wartości λ korzystając z (4.82).

Dla orbity kołowej równikowej nie są określone kąty l, λ, g i γ , ale możliwe jest używanie kątów $l - g$ i $\lambda - \gamma$ (dla $L = -G$) lub $l + g$ i $\lambda + \gamma$ (dla $L = G$). Żadne osobliwości nie występują za to w przypadku orbit kołowych biegunowych, czyli orbit, których płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny równika. Wtedy $G = \Lambda = 0$ i $\lambda = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Drugim skrajnym przypadkiem są orbity prostoliniowe. Takie orbity mają zerowy moment pędu $\mathbf{G}_0 = 0$ i co za tym idzie jego trzecia składowa $G = 0$. Gdy $G = 0$ wektor momentu pędu można przedstawić jako

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - \Lambda^2} \sin 2\lambda (\mathbf{e}_1 \cos 2g + \mathbf{e}_2 \sin 2g). \quad (4.84)$$

Wektor ten staje się wektorem zerowym gdy $\lambda = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lub gdy $L = |\Lambda|$. Warunek $G = 0$ oznacza, że obie elipsy Lissajous są zdegenerowana do postaci odcinka, czyli ruchu prostoliniowego. Gdy $\lambda = k\frac{\pi}{2}$, ruch na nich jest przesunięty w fazie o zero lub $\pi/2$, więc ich złożenie także jest ruchem prostoliniowym. Drugi przypadek ($L = |\Lambda|$) oznacza że L_{12} lub L_{03} mają wartość zero, a więc ruch w przestrzeni KS odbywa się na jednej z wybranych płaszczyzn Lissajous, a każda z tych płaszczyzn odwzorowuje półprostą skierowaną wzdłuż lub przeciwnie do wektora \mathbf{e}_3 . Jest to więc orbita biegunowa prostoliniowa. Podobnie jak orbita kołowa równikowa, posiada ona w zmiennych LKS pewne osobliwości. Jedną z elips Lissajous jest punktem, a więc jedna z par l_{ij}, g_{ij} jest nieokreślona, przez co zmienne kątowe l, g, λ, γ także są nieokreślone. Można za to stosować drugą parę zmiennych $l_{ij} = l \pm \lambda$ i $g_{ij} = g \pm \gamma$.

Patrząc na orbity prostoliniowe z punktu widzenia wektorów Cartana, oba wektory są wtedy równoległe i co za tym idzie kąt między ich rzutami wynosi zero. Dla orbit biegunowych oba wektory są skierowane wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych i ich rzuty na płaszczyznę równika są równe zero, co powoduje, że kąty są nieokreślone, tak jak to było w przypadku orbit kołowych równikowych. Orbity prostoliniowe równikowe mają $\Lambda = G = 0$ oraz $\lambda = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ i dla nich wszystkie kąty są określone.

Ostatnie dwa typy orbit do omówienia, które zostały już częściowo wspomniane, to orbity równikowe i biegunowe, ale nie będące orbitami prostoliniowymi ani kołowymi. Przypadek orbit biegunowych jest prosty – wektor momentu pędu musi leżeć w płaszczyźnie równika, a więc jego trzecia składowa G musi wynosić zero. Kąt λ może być dowolny.

Znalezienie orbit równikowych jest nieco trudniejsze. Orbity takie mają wektor Laplace'a w płaszczyźnie równika, a więc $\Lambda = 0$, jednak jest to jedynie warunek konieczny. Warunkiem dostatecznym jest wektor momentu pędu skierowany prostopadłe do równika, a więc jego pierwsza i druga składowa muszą być równe zero. Wstawiając $\Lambda = 0$, otrzymujemy

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - G^2} \sin 2\lambda (\mathbf{e}_1 \cos 2g - \mathbf{e}_2 \sin 2g) + \frac{G}{2}\mathbf{e}_3. \quad (4.85)$$

Wybór $L = G$ prowadzi do opisywanych wcześniej orbit kołowych równikowych. Drugą opcją to $\lambda = k\pi/2$, dla której mamy orbity eliptyczne równikowe. Warunek $\Lambda = 0$ oznacza że obie elipsy Lissajous mają taki sam promień, a konkretna wartość kąta powoduje że nie są przesunięte w fazie lub przesunięcie wynosi $\pi/2$, co oznacza że odległość od środka układu współrzędnych na obu elipsach w tym samym momencie czasu jest taka sama, a więc w zmiennych KS $v_0^2 + v_3^2 = v_1^2 + v_2^2$. W równaniach

Tablica 4.1: Orbity szczególne i ich reprezentacja przez zmienne LKS [7]

orbita	wartości zmiennych	niezdefiniowane kąty
kołowa	$\Lambda = 0, \lambda = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$	brak
kołowa biegunowa	$\Lambda = 0, G = 0, \lambda = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$	brak
kołowa równikowa	$\Lambda = 0, G = L$	l, g, λ, γ
prostoliniowa	$G = 0, \lambda = k\frac{\pi}{2}$	brak
prostoliniowa równikowa	$G = 0, \Lambda = 0, \lambda = k\frac{\pi}{2}$	brak
prostoliniowa biegunowa	$G = 0, \Lambda = L$	l, g, λ, γ
równikowa	$\Lambda = 0, \lambda = k\frac{\pi}{2}$	brak
biegunowa	$G = 0$	brak

transformacji KS $x_3 = v_0^2 + v_3^2 - v_1^2 - v_2^2$, więc $x_3 = 0$ w tym wypadku, co uzasadnia, że są to orbity równikowe. Wszystkie przypadki orbit szczególnych zostały zebrane i podsumowane w tabeli 4.1

Dwa graniczne przypadki – orbity równikowe kołowe i orbity prostoliniowe biegunowe, to nie jedyne orbity dla których występują osobliwości. Pojawiają się one gdy jeden z pędów G_{ij} jest równy $\pm L_{ij}$, co powoduje niemożliwość zdefiniowania kątów l_{ij} oraz g_{ij} , a co za tym idzie niezdefiniowane są kąty l, g, λ, γ . Nadal jednak zdefiniowana jest suma lub różnica tych kątów. Gdy $G_{03} = L_{03}$, wtedy $L = G + \Lambda$, a zdefiniowanym kątem jest $l_{03} + g_{03}$ oraz $l + g$ i $\lambda + \gamma$. Dla $G_{03} = -L_{03}$ otrzymujemy $L = -G + \Lambda$, a zdefiniowane kąty to $l_{03} - g_{03}$ oraz $l - g, \lambda - \gamma$. Analogiczne dla drugiej pary pędów, gdy $G_{12} = L_{12}$, wtedy $L = G - \Lambda$, a użyteczne kąty to $l + g$ i $\lambda + \gamma$. Ostatni przypadek to $G_{12} = -L_{12}$ (co oznacza $L = -G - \Lambda$) z kątami $l - g$ oraz $\lambda - \gamma$.

Wszystkie te osobliwe przypadki można opisać jednym równaniem

$$L^2 - (G \pm \Lambda)^2 = 0, \quad (4.86)$$

co także oznacza że $C_1 = 0$ lub $C_2 = 0$, a więc że jeden z wektorów Cartana \mathbf{M} lub \mathbf{N} , jest skierowany wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych. Tłumaczy to dlaczego nieokreślone są kąty, które jak wcześniej stwierdzono, opisują rzut tego wektora na płaszczyznę prostopadłą \mathbf{e}_3 . Geometrycznie taka sytuacja możliwa jest jedynie gdy wektor Laplace'a jest prostopadły do węzła orbity, a więc argument perycentrum wynosi $\pm\pi/2$. Jeśli to uwzględnimy, to dla ruchu keplerowskiego możemy podstawić $L = 2L_0, G = 2L_0\sqrt{1 - e^2} \cos I, \Lambda = 2L_0e \sin I$ do równania (4.86), aby otrzymać

$$L_0 \left(1 - (\sqrt{1 - e^2} \cos I \pm e \sin I) \right) = 0. \quad (4.87)$$

Warunek ten jest spełniony gdy $e = \pm \sin I$, czyli mimośród jest równy sinusowi nachylenia orbity (oraz wcześniejszy warunek na argument perycentrum). Mamy więc pewną szczególną rodzinę orbit dla których zmienne LKS się nie sprawdzają, ale które można bez problemu analizować przy pomocy zmiennych Delaunaya. W zamian za to uzyskaliśmy brak osobliwości dla orbit, które są problematyczne przy stosowaniu klasycznych zmiennych kąt-działanie, włączając w to orbity prostoliniowe. Zmienne LKS są więc naturalnie przystosowane do analizowania orbit o dużych mimośrodkach. Jedynym nierozwiązanym mankamentem pozostają orbity kołowe równikowe oraz biegunowe orbity prostoliniowe.

4.11 Transformacja LKS z dowolnym wektorem definiującym

Opisywana tu transformacja zakłada że wykorzystywane są zmienne KS z wektorem definiującym skierowanym wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych. Warto jednak wspomnieć, że możliwe jest zdefiniowanie ogólniejszej postaci tej transformacji, dla dowolnego wektora definiującego. Główną różnicą jest wybór dwóch płaszczyzn Lissajous. Pierwsza z płaszczyzn to płaszczyzna $(\mathbf{e}_0, \mathbf{c})$, a druga rozpięta jest przez kwaterniony $(0, \mathbf{b}_1)$ i $(0, \mathbf{b}_2)$, gdzie \mathbf{b}_1 i \mathbf{b}_2 są wektorami prostopadłymi do \mathbf{c} i do siebie nawzajem. Dla pierwszej płaszczyzny przeprowadzamy transformację

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 &= \sqrt{\frac{L_{0c} + G_{0c}}{2\omega}} \cos(l_{0c} + g_{0c}) - \sqrt{\frac{L_{0c} - G_{0c}}{2\omega}} \cos(l_{0c} - g_{0c}), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} &= \sqrt{\frac{L_{0c} + G_{0c}}{2\omega}} \sin(l_{0c} + g_{0c}) + \sqrt{\frac{L_{0c} - G_{0c}}{2\omega}} \sin(l_{0c} - g_{0c}), \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_0 &= -\sqrt{\frac{\omega(L_{0c} + G_{0c})}{2}} \sin(l_{0c} + g_{0c}) + \sqrt{\frac{\omega(L_{0c} - G_{0c})}{2}} \sin(l_{0c} - g_{0c}), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} &= \sqrt{\frac{\omega(L_{0c} + G_{0c})}{2}} \cos(l_{0c} + g_{0c}) + \sqrt{\frac{\omega(L_{0c} - G_{0c})}{2}} \cos(l_{0c} - g_{0c}), \end{aligned} \quad (4.88)$$

i analogicznie dla drugiej

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 &= \sqrt{\frac{L_b + G_b}{2\omega}} \cos(l_b + g_b) - \sqrt{\frac{L_b - G_b}{2\omega}} \cos(l_b - g_b), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2 &= \sqrt{\frac{L_b + G_b}{2\omega}} \sin(l_b + g_b) + \sqrt{\frac{L_b - G_b}{2\omega}} \sin(l_b - g_b), \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}_1 &= -\sqrt{\frac{\omega(L_b + G_b)}{2}} \sin(l_b + g_b) + \sqrt{\frac{\omega(L_b - G_b)}{2}} \sin(l_b - g_b), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2 &= \sqrt{\frac{\omega(L_b + G_b)}{2}} \cos(l_b + g_b) + \sqrt{\frac{\omega(L_b - G_b)}{2}} \cos(l_b - g_b). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Dalsze kroki przeprowadzamy w ten sam sposób co wcześniej. Istotną różnicą będzie inne znaczenie pędów i kątów. Pędy G i Λ będą rzutami wektorów momentu pędu oraz Laplace'a na oś skierowaną wzdłuż wektora \mathbf{c} . O ile konkretny przypadek nie sprawia, że określony wybór \mathbf{c} będzie preferowany, to najwygodniejsze będzie pozostanie przy wektorze definiującym skierowanym wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych. Transformacja z zastosowaniem $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ daje łatwiejsze powiązanie otrzymanych zmiennych z elementami orbity (na przykład rzut momentu pędu na trzecią oś układu współrzędnych jest jedną ze zmiennych Delaunaya).

4.12 Zastosowanie do zagadnienia Lidowa-Kozai

Jako przykład zastosowania zmiennych LKS w praktyce, rozważymy rezonans Lidowa-Kozai. Zjawisko to pojawia się zarówno w zagadnieniu sztucznego satelity (Lidow [34]) jak i w ruchu planetoid (Kozai [27]). Jest to klasyczne zagadnienie, w którym ruch po orbicie keplerowskiej ciała o niewielkiej masie (satelita wokół Ziemi lub planetoida na orbicie heliocentrycznej) zaburzany jest przez odległe trzecie ciało (dla

satelity może być to Słońce, dla planetoidy – Jowisz). Zaburzenie to rozwijamy w szereg Taylora (patrz 2.7), ale rozwinięcie to ograniczamy do pojedynczego wyrazu z wielomianem Legendre'a drugiego stopnia. Przyjmijmy, że płaszczyzna ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) jest płaszczyzną w której porusza się trzecie ciało i dodatkowo, że znajduje się ono na kołowej orbicie keplerowskiej, więc jego położenie można opisać jako

$$\mathbf{r}_p = a_p(\mathbf{e}_1 \cos n_p t + \mathbf{e}_2 \sin n_p t), \quad (4.90)$$

gdzie n_p to ruch średni ciała zaburzającego, a_p to półosć wielka jego orbity, która jest duża w stosunku do odległości satelity lub planetoidy (to znaczy $a_p \gg r$).

Hamiltonian tego zagadnienia to

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (4.91)$$

gdzie \mathcal{H}_0 jest hamiltonianem keplerowskim, a potencjał zaburzający wyraża się przez wielomian Legendre'a

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu_p r^2}{a_p^3} P_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_p / (r a_p)). \quad (4.92)$$

Po wstawieniu (4.90) i rozwinięciu otrzymujemy

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu_p}{4a_p^3} [r^2 - x_3^2 + 3(x_1^2 - x_2^2) \cos 2n_p t + 6x_1 x_2 \sin 2n_p t]. \quad (4.93)$$

Następnie zastępujemy czas t formalną zmienną x^* , podstawiamy $\omega = 1, \alpha = \sqrt{8X^*}$ i stosujemy transformację LKS otrzymując

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1. \quad (4.94)$$

Podstawiając $\Gamma = 0$ (zmiennosc kąta γ w czasie ignorujemy), otrzymujemy

$$\mathcal{M}_0 = L - \frac{2\mu}{\sqrt{2S}}. \quad (4.95)$$

Wypisanie potencjału zaburzającego wyrażonego wprost przez zmienne LKS byłoby na tym etapie dość żmudne i mało użyteczne, dlatego poprzestaniemy na pośredniej postaci

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{\mu_p r}{32a_p^3 \sqrt{2S}} [r^2 - x_3^2 + 3(x_1^2 - x_2^2) \cos(2n_p s - \sigma) + 6x_1 x_2 \sin(2n_p s - \sigma)], \quad (4.96)$$

gdzie

$$\sigma = \frac{n_p}{2S} (B_1 \sin 2(l + \lambda) + B_2 \sin 2(l - \lambda)). \quad (4.97)$$

W niezaburzonym zagadnieniu mielibyśmy

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial L} = 1 \quad (4.98)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial S} = \frac{\mu}{\sqrt{2S^3}}, \quad (4.99)$$

a pozostałe zmienne są stałe. W niezaburzonym zagadnieniu l i s są liniowymi funkcjami τ . Zmienna $l = \tau + l_0$, a $s = \frac{\mu}{\sqrt{2S^3}} \tau$, albo, wstawiając wartość S taką, by $\mathcal{M} = 0$, otrzymujemy $s = \tau/n$.

Znając rozwiązanie dla niezaburzonego zagadnienia oraz dwie częstości (dla zmiennych l oraz s), możemy wprowadzić zmienne średnie wykorzystując rachunek z użyciem transformacji Liego (na przykład Ferraz-Mello [18]). Pierwszy rząd takiego rachunku przeprowadza się po prostu uśredniając funkcję Hamiltona względem τ , przyjmując w tym przypadku $l = \tau + l(0)$ oraz $s = \frac{\tau}{n}$. Przyjmujemy przy tym pewne uproszczenie: ze względu na dużą odległość ciała zaburzającego zakładamy, że n/n_p jest albo liczbą niewymierną albo bardzo małym ułamkiem, a więc nie ma rezonansu ruchu średniego obu ciał lub jest on zaniedbywalny. Można to uzasadnić tym, że nawet jeśli doszłoby do rezonansu, stosunek n/n_p byłby bardzo mały, wyrazy rezonansowe miałyby bardzo małą amplitudę i miałyby one marginalny wpływ na dynamikę. Wykorzystując ten fakt, możemy osobno uśredniać względem obu kątów l i s . Każdy wyraz zawierający sinus lub cosinus $2n_p s$ ma wartość średnią równą zero. Pozostaje więc uśrednienie względem l i wyliczenie całki

$$-\frac{\mu_p}{32a_p^3\sqrt{2S}} \int_0^{2\pi} [r^3 - rx_3^2] dl. \quad (4.100)$$

W rezultacie otrzymujemy uśredniony hamiltonian

$$\mathcal{N} = L - \frac{2\mu}{\sqrt{2S}} - \frac{\mu_p L}{1024a_p^3 S^2} (L^2 - 6\Lambda^2 + 6C_1 C_2 \cos 4\lambda) = 0. \quad (4.101)$$

Dla uproszczenia, zmienne średnie oznaczono tymi samymi symbolami co zmienne oskulacyjne. W dalszej analizie używany będzie wyłącznie hamiltonian \mathcal{N} zmiennych średnich i dlatego nie jest potrzebne wprowadzenie osobnych oznaczeń.

Po uśrednieniu, zagadnienie Lidowa-Kozai staje się zagadnieniem o jednym stopniu swobody. W hamiltonianie występuje tylko jeden kąt λ . Stosując klasyczne zmienne Delaunaya otrzymuje się podobny wynik – hamiltonian, który zależy tylko od kąta g , odpowiadającego argumentowi perycentrum. Istotną różnicą jest jednak fakt, że para Λ, λ posiada odmienne własności, w szczególności równania ruchu dla tych zmiennych w większości wypadków nie są osobliwe dla orbit prostoliniowych. Równania ruchu mają postać

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \Lambda} = B\Lambda \left(4 + \frac{L^2 + G^2 - \Lambda^2}{4C_1 C_2} \cos 4\lambda \right), \quad (4.102)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \lambda} = BC_1 C_2 \sin 4\lambda, \quad (4.103)$$

gdzie

$$B = \frac{3\mu_p L}{1024a_p^3 S^2}. \quad (4.104)$$

Warto w tym miejscu także przypomnieć znaczenie iloczynu $C_1 C_2$:

$$C_1 C_2 = \frac{1}{4} \sqrt{(L^2 - (G - \Lambda)^2)(L^2 - (G + \Lambda)^2)}. \quad (4.105)$$

Równanie dla zmiennej Λ przyjmuje wartość zero dla $\lambda = k\frac{\pi}{4}$, albo dla C_1 lub C_2 równego zero. Ten drugi przypadek prowadzi do osobliwości w równaniu dla

λ . Położenia równowagi mają więc $\lambda = k\frac{\pi}{4}$. Wstawiając to do równania (4.102), otrzymujemy

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = B\Lambda \left(4 \pm \frac{L^2 + G^2 - \Lambda^2}{\sqrt{(L^2 - (G - \Lambda)^2)(L^2 - (G + \Lambda)^2)}} \right), \quad (4.106)$$

gdzie plus pojawia się gdy $\lambda = k\frac{\pi}{2}$ a minus gdy $\lambda = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. W pierwszym przypadku równanie to zeruje się jedynie dla $\Lambda = 0$, co zgodnie z tabelą 4.1 odpowiada orbicie równikowej. W drugim przypadku równanie zeruje się także dla $\Lambda = 0$ (orbita kołowa). Dla pewnych wartości G/L występują dwa dodatkowe położenia równowagi, dla których

$$4 - \frac{L^2 + G^2 - \Lambda^2}{\sqrt{(L^2 - (G - \Lambda)^2)(L^2 - (G + \Lambda)^2)}} = 0. \quad (4.107)$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\Lambda = \pm L \sqrt{1 - \frac{8|G|}{\sqrt{15}L} + \left(\frac{G}{L}\right)^2}, \quad (4.108)$$

i przyjmuje ono wartości rzeczywiste dla $\frac{G^2}{L^2} \leq \frac{3}{5}$. Dla wartości $\frac{|G|}{L} = \frac{3}{5}$ dochodzi zatem do bifurkacji i w przestrzeni fazowej pojawiają się dwa dodatkowe położenia równowagi i zmienia się stabilność już istniejącego punktu równowagi. Te dwa położenia równowagi są klasycznymi położeniami równowagi w zagadnieniu Lidowa-Kozai i jedynymi, które można bezpośrednio analizować w zmiennych Delaunaya, a warunek (4.108) odpowiada warunkowi

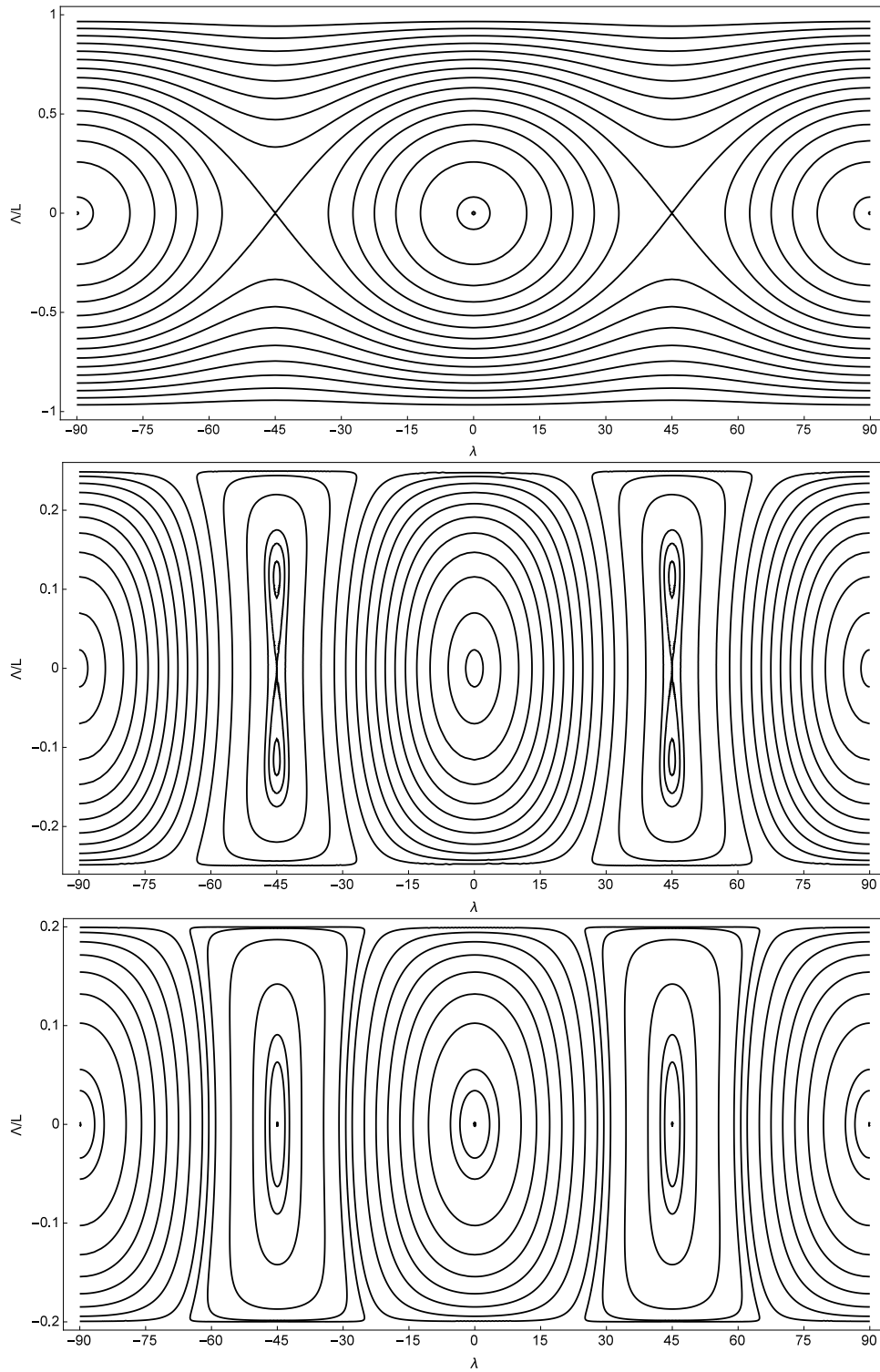
$$1 - e^2 = \frac{3(\cos I)^2}{5}. \quad (4.109)$$

W położeniu równowagi z $\Lambda = 0$, zmienne Delaunay'a są osobliwe, gdyż są to orbity kołowe (nieokreślony argument perycentrum) lub równikowe (nieokreślony węzeł wstępujący). Możliwe jest jednak wprowadzenie zmiennych nieosobliwych będących sumami odpowiednich kątów. Jednakże korzystanie z klasycznych zmiennych uniemożliwia analizę orbit prostoliniowych. Dla orbit prostoliniowych mamy $G = 0$ oraz $\lambda = k\frac{\pi}{2}$. Jedynym położeniem równowagi jest orbita równikowa $\Lambda = 0$.

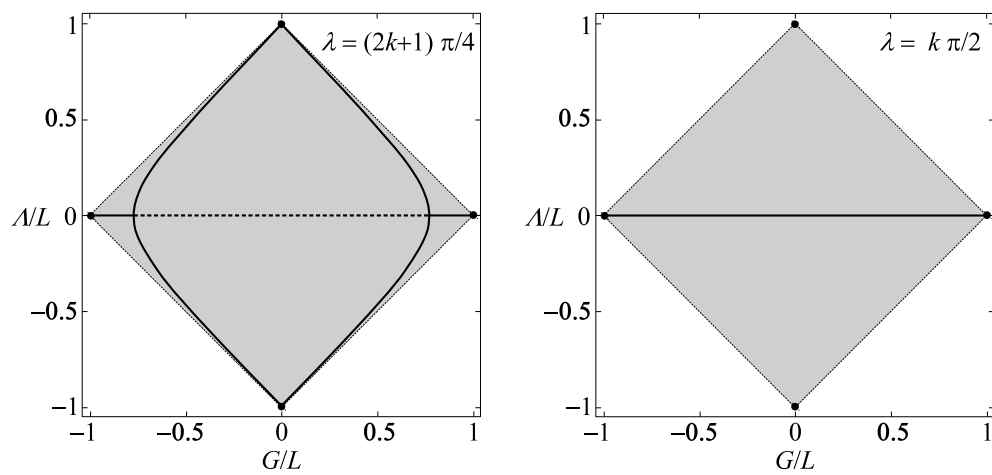
Na rysunkach 4.3 wykreślono funkcję Hamiltona dla trzech różnych wartości G/L . Linie łączą punkty dla których wartość funkcji Hamiltona jest taka sama. Ze względu na to, że zagadnienie posiada jeden stopień swobody, są to też linie po których odbywa się ruch. Z powodu okresowości względem kąta λ , wykresy ograniczono do zakresu $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Wartość $G = 0.8$ (dolny rysunek) oznacza, że znajdujemy się powyżej granicy $\frac{|G|}{L} \leq \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.77$, więc wszystkie widoczne położenia równowagi znajdują się osi $\Lambda = 0$ i są położeniami stabilnymi. Gdy zejdziemy poniżej wartości granicznej, następuje bifurkacja. Punkty równowagi $\lambda = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ stają się niestabilne i pojawiają się symetrycznie położone pary położen równowagi poza prostą $\Lambda = 0$. Wraz z malejącą wartością $|G|/L$, rośnie wartość $|\Lambda|/L$ w położeniu równowagi zgodnie z (4.108) (zależność tą przedstawiono na wykresie 4.4). Dla $G = 0$ te położenia równowagi znajdują się na skraju wykresu dla $|\Lambda|/L = 1$.

Zmienne LKS pozwoliły na analizę klasycznego zagadnienia Lidowa-Kozai, także uwzględniając orbity o dużym mimośrodku, a nawet prostoliniowe. Nieosobliwość

dla orbit prostoliniowych to zaleta, która może mieć swoje zastosowanie w innych zagadnieniach. Jak pokazali Lithwick i Naoz [35], w eliptycznym oktupolowym zagadnieniu Lidowa-Kozai (ciało zaburzające znajduje się na orbicie o niezerowym mimośrodku i uwzględniamy rozwinięcie potencjału do trzeciego stopnia wielomianu Legendre'a) może dochodzić do okresowych zmian orientacji orbity z ruchu prostego na ruch wsteczny i odwrotnie, przechodząc przez chwilową oskulacyjną orbitę prostoliniową. Próby analizy tego zagadnienia przy pomocy zmiennych kąta-działanie napotkały na problemy, które mogą zostać rozwiązane przy pomocy zaproponowanych zmiennych.



Rysunek 4.3: Uśredniona funkcja Hamiltona zagadnienia Lidowa-Kozai dla trzech wartości G/L równych kolejno od góry 0, 0.75 i 0.8.



Rysunek 4.4: Położenia równowagi dla $\lambda = k\frac{\pi}{2}$ i $\lambda = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Przerywana linia oznacza położenia równowagi niestabilne, a ciągła stabilne [7]

Podsumowanie

Regularyzacja w mechanice nieba jest wciąż aktualnym tematem, a zmienne Kustaanheimo-Stiefela są jednymi z kilku stosowanych zestawów zmiennych zregularyzowanych. Jak pokazał J. Roa [39], regularyzacja może mieć praktyczne zastosowanie w bardzo różnych zagadnieniach. Między innymi opisał on zastosowanie zmiennych KS do opisu ruchu względnego dwóch obiektów na orbicie, oraz wykorzystanie zmiennych DROMO do planowania trajektorii dla misji kosmicznych.

W niniejszej rozprawie głównym celem było rozwinięcie formalizmu transformacji KS oraz zastosowanie jej do zagadnień związanych z dynamiką sztucznego satelity. Transformacja KS została uogólniona poprzez wprowadzenie wektora definiującego \mathbf{c} . Razem ze stosowaniem formalizmu kwaternionowego, umożliwiło to geometryczną interpretację transformacji KS bez potrzeby definiowania układu współrzędnych. Pozwoliło to też sprowadzić różne konwencje stosowane podczas transformacji KS (nazywane w tej pracy KS1 i KS3) do jednego formalizmu. Swoboda definicji transformacji KS, którą daje wektor \mathbf{c} , umożliwia wybór formalizmu dogodnego dla danego zagadnienia. Zazwyczaj będzie to wektor skierowany wzdłuż jednej z osi symetrii. Tradycyjnie, w większości przypadków jest to oś z , a więc najlepiej stosować transformację z wektorem definiującym skierowanym wzdłuż tej osi (transformacja KS3). Konwencja KS3 często jest spotykana w publikacjach z zakresu fizyki, ale w mechanice nieba stosowana jest niemal wyłącznie transformacja KS1 – w wielu wypadkach można podejrzewać, że wybór ten czyniony jest z braku głębszej refleksji.

Opisane zostało także rozwiązanie zagadnienia dwóch ciał w obracającym się układzie współrzędnych przy pomocy zmiennych KS. Rozwiązanie zostało podane w postaci, która nie zakłada ani konkretnego układu współrzędnych, ani wektora definiującego transformację KS, ale pokazano też, że odpowiedni wybór tych wielkości umożliwia jego uproszczenie. Wynik ten (dla zmiennych KS3) został później wykorzystany podczas całkowania numerycznego opisanego w rozdziale trzecim. Rozwiązanie to może zostać również wykorzystane na przykład w analizie ograniczonego zagadnienia trzech ciał.

Wyprowadzenie wzorów na potencjał zaburzający ruch sztucznego satelity, a w szczególności wyrażenie geopotencjału przez zmienne KS pokazało, że właściwy wybór postaci transformacji KS umożliwia prostsze wyrażenie perturbacji. Występujące w tradycyjnym sformułowaniu geopotencjału funkcje sferyczne są związane z układem współrzędnych, w którym oś obrotu Ziemi skierowana jest wzdłuż trzeciej osi układu współrzędnych. Wykorzystując ten fakt, udało się wyrazić geopotencjał przez zmienne KS, zastępując funkcje sferyczne funkcjami Wignera. Dzięki temu możliwe jest łatwe przekształcenie dowolnego potencjału wyrażonego przez harmoniki sferyczne i opisanie go przez zmienne KS. Funkcje sferyczne wykorzystuje się zazwyczaj do opisu geopotencjału, ale można je także wykorzystać do rozwinięcia w szereg potencjału grawitacyjnego trzech ciał. Wprowadzone zostały także for-

muły pozwalające na obliczenie pochodnych funkcji Wignera i wyrażenie ich przez te funkcje.

Właściwe wyrażenie perturbacji przez zmienne KS pozwoliło na stworzenie narzędzia do całkowania numerycznego orbit sztucznych satelitów. Głównym jego celem było zbadanie ewolucji orbit na długim odcinku czasu, a nie precyzyjna propagacja na krótkim odcinku czasu. Wykorzystanie algorytmu symplektycznego zapewniło stabilność na długim odcinku czasu i pozwoliło wykorzystać zalety formalizmu kanonicznego stosowanego w tej pracy. Użycie tej metody nie byłoby wydajne dla orbit silnie mimośrodowych bez wykorzystania regularyzacji. Przedstawiona metoda jest wystarczająco dokładna i dość wydajna (obliczenia przeprowadzono na domowej klasy komputerze PC), tym bardziej, że jak się okazało, badanie stabilności przy pomocy MEGNO dla sztucznych satelitów wymaga długiego okresu całkowania. Lepsze rezultaty dało pokazanie zmian mimośrodu orbit. Pod tym kątem zbadane zostały orbity geosynchroniczne. Sprawdzono wpływ początkowej wartości anomalii średniej na wynik, ale okazał się on niewielki, a główny wpływ na dynamikę ma nachylenie i w dalszej kolejności długość węzła wstępującego orbity i argument perygeum. Sama metoda została także zbadana pod kątem jej dokładności dla orbit satelitów o dużym mimośrodku.

Poza zastosowaniami numerycznymi transformację KS można też użyć w rozważaniach analitycznych. Zaproponowany został nowy zestaw zmiennych kątdziałanie dla zregularyzowanego zagadnienia dwóch ciał, bazujący na transformacji KS i transformacji Lissajous. Odejście od tradycyjnego podejścia, w którym dwie pary zmiennych opisują ruch w płaszczyźnie orbity, a trzecia jej orientację w przestrzeni, umożliwiło uzyskanie zmiennych, które są nieosobliwe dla orbit eliptycznych zdegenerowanych do orbity prostoliniowej. Zaproponowana transformacja pozwala na prostą i naturalną redukcję zagadnienia z powrotem do trzech stopni swobody. Uwzględnione zostało także rozszerzenie przestrzeni fazowej, dzięki czemu formalizm ten może być stosowany również do zagadnień z jawną zależnością od czasu. Wszystko to umożliwi bezproblemowe zastosowanie tego formalizmu dla zagadnień, w których mamy do czynienia z bardzo dużym mimośrodem (a duże mimośrodky są główną przyczyną stosowania regularyzacji), albo wręcz przejściem przez oskulacyjną orbitę prostoliniową. Przykład klasycznego zagadnienia Lidowa-Kozai pokazał, że zaproponowaną transformację można użyć w praktyce i w przyszłości można ją zastosować do bardziej złożonych problemów.

Transformacja KS, pomimo pewnych niewygodnych cech, takich jak konieczność wprowadzenia dodatkowego stopnia swobody lub rozszerzenia przestrzeni fazowej w kanonicznej transformacji Sundmana, okazała się być praktycznym narzędziem w analizie zaburzonego zagadnienia dwóch ciał. Lepsze poznanie istoty samej transformacji, zwłaszcza jej interpretacja geometryczna i powiązanie z obrotem, umożliwiły sprawniejsze jej stosowanie zarówno w zastosowaniach numerycznych jak i analitycznych.

Dodatek A

Algebra kwaternionów

Kwaterniony to czterowymiarowe obiekty, które mogą być traktowane jako para uporządkowana liczby skalarnej i wektora trójwymiarowego [15]. Każdy kwaternion \mathbf{q} może zostać zapisany jako

$$\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}) = (q_0, q_1, q_2, q_3), \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

q_0 nazywamy częścią skalarną, a \mathbf{q} częścią wektorową kwaternionu \mathbf{q} . Wygodnie jest wprowadzić operator \natural , który wybiera z kwaternionu jego część wektorową

$$\mathbf{q}^\natural = \mathbf{q}. \quad (\text{A.2})$$

Algebra kwaternionów oznaczana jest zazwyczaj symbolem \mathbb{H} .

Dodawanie dwóch dowolnych kwaternionów \mathbf{q} i \mathbf{p} zdefiniowane jest jako

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = (q_0 + p_0, \mathbf{q} + \mathbf{p}). \quad (\text{A.3})$$

Mnożenie dwóch kwaternionów \mathbf{q} i \mathbf{p} dające w wyniku kwaternion $\mathbf{r} = \mathbf{q}\mathbf{p}$ definiujemy jako

$$\mathbf{r} = (q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}). \quad (\text{A.4})$$

Występowanie iloczynu wektorowego $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ powoduje, że działanie to nie jest przemienne i

$$\mathbf{q}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q} = (0, 2\mathbf{q} \times \mathbf{p}). \quad (\text{A.5})$$

Dodatkowo zdefiniujemy mnożenie przez skalar x

$$x\mathbf{q} = x(q_0, \mathbf{q}) = (xq_0, x\mathbf{q}), \quad (\text{A.6})$$

którego wynik jest równy mnożeniu przez kwaternion z zerową częścią wektorową

$$x\mathbf{q} = (x, \mathbf{0})(q_0, \mathbf{q}) = (q_0, x\mathbf{q})(x, \mathbf{0}). \quad (\text{A.7})$$

Sprzężenie kwaternionu definiujemy jako

$$\bar{\mathbf{q}} = (q_0, -\mathbf{q}), \quad (\text{A.8})$$

a moduł

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}. \quad (\text{A.9})$$

Co więcej

$$|\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_0 = (\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q})_0. \quad (\text{A.10})$$

Wykorzystując powyższe, określamy odwrotność kwaternionu jako

$$\frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^2}. \quad (\text{A.11})$$

Dodatkowo, dla kwaternionów można zdefiniować działania będące odpowiednikami iloczynów skalarnego i wektorowego dwóch wektorów. Iloczyn skalarny kwaternionów \mathbf{q} i \mathbf{p} ma postać

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_0 p_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}. \quad (\text{A.12})$$

Iloczyn mieszany trzech kwaternionów ma użyteczną własność

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}\mathbf{s} = \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{q}\mathbf{p}, \quad (\text{A.13})$$

którą udowodnić można rozpisując kwaterniony na składowe skalarną i wektorową

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}\mathbf{s} &= (q_0, -\mathbf{q}) \cdot (p_0 s_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}, p_0 \mathbf{s} + s_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{s}) \\ &= q_0 p_0 s_0 - q_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - p_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} - s_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s}\mathbf{q} &= (p_0, -\mathbf{p}) \cdot (q_0 s_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}, q_0 \mathbf{s} + s_0 \mathbf{q} + \mathbf{s} \times \mathbf{q}) \\ &= q_0 p_0 s_0 - q_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - p_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} - s_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{q}\mathbf{p} &= (s_0, -\mathbf{s}) \cdot (p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_0 \mathbf{q} + s_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ &= q_0 p_0 s_0 - q_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - p_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} - s_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{s} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

a następnie skorzystać z własności iloczynu mieszanego wektorów

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{s}) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{p}) = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}). \quad (\text{A.17})$$

O ile definicja iloczynu skalarnego kwaternionów jest dość oczywista, tak w przypadku iloczynu wektorowego pojawiają się różne konwencje u różnych autorów (Stiefel i Scheifele [43], Vivarelli [47], Deprit i in. [15]). Przyjmiemy wariant Deprit

$$\mathbf{q} \wedge \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\bar{\mathbf{p}}}{2} = (0, q_0 \mathbf{p} - p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}). \quad (\text{A.18})$$

Podobnie jak zwykły iloczyn wektorowy, iloczyn wektorowy kwaternionów jest nieprzemienne i

$$\mathbf{q} \wedge \mathbf{p} = -\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \quad (\text{A.19})$$

a jego część skalarna wynosi zawsze zero. Taki iloczyn wektorowy ma też użyteczną własność związaną z iloczynem mieszanym

$$(\mathbf{q}\mathbf{p}) \wedge \mathbf{s} = \mathbf{q} \wedge (\mathbf{s}\bar{\mathbf{p}}) \quad (\text{A.20})$$

Jak już wspomniano, mnożenie kwaternionów w ogólności jest nieprzemienne. Są jednak przypadki, gdy to mnożenie jest przemienne. Jest tak wtedy, gdy część wektorowa jednego (lub obu) kwaternionu wynosi zero lub części wektorowe obu czynników są wektorami równoległymi. Pierwszy przypadek jest trywialny, gdyż kwaternion z zerową częścią wektorową zachowuje się jak liczba rzeczywista. W drugim przypadku przyjmijmy, że $\mathbf{q} = (q_0, q_1 \hat{c})$, i $\mathbf{p} = (p_0, p_1 \hat{c})$, gdzie \hat{c} to pewien wersor, a p_0, p_1, q_0, q_1 to liczby rzeczywiste. Wtedy

$$\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{q} = (p_0 q_0 - p_1 q_1, (p_0 q_1 + p_1 q_0) \hat{c}). \quad (\text{A.21})$$

Powyższa definicja jest tożsama z definicją mnożenia dwóch liczb zespolonych $p_0 + ip_1$ i $q_0 + iq_1$, jeśli w miejsce jednostki urojonej umieścimy kwaternion $(0, \hat{c})$, a jedynekę rzeczywistą utożsamimy z kwaternionem $(1, \mathbf{0})$.

W tym miejscu można by się zastanowić czy można wprowadzić postać wykładniczą kwaternionu, podobną do postaci wykładniczej liczb zespolonych. Okazuje się że można zdefiniować

$$\exp(q_0, q_1 \hat{c}) = \exp(q_0) (\cos q_1, \sin q_1 \hat{c}). \quad (\text{A.22})$$

Należy być jednak ostrożnym, gdyż takie wyrażenie nie posiada wszystkich własności funkcji wykładniczej, co może być mylące. Jeśli $\mathbf{pq} \neq \mathbf{qp}$, wtedy $\exp p \exp q \neq \exp p + q$. Z tego powodu takie oznaczenie nie będzie stosowane poza tym podrozdziałem. Warto za to zbadać kwaternion

$$\mathbf{u}(\phi, \hat{c}) = \exp(0, \phi \hat{c}) = (\cos \phi, \sin \phi \hat{c}). \quad (\text{A.23})$$

Okazuje się że dla dowolnych ϕ, ψ, \hat{c}

$$\mathbf{u}(-\phi, \hat{c}) = \bar{\mathbf{u}}(\phi, \hat{c}), \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{u}(\phi, \hat{c}) \mathbf{u}(\psi, \hat{c}) = \mathbf{u}(\phi + \psi, \hat{c}), \quad (\text{A.25})$$

$$|\mathbf{u}(\phi, \hat{c})| = 1. \quad (\text{A.26})$$

Tożsamości te stają się oczywiste gdy utożsamimy $\mathbf{u}(\phi, \hat{c})$ z postacią wykładniczą $\exp i\phi$. Inną przydatną własnością jest

$$\mathbf{u}(\phi, \hat{c}) (0, \hat{c}) = (0, \hat{c}) \mathbf{u}(\phi, \hat{c}) = (-\sin \phi, \cos \phi \hat{c}) = \frac{d\mathbf{u}(\phi, \hat{c})}{d\phi}. \quad (\text{A.27})$$

Podobnie jak liczba zespolona $a + ib$ może być przedstawiona macierzą rzeczywistą

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

tak kwaterniony mogą być przedstawione jako macierze zespolone

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Dodawanie i mnożenie kwaternionów jest wtedy zastąpione dodawaniem i mnożeniem macierzy. Postać macierzową (A.29) można przedstawić za pomocą kombinacji liniowej macierzy spinowych Pauliego i macierzy jednostkowej

$$\mathbf{q} = q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + iq_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + iq_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + iq_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Macierze spinowe przemnożone przez jednostkę urojoną odpowiadają kwaternionom jednostkowym, a więc algebra kwaternionów jest tym samym co algebra macierzy spinowych Pauliego [8].

Dodatek B

Wyprowadzenie równań na pochodne funkcji Wignera

Funkcja Wignera w postaci

$$D_{k,m}^n(\mathbf{v}) = \sqrt{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!} \sum_s \frac{(v_0 - iv_3)^{n+k-s} (-iv_1 - v_2)^{m-k+s} (-iv_1 + v_2)^s (v_0 + iv_3)^{n-m-s}}{s!(n-m-s)!(n+k-s)!(m-k+s)!}, \quad (\text{B.1})$$

jest wielomianem czterech zespolonych wyrażeń $(v_0 - iv_3)$, $(-iv_1 - v_2)$, $(-iv_1 + v_2)$, oraz $(v_0 + iv_3)$. Jeśli na te wyrażenia zadziałamy operatorami różniczkowymi (2.34), to w wyniku otrzymamy zero, poza czterema przypadkami:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) (v_0 - iv_3) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} - i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) (v_0 + iv_3) = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_2} + i \frac{\partial}{\partial v_1} \right) (-iv_1 + v_2) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial v_2} + i \frac{\partial}{\partial v_1} \right) (-iv_1 - v_2) = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dzięki temu każdy z tych operatorów, działając na funkcję Wignera, może być traktowany jako różniczkowanie względem jednego z tych składników, dla którego pochodna wynosi jeden, a nie zero. Działając pierwszym z tych operatorów na funkcję, działamy na każdy ze składników sumy i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{(n+m)!(n-m)!(n+k)!(n-k)!} \\ \sum_s \frac{(v_0 - iv_3)^{n+k-s-1} (-iv_1 - v_2)^{m-k+s} (-iv_1 + v_2)^s (v_0 + iv_3)^{n-m-s}}{s!(n-m-s-1)!(n+k-s)!(m-k+s)!}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

przy czym zmianie mogły ulec granice sumowania. W funkcji Wignera sumowanie przebiega od $s = \max(0, m-k)$ do $s = \min(n+m, n-k)$, ale wyraz z $s = n+m$ nie zależy od $(v_0 - iv_3)$, a więc jego pochodna wynosi zero, co może zmieniać górną granicę sumowania na $s = \min(n+m-1, n-k)$. Jeżeli podstawimy $n' = n - \frac{1}{2}$, $m' = m - \frac{1}{2}$ i $k' = k - \frac{1}{2}$, to granice sumowania będą wynosiły $s = \max(0, m' - k')$

do $s = \min(n' + m', n' - k')$, a sama funkcja pozwoli się zapisać jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= \sqrt{(n' + m' + 1)!(n' - m')!(n' + k' + 1)!(n' - k')!} \\ &\sum_s \frac{(v_0 - iv_3)^{n'+k'-s} (-iv_1 - v_2)^{m'-k'+s} (-iv_1 + v_2)^s (v_0 + iv_3)^{n'-m'-s}}{s!(n' - m' - s)!(n' + k' - s)!(m' - k' + s)!}, \quad (\text{B.4}) \\ &= \sqrt{(n' + m' + 1)(n' + k' + 1)} D_{k',m'}^{n'}(\mathbf{v}) = \sqrt{(n+m)(n+k)} D_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dla pozostałych operatorów postępując analogicznie można uzyskać pozostałe potrzebne równości (2.34).

Nieco trudniej jest wyprowadzić te równości w przypadku funkcji Wignera

$$E_{k,m}^n(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^{-4n-2} D_{k,m}^n(\mathbf{v}). \quad (\text{B.5})$$

Stosując operator różniczkowy do tej funkcji otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= |\mathbf{v}|^{-4n-4} (-2n-1)(v_0 + iv_3) D_{k,m}^n(\mathbf{v}) + \\ &+ |\mathbf{v}|^{-4n-2} \sqrt{(n+m)(n+k)} D_{k-1/2,m-1/2}^{n-1/2}(\mathbf{v}). \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Następnie trzeba zastosować odpowiednie z równań (2.49), dzięki czemu wyrażenie $(-2n-1)(v_0 + iv_3) D_{k,m}^n(\mathbf{v})$ można zastąpić funkcjami o stopniu różniącym się od niej o 1/2, a następnie całość upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} + i \frac{\partial}{\partial v_3} \right) E_{k,m}^n(\mathbf{v}) &= |\mathbf{v}|^{-4n-4} \sqrt{(n-k+1)(n-m+1)} D_{k-1/2,m-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{v}) = \\ &\sqrt{(n-k+1)(n-m+1)} E_{k-1/2,m-1/2}^{n+1/2}. \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

W ten sam sposób uzyskać można wzory dla pozostałych operatorów różniczkowych. Działanie operatorów na funkcje D powoduje obniżenie jej stopnia, a na funkcje E poniesienie jej stopnia o 1/2. Dodatkowo zmieniają się także indeksy dolne o $\pm 1/2$.

Bibliografia

- [1] A. Ahmad and M. N. Huda. Generating solution of the restricted three-body problem in 3-dimension. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 14:11–14, 1986.
- [2] L.C. Biedenharn, J.D. Louck, and P.A. Carruthers. *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2009.
- [3] S. Breiter. Explicit Symplectic Integrator for Highly Eccentric Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71:229–241, 1998.
- [4] S. Breiter, M. Fouchard, and R. Ratajczak. Stationary orbits of comets perturbed by Galactic tides. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383:200–208, 2008.
- [5] S. Breiter, M. Fouchard, R. Ratajczak, and W. Borczyk. Two fast integrators for the Galactic tide effects in the Oort Cloud. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377:1151–1162, 2007.
- [6] S. Breiter and K. Langner. The extended Lissajous–Levi-Civita transformation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(10):68, 2018.
- [7] S. Breiter and K. Langner. The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131(2):9, 2019.
- [8] E. Cartan. *The Theory of Spinors*. MIT Press, Cambridge 1966.
- [9] M. Chapront-Touze and J. Chapront. ELP 2000-85 - A semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times. *Astronomy and Astrophysics*, 190:342–352, January 1988.
- [10] A. Chenciner. Le problème de la lune et la theorie des systèmes dynamiques, 1986. "<https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/preprint.html>", dostępne 21.02.2018
- [11] P. M. Cincotta and C. Simó. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147:205–228, 2000.
- [12] P.M. Cincotta, C.M. Giordano, and C. Simó. Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 182(3):151 – 178, 2003.

- [13] B. Cordani. *The Kepler Problem*. Springer-Verlag, 2003.
- [14] A. Deprit. The Lissajous transformation. I - Basics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 51:201–225, 1991.
- [15] A. Deprit, A. Elipe, and S. Ferrer. Linearization: Laplace vs. Stiefel. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 58:151–201, 1994.
- [16] A. Deprit and C. A. Williams. The Lissajous transformation. IV - Delaunay and Lissajous variables. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 51:271–280, 1991.
- [17] J. Féjoz. Averaging the planar three-body problem in the neighborhood of double inner collisions. *Journal of Differential Equations*, 175(1):175–187, 2001.
- [18] S. Ferraz-Mello. *Canonical Perturbation Theories; Degenerate Systems and Resonance*. Springer-Verlag, 2007.
- [19] D.M. Fradkin. Existence of the dynamic symmetries O_4 and SU_3 for all classical central potential problems. *Progress in Theoretical Physics*, 37(5):798–812, 1967.
- [20] A G. Aleksandrova, T V. Bordovitsyna, and I V. Tomilova. Investigation of light pressure influence on dynamics of Near-Earth Objects in resonant orbits. *Solar System Research*, 52:435–449, 2018.
- [21] Ioannis Gkolias and Camilla Colombo. Towards a sustainable exploitation of the geosynchronous orbital region. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131(4):19, 2019.
- [22] C. Wanner G. Hairer, E. Lubich. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 2006.
- [23] M. R. Hassan. A generating solutions of the restricted three-body problem in KS-variables. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25:337–343, 1994.
- [24] M. R. Hassan. Periodicity of the generating solutions of the restricted three-body problem in three-dimensional coordinate system. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 29:15–23, 2001.
- [25] H. Hopf. Über die Abbildungen der Dreidimensionalen Sphäre auf die Kugel­fläche. *Mathematische Annalen*, 104:637–665, 1931.
- [26] Ch. Hubaux, A. Lemaitre, N. Delsate, and T. Carletti. Symplectic integration of space debris motion considering several Earth’s shadowing models. *Advances in Space Research*, 49(10):1472 – 1486, 2012.
- [27] Y. Kozai. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astronomical Journal*, 67:591, 1962.

- [28] I. V. Kurcheeva. Kustaanheimo-Stiefel regularization and nonclassical canonical transformations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 15:353–365, 1977.
- [29] P. Kustaanheimo. Spinor regularization of the Kepler motion. *Publ. of the Astronomical Observatory, Helsinki, No. 102*, 1964.
- [30] P. Kustaanheimo and E. Stiefel. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *J. Reine Angewandte Mathematik*, 218:204, 1965.
- [31] K. Langner and S. Breiter. KS variables in rotating reference frame. Application to cometary dynamics. *Astrophysics and Space Science*, 357:153, 2015.
- [32] J. Laskar and P. Robutel. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80:39–62, 2001.
- [33] T. Levi-Civita. Sur la résolution qualitative du probleme restreint des trois corps. *Acta Mathematica*, 30(1):305–327, 1906.
- [34] M.L. Lidov. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planetary and Space Science*, 9(10):719 – 759, 1962.
- [35] Y. Lithwick and S. Naoz. The eccentric Kozai mechanism for a test particle. *The Astrophysical Journal*, 742(2):94, 2011.
- [36] G. Métris, J. Xu, and I. Wytrzyszczak. Derivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71(2):137–151, 1998.
- [37] O. Montenbruck and E. Gill. *Satellite Orbits*, volume 1. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.
- [38] J. Peláez, J.M. Hedo, and P. Rodríguez de Andrés. A special perturbation method in orbital dynamics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 97(2):131–150, 2007.
- [39] J. Roa. *Regularization in Orbital Mechanics. Theory and Practice*. De Gruyter, Berlin, 2017.
- [40] J. Roa, H. Urrutxua, and J. Peláez. Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 459(3):2444–2454, 2016.
- [41] P. Saha. Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400:228–231, 2009.
- [42] A. M. Segerman and S. L. Coffey. An analytical theory for tesseral gravitational harmonics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 76:139–156, 2000.
- [43] E.L. Stiefel and G. Scheifele. *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

- [44] K.F. Sundman. Memoire sur le probleme des trois corps. *Acta Mathematica*, 36(1):105–179, 1913.
- [45] V. Szebehely. *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, New York-London, 1967.
- [46] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and Khersonskii. *Quantum Theory of Angular Momentum: Irreducible Tensors, Spherical Harmonics, Vector Coupling Coefficients, 3nj Symbols*. World Scientific, Singapore, 1988
- [47] M. D. Vivarelli. Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 41:359–370, 1988.
- [48] M.D. Vivarelli. The KS-transformation in hypercomplex form. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 29(1):45–50, 1983.
- [49] L. Zhao. Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy. *Regular and Chaotic Dynamics*, 20(1):19–36, 2015.
- [50] L. Zhao. Some collision solutions of the rectilinear periodically forced Kepler problem. *Advanced Nonlinear Studies*, 16(1):45–49, 2016.