

RYSZARD ZASĘPA

BADANIE WŁASNOŚCI PROGNOSTYCZNYCH
MODELOWYCH TABLIC TRWANIA ŻYCIA
TYPU W. BRASSA*

Obserwując współczynniki zgonów według płci i wieku w różnych populacjach stwierdzamy, że pomimo różnic w ich poziomie, układają się one w charakterystyczne wzorce. Ta prawidłowość nasunęła myśl o możliwości skonstruowania matematycznych funkcji wieku opisujących porządek wymieralności. Realizacją tej idei było skonstruowanie w latach pięćdziesiątych tzw. *modelowych tablic trwania życia* w ONZ¹, a w kilka lat później zmodyfikowanych tablic wyróżniających cztery ich rodziny przez A. J. Coale'a i P. Demeny'ego². S. Ledermann i J. Breas³ dokonując analizy czynnikowej 157 tablic trwania życia 50 krajów wykazali, że (poza płcią) istnieją dwa główne czynniki wyjaśniające ponad 80% zmienności, jednak ich interpretacja jest trudna; trzeci czynnik wyjaśnia dodatkowo 6,5% zmienności. Modelowaniem wzorców wymieralności, głównie z racji potrzeb krajów rozwijających się zajął się m.in. W. Brass⁴.

Weźmy pod uwagę rodzinę k tablic trwania życia jakiejś populacji indeksowaną wskaźnikiem $i=1, 2, 3, \dots, k$ oraz przyjmijmy pewną tablicę standardową dla rozważanej populacji (oznaczymy ją indeksem s). Niech $l_i(x), l_s(x)$ oznaczają prawdopodobieństwo dożycia wieku x (w terminologii tablic trwania życia będzie to iloraz $l_s : l_0$) dla i -tej tablicy oraz dla tablicy standardowej odpowiednio. Brass wysunął hipotezę, że w przybliżeniu zachodzi związek:

$$\ln[(1 - l_i(x)) : l_i(x)] = \alpha + \beta \ln[(1 - l_s(x)) : l_s(x)],$$

* Badanie prowadzone w temacie 11.5.6.01 Problemu Węzłowego 11.5 pt. „Optymalizacja struktur i procesów demograficznych w Polsce Ludowej”.

¹ *Age and Sex Patterns of Mortality, Model Life Tables for Under-Developed Countries*, ST/SOA (Series A) 22, ONZ, 1955.

² A. J. Coale and Paul Demeny, *Regional Model Life Tables and Stable Populations*, Princeton 1966.

³ S. Ledermann, J. Breas, *Les dimensions de la mortalité*, Population, Paryż 1969, nr 14, s. 637 - 682.

⁴ W. Brass i inni, *The Demography of Tropical Africa*. Princeton 1968 s. 127 - 133; W. Brass, *On the Scale of Mortality*, Biological Aspects of Demography, Londyn 1971, vol. X, s. 69-110.

gdzie α, β są to pewne stałe. Przyjmując od dawna znane w statystyce określenie funkcji logit

$$\text{logit } p : = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{1-p}, \quad \text{dla } 0 < p < 1$$

oraz oznaczając

$$Y_i(x) = \text{logit} [1 - l_i(x)], \quad Y_s(x) = \text{logit} [1 - l_s(x)]$$

hipotezę Brassa można wyrazić przybliżoną zależnością liniową

$$Y_i(x) = \alpha + \beta Y_s(x). \quad (1)$$

Przyjmując różne wartości na i (zdaniem Brassa, wystarczy ograniczyć β do przedziału $[0,6; 1,6]$) oraz określoną standardową tablicę trwania życia, prawa strona (1) generuje dwuparametrową rodzinę tablic trwania życia. Na tej zasadzie N. J. Carrier i J. Hobcraft⁵ skonstruowali modelowe tablice trwania życia dla krajów rozwijających się. Z kolei dla danej tablicy trwania życia można oszacować — przy założeniu określonej tablicy standardowej — parametry α i β i otrzymać odpowiadającą rzeczywistości, modelową tablicę trwania życia zgodnie z wzorem

$$\hat{Y}_i(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Y_s(x). \quad (2)$$

Mamy więc możliwość łatwej obserwacji zmian struktury i poziomu umieralności w danej populacji. Gdyby wartości $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ zmieniały się w charakterystyczny sposób z biegiem czasu, pozwoliłoby to na matematyczne modelowanie zmian za pomocą odpowiednich funkcji czasu, dając obiektywną metodę prognozowania umieralności. Na taką możliwość wskazywał Brass⁶.

$\beta=1$, to $Y_i(x)-Y_s(x)=\alpha$, a więc różnice prawdopodobieństw dożycia w tablicy modelowej i standardowej są zawsze dodatnie gdy $\alpha<0$ (gdyż wówczas dla każdego wieku x , $l_i(x)>l_s(x)$) bądź zawsze ujemne gdy $\alpha>0$. Inaczej mówiąc, gdy $\alpha<0$, umieralność według i -tej tablicy modelowej jest niższa aniżeli według tablicy standardowej; jest przeciwnie, gdy $\alpha>0$. Jeżeli $\beta>1$, czyli $\beta=1+\delta$, $\delta>0$, to $Y_i(x)-Y_s(x)=\alpha+\delta Y_s(x)$. Wówczas — oznaczając przez x_0 medianę wieku dożywających według tablicy standardowej, czyli $Y_s(x_0)=0$ — różnica $Y_i(x)-Y_s(x)<\alpha$ dla $x<x_0$, natomiast $Y_i(x)-Y_s(x)>\alpha$ dla $x>x_0$ oraz $Y_i(x_0)-Y_s(x_0)=0$. Zatem przy $\beta>1$, ze wzrostem wieku x prawdopodobieństwa dożycia tego wieku w i -tej tablicy modelowej, $l_i(x)$ zmniejszają się szybciej niż wówczas, gdy przy tym samym α , $\beta=1$. Jest przeciwnie, kiedy $\beta<1$.

W. Brass podaje jeszcze inną interpretację parametrów α oraz β ⁷ parafrazując sytuację występującą w przypadku badań eksperymentalnych na zwierzętach dla ustalania toksyczności nowych leków. Interpretacja ta jest następująca:

Uważajmy $Y(x)=\logit[1-l(x)]$ jako transformację skali wieku x . Prawdopodobieństwo zgonu w danym wieku może być opisane przy przyjęciu takiej skali jako symetryczny jednowierzchołkowy rozkład. Dla różnych populacji kształt krzywej rozkładu jest podobny, ale wartość oczekiwana prawdopodobieństwa zgonu, wynosząca $-\alpha/\beta$ oraz wariancja $1/\beta^2$ zmieniają się. Wartość oczekiwaną można przyjąć za miarę poziomu umieralności (zauważmy, że zgodnie z wzorem (1) $Y_i(x_0)=0$ gdy $Y_s(x_0)=-\alpha/\beta$). System Brassa oparty na funkcji logit został tak skonstruowany, żeby centralna wartość odchylenia standardowego $1/\beta$ była bliska jedności. Wysokie wartości β odpowiadają małemu rozrzutowi wieku zmarłych i odwrotnie.

II. SZACOWANIE WARTOŚCI PARAMETRÓW α i β

W celu empirycznego sprawdzenia hipotezy Brassa posłużono się istniejącymi do 1976 r. włącznie tablicami wymieralności w podziale na miasta i wieś, przyjmując za podstawę dane l_x dla $x=1, 5, 10, 15, \dots, 70$ lat (przeprowadzono również dodatkowe obliczenia, biorąc jeszcze pod uwagę $x=75, 80, 85$ lat, lecz wnioski uzyskano identyczne jak z pierwszego zestawu danych). Za tablicę standardową przyjęto tablicę trwania życia z lat 1970 - 1972⁸. Oceny $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ modelu (2) były otrzymane metodą najmniejszych kwadratów. Oceny te wypadły wystarczająco precyzyjne w przypadku parametru β , natomiast mniejszą precyzję mają oceny parametru α , który jest bliski zeru w latach niezbyt oddalonych od okresu tablicy standardowej trwania życia. Współczynniki determinacji R^2 modelu (2) były wysokie i mieściły się w granicach od 0,95 do 0,999.

⁷ Ibidem, s. 104 - 106.

⁸ Ścisłej: było 6 tablic standardowych, dla każdej płci oraz dla Polski ogółem i w podziale na miasto i wieś.

III. DOBROĆ TABLIC MODELOWYCH

W celu zweryfikowania, czy tablice modelowe dobrze odzwierciedlają tablice rzeczywiste trwania życia, mając $\hat{Y}_i(x)$ z modelu (2) można było obliczyć „teoretyczne” liczby $\hat{l}_x$ dożywających wieku x z wzoru:

$$\hat{l}_x = \frac{l_0}{1 + e^{2\hat{Y}_i(x)}} \quad \text{dla } x = 1, 5, 10, 15, \dots \quad (3)$$

(powyżej opuściliśmy — dla uproszczenia — (indeks i). Różnice $r_x = l_x - \hat{l}_x$ są obciążeniami ocen wartości l_x dla danej tablicy trwania życia i danego wieku x . Analizując obciążenia stwierdzono systematyczne występowanie tych samych znaków obciążeń seriami (zob. tab. 1, kolumny zatytułowane I); zmiana znaku występuje najczęściej w wieku 25 - 45 lat oraz około 60 - 70 lat. Wielkości obciążeń są często stosunkowo duże dla wielu $x=1$ oraz są bardzo wysokie poczynając od wieku $x=70$ lat, kiedy obciążenia procentowe mogą przekraczać 20%.

IV. WPŁYW TABLICY STANDARDOWEJ NA WIELKOŚĆ OBCIĄŻEŃ

Te wyniki spowodowały konieczność zbadania, jak zmieniają się obciążenia, gdy zmienimy tablicę standardową. Przeprowadzono więc drugie badanie, przyjmując za tablicę standardową średnią z dwóch tablic trwania życia: 1960 - 1961 oraz 1970 -

Tabela 1

Wielkość obciążeń $r_x = l_x - \hat{l}_x$ dla wybranych tablic trwania życia w przypadku dwóch różnych tablic standardowych (I) i (II); Polska, mężczyźni

Wiek w latach	Tablica trwania życia z okresu							
	1965 - 1966		1971		1973 - 1975		1976	
	I	II	I	II	I	II	I	II
1	-179	-56	1	120	20	129	-7	105
5	-226	-59	-26	137	29	178	40	192
10	-182	-47	-19	114	37	161	71	198
15	-148	-26	-13	110	44	159	87	205
20	-42	23	-2	68	46	112	78	147
25	55	31	-12	-30	30	17	56	44
30	146	53	7	-83	19	-62	122	41
35	252	79	34	-143	-13	-176	21	-146
40	343	30	43	-292	-76	-389	-159	-485
45	508	2	19	-546	-154	-691	-335	-900
50	699	7	54	-693	-372	-1094	-716	-1484
55	818	222	126	-607	-566	-1292	-993	-1773
60	479	311	117	-130	-447	-714	-769	-1065
65	-620	-48	-10	630	239	852	410	1044
70	-2312	-624	-344	1597	1292	3243	2208	4213
$\frac{1}{15} \sum_x r_x $	467	111	55	353	226	618	405	803

Oznaczenia: I — tablica trwania życia 1970 - 1972 przyjęta za tablicę standardową; II — średnia z tablic trwania życia 1960 - 1961 oraz 1970 - 1972 przyjęta za tablicę standardową.

Uwaga: $l_0 = 100\ 000$.

1972. Okazało się, że przy takiej tablicy standardowej bezwzględne wartości obciążeń $|r_x|$ są przeciętnie mniejsze dla lat sprzed 1970 r. (z wyjątkiem tablicy z okresu 1931 - 1932), natomiast są przeciętnie większe dla lat późniejszych. Ilustrują to dane tabeli 1 dla Polski w odniesieniu do mężczyzn. Systematyczny układ znaków obciążeń r_x nie uległ zmianie. Wobec tego, że celem badania jest poszukiwanie możliwości wykorzystania tablic modelowych do prognozowania przyszłej umieralności, za tablicę standardową należy przyjąć możliwie późną tablicę trwania życia, jednak oddaloną o kilka lat od ostatniej istniejącej tablicy, w celu lepszej możliwości oszacowania trendu parametrów $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

V. ZASTOSOWANIE TABLIC MODELOWYCH DO PROGNOZOWANIA UMIERALNOŚCI

Wobec istniejącego obciążenia modelowych tablic trwania życia ich zastosowanie należy ograniczyć do prognozowania krótkookresowego. Metoda prognozowania przyszłej umieralności może wówczas być sformułowana następująco:

a) za tablicę standardową przyjmujemy tablicę trwania życia z możliwie późnego okresu, ale różniącego się o kilka lat od okresu ostatniej istniejącej tablicy trwania życia;

b) konstruujemy tablice modelowe dla kilku istniejących tablic trwania życia; liczba tych tablic nie powinna być zbyt mała;

c) analizując oceny $\hat{\alpha}_t$, $\hat{\beta}_t$ skonstruowanych tablic modelowych, jako funkcje czasu t szacujemy trendy $\alpha_t=f(t)$, $\beta_t=g(t)$;

d) surowa tablica dla okresu prognozy t_0 zostaje skonstruowana zgodnie z wzorem (1), przyjmując $\alpha_{t_0}=f(t_0)$ oraz $\beta_{t_0}=g(t_0)$; oznaczymy uzyskane prawdopodobieństwa dożycia wieku x dla tej prognozy jako $\hat{l}_{t_0}(x)$ oraz niech $\hat{l}_{t_0,x}=\hat{l}_{t_0}(x)$ l_0 , za l_0 możemy przyjąć np. 100 000;

e) ponieważ uzyskane zgodnie z punktem d) liczby $l_{t_0,x}$ są ocenami obciążonymi, należy oszacować wielkości obciążeń; w tym celu dla każdego wieku x oddzielnie, $x=1, 5, 10, 15, \dots, 70$ lat oraz dla poszczególnych tablic modelowych analizujemy wartości $r_{t,x}=l_{t,x}-\hat{l}_{t,x}$, szacując ich trendy $\hat{r}_{t,x}=f(t|x)$;

f) kładąc $\hat{r}_{t_0,x}=f(t_0|x)$, dodajemy te wartości do $\hat{l}_{t_0,x}$ otrzymując $\tilde{l}_{t_0,x}=\hat{l}_{t_0,x}+\hat{r}_{t_0,x}$, czyli liczby dożywających wieku x jako prognozę tablicy trwania życia. Stosując odpowiednie przekształcenia obliczamy pozostałe funkcje biometryczne tablicy.

VI. PROGNOZA TABLICY TRWANIA ŻYCIA DLA 1980 r.

Powyższą metodę prognozowania tablicy trwania życia zastosowano próbnie dla 1980 r. w podziale według płci dla całego kraju oraz osobno dla miast i dla wsi. Za tablicę standardową przyjęto tablicę trwania życia 1970 - 1972; ponadto uwzględniono istniejące tablice trwania życia dla poszczególnych lat kalendarzowych okresu 1970 - 1976. Prognozę wykonano w dwóch wariantach. W pierwszym z nich

wzięto pod uwagę dane dla roczników wieku $x=1, 5, 10, 15, \dots, 85$ lat. W drugim wariancie wyłączono pewne z tych roczników, uwzględniając jedynie dane dla wieku $x=5, 10, 15, \dots, 70$ lat; pozwoliło to na zmniejszenie wpływu najmłodszych i najstarszych roczników wieku przy ocenie parametrów α i β zgodnie z wzorem (2). Uzyskane wyniki prognoz obu wariantów różnią się, jak to pokazują dane tabel 2 i 3.

Tabela 2

Przeciętne dalsze trwanie życia e_x według dwóch wariantów prognozy na 1980 r.

Wyszczególnienie	Przeciętna liczba lat dalszego trwania życia dla osób w wieku lat					
	0	1	15	30	45	60
Mężczyźni, ogółem						
Wariant I	67,73	68,27	54,62	40,47	27,28	16,09
Wariant II	67,66	68,24	54,59	40,44	27,24	16,03
Różnica	0,07	0,03	0,03	0,04	0,04	0,06
Mężczyźni, miasta						
Wariant I	67,40	67,89	54,21	39,79	26,48	15,55
Wariant II	67,51	68,04	54,35	39,93	26,61	15,64
Różnica	-0,11	-0,15	-0,14	-0,14	-0,13	-0,09
Mężczyźni, wieś						
Wariant I	67,87	68,42	54,80	41,18	28,26	16,70
Wariant II	67,77	68,36	54,74	41,11	28,17	16,60
Różnica	0,10	0,06	0,06	0,07	0,09	0,10
Kobiety, ogółem						
Wariant I	75,67	75,97	62,26	47,57	33,24	20,06
Wariant II	75,18	75,46	61,75	47,07	32,74	19,60
Różnica	0,49	0,51	0,51	0,50	0,50	0,46
Kobiety, miasta						
Wariant I	75,48	75,80	62,02	47,26	32,89	19,96
Wariant II	74,98	75,29	61,51	46,75	32,39	19,51
Różnica	0,50	0,51	0,51	0,51	0,50	0,45
Kobiety, wieś						
Wariant I	75,84	76,11	62,48	47,93	33,68	20,17
Wariant II	75,41	75,65	62,02	47,47	33,22	19,74
Różnica	0,43	0,46	0,46	0,46	0,46	0,43

Na podstawie tabeli 2 stwierdzamy, że różnice w przeciętnym dalszym trwaniu życia dla mężczyzn są stosunkowo nieznaczne, przy czym są one ujemne jedynie w przypadku miast, kiedy wariant I prognozy daje niższe przeciętne trwanie życia niż wariant II prognozy; jest przeciwnie zarówno w przypadku całego kraju „ogółem”, jak i na wsi. Znacznie większe systematyczne różnice, rzędu pół roku, występują dla kobiet, kiedy wariant I prognozy daje z reguły wyższe przeciętne trwanie życia niż wariant II prognozy. Dane tabeli 3 potwierdzają wnioski z tabeli 2: prawdopodobieństwa zgonu dla mężczyzn w obu wariantach mało się różnią, z wyjątkiem starszych lat wieku; są one najczęściej wyższe w wariancie II niż w wariancie I.

Tabela 3

Prawdopodobieństwo zgonu $10^5 nq_x$ mierzone w stutysięcznych według dwóch wariantów prognozy na 1980^a r.

Wyszczególnienie	Wiek osoby w latach					
	0	1	5	25	45	65
Mężczyźni, ogółem						
Wariant I	2230	249	141	681	4136	17 031
Wariant II	2276	250	143	677	4120	17 218
Różnica	-46	-1	-2	4	16	-187
Mężczyźni, miasta						
Wariant I	2167	231	156	472	4513	18 511
Wariant II	2228	232	153	467	4453	18 308
Różnica	-61	-1	3	5	60	203
Mężczyźni, wieś						
Wariant I	2243	276	127	1209	3639	15 465
Wariant II	2289	276	130	1204	3629	15 717
Różnica	-46	0	-3	5	10	-252
Kobiety, ogółem						
Wariant I	1701	162	156	217	1414	9 089
Wariant II	1678	167	160	222	1464	9 724
Różnica	23	-5	-4	-5	-50	-635
Kobiety, miasta						
Wariant I	1727	61	169	171	1550	9 516
Wariant II	1713	61	172	176	1603	10 193
Różnica	14	0	-3	-5	-53	-677
Kobiety, wieś						
Wariant I	1651	269	157	327	1223	8 534
Wariant II	1620	273	159	334	1259	9 067
Różnica	31	-4	-2	-7	-36	-533

^a $n=1$ dla $x=0$, $n=4$ dla $x=5$, $n=5$ dla pozostałych lat.

Dla kobiet jedynie prawdopodobieństwa zgonu noworodka są wyższe w wariantcie I niż w wariantcie II. Ponieważ w obu wariantach wyniki prognoz są raczej zbyt optymistyczne, w tabeli 4 prezentujemy dane wariantu II prognozy dla Polski jako bardziej trafnej; dane tabeli ograniczono do trzech wybranych funkcji biometrycznych: a) liczba l_x dożywających wieku x lat dla $x=0, 1, 5, \dots, 85$; b) prawdopodobieństwo zgonu nq_x osoby x -letniej w ciągu okresu $[x, x+n]$ przy czym $n=1$ dla noworodka ($x=0$), $n=4$ dla $x=1$, $n=5$ dla $x=5, 10, \dots, 80$ oraz $n=20$ dla $x=85$; c) przeciętne dalsze trwanie życia e_x dla osoby x -letniej.

Pewną ocenę trafności prognozy tablicy trwania życia na 1980 r. może dać porównanie wielkości jej niektórych parametrów z wielkościami tych parametrów w poprzednich tablicach trwania życia. W związku z tym w tabeli 5 zestawiono dane o przeciętnym dalszym trwaniu życia e_x w latach 1970, 1973 i 1976 oraz według prognozy (wariantu II).

Tabela 4

Prognoza tablicy trwania życia 1980 dla Polski (wariant II)

Wiek x lat	Mężczyźni			Kobiety		
	liczba doży- wających wieku x	prawdopodo- bieństwo zgonu w okresie $[x, x+n)$ ^a	przeciętne dalsze trwa- nie życia	liczba doży- wających wieku x	prawdopodo- bieństwo zgonu w okresie $[x, x+n)$ ^a	przeciętne dalsze trwa- nie życia
	l_x	${}_nq_x$	e_x	l_x	${}_nq_x$	e_x
0	100 000	0,02276	67,66	100 000	0,01678	75,18
1	97 724	0,00250	68,24	98 322	0,00167	75,46
5	97 480	0,00143	64,40	98 158	0,00160	71,59
10	97 341	0,00163	59,49	98 001	0,00089	66,70
15	97 182	0,00433	54,59	97 914	0,00151	61,75
20	96 761	0,00705	49,81	97 766	0,00207	56,84
25	96 079	0,00677	45,15	97 564	0,00222	51,96
30	95 429	0,01209	40,44	97 347	0,00340	47,07
35	94 275	0,01782	35,90	97 016	0,00548	42,22
40	92 595	0,02483	31,50	96 484	0,00882	37,43
45	90 296	0,04120	27,24	95 633	0,01464	32,74
50	86 576	0,05711	23,29	94 233	0,02223	28,19
55	81 632	0,08059	19,55	92 138	0,03792	23,77
60	75 053	0,11411	16,03	88 644	0,05609	19,60
65	66 489	0,17218	12,75	83 672	0,09724	15,61
70	55 041	0,26918	9,86	75 536	0,17711	12,00
75	40 225	0,36654	7,55	62 158	0,27634	9,01
80	25 481	0,54158	5,48	44 981	0,48814	6,46
85	11 681	1	4,23	23 024	1	5,27

^a $n=1$ dla $x=0$, $n=4$ dla $x=1$, $n=5$ dla $x=5$, 10, ..., 80 $n=20$ dla $x=85$.

Gdy porównamy dane tabeli 5 dla mężczyzn „ogółem”, liczby prognozy nie nasuwają zastrzeżeń. Jednak w miastach i na wsi przeciętne trwanie życia noworodka wydają się zbyt wysokie dla 1980 r. Dla kobiet, zarówno w całym kraju „ogółem”, jak i w miastach oraz na wsi otrzymane z prognozy liczby wydają się również zbyt wysokie w porównaniu z danymi z lat przeszłych. Dalsze wnioski co do trafności prognozy wyciągniemy porównując prawdopodobieństwo zgonu w przedziale czasu $[x, x+n)$. W tabeli 6 przedstawiono dla wybranych roczników wieku x wielokrotności $10^5 {}_nq_x$ prawdopodobieństw dla lat 1970, 1973, 1976 oraz dla prognozy na 1980 r. Dane tab. 6 pokazują, że prawdopodobieństwa zgonu noworodka dla obu płci wypadły na podstawie prognozy zbyt niskie. Taki sam wniosek nasuwa się w przypadku umieralności dzieci w wieku 1-4 lat, chłopców w wieku 5 - 9 lat oraz dziewcząt w tym wieku, z wyjątkiem miast. Prawdopodobieństwa zgonu ${}_5q_{25}$, z wyjątkiem wsi, wydają się zbyt niskie według prognozy.

*

Ogólnie, można sądzić, że skonstruowana na podstawie modelu Brass tablica trwania życia 1980 r. w obu wariantach okazała się zbyt optymistyczna. Przyczyną

Tabela 5

Przeciętne dalsze trwanie życia e_x według tablic trwania życia 1970, 1973, 1976
oraz prognozy na 1980 r.

Wyszczególnienie	Przeciętna liczba lat dalszego trwania życia dla osób w wieku lat					
	0	1	15	30	45	60
Mężczyźni, ogółem						
1970	66,62	68,20	54,81	40,87	27,47	15,68
1973	67,15	68,20	54,75	40,82	27,47	15,76
1976	66,92	67,78	54,27	40,30	27,10	15,69
1980	67,66	68,24	54,59	40,44	27,24	16,03
Mężczyźni, miasta						
1970	66,22	67,68	54,24	40,25	26,88	15,36
1973	66,59	67,60	54,10	40,06	26,67	15,26
1976	66,60	67,39	53,82	39,65	26,35	15,17
1980	67,51	68,04	54,35	39,93	26,61	15,64
Mężczyźni, wieś						
1970	67,02	68,70	55,36	41,46	28,02	15,95
1973	67,68	68,77	55,38	41,57	28,27	16,20
1976	67,12	68,06	54,61	40,97	27,92	16,20
1980	67,77	68,36	54,74	41,11	28,17	16,60
Kobiety, ogółem						
1970	73,33	74,52	61,01	46,45	32,28	19,23
1973	74,30	74,95	61,40	46,82	32,61	19,52
1976	74,55	75,11	61,50	46,89	32,68	19,62
1980	75,18	75,46	61,75	47,07	32,74	19,60
Kobiety, miasta						
1970	73,41	74,49	60,94	46,38	32,22	19,32
1973	74,18	74,78	61,19	46,61	32,42	19,52
1976	74,49	75,02	61,36	46,71	32,49	19,61
1980	74,98	75,29	61,51	46,75	32,39	19,51
Kobiety, wieś						
1970	73,29	74,57	61,10	46,53	32,34	19,15
1973	74,45	75,16	61,66	47,06	32,83	19,53
1976	74,58	75,18	61,63	47,09	32,91	19,63
1980	75,41	75,65	62,02	47,47	33,22	19,74

Źródło: Dla lat 1970, 1973, 1976 — dane GUS.

takiego wyniku może być: a) nie dość dobra prognoza wielkości parametrów α i β modelowej tablicy trwania życia 1980 r.; b) mało precyzyjna prognoza obciążeń $r_x = l_x - l_x$. Rzecz jasna, modelowa tablica trwania życia jest jedynie pewnym przybliżeniem rzeczywistości, być może — z uwagi na małą liczbę parametrów modelu (1) — przybliżenie to nie jest wystarczające dla celów predykcji. Dalsze badania powinny pokazać, czy rozszerzenie modelu Brass'a na większą liczbę parametrów niż dwa nie pozwoli na zastosowanie zmodyfikowanych modelowych tablic trwania życia do celów prognozowania umieralności.

Tabela 6

Prawdopodobieństwa zgonu $10^5 \cdot {}_nq_x$ mierzone w stutysięcznych w latach 1970, 1973, 1976 w porównaniu z prognozą na 1980 r. ^a

Wiek (x)	Mężczyźni				Kobiety			
	1970	1973	1976	1980	1970	1973	1976	1980
Ogółem								
0	3 742	2 969	2 713	2 276	2 902	2 183	2 056	1 678
1	466	408	357	250	372	324	263	167
5	264	251	224	143	184	174	178	160
25	947	929	866	677	328	318	289	222
45	3 160	3 362	3 823	4 120	1 651	1 567	1 561	1 464
65	18 665	18 229	18 354	17 218	10 308	9 728	8 755	9 724
Miasta								
0	3 591	2 932	2 621	2 228	2 755	2 111	2 010	1 713
1	413	332	288	232	333	303	204	61
5	243	235	215	153	180	149	164	172
25	958	815	687	467	333	312	262	176
45	3 469	3 312	4 138	4 453	1 753	1 734	1 704	1 603
65	19 791	19 803	19 438	18 308	10 609	10 172	10 118	10 193
Wieś								
0	3 864	3 003	2 814	2 289	3 022	2 250	2 107	1 620
1	509	477	432	276	404	343	326	273
5	281	264	233	130	187	196	191	159
25	935	1 078	1 197	1 204	322	326	347	334
45	2 814	2 938	3 399	3 629	1 537	1 364	1 373	1 259
65	17 775	16 905	17 092	15 717	10 016	9 265	9 347	9 067

^a $n=1$ dla $x=0$, $n=4$ dla $x=1$, $n=5$ dla pozostałych lat.

Źródło: Dla lat 1970, 1973, 1976 — dane GUS.

EXAMINATION OF FORECASTING PROPERTIES OF BRASS TYPE MODEL LIFE TABLES

Summary

Model life tables can be generated according to the hypothesis of W. Brass by acceptance of an adequate table as standard one and by using the formula (1). The possibility was then examined of using such tables for mortality forecasting. Tables generating a system, by which the tables are generated, depends upon two parameters α and β , interpretation of which has been described. Model tables closeness has been examined on the ground of existing life tables for Poland by town and villages when (I) the life table 1970 - 1972, or (II) an average of the life tables 1960-1961 and 1970 - 1972 were taken as a standard. Differences in real values l_x and in values $\hat{l}_x$ from model tables occurred. An example has been given for men in Table 1, and results $r_x = l_x - \hat{l}_x$ have been shown. The results r_x occur systematically and runs are created by their signs. Forecasting that is based on model tables delivers biased forecasts. It can be significantly diminished by taking into account the biases estimated from the past data. Such a forecast has been done experimentally in two variants for the year 1980. In the variant I in estimation of parameters α and β data for age-groups $x=1, 5, 10, 15, \dots, 85$ years have been taken into

account, and for the variant II data for the years $x = 1, 75, 80, 85$ have been omitted. Differences in expectation of life at age x , e_x have been presented in Table 2, and in Table 3 — death probability ${}_nq_x$ within the interval $(x, x+n)$ for both forecasts variants. Comparisons lead to the conclusion that both variants are too optimistic, and the projection obtained from variant II is relatively more relevant. The data for the last one are presented in Table 4. Expectation of life at age x , e_x and death probability have been compared in Tables 5 and 6, for the years 1970, 1973, 1976 and the projection 1980, respectively. The necessity of the Brass model extension to more than two parameters is stated in the conclusion. Further studies will shown, whether proper modifications lead to more realistic mortality projection.