RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok L — zeszyt 3 — 1988

ALEKSANDER ZELIAS

PROBLEM WSPÓŁLINIOWOŚCI ZMIENNYCH W EKONOMETRII

I

W pracy niniejszej poświęcimy, uwagę sprawie o poważnym znaczeniu, a mianowicie współliniowości (multicollinearity) zmiennych. Problem ten jest o tyle ważny, że — jak wiemy — w nowoczesnej ekonometrii dużą uwagę przywiązuje się do analiz typu dynamicznego.

Będziemy przy tym odróżniać współliniowość dokładną (perfect multicollinearity) od przybliżonej. W pierwszym przypadku wektory zmiennych objaśniających $X_i, \ldots, X_k$ są liniowo zależne i jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych, w drugim wektory te są liniowo niezależne, a jeden z nich stanowi w przybliżeniu kombinację pozostałych wektorów.

Dokładna współliniowość zmiennych uniemożliwia estymację parametrów klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Współliniowość przybliżona takiej estymacji nie wyklucza, jednakże pojawiające się błędy średnie szacunku parametrów są w tym przypadku nadmierne, a w stosunku do wartości ocen parametrów, wiele zmiennych objaśniających ma charakter statystycznie nieistotny.

Współliniowość przybliżona, czyli nadmierne skorelowanie między zmiennymi[1], jest pojęciem złożonym. Wynikają stąd też ogromne trudności jego poprawnego zdefiniowania. Zauważmy, że zjawiska tego nie można opisać za pomocą równania parametrycznego, tzn. tak, jak czyni się to np. w przypadku autokorelacji składnika losowego. Warto również pamiętać o tym, iż współliniowość jest własnością zaobserwowanej próby (zmiennych objaśniających). Między natężeniem tego zjawiska w zaob-

[1] Warto tu zwrócić uwagę, że mówiąc o skorelowaniu zmiennych, powinniśmy założyć losowość tych zmiennych. W standardowym modelu liniowym przyjmuje się natomiast nieweryfikowalne założenie, że zmienne objaśniające są nielosowe, to zaś oznacza, że współczynnik korelacji liniowej r_{ij} między zmiennymi X_i i X_j (i, j=1, ..., *k; i=1*) powinien być interpretowany jako miernik, który przyjmuje wartości z przedziału (—1, +1). Nie można zatem na jego podstawie prowadzić wnioskowania statystycznego.

serwowanej próbie a określonymi parametrami zbiorowości generalnej nie ma żadnego związku.

Zagadnienie współliniowości statystycznej [2] jest jednym z tych problemów, które od dawna interesują ekonometryków. Problematyka ta dość często gości na łamach czasopism naukowych, a nawet stanowi przedmiot opracowań monograficznych[3]. Nic w tym dziwnego. Jest to bowiem jeden z kluczowych problemów drążących umysły osób zajmujących się sprawami modelowania i prognozowania ekonometrycznego. Podejmowane jednak w Polsce i innych krajach wysiłki na rzecz choćby tylko ograniczenia intensywności występowania współliniowości okazują się jak dotąd mało skuteczne.

W tym miejscu warto wspomnieć, że już w latach trzydziestych obecnego stulecia zaczęto zdawać sobie sprawę z poważnych konsekwencji występowania zjawiska współliniowości w zaobserwowanej próbie. Pierwszym, który zwrócił na to uwagę, był R. Frisch[4] Zapoczątkował on systematyczne badania w tym zakresie, które obecnie dzięki komputerom pozwalają na przeprowadzanie dużej liczby doświadczeń, każdorazowo zmieniając liczbę badanych zmiennych objaśniających oraz różnicując narastanie mocy współliniowości między nimi[5].

Rozważania na temat współliniowości zmiennych są prowadzone w zależności od sformułowanego uprzednio celu badania ekonometrycznego, a mianowicie celu analitycznego lub celu predyktywnego.

Pierwszy z wymienionych celów skłania badaczy do wyboru takich

[2] W wielu pracach współliniowość jest definiowana jako prawie dokładna zależność liniowa między zmiennymi objaśniającymi. W literaturze przedmiotu tego rodzaju prawidłowość określana jest jako współliniowość prawie dokładna, współliniowość wielokrotna lub też jako łączna korelacja. Por. w tej .sprawie np. pracę A. Zeliasla, Z *problematyki badania współliniowości w modelach ekonometrycznych,* Przegląd Statystyczny 1977, z. 2.

[3] Por. np. prace: M. Gruszczyński, M. Koilupa, E. Leniewska, G. Napiórkowski, *Miary zgodności, metody doboru zmiennych, problemy współliniowości,* Warszawa 1979; T. Grabiński, S. Wydymus, A. Zieliaś, *Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych,* Warszawa 1982; J. Jakubczyc, *Współliniowość statystyczna,* Warszawa 1987. O zagadnieniach tych traktują także prace: R/S. Pindyck, D. L. Rubinfeld, *Econometric Models and Economic Forecasts,* New York 1981; G. C. Chow, *Econometrics,* Auckland 1983; T. W. Mirer, *Economic Statistics and Econometrics,* New York 1983; D. Gujarati, *Basic Econometrics,* Auckland 1985.

[4] R. Frisch, *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems,* Institute of Economics, Oslo University 1934, nr 5.

[5] Por. przykładowo: M. Gruszczyński, *Współliniowość zmiennych i jej wpływ na estymacją modeli ekonometrycznych* (rozprawa doktorska), Warszawa 1977 (maszynopis); M. Kosiorowska, *Wielokrotna współliniowość zmiennych i* jej *wpływ na efektywność estymacji parametrów modeli ekonometrycznych* (rozprawa doktorska), Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1979 (maszynopis); E. Maksymiak, *Analiza odporności ocen parametrów modelu ekonometrycznego w warunkach współliniowości zmiennych objaśniających* (rozprawa doktorska), Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1987 (maszynopis).

zmiennych objaśniających, przy których pojawiają się oceny parametrów istotnie różne od zera. Dodatkowo, oceny te powinny być efektywne, tzn. takie, dla których wariancje będą możliwie małe, zaś ich znaki zgodne z merytorycznymi oczekiwaniami.

Drugi z wymienionych celów prowadzi do wyboru takich zmiennych objaśniających, które utworzą hiperpłaszczyznę regresji najlepiej dopasowaną do danych empirycznych. Mniej uwagi zwraca się natomiast na silne liniowe powiązania między zmiennymi objaśniającymi, gdyż zmienne skażone współliniowością mogą dawać zadowalającą predykcję (trafne prognozy).

Należy podkreślić, że w większości prac poświęconych istocie współliniowości wyraźnie akcentowany jest fakt, iż w rozważaniach uwzględnia się analityczny cel badania ekonometrycznego, gdyż próbujemy poznać przyczynowo-skutkowy charakter powiązań między badanymi zmiennymi.

Zauważmy, iż w ramach omawianego kierunku poszukiwań, prowadzący badania może zastanawiać się nad źródłami (przyczynami) powstawania współliniowości, pomiarem stopnia jej intensywności lub też metodami szacowania parametrów modelu, w przypadku wykrycia w nim silnego skorelowania zmiennych objaśniających. W nurcie tych żywych i mnożących się badań zrobiono wiele, lecz rzeczywistość gospodarcza weryfikuje sens i konieczność dalszych tego rodzaju poszukiwań.

Źródła współliniowości zmiennych ekonomicznych mają głównie charakter obiektywny, jako że zmienne objaśniające są odzwierciedleniem określonych logicznie powiązanych ze sobą zjawisk ekonomicznych (np. majątek trwały i zatrudnienie w funkcji produkcji). Dlatego też bardzo wiele zmiennych ekonomicznych jest mocno współzależna[6]. Jako obiektywną przyczynę współliniowości wymienia się też fakt uwzględnienia w modelu zmiennych opóźnionych w czasie. Uwzględniając powyższe, możemy np. napisać:

$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \alpha_3 X_{t-1} + \alpha_4 X_{t-2} + \alpha_5 X_{t-3} + u_t, \tag{1}$$

gdzie *Yt* jest poziomem konsumpcji, *Xt* oznacza dochód, $\alpha_3, \ldots, \alpha_5$ są parametrami, u_t zaś jest składnikiem losowym.

Jeśli opóźnienie nie jest duże, to można oczekiwać silnego skorelowania zmiennych bez opóźnień ze zmiennymi opóźnionymi. Są też inne subiektywne przyczyny pojawiania się współliniowości. Współliniowość może wystąpić na skutek nadmiaru zmiennych objaśniających wprowadzonych do modelu, błędnego wyboru schematu losowania próby, nie-

[6] Warto podkreślić, że problem taki nie występuje np. w naukach przyrodniczych, gdyż badania naukowe prowadzi się na podstawie danych dostarczonych przez eksperymenty, a doświadczenia planuje się w taki sposób, aby zmienne objaśniające były nieskorelowane (ortogonalne).

właściwego sposobu gromadzenia danych liczbowych pochodzących z tego samego okresu, niedostatecznej ilości i jakości informacji w posiadanej próbie[7] (nieinformatywność danych), błędnie wyspecyfikowanych równań modelu itd.

II

Dość powszechne jest przekonanie, iż współliniowość utrudnia bądź wręcz uniemożliwia poznanie wzajemnych ilościowych powiązań między zmiennymi ekonomicznymi. Obecność tego zjawiska może więc pozbawić ekonometryka argumentów przemawiających za celowością stosowania modeli ekonometrycznych w praktyce.

W związku z tym przychylić się należy do stanowiska wielu autorów zajmujących się problematyką współliniowości, iż mniej ważne są przyczyny występowania współliniowości, natomiast bardziej — szkodliwe dla oszacowań stany jej natężenia, które przyczyniają się do spadku efektywności jednej z najpopularniejszych metod estymacji, a mianowicie klasycznej metody najmniejszych kwadratów[8]. Wartości ocen parametrów wyznaczone tą metodą są wówczas nie do zaakceptowania, gdyż są niestabilne[9] i nieodporne, ich błędy standardowe są zbyt duże oraz występują przy nich niewłaściwe znaki (otrzymane oceny parametrów są tego rodzaju, iż kłócą się z ugruntowaną teorią ekonomiczną i zdrowym rozsądkiem), co w konsekwencji prowadzi do wniosków jednostronnych i mylących[10]. Wzrasta także niebezpieczeństwo popełnienia

[7] Należy tu zwrócić uwagę na występujące uwarunkowanie siły powiązań między zmiennymi od zawartej w próbie ilości i jakości informacji. W literaturze polskiej problematyka jakości danych statystycznych została szczegółowo przedstawiona w monografii J. Kordosa, *Dokładność danych w badaniach społecznych,* Warszawa 1987.

[8] Zauważmy, że na spadek efektywności ocen otrzymanych klasyczną metodą najmniejszych kwadratów obok współliniowości wpływa też autokorelacja czy heteroscedastyczność składnika losowego.

[9] Warto tutaj zauważyć, że oszacowane modele ekonometryczne są m. in. wykorzystywane do budowy prognoz oraz do komputerowej symulacji przebiegu zjawisk. Użyteczność tego rodzaju analiz zależy zaś od stabilności wyznaczonych wartości ocen parametrów. Wielkości te nie powinny zatem zbyt się zmieniać, gdy zaobserwowane zmiany w próbie są relatywnie małe.

[10] Na ten temat pisze Z. Hellwig w pracy *Przechodniość relacji skorelowania zmiennych losowych i płynące stąd wnioski ekonometryczne,* Przegląd Statystyczny 1976, z. 1, w której proponuje porównywać ze sobą znak oceny parametru równania regresji ze znakiem współczynnika korelacji liniowej między odpowiednią zmienną objaśniającą a zmienną objaśnianą. Z. Hellwig zaproponował też, by wyrażenie: $\operatorname{sgn}(a_j)=\operatorname{sgn}(r_j)$ $(j=1, \ldots, k)$, gdzie a_j jest j-tą oceną parametru a_j wyznaczoną na podstawie zestandaryzowanych danych, a $r_j=r(Y, X_j)$ oznacza współczynnik korelacji liniowej pomiędzy zmiennymi Y a X_j, przy czym $r_j\neq 0$, $r_j\neq 1$,

błędu polegającego na usunięciu z modelu istotnych zmiennych objaśniających. W takiej sytuacji nie można ustalić jednoznacznie, które zmienne ekonomiczne spośród danego zbioru $\{X_1, \ldots, X_k\}$ mają największy wpływ na przebieg badanego zjawiska, a odpowiedź taka jest przecież bardzo istotna. Dodajmy jeszcze, że jeżeli w zbudowanym modelu znajdą się zmienne objaśniające skażone współliniowością, to można uzyskać w sposób sztuczny wysoki stopień dopasowania modelu do danych empirycznych — mierzony np. współczynnikiem korelacji wielowymiarowej *R*. Wysoka wartość tego współczynnika będzie jednak m. in. wynikiem silnego skorelowania zmiennych objaśniających.

Dla zagadnień współliniowości ciągle aktualne są kierunki poszukiwań innych, lepszych metod estymacji, któro nie reagowałyby na wpływ współliniowości. Do eliminowania statystycznych konsekwencji wzajemnego skorelowania zmiennych objaśniających przy estymacji parametrów modeli ekonometrycznych służą metody ortogonalizacyjne[11], a wśród nich metoda Grama-Schmidta, która polega na takim przekształceniu kolumn macierzy X wartości oryginalnych zmiennych objaśniających $X_1, \ldots, X_k$, aby każda nowo utworzona kolumna była ortogonalna do wszystkich wcześniej przekształconych. Algorytm Grama-Schmidta wprawdzie skutecznie usuwa współliniowość, ale brak przekonywających wskazówek co do wyboru kolumny wyjściowej, względem której były ortogonalizowane następne kolumny macierzy X należy uznać za istotną wadę działania tej procedury.

Wśród metod ortogonalizacyjnych na uwagę zasługuje także metoda głównych składowych (the method of principal components), która polega na zastąpieniu skorelowanych pierwotnych zmiennych objaśniających nowymi zmiennymi (składowymi) (na ogół jest ich mniej), które nie są skorelowane między sobą[12]. Stąd wniosek, że metoda głównych składowych daje możliwość urzeczywistnienia warunku ortogonalności zmiennych objaśniających. Nie odmawiając zalet tej metodzie (modele konometryczne otrzymane na omawianej drodze mają estymatory o wysokiej efektywności), nie sposób nie wspomnieć tu o trudnościach pojawiających się przy interpretacji ekonomicznej ocen parametrów występujących przy nowych zmiennych, które z definicji swojej są ortogonalne.

a sgn jest znakiem przyjmowanym przez daną wielkość, nazywać kryterium koincydencji.

[11] Por. w tej sprawie prace: Z. Hellwig, *Zastosowanie przekształcenia ortogonalnego do wyznaczania dopuszczalnych wartości zmiennych objaśniających w modelu ekonometrycznym,* Przegląd Statystyczny 1974, z. 3 oraz L. J. Jasiński, *Algorytm ortogonalizacyjny w metodzie najmniejszych kwadratów,* Przegląd Statystyczny 1975, z. 3.

[12] Teoretyczne i praktyczne omówienie problemów tej metody znajdzie czytelnik np. w pracy A. Zeliasia, *Analiza czynnikowa jako metoda doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych,* Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie 1980, nr 131.

Badania nad tymi problemami znacznie rozwinęły się kiedy ukazała się praca A. E. Hoerla i R. W. Kennarda[13], gdzie autorzy zdefiniowali estymator otrzymany metodą regresji grzbietowej (krawędziowej) (ridge regression method). Dodanie do elementów głównej przekątnej macierzy momentów X^TX pewnej nieujemnej stałej [14] *w,* przy czym wartość stałej *w* jest nieznana, wpływa na poprawę uwarunkowania tej macierzy. Okazuje się, że elementy diagonalne macierzy wariancji i kowariancji estymatora grzbietowego postaci

$$\mathbf{a}_g(w)=(\mathbf{X}^T\mathbf{X}+w\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}, \tag{2}$$

gdzie: X jest $(n\times k)$-wymiarową nielosową macierzą wartości zmiennych objaśniających, y oznacza $(n\times 1)$-wymiarowy wektor losowy, I jest macierzą jednostkową, *w* zaś jest pewnym nielosowym współczynnikiem, przy czym $w\geqslant 0$, są mniejsze od odpowiednich elementów diagonalnych macierzy wariancji i kowariancji estymatora otrzymanego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Podstawowym problemem tej metody jest odpowiedni wybór stałej *w.* Ma ona wpływ zarówno na wielkość obciążenia estymatorów grzbietowych, jak i na ich wariancje[15].

Kolejnym problemem, który się tu nasuwa, jest wybór odpowiedniego miernika, za pomocą którego będzie można mierzyć intensywność występowania współliniowości. Istnieje wiele różnych sposobów postępowania, których celem jest wykrywanie i mierzenie stopnia natężenia współliniowości. Można wyróżnić tutaj następujące mierniki współliniowości: współczynnik korelacji liniowej[16], współczynnik korelacji cząstkowej, współczynnik korelacji wielowymiarowej, wyznacznik macierzy momentów X^TX, współczynnik B. Schipsa i W. Stiera[17], współczynnik H. Theila[18],

[13] Por. A. E. Hoerl, R. W. Kennard, *Ridge Regression: Application to Nonorthogonal Problems,* Technometrics 1970, nr 1.

[14] W innych rozwiązaniach współczynnik *w* interpretuje się jako zmienną losową lub też zastępuje macierzą.

[15] Odpowiednie techniki ustalania wartości *w* są szczegółowo opisane w pracy A. E. Hoerla i R. W. Kennarda, *Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems,* Technometrics 1970, nr 1, a także w artykułach D. K. Guilkey i J. L. Murphy, *Directed Ridge Regression Techniques in Cases of Multicollinearity,* Journal of the American Statistical Association 1975, vol. 70 oraz J. Osiewalskiego, *Regresja grzbietowa. Zastosowanie estymatorów obciążonych w przypadku silnej korelacji w zbiorze zmiennych objaśniających,* Przegląd Statystyczny 1980, z. 1-2. Zalecane jednak procedury wyboru wartości stałej *w* są pozbawione wszelkich podstaw merytorycznych.

[16] Zamiast współczynnika korelacji liniowej uwzględnić można miarę odległości (np. odległość euklidesową lub miejską).

[17] B. Schips i W. Stier proponują pomiar siły współliniowości za pomocą współczynnika: $\gamma=R^2-\sum_{j=1}^{k} r_j^2$, gdzie *r$* jest współczynnikiem korelacji liniowej zmiennej objaśniającej X, ze zmienną objaśnianą Y. Współczynnik *y* przyjmuje wartość z przedziału $\langle -k+1,\ 0\rangle$, przy czym wartości bliskie *—k+1* są oznaką silnej

rząd współliniowości L. J. Jasińskiego[19], minimalna wartość własna macierzy[20] X^TX oraz wskaźnik uwarunkowania macierzy X. Spośród wymienionych tu propozycji do szczegółowej analizy należy wybrać tylko te, które uchodzą za bardzo skuteczne w danych warunkach[21]. Przeprowadzone przez J. Jakubczyca[22] badania potwierdziły przypuszczenia, iż w świetle przyjętych kryteriów „dobroci" miernika współliniowości, miernikami najlepszymi okazały się współczynnik korelacji wielowymiarowej *R* oraz wskaźnik uwarunkowania macierzy X, który jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z ilorazu maksymalnej i minimalnej wartości własnej macierzy X^TX. Współliniowość zachodzi wówczas, gdy wartość tego wskaźnika jest odpowiednio wysoka. Niestety, wskaźnik uwarunkowania nie jest miarą unormowaną (wada ta powoduje znaczną uciążliwość w wyciąganiu końcowych wniosków). Jest także zależny od skali (rzędu wartości zmiennych objaśniających). Wady te można w pewnym stopniu wyeliminować. W tym celu należy wartości zmiennych objaśniających zestandaryzować bądź też sprowadzić do jednakowej skali. Sprowadzenie tych wartości do identycznej skali, nie zawsze jednak jest wskazane w praktyce.

Trzeba tu jeszcze wspomnieć o innych rozwiązaniach, czego przykładem jest praca L. J. Jasińskiego[23]. Znaleziony przez niego współczynnik, który jest unormowany na przedziale (0, 1) przyjmuje wartości zero, gdy

współliniowości, wartość zero zaś świadczy o ortogonalności zmiennych. Por. B. Schips, W. Stier, *Bestimmung der Auswirkung von Multikollinearität zwischen den erklärenden Variablen in Linearen Regiessionmodellen durch Simulation,* Statistische Hefte 1971, nr 2.

[18] H. Theil sugeruje miernik: $\mu = R^2 - \sum_{j=1}^{k} (R^2 - R_j^2)$; gdzie R_j^2 jest współczynnikiem korelacji wielowymiarowej między zmienną objaśniającą X_j a pozostałymi zmiennymi objaśniającymi ze zbioru $\{X_1 \ldots, X_k\}$. Wartości tego współczynnika należą również do przedziału $<-k+1, 0>$; por. H. Theil, *Principles of Econometrics,* John Wiley, New York 1971, s. 169.

[19] L. J. Jasiński, *Rząd współliniowości zmiennych objaśniających,* Wiadomości Statystyczne 1985, nr 3.

[20] Obecnie minimalna wartość własna macierzy X^TX jest popularnym miernikiem współliniowości. Przyjmuje się, że współliniowość występuje wówczas, gdy wartość tego miernika jest mała, tzn. prawie równa zeru.

[21] Z interesującym wykazem kryteriów, które pozwalają na podjęcie odpowiedniej decyzji w tej mierze można się zapoznać w monografii J. Jakubczyca, *Współliniowość statystyczna,* Warszawa 1987, s. 75-116. Należy jeszcze dodać, iż w cytowanej tu monografii J. Jakubczyc omawia w usystematyzowany sposób problem współliniowości, będącej jedną z; przyczyn zakłócających budowę i estymację modeli ekonometrycznych. Autor wprowadza nowe pojęcia dla dwóch szkodliwych stanów współliniowości, tj. pojęcie kinetozy statystycznej i hiperkinetozy, które pozwalają na sformułowanie nowych testów statystycznych.

[22] Ibidem, s. 75 - 116.

[23] Por. pracę L. J. Jasińskiego, *Współczynnik współliniowości zmiennych objaśniających,* Przegląd Statystyczny 1986, z. 2.

wektory wyników obserwacji są dokładnie współliniowe. a wartość jeden, gdy każda ich para jest ortogonalna. Co więcej, wartości współczynnika nie zmieniają się przy skalowaniu zmiennych.

Na zakończenie tych rozważań warto zwrócić uwagę, iż korzystając z omówionych miar nie można jednoznacznie stwierdzić, czy zaobserwowane skorelowanie zmiennych objaśniających wpływa istotnie na wzrost wariancji otrzymywanych estymatorów parametrów. Co więcej, większość z nich pozwala na subiektywną interpretację uzyskiwanych wyników.

Zauważmy, iż wymienionych wad nie posiada procedura zaproponowana przez D. E. Farrara i R. E. Glaubera[24], którą w literaturze przedmiotu określa się mianem testu na współliniowość. Testem tym sprawdza się, czy wśród badanych zmiennych modelu liniowego występuje szkodliwy stan współliniowości. Z chwilą stwierdzenia jego występowania ekonometryk pragnie wiedzieć, które ze zmiennych objaśniających są nim objęte. Odpowiedź na to pytanie zapewnia odpowiednia procedura podana w teście. Po przeanalizowaniu wszystkich zmiennych otrzymujemy w rezultacie podzbiór zmiennych skażonych współliniowością. W zbiorze tym mogą jednak wystąpić pary zmiennych, między którymi współliniowość nie występuje, bądź też skorelowanych tylko w niewielkim stopniu. Wykrycie tego rodzaju par zapewnia test Farrara-Glaubera.

Zaproponowane przez Farrara-Glaubera rozwiązanie nie może być traktowane jako efektywny test na współliniowość, gdyż w omawianym teście *a priori* przyjmuje się, że macierz X wartości zmiennych objaśniających jest macierzą losową. Elementy tej macierzy są wielkościami zestandaryzowanymi i mają rozkład normalny. Tymczasem w klasycznych modelach regresji zakłada się, że zmienne objaśniające są nielosowe (mają wartości ustalone). Pojawia się więc sprzeczność, której niepodobna uniknąć. Nadto statystyka Farrara-Glaubera ma rozpoznany rozkład jedynie dla przypadku asymptotycznego, tzn. gdy $n \to \infty$, którego nie można stosować do zagadnień regresyjnych, gdyż ekonometryk w większości przypadków skazany jest na korzystanie z danych dostarczonych przez próby statystyczne o małej liczności (rozpatrujemy tylko takie zmienne, których wartości mają ograniczoną zmienność).

Dyskusyjna jest też droga omijania szkodliwych skutków współliniowości, w której eliminuje się z modelu zmienne skażone współliniowością, przyjmując tym samym, iż parametry występujące przy eliminowanych zmiennych powinny być równe zeru. Wydaje się jednak, iż metoda rugowania zmiennych objaśniających nie daje żadnej gwarancji na to, iż szkody wywołane współliniowością zostaną usunięte, gdyż nasza wiedza o badanym zjawisku z reguły nie jest pełna. Znane są także szkody wynikające z pomijania istotnych zmiennych, które są skażone współliniowością, gdyż zmienne takie mogą być ważne i nieodzowne z mery-

[24] D. E. Farrar i R. R. Glauber, *Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited,* Review of Economics and Statistics 1967, vol. 49.

torycznego punktu widzenia. W przypadkach takich wystąpią błędy specyfikacji (misspecification error) równań składających się na model. Oceny parametrów uzyskane klasyczną metodą najmniejszych kwadratów są wówczas obciążone.

Poruszoną przed chwilą kwestię wyjaśnijmy bardziej szczegółowo. Przyjmijmy, że wystarczająco dokładnym opisem zmiennej objaśnianej *Yt* jest standardowy model liniowy postaci

$$Y_t=\alpha_0+\alpha_1 X_{1t}+\alpha_2 X_{2t}+u_t \quad (t=1, \ldots, n). \tag{3}$$

Przyjmujemy dalej, że zmienne X_{1t} i X_{2t} mają istotny wpływ na zachowanie się zmiennej *Yt*. Jeśli zrezygnowalibyśmy teraz ze zmiennej X_{2t}, o której sądzimy, iż jest skażona współliniowością, to liniowe równanie regresji (3) miałoby wówczas postać

$$Y_t=\beta_0+\beta_1 X_{1t}+v_t, \tag{4}$$

gdzie $v_t=\alpha_2 X_{2t}+u_t$.

Z kolei rozważmy dwa estymatory a_1 i b_1 parametr α_1 i β_1, otrzymane metodą najmniejszych kwadratów. O estymatorze a_1 mówimy, iż jest estymatorem nieobciążonym, gdyż $E(a_1)=\alpha_1$. Można pokazać, iż na skutek pominięcia istotnej zmiennej X_{2t} w równaniu (4), estymator b_1 parametru β_1 jest estymatorem obciążonym, dla którego

$$E(b_1)=\alpha_1+\alpha_2\frac{\operatorname{cov}(X_{1t}, X_{2t})}{S^2(X_{1t})}, \tag{5}$$

gdzie $S^2(X_{1t})$ jest wariancją zmiennej X_{1t}.

W sytuacji, gdy $\operatorname{cov}(X_{1t}, X_{2t})=0$, powiemy, że $E(b_1)=\alpha_1$. Jeśli $\alpha_2\neq 0$, to im większa jest $\operatorname{cov}(X_{1t}, X_{2t})$, tym większe musi być obciążenie, W tym też tkwi sedno sprawy, a mianowicie, że za pomocą pomijania istotnych zmiennych, które są skażone współliniowością — jak dotąd — uzyskujemy efekty, które stawiają pod znakiem zapytania wyniki badań. Trzeba tu jeszcze podkreślić, iż eliminacja zmiennych współliniowych oznacza zawsze gorsze dopasowanie modelu do danych empirycznych.

W literaturze ekonometrycznej zwraca się uwagę na jeszcze inne możliwości uniknięcia współliniowości zmiennych. Jeżeli zmienne mają postać wielowymiarowych ekonomicznych szeregów czasowych proponuje się eliminację trendu i istotnych regularnych wahań. Można to osiągnąć stosując np. metodę polegającą na zastąpieniu wartości zmiennych ich pierwszymi różnicami (the first differencing procedure).

Dla uwypuklenia istoty tej procedury zapiszemy model, w którym występują tylko dwie zmienne objaśniające X_{2t} i X_{3t}. Mamy więc

$$Y_t=\alpha_1+\alpha_2 X_{2t}+\alpha_3 X_{3t}+u_t \quad (t=1, \ldots, n) \tag{6}$$

Jeżeli teraz opóźnimy zmienne we wzorze (6) o przyjętą jednostkę czasu (np. rok), to otrzymamy:

$$Y_{t-1}=\alpha_1+\alpha_2 X_{2,t-1}+\alpha_3 X_{3,t-1}+u_{t-1}, \tag{7}$$

co po odjęciu od (6) daje

$$Y_t-Y_{t-1}=\alpha_2(X_{2t}-X_{2,t-1})+\alpha_3(X_{3t}-X_{3,t-1})+v_t, \tag{8}$$

gdzie $v_t=u_t-u_{t-1}$.

Bardzo często takie przekształcenie zmiennych powoduje wyraźne zmniejszenie się stopnia ich współliniowości.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że tego rodzaju postępowanie przyjmuje *a priori,* że składniki losowe $v_t=u_t-u_{t-1}$ $(t=2, \ldots, n)$ rozpatrywanego równania (8) są od siebie stochastycznie niezależne. Łatwo jednak sprawdzić, że składnik losowy v_t jest skorelowany w czasie. Oznacza to, że istnienie autokorelacji składnika losowego *vt* obniża efektywność estymatorów parametrów otrzymywanych klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. W rezultacie zastosowane lekarstwo staje się gorsze niż choroba.

Zauważmy jeszcze, że powyższe rozwiązanie nie może być przyjęte tam, gdzie liczba obserwacji w próbie jest mała, gdyż wtedy parametry podlegają estymacji na podstawie tylko $n-l$ obserwacji.

Rozwiązanie problemu współliniowości tkwi zatem w uzyskaniu dostępu do większej liczby danych statystycznych. Powiększenie zbioru danych może nastąpić przez przedłużenie okresu obserwacji (przy szeregach czasowych) przez zwiększenie liczby jednostek obserwacji (przy danych przekrojowych), bądź też przez powiększenie zbioru informacji w odniesieniu do danych o charakterze przekrojowo-czasowym.

Przyjmijmy, że rozpatrujemy model postaci (6). Wariancję estymatorów a_2 i a_3 parametrów a_2 i a_3 równania (6) można przedstawić za pomocą wzorów:

$$\operatorname{var}(a_2)=\frac{\sigma_u^2}{\sum_{t=1}^{n}(x_{2t}-\bar{x}_2)^2(1-r_{23}^2)},$$

$$\operatorname{var}(a_3)=\frac{\sigma_u^2}{\sum_{t=1}^{n}(x_{3t}-\bar{x}_3)^2(1-r_{23}^2)}, \tag{10}$$

gdzie σ_u^2 jest wariancją składnika losowego szacowanego równania, r_{23} oznacza współczynnik korelacji liniowej między zmiennymi X_{2t} i X_{3t}, $\bar{x}_2$ i $\bar{x}_3$ są średnimi arytmetycznymi zmiennych X_{2t} i X_{3t}, a n jest liczbą obserwacji.

Zwróćmy uwagę na nieznany parametr σ_u^2 występujący w równaniach (9) i (10). Jak się okazuje, wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów estymator parametru σ_u^2 nie zależy od stopnia liniowej zależności zmiennych objaśniających [25]. Oznacza to, że przy szacowaniu parametru σ_u^2 współliniowość nie odgrywa żadnej roli.

Zauważmy dalej, że wariancje estymatorów a_2 i a_3 parametrów α_2 i α_3 zależą m. in. od wielkości próby *(n)* wykorzystywanej do szacowania parametrów równania (6). Ze wzorów (9) i (10) wyraźnie wynika, iż dla dowolnych wartości współczynnika korelacji liniowej r_{23} wariancje te maleją wraz ze wzrostem liczby obserwacji, gdyż na ogół wartość wyrażeń

$$\sum_{t=1}^{n}(x_{2t}-\bar{x}_2)^2 \quad \text{i} \quad \sum_{t=1}^{n}(x_{3t}-\bar{x}_3)^2$$

wówczas rośnie.

Jak się okazuje, wartość kowariancji wyznaczona na podstawie wzoru:

$$\operatorname{cov}(a_2, a_3)=\frac{-\sigma_u^2 r_{23}}{(1-r_{23}^2)\sqrt{\sum_t (x_{2t}-\bar{x}_2)^t \sum_t (x_{3t}-\bar{x}_3)^2}},$$

podobnie jak wariancji, maleje, gdy liczba obserwacji rośnie.

Postępowanie takie nie gwarantuje jednakże istotnego zmniejszenia efektów współliniowości, jakkolwiek w wielu przypadkach fakt ten może mieć miejsce.

W przypadku braku dostępu do większej liczby danych, współliniowość można wyeliminować uwzględniając aprioryczną wiedzę o badanym zjawisku (dodatkową wiarygodną informację spoza próby statystycznej). Można np. mieć informacje o znakach parametrów (kierunkach powiązań między zmiennymi) lub też o tym, które z nich powinny być równe zeru.

Dla lepszej ilustracji problemu przykładowo załóżmy, że $\alpha_3=0{,}1\alpha_2$ Uwzględniając w (6) za α_3 przyjęty *a priori* warunek, możemy napisać

$$Y_t=\alpha_1+\alpha_2 X_{2t}+0{,}1\alpha_2 X_{3t}+u_t=\alpha_1+\alpha_2 X_t+u_t, \tag{12}$$

gdzie $X_t=X_{2t}+0{,}1X_{3t}$.

Parametry równania (12) szacujemy klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. W dalszym postępowaniu znajdujemy ocenę parametru α_3 korzystając z warunku: $\alpha_3=0{,}1\alpha_2$.

[25] Por. np. pracę A. Zeliasia, *Teoria prognozy,* Warszawa 1984, s. 105 - 107.

III

Podsumowując nasze rozważania trzeba dodać, że przedstawione metody i procedury postępowania, co do których panowała opinia, iż skutecznie usuwają skutki współliniowości, nie wyczerpują pełnej listy spotykanych w literaturze przedmiotu sposobów postępowania w tym względzie. W większości przypadków potoczna opinia mija się z prawdą.

Różnorodność zaprezentowanych podejść dobitnie świadczy o tym, że teoria ekonometrii nie wypracowała dotąd jednolitego sposobu postępowania w sytuacji współliniowości. Nie możemy też na obecnym etapie badań zaproponować jednej procedury eliminowania współliniowości jako najlepszej. Istnieje dziś bardzo wiele różnych tego rodzaju metod, ale ich praktyczne zastosowanie daje niekiedy rażąco różne wyniki. Problem współliniowości pozostaje więc nadal nie rozwiązany. Uważamy, iż stanowi ona jedną z przyczyn zarysowującego się kryzysu w badaniach ekonometrycznych.

Dodajmy, ponieważ współliniowość ma negatywny wpływ na estymację parametrów klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, większość metod wyboru zmiennych do modeli symptomatycznych uznaje brak współliniowości za jeden z podstawowych warunków dobrego wyboru[26].

Reasumując poczynione wyżej uwagi, można więc stwierdzić, że w zagadnieniach modelowania ekonometrycznego wykrywanie, mierzenie współliniowości oraz badanie jej mocy są niewątpliwie bardzo istotne. Trzeba przy tym zauważyć, iż nie ma także powszechnej zgody co do tego, jak skutecznie wykrywać współliniowość w zbiorze zmiennych objaśniających. Uważamy, iż w badaniach ekonometrycznych należy przy tym kierować się następującymi wskazaniami:

1. Układ zmiennych objaśniających $X_1, \ldots, X_k$ charakteryzuje się współliniowością en block, gdy współczynnik korelacji wielowymiarowej R między zmienną objaśnianą i wszystkimi zmiennymi objaśniającymi ze zbioru $\{X_1, \ldots, X_k\}$ ma wysoką wartość, przy czym oszacowania wszystkich parametrów modelu w sposób nieistotny różnią się od zera;

2. W modelach zawierających dwie zmienne objaśniające X_1 i X_2 współliniowość występuje, gdy obserwuje się nadmierne skorelowanie tych zmiennych, tzn. gdy $|r_{12}| \approx 1$;

3. Jeśli współczynnik korelacji wielowymiarowej R ma wysoką wartość, zaś współczynniki korelacji cząstkowej są relatywnie małe, możliwe jest pojawienie się współliniowości. Jeżeli natomiast zarówno R jak i współczynniki korelacji cząstkowej są bliskie jedności, to nie możemy wykryć współliniowości w danym układzie zmiennych;

4. Jeżeli współczynnik korelacji wielowymiarowej R_j $(j = 1, \ldots, k)$

[26] Por. pracę Z. Hellwiga, *Problemy optymalnego wyboru predykat,* Przegląd Statystyczny 1969, z. 3-4.

między zmienną objaśniającą X_j oraz pozostałymi zmiennymi objaśniającymi jest wysoki, to zmienna X_j podlega silnemu skorelowaniu z pozostałymi zmiennymi objaśniającymi. Zmienną tę należy z modelu usunąć. Postępowanie takie, które winno być stosowane dla każdej ze zmiennej ze zbioru $\{X_1 \ldots, X_k\}$, prowadzi do wyodrębnienia takiego zespołu zmiennych objaśniających, w stosunku do którego można twierdzić, że istotnie charakteryzuje się współliniowością. Procedura ta jednak musi być stosowana z dużą ostrożnością, bowiem odrzucenie pewnej liczby zmiennych objaśniających może doprowadzić do poważnych błędów na etapie specyfikacji równań modelu.

Warto dodać jeszcze, że najsilniejszym warunkiem limitującym poprawność wskazań proponowanych sposobów wykrywania współliniowości, jest liczba i jakość danych statystycznych. Zmienna skażona współliniowością może mieć rzeczywiście duży udział w wyjaśnianiu zmienności zmiennej objaśnianej, lecz posiadany zbiór informacji nie pozwala na jej utrzymanie w modelu. Zdarzyć się może, iż dodatkowe informacje o tej zmiennej mogą spowodować otrzymanie odmiennego rezultatu w porównaniu z poprzednio przytoczonym.

Przedstawione rozważania niezaprzeczalnie wskazują na fakt, że współliniowość zmiennych nie jest zjawiskiem, które można ignorować, podejmując zadanie konstrukcji i estymacji modelu ekonometrycznego, który ma służyć jako instrument analizy ekonomicznej. Jest to szczególnie istotne w przypadku, gdy próbujemy poznać przyczynowo-skutkowy charakter powiązań między zmiennymi. Błędy powstające na etapie specyfikacji równań modelu oraz jego estymacji stanowią zasadnicze źródło powstawania błędów wnioskowania statystycznego. Niekiedy błędy te są tak duże, iż oszacowane modele nie mają większego znaczenia praktycznego.

Na zakończenie warto dodać, iż na płaszczyźnie formalnej problem współliniowości jest nie do rozwiązania. Dla rozważań o współliniowości właściwa jest tylko płaszczyzna merytoryczna.

THE PROBLEM OF COLLINEATION OF VARIABLES IN ECONOMETRICS

Summary

The article offers a critical discussion of the moist important Polish and foreign trends in research into the collineariti of variables.

The diversity of approaches signifies that so far the theory of econometrics has not been able to work out a uniform way of acting in conditions of collineariti. It is equally impossible at a present stage to propose a single procedure of eliminating the collineariti as the best procedure. Thus the problem of collineariti remains unsolved. The author believes that collineariti is one of the causes of the emerging crisis in econometric research. He also indicates that the problem of collineariti is unsolvable on a formal plane. The only platform for considering collineariti is the substantial approach.