

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Fizyki

Michał Berent

Rezonans wielofotonowy w układach trójpoziomowych

Praca doktorska

napisana pod kierunkiem

prof. dr. hab. Ryszarda Parzyńskiego



Poznań 2012

*Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi
Ryszardowi Parzyńskiemu
za okazaną życzliwość
oraz wskazówki udzielone mi podczas pisania pracy*

*Pracę dedykuję mojej
ukochanej żonie*

Abstract

The multiphoton excitation in three-level atomic and molecular systems has been studied. For these systems, with levels in either the Λ or Γ configurations, an analytic formalism has been developed. This formalism was successfully applied to describe the evolution of probabilities of excitation and the structure of the spectrum of scattered light for a broad range of frequency-intensity parameters.

For the three-level system in the Λ configuration the coherent and full spectra of scattered light were calculated. A significant difference between the two was found. Furthermore, a dramatic change in the spectrum under the two-photon resonance was explained.

For the three-level systems in the Γ configuration the analytic formulas for the multiphoton Rabi frequencies and Stark shifts of the excited states were derived as well as the condition for resonance frequency. The possibility of complete population inversion in the laser field of moderate intensity was studied. It was also shown that, contrary to the common belief, the spectrum from the three-level system with nearly or completely degenerate excited states does not have pure harmonic structure but rather each harmonic consists of a pair of spectral lines separated by double the multiphoton Rabi frequency.

The analytic formalism was numerically tested for various physically accessible laser intensities. The satisfactory qualitative and quantitative agreements between the analytic and numerical results were found.

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Podstawy rachunkowe	6
2.1	Amplitudy prawdopodobieństw obsadzeń	6
2.2	Układ trójpoziomowy w konfiguracji Λ lub Γ	7
2.3	Ewolucja obsadzeń oraz widmo światła rozproszonego	9
3	Trójpoziomowy układ Λ ze słabą depopulacją stanu początkowego	11
3.1	Założenia niskiej częstości i słabego pola	11
3.2	Widmo koherentne	12
3.2.1	Język zmiennych ilorazowych	12
3.2.2	Przybliżone rozwiązanie równań na zmienne ilorazowe	13
3.2.3	Granica niskich częstości dla impulsu prostokątnego	15
3.2.4	Znaczenie obwiedni impulsu	18
3.2.5	Średni wyindukowany dipol	22
3.2.6	Reprezentatywne widma koherentne	25
3.3	Pełne widmo rozpraszania	32
3.4	Jakość formalizmu analitycznego	35
3.5	Podsumowanie	36
4	Trójpoziomowy układ Λ z silną depopulacją stanu początkowego	39
4.1	Nieperturbacyjny formalizm analityczny	39
4.1.1	Adiabatyczna eliminacja poziomu $ 2\rangle$	39
4.1.2	Parzystofotonowe oscylacje Rabiego	41
4.1.3	Rozwinięcie floquetowskie	43

4.1.4	Zmodyfikowane równanie Riccatiego	44
4.2	Widmo koherentnego rozpraszania	46
4.3	Reprezentatywne wyniki	47
4.4	Podsumowanie	52
5	Trójpoziomowy układ Γ	54
5.1	Transformacje równań wyjściowych	55
5.2	Przypadek pełnej degeneracji poziomów wzbudzonych ($\omega_{32} = 0$)	57
5.2.1	Dwa rodzaje ewolucji: wolna i szybka	57
5.2.2	Wielofotonowe przybliżenie wirującej fali	59
5.2.3	Uogólnione wielofotonowe przybliżenie wirującej fali	64
5.3	Przypadek niepełnej degeneracji poziomów wzbudzonych ($\omega_{32} \neq 0$)	68
5.4	Wyniki	70
5.4.1	Pełna degeneracja poziomów wzbudzonych	70
5.4.2	Niepełna degeneracja poziomów wzbudzonych	74
5.5	Podsumowanie	76
6	Podsumowanie	77

Rozdział 1

Wstęp

Model dwupoziomowy jest fundamentem optyki kwantowej układów z silnym jednofotonowym wzbudzeniem (rezonansem) prowadzącym do całkowitej inwersji obsadzeń [1]. Model ten był również wykorzystywany w badaniach, między innymi, rozchodzenia się ultrakrótkich impulsów w układach atomowych i półprzewodnikach [2, 3], generacji wysokich harmonicznym przez pojedyncze atomy [4, 5], molekuly [6, 7, 8] i ciała stałe [9], czy też rezonansów optycznych w molekułach charakteryzowanych niezerową różnicą pomiędzy trwałymi elektrycznymi momentami dipolowymi stanów zaangażowanych w przejście [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Ten model nie zawsze jest jednak fizyczny, zwłaszcza w obliczu faktu, iż zdecydowana większość atomów i cząsteczek ma taką strukturę energetyczną, że różnica energii pomiędzy pierwszym stanem wzbudzonym a stanem podstawowym wielokrotnie przewyższa energię pojedynczego fotonu z zakresu optycznego. Możliwe optyczne wzbudzenia w tych układach mają więc z natury swej charakter wielofotonowy. Ze względu na małe wielofotonowe stałe sprzężeń, zalecane są silne pola laserowe by, ewentualnie, znacznie obsadzać stan wzbudzony w procesie wielofotonowym, w trakcie którego sumaryczna energia pochłoniętych fotonów pokrywa się z odstępem w skali energii pomiędzy kombinującymi stanami. Silne pola powodują jednak wypływanie obsadzenia z układu dwóch stanów (podstawowego i pierwszego wzbudzonego) do wyższych stanów dyskretnych, ale przede wszystkim do kontinuum. Jonizacja wielofotonowa staje się w takim przypadku efektem dominującym nad wzbudzeniem wielofotonowym i przybliżenie dwupoziomowe staje się nieadekwatne [16]. W związku z tym, badanie wzbudzeń

wielofotonowych w układach efektywnie dwupoziomowych należy ograniczyć wyłącznie do słabych pól laserowych, które nie zapewniają osiągnięcia pełnej inwersji obsadzeń.

Okazuje się, że od tego ograniczenia na pole wolne są niektóre układy trójpoziomowe. W ostatnich latach, w tego typu układach zaobserwowano całą gamę nowych interesujących zjawisk, takich jak wymuszona światłem przezroczystość [17], modyfikacja współczynnika załamania [18], czy spowolnienie lub zatrzymanie światła [19, 20]. Ponadto, w ramach układów trójpoziomowych gwałtownie rozwinęły się badania dotyczące koherentnej kontroli i manipulowania układami kwantowymi [21]. W dziedzinie wielofotonowych wzbudzeń w układach trójpoziomowych istotne znaczenie miały pionierskie prace Avetissiana i współpracowników [22, 23, 24]. Obszarem zainteresowania tych autorów były wzbudzenia w układach z trwałym momentem dipolowym wzmacniającym siłę wielofotonowego sprzężenia między poziomami.

Również w klasie układów bez trwałego momentu dipolowego możemy znaleźć obiekty efektywnie trójpoziomowe, w których wielofotonowa stała sprzężenia jest znacznie wzmocniona, a efekt dodatkowych stanów dyskretnych i ciągłych pomijalny dla rozsądnie wybranych natężeń pól laserowych. Istotne jest to, że tak wybrane pola dają gwarancję osiągnięcia pełnej inwersji obsadzeń w wyniku wielofotonowego wzbudzenia. Grupę tych efektywnie trójpoziomowych układów tworzą, np., parzystoładunkowe, homojądrowe jony molekularne typu A_2^{4+} , gdzie w miejsce A należy podstawić, np. azot, tlen albo jod. Niedawne numeryczne obliczenia Gibsona [25, 26] dla jednowymiarowego modelu tych jonów pokazały, że ich stan podstawowy, o dobrze określonej parzystości, jest znacznie oddalony (ponad 18 eV) od pierwszej pary stanów wzbudzonych charakteryzowanych przeciwnymi parzystościami. Pierwsza para stanów wzbudzonych jest prawie energetycznie zdegenerowana, z rozseparowaniem znacznie mniejszym od energii fotonu optycznego i zależnym od odległości międzyjądrowej (rozseparowanie 0.45 eV przy odległości 3.5 a.u.). Ponadto, element macierzowy elektrycznego momentu dipolowego pomiędzy tą parą stanów wzbudzonych jest ponad 6 razy większy niż podobny element macierzowy pomiędzy stanem podstawowym i niższym ze stanów wzbudzonych. Oznacza to, że w obecności pola lasera para stanów wzbudzonych jest znacznie silniej sprzężona między sobą niż ze stanem podstawowym. Gibson pokazał na drodze numerycznej, że przy natężeniu rzędu 10^{15} W/cm² można osiągnąć pełną inwersję obsadzeń

w tych jonach w procesie 11-fotonowego lub 12-fotonowego wzbudzenia. Ważne jest to, że aż do tej intensywności żadne inne stany jonu (ani wyższe wzbudzone, ani z obszaru kontinuum) nie były obsadzone. Podobne zachowanie jest spodziewane także w atomie wodoru, wielofotonowo wzbudzonym z jego stanu podstawowego 1S do najniższej, całkowicie zdegenerowanej, silnie sprzężonej pary stanów wzbudzonych 2P, 2S oddalonych od 1S o 10.2 eV.

W Rozdziałach 3, 4 i 5 przedstawiono własne wyniki badań wielofotonowych wzbudzeń w układach efektywnie trójpoziomowych. Rozdział 3 zawiera perturbacyjny opis wzbudzeń wielofotonowych w układzie w konfiguracji lambda (Λ) przy warunku słabej depopulacji poziomu początkowego. Rozdział 4 jest rozwinięciem poprzedniego opisu na nieperturbacyjny przypadek silnej dwufotonowej depopulacji poziomu podstawowego w układzie Λ . Z kolei w Rozdziale 5 zamieszczono opis wielofotonowych wzbudzeń w układach trójpoziomowych z parą silnie sprzężonych, całkowicie lub częściowo zdegenerowanych poziomów wzbudzonych. Wszystkie opisy mają, wprawdzie przybliżony, ale za to całkowicie analityczny charakter. Jakość tych analitycznych opisów została oceniona przez porównanie wyników jakie one dają z wynikami całkowicie numerycznych rozwiązań.

Rozdział 2

Podstawy rachunkowe

2.1 Amplitudy prawdopodobieństw obsadzeń

Zgodnie z postulatami mechaniki kwantowej, opis stanu układu dany jest funkcją falową $|\Psi(t)\rangle$, której ewolucją rządzi równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

W problemie oddziaływań, pełny hamiltonian $\hat{H}(t)$ jest sumą części opisującej swobodny układ (np. atom lub cząsteczkę), \hat{H}_0 , oraz części opisującej oddziaływanie układu z polem zewnętrznym, $\hat{V}(t)$, tzn.

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t). \quad (2.2)$$

Układ swobodny spełnia tzw. niezależne od czasu równanie Schrödingera

$$\hat{H}_0 |i\rangle = E_i |i\rangle, \quad (2.3)$$

z którego otrzymujemy zbiór energii własnych $\{E_i\}$ oraz stanów własnych $\{|i\rangle\}$. Wykorzystując stany własne hamiltonianu \hat{H}_0 oraz odwołując się do liniowości mechaniki kwantowej, rozwiązanie pełnego, zależnego od czasu równania Schrödingera (2.1) dla układu z oddziaływaniem przedstawiamy w postaci superpozycji

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^N b_i(t) |i\rangle. \quad (2.4)$$

Po podstawieniu rozwinięcia (2.4) do równania (2.1) otrzymujemy

$$i\hbar \sum_{i=1}^N \frac{\partial b_i(t)}{\partial t} |i\rangle = \sum_{i=1}^N b_i(t) \hat{H}(t) |i\rangle. \quad (2.5)$$

Przemnażając lewostronnie powyższe równanie przez $\langle j|$ oraz korzystając z ortonormalności zbioru wektorów $\{|i\rangle\}$, tj. $\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$, znajdujemy równania dla amplitud prawdopodobieństw obsadzeń stanów:

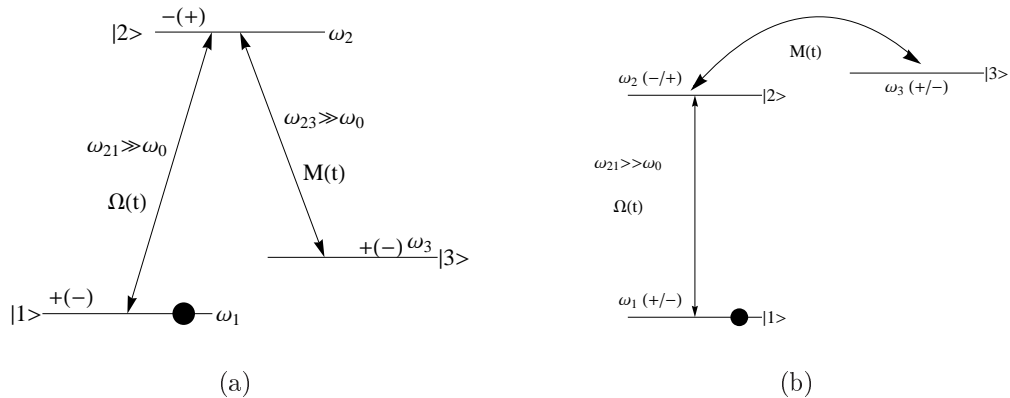
$$i\hbar \frac{db_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \langle j|\hat{H}(t)|i\rangle b_i(t). \quad (2.6)$$

W ramach tej pracy elementy macierzy hamiltonianu $H_{ji}(t) = \langle j|\hat{H}(t)|i\rangle$ mają postać:

$$H_{ji}(t) = \begin{cases} E_i = \hbar\omega_i & \text{jeżeli } i = j \\ V_{ji}(t) & \text{jeżeli } i \neq j \end{cases}, \quad (2.7)$$

a ponadto $V_{ji} = V_{ij}^*$.

2.2 Układ trójpoziomowy w konfiguracji Λ lub Γ



Rysunek 2.1: Schemat poziomów energetycznych układu trójpoziomowego w konfiguracji Λ (a) lub Γ (b). Na rysunku $\Omega(t) = \mu_{12}E(t)/\hbar$ oraz $M(t) = \mu_{23}E(t)/\hbar$ mają znaczenie zależnych od czasu częstości Rabięgo, $\hbar\omega_j$ są energiami poszczególnych stanów, zaś znaki $+/-$ odnoszą się do parzystości stanów. Kropką oznaczono początkowo obsadzony stan układu.

Tak obserwacje doświadczalne, jak analiza teoretyczna, pokazują, że w większości sytuacji w oddziaływaniu układów atomowych i molekularnych z zewnętrznym polem bierze, efektywnie, udział jedynie skończony zbiór stanów widma. Pozwala to na uproszczenie analizy dynamiki realnego układu. W niniejszej pracy rozważony będzie przypadek układów efektywnie trójpoziomowych w polu laserowym (Rysunek 2.1). Poziomy układu, charakteryzujące się określoną parzystością, będą tworzyć konfigurację

lambda (Λ) lub gamma (Γ). Dla układów z Rysunku 2.1 równanie (2.6) sprowadza się do trzech sprzężonych równań na amplitudy prawdopodobieństw obsadzeń reprezentatywnych poziomów:

$$i\dot{b}_1 = \omega_1 b_1 - \Omega_{12}(t)b_2, \quad (2.8a)$$

$$i\dot{b}_2 = \omega_2 b_2 - \Omega_{12}^*(t)b_1 - \Omega_{23}(t)b_3, \quad (2.8b)$$

$$i\dot{b}_3 = \omega_3 b_3 - \Omega_{23}^*(t)b_2, \quad (2.8c)$$

gdzie $\omega_i = \frac{E_i}{\hbar}$ jest częstością własną stanu atomowego, zaś $\Omega_{ij}(t) = \frac{V_{ij}(t)}{\hbar}$ oznacza zależną od czasu chwilową częstość Rabięgo. Dla wyraźnego rozróżnienia, wprowadzamy oznaczenia $\Omega_{12}(t) = \Omega(t) = \Omega_R f(t) \cos(\omega_0 t)$ oraz $\Omega_{23}(t) = M(t) = M_R f(t) \cos(\omega_0 t)$. W powyższych wyrażeniach Ω_R i M_R mają znaczenie standardowych, niezależnych od czasu częstości Rabięgo, tzn. $\Omega_R = \mu_{12} E_0 / \hbar$ i $M_R = \mu_{23} E_0 / \hbar$, gdzie $\mu_{jk} = \langle j | \hat{\mu} | k \rangle$ jest elementem macierzowym momentu dipolowego. Z wyrażen na standardowe częstości oraz z ogólnej postaci zależnych od czasu częstości Rabięgo $\Omega_{jk}(t)$ wynika, że oddziaływanie pola laserowego z układem zostało wzięte w przybliżeniu elektryczno-dipolowym, tj. założono hamiltonian oddziaływania w postaci

$$\hat{V}(t) = -\hat{\mu} E(t). \quad (2.9)$$

W powyższym wyrażeniu $\hat{\mu} = ez$ jest składową operatora elektrycznego momentu dipolowego układu atomowego lub molekularnego w kierunku z , wyznaczonym przez liniową polaryzację pola laserowego. Pole to traktujemy jako monochromatyczne i impulsowe, czyli natężenie składowej elektrycznej opisujemy wzorem

$$E(t) = E_0 f(t) \cos(\omega_0 t). \quad (2.10)$$

E_0 jest tutaj amplitudą natężenia pola elektrycznego, $\omega_0 \ll \omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ centralną częstością impulsu laserowego, zaś $f(t)$ gładką obwiednią impulsu, unormowaną do jedności w miejscu, gdzie $f(t)$ ma maksimum, a także spełniającą warunek

$$f(t_0) = f(t_p) = 0, \quad (2.11)$$

gdzie t_0 i t_p to, odpowiednio, chwile włączenia i wyłączenia pola. Rozwiązując układ równań (2.8), przy oddziaływaniu danym przez (2.9), uzyskujemy pełną informację o postaci funkcji falowej, a więc dynamice układu w polu lasera.

2.3 Ewolucja obsadzeń oraz widmo światła rozproszonego

Dysponując funkcją falową, możemy wyznaczyć, na przykład, chwilowe prawdopodobieństwo znalezienia układu w wybranym stanie i :

$$P_i(t) = \langle i | \Psi(t) \rangle = |b_i(t)|^2, \quad \text{gdzie } i = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Możemy także wyznaczyć widmo promieniowania rozproszonego przez układ. W ogólności widmo promieniowania rozproszonego określamy jako skończoną w czasie transformatę Fouriera z dwuczaskowej funkcji korelacji operatora momentu dipolowego [27]:

$$S(\omega) = \omega^4 \int_0^{t_p} dt \int_0^{t_p} \langle d(t)d(t') \rangle e^{-i\omega(t-t')} dt', \quad (2.13)$$

gdzie t_p oznacza czas trwania impulsu, zaś symbol $\langle \cdot \rangle$ jest średnią kwantowo-mechaniczną, liczoną w stanie początkowym, w jakim znajdował się układ. W tej pracy wykorzystujemy definicję widma zaproponowaną przez Eberly'ego i współpracowników [27], którzy pokazali, że w granicy oddziaływania układów kwantowych z polem klasycznym ich definicja jest równoważna ściślejszej definicji (2.13). Przyjmując $|1\rangle$ za stan początkowy układu oraz wykorzystując zupełność wybranego układu stanów atomowych $|i\rangle$, tj. fakt, że $\sum_{k=1}^3 |k\rangle \langle k| = \hat{1}$, mamy

$$S(\omega) = \omega^4 \int_0^{t_p} dt \int_0^{t_p} \langle 1 | d(t) \sum_{k=1}^3 |k\rangle \langle k| d(t') |1\rangle e^{-i\omega(t-t')} dt'. \quad (2.14)$$

Uporządkowanie tego wyrażenia oraz wykorzystanie operatora ewolucji przy przejściu od obrazu Heisenberga do obrazu Schrödingera, prowadzi do widma zdefiniowanego przez grupę Eberly'ego:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \omega^4 \sum_{k=1}^3 \left| \int_0^{t_p} dt e^{i\omega t} \langle \Psi_k(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle \right|^2 \\ &= \omega^4 \left| \int_0^{t_p} dt e^{i\omega t} \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle \right|^2 \\ &+ \omega^4 \sum_{k \neq 1}^3 \left| \int_0^{t_p} dt e^{i\omega t} \langle \Psi_k(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie $|\Psi_k(t)\rangle$ oznacza funkcję falową obliczoną przy założeniu, że układ ewoluuje ze stanu początkowego $|k\rangle$, tzn. $|\Psi_k(0)\rangle = |k\rangle$. Pierwszy wyraz w (2.15) stanowi tzw. część koherentną widma, wynikająca ze średniego indukowanego momentu dipolowego

$d(t) = \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle$, zaś drugi wyraz - część niekoherentną, związaną z kwantowymi fluktuacjami dipola. Korzystając z zasady superpozycji, widmo promieniowania (2.15) możemy wyrazić poprzez amplitudy b_i . W tym celu wystarczy zauważyć, że

$$\langle \Psi_j(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b_{kj}^* b_{l1} \mu_{kl}, \quad (2.16a)$$

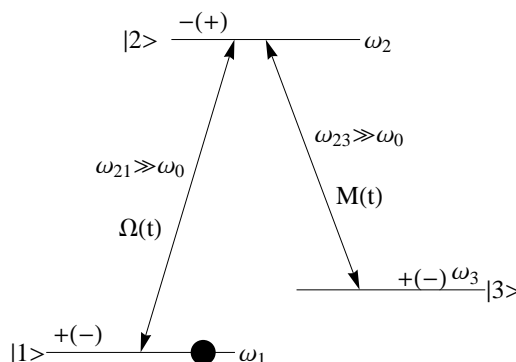
$$= \mu_{12}(b_{1j}^* b_{21} + b_{2j}^* b_{11}) + \mu_{23}(b_{2j}^* b_{31} + b_{3j}^* b_{21}), \quad (2.16b)$$

gdzie skorzystano z warunków niezerowania elementu macierzowego dipola μ_{jk} . We wprowadzonym indeksowaniu amplitud b_{ij} , indeks lewy oznacza numer amplitudy prawdopodobieństwa, natomiast prawy informuje przy jakim warunku początkowym amplituda ta została wyznaczona; konkretnie - przez b_{ij} rozumiemy amplitudę obsadzenia i -tego stanu w chwili t przy założeniu, że początkowo układ znajdował się w j -tym stanie.

Rozdział 3

Trójpoziomowy układ Λ ze słabą depopulacją stanu początkowego

3.1 Założenia niskiej częstości i słabego pola



Rysunek 3.1: Schemat poziomów energetycznych układu trójpoziomowego w konfiguracji Λ . Na Rysunku $\Omega(t) = \mu_{12}E(t)/\hbar$ oraz $M(t) = \mu_{23}E(t)/\hbar$ mają znaczenie zależnych od czasu częstości Rabięgo, $\hbar\omega_j$ są energiami poszczególnych stanów, zaś znaki $+/-$ odnoszą się do parzystości stanów. Kropką oznaczono początkowo obsadzony stan układu.

Rozważania w tym i następnych rozdziałach będą przeprowadzone przy założeniu niskiej częstości ω_0 promieniowania wzbudzającego. Fizycznie oznacza to, że energia $\hbar\omega_0$ fotonu tego promieniowania jest dużo mniejsza od odległości, w skali energii, pomiędzy początkowo obsadzonym stanem układu i dipolowo sprzężonym z nim najbliższym stanem wzbudzonym. Rysunek 3.1 pokazuje schemat układu z poziomami w konfigu-

racji Λ , spełniający ten warunek. Jeśli, np., początkowo obsadzony jest stan 1 układu, to wymóg niskiej częstości jest rozumiany jako $\omega_0 \ll \omega_{21}$. W polu takiej częstości wzbudzenia odbywać się mogą wyłącznie jako wynik przejść wielofotonowych.

Dodatkową specyfiką tego rozdziału są także założenia o słabości pola i niezbyt długich, choć wielocyklowych, impulsach. Przy tych założeniach rozsądne wydaje się przypuszczenie, że w dowolnej chwili oddziaływania obsadzenie układu znajduje się głównie w jego stanie początkowym, a więc depopulacja tego stanu jest niewielka. Wstępną analizę tego przypadku zawarliśmy w artykule [28], a w niniejszym rozdziale poszerzamy wyniki tam zawarte.

Rozdział ten jest podzielony na dwie główne części, w pierwszej z nich będzie obliczona i zbadana koherentna część widma promieniowania rozproszonego przez trójpoziomowiec, a w drugiej pełne widmo tego promieniowania, będące sumą części koherentnej i niekoherentnej. Pokazana będzie rola trzeciego poziomu, przez porównanie z widmem dwupoziomowca, a także rola parzystofotonowych rezonansów pomiędzy stanami 1 i 3 oraz rola kształtu impulsu wzbudzającego. Przez porównanie przybliżonych wyników analitycznych ze ścisłymi numerycznymi, oceniona zostanie jakość zastosowanych przybliżeń i jakość całej analitycznej procedury obliczania widm.

3.2 Widmo koherentne

3.2.1 Język zmiennych ilorazowych

Zgodnie z definicją (2.13) widma promieniowania rozproszonego, część koherentną tego widma określa średni dipol $d(t) = \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle$, gdzie $|\Psi_1(t)\rangle$ podlega warunkowi początkowemu $|\Psi_1(0)\rangle = |1\rangle$ ze stanem $|1\rangle$ jako stanem początkowym układu. Wobec (2.16), średni dipol udaje się wyrazić poprzez dwie zmienne ilorazowe $r = b_{21}/b_{11}$ i $\rho = b_{31}/b_{11}$, mianowicie

$$\begin{aligned}
 d(t) &= \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle \\
 &= 2\mu_{12} \operatorname{Re}(b_{11}^* b_{21}) + 2\mu_{23} \operatorname{Re}(b_{21}^* b_{31}) \\
 &= 2\mu_{12} |b_{11}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{b_{21}}{b_{11}}\right) + 2\mu_{23} |b_{21}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{b_{31}}{b_{11}} \cdot \frac{b_{11}}{b_{21}}\right) \\
 &= 2\mu_{12} |b_{11}|^2 \operatorname{Re}(r) + 2\mu_{23} |b_{21}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\rho}{r}\right)
 \end{aligned}$$

$$= 2\mu_{12} \frac{\operatorname{Re}(r)}{1 + |r|^2 + |\rho|^2} + 2\mu_{23} \frac{\operatorname{Re}(r^*\rho)}{1 + |r|^2 + |\rho|^2}. \quad (3.1)$$

Ostateczną wersję tego wyrażenia otrzymano wykorzystując warunek normalizacji prawdopodobieństwa $|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + |b_{31}|^2 = 1$. Z niego i z definicji zmiennych ilorazowych wynikają obsadzenia poszczególnych stanów wyrażone poprzez r i ρ :

$$|b_{11}|^2 = \frac{1}{1 + |r|^2 + |\rho|^2}, \quad (3.2a)$$

$$|b_{21}|^2 = \frac{|r|^2}{1 + |r|^2 + |\rho|^2}, \quad (3.2b)$$

$$|b_{31}|^2 = \frac{|\rho|^2}{1 + |r|^2 + |\rho|^2}. \quad (3.2c)$$

Równania na tak zdefiniowane zmienne ilorazowe wynikają z pierwotnego układu (2.8), w którym w miejsce jednoindeksowych amplitud b_i należy wprowadzić amplitudy dwuindeksowe b_{ij} z j wskazującym stan początkowo obsadzony. Przyjmując dodatkowo $\omega_1 = 0$, układ trzech równań (2.8) sprowadzamy do układu dla pary zmiennych ilorazowych, mianowicie

$$i\dot{r} = (r^2 - 1)\Omega(t) + \omega_{21}r - M(t)\rho, \quad (3.3a)$$

$$i\dot{\rho} = (\omega_{31} + r\Omega(t))\rho - M(t)r. \quad (3.3b)$$

W granicy $M(t) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ układ przechodzi w równanie Riccatiego dla dwupoziomowca, analizowane wcześniej przez Plucińską i Parzyńskiego [29]. Złożoność układu (3.3) sugeruje, że jego analityczne rozwiązania mogą być dostępne tylko w szczególnych przypadkach. Jednym z nich jest przypadek słabej depopulacji stanu początkowego.

3.2.2 Przybliżone rozwiązanie równań na zmienne ilorazowe

Założony warunek słabej depopulacji stanu początkowego oznacza równoczesne spełnienie dwóch nierówności: $|r| \ll 1$ i $|\rho| \ll 1$. Ponadto, $|M(t)| \ll \omega_{21}$ dla większości pól. W tej sytuacji pomijalnie mały staje się człon $M(t)\rho$ w równaniu (3.3a), co prowadzi do odsprzęgnięcia tego równania od drugiego równania układu (3.3) na zmienne ilorazowe r i ρ . Odsprzęgnięte równanie na samą zmienną r jest nietrywialnym równaniem typu Riccatiego dla dwupoziomowca, wcześniej badanym w kilku pracach [29]. Wykorzystując metodykę pracy Plucińskiej i Parzyńskiego [30], przybliżone rozwiązanie tego równania otrzymuje się w sposób perturbacyjny.

W przybliżeniu zerowego rzędu, równanie to linearyzuje się przez zaniedbanie członu proporcjonalnego do r^2 , otrzymując

$$\dot{r}_0 + i\omega_{21}r_0 = i\Omega(t). \quad (3.4)$$

Chcąc otrzymać nieco lepsze rozwiązanie, uwzględniające w przybliżeniu nieliniowość równania Riccatiego, kładziemy w nim $r = r_0 + r_1$ i następnie zaniedbujemy czynnik zależny kwadratowo od r_1 . To zaniedbanie jest uzasadnione, gdy $|r_1| \ll 2|r_0|$ i oznacza uwzględnienie wyrazu kwadratowego w liniowym przybliżeniu. Korzystając dodatkowo z rozwiązania zerowego rzędu, znajdujemy równanie na r_1 :

$$\dot{r}_1 + i(\omega_{21} + 2r_0\Omega(t))r_1 = -ir_0^2\Omega(t). \quad (3.5)$$

Przybliżone rozwiązanie dla $r = r_0 + r_1$ pozwala przejść do przypadku trójpoziomowca i podać uproszczoną wersję równania na ρ :

$$\dot{\rho} + i(\omega_{31} + (r_0 + r_1)\Omega(t))\rho = iM(t)(r_0 + r_1). \quad (3.6)$$

Powyższe równania (3.4)-(3.6) mają postać niejednorodnego liniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu o ogólnej postaci $\frac{dU}{dt} + P(t)U = Q(t)$, ze znanym formalnym rozwiązaniem

$$U(t) = \frac{1}{z(t)} \left(\int_{t_0}^t Q(t')z(t')dt' + U(t_0) \right), \quad (3.7)$$

gdzie $z(t) = \int_{t_0}^t P(t')dt'$, a $U(t_0)$ jest wartością U w chwili początkowej. W związku z tym:

$$r_0 = i e^{-i\omega_{21}t} \int_0^t \Omega(t') e^{i\omega_{21}t'} dt', \quad (3.8)$$

$$r_1 = -i e^{-i(\omega_{21}t + 2A_0(t))} \int_0^t r_0^2(t') \Omega(t') e^{i(\omega_{21}t' + 2A_0(t'))} dt', \quad (3.9)$$

$$\rho = i e^{-i(\omega_{31}t + A_0(t) + A_1(t))} \int_0^t (r_0(t') + r_1(t')) M(t') e^{i(\omega_{31}t' + A_0(t') + A_1(t'))} dt', \quad (3.10)$$

gdzie

$$A_0(t) = \int_0^t r_0(t') \Omega(t') dt' \quad \text{i} \quad A_1(t) = \int_0^t r_1(t') \Omega(t') dt', \quad (3.11)$$

Powyższe formalne rozwiązania sugerują, że r_0 , A_0 i A_1 będą głównymi wielkościami decydującymi o kształcie koherentnego widma promieniowania rozproszonego. Sugestia ta wynika z faktu, że A_0 i A_1 figurują w wykładniku funkcji $e^{ix(t)}$. Ze względu na oscylacyjny charakter A_0 i A_1 , spodziewamy się, że do funkcji $e^{ix(t)}$ będzie można zastosować rozwinięcie Fouriera-Bessela.

3.2.3 Granica niskich częstotliwości dla impulsu prostokątnego

Obecnie zajmiemy się znalezieniem analitycznej postaci r_0 oraz A_0 w granicy niskich częstotliwości, tj., kiedy częstota oscylacji pola elektrycznego wiązki laserowej jest znacznie mniejsza od częstoty przejścia pomiędzy poziomami o przeciwnej parzystości ($\omega_0 \ll \omega_{21}$).

W ogólnym przypadku gładkiej obwiedni impulsu laserowego, $f(t)$, całki w wyrażeniach (3.8) i (3.11) nie dają się obliczyć ściśle. Dla ułatwienia obliczeń przyjmujemy więc najpierw prostokątną obwiednię, $f(t) = 1$. Należy zaznaczyć, że dla pól impulsowych, założenie to jest silnie niefizyczne, gdyż każdy rzeczywisty impuls charakteryzuje się pewnym czasem narastania i zanikania. Mając to na uwadze, uzyskane tu formuły będą następnie zweryfikowane pod kątem występowania w nich artefaktów, wynikających ze wspomnianego przybliżenia.

Całkowanie wzoru (3.8), dla impulsu o prostokątnej obwiedni, prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} r_0(t) &= ie^{-i\omega_{21}t} \int_0^t \Omega_R \cos(\omega_0 t') e^{i\omega_{21}t'} dt' \\ &= \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\omega_{21}t} \left(\frac{e^{i\Delta^+ t} - 1}{\Delta^+} + \frac{e^{i\Delta t} - 1}{\Delta} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie $\Delta^+ = \omega_{21} + \omega_0$ i $\Delta = \omega_{21} - \omega_0$. Zauważmy, że w interesującej nas granicy niskich częstotliwości możemy przyjąć

$$\Delta^+ \simeq \Delta \simeq \omega_{21}, \quad (3.13)$$

wobec czego formułę (3.12) upraszczamy do postaci:

$$r_0(t) \stackrel{\omega_{21} \gg \omega_0}{\simeq} \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} (\cos(\omega_0 t) - e^{-i\omega_{21}t}). \quad (3.14)$$

Otrzymane wyrażenie wstawiamy do wzoru (3.11) na A_0 , uzyskując w ten sposób

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \int_0^t \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} (\cos(\omega_0 t') - e^{-i\omega_{21}t'}) \Omega_R \cos(\omega_0 t') dt' \\ &= \frac{\Omega_R^2}{4\omega_{21}} \int_0^t (e^{i\omega_0 t'} + e^{-i\omega_0 t'} - 2e^{-i\omega_{21}t'}) \cdot (e^{i\omega_0 t'} + e^{-i\omega_0 t'}) dt' \\ &= \frac{\Omega_R^2}{4\Delta^+ \Delta} \left\{ 2\omega_{21} \left[t + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} - \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta} - \frac{\sin(\Delta^+ t)}{\Delta^+} \right] \right. \\ &\quad \left. + i \left[\frac{(\Delta^+)^2 + \Delta^2 + \Delta\Delta^+}{\Delta\Delta^+} - 2\omega_{21} \left(\frac{\cos(\Delta t)}{\Delta} + \frac{\cos(\Delta^+ t)}{\Delta^+} \right) + \cos(2\omega_0 t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Powyższa, skomplikowana formuła, po uwzględnieniu przybliżenia (3.13) i odrzuceniu

małych wyrazów, skutkuje wyrażeniem:

$$A_0(t) \stackrel{\omega_{21} \gg \omega_0}{\approx} \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} \left(t + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right). \quad (3.16)$$

Zgodnie z opracowaną procedurą obliczeń, wykorzystując wzory (3.14), (3.16) oraz (3.9), wyznaczamy r_1 . Struktura wyrażenia $A_0(t)$, występującego w czynniku $e^{iqA_0(t)}$ we wzorach (3.9) oraz (3.10), pozwala na dokonanie wspomnianego wcześniej rozwinięcia Fouriera-Bessela:

$$e^{iqA_0(t)} = e^{iq\frac{\Delta_S}{2}t} e^{ix_q \sin(2\omega_0 t)} = e^{iq\frac{\Delta_S}{2}t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_q) e^{i2m\omega_0 t}, \quad (3.17)$$

gdzie $J_m(x_q)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju, $\Delta_S = \frac{\Omega_R^2}{\omega_{21}}$ dynamicznym przesunięciem Starka poziomu wzbudzonego, zaś $x_q = q\frac{\Omega_R^2}{4\omega_{21}\omega_0} = q\frac{\Delta_S}{2\omega_0}$. Na mocy (3.14), (3.16) oraz (3.17) mamy

$$\begin{aligned} r_1(t) &= -ie^{-i(\omega_{21}+\Delta_S)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_2) e^{-i2m\omega_0 t} \\ &\cdot \int_0^t \left(\frac{\Omega_R}{2\omega_{21}} \right)^2 \left(e^{i\omega_0 t'} + e^{-i\omega_0 t'} - 2e^{-i\omega_{21} t'} \right)^2 \\ &\cdot \frac{\Omega_R}{2} \left(e^{i\omega_0 t'} + e^{-i\omega_0 t'} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x_2) e^{i(\omega_{21}+2n\omega_0+\Delta_S)t'} dt' \\ &= -i \frac{\Omega_R^3}{8\omega_{21}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_2) e^{-i(\omega_{21}+2m\omega_0+\Delta_S)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x_2) \\ &\cdot \int_0^t \left\{ e^{i(\omega_{21}+\overbrace{(2n+3)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n-1})t'} + e^{i(\omega_{21}+\overbrace{(2n-1)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n+1})t'} + 2e^{i(\omega_{21}+(2n+1)\omega_0+\Delta_S)t'} \right. \\ &\quad - 4e^{i(\overbrace{2(n+1)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n-1})t'} - 4e^{i(2n\omega_0+\Delta_S)t'} + 4e^{i(-\omega_{21}+(2n+1)\omega_0+\Delta_S)t'} \\ &\quad + e^{i(\omega_{21}+(2n+1)\omega_0+\Delta_S)t'} + e^{i(\omega_{21}+\overbrace{(2n-3)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n+2})t'} + 2e^{i(\omega_{21}+\overbrace{(2n-1)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n+1})t'} \\ &\quad \left. - 4e^{i(2n\omega_0+\Delta_S)t'} - 4e^{i(\overbrace{2(n-1)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n+1})t'} + 4e^{i(-\omega_{21}+\overbrace{(2n-1)\omega_0+\Delta_S}^{n \rightarrow n+1})t'} \right\} dt'. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Przesuwamy następnie indeksy sumowania tak, jak to zaznaczono powyżej. Pozwala to na zebranie wyrazów podobnych, tzn. oscylujących z tymi samymi częstościami, i uproszczenie formuły:

$$r_1(t) = -i \frac{\Omega_R^3}{8\omega_{21}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_2) e^{-i(\omega_{21}+2m\omega_0+\Delta_S)t}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t \left\{ [J_{n-1}(x_2) + 3J_n(x_2) + 3J_{n+1}(x_2) + J_{n+2}(x_2)] e^{i(\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S)t'} \right. \\
& - 4[J_{n-1}(x_2) + 2J_n(x_2) + J_{n+1}(x_2)] e^{i(2n\omega_0 + \Delta_S)t'} \\
& \left. + 4[J_n(x_2) + J_{n+1}(x_2)] e^{i(-\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S)t'} \right\}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Po wycałkowaniu i uporządkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned}
r_1(t) = & -\frac{\Omega_R^3}{8\omega_{21}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(x_2) \left\{ \alpha_n e^{i((2(n-m)+1)\omega_0)t} + \beta_n e^{i(2(n-m)\omega_0 - \omega_{21})t} \right. \\
& \left. + \gamma_n e^{i(-2\omega_{21} + (2(n-m)+1)\omega_0 + \Delta_S)t} - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) e^{-i(\omega_{21} + 2m\omega_0 + \Delta_S)t} \right\}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

gdzie wprowadzono zależne od częstości i natężenia pola współczynniki

$$\alpha_n = \frac{J_{n-1}(x_2) + 3J_n(x_2) + 3J_{n+1}(x_2) + J_{n+2}(x_2)}{\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S}, \quad (3.21a)$$

$$\beta_n = -4 \frac{J_{n-1}(x_2) + 2J_n(x_2) + J_{n+1}(x_2)}{2n\omega_0 + \Delta_S}, \quad (3.21b)$$

$$\gamma_n = 4 \frac{J_n(x_2) + J_{n+1}(x_2)}{-\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S}. \quad (3.21c)$$

W ostatnim kroku procedury, obliczamy ρ wykorzystując uzyskane wcześniej r . Ponieważ, z założenia, poprawka r_1 jest znacznie mniejsza od rozwiązania r_0 zerowego rzędu ($|r_1| \ll 2|r_0|$), zatem w formalnym rozwiązaniu (3.10) dla zmiennej ilorazowej ρ , ignorujemy człony zawierające r_1 . Po podstawieniu wyrażenia (3.14) do równania (3.10) otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned}
\rho(t) = & i e^{-i(\omega_{31} + \frac{\Delta_S}{2})t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_1) e^{-i2m\omega_0 t} \\
& \cdot \int_0^t \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} (\cos(\omega_0 t') - e^{-i\omega_{21} t'}) M_R \cos(\omega_0 t') e^{i(\omega_{31} + \frac{\Delta_S}{2})t'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x_1) e^{i2\omega_0 t'} dt' \\
= & i \frac{M_R \Omega_R}{4\omega_{21}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_1) e^{-i(\omega_{31} + 2m\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x_1) \\
& \cdot \int_0^t \left\{ e^{i(\omega_{31} + 2(\overbrace{n+1}^{n \rightarrow n-1})\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} + e^{i(\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} - 2e^{i(-\omega_{23} + (2n+1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} \right. \\
& \left. + e^{i(\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} + e^{i(\omega_{31} + 2(\overbrace{n-1}^{n \rightarrow n+1})\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} - 2e^{i(-\omega_{23} + (2n-1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t'} \right\} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

W dalszej części dokonujemy wskazanego przesunięcia indeksów, uzyskując rozwiązanie w zwartej postaci

$$\rho(t) = \frac{M_R \Omega_R}{4\omega_{21}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(x_1) \left\{ \epsilon_n e^{i2(n-m)\omega_0 t} + \zeta_n e^{i(-\omega_{21} + (2(n-m)+1)\omega_0)t} \right.$$

$$-(\epsilon_n + \zeta_n)e^{-i(\omega_{31} + 2m\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t} \}, \quad (3.23)$$

gdzie

$$\epsilon_n = \frac{J_{n-1}(x_1) + 2J_n(x_1) + J_{n+1}(x_1)}{\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2}}, \quad (3.24a)$$

$$\zeta_n = -2 \frac{J_n(x_1) + J_{n+1}(x_1)}{-\omega_{23} + (2n+1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2}}. \quad (3.24b)$$

Podkreślmy w tym miejscu, że współczynniki α_n , γ_n , ϵ_n oraz ζ_n mają charakter rezonansowy, związany ze zmierzaniem ich mianowników do bardzo małych wartości w określonych sytuacjach ($\omega_{21} = \pm(2n+1)\omega_0$, $\omega_{31} = -2n\omega_0$, $\omega_{23} = (2n+1)\omega_0$). W tych sytuacjach sumy po indeksie n w równaniach (3.20) na r_1 i (3.23) na ρ mogą zostać zredukowane do wiodącego wyrazu rezonansowego.

3.2.4 Znaczenie obwiedni impulsu

Przypomnijmy, że wykonane obliczenia są obciążone wyborem prostokątnej obwiedni impulsu ($f(t) = 1$), wygodnej matematycznie, ale niefizycznej. W dalszej części przedstawimy przybliżone obliczenia analityczne zmiennych ilorazowych r oraz ρ dla realnego nieprostokątnego, gładkiego impulsu $f(t)$. Ponieważ czas trwania impulsu jest z założenia znacznie dłuższy od okresu oscylacji pola elektrycznego wiązki lasera, zatem funkcję kształtu obwiedni $f(t)$ możemy uznać za wolnozmienną w stosunku do tych oscylacji, tzn. że w czasie rzędu okresu oscylacji $f(t)$ zmienia się bardzo niewiele.

Wykorzystując ten fakt, postaramy się obliczyć całkę w wyrażeniu (3.8) na ogólną postać rozwiązania zerowego rzędu r_0 :

$$\begin{aligned} r_0(t) &= ie^{-i\omega_{21}t} \int_0^t \Omega(t') e^{i\omega_{21}t'} dt' \\ &= ie^{-i\omega_{21}t} \frac{\Omega_R}{2} \int_0^t f(t') \left(e^{i(\omega_{21} + \omega_0)t'} + e^{i(\omega_{21} - \omega_0)t'} \right) dt'. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Wykonując całkowanie przez części i pamiętając, że $f(t=0) = 0$, otrzymujemy:

$$\int_0^t f(t') e^{i(\omega_{21} \pm \omega_0)t'} = f(t) \frac{e^{i(\omega_{21} \pm \omega_0)t}}{i(\omega_{21} \pm \omega_0)} - \int_0^t f'(t') \frac{e^{i(\omega_{21} \pm \omega_0)t'}}{i(\omega_{21} \pm \omega_0)} dt'. \quad (3.26)$$

Chcąc uzyskać wynik bliższy rzeczywistości, przeanalizujemy dokładniej drugi wyraz. Ponieważ funkcja $f'(t)$ jest również wolnozmienna, wykonujemy ponownie całkowanie przez części i odrzucamy małą całkę zawierającą drugą pochodną funkcji kształtu im-

pulsu. W wyniku tej przybliżonej procedury całkowania otrzymujemy:

$$\int_0^t f(t') e^{i(\omega_{21} \pm \omega_0)t'} \simeq \frac{1}{i(\omega_{21} \pm \omega_0)} \left[\left(f(t) - \frac{f'(t)}{i(\omega_{21} \pm \omega_0)} \right) e^{i(\omega_{21} \pm \omega_0)t} + \frac{f'(0)}{i(\omega_{21} \pm \omega_0)} \right]. \quad (3.27)$$

Z tak oszacowanymi całkami, rozwiązanie na r_0 dla gładkiej obwiedni przybliżamy formułą

$$r_0(t) = \frac{\Omega_R}{2} \left[f(t) \left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{\Delta^+} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\Delta} \right) - i f'(0) \left(\frac{1}{(\Delta^+)^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right) e^{-i\omega_{21} t} \right], \quad (3.28)$$

która w granicy niskich częstotliwości przechodzi w wyrażenie:

$$r_0(t) \stackrel{\omega_{21} \gg \omega_0}{\simeq} \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} \left(f(t) \cos(\omega_0 t) - i \frac{f'(0)}{\omega_{21}} e^{-i\omega_{21} t} \right). \quad (3.29)$$

Porównując ze wzorem (3.14) dla impulsu prostokątnego, zauważamy dwie różnice: obecność funkcji $f(t)$ przed $\cos(\omega_0 t)$ i obecność czynnika $i \frac{f'(0)}{\omega_{21}}$ przed $e^{-i\omega_{21} t}$. Wobec wolnozmienności $f(t)$ czynnik $\frac{f'(0)}{\omega_{21}}$ jest dużo mniejszy od 1 i, w związku z tym, spodziewamy się zmniejszenia efektów związanych z obecnością członu proporcjonalnego do $e^{-i\omega_{21} t}$ w r_0 , gdy przechodzimy od impulsu prostokątnego (niefizycznego) do gładkiego (fizycznego).

Słuszność przybliżenia (3.29) przetestujemy przeprowadzając dokładną analizę dla przypadku prostej, z analitycznego punktu widzenia, obwiedni

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{t_p} t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{NT} t\right) \\ &= \sin(\Delta_l t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

gdzie $0 \leq t \leq t_p$ oraz

$$\Delta_l = \frac{\pi}{NT} = \frac{\omega_0}{2N}. \quad (3.31)$$

Tutaj N oznacza ilość cykli w impulsie o długości t_p , natomiast T - okres drgań pola elektrycznego. Podstawiając obwiednię (3.30) do ogólnego rozwiązania (3.8) dla r_0 otrzymujemy

$$\begin{aligned} r_0(t) &= \frac{\Omega_R}{4} e^{-i\omega_{21} t} \frac{1}{i} \left[\frac{e^{i(\omega_{21} + \omega_0 + \Delta_l)t} - 1}{\omega_{21} + \omega_0 + \Delta_l} - \frac{e^{i(\omega_{21} - \omega_0 - \Delta_l)t} - 1}{\omega_{21} - \omega_0 - \Delta_l} - \frac{e^{i(\omega_{21} + \omega_0 - \Delta_l)t} - 1}{\omega_{21} + \omega_0 - \Delta_l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i(\omega_{21} - \omega_0 + \Delta_l)t} - 1}{\omega_{21} - \omega_0 + \Delta_l} \right] \\ &= \frac{\Omega_R}{4i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 + \Delta_l)t}}{\omega_{21} + (\omega_0 + \Delta_l)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + \Delta_l)t}}{\omega_{21} - (\omega_0 + \Delta_l)} - \frac{e^{i(\omega_0 - \Delta_l)t}}{\omega_{21} + (\omega_0 - \Delta_l)} + \frac{e^{-i(\omega_0 - \Delta_l)t}}{\omega_{21} - (\omega_0 - \Delta_l)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2(\omega_0 + \Delta_l)}{\omega_{21}^2 - (\omega_0 + \Delta_l)^2} - \frac{2(\omega_0 - \Delta_l)}{\omega_{21}^2 - (\omega_0 - \Delta_l)^2} \right) e^{-i\omega_{21} t} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

W granicy niskich częstotliwości wyrażenie to przyjmuje przybliżoną postać

$$\begin{aligned}
r_0(t) &\stackrel{\omega_{21} \gg \omega_0}{\approx} \frac{\Omega_R}{4i} \left\{ \frac{1}{\omega_{21}} [(e^{i(\omega_0+\Delta_l)t} - e^{-i(\omega_0+\Delta_l)t}) - (e^{i(\omega_0-\Delta_l)t} - e^{-i(\omega_0-\Delta_l)t})] + 4 \frac{\Delta_l}{\omega_{21}^2} e^{-i\omega_{21}t} \right\} \\
&= \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} \left[\sin(\Delta_l t) \cos(\omega_0 t) - i \frac{\Delta_l}{\omega_{21}} e^{-i\omega_{21}t} \right] \\
&= \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} \left[f(t) \cos(\omega_0 t) - i \frac{\Delta_l}{\omega_{21}} e^{-i\omega_{21}t} \right]. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Ponieważ dla $f(t) = \sin(\Delta_l t)$ zachodzi $\Delta_l = f'(0)$, więc ostatnie wyrażenie jest identyczne ze wzorem (3.29). Ta identyczność wskazuje na dobrą jakość ciągu przybliżeń, które doprowadziły do ogólnego wyrażenia (3.29), obowiązującego dla dowolnej, gładkiej, wolnozmiennnej funkcji obwiedni impulsu $f(t)$.

Wobec tego, polegając na przybliżeniu (3.29), obliczamy A_0 zdefiniowane wzorem (3.11):

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= \int_0^t r_0(t') \Omega(t') dt' \\
&= \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} \left\{ \int_0^t f^2(t') dt' + \int_0^t f^2(t') \cos(2\omega_0 t') dt' \right. \\
&\quad \left. - 2i \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \left(\int_0^t f(t') e^{-i(\omega_{21}+\omega_0)t'} dt' + \int_0^t f(t') e^{-i(\omega_{21}-\omega_0)t'} dt' \right) \right\}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie w drugiej linii jest znacznie mniejsze niż wkład zapisany w pierwszej linii wzoru (3.34). W związku z tym, po wykonaniu całkowania przez części i pominięciu małych wyrazów otrzymujemy:

$$A_0(t) = \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} \left(\int_0^t f^2(t') dt' + f^2(t) \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right). \tag{3.35}$$

W porównaniu z formułą (3.16) dla prostokątnej obwiedni, w powyższym wyrażeniu mamy $f^2(t)$ w miejsce wcześniejszych jedynek. Stosując poprzednio wprowadzone oznaczenia (wzór (3.17)), możemy zapisać:

$$qA_0(t) = \frac{q}{2} \Delta_t + x_q f^2(t) \sin(2\omega_0 t), \tag{3.36}$$

gdzie $\Delta_t = \Delta_S \int_0^t f^2(t') dt'$, $\Delta_S = \frac{\Omega_R^2}{\omega_{21}}$, $x_q = q \frac{\Delta_S}{2\omega_0}$ i $q = 1, 2$.

Następnie, podstawiamy (3.36) oraz rozwiązanie zerowego rzędu (3.29) do ogólnego wyrażenia (3.9) na r_1 i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= -i \frac{\Omega_R^3}{8\omega_{21}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} J_m(x_2 f^2(t')) e^{-i[(\omega_{21}+2m\omega_0)t+\Delta_t]} \\
&\quad \int_0^t \{ f^3(t') [J_{n-1}(x_2 f^2(t')) + 3J_n(x_2 f^2(t')) \\
&\quad + 3J_{n+1}(x_2 f^2(t')) + J_{n+2}(x_2 f^2(t'))] e^{i[(\omega_{21}+(2n+1)\omega_0)t'+\Delta_t']} \} dt' \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4 \left(\frac{f'(0)}{\omega_{21}} \right)^2 f(t') [J_n(x_2 f^2(t')) + J_{n+1}(x_2 f^2(t'))] e^{i[(-\omega_{21} + (2n+1)\omega_0)t' + \Delta_{t'}]} \\
& - i4 \frac{f'(0)}{\omega_{21}} f^2(t') [J_{n-1}(x_2 f^2(t')) + 2J_n(x_2 f^2(t')) + J_{n+1}(x_2 f^2(t'))] e^{i[2n\omega_0 t' + \Delta_{t'}]} \Big\} dt'.
\end{aligned}$$

W wyrażeniu (3.37) są obecne trzy rodzaje całek:

$$I_1 = \int_0^t f^3(t') J_k(x_2 f^2(t')) e^{i([\omega_{21} + (2n+1)\omega_0]t' + \Delta_{t'})} dt', \quad (3.38)$$

$$I_2 = \int_0^t f^2(t') J_k(x_2 f^2(t')) e^{i(2n\omega_0 t' + \Delta_{t'})} dt', \quad (3.39)$$

$$I_3 = \int_0^t f(t') J_k(x_2 f^2(t')) e^{i[(-\omega_{21} + (2n+1)\omega_0]t' + \Delta_{t'})} dt', \quad (3.40)$$

gdzie zarówno $f(t)$ oraz $J_k(x_2 f^2(t))$ są wolnozmiennie. Wykorzystując fakt, że argument funkcji Bessela jest mały ($x_2 \ll 1$) oraz postępując analogicznie jak w analizie równania (3.27), tj. wykonując całkowanie przez części, a następnie pozostawiając tylko wyrazy wiodące oraz stałe, mamy

$$I_1 \simeq f^3(t) J_k(x_2 f^2(t)) \frac{e^{i(\alpha t + \Delta_t)}}{i(\alpha + \Delta_S f^2(t))}, \quad (3.41)$$

$$I_2 \simeq \begin{cases} f^2(t) J_k(x_2 f^2(t)) \frac{e^{i(\alpha t + \Delta_t)}}{i(\alpha + \Delta_S f^2(t))} & , \text{ jeżeli } k \neq 0 \\ \frac{1}{i\Delta_S} \left(J_0(x_2 f^2(t)) \exp \left[\Delta_S \int_0^t f^2(\tau) d\tau \right] - 1 \right) & , \text{ jeżeli } k = 0 \end{cases}, \quad (3.42)$$

$$I_3 \simeq f(t) J_k(x_2 f^2(t)) \frac{e^{i(\alpha t + \Delta_t)}}{i(\alpha + \Delta_S f^2(t))}. \quad (3.43)$$

Na tej podstawie rozwiązaniu (3.37) dla r_1 możemy nadać przybliżoną postać

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= -\frac{\Omega_R^3}{8\omega_{21}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_2 f^2(t)) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t) e^{i(2(n-m)+1)\omega_0 t} \right. \\
&+ \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(t) e^{i(-\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t} \\
&+ \left. \left(\frac{f'(0)}{\omega_{21}} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(t) e^{i(-2\omega_{21} + (2(n-m)+1)\omega_0)t} - \beta_0(0) \frac{f'(0)}{\omega_{21}} e^{-i(\omega_{21} + 2m\omega_0)t - i\Delta_t} \right\},
\end{aligned} \quad (3.44)$$

gdzie w analogii do (3.21) wprowadzone zostały współczynniki

$$\alpha_n(t) = f^3(t) \frac{J_{n-1}(x_2 f^2(t)) + 3J_n(x_2 f^2(t)) + 3J_{n+1}(x_2 f^2(t)) + J_{n+2}(x_2 f^2(t))}{\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S f^2(t)}, \quad (3.45a)$$

$$\beta_n(t) = -4f^2(t) \frac{J_{n-1}(x_2 f^2(t)) + 2J_n(x_2 f^2(t)) + J_{n+1}(x_2 f^2(t))}{2n\omega_0 + \Delta_S f^2(t)}, \quad (3.45b)$$

$$\gamma_n(t) = -4f(t) \frac{J_n(x_2 f^2(t)) + J_{n+1}(x_2 f^2(t))}{-\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta_S f^2(t)}, \quad (3.45c)$$

które są teraz zależne od czasu poprzez funkcję kształtu impulsu.

Obliczanie zmiennej ilorazowej ρ przebiega analogicznie. Ze wzorów (3.10) oraz (3.29) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \rho(t) = & i \frac{M_R \Omega_R}{4\omega_{21}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} J_m(x_1 f^2(t)) e^{-i[(\omega_{31} + 2m\omega_0)t + \frac{1}{2}\Delta t]} \\ & \cdot \int_0^t \left\{ f^2(t') [J_{n-1}(x_1 f^2(t')) + 2J_n(x_1 f^2(t')) + J_{n+1}(x_1 f^2(t'))] e^{i[(\omega_{31} + 2n\omega_0)t' + \frac{1}{2}\Delta t']} \right. \\ & \left. - i 2 \frac{f'(0)}{\omega_{21}} f(t') [J_n(x_1 f^2(t')) + J_{n+1}(x_1 f^2(t'))] e^{i[(\omega_{32} + (2n+1)\omega_0)t' + \frac{1}{2}\Delta t']} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Całkowanie wykonujemy zgodnie z formułami (3.41) oraz (3.43), otrzymując

$$\rho(t) = \frac{M_R \Omega_R}{4\omega_{21}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} J_m(x_1 f^2(t)) \left\{ \epsilon_n(t) e^{i2(n-m)\omega_0 t} + i \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \zeta_n(t) e^{i(-\omega_{21} + (2(n-m)+1)\omega_0)t} \right\}, \quad (3.47)$$

gdzie zależne od czasu współczynniki są postaci

$$\epsilon_n(t) = f^2(t) \frac{J_{n-1}(x_1 f^2(t)) + 2J_n(x_1 f^2(t)) + J_{n+1}(x_1 f^2(t))}{\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta_S f^2(t)}, \quad (3.48a)$$

$$\zeta_n(t) = -2f(t) \frac{J_n(x_1 f^2(t)) + J_{n+1}(x_1 f^2(t))}{\omega_{32} + (2n+1)\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta_S f^2(t)}. \quad (3.48b)$$

Podsumowując tę część, możemy stwierdzić, że przybliżone rozwiązania analityczne dla przypadków prostokątnej i gładkiej obwiedni dość znacznie się między sobą różnią. Dotyczy to zarówno przewidywań ilościowych (różnica w wielkości poszczególnych składników rozwiązania) jak i jakościowych (rozwiązanie dla przypadku gładkiej obwiedni nie przewiduje obecności składników o częstościach $\omega_{31} + (2n+1)\omega_0$ oraz $\omega_{23} + 2n\omega_0$. Spodziewamy się zatem, że efekty obwiedni impulsu ujawnią się, np., w widmie światła rozproszonego.

3.2.5 Średni wyindukowany dipol

W części 3.2.1 pokazaliśmy, jak średni dipol, określający część koherentną widma światła rozproszonego, wyraża się przez zmienne ilorazowe r i ρ , mianowicie

$$d(t) = 2\mu_{12} \frac{\text{Re}(r)}{1 + |r|^2 + |\rho|^2} + 2\mu_{23} \frac{\text{Re}(r^* \rho)}{1 + |r|^2 + |\rho|^2}. \quad (3.49)$$

W interesującym nas przypadku słabej depopulacji poziomu początkowego 1, tj. kiedy $|r|^2, |\rho|^2 \ll 1$, możemy zaniedbać wyrazy kwadratowe w mianowniku (3.49) i zastosować przybliżenie

$$d(t) \simeq 2\mu_{12} \text{Re}(r) + 2\mu_{23} \text{Re}(r^* \rho). \quad (3.50)$$

Widzimy wówczas, że pierwszy wyraz po prawej stronie można rozpatrywać jako wkład od układu efektywnie dwupoziomowego 1–2, natomiast drugi składnik stanowi modyfikację wynikającą z obecności trzeciego poziomu. Uwzględniając ponadto, że $r \simeq r_0 + r_1$, możemy w strukturze dipola (3.50) wyróżnić trzy części

$$d(t) = \underbrace{d_0(t) + d_1(t)}_{\text{układ dwupoziomowy}} + \underbrace{d_\rho(t)}_{\text{wkład od poziomu 3}}, \quad (3.51)$$

gdzie $d_0 = 2\mu_{12}\text{Re}(r_0)$, $d_1 = 2\mu_{12}\text{Re}(r_1)$ uwzględnia w przybliżeniu nieliniowość równania Riccatiego na r_0 , zaś $d_\rho = 2\mu_{23}\text{Re}(r^*\rho)$ jest wkładem od trzeciego poziomu.

W dalszej części obliczymy kolejne przyczynki do średniego dipola w rozważanych wcześniej przypadkach: impulsu prostokątnego o oscylacji typu cosinus oraz impulsu o gładkiej obwiedni $f(t)$ i tej samej oscylacji. Wykorzystując wzory (3.14) oraz (3.29) znajdujemy wkłady zerowego rzędu do średniego indukowanego dipola. Dla impulsu o prostokątnej obwiedni (górny indeks p) poszukiwane wyrażenie ma postać:

$$d_0^p(t) = 2\mu_{12} \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_{21} t)), \quad (3.52)$$

natomiast w przypadku gładkiej obwiedni (górny indeks f) mamy

$$d_0^f(t) = 2\mu_{12} \frac{\Omega_R}{\omega_{21}} \left(f(t) \cos(\omega_0 t) - \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \sin(\omega_{21} t) \right). \quad (3.53)$$

Z otrzymanych formuł wyciągamy wniosek, że gładka obwiednia, w porównaniu do prostokątnej, redukuje wkład oscylacji z częstością przejścia między poziomami 1 i 2. Redukcja ta jest znacząca, bo czynnik $\frac{f'(0)}{\omega_{21}}$ jest mały. Na przykład, dla modelowej obwiedni $f(t) = \sin(\Delta_l t)$, gdzie $\Delta_l = \frac{\omega_0}{2N}$ (wzór (3.31)), wynosi on $\frac{f'(0)}{\omega_{21}} = \frac{\Delta_l}{\omega_{21}} = \frac{\omega_0}{\omega_{21}} \cdot \frac{1}{2N}$, co dla zakładanych długich impulsów ($N \gg 1$) o niskiej częstości ($\frac{\omega_0}{\omega_{21}} \ll 1$) daje bardzo małą wartość.

Na podstawie wzoru (3.20) stwierdzamy dalej, że część dipola pochodząca od poprawki r_1 ma, dla prostokątnej obwiedni, postać:

$$\begin{aligned} d_1^p(t) = & -\mu_{12} \frac{\Omega_R^3}{4\omega_{21}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} J_m(x_2) \left\{ \alpha_n \cos(2(n-m) + 1)\omega_0 t \right. \\ & + \beta_n \cos(\omega_{21} - 2(n-m)\omega_0)t \\ & + \gamma_n \cos(2\omega_{21} - (2(n-m) + 1)\omega_0)t \\ & \left. - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) \cos(\omega_{21} + 2m\omega_0 + \Delta_S)t \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Natomiast w przypadku impulsu o gładkiej obwiedni, formuła (3.45) prowadzi do

$$\begin{aligned}
d_1^f(t) &= -\mu_{12} \frac{\Omega_R^3}{4\omega_{21}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_2 f^2(t)) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t) \cos[(2(n-m)+1)\omega_0 t] \right. \\
&+ \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \beta_n(t) \sin[(-\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t] \\
&+ \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \beta_0(0) \cos[(\omega_{21} + 2m\omega_0)t + \Delta_t] \\
&\left. + \left(\frac{f'(0)}{\omega_{21}} \right)^2 \gamma_n(t) \cos[(-2\omega_{21} + (2(n-m)+1)\omega_0)t] \right\}. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

W celu znalezienia przyczynku $d_\rho(t) = 2\mu_{23}\text{Re}(r^*\rho)$ do dipola, niezbędne jest by wpięrcw obliczyć iloczyn $r^*\rho$. Ponieważ $|r_1| \ll 2|r_0|$, zatem rozsądnym założeniem jest przybliżenie r przez przyczynkę zerowego rzędu r_0 . Stąd, dla impulsu prostokątnego znajdujemy

$$\begin{aligned}
r^*\rho \simeq r_0^*\rho &= \frac{M_R \Omega_R^2}{8\omega_{21}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \left\{ (\epsilon_n J_m(x_1) + \epsilon_n J_{m-1}(x_1) - 2\zeta_n J_m(x_1)) e^{i(2(n-m)_1)\omega_0 t} \right. \\
&- 2\epsilon_n J_m(x_1) e^{i(\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t} \\
&+ \zeta_n (J_m(x_1) + J_{m+1}(x_1)) e^{i(-\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t} \\
&- (\epsilon_n + \zeta_n) (J_m(x_1) + J_{m+1}(x_1)) e^{-i(\omega_{31} + (2m+1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t} \\
&\left. + 2(\epsilon_n + \zeta_n) J_m(x_1) e^{-i(\omega_{32} + 2m\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t} \right\}. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Część rzeczywista ostatniego wyrażenia daje poszukiwany wkład do dipola, związany z obecnością trzeciego poziomu:

$$\begin{aligned}
d_\rho^p(t) &= \mu_{23} \frac{M_R \Omega_R^2}{4\omega_{21}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \left\{ P_{mn} \cos(2(n-m)+1)\omega_0 t \right. \\
&+ R_{mn} \cos(\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t + Q_{mn} \cos(-\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t \\
&+ S_{mn} \cos(\omega_{31} + (2m+1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t \\
&\left. + T_{mn} \cos(\omega_{32} + 2m\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2})t \right\}, \quad (3.57)
\end{aligned}$$

gdzie

$$P_{mn} = \epsilon_n J_m(x_1) + \epsilon_n J_{m-1}(x_1) - 2\zeta_n J_m(x_1), \quad (3.58a)$$

$$R_{mn} = -2\epsilon_n J_m(x_1), \quad (3.58b)$$

$$Q_{mn} = \zeta_n (J_m(x_1) + J_{m+1}(x_1)), \quad (3.58c)$$

$$S_{mn} = -(\epsilon_n + \zeta_n) (J_m(x_1) + J_{m+1}(x_1)), \quad (3.58d)$$

$$T_{mn} = 2(\epsilon_n + \zeta_n) J_m(x_1). \quad (3.58e)$$

Dla impulsu o gładkiej obwiedni, podobne postępowanie jak wyżej wiedzie do

$$\begin{aligned}
d_\rho^f &= \mu_{23} \frac{M_R \Omega_R^2}{4\omega_{21}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \{ P_{mn}(t) \cos[(2(n-m)+1)\omega_0 t] \\
&+ R_{mn}(t) \sin[(\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t] \\
&+ Q_{mn}(t) \sin[-\omega_{21} + 2(n-m)\omega_0)t] \} , \tag{3.59}
\end{aligned}$$

gdzie zależne od czasu współczynniki są postaci:

$$P_{mn}(t) = f(t) \epsilon_n(t) (J_m(x_1 f^2(t)) + J_{m+1}(x_1 f^2(t))) + 2\zeta_n(t) J_m(x_1 f^2(t)) \left(\frac{f'(0)}{\omega_{21}} \right)^2 , \tag{3.60a}$$

$$R_{mn}(t) = -2 \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \epsilon_n(t) J_m(x_1 f^2(t)) , \tag{3.60b}$$

$$Q_{mn}(t) = f(t) \frac{f'(0)}{\omega_{21}} \zeta_n(t) (J_m(x_1 f^2(t)) + J_{m+1}(x_1 f^2(t))) . \tag{3.60c}$$

Na podstawie rozwiązań dla prostokątnej obwiedni możemy stwierdzić, że dominującymi składnikami koherentnego widma promieniowania rozproszonego będą częstotliwości ω_0 oraz ω_{21} , a więc częstotliwość lasera oraz częstotliwość przejścia $1 \rightarrow 2$, gdzie $\omega_{21} \gg \omega_0$. Obok wymienionych częstotliwości, w widmie spodziewamy się również wyższych nieparzystych harmonicznym częstotliwości lasera, a także satelitów częstotliwości przejścia ω_{21} przesuniętych o parzystą wielokrotność ω_0 , tzn. $\omega_{21} \pm 2m\omega_0$, dalej częstotliwości przejścia w drugim ramieniu układu lambda, ω_{23} , oraz satelitów tej częstotliwości przesuniętych o parzystą wielokrotność ω_0 , a więc $\omega_{23} \pm 2m\omega_0$, i wreszcie częstotliwości przejścia wzbronionego ω_{31} przesuniętych o nieparzystą wielokrotność ω_0 , czyli $\omega_{31} \pm (2m+1)\omega_0$. Możliwe są również słabe satelity podwojonej częstotliwości przejścia ω_{21} przesunięte o nieparzystą wielokrotność ω_0 , czyli $2\omega_{21} \pm (2m+1)\omega_0$. Te przewidywania modyfikuje efekt gładkiej obwiedni. Uwzględnienie gładkiej obwiedni w analizie czasowej amplitud r i ρ prowadzi do wniosku, że w realistycznej sytuacji oddziaływania układu Λ z impulsem lasera o niskiej częstotliwości, składowa widmowa o częstotliwości ω_{21} , jak również jej satelity, będą znacząco osłabione (o czynnik rzędu $\frac{f'(0)}{\omega_{21}}$ lub jego drugą potęgę). W efekcie, w rzeczywistym widmie powinny dominować częstotliwość ω_0 oraz jej wyższe harmoniczne nieparzystego rzędu.

3.2.6 Reprezentatywne widma koherentne

W tej części, przewidywania wynikające z poprzednich rozważań analitycznych zostaną porównane z wynikami symulacji numerycznych. W tym celu, wykorzystując pro-

gram Mathematica, rozwiązano numerycznie wyjściowy układ równań na amplitudy b_{i1} (2.8) lub zmienne ilorazowe r, ρ (3.3). Numeryczna procedura wykorzystywała wbudowany algorytm rozwiązywania równań różniczkowych metodą Runge-Kutta czwartego rzędu. Z otrzymanych rozwiązań obliczono czasową zależność indukowanego dipola zgodnie ze wzorem (3.1). Następnie wykorzystano procedurę numerycznego obliczania transformaty Fouriera z wyrażenia na indukowany dipol, by ostatecznie uzyskać koherentną część widma promieniowania rozproszonego ($S_C(\omega)$).

Do symulacji numerycznych wybrano takie parametry natężeniowe i częstotściowe dostatecznie długiego (wielocyklowego) impulsu lasera, aby spełnione były warunki stosowalności przybliżeń niskiej częstotliwości i słabej depopulacji stanu początkowego. Warunki stosowalności tych przybliżeń to

$$\omega_0 \ll \omega_{21}, \omega_{23}, \quad (3.61a)$$

$$|\Omega_R| \ll \omega_{21}, \quad (3.61b)$$

$$|M_R| \ll \omega_{23}. \quad (3.61c)$$

Sporządzając stosowne wykresy widm, przyjęto następujące parametry natężeniowo-częstotściowe

$$\omega_{21}/\omega_0 = 13, \quad (3.62a)$$

$$\Omega_R/\omega_0 = \frac{\mu_{12}E_0}{\hbar\omega_0} = 0.5, \quad (3.62b)$$

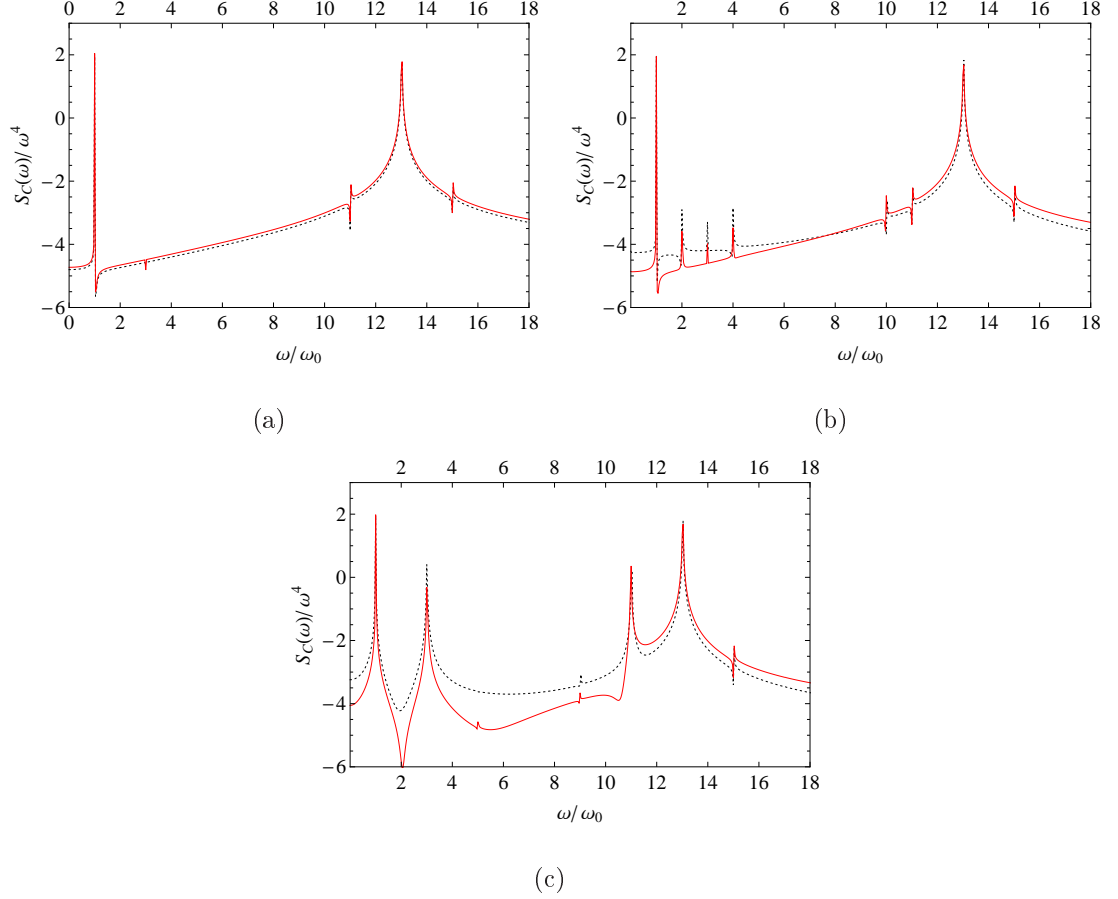
$$M_R/\omega_0 = \frac{\mu_{23}E_0}{\hbar\omega_0} = 0.3. \quad (3.62c)$$

Analizę numeryczną rozpoczniemy od pokazania jak wzbogaca się widmo koherentne promieniowania rozproszonego, gdy układ dwupoziomowy zostanie uzupełniony przez trzeci poziom. Na Rysunku 3.2 *a* przedstawiliśmy widmo koherentne z układu dwupoziomowego naświetlanego impulsem prostokątnym. Czerwona linia reprezentuje widmo otrzymane z wyrażeń analitycznych (3.52) i (3.54), które są analogiczne z uzyskanymi przez Plucińską [30]. Linia przerywaną oznaczono widmo otrzymane z numerycznego rozwiązania równania Riccatiego dla dwupoziomowca:

$$i\dot{r} = (r^2 - 1)\Omega(t) + \omega_{21}r. \quad (3.63)$$

Ponadto, w częściach *b* i *c* Rysunku 3.2 przedstawiono widma generowane przez układ trójpoziomowy w konfiguracji Λ w przypadkach, gdy $\omega_{31}/\omega_0 = 3$ oraz $\omega_{31}/\omega_0 = 2$, odpowiednio. Również w tych przypadkach kolorem czerwonym oznaczono widma ana-

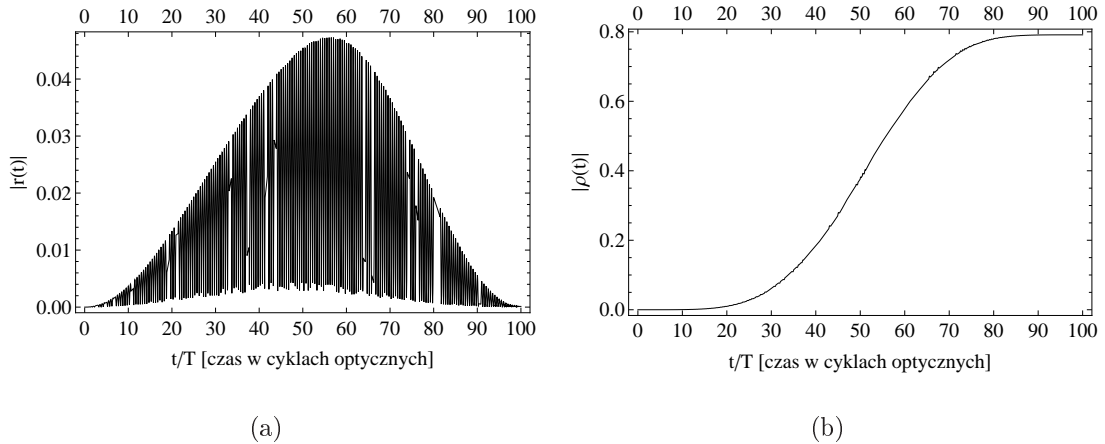
lityczne, wynikające ze wzorów (3.52), (3.54) i (3.57), zaś linią przerywaną widma obliczone w wyniku numerycznego całkowania układu równań (3.3) na zmienne ilorazowe r i ρ . Analiza Rysunku 3.2 pozwala stwierdzić, że w widmie układu trójpoziomowego,



Rysunek 3.2: Skalowane widma koherentne, $S_C(\omega)/\omega^4$, otrzymane dla 30-cyklowego impulsu laserowego o prostokątnej obwiedni: (a) Układ dwupoziomowy z $\omega_{21}/\omega_0 = 13$ oraz $\Omega_R/\omega_0 = 0,5$. (b) Układ trójpoziomowy w konfiguracji lambda z takimi samymi wartościami ω_{21} i Ω_R jak dla układu dwupoziomowego oraz, dodatkowo, $\omega_{23}/\omega_0 = 10$, $\omega_{31}/\omega_0 = 3$ i $M_R/\omega_0 = 0,3$. (c) Jak (b), ale z $\omega_{23}/\omega_0 = 11$ i $\omega_{31}/\omega_0 = 2$. Czerwona linia - widmo analityczne, linia przerywana - widmo numeryczne.

w porównaniu do układu składającego się tylko z dwóch poziomów, obserwujemy trzy dodatkowe składniki spektralne o częstościach $\omega_{31} \pm \omega_0$ oraz ω_{23} . Ponadto, w widmie układu trójpoziomowego zdecydowanie wyraźniej zaznaczona jest obecność trzeciej harmonicznej częstości pola laserowego. Oprócz zgodności jakościowej (ilość, lokalizacja i względna wysokość linii w widmie) otrzymaliśmy dobrą zgodność ilościową widm analitycznych z numerycznymi. Różnica ilościowa dotyczy głównie wysokości tła wid-

mowego, przy czym na Rysunku 3.2 *c* jest ona znacznie większa, niż w części *b* tego rysunku.



Rysunek 3.3: Czasowa ewolucja wartości bezwzględnych zmiennych ilorazowych r i ρ dla przypadku dwufotonowego rezonansu pomiędzy stanami 1 i 3 otrzymana w wyniku numerycznego całkowania układu równań (3.3). Pozostałe parametry jak na Rysunku 3.2 *c*.

Aby wskazać przyczynę tej różnicy, widocznej na Rysunku 3.2 *c*, sporządziliśmy Rysunek 3.3 przedstawiający czasowe przebiegi zmiennych ilorazowych, tj. $r(t)$ oraz $\rho(t)$. Na Rysunku 3.3 widać, że dla parametrów, dla których wykonano Rysunek 3.2 *c*, nie jest dobrze spełnione założenie o małości zmiennych ilorazowych, zwłaszcza zmiennej $\rho(t)$. Dostrzegamy wyraźne przepompowywanie obsadzenia do stanu 3 w warunkach rezonansu dwufotonowego między poziomami 1 i 3. Korzystając ze wzoru (3.2c) ilość obsadzenia przepompowanego do stanu 3 po 100 cyklach optycznych szacujemy na około 0.4. Dokładniejsza teoria, uwzględniająca tak znaczne przepompowania, przedstawiona będzie w rozdziale 4. W tym miejscu zaznaczmy jedynie, że mimo łamania warunków stosowalności - opracowany w rozdziale 3 formalizm analityczny zupełnie nieźle opisuje główne składowe widma numerycznego na Rysunku 3.2 *c*.

Rysunek 3.2 *c* oraz analiza wyrażeń opisujących część koherentną widma (wzory (3.24), (3.57) oraz (3.58)) pozwalają stwierdzić, że w sytuacji rezonansu parzystofotonowego na przejściu $1 \rightarrow 3$ ($\omega_{31} + 2n\omega_0 \simeq 0$) powinno się obserwować wzmocnienie pewnych składników spektralnych. Jest to efekt ściśle związany z rezonansowym charakterem współczynników ϵ_n i ζ_n (wzory (3.24)) określających przyczynkę $d_\rho(t)$ do indukowanego dipola (wzory (3.57) i (3.58)). W dalszej części, jako szczególnym przypadkiem, zajmiemy się rezonansem dwufotonowym między poziomami 1 i 3 . Uwzględniając

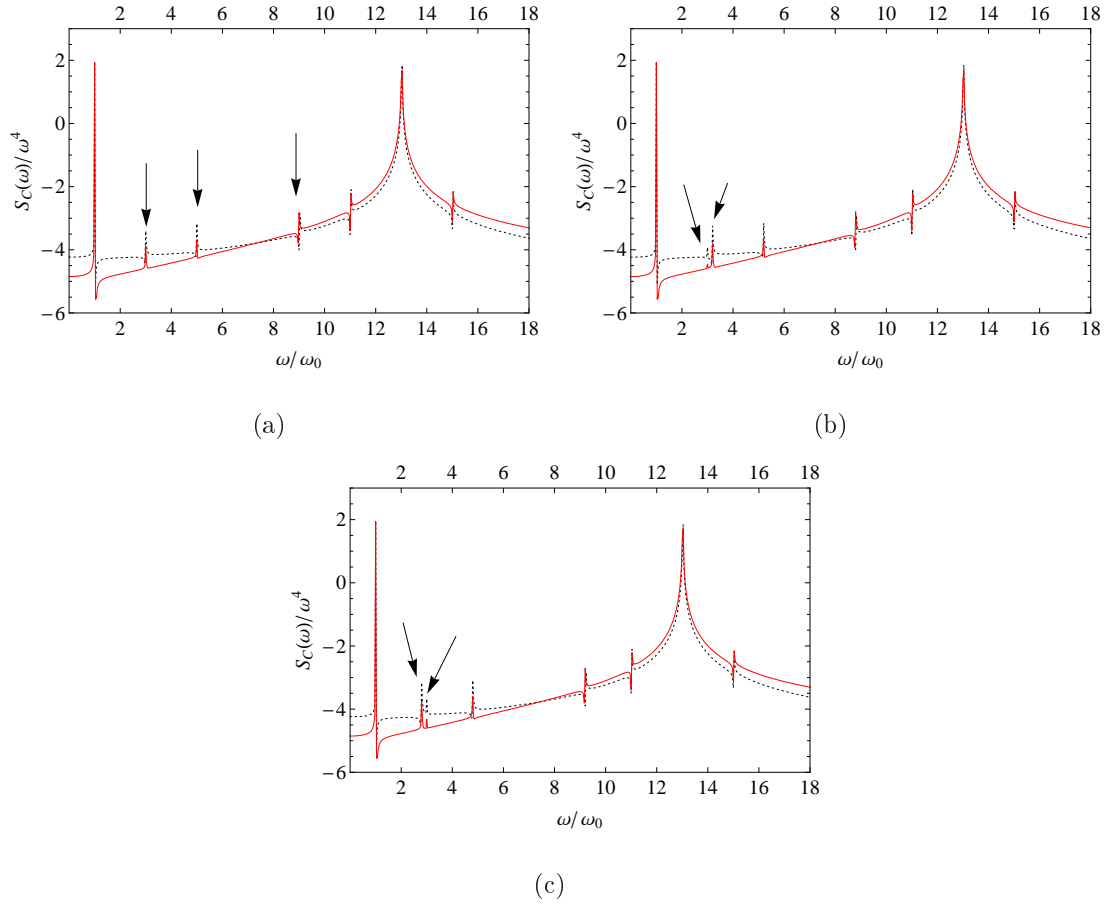
fakt, że argumenty funkcji Bessela są małe dla wybranych parametrów natężeniowych (wzory (3.62)) oraz wprowadzając odstrojenie od dokładnego rezonansu dwufotonowego $\delta_0 = \omega_{31} - 2\omega_0$, pozostawiamy w wyrażeniu (3.57) na d_ρ^p jedynie wyrazy dominujące. Ta dominująca część d_ρ dana jest wtedy wyrażeniem:

$$\begin{aligned} d_\rho^p(t) \simeq & \frac{\mu_{23} M_R \Omega_R^2}{4 \omega_{21}^2} \frac{1}{\delta_0 + \frac{\Delta_S}{2}} \left[\cos(\omega_0 t) - \cos\left(\omega_0 + \delta_0 + \frac{\Delta_S}{2}\right) t \right. \\ & + \cos(3\omega_0 t) - \cos\left(3\omega_0 + \delta_0 + \frac{\Delta_S}{2}\right) t \\ & \left. + 2 \cos\left(\omega_{21} - 2\omega_0 - \delta_0 - \frac{\Delta_S}{2}\right) t - 2 \cos(\omega_{21} - 2\omega_0) t \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Kiedy dwufotonowe odstrojenie $\delta_0 \rightarrow 0$, wówczas czynnik przed nawiasem rośnie, a samo wyrażenie (3.64) staje się porównywalnej wielkości z d_1 . Zatem dla $\delta_0 \rightarrow 0$, dodatek trzeciego poziomu do dwupoziomowca ma istotny wpływ na kształt widma. Jeśli dodatkowo wybierzemy $\delta_0 \rightarrow -\frac{\Delta_S}{2}$, wtedy uzyskamy dokładny rezonans dwufotonowy między dolnymi poziomami układu Λ . Wzór (3.64) przewiduje silne wzmocnienie trzeciej harmonicznej oraz składowej $\omega_{21} - 2\omega_0$ w warunkach dwufotonowego rezonansu $1 \rightarrow 3$. Jest to zgodne z Rysunkiem 3.2 *c*, jeśli go porównać z Rysunkiem 3.2 *b*.

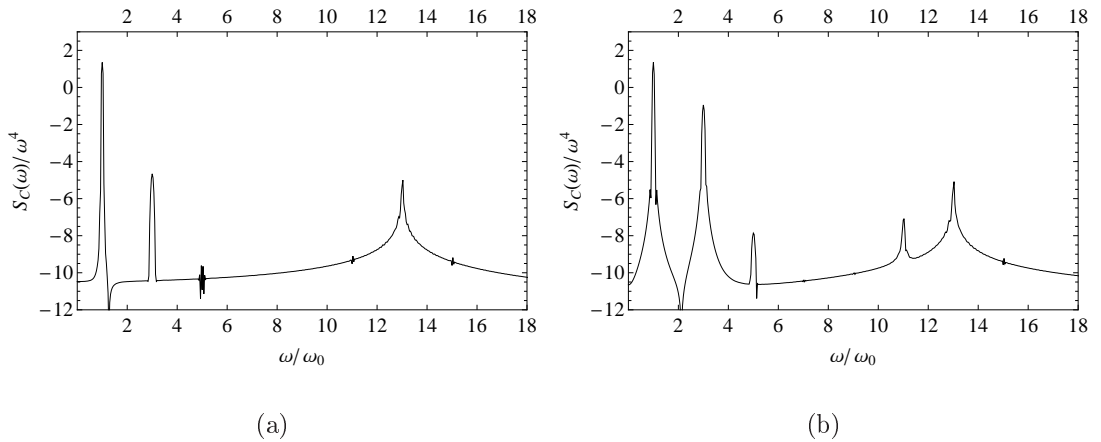
Ze struktury wzorów na $d_1(t)$ oraz $d_\rho(t)$ (wzory (3.54) i (3.57)) wynika, że niektóre składowe w widmie mają podwójne źródło, mianowicie pochodzą zarówno od części nierezonansowej dipola $d_1(t)$ jak i jego części rezonansowej $d_\rho(t)$. Dla zilustrowania tego zajmiemy się, np., czterofotonowym rezonansem pomiędzy stanami 1 i 3. Rysunek 3.4 *a*, odpowiadający tej sytuacji, pokazuje wzmocnienie niektórych składowych (strzałki), wynikające z rezonansowej struktury $d_\rho(t)$. Natomiast części *b* i *c* tego rysunku, sporządzone dla pewnych odstrojeń od czterofotonowego rezonansu ($\pm 0.2\omega_0$) wyraźnie pokazują dwa udziały prowadzące do wygenerowania pików trzeciej harmonicznej. Na Rysunkach 3.4 *b* i 3.4 *c* pik w położeniu $3\omega_0$ wynika z nierezonansowego wyrażenia $d_1(t)$, natomiast wyższy pik zlokalizowany w $\omega_{31} - \omega_0$ wynika z rezonansowego charakteru $d_\rho(t)$, w tym przypadku z $m = -1$ w (3.57) i $n = -2$ w (3.24 *a*).

Na zakończenie analizy widm koherentnych emitowanych przez układy trójpoziomowe typu Λ , zilustrujemy rolę jaką odgrywa obwiednia impulsu. Na Rysunkach 3.5 oraz 3.6 zamieszczono widma dla tych samych co wcześniej parametrów natężeniowo-częstościowych (wzór (3.62)), ale nieprostokątnych obwiedni opisywanych funkcjami $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)$ i $f(t) = \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\frac{t}{t_p}\right)^2\right]$, gdzie t_p oznacza długość impulsu. W odróżnieniu od



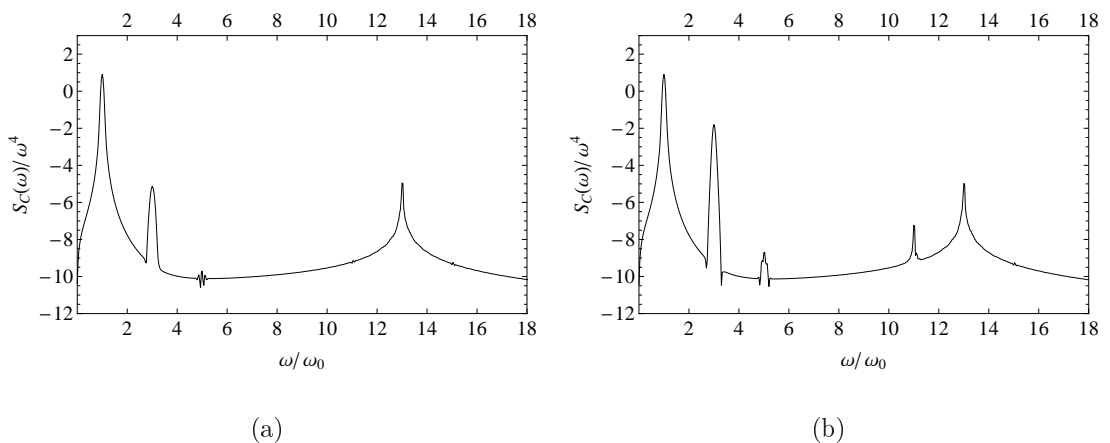
Rysunek 3.4: Widma koherentne z trójpoziomowego układu Λ dla 30-cyklowego impulsu prostokątnego: (a) $\omega_{31}/\omega_0 = 4$, $\omega_{21}/\omega_0 = 13$, $\Omega_R/\omega_0 = 0,5$ oraz $M_R/\omega_0 = 0,3$. Strzałki wskazują rezonansowo wzmocnione składniki $\omega_{31} \pm \omega_0$ oraz ω_{23} . (b) i (c) jak (a) ale dla pewnych odstrojeń od czterofotonowego rezonansu pomiędzy stanami 1 i 3 ($\omega_{31}/\omega_0 = 4.2$ w (b) oraz $\omega_{31}/\omega_0 = 3.8$ w (c)). Strzałki wskazują udziały składające się na trzecią harmoniczną. Linia czerwona - rozwiązanie analityczne, linia przerywana - rozwiązanie numeryczne.

części *a*, część *b* obu rysunków dotyczy przypadku rezonansu dwufotonowego między poziomami 1 i 3. Porównując te rysunki z Rysunkiem 3.2, zauważamy że w stosunku do widm wyznaczonych dla impulsu o prostokątnej obwiedni, składniki spektralne o częstotliwościach $\omega_{31} \pm \omega_0$ oraz ω_{23} są teraz całkowicie nieobecne, natomiast linie w położeniach ω_{21} oraz $\omega_{21} \pm 2\omega_0$ są znacząco zredukowane. Jest to zgodne z naszymi przewidywaniami analitycznymi w części 3.2.5. Widma przedstawione na Rysunku 3.5 *a* oraz Rysunku 3.6 *a* są stosunkowo ubogie w porównaniu z widmami wyznaczonymi dla impulsu prostokątnego. Zawierają one częstość podstawową, trzecią oraz słabo zaznaczoną piątą harmoniczną, a także osłabione linie na częstości przejścia ω_{21} oraz częstościach



Rysunek 3.5: Otrzymane numerycznie skalowane widma koherentne, $S_C(\omega)/\omega^4$, dla 30-cyklowego impulsu laserowego o gładkiej symetrycznej obwiedni opisanej funkcją $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)$, gdzie t_p oznacza czas trwania impulsu. (a) Parametry jak w (3.62) a ponadto $\omega_{23}/\omega_0 = 10$, $\omega_{31}/\omega_0 = 3$. (b) Jak (a), ale z $\omega_{23}/\omega_0 = 11$ i $\omega_{31}/\omega_0 = 2$ (dwufotonowy rezonans $1 \rightarrow 3$).

satelitarnych $\omega_{21} \pm 2\omega_0$. Dla porównania, widma zawarte w częściach *b* Rysunku 3.5 oraz Rysunku 3.6 mają jakościowo taką samą strukturę jak te w części *a*, natomiast składniki o częstościach $3\omega_0$, $5\omega_0$ oraz $\omega_{21} - 2\omega_0$ są znacznie wyraźniej obecne. Wzmocnienie to jest skutkiem opisanego wcześniej rezonansu dwufotonowego między poziomami *1* i *3* w układzie Λ (wzór (3.64)).



Rysunek 3.6: Skalowane widma koherentne, $S_C(\omega)/\omega^4$, otrzymane dla 30-cyklowego impulsu laserowego o gładkiej niesymetrycznej obwiedni opisanej funkcją $f(t) = \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\frac{t}{t_p}\right)^2\right]$, gdzie t_p oznacza czas trwania impulsu. (a) Parametry jak w (3.62) a ponadto $\omega_{23}/\omega_0 = 10$, $\omega_{31}/\omega_0 = 3$. (b) Jak (a), ale z $\omega_{23}/\omega_0 = 11$ i $\omega_{31}/\omega_0 = 2$ (dwufotonowy rezonans $1 \rightarrow 3$).

3.3 Pełne widmo rozpraszania

W części 3.2 wyznaczyliśmy część koherentną widma światła rozproszonego przez układ trójpoziomowy. Z definicji (2.15) pełnego widma promieniowania rozproszonego wynika jednak, że składa się ono nie tylko z wkładu pochodzącego od średniego dipola (część koherentna) lecz również z przyczynku od kwantowych fluktuacji dipola (część niekoherentna). W niniejszej części chcemy wyznaczyć pełne widmo promieniowania rozproszonego, do czego niezbędne będzie wyznaczenie części niekoherentnej. Pokażemy, że wkład niekoherentny do pełnego widma jest istotny.

Przypomnijmy, że w części 3.2.1 problem rozwiązywania układu trzech równań na amplitudy prawdopodobieństwa b_{ij} sprowadziliśmy do problemu dwóch sprzężonych równań na zmienne ilorazowe $r = b_{21}/b_{11}$ oraz $\rho = b_{31}/b_{11}$, zdefiniowane tak, że w ich mianownikach figuruje amplituda stanu, z którego układ rozpoczynał ewolucję. Zgodnie z (3.1) zmienne r i ρ w pełni określały widmo koherentne. Aby jednak ze wzoru (2.15) wyznaczyć wkłady niekoherentne do widma ($j = 2$ i 3), konieczna jest znajomość amplitud b_{kj} ($k = 1, 2, 3$) znalezionych przy warunku początkowym wskazanym przez indeks j .

Dla $j = 1$, z definicji r i ρ , a także równania (2.8a) otrzymujemy

$$b_{11}(t) = e^{iA(t)}, \quad (3.65)$$

gdzie

$$A(t) = \int_0^t r(t')\Omega(t')dt'. \quad (3.66)$$

Z kolei równanie (2.8b) prowadzi do

$$b_{21}(t) = ie^{-i\omega_{21}t} \int_0^t [\Omega(t') + M(t')\rho(t')] b_{11}(t')e^{i\omega_{21}t'} dt', \quad (3.67)$$

a z równania (2.8c) mamy

$$b_{31}(t) = ie^{-i\omega_{31}t} \int_0^t M(t')b_{21}(t')e^{i\omega_{31}t'} dt'. \quad (3.68)$$

W warunkach zakładanej słabej depopulacji stanu początkowego ($j = 1$) można zignorować człon $M(t)\rho(t)$ w równaniu (3.67) na b_{21} oraz zastąpić $r(t)$ przez $r_0(t)$ w definicji $A(t)$, tzn. dokonać zamiany $A(t) \rightarrow A_0(t)$. Korzystamy dalej z wyprowadzonych wcześniej dla impulsu prostokątnego wyrażeń na r_0 i A_0 w granicy niskich częstości (wzory (3.14) i (3.16)). W ten sposób znajdujemy przybliżone amplitudy przy warunku po-

czątkowym określonym przez $j = 1$:

$$b_{11}(t) = e^{i\frac{\Delta_S}{2}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x_1) e^{i2n\omega_0 t}, \quad (3.69)$$

$$b_{21}(t) = \frac{\Omega_R}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \left(e^{i\left((2n+1)\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2}\right)t} - e^{-i\omega_{21}t} \right), \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} b_{31}(t) &= \frac{M_R \Omega_R}{4} e^{-i\omega_{31}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (\alpha_{n-1} + \alpha_n) \beta_n \left[e^{i\left(\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta_S}{2}\right)t} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_n [\gamma_+ (e^{-i(\omega_{23} + \omega_0)t} - 1) + \gamma_- (e^{-i(\omega_{23} - \omega_0)t} - 1)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

gdzie α_n i β_n zostały zdefiniowane w (3.21), a ponadto

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\omega_{23} \pm \omega_0}. \quad (3.72)$$

Przy warunku początkowym zadanym przez $j = 3$ definiujemy inne zmienne ilorazowe, mianowicie $x = b_{23}/b_{33}$ i $y = b_{13}/b_{33}$, dla których znajdujemy układ równań

$$i\dot{x} = (x^2 - 1)M(t) + \omega_{23}x - \Omega(t)y, \quad (3.73a)$$

$$i\dot{y} = [-\omega_{31} + M(t)x]y - \Omega(t)x. \quad (3.73b)$$

Jest on strukturalnie taki sam jak układ (3.3) dla zmiennych r oraz ρ . Rozwiązujemy w ten sam sposób, układ (3.73) prowadzi do amplitud

$$b_{33}(t) = e^{-i\left(\omega_{31} - \frac{\Delta'_S}{2}\right)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x'_1) e^{i2n\omega_0 t}, \quad (3.74)$$

$$b_{23}(t) = \frac{M_R}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n \left(e^{i\left(-\omega_{31} + (2n+1)\omega_0 + \frac{\Delta'_S}{2}\right)t} - e^{-i\omega_{21}t} \right), \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} b_{13}(t) &= \frac{M_R \Omega_R}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (\bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_n) \bar{\beta}_n \left(e^{i\left(-\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta'_S}{2}\right)t} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\alpha}_n [\bar{\gamma}_+ (e^{-i(\omega_{21} + \omega_0)t} - 1) + \bar{\gamma}_- (e^{-i(\omega_{21} - \omega_0)t} - 1)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

gdzie

$$\bar{\alpha}_n = \frac{J_n(x'_1) + J_{n+1}(x'_1)}{\omega_{23} + (2n+1)\omega_0 + \frac{\Delta'_S}{2}}, \quad (3.77)$$

$$\bar{\beta}_n = \frac{1}{-\omega_{31} + 2n\omega_0 + \frac{\Delta'_S}{2}} \quad (3.78)$$

$$\bar{\gamma}_{\pm} = \frac{1}{\omega_{21} \pm \omega_0}. \quad (3.79)$$

oraz $x'_1 = \frac{M_R^2}{4\omega_0\omega_{23}}$ i $\Delta'_S = \frac{M_R^2}{\omega_{23}}$.

Do rozwiązania pozostaje problem wyznaczenia ewolucji przy założeniu, że całe początkowe obsadzenie zlokalizowane było w stanie drugim układu ($j = 2$). Dla tego przypadku ilorazy amplitud definiujemy jako $u = b_{12}/b_{22}$ oraz $v = b_{32}/b_{22}$. Ewolucję tych zmiennych opisują równania różniczkowe wynikające z układu (2.8):

$$i\dot{u} = (u^2 - 1)\Omega(t) + [-\omega_{21} + M(t)v]u, \quad (3.80a)$$

$$i\dot{v} = (v^2 - 1)M(t) + [\omega_{32} + \Omega(t)u]v. \quad (3.80b)$$

W języku zmiennych u oraz v , amplitudy obsadzeń wyznaczone z (2.8) mają formalną postać

$$b_{22}(t) = e^{-i(\omega_{21}t - C(t) - D(t))} \quad (3.81a)$$

$$b_{12}(t) = i \int_0^t \Omega(t') b_{22}(t') dt' \quad (3.81b)$$

$$b_{32}(t) = ie^{-i\omega_{31}t} \int_0^t M(t') b_{22}(t') e^{i\omega_{31}t'} dt', \quad (3.81c)$$

gdzie

$$C(t) = \int_0^t u(t') \Omega(t') dt', \quad (3.82a)$$

$$D(t) = \int_0^t v(t') M(t') dt'. \quad (3.82b)$$

W powyższym przypadku analityczne postaci amplitud są następujące

$$b_{22}(t) = e^{-i(\omega_{21} + \Delta)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-i2n\omega_0 t}, \quad (3.83)$$

$$b_{12}(t) = \frac{\Omega_R}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha'_n (e^{-i(\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta)t} - 1), \quad (3.84)$$

$$b_{32}(t) = -\frac{M_R}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta'_n (e^{-i(\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta)t} - e^{-i\omega_{31}t}), \quad (3.85)$$

gdzie

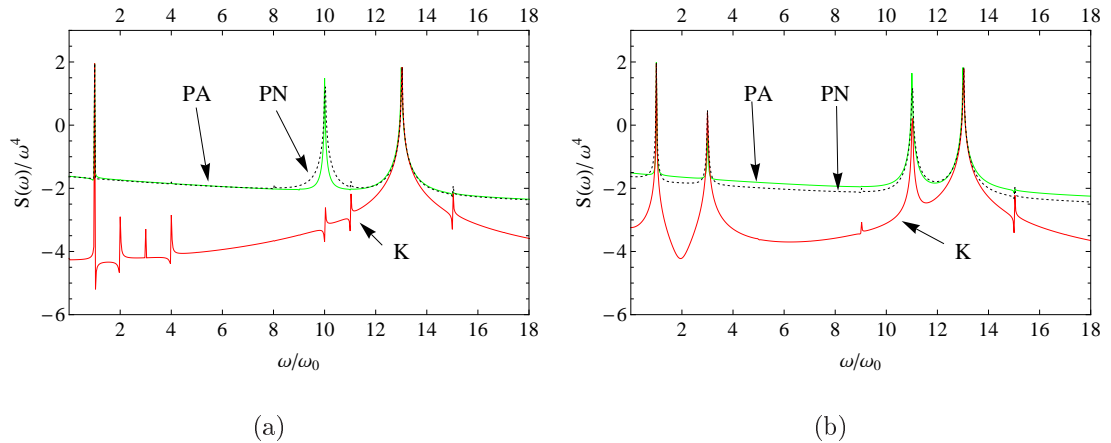
$$\alpha'_n = \frac{J_n(x) + J_{n+1}(x)}{\omega_{21} + (2n+1)\omega_0 + \Delta}, \quad (3.86)$$

$$\beta'_n = \frac{J_n(x) + J_{n+1}(x)}{\omega_{23} + (2n+1)\omega_0 + \Delta}. \quad (3.87)$$

a ponadto $\Delta = \frac{1}{2}(\Delta_S + \Delta'_S)$ oraz $x = x_1 + x'_1$.

Z wykorzystaniem powyższych analitycznych amplitud, obowiązujących dla impulsu prostokątnego, oraz wzorów (2.15) i (2.16), przedstawiliśmy na Rysunku 3.7 pełne widmo promieniowania rozproszonego przez analizowany układ trójpoziomowy (PA). Wykorzystano w tym celu te same parametry co na Rysunku 3.2 w częściach *b* i *c*. Dla

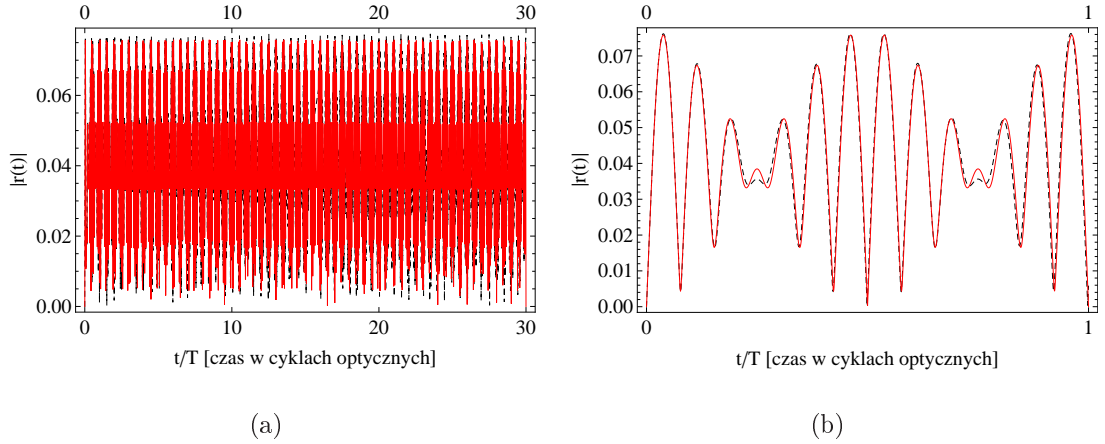
lepszego rozróżnienia, pełne widmo analityczne (PA) zaznaczono kolorem zielonym, zaś linią przerywaną oznaczono pełne widmo numeryczne (PN) obliczone na podstawie numerycznego rozwiązania układu równań (2.8) z różnymi warunkami początkowymi. Dla porównania, na tym samym wykresie umieszczono oznaczoną na czerwono, a wyznaczoną numerycznie, część koherentną widma (K). Rysunek 3.7 pokazuje, że pełne widma uzyskane z analitycznej teorii pozostają w doskonałej zgodności z wynikami symulacji numerycznych. Jednocześnie porównanie pełnych widm z ich częścią koherentną wskazują na istotne modyfikacje, jakie do struktury widma wprowadzają składniki niekoherentne. W wyniku ich obecności znacznie wzrosło tło, które teraz maskuje wiele szczegółów widma koherentnego.



Rysunek 3.7: Skalowane pełne widma rozpraszania przez układu trójpoziomowy w konfiguracji Λ dla 30-cyklowego impulsu prostokątnego; (a) $\omega_{31}/\omega_0 = 3$; (b) $\omega_{31}/\omega_0 = 2$. Pozostałe parametry to: $\omega_{21}/\omega_0 = 13$, $\Omega_R/\omega_0 = 0,5$ oraz $M_R/\omega_0 = 0,3$. Strzałki wskazują odpowiednio: (PA) linia koloru zielonego - pełne widmo wyznaczone analitycznie, (PN) linia przerywana - pełne widmo wyznaczone numerycznie, (K) linia koloru czerwonego - wyznaczona numerycznie część koherentna widma .

3.4 Jakość formalizmu analitycznego

Przedstawione wyniki pokazują, że opracowany formalizm analityczny daje wiarygodne przewidywania. Wyniki eksperymentów numerycznych potwierdzają, że w zakresie swojej stosowności formalizm ten był w stanie dokładnie opisać widmo promieniowania rozproszonego. Ponieważ struktura widma wynika z czasowej zależności amplitud

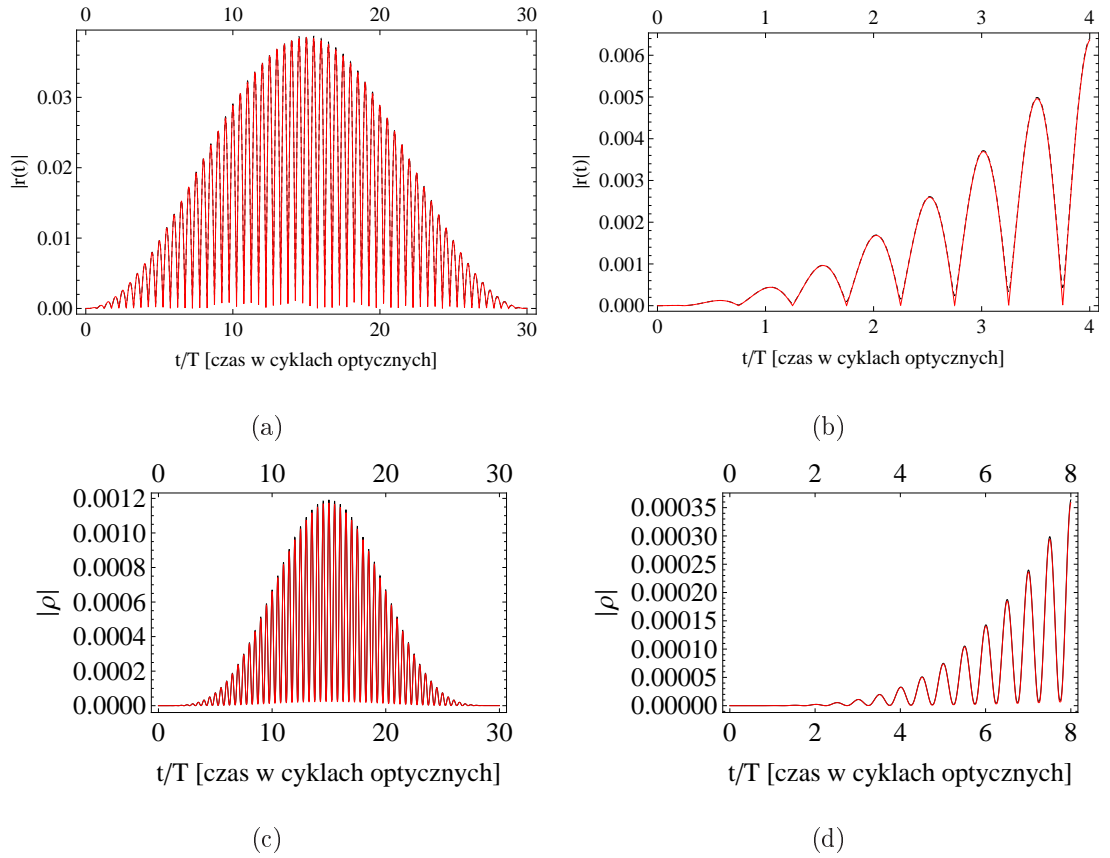


Rysunek 3.8: Porównanie analitycznego rozwiązania (linia koloru czerwonego) na zmienną r z numerycznym rozwiązaniem układu równań (3.3) (linia przerywana) dla przypadku impulsu o prostokątnej obwiedni. (a) Wizualizacja dla całego impulsu oraz (b) dla fragmentu obejmującego jeden cykl pola laserowego.

prawdopodobieństw, to przypuszczamy, że formalizm ten potwierdzi swoją wysoką jakość również w trakcie badania ewolucji obsadzeń. Wobec wzorów (3.2), ewolucja ta jest całkowicie opisywana zmiennymi ilorazowymi r i ρ . W związku z tym na Rysunku 3.8 oraz Rysunku 3.9 porównujemy analityczne i numeryczne ewolucje zmiennych r oraz ρ , w skalach czasowych całego impulsu i kilku okresów zmian pola, dla impulsu prostokątnego oraz o gładkiej obwiedni. Ponieważ wybrano parametry dobrze spełniające założenia słabej depopulacji ($\Omega_r, M_R \ll \omega_{21}$) i niskich częstości ($\omega_0 \ll \omega_{21}$), obserwuje się na tych rysunkach bardzo dobrą zgodność obu ewolucji. Jednak, jak pokazuje Rysunek 3.10, złamanie np., przybliżenia niskich częstości prowadzi do ilościowych różnic w tych ewolucjach, chociaż jakościowo wyglądają one podobnie. Równoległe z opublikowaniem naszego artykułu [28], w którym przedstawiliśmy stosowany w rozdziale 3 formalizm, inni Autorzy [31] zaczęli rozwijać podobne podejście, ale dla układów efektywnie dwupoziomowych.

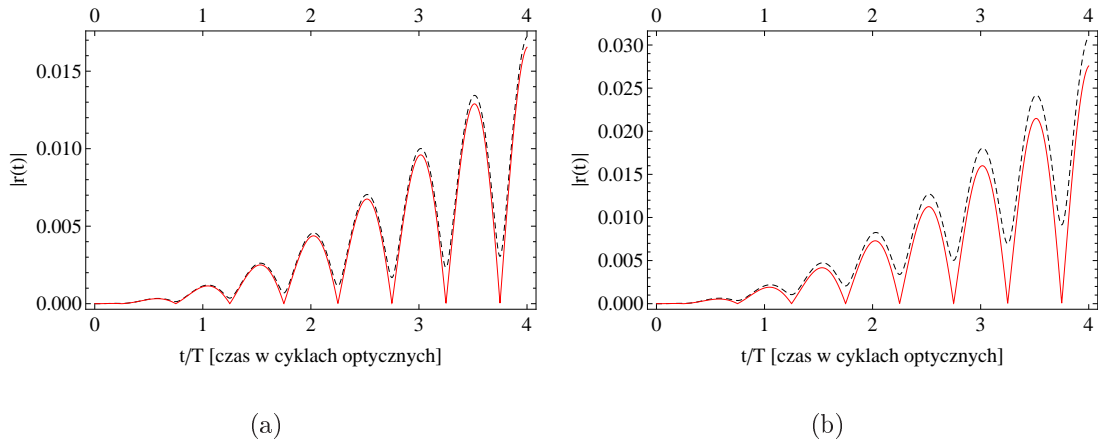
3.5 Podsumowanie

W rozdziale 3 rozważono oddziaływanie układów trójpoziomowych w konfiguracji Λ z impulsem lasera o niskiej częstości ($\omega_0 \ll \omega_{21}$) i umiarkowanym natężeniu gwarantującym słabą depopulację poziomu podstawowego. Dla tego przypadku opracowano



Rysunek 3.9: Porównanie analitycznej ewolucji zmiennych r i ρ (linia koloru czerwonego) z ewolucją otrzymaną w wyniku numerycznego rozwiązania układu równań (3.3) (linia przerywana), dla przypadku impulsu o obwiedni $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)$. (a) Wizualizacja $|r|$ dla całego impulsu oraz (b) dla fragmentu obejmującego cztery cykle pola laserowego, (c) wizualizacja $|\rho|$ dla całego impulsu oraz (d) dla fragmentu obejmującego osiem cykli pola laserowego.

perturbacyjny formalizm analityczny oparty na dwóch nieliniowych równaniach różniczkowych na zmienne będące ilorazami odpowiednich amplitud prawdopodobieństw, z których jedno miało postać zbliżoną do kwadratowo nieliniowego równania typu Riccati. W ramach tego formalizmu wyznaczono ewolucję tych zmiennych, a stąd ewolucję amplitud prawdopodobieństw dla różnych warunków początkowych. Następnie, wyznaczono widma, koherentne i pełne, promieniowania rozproszonego przez układ. Wykazano, że widma wyznaczone dla wygodnej z analitycznego punktu widzenia, choć niefizycznej prostokątnej obwiedni impulsu zawierają składowe będące artefaktami. Udowodniono, że w warunkach słabej depopulacji poziomu podstawowego, widma z układu trójpoziomowego są bogatsze niż z układu dwupoziomowego. Wyjaśniono analitycznie złożoną strukturę widma z układu trójpoziomowego oraz przedyskutowano efekty w



Rysunek 3.10: Porównanie analitycznej ewolucji $|r|$ (krzywa koloru czerwonego) z ewolucją otrzymaną w wyniku numerycznego rozwiązania układu równań (3.3) (krzywa przerywana), dla przypadku impulsu o gładkiej obwiedni opisanej wzorem $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)$, gdzie t_p oznacza czas trwania impulsu. Rysunek pokazuje stopniowe załamywanie się opracowanego formalizmu analitycznego wraz z łamaniem warunku niskiej częstości $\omega_0 \ll \omega_{21}$. (a) $\omega_{21}/\omega_0 = 5$ oraz $\omega_{23}/\omega_0 = 2$ (b) $\omega_{21}/\omega_0 = 3$ i $\omega_{23}/\omega_0 = 1.5$.

widmie związane z interferencją procesów nierezonansowych i rezonansowych. Podano wyjaśnienie efektów wzmocnienia niektórych linii spektralnych w warunkach dwufotonowego rezonansu między dolnymi poziomami układu Λ . Istotnym wynikiem tego rozdziału było również pokazanie różnic między pełnym widmem rozpraszania a jego częścią koherentną. W szczególności, zaprezentowano efekt maskowania pewnych elementów widma koherentnego przez wysokie tło obecne w pełnym widmie rozpraszania światła.

Rozdział 4

Trójpoziomowy układ Λ z silną depopulacją stanu początkowego

Rozważania zawarte w obecnym rozdziale dotyczą rezonansu parzystofotonowego i silnych przepompowań obsadzenia między poziomami 1 i 3 w układzie Λ pokazanym na Rysunku 3.1. Przypadek ten wymaga innego podejścia niż przedstawione wcześniej w rozdziale 3. Znaczna część wyników niniejszego rozdziału została wcześniej opublikowana w [32].

4.1 Nieperturbacyjny formalizm analityczny

4.1.1 Adiatyczna eliminacja poziomu $|2\rangle$

W przeciwieństwie do podejścia stosowanego w rozdziale 3, wykorzystującego równania dla ilorazów amplitud $r = b_2/b_1$ oraz $\rho = b_3/b_1$, oprzemy się teraz na pierwotnym układzie równań dla amplitud prawdopodobieństw b_j :

$$i\dot{b}_1 = -\Omega(t)b_2, \quad (4.1a)$$

$$i\dot{b}_2 = \omega_{21}b_2 - \Omega(t)b_1 - M(t)b_3, \quad (4.1b)$$

$$i\dot{b}_3 = \omega_{31}b_3 - M(t)b_2, \quad (4.1c)$$

gdzie, dla przypomnienia, ω_{ij} oznacza częstość przejścia między odpowiednimi poziomami, zaś $\Omega(t)$ oraz $M(t)$ to chwilowe częstości Rabiego dla sprzężeń $1 \leftrightarrow 2$ oraz $2 \leftrightarrow 3$. To, co różni obecne podejście od poprzedniego, to porzucenie założenia słabej depopula-

cji poziomu podstawowego. Już w poprzednim rozdziale 3 stwierdzono silną depopulację poziomu podstawowego w przypadku dwufotonowego rezonansu między poziomami 1 i 3. Dokładniejsza analiza numeryczna wskazuje nawet na możliwość osiągnięcia całkowitej inwersji obsadzeń między tymi poziomami w warunkach rezonansu dwufotonowego. W tych warunkach poziom najwyższy w modelu Λ ($|2\rangle$) pozostaje w każdej chwili praktycznie nieobsadzony, $|b_2| \ll 1$. Wykorzystamy ten numerycznie stwierdzony fakt, aby wyeliminować b_2 z układu równań (4.1).

W tym celu dokonujemy najpierw formalnego całkowania równania (4.1b):

$$b_2(t) = ie^{-i\omega_{21}t} \int_0^t (\Omega(t')b_1(t') + M(t')b_3(t'))e^{i\omega_{21}t'} dt'. \quad (4.2)$$

Zauważmy, że częstości Rabięgo pod całką, zmieniają się wolno w stosunku do zmian czynnika $e^{i\omega_{21}t}$, ponieważ $\omega_{21} \gg \omega_0$, z założenia. Ponadto, a priori, zakładamy wolnozmienność amplitud b_1 oraz b_3 w warunkach dwufotonowego rezonansu $1 \leftrightarrow 3$. Ostatnie założenie jest niezbędne dla procedury eliminacji (adiabaticznej) poziomu wzbudzonego $|2\rangle$ z układu równań (4.1). Przy wymienionych założeniach, równanie (4.2) zastępujemy jego przybliżoną wersją

$$b_2(t) \simeq \frac{1}{\omega_{21}}(\Omega(t)b_1(t) + M(t)b_3(t)), \quad (4.3)$$

otrzymaną w wyniku wyłączenia wolnych ewolucji przed znak całki. Podstawienie tego rozwiązania do dwóch pozostałych równań w (4.1), prowadzi do układu na amplitudy prawdopodobieństw obsadzeń poziomów 1 i 3:

$$ib_1 \dot{} = -\dot{\theta}b_1 - \frac{\Omega(t)M(t)}{\omega_{21}}b_3, \quad (4.4a)$$

$$ib_3 \dot{} = \dot{\phi}b_3 - \frac{\Omega(t)M(t)}{\omega_{21}}b_1, \quad (4.4b)$$

gdzie $\theta(t) = \int_0^t (\Omega^2(t')/\omega_{21})dt'$ oraz $\phi(t) = \int_0^t (\omega_{31} - (M^2(t')/\omega_{21}))dt'$. Wyrażenia $\dot{\theta}$ oraz $\dot{\phi} - \omega_{31}$ mają sens chwilowych przesunięć Starka poziomów 1 i 3, wywołanych ich sprzężeniem ze stanem wzbudzonym 2, zaś $\Omega(t)M(t)/\omega_{21}$ ma postać efektywnego, zależnego od czasu dwufotonowego sprzężenia pomiędzy poziomami 1 i 3 poprzez nierezonansowy stan 2. Podstawienie $b_1 = u \exp(i\theta(t))$ oraz $b_3 = v \exp(-i\phi(t))$ transformuje układ (4.4) do postaci

$$iu \dot{} = -S(t)v, \quad (4.5a)$$

$$iv \dot{} = -S^*(t)u, \quad (4.5b)$$

gdzie

$$S(t) = \frac{\Omega(t)M(t)}{\omega_{21}} e^{-i\alpha(t)} \quad (4.6)$$

z czynnikiem fazowym

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \theta(t) + \phi(t) \\ &= \omega_{31}t + \Delta_t + \Delta \int_0^t f^2(t') \cos(2\omega_0 t') dt' \\ &\simeq \omega_{31}t + \Delta_t + \frac{\Delta}{2\omega_0} f^2(t) \sin(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

zależnym od natężenia pola elektrycznego poprzez różnicę przesunięć starkowskich poziomów 1 i 3, $\Delta = \frac{\Omega_R^2 - M_R^2}{2\omega_{21}}$. Ponadto, wprowadziliśmy oznaczenie $\Delta_t = \Delta \int_0^t f^2(t') dt'$. Następnie, do funkcji $e^{i\alpha(t)}$ występującej w $S(t)$ stosujemy rozwinięcie Fouriera-Bessela

$$\exp(iz \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp(in\phi). \quad (4.8)$$

To rozwinięcie, razem z własnością funkcji Bessela

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad (4.9)$$

pozwala zapisać $S(t)$ w postaci

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\Omega_R M_R}{2\omega_{21}} f^2(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n \frac{2\omega_0}{\Delta f^2(t)}\right) J_n \left(\frac{\Delta f^2(t)}{2\omega_0}\right) e^{-i[(\omega_{31} - 2n\omega_0)t + \Delta_t]} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(t) e^{-i[(\omega_{31} - 2n\omega_0)t + \Delta_t]}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Równania (4.7) oraz (4.10) wskazują na istotną rolę jaką spełnia czynnik $\frac{\Delta}{2\omega_0} f^2(t) \sin(2\omega_0 t)$. Odpowiada on za powstawanie parzystofotonowych rezonansów rzędu wyższego niż drugi. Ponadto, wynikające z obecności tego czynnika przesunięcia starkowskie poziomów mają istotny wpływ na warunki rezonansu w układzie. Dla zadanych wartości natężenia pola i jego częstości, dokładny rezonans jest osiągniany tylko w pewnych chwilach trwania impulsu. Wyjątek stanowi tu impuls prostokątny (lub quasiprostokątny), gdy rezonans występuje przez cały czas trwania impulsu.

4.1.2 Parzystofotonowe oscylacje Rabiego

Dla impulsu quasiprostokątnego, w warunkach dokładnego rezonansu parzystofotonowego, tj., kiedy $\omega_{31} - 2n\omega_0 + \Delta \simeq 0$, funkcję $S(t)$ możemy rozdzielić na część wolnozmienną w czasie (S_N) oraz część szybkozmienną ($s_N(t)$). Część wolnozmienną

stanowi wyraz z $n = P/2$, gdzie P jest rzędem rezonansu między poziomami 1 i 3:

$$\begin{aligned} S_{P/2}(t) &= (-1)^{\frac{P}{2}} \frac{\Omega_R M_R}{2\omega_{21}} f^2(t) \left[1 - \frac{P}{2} \frac{2\omega_0}{\Delta f^2(t)} \right] J_{\frac{P}{2}} \left(\frac{\Delta f^2(t)}{2\omega_0} \right) \\ &= \Omega^{(P)}(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Spodziewamy się, że wolna część (4.11) będzie stanowić dominujący wkład do ewolucji obsadzeń, ponieważ w granicy długich impulsów wszystkie szybkie oscylacje w równaniach (4.5) powinny uśredniać się do zera. Stąd, w analogii do standardowego przybliżenia wirującej fali (RWA) [33], dokonujemy przybliżenia będącego uogólnieniem tego ostatniego na przypadek rezonansów wielofotonowych (GRWA [22, 24, 26, 34]). Jego istotą jest to, że dla określonego parzystofotonowego rezonansu $1 \rightarrow 3$ pomijamy szybkozmienny składnik w $S(t)$. W przybliżeniu GRWA, $S(t) = \Omega^{(P)}(t)$, zaś równania (4.5) opisujące ewolucję amplitud prawdopodobieństw redukują się do postaci

$$i\dot{u} = -\Omega^{(P)}(t)v, \quad (4.12a)$$

$$i\dot{v} = -\Omega^{(P)}(t)u. \quad (4.12b)$$

W rozważanym tu przypadku rezonansowym, wprowadzenie nowej zmiennej $\tau = \int_0^t \Omega^{(P)}(t') dt'$, pozwala uzyskać ściśle analityczne rozwiązanie

$$u(t) = \cos(\tau), \quad (4.13a)$$

$$v(t) = i \sin(\tau). \quad (4.13b)$$

Stosując w końcu transformacje odwrotne, odzyskujemy pierwotne amplitudy b_j :

$$b_1(t) = \cos(\tau) e^{i\theta(t)}, \quad (4.14a)$$

$$b_3(t) = i \sin(\tau) e^{-i\phi(t)}. \quad (4.14b)$$

Zakres stosowalności powyższych szczególnych rozwiązań (równania (4.14)) wynika z przyjętego założenia, że amplitudy b_1 oraz b_3 zmieniają się wolno w porównaniu do szybkozmiennego czynnika $\exp(i\omega_{21}t)$, gdzie $\omega_{21} \gg \omega_0$. Założenie to będzie zachowane, jeśli parametry układu będą spełniały nierówności: $|\omega_{31}/\omega_{21}| \ll 1$, $(\Omega_R/\omega_{21})^2 \ll 1$, $(M_R/\omega_{21})^2 \ll 1$ oraz $|\Omega^{(P)}/\omega_{21}| \ll 1$. Pierwsza z nierówności może być spełniona jedynie w przypadku układu trzech poziomów w konfiguracji lambda (Rysunek 3.1), podczas gdy trzy pozostałe nakładają ograniczenie na maksymalną wartość amplitudy natężenia pola elektrycznego lasera. W związku z tym, że $\omega_{21} \gg \omega_0$, największa dopuszczalna wartość amplitudy pola jest taka, że Ω_R/ω_0 i M_R/ω_0 są znacznie mniejsze niż ω_{21}/ω_0 . W związku z powyższym, niezależne od czasu skalowane częstości Rabiego Ω_R/ω_0 i

M_R/ω_0 mogą osiągać wartość nawet rzędu 1. Dla tak znaczących wartości natężeń znajdujemy $|\Delta/2\omega_0| \ll 1$. W związku z małością argumentu funkcji Bessela, tkwiącej w wyrażeniu na nieliniową częstość Rabięgo (4.11), uzasadnione staje się przybliżenie $J_{P/2}\left(\frac{\Delta}{2\omega_0}f^2(t)\right) \simeq \frac{(\Delta f^2(t)/4\omega_0)^{P/2}}{(P/2)!}$. Z uwzględnieniem tego przybliżenia, równanie (4.11) dla $\Omega^{(P)}(t)$ upraszcza się do postaci:

$$\Omega^{(0)}(t) = \frac{\Omega_R M_R}{2\omega_{21}} f^2(t), \quad (4.15a)$$

$$\Omega^{(P>0)}(t) = (-1)^q \Omega^{(0)}(t) \frac{\left(\frac{\Delta f^2(t)}{4\omega_0}\right)^q}{2(q!)}, \quad (4.15b)$$

gdzie $q = \frac{P}{2} - 1$.

4.1.3 Rozwinięcie floquetowskie

Uzasadnienie dla stosowanego GRWA można uzyskać wykorzystując rozwinięcie floquetowskie dla amplitud:

$$b_1(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(t) e^{-i2m\omega_0 t}, \quad (4.16a)$$

$$b_3(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(t) e^{-i2m\omega_0 t}, \quad (4.16b)$$

gdzie q_m oznacza amplitudę stanu floquetowskiego $|q, m\rangle$ z $q = 1, 2$. Po podstawieniu do wyjściowego równania (4.4), uzyskujemy następnie układ wielu równań dla amplitud stanów floquetowskich:

$$i \dot{\alpha}_m = -(2m\omega_0 + \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} f^2(t)) \alpha_m - \frac{\Omega_R^2}{4\omega_{21}} f^2(t) (\alpha_{m-1} + \alpha_{m+1}) - \frac{\Omega_R M_R}{4\omega_{21}} f^2(t) (2\beta_m + \beta_{m-1} + \beta_{m+1}), \quad (4.17a)$$

$$i \dot{\beta}_m = (\omega_{31} - 2m\omega_0 - \frac{M_R^2}{2\omega_{21}} f^2(t)) \beta_m - \frac{M_R^2}{4\omega_{21}} f^2(t) (\beta_{m-1} + \beta_{m+1}) - \frac{\Omega_R M_R}{4\omega_{21}} f^2(t) (2\alpha_m + \alpha_{m-1} + \alpha_{m+1}). \quad (4.17b)$$

W warunkach $P = 2m$ -fotonowego rezonansu ($\omega_{31} - P\omega_0 = \delta_P \rightarrow 0$), równania (4.17) możemy rozwiązać w przybliżony sposób w ograniczonej (obciętej) bazie stanów. Bazę stanów istotnych stanowią stany tworzące najkrótszy łańcuch sprzężeń pomiędzy stanem początkowym opisywanym amplitudą α_0 a stanem końcowym o amplitudzie $\beta_{m=P/2}$. Ilość stanów pośrednich w tym łańcuchu zależy od rzędu wielofotonowości P . Dla $P = 0$, tj., w przypadku, gdy stany dolne układu Λ są zdegenerowane ($\omega_{31} = \delta_P \rightarrow 0$), mamy do

czynienia z bezpośrednim sprzężeniem stanów podstawowego i końcowego opisywanych amplitudami α_0 oraz β_0 . Gdy mamy do czynienia z rezonansem dwufotonowym ($P = 2$) stany istotne są również sprzężone bezpośrednio, lecz są to wówczas stany opisywane amplitudami α_0 i β_1 . Analogicznie, w sytuacji gdy $P = 2m \geq 4$ mamy $P-2$ pośrednich stanów, scharakteryzowanych przez amplitudy $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{(P/2)-1}, \beta_{(P/2)-1}$. Droga adiabaticznej eliminacji możemy wykluczyć nierezonansowe stany pośrednie i uzyskać parę równań dla amplitud rezonansowo sprzężonych stanów floquetowskich:

$$i \dot{\alpha}_0 = -\frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} f^2(t) \alpha_0 - \Omega^{(P)}(t) \beta_{P/2}, \quad (4.18a)$$

$$i \dot{\beta}_{P/2} = \left(\delta_P - \frac{M_R^2}{2\omega_{21}} f^2(t) \right) \beta_{P/2} - \Omega^{(P)}(t) \alpha_0, \quad (4.18b)$$

gdzie $\Omega^{(P)}(t)$ jest dane równaniami (4.15). Powyższy układ równań jest strukturalnie podobny do równań (4.4). Stąd, przy założeniach, które doprowadziły nas do rozwiązań (4.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned} b_1(t) &\simeq \alpha_0 \\ &= \cos(\tau) \exp \left[i \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} \int_0^t f^2(t') dt' \right], \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} b_3(t) &\simeq \beta_{P/2} e^{-iP\omega_0 t} \\ &= i \sin(\tau) \exp \left[i \left(\Delta t - P\omega_0 t + \frac{M_R^2}{2\omega_{21}} \int_0^t f^2(t') dt' \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.19b)$$

Przewagą stosowanego w części 4.1.2 podejścia jest to, że tamtejsze równania (4.4) zawierają częstości Rabięgo w ich najogólniejszej postaci danej równaniem (4.11), podczas gdy w rozwiązaniach opartych na rozwinięciu floquetowskim (równania (4.19)) tkwią jedynie przybliżone wzorem (4.15) wielofotonowe częstości Rabięgo. Ponadto, analiza z wykorzystaniem rozwinięcia floquetowskiego, preferowana przez innych autorów [35, 36, 37, 38], wymaga wielokrotnego stosowania adiabaticznej eliminacji stanów pośrednich, co czyni ją uciążliwą.

4.1.4 Zmodyfikowane równanie Riccatiego

Cały rozdział 4 stanowi rozszerzenie analizy przedstawionej w rozdziale 3. Ponieważ oba rozdziały, 3 oraz 4, dotyczą tego samego układu, ale w innych warunkach, chcielibyśmy zachować łączność między formalizmami zastosowanymi w tych częściach. Aby to osiągnąć, wprowadzamy nową zmienną będącą ilorazem amplitud u i v występujących

w równaniu (4.5), tj., $x = \frac{v}{u}$. Z tej definicji oraz równań (4.5), otrzymujemy jedno nieliniowe równanie typu równania Riccatiego na zmienną x :

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= S(t)x^2 - S^*(t), \\ &= (x^2 - 1)S(t) + 2i \operatorname{Im}(S(t)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Równanie to jest strukturalnie podobne (lecz różniące się postacią $S(t)$) do równania spotykanego wcześniej w problemie układu dwupoziomowego [29, 31]. W przypadku układu dwóch poziomów odpowiednie równanie ma postać $i\dot{R} = S(t)R^2 - S^*(t)$, gdzie iloraz amplitud zdefiniowany jest jako $R = (b_2/b_1)e^{i\omega_{21}t} = re^{i\omega_{21}t}$, natomiast $S(t) = \Omega(t)e^{-i\omega_{21}t}$. Łatwo można się przekonać, że z tym R i S równanie (4.20) sprowadza się do równania na r dla dwupoziomowca ($i\dot{r} = (r^2 - 1)\Omega(t) + \omega_{21}r$).

Alternatywnie, równanie (4.20) możemy uzyskać z układu równań na zmienne ilorazowe r i ρ preferowane w rozdziale 3:

$$i\dot{r} = (r^2 - 1)\Omega(t) + \omega_{21}r - M(t)\rho, \quad (4.21a)$$

$$i\dot{\rho} = (\omega_{31} + r\Omega(t))\rho - M(t)r. \quad (4.21b)$$

Dokonując w tym układzie równań adiabaticznej eliminacji zmiennej r (o której, a priori, zakładamy że spełnia warunek $|r| \ll 1$), otrzymujemy najpierw

$$r \simeq (\Omega(t) + M(t)\rho)/\omega_{21}. \quad (4.22)$$

Następnie, wstawienie tak przybliżonego r do równania (4.21b) oraz skorzystanie ze związku $\rho = xe^{-i\alpha(t)}$, rzeczywiście prowadzi do równania (4.20).

W pracach [28, 29, 31], przedstawione zostały przybliżone analityczne rozwiązania równania Riccatiego o postaci zbliżonej do (4.20), ale w granicy $x \ll 1$. Rozwiązania te nie są słuszne w rozważanym tu przypadku, ponieważ w warunkach dwufotonowego rezonansu $1 \leftrightarrow 3$ obsadzenie jest całkowicie przepompowywane do poziomu 3. Silne przepompowanie do poziomu trzeciego oznacza, że czynnik x^2 w równaniu (4.20) przyjmuje duże wartości. Oznacza to, że po lewej stronie równania (4.20) dominować będzie pierwszy wyraz. Drugi wyraz ma istotne znaczenie w przeciwnym przypadku słabej depopulacji poziomu podstawowego. W analogii do podejścia rozwijanego w rozdziale 3, w pierwszym etapie analizy rozważamy przybliżenie zerowego rzędu dla równania (4.20):

$$i\dot{x}_0 = (x_0^2 - 1)S(t), \quad (4.23)$$

w którym pominięto wyraz $2\text{Im}(S(t'))$. Rozwiązanie ostatniego równania ma postać

$$x_0(t) = i \tan \left(\int_0^t S(t') dt' \right). \quad (4.24)$$

Aby uzyskać dokładniejsze rozwiązanie zakładamy, że $x = x_0 + x_1$, gdzie x_1 jest, z definicji, małą poprawką do przybliżonego rozwiązania zerowego rzędu. Dla tej poprawki znajdujemy równanie

$$i \dot{x}_1 = 2i \text{Im}(S(t)). \quad (4.25)$$

Jego formalne rozwiązanie jest dane wyrażeniem

$$x_1(t) = 2 \int_0^t \text{Im}(S(t')) dt'. \quad (4.26)$$

Z tych szczegółowych rozwiązań tworzymy pełne, przybliżone rozwiązanie równania Riccatiego (4.20) w postaci sumy

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t). \quad (4.27)$$

Będzie ono słuszne pod warunkiem, że $|(x_1^2 + 2x_0x_1)(S(\tau)/\omega_0)| \ll 1$, gdzie $\tau = \omega_0 t$ ma sens bezwymiarowej zmiennej czasowej.

Chcąc otrzymać rozwiązania na pierwotne amplitudy prawdopodobieństw b_j , korzystamy z definicji $x = \frac{v}{u}$ oraz równań (4.5). W ten sposób znajdujemy

$$b_1(t) = \cos \left(\int_0^t S(t') dt' \right) e^{i\theta(t)} \beta(t), \quad (4.28a)$$

$$b_3(t) = \left\{ i \sin \left(\int_0^t S(t') dt' \right) + x_1 \cos \left(\int_0^t S(t') dt' \right) \right\} e^{-i\phi(t)} \beta(t), \quad (4.28b)$$

gdzie $\beta(t) = \exp \left[i \int_0^t S(t') x_1(t') dt' \right]$. Łatwo zauważyć, że dokonując uogólnionego przybliżenia wirującej fali (GRWA), tj., kładąc $S(t) \simeq \Omega^{(P)}(t)$ oraz pomijając niewielki wkład od poprawki x_1 , odzyskujemy rozwiązania (4.14). Stąd wniosek, że formalizm oparty na równaniu Riccatiego (4.20) pozwala na analityczne wyznaczenie ewolucji amplitud prawdopodobieństw również w przypadku silnej depopulacji poziomu podstawowego i całkowitego przepompowywania obsadzenia do trzeciego poziomu układu lambda.

4.2 Widmo koherentnego rozpraszania

Wyznaczone amplitudy prawdopodobieństw pozwalają przewidzieć strukturę koherentnej części widma promieniowania rozproszonego przez analizowany układ. Zgodnie

z rozdziałem 3, ta część widma jest określona przez średni dipol wyindukowany w układzie:

$$S_C(\omega) = \omega^4 \left| \int_0^{t_p} dt' e^{i\omega t'} d(t') \right|^2, \quad (4.29)$$

gdzie

$$d(t) = \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle = 2\mu_{12} \text{Re}(b_1^* b_2) + 2\mu_{23} \text{Re}(b_2^* b_3). \quad (4.30)$$

Podstawienie wzorów (4.3) oraz (4.14) do (4.30) skutkuje następującym wyrażeniem na średni dipol:

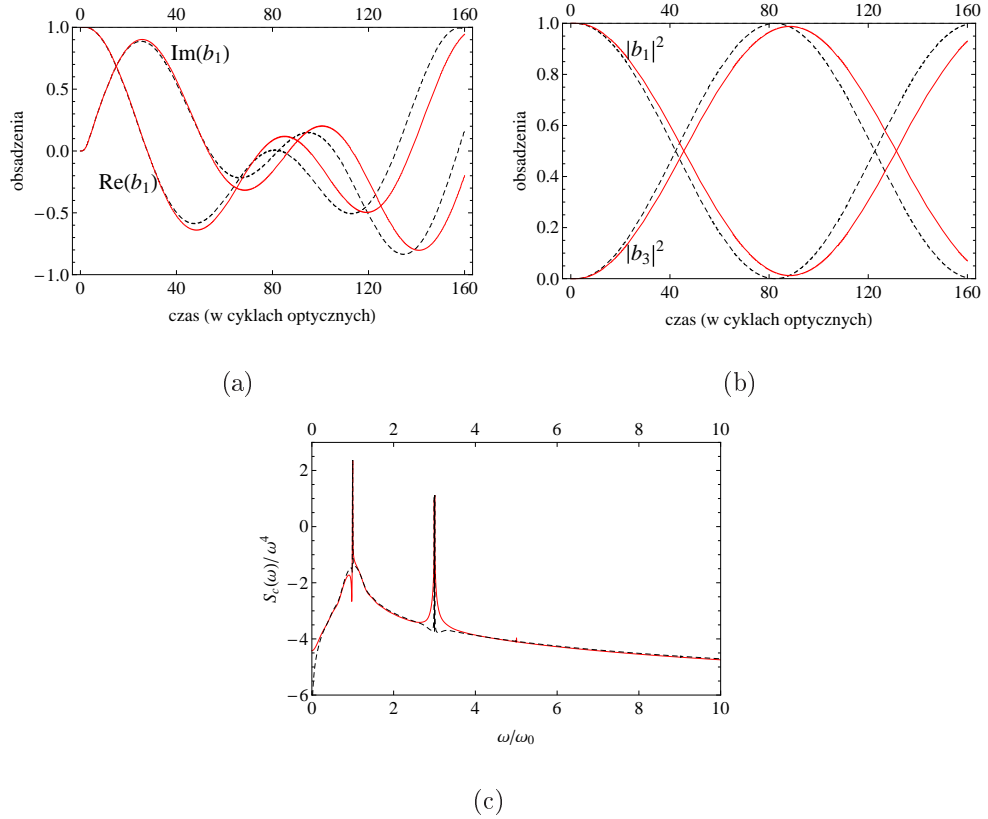
$$\begin{aligned} d(t) = & \frac{1}{4} \frac{E_0 f(t)}{\hbar \omega_{21}} \left\{ 2(\mu_{12}^2 + \mu_{23}^2) \cos(\omega_0 t) + (\mu_{12}^2 - \mu_{23}^2) \left[\cos(\omega_0 t + 2u(t)) + \cos(\omega_0 t - 2u(t)) \right] \right. \\ & + 2\mu_{12}\mu_{23} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(J_n \left(\frac{\Delta}{2\omega_0} f^2(t) \right) - J_{n+1} \left(\frac{\Delta}{2\omega_0} f^2(t) \right) \right) \\ & \left. \times \left[\cos(((2n - P) + 1)\omega_0 t + 2u(t)) - \cos(((2n - P) + 1)\omega_0 t - 2u(t)) \right] \right\}, \quad (4.31) \end{aligned}$$

gdzie $u(t) = \int_0^t \Omega^{(P)}(t') dt'$. W szczególności, dla prostokątnej obwiedni impulsu mamy $u^p(t) = \Omega^{(P)} t$.

Wyrażenie (4.31) sugeruje, że dominującą częścią koherentnego widma rozpraszania będzie tryplet, w skład którego wchodzić będzie częstość lasera (ω_0) oraz jej satelity przesunięte o dwukrotność wielofotonowej częstości Rabiego ($\omega_0 \pm 2\Omega^{(P)}$). Dominującym składnikiem tego trypletu będzie, w ogólności, częstość centralna (ω_0). Wysokości linii satelitarnych będą tym bliższe wysokości linii centralnej, im większa będzie różnica między dipolowymi elementami przejścia (μ_{12} i μ_{23}). W szczególności, kiedy któryś z nich będzie znacząco większy, tj., gdy $|\mu_{12}| \gg |\mu_{23}|$ lub $|\mu_{23}| \ll |\mu_{12}|$, wtedy wysokość wszystkich składników trypletu będzie taka sama. Ponadto, spodziewamy się wyższych składowych spektralnych w postaci dubletów wokół nieparzystych harmonik częstości lasera ($((2n - P) + 1)\omega_0 \pm 2\Omega^{(P)}$). Wysokość kolejnych składowych powinna szybko maleć. Wynika to z faktu, że dla małych argumentów ($\Delta/2\omega_0 \ll 1$) funkcje Bessela kolejnych rzędów przyjmują coraz mniejsze wartości.

4.3 Reprezentatywne wyniki

Na Rysunku 4.1 *a*, przedstawiono porównanie analitycznych amplitud prawdopodobieństw, otrzymanych z wykorzystaniem przybliżenia GRWA (4.14) (czerwona krzywa),



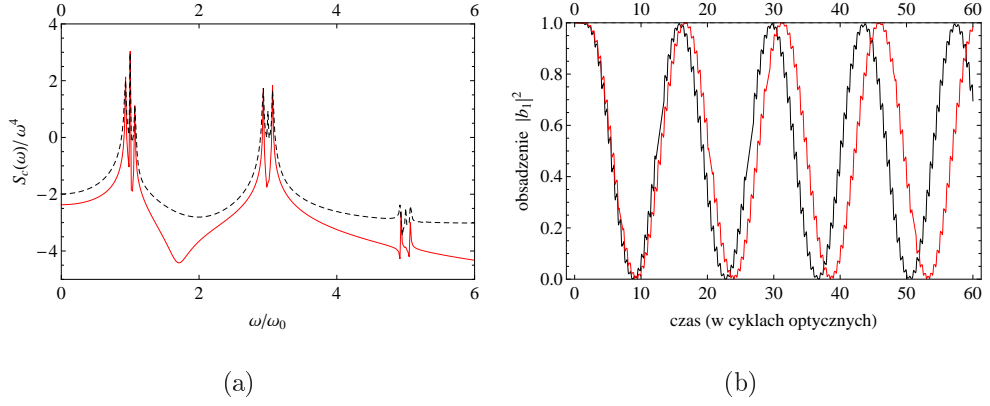
Rysunek 4.1: (a) Ewolucja części rzeczywistej i urojonej amplitudy prawdopodobieństwa obsadzenia poziomu początkowego b_1 (na rysunku nie pokazano analogicznej ewolucji b_3 ze względu na jej szybkie oscylacje z częstotliwością $2\omega_0$ pod wolnozmienną obwiednią). (b) Dwufotonowe oscylacje Rabiego prawdopodobieństw obsadzeń poziomów 1 i 3. (c) Koherentna część widma promieniowania rozproszonego przez układ. Parametry: $\omega_{21}/\omega_0 = 13$, $\omega_{31}/\omega_0 = 1.99445$, $\Omega_R/\omega_0 = 0.5$, $M_R/\omega_0 = 0.3$. W obliczeniach numerycznych przyjęto, że funkcja kształtu obwiedni $f(t)$ rośnie w ciągu pierwszych czterech cykli optycznych do wartości maksymalnej równej 1, a następnie utrzymuje stałą wartość, tzn. jest quasiprostokątna. Dla wszystkich rysunków: linia czerwona ciągła - wynik analityczny, linia przerywana - wynik numeryczny.

ze znalezionymi przez numeryczne rozwiązanie układu równań (4.1) (linia przerywana). W celu zapewnienia warunków stosowalności rozwiązań analitycznych, wybrano następujące parametry: $\omega_{21}/\omega_0 = 13$, $\omega_{31}/\omega_0 = 1.99445$, $\Omega_R/\omega_0 = 0.5$, $M_R/\omega_0 = 0.3$. Założone parametry natężeniowo-częstościowe dają $\Delta/\omega_0 = 0.00615$ i w związku z tym dynamiczny dwufotonowy rezonans $1 \rightarrow 3$ uzyskujemy, gdy $\omega_{31} + \Delta = 2.0006\omega_0$. Dla powyższych parametrów, wyrażenia (4.14) opisujące amplitudy prawdopodobieństw obsadze-

nia poziomów można zredukować do postaci $b_1 \simeq \cos \left[\Omega^{(2)} \int_0^t f^2(t') dt' \right] \exp \left[i \frac{\Omega_R^2}{2\omega_{21}} \int_0^t f^2(t') dt' \right]$ oraz $b_3 \simeq i \sin \left(\Omega^{(2)} \int_0^t f^2(t') dt' \right) \cdot \exp \left[i \left(-\omega_{31} t + \frac{M_R^2}{2\omega_{21}} \int_0^t f^2(t') dt' \right) \right]$, gdzie $\Omega^{(2)} = \frac{\Omega_R M_R}{4\omega_{21}}$ wynika z przybliżonego wyrażenia (4.15b) na $\Omega^{(2)}(t)$. Właśnie te wzory na b_1 i b_3 wykorzystano do wykreślenia analitycznych prawdopodobieństw obsadzeń (czerwona linia ciągła) na Rysunku 4.1 *a*. Rysunek 4.1 *b* przedstawia dwufotonowe oscylacje Rabięgo ($|b_1|^2, |b_3|^2$) między poziomami 1 i 3 (obsadzenie poziomu 2, dla wybranych parametrów, nie przekracza 0.0015), zaś Rysunek 4.1 *c* - część koherentną widma promieniowania rozproszonego przez układ ($S_c(\omega)$ ma znaczenie kwadratu modułu transformaty Fouriera z indukowanego w układzie dipola). Analityczne krzywe na Rysunkach 4.1 *b* i 4.1 *c* otrzymano wykorzystując te same amplitudy b_1 i b_3 co w przypadku Rysunku 4.1 *a*. Cały Rysunek 4.1 świadczy o zupełnie niezłej jakości rozwiązań analitycznych, a brak spodziewanej wewnętrznej struktury składowych spektralnych widma na Rysunku 4.1 *c* jest konsekwencją małej wartości dwufotonowej częstości Rabięgo ($\Omega^{(2)}/\omega_0 = 0.0029$ dla przyjętych parametrów).

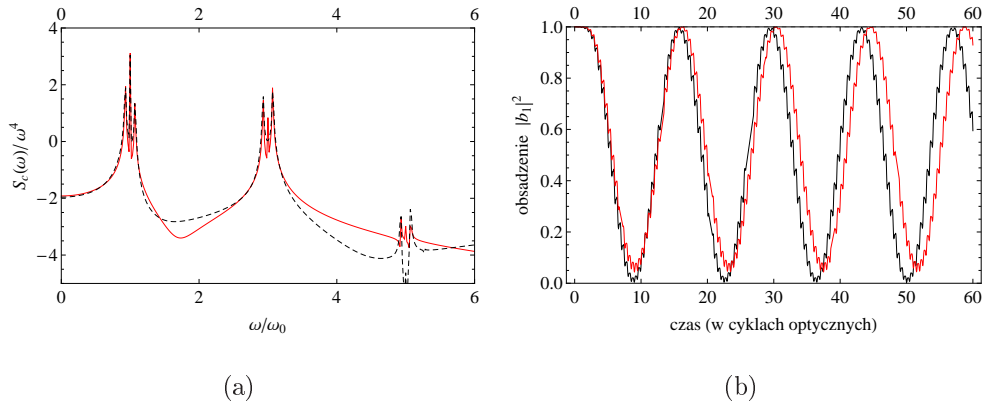
Aby ocenić jakość przewidywań analitycznych dotyczących struktury widma, przeprowadzono symulacje numeryczne dla większych wartości natężenia pola elektrycznego, warunkujących większą wartość wielofotonowej częstości Rabięgo, a co za tym idzie, większą separację składowych wybranej linii spektralnej. Na Rysunku 4.2 *a* porównano widmo rozpraszania obliczone poprzez numeryczne całkowanie przybliżonego układu równań (4.4) (krzywa ciągła koloru czerwonego) z numerycznie obliczonym ścisłym widmem wyznaczonym w oparciu o pełen układ równań (4.1) (linia przerywana). Zgodnie ze wzorem (4.30), w widmie przybliżonym (linia ciągła) widzimy wyraźny tryplet wokół częstości lasera oraz dublety wokół wyższych nieparzystych harmonik. Zauważalna niepełna zgodność między krzywymi, przybliżoną i ścisłą, wynika z niewystarczająco dokładnego wyznaczenia częstości rezonansowej w procedurze przybliżonej. Mówiąc innymi słowy, przypadki przybliżony i ścisły różnią się nieco wartością częstości przejścia ω_{31} , dla której obserwujemy rezonans. Ta sama przyczyna jest źródłem pewnych rozbieżności między krzywymi na Rysunku 4.2 *b*, na którym widać przepompowywanie obsadzenia między poziomami 1 i 3. Zarówno rozwiązanie przybliżone jak i ścisłe wskazują na praktycznie pełne przepompowywanie.

Zmieniając nieco częstość przejścia z wartości $\omega_{31}/\omega_0 = 1.97$ na $\omega_{31}/\omega_0 = 1.982$,



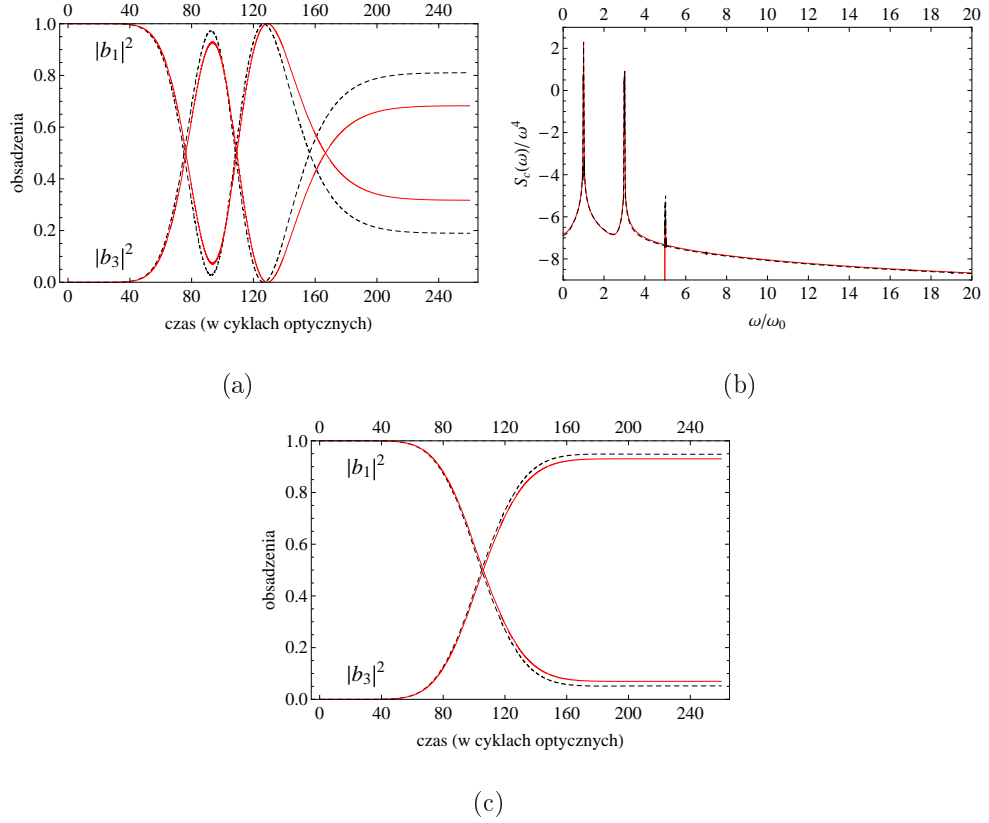
Rysunek 4.2: (a) Koherentna część widma rozpraszania. Linia czerwona - numeryczne rozwiązanie przybliżonego układu równań (4.4), zaś linia przerywana - rozwiązanie numeryczne ścisłego układu (4.1). (b) Ewolucja obsadzenia poziomu podstawowego. Linia czerwona przedstawia rozwiązanie numeryczne przybliżonego układu równań (4.4), zaś czarna linia - numeryczne rozwiązanie ścisłego układu (4.1). Parametry: $\omega_{21}/\omega_0 = 13$, $\omega_{31}/\omega_0 = 1.97$, $\Omega_R/\omega_0 = 1.5$, $M_R/\omega_0 = 1.2$.

uzyskujemy tym razem pełne przepompowanie obsadzenia w rozwiązaniu ścisłym, lecz niepełne w rozwiązaniu przybliżonym (Rysunek 4.3 b). Widma rozpraszania (Rysunek 4.3 a), wyznaczone na podstawie powyższych rozwiązań, po raz kolejny potwierdzają słuszność analitycznych przewidywań wynikających ze wzoru (4.31).



Rysunek 4.3: (a) Koherentna część widma rozpraszania. Linia czerwona - numeryczne rozwiązanie przybliżonego układu równań (4.4), zaś linia przerywana - rozwiązanie numeryczne ścisłego układu (4.1). (b) Ewolucja obsadzenia poziomu podstawowego. Linia czerwona przedstawia rozwiązanie numeryczne przybliżonego układu równań (4.4), zaś linia czarna - numeryczne rozwiązanie ścisłego układu (4.1). Parametry: jak na Rysunku 4.2, ale $\omega_{31}/\omega_0 = 1.982$.

Na Rysunku 4.4, przedstawiono porównanie wyników analitycznych (Równania (4.4))



Rysunek 4.4: (a) Ewolucja obsadzeń poziomów 1 i 3. (b) Koherentna część widma rozpraszania. Parametry układu jak w [39]: $\omega_{21}/\omega_0 = 19$, $\omega_{23}/\omega_0 = 17$, $\omega_{31}/\omega_0 = 2$, $\Omega_R/\omega_0 = 0.8$, $M_R/\omega_0 = 0.7$, $f(t) = (\frac{t}{\tau})^2 \exp[1 - (\frac{t}{\tau})^2]$, gdzie $t \geq 0$ oraz $\tau = 100T$. (c) Jak w części (a) lecz z $\omega_{21}/\omega_0 = 50$, $\omega_{23}/\omega_0 = 48$. Linia czerwona - rozwiązanie numeryczne po zastosowaniu przybliżenia adiabaticznego i uogólnionego przybliżenia wirującej fali (równania (4.5)), linia przerywana - wynik numerycznego całkowania ścisłego układu równań (4.1).

z numerycznymi (Równania (4.1)) dla parametrów natężeniowo-częstościowych przyjętych przez Caldare i Fiordilino [39] w ich numerycznych obliczeniach dla trójpoziomowego układu Λ . Założone przez nich warunki to: $\omega_{21}/\omega_0 = 19$, $\omega_{31}/\omega_0 = 2$, $\Omega_R/\omega_0 = 0.8$, $M_R/\omega_0 = 0.7$. Ponadto, przyjęta została nieprostokątna funkcja kształtu impulsu dana wzorem $f(t) = (\frac{t}{\tau})^2 \exp[1 - (\frac{t}{\tau})^2]$, w którym $t \geq 0$ oraz $\tau = 100T$. Dla tych warunków, Równania (4.11) oraz (4.15) dla $\Omega^{(P)}(t)$ należy pomnożyć przez czynnik fazowy $e^{-i\Delta t}$. Po jego uwzględnieniu nie jesteśmy w stanie znaleźć ścisłego analitycznego rozwiązania równania Riccatiego (4.20). W związku z tym, rozwiązano numerycznie przybliżone równania (4.5), stosując uogólnione przybliżenie wirującej fali ($S(t) \rightarrow \Omega^{(P)}(t)$) dane wzorem (4.15). Wynikające z tych rozwiązań ewolucje obsadze-

nia zostały przedstawione na Rysunku 4.4 *a* linią ciągłą. Uzyskane w ten sposób krzywe, wynikające z założenia o adiabaticznej ewolucji układu oraz z zastosowania wielofotonowego przybliżenia wirującej fali, porównaliśmy z krzywymi ewolucji pochodzącymi z numerycznego całkowania ścisłych Równań (4.1) (linia przerywana). Rysunek 4.4 *b* pokazuje podobne porównanie, ale tym razem widm rozpraszania. Porównania świadczą, że oba zastosowane analityczne przybliżenia (adiabaticzne i GRWA) gwarantują odwzorowanie głównych cech dokładnego (numerycznego) rozwiązania układu równań (4.1). Rysunek 4.4 *c* jest odpowiednikiem Rysunku 4.4 *a*, ale dla większej wartości stosunku częstości $\omega_{21}/\omega_0 = 50$ i, jak widać, uzyskujemy znacznie lepszą zgodność krzywych analitycznych z numerycznymi. Na Rysunku 4.4 *c* widzimy, że niemal całe obsadzenie zostało przepompowane z początkowego stanu 1 do stanu 3. Zachodzi ono w podobnym czasie co jedna oscylacja Rabiego widoczna na Rysunku 4.4 *a*, z tą różnicą, że teraz obsadzenie nie wraca do stanu początkowego. Na Rysunku 4.4 *c* widać, że w granicy długich czasów krzywe ciągła i przerywana (dla tego samego poziomu) nie pokrywają się całkowicie. Może to sugerować, że wartości wielofotonowych częstości Rabiego, wynikające z przybliżonego wzoru (4.15), nie są dość precyzyjne. Z drugiej jednak strony, wzięcie częstości Rabiego $\Omega^{(P)}(t)$ w postaci ogólniejszego równania (4.11) nie usuwa tej długoczasowej rozbieżności między rozwiązaniem analitycznym i numerycznym.

4.4 Podsumowanie

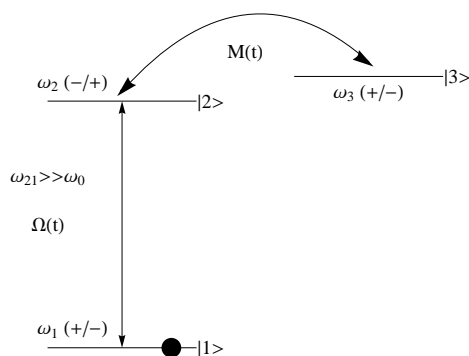
W powyższym rozdziale przedstawiono nieperturbacyjny analityczny formalizm pozwalający opisać zachowanie układu trójpoziomowego w konfiguracji Λ w warunkach silnego parzystofotonowego rezonansu między dolnymi poziomami 1 i 3 (Rysunek 3.1). Zaprezentowane podejście, dzięki eliminacji adiabaticznej słabo obsadzanego poziomu 2, bazowało na układzie dwóch efektywnych równań dla poziomów 1 i 3. Z matematycznego punktu widzenia, cały problem udało się zredukować do jednego równania Riccatiego. W swej strukturze, przypominało ono równanie Riccatiego dla standardowego układu dwupoziomowego, ale wielkości w nim występujące miały inny sens. Udało się je rozwiązać analitycznie stosując wielofotonowe przybliżenie wirującej fali. Jakość podejścia została pozytywnie zweryfikowana na drodze porównań wynikających z niego

ewolucji obsadzeń i widm rozpraszania z wynikami rozwiązań numerycznych.

Rozdział 5

Trójpoziomowy układ Γ

W dotychczasowych badaniach zajmowaliśmy się układami trójpoziomowymi w konfiguracji Λ . Inną konfiguracją, będącą modyfikacją poprzedniej, jest układ Γ z częściowo lub całkowicie zdegenerowaną parą poziomów wzbudzonych (patrz Rysunek 5.1). Strukturę poziomów typu Γ obserwuje się w rzeczywistych układach molekularnych, takich jak dwuatomowe jony molekularne postaci A_2^{4+} (gdzie $A = \text{I, N, } \dots$), czy też jony molekularne wodoru H_2^+ , jak również w obojętnym atomie wodoru. W ostatnich latach układy tego typu zyskały spore zainteresowanie [25, 26] ze względu na dużą wydajność wielofotonowych wzbudzeń w takich układach, wynikającą z silnego sprzężenia dipolowego



Rysunek 5.1: Schemat poziomów energetycznych układu trójpoziomowego w konfiguracji Γ . Na rysunku, $\Omega(t) = \mu_{12}E(t)/\hbar$ oraz $M(t) = \mu_{23}E(t)/\hbar$ mają znaczenie zależnych od czasu częstości Rabięgo, $\hbar\omega_j$ są energiami poszczególnych stanów, zaś znaki $+/-$ odnoszą się do parzystości stanów. Kropką oznaczono początkowo obsadzony stan układu.

między parą wzbudzonych poziomów.

Celem tego rozdziału jest przede wszystkim znalezienie warunków natężeniowo-częstościowych, dla których możliwe jest uzyskanie pełnego wielofotonowego przepompowania obsadzenia z początkowego poziomu podstawowego 1 do wybranego poziomu wzbudzonego, 2 lub 3, układu Γ . W warunkach silnego wielofotonowego przepompowania interesować nas będzie również widmo generowanych harmonik. Rozdział ten stanowi rozszerzenie analizy przedstawionej we własnej pracy [34].

5.1 Transformacje równań wyjściowych

Jednym z kroków wiodących do ujawnienia wielofotonowego charakteru wzbudzeń jest seria przekształceń wyjściowego układu równań dla amplitud obsadzeń. Dla przypomnienia ten układ to:

$$i\dot{b}_1 = -\omega_{21}b_1 - \Omega(t)b_2, \quad (5.1a)$$

$$i\dot{b}_2 = -\Omega(t)b_1 - M(t)b_3, \quad (5.1b)$$

$$i\dot{b}_3 = \omega_{32}b_3 - M(t)b_2. \quad (5.1c)$$

W serii transformacji, trzy zostały zaproponowane przez Gibsona [26], a jedna jest mojego autorstwa. Pierwsza z transformacji Gibsona to:

$$c_1 = b_1, \quad (5.2a)$$

$$c_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2 \pm b_3), \quad (5.2b)$$

druga zaś jest postaci

$$\bar{d}_1 = c_1 e^{-i\omega_{21}t}, \quad (5.3a)$$

$$\bar{d}_{\pm} = c_{\pm} e^{\mp\phi(t)}, \quad (5.3b)$$

gdzie

$$\phi(t) = \int_0^t M(t') dt' = \frac{\mu_{23}}{\hbar} \int_0^t E(t') dt' = M_R \int_0^t f(t') \cos(\omega_0 t') dt' \quad (5.4)$$

jest całką po czasie z chwilowej częstości Rabięgo dla przejścia między poziomami wzbudzonymi. Trzecią transformacją sugerowaną przez Gibsona jest

$$d_1 = \bar{d}_1, \quad (5.5a)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}_+ + \bar{d}_-), \quad (5.5b)$$

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{d}_+ - \bar{d}_-). \quad (5.5c)$$

Do tego ciągu transformacji dodajemy własną

$$x = d_1, \quad (5.6a)$$

$$y = d_2 \exp \left[i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - \cos(2\phi(t'))) dt' \right], \quad (5.6b)$$

$$z = d_3 \exp \left[i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 + \cos(2\phi(t'))) dt' \right]. \quad (5.6c)$$

Transformacja odwrotna, wynikająca z zaprezentowanego ciągu przekształceń, pozwalająca powrócić do wyjściowych amplitud, b_j , ma postać

$$b_1 = x e^{-i\omega_{21}t}, \quad (5.7a)$$

$$b_2 = y \cos(\phi) \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - \cos(2\phi(t'))) dt' \right] + iz \sin(\phi) \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 + \cos(2\phi(t'))) dt' \right] \quad (5.7b)$$

$$b_3 = iy \sin(\phi) \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - \cos(2\phi(t'))) dt' \right] + z \cos(\phi) \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 + \cos(2\phi(t'))) dt' \right]. \quad (5.7c)$$

Zastosowanie transformacji (5.2)-(5.6) prowadzi do układu równań na zmienne x , y i z :

$$i \dot{x} = F(t)y + G(t)z, \quad (5.8a)$$

$$i \dot{y} = F^*(t)x + H(t)z, \quad (5.8b)$$

$$i \dot{z} = G^*(t)x + H^*(t)y, \quad (5.8c)$$

w którym

$$F(t) = -\Omega(t) \cos(\phi) e^{-i\omega_{21}t} \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - \cos(2\phi(t'))) dt' \right], \quad (5.9a)$$

$$G(t) = -i\Omega(t) \sin(\phi) e^{-i\omega_{21}t} \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 + \cos(2\phi(t'))) dt' \right], \quad (5.9b)$$

$$H(t) = -i \frac{\omega_{32}}{2} \sin(2\phi) \exp \left[-i\omega_{32} \int_0^t \cos(2\phi(t')) dt' \right], \quad (5.9c)$$

lub równoważnie

$$F(t) = -\Omega(t) \cos(\phi) e^{-i\omega_{21}t} q(t), \quad (5.10a)$$

$$G(t) = -i\Omega(t) \sin(\phi) e^{-i\omega_{31}t} q^{-1}(t), \quad (5.10b)$$

$$H(t) = -i \frac{\omega_{32}}{2} \sin(2\phi) \exp \left[-i\omega_{32} \int_0^t \cos(2\phi(t')) dt' \right]. \quad (5.10c)$$

gdzie

$$q(t) = \exp \left[-i \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - \cos(2\phi(t'))) dt' \right]. \quad (5.11)$$

Ponieważ we wszystkich obliczeniach zakładamy impulsy wielocyklowe, tj., znacznie dłuższe niż okres $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ pola lasera, zatem funkcja kształtu impulsu $f(t)$ zmienia się wolno w stosunku do zmian $\cos(\omega_0 t)$. Pozwala to na przybliżone wyznaczenie całki w definicji funkcji ϕ danej równaniem (5.4), mianowicie

$$\phi(t) \simeq \frac{M_R}{\omega_0} f(t) \sin(\omega_0 t). \quad (5.12)$$

Ponadto, wyrażenia $\Omega(t) \cos(\phi)$ oraz $\Omega(t) \sin(\phi)$, tkwiące we współczynnikach $F(t)$ i $G(t)$ danych wzorami (5.9), mogą być rozwinięte w szereg

$$\Omega(t) \cos(\phi) = 2\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1} \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) \cos[(2k+1)\omega_0 t], \quad (5.13a)$$

$$\Omega(t) \sin(\phi) = 2\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{k=1}^{\infty} (2k) J_{2k} \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) \sin(2k\omega_0 t). \quad (5.13b)$$

Powyższe wyrażenia zostały uzyskane z wykorzystaniem rozwinięcia Fouriera-Bessela oraz stosownych własności funkcji Bessela, mianowicie [40]

$$\cos(z \sin \alpha) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\alpha), \quad (5.14a)$$

$$\sin(z \sin \alpha) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin((2k+1)\alpha), \quad (5.14b)$$

oraz

$$J_{k-1}(z) + J_{k+1}(z) = \frac{2k}{z} J_k(z). \quad (5.15)$$

5.2 Przypadek pełnej degeneracji poziomów wzbudzonych ($\omega_{32} = 0$)

5.2.1 Dwa rodzaje ewolucji: wolna i szybka

W pierwszej kolejności rozważymy przypadek zdegenerowanych poziomów wzbudzonych ($\omega_{32} = 0$). W tej sytuacji $H(t) = 0$, w związku z czym układ równań (5.8) na

zmienne x , y oraz z ulegnie uproszczeniu do postaci

$$i \dot{x} = F(t)y + G(t)z, \quad (5.16a)$$

$$i \dot{y} = F^*(t)x, \quad (5.16b)$$

$$i \dot{z} = G^*(t)x. \quad (5.16c)$$

gdzie teraz

$$F(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n J_n \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) [e^{i(n\omega_0 - \omega_{21})t} + e^{-i(n\omega_0 + \omega_{21})t}], \quad (5.17a)$$

$$G(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{p=2,4,6,\dots}^{\infty} p J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) [e^{i(p\omega_0 - \omega_{31})t} - e^{-i(p\omega_0 + \omega_{31})t}]. \quad (5.17b)$$

Z postaci wzorów (5.17) wynika, że $F(t)$ determinuje rezonans nieparzystofotonowy między poziomami $1 \rightarrow 2$, zaś $G(t)$ - rezonans parzystofotonowy w układzie poziomów $1 \rightarrow 3$.

W warunkach nieparzystofotonowego rezonansu ($\omega_{21} = N\omega_0 + \delta_N$, $|\delta_N| \ll \omega_0$, gdzie $N = 1, 3, 5, \dots$), $F(t)$ możemy rozdzielić na dwie części, wolnozmienną F_N oraz szybkozmienną w czasie f_N , podczas gdy $G(t) = G_N$ pozostaje w tych warunkach szybkozmienna. W przypadku rezonansu nieparzystofotonowego mamy więc:

$$F_N = -N\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} J_N \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{-i\delta_N t} = -a_N e^{-i\delta_N t}, \quad (5.18)$$

$$f_N(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} e^{-i\delta_N t} \left\{ \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ n \neq N}} n J_n \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{i(n-N)\omega_0 t} + \sum_{n=1,3,5,\dots} n J_n \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{-i(n+N)\omega_0 t} \right\}, \quad (5.19)$$

oraz

$$G_N(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} e^{-i\delta_N t} \sum_{p=2,4,6,\dots} p J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) (e^{i(p-N)\omega_0 t} - e^{-i(p+N)\omega_0 t}). \quad (5.20)$$

Natomiast dla rezonansu parzystofotonowego ($\omega_{31} = P\omega_0 + \delta_P$, $|\delta_P| \ll \omega_0$, gdzie $P = 2, 4, 6, \dots$) funkcje $F(t)$ oraz $G(t)$ zamieniają się rolami. $G(t)$ zawiera teraz rezonansową część wolnozmienną G_P oraz część szybkozmienną g_P , podczas gdy $F(t) = F_P$ pozostaje funkcją szybkozmienną:

$$G_P = -P\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} J_P \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{-i\delta_P t} = -a_P e^{-i\delta_P t}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
g_P &= -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} e^{-i\delta_P t} \left(\sum_{\substack{p=2,4,6,\dots \\ p \neq P}} p J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{i(p-P)\omega_0 t} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{p=2,4,6,\dots} p J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) e^{-i(p+P)\omega_0 t} \right), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

$$F_P = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} e^{-i\delta_P t} \sum_{n=1,3,5,\dots} n J_n \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) (e^{i(n-P)\omega_0 t} + e^{-i(n+P)\omega_0 t}). \tag{5.23}$$

W obydwu przypadkach wolne części, F_N oraz G_P , mają analogiczną strukturę. Dla ścisłego rezonansu wielofotonowego ($\delta_K = 0$, gdzie $K = N, P$) oraz prostokątnej obwiedni $f(t) = 1$ przyjmują one stałą wartość. Stałe te są równe wielofotonowej częstości Rabiego dla układu Γ , zidentyfikowanej wcześniej przez Gibsona (równanie (14) w [26]). W warunkach wielofotonowego rezonansu, równania (5.8) możemy więc przepisać jako:

$$\begin{aligned}
i\dot{x}_N &= (F_N + f_N)y_N + G_N z_N, \\
i\dot{y}_N &= (F_N^* + f_N^*)x_N, \\
i\dot{z}_N &= G_N^* x_N, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

gdy rezonans jest nieparzystofotonowy ($N = 1, 3, 5, \dots$) oraz

$$\begin{aligned}
i\dot{x}_P &= F_P y_P + (G_P + g_P) z_P, \\
i\dot{y}_P &= F_P^* x_P, \\
i\dot{z}_P &= (G_P^* + g_P^*) x_P, \tag{5.25}
\end{aligned}$$

gdy rezonans jest parzystofotonowy ($P = 2, 4, 6, \dots$). Warto podkreślić, że przekształcając równania wyjściowe (5.1), nie zastosowano do tej pory żadnych dodatkowych przybliżeń (poza założeniem wolnozmienności funkcji obwiedni (równanie (5.12))).

5.2.2 Wielofotonowe przybliżenie wirującej fali

Chcąc znaleźć przybliżone rozwiązania analityczne, w pierwszym etapie dokonujemy uproszczenia polegającego na pominięciu członów szybkozmiennych w równaniach (5.24) i (5.25). Przybliżenie to jest analogiczne do przybliżenia wirującej fali znanego

z teorii rezonansu jednofotonowego [33]. Prowadzi ono do układu równań:

$$\begin{aligned}i\dot{x}_N &= -a_N e^{-i\delta_N t} y_N, \\i\dot{y}_N &= -a_N e^{i\delta_N t} x_N, \\i\dot{z}_N &= 0,\end{aligned}\tag{5.26}$$

dla rezonansu nieparzystofotonowego, oraz

$$\begin{aligned}i\dot{x}_P &= -a_P e^{-i\delta_P t} z_P, \\i\dot{y}_P &= 0, \\i\dot{z}_P &= -a_P e^{i\delta_P t} x_P,\end{aligned}\tag{5.27}$$

dla rezonansu parzystofotonowego. Otrzymane równania strukturalnie przypominają te dla układu dwupoziomowego w przybliżeniu RWA, ale z uogólnionymi wielofotonowymi częstościami Rabiiego a_K ($K = N, P$) zdefiniowanymi wyrażeniami (5.18) lub (5.21). Tak zdefiniowane częstości Rabiiego dla układu Γ zostały po raz pierwszy wprowadzone do literatury przez Gibsona [25].

Ich postać zrozumieć można jako wynik sprzężenia poziomu podstawowego 1 z jednym ze stanów floquetowskich generowanych przez parę zdegenerowanych poziomów wzbudzonych 2 i 3. W polu lasera, para zdegenerowanych poziomów wzbudzonych spełnia równania

$$i\dot{b}_2 = \omega_2 b_2 - M(t) b_3,\tag{5.28a}$$

$$i\dot{b}_3 = \omega_3 b_3 - M(t) b_2.\tag{5.28b}$$

Ustalając zero energii tak, że $\omega_2 = \omega_3 = 0$, mamy

$$i\dot{b}_2 = -M(t) b_3,\tag{5.29a}$$

$$i\dot{b}_3 = -M(t) b_2.\tag{5.29b}$$

Wprowadzając następnie nowe zmienne

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_2 \pm b_3),\tag{5.30}$$

uzyskujemy na nie dwa niezależne równania

$$i\dot{b}_+ = -M(t) b_+,\tag{5.31a}$$

$$i\dot{b}_- = M(t) b_-.\tag{5.31b}$$

Elementarne całkowanie równań (5.31) prowadzi do rozwiązań postaci

$$b_+(t) = e^{i\phi(t)}, \quad (5.32a)$$

$$b_-(t) = e^{-i\phi(t)}, \quad (5.32b)$$

gdzie $\phi(t) = \int_0^t M(t') dt'$. Wykorzystując te rozwiązania oraz wzór (5.30) na zamianę zmiennych, uzyskujemy wyrażenia dla pierwotnych amplitud prawdopodobieństw b_2 oraz b_3 :

$$b_2(t) = \cos[\phi(t)], \quad (5.33a)$$

$$b_3(t) = i \sin[\phi(t)], \quad (5.33b)$$

Z rozwiązań (5.33) wynika następująca postać funkcji falowej dla pary zdegenerowanych stanów w polu lasera

$$|\Psi(t)\rangle = \cos[\phi(t)] |2\rangle + i \sin[\phi(t)] |3\rangle. \quad (5.34)$$

Stosując rozwinięcie Fouriera-Bessela do funkcji $\cos[\phi(t)]$ i $\sin[\phi(t)]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_{2k}\left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t)\right) |2\rangle [e^{i2k\omega_0 t} + e^{-i2k\omega_0 t}] \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}\left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t)\right) |3\rangle [e^{i(2k+1)\omega_0 t} - e^{-i(2k+1)\omega_0 t}], \end{aligned} \quad (5.35)$$

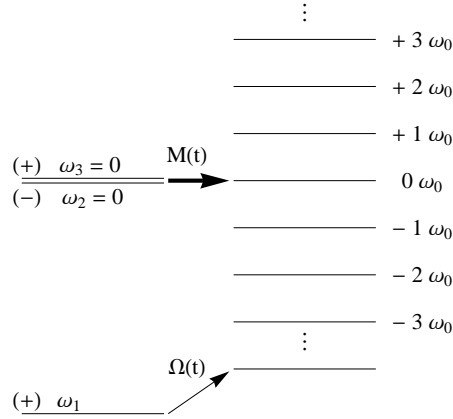
gdzie

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jeżeli } k = 0 \\ 1, & \text{dla } k > 0 \end{cases}. \quad (5.36)$$

W równaniu (5.35) stan $|2\rangle$ z początkową energią $\omega_2 = 0$, przechodzi we floquetowską drabinę stanów z energiami $\pm 2k\omega_0$, a stan $|3\rangle$ z początkową energią $\omega_3 = 0$, w drabinę stanów z energiami $\pm(2k+1)\omega_0$. W ten sposób, para zdegenerowanych stanów tworzy drabinę poziomów o energiach zmieniających się o ω_0 (patrz Rysunek 5.2). W warunkach rezonansu, jeden ze stanów drabiny floquetowskiej (5.35), wygenerowanej przez parę poziomów wzbudzonych, sprzęga się jednofotonowo ze stanem podstawowym. Siłę tego sprzężenia opisuje element macierzowy przejścia postaci

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \Omega(t) | 1 \rangle &= \omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}\left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t)\right) \cos[(2k+1)\omega_0 t] \\ &+ \omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{k=0}^{\infty} (2k) J_{2k}\left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t)\right) \cos[(2k)\omega_0 t]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

W powyższym wyrażeniu znajdujemy właśnie wielofotonowe częstości Rabiego a_K , gdzie $K = N, P$.



Rysunek 5.2: Sprzężanie się stanu podstawowego układu trzech poziomów w konfiguracji Γ z jednym ze stanów floquetowskich generowanych przez parę silnie sprzężonych pól lasera poziomów wzbudzonych.

Zakładając, dla prostoty obliczeń, prostokątną obwiednię impulsu $f(t) = 1$, uzyskujemy rozwiązania układu (5.26) w postaci

$$x_N^p(t) = \left[x_N(0) \cos(A_N t) + \frac{i}{A_N} \left(\frac{\delta_N}{2} x_N(0) + a_N y_N(0) \right) \sin(A_N t) \right] e^{-i \frac{\delta_N}{2} t}, \quad (5.38a)$$

$$y_N^p(t) = \left[y_N(0) \cos(A_N t) - \frac{i}{A_N} \left(\frac{\delta_N}{2} y_N(0) - a_N x_N(0) \right) \sin(A_N t) \right] e^{i \frac{\delta_N}{2} t}, \quad (5.38b)$$

$$z_N^p(t) = z_N(0), \quad (5.38c)$$

gdzie $A_N = \sqrt{a_N^2 + \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^2}$ ma znaczenie nierezonansowej (nieparzystofotonowej) wielofotonowej częstości Rabięgo. Chcąc uzyskać analogiczne rozwiązanie dla przypadku rezonansu parzystofotonowego (równania (5.27)), wystarczy dokonać równoczesnej zamiany $N \rightarrow P$, $x_N \rightarrow x_P$ oraz $y_N \rightarrow z_P$; z_P otrzymujemy z y_N w analogiczny sposób. Potrzebne wartości początkowe $x(0)$, $y(0)$ oraz $z(0)$ otrzymuje się ze wzorów transformacyjnych (5.7) oraz warunków początkowych na amplitudy b_j . Przy warunkach $b_1(0) = 1$, $b_2(0) = 0$ oraz $b_3(0) = 0$ mamy $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ oraz $z(0) = 0$.

W przypadku dowolnej, gładkiej obwiedni impulsu, nie istnieje ogólne ścisłe analityczne rozwiązanie układów równań (5.26) i (5.27). Jedynie w przypadku dokładnego wielofotonowego rezonansu ($\delta_N = 0$), wprowadzenie nowej zmiennej $u(t) = \int_0^t a_N(t') dt'$ pozwala na uzyskanie ścisłego rozwiązania w postaci

$$x_N^f(t) = \cos[u(t)], \quad (5.39a)$$

$$y_N^f(t) = i \sin[u(t)], \quad (5.39b)$$

$$z_N^f(t) = 0. \quad (5.39c)$$

Wykorzystując warunki początkowe oraz wzory transformacyjne (5.7), powracamy do pierwotnych amplitud prawdopodobieństw, b_j , mianowicie

$$b_1^{(N)}(t) = \left[\cos(A_N t) + i \frac{\delta_N}{2A_N} \sin(A_N t) \right] e^{i(N\omega_0 + \frac{\delta_N}{2})t}, \quad (5.40a)$$

$$b_2^{(N)}(t) = i \frac{a_N}{A_N} \sin(A_N t) \cos(\phi(t)) e^{i \frac{\delta_N}{2} t}, \quad (5.40b)$$

$$b_3^{(N)}(t) = -\frac{a_N}{A_N} \sin(A_N t) \sin(\phi(t)) e^{i \frac{\delta_N}{2} t}, \quad (5.40c)$$

gdy impuls jest prostokątny ($f(t) = 1$) a odstrojenie od wielofotonowego rezonansu dowolne oraz

$$b_1^{(N)}(t) = \cos \left[\int_0^t a_N(t') dt' \right] e^{iN\omega_0 t}, \quad (5.41a)$$

$$b_2^{(N)}(t) = i \sin \left[\int_0^t a_N(t') dt' \right] \cos(\phi(t)), \quad (5.41b)$$

$$b_3^{(N)}(t) = -\sin \left[\int_0^t a_N(t') dt' \right] \sin(\phi(t)), \quad (5.41c)$$

gdy impuls jest gładki a rezonans wielofotonowy dokładny.

Ponieważ interesuje nas nie tylko ewolucja obsadzeń, ale także promieniowanie rozproszone przez układ, zatem po raz kolejny wykorzystujemy wyrażenie na widmo wprowadzone przez Eberly'ego [27] (wzór (2.15)). Ograniczając się jedynie do części koherentnej widma, mamy na nią wyrażenie

$$S_C(\omega) = \omega^4 \left| \int_0^{t_p} dt e^{i\omega t} \langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle \right|^2, \quad (5.42)$$

gdzie

$$\langle \Psi_1(t) | ez | \Psi_1(t) \rangle = d(t) = 2\mu_{12} \text{Re}(b_1^* b_2) + 2\mu_{23} \text{Re}(b_2^* b_3). \quad (5.43)$$

Podstawienie uzyskanych wcześniej wyrażeń (5.40) na amplitudy b_j do definicji (5.43) dipola indukowanego daje go w postaci

$$\begin{aligned} d^{(N)}(t) = & \mu_{12} \frac{a_N}{2A_N} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_{2k} \left(\frac{M_R}{\omega_0} \right) \left\{ \frac{\delta_N}{A_N} [\cos(N-2k)\omega_0 t + \cos(N+2k)\omega_0 t] \right. \\ & + \left(1 - \frac{\delta_N}{2A_N} \right) [\cos((N-2k)\omega_0 - 2A_N)t + \cos((N+2k)\omega_0 - 2A_N)t] \\ & \left. - \left(1 + \frac{\delta_N}{2A_N} \right) [\cos((N-2k)\omega_0 + 2A_N)t + \cos((N+2k)\omega_0 + 2A_N)t] \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Z wyrażenia (5.44) wynika, że w przypadku rezonansu nieparzystofotonowego widmo promieniowania rozproszonego przez zdegenerowany układ trójpoziomowy w konfigu-

racji Γ powinno zawierać tryplety; każdy składający się z nieparzystej harmoniki oraz dwóch linii satelitarnych, przesuniętych o dwukrotność wielofotonowej częstości Rabięgo $((N-2k)\omega_0 \pm 2A_N, (N+2k)\omega_0 \pm 2A_N)$. Z założenia o małym odstrojeniu od dokładnego wielofotonowego rezonansu ($\delta_N \ll \omega_0$) wynika, że składnik centralny trypletu będzie niższy od bardziej wyeksponowanych porównywalnej wysokości linii satelitarnych. W przypadku dokładnego rezonansu ($\delta_N = 0$), w widmie obecne będą tylko dublety o równej wysokości składowych, położone symetrycznie wokół kolejnych częstości harmoniczných nieparzystego rzędu. Zauważmy w tym miejscu, że wartość rezonansowej częstości Rabięgo, a_N , jest dla rozważanych parametrów natężeniowo-częstościowych i rezonansów wyższego rzędu niezwykle mała ($a_N \ll \omega_0$). W związku z tym, odległość między składnikami każdego trypletu lub dubletu jest również niewielka.

5.2.3 Uogólnione wielofotonowe przybliżenie wirującej fali

Spodziewamy się, że zastosowane wyżej przybliżenie może być niezbyt dokładne. Wiąże się to, w głównej mierze z nieuwzględnieniem przesunięć starkowskich poziomów wzbudzonych. Przesunięcia te wynikają z pominiętych szybkozmiennych członów w równaniach (5.24) i (5.25). Dla rozważanego układu te przesunięcia są niezbyt wielkie, ale mają one istotne znaczenie dla lokalizacji rezonansów wielofotonowych. Dlatego, chcąc uzyskać lepsze rozwiązania, zastosowano formalizm zaproponowany przez Avertissiana i współpracowników [22, 24]. Zaprezentowane przez nich podejście polega na wydzieleniu z amplitud części wolno i szybkozmiennych, np., $x(t) = \bar{x}(t) + \beta_x$, gdzie $\bar{x}(t)$ opisuje wolną ewolucję uśrednionej zmiennej $x(t)$ (uśrednionej po czasie długim w stosunku do $T = 2\pi/\omega_0$), zaś β_x zawiera szybkie oscylacje o częstości przynajmniej rzędu częstości lasera ω_0 . Dokonując wymienionego rozdzielenia, z równań (5.24) i (5.25) otrzymujemy

$$i \left(\dot{\bar{x}}_N + \dot{\beta}_x \right) = F_N \bar{y}_N + f_N(t) \bar{y}_N + F_N \beta_y + f_N(t) \beta_y + G_N(t) \bar{z}_N + G_N(t) \beta_z, \quad (5.45a)$$

$$i \left(\dot{\bar{y}}_N + \dot{\beta}_y \right) = F_N^* \bar{x}_N + f_N^*(t) \bar{x}_N + F_N^* \beta_x + f_N^*(t) \beta_x, \quad (5.45b)$$

$$i \left(\dot{\bar{z}}_N + \dot{\beta}_z \right) = G_N^*(t) \bar{x}_N + G_N^*(t) \beta_x. \quad (5.45c)$$

Po prawej stronie równań (5.45) znajdujemy człony zarówno wolnozmiennie jak i szybkozmiennie. Człony wolnozmiennie to przede wszystkim iloczyny dwóch funkcji wolnych (np., wyraz $F_N \bar{y}_N$ w równaniu (5.45a)), ale także w iloczynach dwóch funkcji szybko zmieniających się w czasie (np., wyraz $f_N(t) \beta_y$ w równaniu (5.45a)) znajdują się wyrazy wolne. Z drugiej strony, człony szybkozmiennie są generowane przez iloczyn funkcji szybkozmiennej ze zmieniającą się wolno (np., wyraz $f_N(t) \bar{y}_N$ w równaniu (5.45a)). Zgodnie z ideą grupy Avetissiana dokonujemy teraz rozbicia każdego z równań (5.45) na dwa, z których jedno opisuje ewolucję wolnozmienną, a drugie szybkozmienną. W tym podejściu ewolucja szybkozmienna zostaje więc opisana przez układ równań

$$i \dot{\beta}_x = \bar{y}_N f_N(t) + \bar{z}_N G_N(t), \quad (5.46a)$$

$$i \dot{\beta}_y = \bar{x}_N f_N^*(t), \quad (5.46b)$$

$$i \dot{\beta}_z = \bar{x}_N G_N^*(t), \quad (5.46c)$$

zaś wolnozmienna przez równania

$$i \dot{\bar{x}}_N = -a_N e^{-i\delta_N t} \bar{y}_N + \overline{f_N \beta_y} + \overline{G_N \beta_z}, \quad (5.47a)$$

$$i \dot{\bar{y}}_N = -a_N e^{i\delta_N t} \bar{x}_N + \overline{f_N^* \beta_x}, \quad (5.47b)$$

$$i \dot{\bar{z}}_N = \overline{G_N^* \beta_x}. \quad (5.47c)$$

W powyższych równaniach $\overline{(\cdot)}$ oznacza uśrednienie po czasie długim w stosunku do okresu oscylacji pola lasera $T = 2\pi/\omega_0$. Uśrednianie to ma na celu pozostawienie w iloczynach funkcji szybkozmiennych tylko wyrazu, który zmienia się wolno w czasie. Zauważmy ponadto, że w żadnym z równań (5.46) i (5.47) nie znalazły się wyrazy $F_N \beta_y$ oraz $F_N^* \beta_x$. Zostały one pominięte, gdyż z założenia są znacznie mniejsze od pozostałych wyrazów w równaniach układu (5.45). Spełnienie tego założenia wymaga aby

$$|F_N \beta_y| \ll \left| \frac{d\beta_x}{dt} \right|, \quad (5.48a)$$

$$|F_N^* \beta_x| \ll \left| \frac{d\beta_y}{dt} \right|. \quad (5.48b)$$

W pierwszej kolejności całkujemy równania (5.46). Pamiętając o założeniu wolnozmienności uśrednionych części amplitud, uzyskujemy

$$\beta_x(t) = -i \bar{y}_N(t) \int^t f_N(t') dt' - i \bar{z}_N(t) \int^t G_N(t') dt', \quad (5.49a)$$

$$\beta_y(t) = -i \bar{x}_N(t) \int^t f_N^*(t') dt', \quad (5.49b)$$

$$\beta_z(t) = \bar{x}_N(t) \int^t G_N^*(t') dt' . \quad (5.49c)$$

W następnym kroku podstawiamy rozwiązania (5.49) do równań (5.47) na wolne składniki amplitud. Otrzymujemy w ten sposób

$$i \dot{\bar{x}}_N = (\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N}) \bar{x}_N - a_N e^{-i\delta_N t} \bar{y}_N , \quad (5.50a)$$

$$i \dot{\bar{y}}_N = -\Delta_{f_N} \bar{y}_N - a_N e^{i\delta_N t} \bar{x}_N , \quad (5.50b)$$

$$i \dot{\bar{z}}_N = -\Delta_{G_N} \bar{z}_N , \quad (5.50c)$$

gdzie wielkości

$$\begin{aligned} \Delta_{f_N} &= \overline{-i f_N(t) \int f_N^*(t') dt'} \\ &\stackrel{|\delta_N| \ll \omega_0}{=} 2N\omega_0 \left(\frac{\Omega_R}{M_R} \right)^2 \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ n \neq N}} \frac{n^2}{n^2 - N^2} J_n^2 \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) , \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{G_N} &= \overline{-i G_N(t) \int G_N^*(t') dt'} \\ &\stackrel{|\delta_N| \ll \omega_0}{=} 2N\omega_0 \left(\frac{\Omega_R}{M_R} \right)^2 \sum_{p=2,4,6,\dots} \frac{p^2}{p^2 - N^2} J_p^2 \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

mają znaczenie dynamicznych przesunięć Starka poziomów wzbudzonych.

W układzie równań (5.50), pierwsze dwa równania na \bar{x}_N oraz \bar{y}_N są wzajemnie sprzężone. Natomiast trzecie z równań tego układu jest odsprzęgnięte od pozostałych i ma rozwiązanie $\bar{z}_N(t) = \bar{z}_N(0) e^{-i\Delta_{G_N} t} = 0$ (zgodnie z założonymi warunkami początkowymi $\bar{z}_N(0) = 0$). Do pierwszych dwóch równań stosujemy podstawienie

$$\bar{x}_N = u e^{-i(\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})t} , \quad (5.53a)$$

$$\bar{y}_N = v e^{i\Delta_{f_N} t} , \quad (5.53b)$$

i uzyskujemy nowy układ

$$i\dot{u} = -a_N e^{-i[\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})]t} v , \quad (5.54a)$$

$$i\dot{v} = -a_N e^{i[\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})]t} u , \quad (5.54b)$$

którego struktura jest analogiczna do układu jaki uzyskaliśmy w podejściu RWA (5.26), z tą różnicą, że teraz odstrojenie zostało wzbogacone o dynamiczne przesunięcia Starka górnych poziomów. W związku z tym, rozwiązania układu (5.54) możemy uzyskać z równań (5.38) przez zamianę $\delta_N \rightarrow \delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})$ oraz $A_N \rightarrow \bar{A}_N$, gdzie

$$\bar{A}_N = \sqrt{a_N^2 + \left(\frac{\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})}{2} \right)^2} . \quad (5.55)$$

Otrzymujemy wówczas

$$\overline{x}_N^p(t) = \left[\cos(\overline{A}_N t) + i \frac{\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})}{\overline{A}_N} \sin(\overline{A}_N t) \right] e^{-i \frac{\delta_N + \Delta_{G_N}}{2} t}, \quad (5.56a)$$

$$\overline{y}_N^p(t) = i \frac{a_N}{\overline{A}_N} \sin(\overline{A}_N t) e^{i \frac{\delta_N - \Delta_{G_N}}{2} t}, \quad (5.56b)$$

$$\overline{z}_N^p(t) = 0, \quad (5.56c)$$

Te rozwiązania dla wolnozmiennych części amplitud podstawiamy do równań (5.49), otrzymując ewolucję szybkich składowych β_k , gdzie $k = x, y, z$. Zsumowanie przyczynków szybko i wolnozmiennych daje nam pełne rozwiązanie dla amplitud prawdopodobieństw w ramach formalizmu grupy Avetissiana.

Aby znaleźć widmo promieniowania rozproszonego wystarczy we wzorze (5.44) dokonać zastąpień $\delta_N \rightarrow \delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})$ oraz $A_N \rightarrow \overline{A}_N$, co daje

$$\begin{aligned} d^{(N)}(t) = & \mu_{12} \frac{a_N}{2\overline{A}_N} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_{2k} \left(\frac{M_R}{\omega_0} \right) \left\{ \frac{\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})}{\overline{A}_N} [\cos((N-2k)\omega_0 t) + \cos((N+2k)\omega_0 t)] \right. \\ & + \left[1 - \frac{\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})}{2\overline{A}_N} \right] [\cos((N-2k)\omega_0 - 2\overline{A}_N)t + \cos((N+2k)\omega_0 - 2\overline{A}_N)t] \\ & \left. - \left[1 + \frac{\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N})}{2\overline{A}_N} \right] [\cos((N-2k)\omega_0 + 2\overline{A}_N)t + \cos((N+2k)\omega_0 + 2\overline{A}_N)t] \right\}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Te zastąpiecia nie zmieniają struktury widma, a jedynie lekko przesuwają lokalizację pików. W szczególności, widmo rezonansowe ($\delta_N - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N}) = 0$) pozostaje identyczne, jak dla wielofotonowego przybliżenia RWA wprowadzonego w poprzednim podrozdziale. Zmianie ulega jedynie warunek rezonansu.

Przedstawiony tu formalizm Avetissiana nakłada ograniczenia na odstrojenia od rezonansu wielofotonowego oraz na natężenia stosowanych pól. W szczególności, musi być spełniony warunek

$$|\delta_N| \ll \omega_0. \quad (5.58)$$

Warunek małego odstrojenia od ścisłego rezonansu jest związany z obserwacją numeryczną, że już w niewielkiej odległości od rezonansu zmienia się istotnie charakter ewolucji amplitud prawdopodobieństw. Mianowicie, dominującą rolę zaczynają odgrywać szybkie oscylacje, kosztem wolnych, których amplituda staje się znikomo mała. W związku z tym postulat o rozdzieleniu amplitud prawdopodobieństw na dominującą część wolną i małą część szybkozmienną, przestaje być uzasadniony. Ponadto, aby \overline{x}_N

i \bar{y}_N , określone wzorami (5.56), ewoluowały wolno, musi zachodzić

$$|a_N|, |\Delta_{f_N}|, |\Delta_{G_N}| \ll \omega_0. \quad (5.59)$$

Ponieważ wielofotonowa częstość Rabiego i przesunięcia Starkowskie zależą od natężenia pola elektrycznego (poprzez argument funkcji Bessela), to ostatnie założenie ogranicza maksymalną wartość natężenia. Należy w tym miejscu podkreślić, że mimo iż wartość natężenia pola elektrycznego lasera jest ograniczona od góry to, jak zostanie pokazane w rozdziale 5.4, jego dopuszczalna wartość pozostaje nadal znaczna i nie pozwala na zastosowanie prostej perturbacyjnej techniki rachunkowej.

5.3 Przypadek niepełnej degeneracji poziomów wzbudzonych ($\omega_{32} \neq 0$)

W przypadku, kiedy poziomy wzbudzone nie są dokładnie zdegenerowane, lecz różnica energii między nimi $\hbar\omega_{32}$ jest niewielka, tj. $|\frac{\omega_{32}}{\omega_0}| \ll 1$, wówczas podejście zaprezentowane w części 5.2, a zwłaszcza 5.2.3, daje się stosunkowo łatwo rozszerzyć. Przeanalizujemy najpierw funkcję $q(t)$ daną wzorem (5.11), która pojawia się w wyrażeniach (5.10) na $F(t)$ oraz $G(t)$. Wykorzystujemy ponownie rozwinięcie Fouriera-Bessela, ale tym razem dla czynnika $\cos[2\phi(t)]$ tkwiącego w $q(t)$:

$$\cos(2\phi(t)) = J_0\left(\frac{2M_R}{\omega_0}f(t)\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{2M_R}{\omega_0}f(t)\right) \cos(2k\omega_0 t). \quad (5.60)$$

Z tego rozwinięcia oraz symulacji numerycznych wynika, że istotny wkład do całki po czasie w $q(t)$ pochodzi jedynie od funkcji Bessela zerowego rzędu ($J_0\left(\frac{2M_R}{\omega_0}f(t)\right)$). Stosujemy więc przybliżenie

$$\begin{aligned} q(t) &\simeq e^{-i\frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - J_0(\frac{2M_R}{\omega_0}f(t'))) dt'} \\ &= e^{-i\Delta(t)}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

gdzie $\Delta(t) = \frac{\omega_{32}}{2} \int_0^t (1 - J_0(\frac{2M_R}{\omega_0}f(t'))) dt'$.

W tej sytuacji zależne od czasu współczynniki tkwiące w równaniach (5.8) zostają zmodyfikowane tak, że $\omega_{21}t \rightarrow \tilde{\omega}_{21}(t) = \omega_{21}t + \Delta(t)$ oraz $\omega_{31}t \rightarrow \tilde{\omega}_{31}(t) = \omega_{31}t - \Delta(t)$,

co daje

$$F(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n J_n \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) [e^{i(n\omega_0 - \omega_{21})t} + e^{-i(n\omega_0 + \omega_{21})t}] e^{-i\Delta(t)}, \quad (5.62a)$$

$$G(t) = -\omega_0 \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{p=2,4,6,\dots}^{\infty} p J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) [e^{i(p\omega_0 - \omega_{31})t} - e^{-i(p\omega_0 + \omega_{31})t}] e^{i\Delta(t)}, \quad (5.62b)$$

$$H(t) = -\frac{\omega_{32}}{2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} J_k \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) [e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}] e^{-i(\omega_{32}t - 2\Delta(t))}. \quad (5.62c)$$

Ponieważ współczynnik $H(t)$, określony równaniem (5.9c), przyjmuje teraz niezerowe wartości, modyfikacji ulegną równania na wolnozmiennne i szybkozmiennne części amplitud prawdopodobieństw x , y oraz z . W procedurze Avetissiana, dla części szybkozmiennych znajdujemy nowy w stosunku do równań (5.46) układ, mianowicie:

$$i\dot{\beta}_x = \bar{y}_N f_N(t) + \bar{z}_N G_N(t), \quad (5.63a)$$

$$i\dot{\beta}_y = \bar{x}_N f_N^*(t) + H_N(t) \bar{z}_N, \quad (5.63b)$$

$$i\dot{\beta}_z = \bar{x}_N G_N^*(t) + H_N^*(t) \bar{y}_N. \quad (5.63c)$$

Odpowiednikiem równań (5.50) na części wolnozmiennne staje się teraz układ

$$i\dot{\bar{x}}_N = (\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N}) \bar{x}_N - (a_N + \alpha_N) e^{-i(\delta_N t + \Delta(t))} \bar{y}_N, \quad (5.64a)$$

$$i\dot{\bar{y}}_N = -(\Delta_{f_N} - \Delta_H) \bar{y}_N - (a_N + \alpha_N) e^{i(\delta_N t + \Delta(t))} \bar{x}_N, \quad (5.64b)$$

$$i\dot{\bar{z}}_N = -(\Delta_{G_N} + \Delta_H) \bar{z}_N, \quad (5.64c)$$

gdzie

$$\alpha_N = \overline{-iG_N(t) \int H^*(t') dt'}_{|\omega_{32}| \ll \omega_0} \omega_{32} \frac{\Omega_R}{M_R} \sum_{p=2,4,\dots} J_p \left(\frac{M_R}{\omega_0} f(t) \right) J_{p-N} \left(\frac{2M_R}{\omega_0} f(t) \right) \frac{p}{p-N} \quad (5.65)$$

jest dodatkiem do wielofotonowej częstości Rabiego a_N , natomiast

$$\Delta_H \stackrel{|\omega_{32}| \ll \omega_0}{=} \overline{-iH(t) \int H^*(t') dt'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{32}}{\omega_0} \right)^2 \omega_{32} J_0 \left(\frac{2M_R}{\omega_0} f(t) \right) \sum_{n=1,3,\dots} \frac{J_n^2 \left(\frac{2M_R}{\omega_0} f(t) \right)}{n^2}. \quad (5.66)$$

jest dodatkowym przesunięciem starkowskim górnych poziomów.

Zgodnie z powyższymi równaniami, ogólna postać rozwiązań (5.56) pozostaje w mocy, ale z zamianami $a_N \rightarrow a_N + \alpha_N$, $\Delta_{f_N} \rightarrow \Delta_{f_N} - \Delta_H$ oraz $\Delta_{G_N} \rightarrow \Delta_{G_N} + \Delta_H$. W wyniku tych zamian, znajdujemy (dla impulsu prostokątnego $f(t) = 1$) następującą

ewolucję wolnych części amplitud prawdopodobieństw:

$$\bar{x}_N(t) = \left[\cos(\tilde{A}_N t) + i \frac{\delta_N + \Delta - 2\Delta_{f_N} - \Delta_{G_N} - \Delta_H}{\tilde{A}_N} \sin(\tilde{A}_N t) \right] e^{-i \frac{(\delta_N + \Delta + \Delta_{G_N} - \Delta_H)t}{2}}, \quad (5.67a)$$

$$\bar{y}_N(t) = i \frac{a_N + \alpha_N}{\tilde{A}_N} \sin(\tilde{A}_N t) e^{i \frac{(\delta_N + \Delta - \Delta_{G_N} + \Delta_H)t}{2}}, \quad (5.67b)$$

$$\bar{z}_N(t) = 0, \quad (5.67c)$$

gdzie

$$\tilde{A}_N = \sqrt{(a_N + \alpha_N)^2 + \left(\frac{\delta_N + \Delta - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N} + \Delta_H)}{2} \right)^2}. \quad (5.68)$$

Z rozwiązania (5.67) wnioskujemy o warunku rezonansowym, tj., o tym jaka powinna być centralna częstość pola lasera, aby osiągnąć całkowitą inwersję obsadzeń w układzie.

Częstość ta musi spełniać warunek

$$\delta_N + \Delta - 2\Delta_{f_N} - \Delta_{G_N} - \Delta_H = 0. \quad (5.69)$$

Wykorzystując definicję odstrojenia od wielofotonowego rezonansu, $\delta_N = \omega_{21} - N\omega_0$, możemy ostatecznie podać wartość częstości rezonansowej jako

$$\omega_0^{res} = \frac{\omega_{21} + \Delta - 2\Delta_{f_N} - \Delta_{G_N} - \Delta_H}{N}. \quad (5.70)$$

Ponieważ odstrojenia Starkowskie Δ_{f_N} , Δ_{G_N} oraz Δ_H , jak również przesunięcie Δ , zależą od natężenia pola elektrycznego (poprzez argumenty funkcji Bessela), więc i częstość rezonansowa wykazuje tego rodzaju zależność.

5.4 Wyniki

5.4.1 Pełna degeneracja poziomów wzbudzonych

Jako przykład układu Γ z parą zdegenerowanych poziomów wzbudzonych wybraliśmy trzy najniższe leżące stany elektronowe atomu wodoru, tj., $|1\rangle = |1S\rangle$, $|2\rangle = |2P\rangle$ i $|3\rangle = |2S\rangle$. W tym przypadku, energia wzbudzenia wynosi $\omega_{21} = \omega_{31} = \frac{3}{8}$ a.u., zaś dipolowe momenty przejścia to $\mu_{12} = 0.745$ a.u. oraz $\mu_{23} = -3$ a.u., skąd ich iloraz $\mu_{12}/\mu_{23} = -0.248$. Dla wybranego N-fotonowego rezonansu, częstość rezonansowa zadana jest wzorem (5.55), mianowicie $\omega_0 = \frac{1}{N}(\omega_{21} - (2\Delta_{f_N} + \Delta_{G_N}))$. Wartość natężenia pola elektrycznego dobieramy tak, aby spełnione były warunki (5.58) i (5.59) stosowalności formalizmu. W szczególności, oznacza to, że dla wybranego N-fotonowego

rezonansu musi zachodzić $|a_N/\omega_0| = |N \frac{\mu_{12}}{\mu_{23}} J_N \left(\frac{M_R}{\omega_0} \right)| \ll 1$. Wybierając, na przykład, $N = 5$, z warunku $|a_5/\omega_0| \leq 0.1$ wynika ograniczenia na natężenie pola postaci $M_R/\omega_0 \leq 3.5$. W związku z tym, wybieramy $M_R/\omega_0 = 1.5$, otrzymując dla tak zadanych parametrów natężeniowych wartości przesunięć Starka: $\Delta_{f_5} = -0.00926 \omega_0$ oraz $\Delta_{G_5} = -0.00646 \omega_0$. Otrzymujemy stąd częstość rezonansową dla 5-fotonowego rezonansu równą $\omega_0 = 0.0754$ a.u.. Z obliczonej wartości ω_0 wynika wartość amplitudy natężenia pola elektrycznego lasera równa $E_0 = 1.5\omega_0/|\mu_{23}| = 0.0377$ a.u., odpowiadająca intensywności $1.42 \cdot 10^{-3}$ a.u. (tj., $4.99 \cdot 10^{13} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$).

Jeśli chcemy określić czas potrzebny do uzyskania pełnej inwersji obsadzeń, to musimy przyjąć, że argument funkcji trygonometrycznych tkwiący w rozwiązaniach (5.38) (prostokątna obwiednia $f(t) = 1$) lub (5.39) (gładka obwiednia), jest równy π , czyli

$$\int_0^{t_p} a_N(t') dt' = \pi. \quad (5.71)$$

Dla prostokątnej obwiedni impulsu mamy, po prostu,

$$t_p = \frac{\pi}{a_N}, \quad (5.72)$$

co, w przypadku analizowanego układu i zadanych parametrów, daje wartość 112-cykli pola lasera, czyli 0.225 ps. W przypadku impulsu o gładkiej obwiedni, czas potrzebny na uzyskanie pełnej inwersji będzie dłuższy. Wynika to z faktu, że dla impulsu o zadanym czasie trwania, powierzchnia pod gładką obwiednią jest mniejsza od powierzchni pod prostokątem. Aby określić zależność między długością impulsu prostokątnego prowadzącego do pełnej inwersji obsadzeń i długością impulsu o dowolnej gładkiej obwiedni, przyrównujemy do siebie odpowiednie pola powierzchni:

$$a_N t_p = \int_0^{t_f} a_N(t') dt', \quad (5.73)$$

gdzie t_f jest długością gładkiego impulsu, prowadzącego do pełnej inwersji obsadzeń.

Następnie wykorzystujemy rozwinięcie funkcji Bessela [11, 40]

$$J_n(zf(t)) = f^n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1/2z(1-f^2(t))]^k}{k!} J_{n+k}(z). \quad (5.74)$$

Dla argumentów, dla których funkcja Bessela przyjmuje małe wartości sumę po prawej stronie można przybliżyć wyrazem z $k = 0$. Wówczas

$$J_n(zf(t)) \simeq J_n(z)f^n(t). \quad (5.75)$$

Na podstawie tego przybliżenia, warunek (5.73) przyjmuje postać

$$t_p = a_N \int_0^{t_f} f^N(t') dt'. \quad (5.76)$$

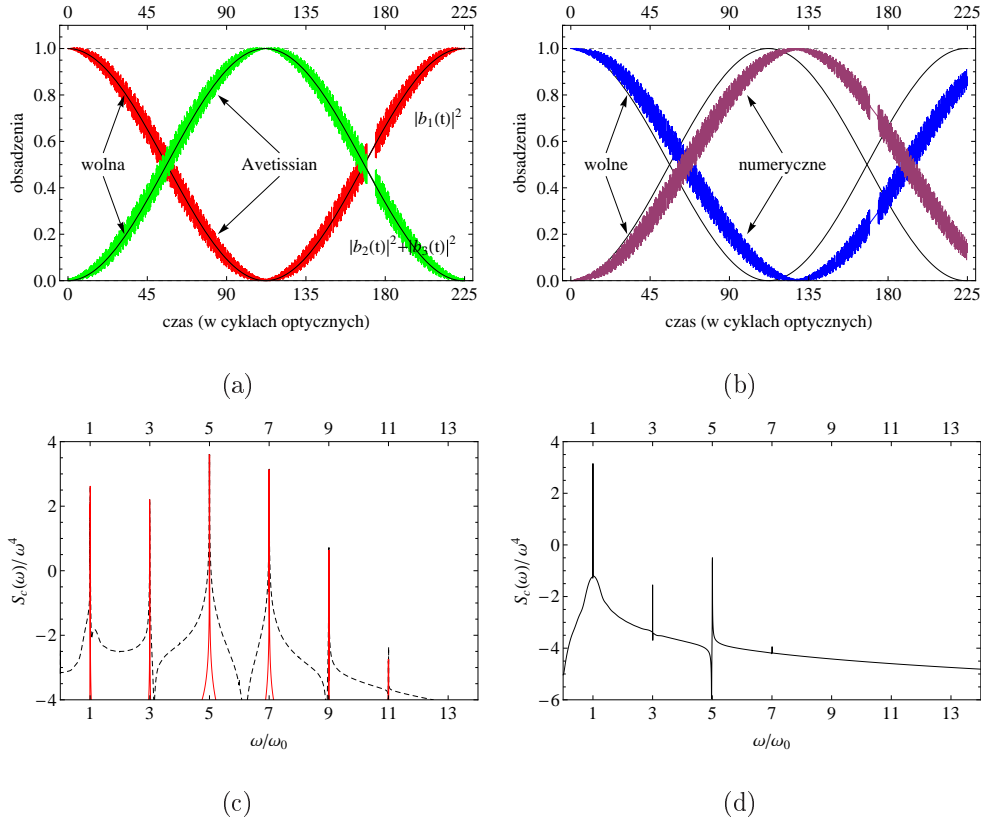
Wybierając impuls o obwiedni $f(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_f}\right)$ oraz wykonując nakazane wzorem (5.76) całkowanie znajdujemy, że dla rezonansu 5-fotonowego

$$t_f = \frac{256}{63}t_p \simeq 4t_p. \quad (5.77)$$

Dla wcześniej zadanej częstości ω_0 oznacza to, że impuls gładki, by wywołać pełną inwersję, musi mieć długość $t_f = 0.914$ ps.

Dla powyższych parametrów natężeniowo-częstościowych, na Rysunku 5.3 przedstawiamy ewolucję populacji poziomów oraz koherentną część widma promieniowania rozproszonego. Rysunki 5.3 *a* oraz 5.3 *b* prezentują ewolucję obsadzeń poziomu podstawowego, $|b_1(t)|^2$, oraz całkowite prawdopodobieństwo obsadzenia któregoś z poziomów wzbudzonych, $|b_2(t)|^2 + |b_3(t)|^2$. Czarna, ciągła linia wynika z prostych rozwiązań analitycznych danych wzorami (5.56). Linie koloru czerwonego i zielonego na Rysunku 5.3 *a* są krzywymi wyznaczonymi analitycznie z wykorzystaniem formalizmu Avetissiana, przedstawionego w rozdziale 5.2.3. W części *b* tego rysunku, krzywe o szybkich oscylacjach (kolor niebieski i brązowy) stanowią wynik numerycznego całkowania wyjściowego ścisłego układu równań (5.1) dla impulsu o czasie narastania równym 10 cyklom optycznym i z funkcją obwiedni $f(t) = \sin^2(\omega_0 t/40)$, gdzie $\omega_0 t/40 \leq \pi/2$. Porównanie Rysunków 5.3 *a* oraz 5.3 *b* pozwala stwierdzić, że rozwiązanie analityczne jakościowo dobrze naśladuje rezultaty uzyskane drogą numerycznego całkowania. Rozwiązania te nie są jednak identyczne. Analityczne i numeryczne prawdopodobieństwa obsadzeń oscylują, jak widać, z nieco innymi częstościami. W warunkach pełnej inwersji obsadzeń, na Rysunku 5.3 *c* pokazano ponadto koherentną część widma promieniowania rozproszonego (czerwony kolor - Równanie (5.44), linia przerywana - numeryczne całkowanie układu równań (5.1)). Jak widać, widmo wyznaczone analitycznie zgadza się z widmem otrzymanym numerycznie jeśli chodzi o liczbę pików, ich położenia oraz względne wysokości. Pewne różnice pojawiają się jedynie w wysokości pików.

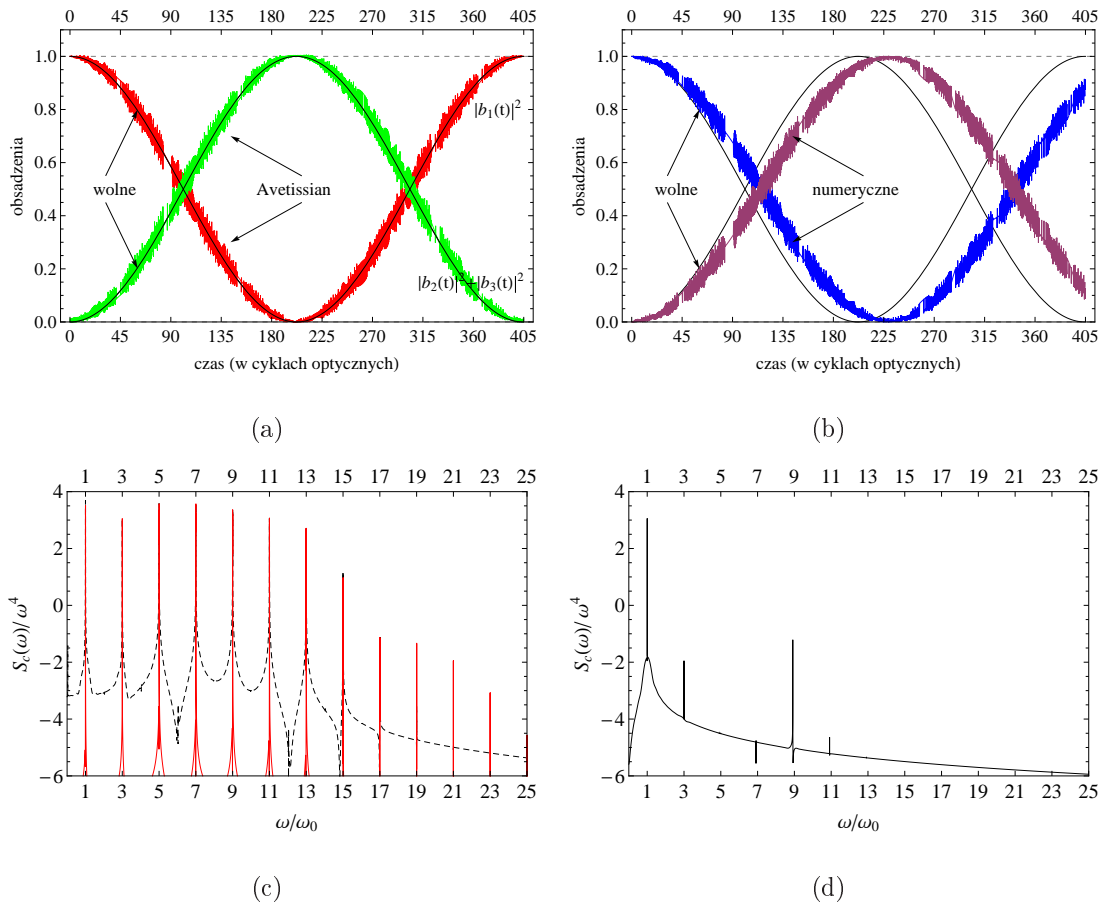
Należy podkreślić, że pominięcie trzeciego poziomu (2 S) w modelu Γ , prowadzi do zupełnie innej struktury widma. Dla układu dwupoziomowego (1 S+ 2 P) i tych samych pozostałych parametrów co dla układu trójpoziomowego, scałkowano numerycznie zredukowany układ równań (5.1). Dla dwupoziomowca obserwujemy jedynie nieznaczną depopulację poziomu podstawowego, zaś widmo promieniowania rozproszonego (Rysunek 5.3 *d*) jest znacznie uboższe i zawiera jedynie cztery składniki spektralne



Rysunek 5.3: Piętofotonowy ($N = 5$) rezonans $1S \rightarrow 2P$ w atomie wodoru wywołany impulsem laserowym o polu elektrycznym $E_0 = 0.0377$ a.u. oraz częstotliwości $\omega_0 = 0.0754$ a.u..
 (a) Uzyskane analitycznie ewolucje obsadzeń poziomu podstawowego (kolor czerwony) oraz sumy obsadzeń poziomów wzbudzonych (kolor zielony). Dodatkowo kolorem czarnym oznaczono obsadzenia wynikające z przybliżonych równań (5.56). (b) Numeryczne rozwiązania równania (5.1). Kolor niebieski - obsadzenie poziomu podstawowego, kolor brązowy - suma obsadzeń poziomów wzbudzonych, kolor czarny - jak w części (a). (c) Koherentna część widma promieniowania rozproszonego. Kolorem czerwonym oznaczono przybliżone widmo analityczne (równanie (5.57)), zaś linią przerywaną widmo uzyskane numerycznie. Małe szybkie oscylacje nałożone na wolną ewolucję w części (a) pochodzą z przybliżonego rozwiązania, wykorzystującego formalizm Avetissiana i innych, podczas gdy krzywa w (b) odpowiada numerycznemu rozwiązaniu równania (5.1) dla impulsu o czasie narastania równym 10-cyklom, a następnie stałej amplitudzie. Jako funkcję narastania wybrano $\sin^2(\omega_0 t/40)$. W części (c), numeryczne widmo (linia przerywana) zostało uzyskane dla pola z tą samą funkcją włączania co w (b). (d) Numerycznie wyznaczone widmo koherentnego rozpraszania przez układu dwupoziomowy otrzymany w wyniku pominięcia trzeciego stanu na Rysunku 5.1.

($\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$). Dodatkowo, trzecia i siódma harmoniczna są znacznie słabiej wyartykułowane niż dla trójpoziomowca. Widzimy więc, że obecność trzeciego poziomu (2S), silnie sprzężonego z drugim poziomem wzbudzonym (2P), znacząco modyfikuje odpowiedź układu na pole lasera, pozwalając na efektywniejsze wzbudzenia wielofotonowe oraz znacznie silniejszą generację wyższych harmonicznych.

5.4.2 Niepełna degeneracja poziomów wzbudzonych



Rysunek 5.4: Dziewięcioletonowy rezonans ($N = 9$) w jonie molekularnym N_2^{4+} wywołany wiązką lasera o polu elektrycznym $E_0 = 0.099$ a.u. i częstotliwości rezonansowej $\omega_0 = 0.0754$ a.u. (ω_0 taka sama jak na Rysunku 5.3). Opis jak na Rysunku 5.3. (d) Numerycznie otrzymane widmo koherentnego rozpraszania dla układu dwupoziomowego, otrzymanego przez pominięcie trzeciego stanu w układzie z Rysunku 5.1.

W przypadku niepełnej degeneracji poziomów wzbudzonych wykorzystamy parametry obliczone przez Gibsona [25] dla jego modelu homojądrowych jonów molekular-

nych o parzystym ładunku dodatnim N_2^{4+} . Jak wynika z rysunków 10 oraz 11 pracy Gibsona [26], gdy odległość międzyjądrowa wynosi 3.5 a.u., trzy najniższe poziomy molekularne są rozmieszczone w ten sposób, że $\omega_{21} = 0.6685$ a.u. i $\omega_{32} = 0.0167$ a.u.. Ponadto, macierzowe elementy dipolowe przejść są wtedy równe $\mu_{12} = 0.503$ a.u. oraz $\mu_{23} = 3.033$ a.u.. Dla ilustracji, zakładamy rezonans 9-fotonowy ($N = 9$), dla którego przewidywana częstość rezonansowa, wynikająca z równania (5.70), wynosi $\omega_0 = \frac{1}{9}(\omega_{21} + \Delta - (2\Delta_{f_9} + \Delta_{G_9}) + \Delta_H)$. Przyjmując ograniczenie na natężenie pola elektrycznego w postaci $|a_0/\omega_0| \leq 0.1$, znajdujemy, że musi ono spełniać wymóg $M_R/\omega_0 \leq 7.15$. Wybieramy więc $M_R/\omega_0 = 4$. Dla tej wartości parametru M_R/ω_0 i prostokątnej obwiedni impulsu wyznaczono niezbędne parametry: $\Delta = 0.0069$ a.u., $\Delta_{f_9} = -0.0155\omega_0$ oraz $\Delta_{G_9} = -0.014\omega_0$. Wartość częstości rezonansowej dla tego parametru natężeniowego jest równa $\omega_0 = 0.0754$ a.u., a zatem przypadkowo wynosi tyle samo, co w rozważanym wcześniej rezonansie 5-fotonowym w atomie wodoru. Dla tak wyznaczonej częstości rezonansowej ω_0 uzyskujemy separację poziomów wzbudzonych $\omega_{32}/\omega_0 = 0.22$ oraz amplitudę pola elektrycznego $E_0 = 0.099$ a.u.. Ta amplituda przekłada się na natężenie wiązki lasera równe 0.0098 a.u. ($3.44 \cdot 10^{14} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$). Zgodnie z analizą Gibsona [26], w polu o tym natężeniu ewolucja obsadzenia w rzeczywistym jonie molekularnym odbywa się praktycznie tylko w obrębie jego trzech najniżej położonych poziomów. Podobnie jak poprzednio, wyznaczamy następnie czas potrzebny do uzyskania pełnego przepompowania obsadzenia z poziomu podstawowego do poziomów wzbudzonych. Z warunku (5.72) wynika, że czas ten jest równy 128-cyklom, a więc wynosi 0.335 ps.

Dla wybranych wyżej parametrów natężeniowo-częstościowych, Rysunek 5.4 przedstawia ewolucję prawdopodobieństw obsadzeń poziomów oraz widmo promieniowania rozproszonego. Jak widać, zgodność wyników analitycznych z numerycznymi jest w tym przypadku podobna jak dla przypadku atomu wodoru (Rysunek 5.3). Charakterystyczne jest to, że widmo generowane przez układ molekularny jest bogatsze. Zawiera ono bowiem 12 linii, w porównaniu do tylko 6 linii spektralnych znajdujących się w widmie światła rozproszonego przez atom wodoru. Widmo dla takiego układu trójpoziomowego jest jednocześnie znacznie bogatsze od widma odpowiedniego układu dwupoziomowego, powstałego przez pominięcie najwyższej położonego poziomu wzbudzonego. Widmo takiego układu dwupoziomowego zaprezentowano na Rysunku 5.4 *d*.

Zawiera ono tylko cztery składowe spektralne, które są wyraźnie słabiej wyartykułowane niż odpowiednie składniki widma trójpoziomowca.

5.5 Podsumowanie

W tym rozdziale przeprowadzono analityczne rozważania dotyczące wielofotonowych wzbudzeń w trójpoziomowych układach typu Γ . Rozważano także generację harmonicznych umiarkowanie wysokiego rzędu przez takie układy. Niezwykle istotną własnością rozważanych układów była znaczna odległość między poziomem podstawowym a parą całkowicie lub częściowo zdegenerowanych poziomów wzbudzonych. Ponadto, w tych układach element macierzowy sprzężenia dipolowego między poziomami wzbudzonymi był znacznie większy niż odpowiedni element sprzężenia między poziomem podstawowym a poziomem wzbudzonym o przeciwnej parzystości.

W szczególności, rozważono 5-fotonowe wzbudzenie w atomie wodoru oraz 9-fotonowe wzbudzenie w jonie molekularnym N_2^{4+} . Pokazano, że możliwe jest uzyskanie pełnej inwersji obsadzeń w tych układach w wyniku ich oddziaływania z subpikosekundowymi impulsami lasera o umiarkowanym natężeniu ($5 \cdot 10^{13} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ dla atomu wodoru oraz $3.44 \cdot 10^{14} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ dla jonu molekularnego). W obu przypadkach znaleziona częstość rezonansowa wynosiła 0.0754 a.u. (2.05 eV).

Ponadto, obliczono koherentną część widma promieniowania rozproszonego przez badane układy. Widmo składało się z harmonicznych nieparzystego rzędu i było bogatsze niż z układu dwupoziomowego składającego się z poziomu podstawowego i tylko jednego poziomu wzbudzonego.

Otrzymane rozwiązania analityczne zgadzały się dość dobrze jakościowo z rozwiązaniami numerycznymi. Pewne różnice ilościowe dotyczyły częstości ewolucji prawdopodobieństw obsadzeń oraz wysokości niektórych składników spektralnych i wysokości tła widma. Obserwowane różnice ilościowe mogą być spowodowane niezupełnie dokładnym określeniem częstości rezonansowej ω_0 . Stwierdzono, że niewielka zmiana analitycznie obliczonej częstości rezonansowej prowadziła do uzyskania lepszej zgodności między krzywymi analitycznymi i numerycznymi.

Rozdział 6

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono analityczny opis wielofotonowych wzbudzeń w efektywnie trójpoziomowych układach atomowych i molekularnych w konfiguracji Λ i Γ .

1. Dla układów trójpoziomowych w konfiguracji Λ , ze słabo depopulowanym poziomem podstawowym, opracowano analityczny formalizm perturbacyjny (rozdział 3). Został on oparty na układzie dwóch sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych na zmienne będące ilorazami odpowiednich amplitud prawdopodobieństw. Wykorzystując ten formalizm wyznaczono ewolucje amplitud prawdopodobieństw w granicy niskich częstości ($\omega_0 \ll \omega_{21}$) i słabego sprzężenia ($\Omega_R/\omega_{21} \ll 1$). Te amplitudy posłużyły do obliczenia koherentnego i pełnego widma światła rozproszonego dla różnych parametrów natężeniowo-częstościowych oraz różnych kształtów obwiedni impulsu. Stwierdzono, że widmo rozpraszania przez układy trójpoziomowe jest bogatsze niż przez dwupoziomowe. Zwrócono uwagę na wpływ kształtu impulsu na widma. Znaleziono istotne różnice między widmem pełnym i jego koherentną częścią w szczególności, zwrócono uwagę na maskowanie pewnych składowych widma koherentnego przez wysokie tło wynikające z niekoherentnej części pełnego widma.
2. W dalszej części (rozdział 4) rozszerzono opis zachowania układów trójpoziomowych w konfiguracji Λ tak by objął on przypadek silnej depopulacji poziomu podstawowego. Przypadek ten ma miejsce w warunkach parzystofotonowego rezonansu między dwoma najniższymi stanami układu. Opracowano ana-

lityczny formalizm rachunkowy, który opierał się na dwóch przybliżeniach: adiabaticznej eliminacji praktycznie nieobsadzanego stanu najwyższego układu oraz uogólnionym (wielofotonowym) przybliżeniu wirującej fali. W ramach tego formalizmu znaleziono wyrażenia opisujące ewolucje obsadzeń, w tym wzór na wielofotonową częstość Rabięgo z jaką wymieniane jest obsadzenie między rezonansowo sprzężonymi poziomami dolnymi. Wyprowadzono również warunek na długość impulsu gwarantującą osiągnięcie pełnej inwersji obsadzeń w wyniku wielofotonowych wzbudzeń w układzie. Ponadto, obliczono widmo koherentnego rozpraszania wskazując na dubletową strukturę generowanych harmonik częstości lasera.

3. Dla trójpoziomowego układu w konfiguracji Γ (rozdział 5) rozszerzono formalizmy analityczne Gibsona oraz Avetissiana i współpracowników. Wykorzystując rozszerzone wersje tych podejść wyznaczono ewolucje amplitud prawdopodobieństw w warunkach wielofotonowego rezonansu między poziomem podstawowym a jednym z poziomów wzbudzonych. Wyprowadzono warunek na wymaganą częstość rezonansową lasera, jak również warunek na czas oddziaływania potrzebny do uzyskania pełnej inwersji obsadzeń. Potwierdzono na drodze analitycznej, że silnie sprzężona para poziomów wzbudzonych, charakteryzowana dużym dipolem przejścia, jest zasadniczym czynnikiem warunkującym efektywne wzbudzenia wielofotonowe w układzie Γ . Pokazano, że trójpoziomowy układ Γ jest znacznie efektywniejszym generatorem umiarkowanie wysokich harmonik częstości lasera niż układ dwupoziomowy. Otrzymane wyniki wskazują na możliwość wydajnej generacji wyższych harmonik częstości lasera w ramach mechanizmu, który angażuje wyłącznie stany związane układu. Ten mechanizm istotnie różni się od powszechnie uznanego mechanizmu trójstopniowego złożonego z początkowej wielofotonowej jonizacji, potem rozpraszania swobodnego elektronu na jonie w asyście pola lasera i w końcu rekombinacji szybkiego elektronu połączonej z emisją wysokoenergetycznego fotonu [41].
4. Stwierdzono dobrą jakość własnych przybliżonych podejść analitycznych (rozdziały 3, 4 i 5) na drodze porównania wyników jakie dają te podejścia z wynikami rozwiązań od początku do końca numerycznych. Zasadnicze elementy opracowanych podejść zostały opublikowane w trzech artykułach (Phys. Rev. **A** **80**, 033834

(2009); J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **44**, 105502 (2011); Phys. Rev. **A 82**,
023804 (2010))

Bibliografia

- [1] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1997)
- [2] S. Hughes, Phys. Rev. Lett. **81** 3363 (1998); Phys. Rev. A **62**, 055401 (2000)
- [3] O. D. Mücke, T. Tritschler, M. Wegener, U. Morgner, F. X. Kärtner, Phys. Rev. Lett. **87**, 057401 (2001); Phys. Rev. Lett. **89**, 127401 (2002); Phys. Rev. Lett. **90**, 217404 (2003)
- [4] B. Sundaram, P. W. Milloni, Phys. Rev. A **41**, 6571 (1990)
- [5] L. Plaja, L. Roso-Franco, J. Opt. Soc. Am. **B 9**, 2210 (1992)
- [6] T. Zuo, S. Chelkowski, Phys. Rev. A **48**, 3837 (1993); Phys. Rev. A **49**, 3943 (1994)
- [7] M. Yu. Ivanov, P. B. Corkum, Phys. Rev. A **48**, 580 (1993)
- [8] M. Yu. Ivanov, P. B. Corkum, P. Dietrich, Laser Phys. **3**, 375 (1993)
- [9] R. Bavli, H. Metiu, Phys. Rev. Lett. **69**, 1986 (1992); Phys. Rev. A **47**, 3299 (1993)
- [10] M. A. Kmetić, W. J. Meath, Phys. Lett. A **108**, 340 (1985); Phys. Rev. A **41**, 1556 (1990)
- [11] A. Brown, W. Meath, P. Tran, Phys. Rev. A **63**, 013403 (2000)
- [12] A. E. Kondo, W. J. Meath, Mol. Phys. **74**, 113 (1991); Mol. Phys. **92**, 805 (1997)
- [13] G. E. Thomas, Phys. Rev. A **33**, 1033 (1986)

- [14] M. A. Kmetec, R. A. Thuraisingham, W. J. Meath, Phys. Rev. **A 33**, 1688 (1986)
- [15] H. K. Avetissian, B. R. Avchyan, G. F. Mkrtchian, arXiv:1106.2249v1
- [16] R. E. Duvall, E. J. Valeo, C. R. Oberman, Phys. Rev. **A 37**, 4685 (1988)
- [17] K. J. Boller, A. Imamoglu, S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **66**, 2593 (1991)
- [18] S. E. Harris, Opt. Lett. **19**, 2018 (1994)
- [19] D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, V. V. Yashchuk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1767 (1999)
- [20] M. D. Lukin, S. F. Yelin, M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **84**, 4232 (2000)
- [21] B. W. Shore, Acta Physica Slovaca **58**, 243 (2008)
- [22] H. K. Avetissian and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. A **66**, 033403 (2002)
- [23] H. K. Avetissian, B. R. Avchyan, G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. **A 74**, 063413 (2006)
- [24] H. K. Avetissian, B. R. Avchyan and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. A **77**, 023409 (2008)
- [25] G. N. Gibson, Phys. Rev. Lett. **89**, 263001 (2002)
- [26] G. N. Gibson, Phys. Rev. A **67**, 043401 (2003)
- [27] P. G. Lappas, M. V. Fedorov, J. H. Eberly, Phys. Rev. A **45**, 4706 (1992)
- [28] M. Berent, R. Parzyński, Phys. Rev. A **80**, 033834 (2009)
- [29] R. Parzyński, M. Sobczak, A. Plucińska, Acta Phys. Polon. A **106**, 827 (2004);
R. Parzyński, A. Plucińska, Acta Phys. Polon. A **108**, 959 (2005); A. Plucińska,
R. Parzyński, J. Mod. Opt. **54**, 745 (2007)
- [30] A. Plucińska *Ekstremalna optyka nieliniowa w ujęciu równania Riccatiego dla układu dwóch poziomów*, Poznań 2007, rozprawa doktorska
- [31] Y. V. Rostovtsev, H. Eleuch, A. Svidzinsky, H. Li, V. Sautenkov, M. O. Scully, Phys. Rev. A **79**, 063833 (2009)

- [32] M. Berent, R. Parzyński, J. Phys. B **44**, 105502 (2011)
- [33] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Wiley-Interscience, New York, 1975)
- [34] M. Berent, R. Parzyński, Phys. Rev. A **82**, 023804 (2010)
- [35] M. Gatzke, M. C. Baruch, R. B. Watkins, T. F. Gallagher, Phys. Rev. A **48**, 4742 (1993)
- [36] S. Guerin, F. Monti, J.-M. Dupont, H. R. Jauslin, J. Phys. **A 30**, 7193 (1997)
- [37] F. H. M. Faisal, J. Z. Kamiński, Phys. Rev. **A 56**, 748 (1997)
- [38] Yong-Lin He, Phys. Rev. **A 84**, 053414 (2011)
- [39] P. Caldara, E. Fiordilino, J. Mod. Opt. **46**, 743 (1999)
- [40] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition (Elsevier, London, 2007)
- [41] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu Ivanov, A. L'Huillier, P. B. Corkum, Phys. Rev. **A 49**, 2117 (1994)