

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki

Marcin Anholcer

SIŁA NIEREGULARNOŚCI GRAFÓW

rozprawa doktorska

Promotor:

prof. dr hab. Michał Karoński

Zakład Matematyki Dyskretnej

Poznań, 2010

Spis treści

Wstęp	i
1 Totalna siła nieregularności	1
1.1 Wprowadzenie	1
1.2 Ogólne oszacowania	2
1.3 Lasy	7
1.4 Potęgi cykli	16
2 Siła nieregularności	35
2.1 Wprowadzenie	35
2.2 Potęgi cykli	36
3 Iloczynowa siła nieregularności	52
3.1 Wprowadzenie	52
3.2 Ogólne oszacowania	53
3.3 Gwiazdy i grafy pełne	54
3.4 Cykle i ścieżki	55
3.5 Kraty i kraty toroidalne	60

Wstęp

Jednym z powszechnie znanych faktów dotyczących grafów prostych jest to, że w każdym grafie istnieją co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia (dowód tego faktu wynika bezpośrednio z zasady szufladkowej).

Sytuacja zmienia się, gdy krawędziom bądź krawędziom i wierzchołkom przypisujemy wagi będące liczbami naturalnymi i rozpatrujemy wazone stopnie wierzchołków równe sumom lub iloczynom wag incydentnych do nich krawędzi, powiększonych ewentualnie o wagi samych wierzchołków. W pracy rozpatrujemy trzy różne związane z tym parametry grafowe: siłę nieregularności, iloczynową siłę nieregularności i totalną wierzchołkową siłę nieregularności.

Niech G będzie grafem prostym bez składowych K_2 i z co najwyżej jednym izolowanym wierzchołkiem. Przyjmijmy, że dana jest funkcja

$$w : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$$

zwana wazieniem krawędzi. Wazony stopień wierzchołka v definiujemy jako sumę:

$$wd_G(v) = \sum_{e \ni v} w(e).$$

Wazienie nazywamy nieregularnym, gdy wazone stopnie wszystkich wierzchołków są różne. *Siła nieregularności* $s(G)$ jest równa najmniejszej wartości s , dla której istnieje nieregularne wazienie.

Wazone stopnie wierzchołków możemy również zdefiniować jako iloczyny wag przypisanych incydentnym krawędziom, a więc opisać je wzorem:

$$wd_G(v) = \prod_{e \ni v} w(e).$$

W tym przypadku najmniejszą wartość s gwarantującą istnienie nieregularnego wazienia określamy mianem *iloczynowej siły nieregularności* i oznaczamy $ps(G)$.

W trzecim przypadku graf prosty G może posiadać składowe K_2 i dowolną liczbę izolowanych wierzchołków. Tym razem wagi przypisujemy zarówno

krawędziom jak i wierzchołkom, a więc rozpatrujemy ważenie

$$w : E(G) \cup V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}.$$

Ważony stopień definiujemy tym razem jako

$$wd_G(v) = w(v) + \sum_{e \ni v} w(e).$$

Najmniejszą wartość s , dla której istnieje nieregularne ważenie, nazywamy *totalną wierzchołkową siłą nieregularności* i oznaczamy $tvs(G)$.

W pracy przedstawione zostały różne rezultaty dotyczące wymienionych parametrów. Każdy rozdział rozpoczyna się wprowadzeniem, w którym podana jest definicja parametru i krótki przegląd literatury. W kolejnych podrozdziałach przedstawione zostały wyniki, których autorem lub współautorem jest piszący te słowa.

W rozdziale pierwszym podane zostały górne oszacowania $tvs(G)$ dla dowolnych grafów (lemat 1.3, twierdzenie 1.2) i dla grafów, których wierzchołki można uporządkować w pewien wskazany sposób (lemat 1.5 i twierdzenie 1.4). Ponadto wyprowadzone zostały dokładne wartości totalnej wierzchołkowej siły nieregularności dla lasów bez wierzchołków stopnia 2 (twierdzenie 1.8) i potęg cykli (twierdzenie 1.16).

Rozdział drugi zawiera wyniki dotyczące siły nieregularności. W szczególności została w nim podana dokładna wartość $s(G)$ dla potęg cykli (twierdzenie 2.1).

W ostatnim rozdziale przedstawione zostały wyniki dotyczące iloczynowej siły nieregularności. Głównymi rezultatami zaprezentowanymi w tym rozdziale są górne ograniczenia dla cykli i krat o wystarczająco wielu wierzchołkach (twierdzenia 3.13 i 3.15). Ponadto zaprezentowano dolne oszacowania $ps(G)$ dla cykli (obserwacja 3.9), górne oszacowania dla krótkich cykli (twierdzenie 3.12) i dokładne wartości $ps(G)$ dla gwiazd i grafów pełnych (fakty 3.5 i 3.6).

W całej pracy, jeżeli nie będzie powiedziane inaczej, $V(G)$ oznaczać będzie zbiór wierzchołków grafu G , $E(G)$ zbiór jego krawędzi, n liczbę wierzchołków, n_i liczbę wierzchołków stopnia i , a m liczbę krawędzi. Najniższy stopień wierzchołka oznaczać będziemy przez $\delta(G)$, zaś najwyższy przez $\Delta(G)$. Jeżeli nie będzie wątpliwości odnośnie tego, o który graf chodzi, we wszystkich oznaczeniach pomijane będzie oznaczenie grafu (G).

Rozdział 1

Totalna wierzchołkowa siła nieregularności

1.1 Wprowadzenie

Niech dany będzie prosty nieskierowany graf $G = (V, E)$. Przez jego *totalne ważenie* rozumiemy odwzorowanie $w : E \cup V \rightarrow \mathbb{N}$ przypisujące dodatnie liczby całkowite krawędziom i wierzchołkom G . Mając dane ważenie w oraz $e \in E$, $v \in V$, liczby $w(e)$ i $w(v)$ nazywamy odpowiednio *wagą krawędzi e* i *wagą wierzchołka v* . Przez *ważony stopień* wierzchołka v rozumiemy wielkość

$$wd_G(v) = \sum_{e \ni v} w(e) + w(v).$$

Ponadto, ważenie w nazywamy *nieregularnym*, jeżeli dla dowolnej pary wierzchołków ich ważone stopnie są różne. W [8] M. Bača i in. zdefiniowali parametr, zwany *totalną wierzchołkową siłą nieregularności*, $tvs(G)$, który oznacza najmniejszą wartość s , dla której istnieje nieregularne totalne ważenie G za pomocą liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$.

W [8] podano dokładne wartości $tvs(G)$ dla pewnych rodzin grafów (gwiazd, grafów pełnych, cykli, ścieżek i graniastosłupów) oraz dolne i górne ograniczenia dla dowolnych grafów.

W szczególności, autorzy wykazali, że dla każdego grafu zachodzą nierówności

$$\left\lceil \frac{n + \delta(G)}{\Delta(G) + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + \Delta(G) - 2\delta(G) + 1, \quad (1.1)$$

co w przypadku grafów r -regularnych sprowadza się do

$$\left\lceil \frac{n+r}{r+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n-r+1. \quad (1.2)$$

W przypadku grafów, których składowe mają co najmniej 3 wierzchołki, wynik ten został wzmocniony do postaci

$$tvs(G) \leq n-1 - \left\lceil \frac{n-2}{\Delta(G)+1} \right\rceil. \quad (1.3)$$

Powyższe wyniki zostały poprawione przez J. Przybyło w pracy [30] dla grafów rzadkich i grafów o dużym minimalnym stopniu. W ostatnim przypadku wykazano, że dla dowolnych grafów prawdziwa jest nierówność

$$tvs(G) < 32 \frac{n}{\delta(G)} + 8, \quad (1.4)$$

zaś dla grafów r -regularnych nierówność

$$tvs(G) < 8 \frac{n}{r} + 3. \quad (1.5)$$

W następnym podrozdziale wykażemy, że dla dowolnego grafu zachodzi nierówność

$$tvs(G) \leq 3 \left\lceil \frac{n}{\delta(G)+3} \right\rceil + 1. \quad (1.6)$$

Ponadto w dwóch kolejnych podrozdziałach podane zostaną dokładne wartości $tvs(G)$ dla pewnych rodzin lasów i potęg cykli.

1.2 Ogólne oszacowania

We współpracy z M. Kalkowskim i J. Przybyło pracy [6] udowodnione zostało następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1.

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i minimalnym stopniu $\delta > 0$. Wtedy

$$tvs(G) \leq 3 \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil + 1.$$

Używając podobnego argumentu, jak w [6], można udowodnić prawdziwość mocniejszego oszacowania.

Twierdzenie 1.2.

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i minimalnym stopniu δ . Wtedy

$$tvs(G) \leq 3 \left\lceil \frac{n}{\delta + 3} \right\rceil + 1.$$

Aby dowieść powyższego twierdzenia, udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat 1.3.

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i minimalnym stopniu $\delta > 0$. Ponadto, niech b_v i b_e będą dowolnymi liczbami całkowitymi i niech $\lambda = \left\lceil \frac{n}{\delta + 3} \right\rceil$. Wtedy istnieje nieregularne totalne ważenie w grafu G takie, że $w(v) \in \{b_v, \dots, b_v + 3\lambda\}$ dla $v \in V(G)$ i $w(e) \in \{b_e, \dots, b_e + 3\lambda\}$ dla $e \in E(G)$.

Dowód. Ustawmy wierzchołki grafu G w dowolnym porządku v_1, v_2, \dots, v_n . Dla dowolnego wierzchołka v_i wszystkie przyległe do niego wierzchołki v_j dla $j < i$ będziemy nazywać *lewostronnymi sąsiadami* v_i , zaś krawędź łączącą v_i z lewostronnym sąsiadem określać będziemy mianem *lewostronnej krawędzi* v_i . W analogiczny sposób definiujemy *prawostronne sąsiadów* i *prawostronne krawędzie* v_i dla $j > i$. Niech $\lambda = \left\lceil \frac{n}{\delta + 3} \right\rceil$ (stąd $\lambda\delta \geq n - 3\lambda$).

Początkowo nadajemy wagi $\lambda + b_e$ wszystkim krawędziom i wagi b_v wszystkim wierzchołkom G . Pożądane nieregularne ważenie skonstruujemy w n krokach, odpowiadających kolejnym wierzchołkom. W tym celu przypiszemy każdemu v_i dwie wielkości, $\varphi(v_i)$, oznaczającą docelową wartość jego ważonego stopnia, która nie będzie ulegać zmianie gdy zostanie ustalona oraz $s(v_i)$, oznaczającą tymczasową wartość ważonego stopnia v_i , która może się zmieniać w każdym kroku algorytmu. Początkowo $s(v_i) = (\lambda + b_e)d_G(v_i) + b_v$ dla każdego i , zaś żadna z wartości $\varphi(v_i)$ nie jest ustalona.

W trakcie konstrukcji każda z wag krawędzi będzie modyfikowana co najwyżej dwa razy, przy czym zawsze będzie należeć do zbioru $\{b_e, \dots, 3\lambda + b_e\}$. Wagi wierzchołków zostaną wybrane ze zbioru $\{b_v, \dots, 3\lambda + b_v\}$ po ustaleniu wag wszystkich krawędzi. Aby zapewnić nieregularność wynikowego ważenia, w i -tym kroku ustalamy wartość $\varphi(v_i)$ różną od wszystkich $\varphi(v_j)$, $j < i$, w taki sposób, że

$$\varphi(v_j) - 3\lambda \leq s(v_j) \leq \varphi(v_j) \tag{1.7}$$

dla $j = 1, \dots, i$.

Założmy, że mamy wykonać i -ty krok i że jak dotąd wskazane warunki są spełnione dla wszystkich wierzchołków $v_j, j < i$. Możemy teraz dodać dowolną liczbę ze zbioru $\{0, \dots, \lambda\}$ do wagi każdej prawostronnej krawędzi v_i (nic nas nie ogranicza, gdyż wartości $\varphi(v_j)$ dla $j > i$ nie zostały jeszcze ustalone). Do wagi każdej lewostronnej krawędzi możemy z kolei dodać taką liczbę ze zbioru $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$, że warunek (1.7) pozostanie spełniony dla $j < i$. W każdym przypadku mamy do dyspozycji $\lambda + 1$ możliwych modyfikacji (wliczając dodanie 0, czyli brak zmiany wagi), więc zachowując wszystkie ograniczenia możemy ustalić wartość $s(v_i)$ na $\lambda\delta + 1 > n - 3\lambda$ różnych sposobów. Jest co najwyżej $n - 1$ wierzchołków $v_j, j < i$, z ustaloną wartością $\varphi(v_j)$, więc zasada szufladkowa gwarantuje nam możliwość wyboru takich modyfikacji wag poszczególnych krawędzi, że uzyskana wartość $s(v_i) = s^*$ będzie spełniać warunek $\varphi^* - 3\lambda \leq s^* \leq \varphi^*$ dla pewnego $\varphi^* \neq \varphi(v_j), j < i$. Ustalamy $\varphi(v_i) = \varphi^*$ i dokonujemy modyfikacji wag krawędzi incydentnych z v_i gwarantujących, że $s(v_i) = s^*$.

Niezależnie od dokonywanych modyfikacji wag krawędzi, warunek (1.7) jest spełniony po każdym kroku algorytmu. Pozostaje pokazać, że wagi krawędzi stale należą do zbioru $\{b_e, \dots, 3\lambda + b_e\}$. W tym celu zauważmy, że początkowo każda krawędź e ma wagę $\lambda + b_e$. Następnie waga ta jest zmieniana co najwyżej dwukrotnie - raz, gdy e jest krawędzią prawostronną (wtedy dodajemy do niej liczbę ze zbioru $\{0, \dots, \lambda\}$) i raz gdy jest krawędzią lewostronną (wtedy dodajemy do niej liczbę ze zbioru $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$).

Ostatecznie, po n -tym kroku, dodajemy do wagi każdego wierzchołka v_i (dotychczas równej b_v) liczbę całkowitą $x = \varphi(v_i) - s(v_i)$, która zgodnie z (1.7) należy do zbioru $\{0, \dots, 3\lambda\}$. W ten sposób ostateczne wagi wierzchołków są liczbami ze zbioru $\{1, \dots, \lambda + 1\}$. To kończy dowód, gdyż wszystkie wartości $\varphi(v_i)$ są różne. \square

Dowód twierdzenia 1.2. Istnienie odpowiedniego nieregularnego ważenia wynika wprost z lematu 1.3. Aby je skonstruować podstawiamy

$$b_v = b_e = 1.$$

\square

Oszacowanie z twierdzenia 1.2 można poprawić, jeżeli wierzchołki grafu da się uporządkować w taki sposób, aby każdy z nich miał odpowiednio dużo sąsiadów wśród wierzchołków o niższych indeksach.

Twierdzenie 1.4.

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i minimalnym stopniu δ . Jeżeli istnieje uporządkowanie jego wierzchołków v_0, v_1, \dots, v_{n-1} spełniające warunek

$$|N(v_i) \cap \{v_0, \dots, v_{i-1}\}| \geq \left\lceil \frac{\delta i}{n} \right\rceil - 1, \quad (1.8)$$

to

$$tvs(G) \leq 2 \left\lceil \frac{n}{\delta + 1} \right\rceil + 1.$$

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, wykazemy najpierw prawdziwość następującego lematu.

Lemat 1.5.

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i minimalnym stopniu $\delta > 0$. Ponadto, niech b_v i b_e będą dowolnymi liczbami całkowitymi, $0 < \alpha \leq 1$ liczbą rzeczywistą i niech $\lambda = \left\lceil \frac{n}{\alpha(\delta+1)} \right\rceil$. Załóżmy, że istnieje takie uporządkowanie wierzchołków G (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}), że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ zachodzi:

$$|N(v_i) \cap \{v_0, \dots, v_{i-1}\}| \geq \left\lceil \frac{\alpha \delta i}{n} \right\rceil - 1, \quad (1.9)$$

gdzie $N(v)$ oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v .

Wtedy istnieje nieregularne totalne ważenie w grafu G takie, że $w(v) \in \{b_v, \dots, b_v + 2\lambda\}$ dla $v \in V(G)$ i $w(e) \in \{b_e, \dots, b_e + 2\lambda\}$ dla $e \in E(G)$.

Dowód. Dowód przebiega podobnie do dowodu lematu 1.5, więc niektóre jego fragmenty zostały przedstawione w skróconej formie. Jeżeli jakieś pojęcie nie zostało zdefiniowane na nowo, przyjmujemy, że aktualna jest jego dotychczasowa definicja.

Ustawmy wierzchołki grafu G w porządku v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , spełniającym warunek 1.9. Oznaczmy liczbę lewstronnych sąsiadów v_i przez $d_G^-(v_i)$. Z założenia wynika, że $d_G^-(v_i) \geq \left\lceil \frac{\alpha \delta i}{n} \right\rceil - 1$. Niech $\lambda = \left\lceil \frac{n}{\alpha(\delta+1)} \right\rceil$. Początkowo nadamy wagi $\lambda + b_e$ wszystkim krawędziom i wagi b_v wszystkim wierzchołkom G . Nieregularne ważenie skonstruujemy w n krokach, przypisując każdemu v_i wartości $\varphi(v_i)$ i $s(v_i)$.

W trakcie konstrukcji każda z wag krawędzi będzie modyfikowana co najwyżej raz, przy czym zawsze będzie należeć do zbioru $\{b_e, \dots, 2\lambda + b_e\}$. Wagi wierzchołków zostaną wybrane ze zbioru $\{b_v, \dots, 2\lambda + b_v\}$ po przypisaniu wag

krawędziom. Aby to zapewnić, w i -tym kroku ustalamy wartość $\varphi(v_i)$ różną od wszystkich $\varphi(v_j)$, $j < i$, w taki sposób, że

$$\varphi(v_j) - 2\lambda \leq s(v_j) \leq \varphi(v_j) \quad (1.10)$$

dla $j = 1, \dots, i$.

Założmy, że wykonujemy i -ty krok i że wszystkie wymienione warunki są spełnione dla $j < i$. Do wagi każdej lewostronnej krawędzi dodajemy taką liczbę ze zbioru $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$, że warunek (1.10) pozostanie spełniony dla $j < i$. W każdym przypadku mamy do dyspozycji $\lambda + 1$ możliwych modyfikacji (wliczając dodanie 0, czyli brak zmiany wagi), więc możemy ustalić wartość $s(v_i)$ na co najmniej $\lambda d_G^-(v_i) + 1 > n - 2\lambda$ różnych sposobów. Jest dokładnie i wierzchołków v_j , $j < i$, z ustaloną wartością $\varphi(v_j)$, więc zasada szufladkowa gwarantuje możliwość wyboru takich modyfikacji wag poszczególnych krawędzi, dla których uzyskana wartość $s(v_i) = s^*$ spełnia warunek $\varphi^* - 2\lambda \leq s^* \leq \varphi^*$ dla pewnego $\varphi^* \neq \varphi(v_j)$, $j < i$. Ustalamy $\varphi(v_i) = \varphi^*$ i dokonujemy modyfikacji wag krawędzi incydentnych z v_i , które gwarantują, że $s(v_i) = s^*$.

Niezależnie od dokonywanych modyfikacji wag krawędzi, warunek (1.10) jest spełniony po każdym kroku algorytmu. Ponadto zauważmy, że początkowo dowolna krawędź e ma wagę $\lambda + b_e$, która następnie jest zmieniana co najwyżej raz - poprzez dodanie liczby ze zbioru $\{-\lambda, \dots, \lambda\}$, ostatecznie więc przyjmuje wartość z pożądanego zbioru.

Odpowiedni dobór wag wierzchołków kończy konstrukcję. \square

Dowód twierdzenia 1.4. Istnienie odpowiedniego nieregularnego ważenia wynika wprost z lematu 1.5. Aby je skonstruować podstawiamy $b_v = b_e = \alpha = 1$. \square

Autor przypuszcza, że dla każdego grafu można znaleźć szeregowanie wierzchołków zgodne z warunkiem (1.9) ze stałą $\alpha = 1$ (czyli z warunkiem (1.8)). Jeżeli to przypuszczenie jest słuszne, to prawdziwa jest następująca hipoteza.

Hipoteza 1.6.

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach i minimalnym stopniu δ .
Wtedy

$$tvs(G) \leq 2 \left\lceil \frac{n}{\delta + 1} \right\rceil + 1.$$

Przykładem zastosowania twierdzenia 1.4 (czyli częściowym potwierdzeniem hipotezy 1.6) są grafy złożone z rozłącznych wierzchołkowo klik.

Stwierdzenie 1.7.

Niech G będzie grafem postaci

$$G = \bigcup_{j=1}^t K^{(j)},$$

gdzie $K^{(j)} \cong K_{n_j}$ dla $j = 1, \dots, t$. Niech δ oznacza minimalny stopień grafu G ($\delta = \min_j \{n_j\} - 1$). Wtedy

$$tvs(G) \leq 2 \left\lceil \frac{n}{\delta + 1} \right\rceil + 1.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$. Porządkujemy wierzchołki w następujący sposób. Dla każdego j , dowolnym n_1 wierzchołkom kliki $K^{(j)}$ przypisujemy indeksy $kt + j - 1$, gdzie $k = 0, \dots, n_1 - 1$. Dzięki temu, niezależnie od indeksów przypisanych pozostałym wierzchołkom grafu G , otrzymujemy uporządkowanie spełniające warunek (1.8), co kończy dowód. \square

1.3 Lasy

W pracy [8] M. Bača i in. podali oszacowania wartości $tvs(G)$ dla niektórych drzew. W szczególności wykazali, że totalna wierzchołkowa siła nieregularności ścieżki P_n równa jest

$$tvs(P_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil, \quad (1.11)$$

zaś w przypadku gwiazdy $K_{1,n}$ wynosi

$$tvs(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil. \quad (1.12)$$

Podali również oszacowania dla drzewa T o n_1 wierzchołkach stopnia 1 i bez wierzchołków stopnia 2. Wykazali, że takim przypadku zachodzą nierówności

$$\left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil \leq tvs(T) \leq n_1. \quad (1.13)$$

Można pokazać, że dla pewnych klas lasów F , rzeczywista wartość $tvs(F)$ równa jest podanemu wyżej dolnemu oszacowaniu. Poniżej przedstawiony został dowód następującego twierdzenia (ten i kolejne rezultaty z tego podrozdziału pochodzą ze wspólnej z M. Karońskim i F. Pfenderem pracy [7]):

Twierdzenie 1.8.

Niech F będzie dowolnym lasem o n wierzchołkach, z n_1 wierzchołkami stopnia 1, bez wierzchołków stopnia 2 i bez izolowanych wierzchołków. Wtedy

$$tvs(F) = \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil.$$

Uwaga 1.9. Podczas ostatecznej redakcji niniejszej rozprawy ukazał się artykuł Nurdina i in. [27], w którym autorzy udowadniają powyższy rezultat dla drzew. Przedstawiony przez nich dowód odbiega jednak od przedstawionego poniżej.

Dowód twierdzenia 1.8. W dalszej części rozdziału przez V_i oznaczamy zbiór wierzchołków stopnia i , a $n_i = |V_i|$. Wierzchołki wiszące to wierzchołki stopnia 1, krawędzie wiszące to krawędzie incydentne z wiszącymi wierzchołkami. Pozostałe krawędzie nazywamy krawędziami wewnętrznymi. Wierzchołki stopnia większego od 1 incydentne z krawędziami wiszącymi określamy mianem wierzchołków zewnętrznych, zaś pozostałe wierzchołki stopnia większego od 1 wierzchołków wewnętrznych.

Niech dany będzie las F . Przyjmijmy na razie, że każda z jego składowych ma co najmniej 4 wierzchołki (sytuację, gdy las zawiera składowe P_2 przeanalizujemy pod koniec dowodu). Załóżmy, że do jego totalnego ważenia używamy liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$. Wówczas najniższy i najwyższy możliwy do otrzymania ważony stopień wierzchołka $v \in V_1$ wynoszą odpowiednio 2 i $2s$, zatem

$$tvs(F) \geq \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil. \quad (1.14)$$

Oznacza to, że aby udowodnić twierdzenie wystarczy podać konstrukcję totalnego nieregularnego ważenia F za pomocą liczb $\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil\}$.

Zacznijmy od zdefiniowania następujących podzbiorów zbioru wierzchołków lasu F . Niech $C_1 = V_1$ oznacza zbiór wierzchołków wiszących, $C_{i,j}$ ($i = 3, 4, j = 0, \dots, i$) zbiory wierzchołków stopnia i mających dokładnie j sąsiadów w C_1 , a $C_{5,j}$ ($j \geq 0$) zbiory wierzchołków stopnia co najmniej 5 posiadających j sąsiadów w C_1 . Ponadto, niech $n_{i,j} = |C_{i,j}|$.

Przedstawimy teraz dwa lematy, które zostaną wykorzystane w dalszej części dowodu.

Lemat 1.10.

Niech F będzie lasem o c składowych, z których każda ma co najmniej 4 wierzchołki. Niech $n_i = 0$ dla $i = 2$ oraz $i > 3$. Wtedy $tvs(F) = \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil$.

Dowód. Pokażemy konstrukcję nieregularnego ważenia przy użyciu wag ze zbioru $\{1, \dots, s = \lceil \frac{n_1+1}{2} \rceil\}$.

W tym celu przypiszmy wszystkim wewnętrznym krawędziom wagę s . W drugim kroku ważymy wszystkie krawędzie składowych izomorficznych z $K_{1,3}$ (czyli gwiazd o trzech wierzchołkach wiszących) w następujący sposób. Zakładając, że liczba takich składowych wynosi c_{13} , ważymy $\lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor$ z nich za pomocą liczb x i $s-x$, gdzie $x = 1, \dots, \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor$, oraz jednej wagi s , zaś pozostałe jedną wagą x , gdzie $x = \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor + 1, \dots, c_{13}$ i dwiema wagami s .

Następnie ważymy $s - 2 \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor - \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor - 1$ spośród pozostałych wiszących krawędzi za pomocą liczb $c_{13} + 1, \dots, s - \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor - 1$, a wszystkim pozostałym krawędziom przypisujemy wagę s w taki sposób, aby każdy zewnętrzny wierzchołek nie należący do składowej izomorficznej z $K_{1,3}$ był incydentny z co najmniej dwiema krawędziami z wagą s . Jest to zawsze możliwe, gdyż każdy taki wierzchołek jest incydentny albo z co najmniej dwiema wewnętrznymi krawędziami, albo z dwiema krawędziami wiszącymi, ale w ostatnim przypadku zawsze możemy dobrać wagi tak, aby jednej z nich przypisać wagę s . Można również zauważyć, że po zważeniu krawędzi przedstawionym sposobem dokładnie $\lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor$ zewnętrznych wierzchołków należących do składowych izomorficznych z $K_{1,3}$ jest incydentnych z jedną krawędzią o wadze s , zaś sumy wag wszystkich incydentnych z nimi krawędzi są równe $2s$. Z kolei $s - \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor - 1 \leq s - 1$ pozostałych zewnętrznych wierzchołków jest incydentnych z dwiema krawędziami o wadze s , zaś wszystkie pozostałe wierzchołki $v \in V_3$ z trzema takimi krawędziami. Zauważmy, że jest dokładnie $n_1 - 2c - s + \lfloor \frac{c_{13}}{2} \rfloor + 1 \leq n_1 - s - 1$ takich wierzchołków.

Po zważeniu krawędzi, zbiór wszystkich wierzchołków można podzielić na cztery podzbiory. Pierwszym z nich jest zbiór wszystkich wierzchołków incydentnych z krawędziami o wagach $1, 2, \dots, s - 1$. Nadajemy tym wierzchołkom wagę 1 , otrzymując w ten sposób $s - 1$ różnych ważonych stopni ze zbioru $\{2, 3, \dots, s\}$. Pozostałe wiszące wierzchołki są incydentne z krawędzią o wadze s . Przypisujemy im różne wagi ze zbioru $\{1, 2, \dots, n_1 - s + 1\}$, otrzymując w ten sposób, zależnie od parzystości n_1 , $s - 1$ różnych ważonych stopni ze zbioru $\{s + 1, s + 2, \dots, 2s - 1\}$ albo s różnych ważonych stopni ze zbioru $\{s + 1, s + 2, \dots, 2s\}$.

Jeżeli któryś z zewnętrznych wierzchołków należących do składowych izomorficznych z $K_{1,3}$ jest incydentny z krawędziami o wagach s, x i $s-x$, przypisujemy mu wagę $x+1$. Wierzchołkom incydentnym z krawędziami z wagami s, s i x przypisujemy wagę 1 . W ten sposób wszystkie zewnętrzne wierzchołki

incydentne z co najwyżej dwiema krawędziami o wadze s otrzymują ostatecznie różne ważone stopnie ze zbioru $\{2s + 2, 2s + 3, \dots, 3s\}$ (niekoniecznie wszystkie).

W celu zważenia pozostałych wierzchołków (to znaczy wszystkich wierzchołków incydentnych z trzema krawędziami o wadze s) używamy różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, n_1 - s - 1\}$, otrzymując w zależności od parzystości n_1 , różne ważone stopnie należące do zbioru $\{3s + 1, 3s + 2, \dots, 4s - 3\}$ albo różne ważone stopnie należące do zbioru $\{3s + 1, 3s + 2, \dots, 4s - 2\}$ (niekoniecznie wszystkie). Oczywiście otrzymane totalne ważenie lasu F jest nieregularne. \square

Lemat 1.11.

W każdym lesie F , w którym $n_2 = 0$:

- (a) $2n_{30} + n_{31} + n_{43} + 2n_{44} \leq n_1 - 2$.
- (b) $2n_{33} + 2n_{32} + n_{31} \leq n_1$, a jeżeli zachodzi równość, to $n_{33} = 0$ oraz $n_{j,k} = 0, j > 3, k \geq 0$.
- (c) $2n_4 \leq n_1 - 2$.

Dowód. Aby udowodnić część (a) zauważmy, że usunięcie dowolnego wierzchołka należącego do zbioru C_{31} wraz z jego wiszącym sąsiadem i połączenie dwóch pozostałych sąsiadów za pomocą krawędzi nie zmienia elementów żadnego z pozostałych podzbiorów wierzchołków lasu. Ponadto taka operacja zmniejsza obie strony nierówności o 1. Usuwamy każdą parę tego typu zawsze, gdy występuje w lesie F (również w sytuacji, gdy się pojawi w wyniku usunięcia jakiejś innej grupy wierzchołków).

Podobnie, możemy usunąć dowolny z wierzchołków $v \in C_{43}$ wraz z jego wiszącymi sąsiadami. Jeżeli jego czwartym sąsiadem jest wierzchołek tej samej klasy, usuwamy go również wraz ze wszystkimi sąsiadami, zmniejszając lewą stronę nierówności o 2 i prawą o 6. Jeżeli czwartym sąsiadem jest wierzchołek $u \in C_{30}$, usuwamy go również i łączymy dwóch jego pozostałych sąsiadów krawędzią, zmniejszając obie strony nierówności o 3. We wszystkich pozostałych przypadkach usuwamy wyłącznie wierzchołek v wraz z wiszącymi sąsiadami, zmniejszając lewą stronę nierówności o 1 i prawą o 2. Zauważmy, że v nie może mieć sąsiada $u \in C_{31}$, gdyż wierzchołki z tego zbioru są usuwane po każdym kroku.

Ostatecznie, usuwamy wszystkie wierzchołki $v \in C_{44}$ wraz z wiszącymi sąsiadami zmniejszając każdorazowo lewą stronę nierówności o 1 i prawą o 4.

Zgodnie z powyższym, wystarczy pokazać, że warunek $2n_{30} \leq n_1 - 2$ jest spełniony dla każdego lasu, dla którego $n_{31} = n_{43} = n_{44} = 0$.

W dowolnym drzewie liczba krawędzi jest o jeden mniejsza od liczby wierzchołków, a jednocześnie równa połowie sumy ich stopni. Oznaczając maksymalny stopień przez Δ , a liczbę wierzchołków stopnia j przez n_j , fakt ten możemy zapisać jako

$$2 \left(\sum_{j=1}^{\Delta} n_j - 1 \right) = \sum_{j=1}^{\Delta} j n_j,$$

lub równoważnie w następującej postaci, wykorzystywanej w dalszej części dowodu:

$$n_1 = 2 + \sum_{j=3}^{\Delta} (j-2)n_j. \quad (1.15)$$

Po usunięciu wierzchołków i krawędzi wiszących z dowolnego lasu spełniającego warunek $n_{31} = n_{43} = n_{44} = 0$ otrzymujemy nowy las o co najwyżej $n_1 - 2$ wierzchołkach (patrz (1.15)), w którym każdy wierzchołek należący w wyjściowym lesie do zbioru C_{30} ma nadal stopień 3. Liczba takich wierzchołków nie przekracza $1/2n' - 1$, gdzie n' jest liczbą wierzchołków nowego lasu (wynika to ponownie z (1.15)). Ostatecznie więc $2n_{30} \leq n_1 - 2$.

Liczba sąsiadów wierzchołków ze zbioru $C_{31} \cup C_{32} \cup C_{33}$ należących do C_1 jest równa $3n_{33} + 2n_{32} + n_{31} \leq n_1$, skąd w prosty sposób wynika druga nierówność. Zauważmy również, że jeżeli zachodzi równość, (1.15) implikuje, że jedynie C_1 , C_{30} , C_{31} i C_{32} mogą nie być puste.

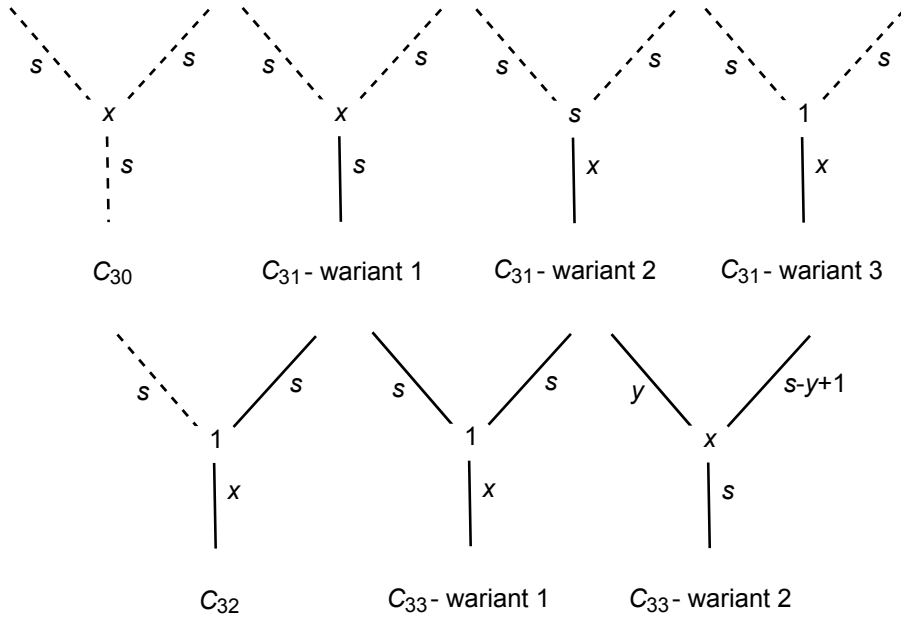
Trzecia część lematu wynika bezpośrednio z (1.15). \square

Powróćmy do dowodu twierdzenia. Rozpocznijmy od opisanego ważenia wierzchołków spoza zbioru C_1 . Przedstawioną poniżej metodę ważenia ilustrują rysunki 1.1 i 1.2 (krawędzie wiszące zostały przedstawione za pomocą ciągłych linii, zaś pozostałe - przerywanymi).

Do ważenia wierzchołków należących do poszczególnych zbiorów i incydentnych z nimi krawędzi używamy wagi s oraz różnych wag $x \in \{1, \dots, s\}$ i $y \in \{1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor\}$. Sposób wyboru x i y dla różnych wierzchołków został opisany poniżej.

Wszystkim krawędziom incydentnym z wierzchołkami $v \in C_{30}$ przypisujemy wagę s , zaś wierzchołkowi v jedną spośród wag x .

W przypadku wierzchołków $v \in C_{31}$ używamy trzech wariantów ważenia. W pierwszym z nich ważymy wszystkie incydentne krawędzie za pomocą s , zaś v przypisujemy pewną liczbę x . W drugim i trzecim przypadku przypisujemy wagę x krawędzi wiszącej i s pozostałym krawędziom. Różnica między wariantami 2 i 3 polega na tym, że w pierwszym z nich wierzchołek v otrzymuje wagę s , zaś w drugim wagę 1.



Rysunek 1.1: Wagi krawędzi i wierzchołków - zbiory C_{3k}

Wierzchołki $v \in C_{32}$ ważymy liczbą 1. Jedna z incydujących krawędzi wiszących otrzymuje wagę s , zaś druga wagę x . Trzecia krawędź otrzymuje wagę s .

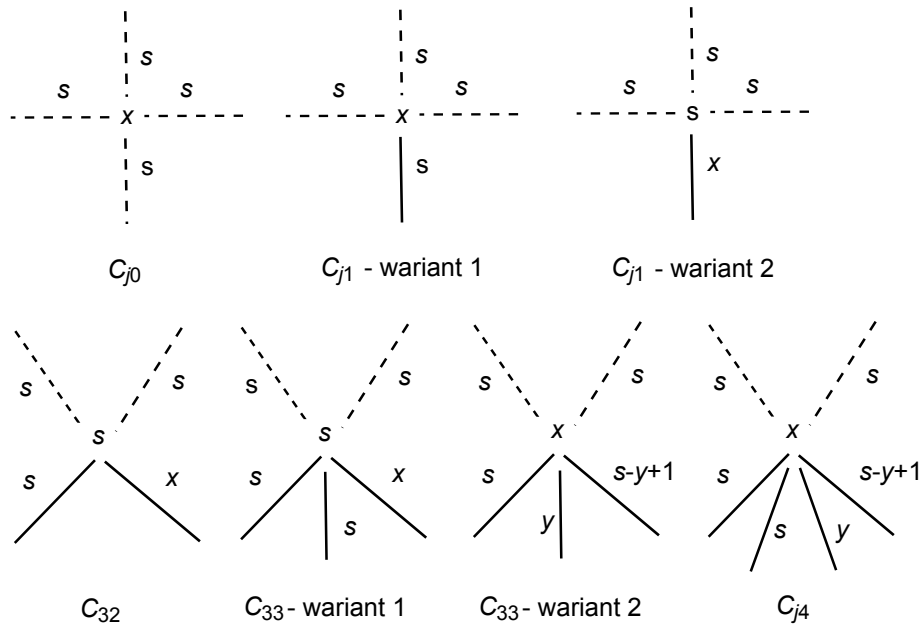
Wierzchołki $v \in C_{33}$ są ważone na dwa sposoby. W pierwszym przypadku przypisujemy v wagę 1, zaś krawędziom wagi s , s i x . W drugim przypadku wierzchołek v otrzymuje wagę x , zaś krawędzie wagi s , y i $s - y + 1$.

Każdemu z wierzchołków $v \in C_{j,0}$, $j > 3$, przypisujemy wagę x , zaś wszystkim incydującym krawędziom wagę s .

Wierzchołki $v \in C_{j,1}$, $j > 3$, ważymy na dwa sposoby. Wierzchołkom z pierwszej grupy przypisujemy wagę x , zaś wszystkim incydującym krawędziom wagę s . W drugim wariantie każdy z wierzchołków v otrzymuje wagę s , wisząca incydująca krawędź wagę x , zaś pozostałe incydujące krawędzie wagę s .

Wierzchołki $v \in C_{j,2}$, $j > 3$, ważymy za pomocą s , jedną z incydujących wiszących krawędzi za pomocą wagi x , zaś wszystkie pozostałe incydujące krawędzie za pomocą wagi s .

Wierzchołki $v \in C_{j,3}$, $j > 3$, ważymy dwoma sposobami. W pierwszym wariantie jedna z incydujących wiszących krawędzi otrzymuje wagę x , zaś pozostałe incydujące krawędzie i wierzchołek v wagę s . W drugim wariantie przypisujemy dwóm spośród incydujących wiszących krawędzi wagi


 Rysunek 1.2: Wagi krawędzi i wierzchołków - zbiory C_{jk} , $j > 3$

y i $s - y + 1$, pozostałym incydentnym krawędziom wagę s , zaś wierzchołkowi v wagę x . Identycznie, jak w drugim wariantcie, ważymy wierzchołki $v \in C_{j,4}$, $j > 3$.

Aby zakończyć, definiujemy ważenie wszystkich pozostałych wierzchołków, czyli $v \in C_{j,k}$, $j > 3$, $k > 4$. W ich przypadku postępujemy w następujący sposób. Grupujemy wiszące krawędzie po 4 (tak wiele, jak to możliwe) i ważymy każdą czwórkę według schematu przedstawionego dla $v \in C_{j,4}$, $j > 3$, to znaczy dwóm z krawędzi przypisujemy wagi y i $s - y + 1$, zaś dwóm pozostałym wagę s . Jeżeli poza wyodrębnionymi czwórkami zostały jeszcze jakieś (czyli jedna, dwie lub trzy), używamy do zważenia ich i incydentnego wierzchołka schematu takiego, jak do zważenia odpowiednio jednej z klas $C_{j,1}$, $C_{j,2}$ albo $C_{j,3}$. Jeżeli k jest podzielne przez 4 (czyli nie ma żadnej incydentnej krawędzi poza wydzielonymi czwórkami), ważymy wierzchołek v za pomocą wagi x . Wszystkim pozostałym incydentnym krawędziom przypisujemy wagę s .

Teraz zdefiniujemy sposób wyboru używanych powyżej wag x i y .

Ważymy $\lceil n_{j,4k+3}/2 \rceil$ lub $\lfloor n_{j,4k+3}/2 \rfloor$ wierzchołków z klas $C_{j,4k+3}/2$, $j > 3$, $k \geq 0$, i $\lceil n_{33}/2 \rceil$ lub $\lfloor n_{33}/2 \rfloor$ wierzchołków z klas C_{33} używając wariantu 1 ważenia i pozostałe wierzchołki z tych klas używając wariantu 2. W każdym przypadku wybieramy funkcję $\lceil \cdot \rceil$ lub $\lfloor \cdot \rfloor$ w taki sposób, aby ostatecznie

liczby wierzchołków zważonych przy użyciu pierwszego i drugiego wariantu różniły się co najwyżej o 1. Po ustaleniu, które wierzchołki są ważone drugim sposobem, ustalamy różne wartości y dla nich i dla wszystkich wierzchołków z klas $C_{j,4k+4}$, $j > 3$, $k > 0$, w taki sposób, aby wszystkie te wartości spełniały warunek $y \leq s/2$. Liczby wiszących wierzchołków z wagą s i z wagą y lub $s - y + 1$ różnią się o co najwyżej 1.

Następnie wybieramy $\lceil n_{31}/2 \rceil$ lub $\lfloor n_{31}/2 \rfloor$ wierzchołków z klasy C_{31} , którym nadamy wagi pierwszym sposobem (wybieramy $\lceil \cdot \rceil$ albo $\lfloor \cdot \rfloor$ w taki sposób, aby liczba wierzchołków z wagą s i liczba wierzchołków z innymi wagami różniły się o co najwyżej 1). Oznaczmy sumę tej liczby, liczby wierzchołków z klasy C_{43} zważonych za pomocą wariantu 2 i liczby $n_{44} + n_{30}$ przez n^* . Jeżeli $n^* = \lfloor (n_1 - 4)/2 \rfloor$, ważymy resztę wierzchołków z klasy C_{31} trzecim sposobem. W przeciwnym przypadku (czyli gdy $n^* < \lfloor (n_1 - 4)/2 \rfloor$), ważymy drugim sposobem $\lfloor (n_1 - 4)/2 \rfloor - n^*$ wierzchołków z klasy C_{31} , zaś pozostałe za pomocą wariantu 3.

Teraz wybieramy wartości x w taki sposób, aby wszystkie wartości x , y i $(s - y + 1)$ były różne.

Po przypisaniu wag w sposób przedstawiony powyżej, niezależnie od wyboru wartości x dla poszczególnych wierzchołków, wszystkie wierzchołki $v \in C_1$ mają ważne stopnie należące do zbioru $\{2, \dots, 2s\}$. Zauważmy, że jest $n_1 \leq 2s - 1$ takich wierzchołków. Możemy rozróżnić ich ważne stopnie przypisując wagę 1 każdemu wiszącemu wierzchołkowi, do którego przylega krawędź z jedną z wag $1, \dots, s - 1$ i różne wagi ze zbioru $1, \dots, s$ wierzchołkom, do których przylegają krawędzie z wagą s (jest to możliwe, gdyż liczby wierzchołków z wagą s i różnymi wagami mniejszymi od s różnią się co najwyżej o 1).

Można również zauważyć, że każdy wierzchołek $v \in C_{33} \cup C_{32}$ i niektóre spośród wierzchołków $v \in C_{31}$ mają ważne stopnie należące do zbioru $\{2s + 2, \dots, 3s\}$. Zgodnie z lematem 1.11 jest co najwyżej $\lceil (n_1 - 1)/2 \rceil = s - 1$ takich wierzchołków, zatem możemy nadać ich ważonym stopniom różne wartości przypisując im właściwe wagi x . Wyjątek stanowi sytuacja, gdy wszystkie wierzchołki lasu F należą do jednej z klas C_1 , C_{31} i C_{33} . Jednak w tej sytuacji istnienie nieregularnego ważenia zapewnia lemat 1.10.

Ostatecznie, pozostałe wierzchołki $v \in C_{31}$, wszystkie wierzchołki $v \in C_{30} \cup C_{44}$ i część spośród wierzchołków $v \in C_{43}$ mają różne ważne stopnie należące do zbioru $\{3s + 1, \dots, 4s\}$. Zgodnie z lematem 1.11 jest co najwyżej s takich wierzchołków, więc możemy rozróżnić ich ważne stopnie przypisując im różne wagi x .

Wszystkie pozostałe wierzchołki mają ważne stopnie równe co najmniej $4s + 1$. Ponieważ jest ich co najwyżej s (lemat 1.11), również ich ważne stopnie przyjmą różne wartości po odpowiednim wyborze wag x .

Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy las F zawiera k składowych $P_2^{(j)} \cong P_2$, $j = 1, \dots, k$, $k > 0$. Do zważenia pozostałej części lasu stosujemy algorytm przedstawiony powyżej, co gwarantuje uzyskanie jej nieregularnego ważenia za pomocą liczb $1, \dots, s = \left\lceil \frac{n_1+1}{2} \right\rceil$. Co więcej, możemy tak wybrać wagi x i y , żeby wierzchołki nie należące do składowych $P_2^{(j)}$ miały różne ważne stopnie ze zbioru $\{2, \dots, 2s - 2k\}$, jest ich bowiem $n_1 - 2k$.

Każdą ze składowych $P_2^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, ważymy w ten sposób, że krawędzi przypisujemy wagę $s - k + j$, zaś wierzchołkom wagi $s - k + j - 1$ i $s - k + j$. Dzięki temu ważne stopnie tych wierzchołków przyjmują różne wartości ze zbioru $\{2s - 2k + 1, \dots, 2s\}$.

Ponieważ wierzchołki wewnątrz każdego z podzbiorów mają różne ważne stopnie i ciągi stopni w poszczególnych podzbiorach są rozłączne, otrzymane ważenie jest nieregularne. \square

Zauważmy, że w dowodzie twierdzenia 1.8 nie został wykorzystany ważony stopień $2s + 1$. Pozwala to dokonać drobnego uogólnienia.

Twierdzenie 1.12.

Niech F będzie dowolnym lasem o n wierzchołkach, w którym $n_0 = 0$ i $n_2 \leq 1$. Wtedy

$$tvs(F) = \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil.$$

Dowód. Niech v^* będzie wierzchołkiem, dla którego $d_F(v^*) = 2$. Załóżmy, że jego sąsiadami są v_1 i v_2 . Usuwamy v^* z F łącząc v_1 i v_2 krawędzią (nie zmienia to wartości n_1). Ważymy powstały w ten sposób las F' w sposób przedstawiony w dowodzie twierdzenia 1.8. Przy tym, jeżeli $w(v_1, v_2)$ jest krawędzią zewnętrzną w F' , to x i y dobieramy w taki sposób, aby waga $w(v_1, v_2) = w_{12}$ spełniała warunek $w_{12} \geq \frac{s+1}{2}$ (jeżeli (v_1, v_2) jest krawędzią zewnętrzną, to jej waga równa jest s). Wagom wszystkich wierzchołków poza v^* i wszystkich krawędzi poza (v^*, v_1) i (v^*, v_2) w F przypisujemy wartości identyczne jak w F' , a ponadto ustalamy $w(v^*, v_1) = w(v^*, v_2) = w_{12}$ oraz $w(v^*) = 2s - 2w_{12} + 1$ (zauważmy, że $w(v) \leq s$). Ważone stopnie wierzchołków $v \in V(F) \setminus \{v^*\}$ nie zmieniają się, zaś $wd(v^*) = 2s + 1$, więc otrzymane ważenie jest nieregularne. \square

Konsekwencją powyższej modyfikacji jest następujący wniosek.

Wniosek 1.13. *Niech T będzie drzewem binarnym. Wtedy*

$$tvs(T) = \left\lceil \frac{n_1 + 1}{2} \right\rceil.$$

1.4 Potęgi cykli

Jedna z głównych hipotez dotyczących totalnej wierzchołkowej siły nieregularności mówi, że istnieje pewna stała rzeczywista c taka, że dla każdego r -regularnego grafu G zachodzi

$$tvs(G) \leq \left\lceil \frac{n+r}{r+1} \right\rceil + c. \quad (1.16)$$

Oznacza to, że oszacowanie górne na $tvs(G)$ różni się co najwyżej o stałą od dolnego oszacowania danego wzorem (1.2). Poniżej przedstawiony zostanie wynik potwierdzający tę hipotezę dla pewnej nietrywialnej rodziny grafów regularnych.

Rozpatrzmy rodzinę grafów cyklicznych, zdefiniowanych w następujący sposób (J.-L. Baril, H. Kheddouci i O. Togni [9]).

Definicja 1.14.

Niech n i s_1, s_2, \dots, s_k będą liczbami całkowitymi, przy czym $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n/2$. Graf cykliczny $G = Ci_n(s_1, \dots, s_k)$ rzędu n jest grafem ze zbiorem wierzchołków $V(G) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ i zbiorem krawędzi $E(G) = \{(x, x \pm s_i \bmod n), x \in V(G), 1 \leq i \leq k\}$.

Zauważmy, że $Ci_n(s_1, \dots, s_k)$ jest $2k$ -regularny. Główny rezultat pracy [9] mówi, że w przypadku $k = 2$ i $s_1 = 1$,

$$s(Ci_n(1, s_2)) = \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil. \quad (1.17)$$

o ile $s_2 \geq 2$ i $n \geq 4s_2 + 1$. Jako wniosek z powyższego autorzy wykazują również, że jeżeli $n \geq 4s_k + 1$, to:

$$s(Ci_n(1, s_2, \dots, s_k)) \leq \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil. \quad (1.18)$$

Wykorzystanie konstrukcji podanych w [9] do nadania wag krawędziom i przypisanie wierzchołkom jednakowych wag (równych na przykład 1) zachowuje nieregularność ważenia, więc prawdziwa jest następująca obserwacja.

Obserwacja 1.15.

(i) Jeżeli $k = 2$ i $s_1 = 1$, to

$$\left\lceil \frac{n+4}{5} \right\rceil \leq tvs(Ci_n(1, s_2)) \leq \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil.$$

(ii) Jeżeli $n \geq 4s_k + 1$, to

$$\left\lfloor \frac{n+2k}{2k+1} \right\rfloor \leq tvs(Ci_n(1, s_2, \dots, s_k)) \leq \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil.$$

Innym przykładem grafów cyklicznych są grafy $Ci_n(1, 2, \dots, k)$, izomorficzne z k -tymi potęgami cykli na n wierzchołkach C_n^k . W dalszej części tego rozdziału zajmujemy się właśnie tą rodziną grafów. Głównym rezultatem jest następujące twierdzenie, pochodzące z pracy [4].

Twierdzenie 1.16.

Jeżeli $k \geq 2$ i $n \geq 2k + 1$, to

$$tvs(C_n^k) = \left\lfloor \frac{n+2k}{2k+1} \right\rfloor.$$

Dowód. Ponieważ podana wartość $tvs(G)$ równa jest dolnemu ograniczeniu danemu wzorem (1.2), wystarczy podać konstrukcję, która pozwoli uzyskać nieregularne totalne ważenie za pomocą liczb $1, \dots, s = \lceil \frac{n+2k}{2k+1} \rceil$.

W dużym skrócie, ważenie krawędzi i wierzchołków grafu $G = C_n^k$ przebiega następująco.

Dzielimy G na co najwyżej $s - 1$ segmentów i ważymy ich krawędzie w taki sposób, aby ważne stopnie wierzchołków w każdym segmencie były różnymi wielokrotnościami liczby 2. W kolejnym kroku mnożymy wszystkie wagi krawędzi przez około $s/2$ (w zależności od parzystości s) w celu otrzymania ważenia, w którym ważne stopnie w każdym segmencie różnią się o co najmniej $s - 1$. Nadanie wierzchołkom w każdym segmencie wagi ze zbioru $\{1, 2, \dots, s - 1\}$ innej niż w pozostałych segmentach pozwala uzyskać pożądane totalne nieregularne ważenie.

Aby przedstawić dowód bardziej szczegółowo, konieczne jest uprzednie udowodnienie dwóch technicznych lematów.

Lemat 1.17.

Niech $S = S^{(k)}$ będzie grafem o $2k + 1$ wierzchołkach $\{v_0, v_1, \dots, v_{2k}\}$ ($k \geq 1$) ze zbiorem krawędzi złożonym z par (v_i, v_{i+j}) , gdzie $i = 0, 1, \dots, 2k - 1$ i $j = 1, 2, \dots, \min\{k, 2k - i\}$. Niech każdemu wierzchołkowi v_i przypisana będzie waga $l(v_i)$, gdzie

$$l(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \leq k, \\ 2(i - k) & \text{dla } i > k. \end{cases}$$

Wtedy istnieje ważenie $w : E(S) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że:

(i) Dla każdego wierzchołka v_i , $0 \leq i \leq 2k$:

$$\sum_{e \ni v_i} w(e) + l(v_i) = 2i.$$

(ii) Podgraf S złożony z krawędzi z wagą 1 zawiera wszystkie wierzchołki oprócz v_0 i v_{2k} i posiada obchód Eulera.

Dowód. Aby wykazać prawdziwość lematu, przedstawimy następujący algorytm pozwalający uzyskać pożądane ważenie. Wierzchołki v_i , których wszystkie krawędzie (v_i, v_j) , $j > i$, zostały zważone, będziemy określać jako *zamknięte*, pozostałe zaś jako *otwarte*.

Algorytm 1.18.

(i) Przypisz wagę 0 każdej krawędzi (v_0, v_i) , gdzie $1 \leq i \leq k$. Wierzchołek v_0 został zamknięty. Przejdź do kroku (ii).

(ii) Niech i będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że wszystkie wierzchołki v_j , $0 \leq j \leq i - 1$, są zamknięte i niech

$$p = 2i - \sum_{j=\max\{0, i-k\}}^{i-1} w((v_j, v_i)) - l(v_i).$$

Jeżeli $1 \leq p \leq k$, przypisz krawędziom wagi zgodnie ze wzorem

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k - p \\ 1 & \text{dla } i + k - p + 1 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Jeżeli natomiast $p \geq k + 1$, zastosuj wzór

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + 2k - p \\ 2 & \text{dla } j \geq i + 2k - p + 1. \end{cases}$$

Przejdź do kroku (iii).

(iii) Zamknij wierzchołek v_i . Jeżeli $i = 2k + 1$, STOP. W przeciwnym razie wróć do kroku (ii).

Liczba p z kroku (ii) zawsze spełnia warunek $p \geq 1$ (patrz niżej).

Przeanalizujemy algorytm, rozpatrując kolejne etapy jego działania. W każdym z nich przetwarzamy pewną grupę wierzchołków, ważąc krawędzie łączące je z wierzchołkami o wyższych indeksach. Zatem, po każdym etapie,

ważone stopnie wierzchołków z odpowiedniej grupy osiągają swoje ostateczne wartości.

Dla $0 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, przypisujemy krawędziom wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq k - i, \\ 1 & \text{dla } k - i + 1 \leq j \leq k + i. \end{cases}$$

Po tym etapie ważne stopnie wierzchołków $v_i, i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ przyjmują swoje końcowe wartości $wd(v_i) = 2i$. Ważone stopnie pozostałych wierzchołków osiągają z kolei tymczasowe wartości

$$wd(v_i) = \begin{cases} i - \lceil \frac{k}{2} \rceil & \text{dla } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq k, \\ i - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 & \text{dla } k + 1 \leq i \leq \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor, \\ 2(i - k) & \text{dla } \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

Dla $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq k$, krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq k + i - 1, \\ 2 & \text{dla } j = k + i. \end{cases}$$

Po tym etapie ważne stopnie wierzchołków $v_i, i \leq k$, osiągają swoje końcowe wartości $wd(v_i) = 2i$, zaś ważne stopnie pozostałych wierzchołków tymczasowe wartości

$$wd(v_i) = \begin{cases} i + 1 & \text{dla } k + 1 \leq i \leq \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor, \\ i + 2 & \text{dla } \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

W kolejnym etapie krawędziom incydentnym z wierzchołkami $v_i, k + 1 \leq i \leq \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor$, zostają przypisane wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq 3k - i, \\ 2 & \text{dla } 3k - i + 1 \leq j \leq 2k. \end{cases}$$

Powoduje to, że ważne stopnie wierzchołków $v_i, i \leq \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor$, osiągają swoje docelowe wartości. Ważone stopnie pozostałych wierzchołków osiągają wartości

$$wd(v_i) = 2i - k + 1.$$

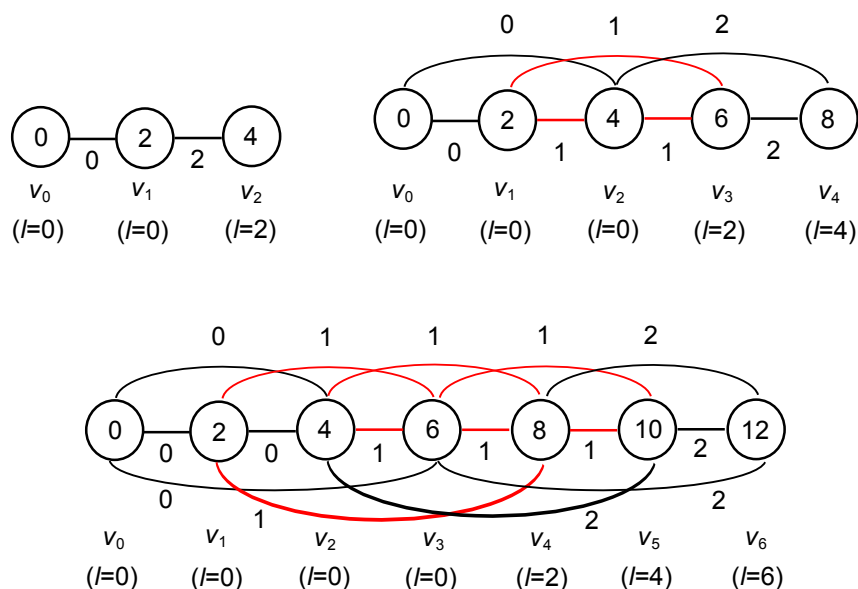
W ostatnim etapie przypisujemy wszystkim pozostałym krawędziom wagę 2. Wszystkie ważne stopnie osiągają w ten sposób swoje końcowe wartości

$$wd(v_i) = 2i.$$

Aby pokazać, że prawdziwa jest druga część lematu, zauważmy, że po przetworzeniu wszystkich wierzchołków, każdy oprócz v_0 i v_{2k} jest incydentny z przynajmniej dwiema krawędziami z wagą 1. Ponieważ wszystkie wazone stopnie są liczbami parzystymi, liczby incydentnych krawędzi z wagą 1 również muszą być parzyste. Ponadto, podgraf indukowany krawędziami z wagą 1 jest spójny, gdyż v_k jest połączony takimi krawędziami z każdym v_i dla $1 \leq i \leq 2k - 1, i \neq k$. Stąd omawiany podgraf zawiera obchód Eulera. \square

Przykład 1.19 (Ważenie grafów $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ i $S^{(3)}$).

Ważenie otrzymane za pomocą algorytmu 1.18 przedstawia rysunek 1.3. Grafy eulerowskie utworzone z krawędzi z wagą 1 zostały zaznaczone kolorem czerwonym, a wazone stopnie wierzchołków znajdują się wewnątrz reprezentujących je okręgów.



Rysunek 1.3: Lemat 1.17 - ważenie grafów $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ i $S^{(3)}$

Przejdźmy teraz do drugiego lematu, gwarantującego istnienie analogicznego ważenia dla segmentów o długości $4k + 2$.

Lemat 1.20.

Niech $D = D^{(k)}$ będzie grafem o $4k + 2$ wierzchołkach $\{v_0, v_1, \dots, v_{4k+1}\}$ ($k \geq 2$) i krawędziach postaci (v_i, v_{i+j}) , gdzie $i = 0, 1, \dots, 4k$ i $j = 1, 2, \dots, \min\{k, 4k - i + 1\}$. Niech każdemu wierzchołkowi v_i przypisana będzie waga $l(v_i)$, gdzie

$$l(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \leq 3k + 1 \\ 2(i - 3k - 1) & \text{dla } i > 3k + 1. \end{cases}$$

Wówczas istnieje ważenie $w : E(D) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że:

(i) Dla każdego wierzchołka v_i , $0 \leq i \leq 4k + 1$:

$$\sum_{e \ni v_i} w(e) + l(v_i) = 2 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor.$$

(ii) Podgraf grafu D złożony z krawędzi z wagą 1 zawiera wszystkie wierzchołki oprócz v_0, v_1, v_{4k} i v_{4k+1} i składa się z co najwyżej dwóch składowych, z których każda posiada obchód Eulera.

Dowód.

Przypadek 1: k jest liczbą parzystą.

Aby wykazać prawdziwość lematu, rozpatrzmy następujący algorytm, pozwalający otrzymać ważenie o pożądanym właściwościach. Wierzchołki zamknięte, i otwarte definiujemy przy tym analogicznie, jak w przypadku algorytmu 1.18.

Algorytm 1.21.

(i) Przypisz wagę 0 każdej krawędzi (v_0, v_i) , gdzie $1 \leq i \leq k$. Wierzchołek v_0 zostaje w ten sposób zamknięty. Przejdź do kroku (ii).

(ii) Niech i będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że wierzchołki v_j , $0 \leq j \leq i - 1$, są zamknięte i niech

$$p = 2 \lfloor i/2 \rfloor - \sum_{i-k \leq j < i} w((v_j, v_i)) - l(v_i).$$

Jeżeli $1 \leq p \leq k$, krawędziom wagi zgodnie ze wzorem

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k - p \\ 1 & \text{dla } i + k - p + 1 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Jeżeli z kolei $p \geq k + 1$, zastosuj wzór

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + 2k - p \\ 2 & \text{dla } i + 2k - p + 1 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Przejdź do kroku (iii).

(iii) Zamknij wierzchołek v_i . Jeżeli $i = 4k + 2$, STOP. W przeciwnym razie wróć do kroku (ii).

Liczba p z kroku (ii) zawsze spełnia warunek $p \geq 1$ (patrz niżej).

Podobnie jak w przypadku lematu 1.17, przeanalizujemy działanie algorytmu etapami, rozpatrując każdorazowo pewną grupę wierzchołków.

Dla $0 \leq i \leq \frac{k-2}{2}$, krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_{2i}, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2i + 1 \leq j \leq k, \\ 1 & \text{dla } k + 1 \leq j \leq 2i + k, \end{cases}$$

oraz

$$w((v_{2i+1}, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2i + 2 \leq j \leq k + 1, \\ 1 & \text{dla } k + 2 \leq j \leq 2i + k + 1. \end{cases}$$

Ponadto

$$w((v_k, v_j)) = 1, \quad k + 1 \leq j \leq 2k,$$

oraz

$$w((v_{k+1}, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k + 2 \leq j \leq \frac{3k}{2} + 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{3k}{2} + 2 \leq j \leq 2k + 1. \end{cases}$$

Po tym etapie ważne stopnie wierzchołków $v_i, i \leq k + 1$ osiągają swoje docelowe wartości

$$wd(v_i) = 2 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor,$$

zaś ważne stopnie pozostałych wierzchołków tymczasowe wartości

$$wd(v_i) = \begin{cases} 2k - i + 1 & \text{dla } k + 2 \leq i \leq \frac{3k}{2} + 1, \\ 2k - i + 2 & \text{dla } \frac{3k}{2} + 2 \leq i \leq 2k + 1, \\ 0 & \text{dla } 2k + 2 \leq i \leq 3k + 1, \\ 2(i - 3k - 1) & \text{dla } 3k + 2 \leq i \leq 4k + 1. \end{cases}$$

Dla $k + 2 \leq i \leq \frac{3k}{2}$, krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k - 3\lceil \frac{i-k-1}{2} \rceil - \lfloor \frac{i-k-1}{2} \rfloor, \\ 1 & \text{dla } i + k - 3\lceil \frac{i-k-1}{2} \rceil - \lfloor \frac{i-k-1}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Po przypisaniu podanych wag końcowe wartości osiągają ważne stopnie wszystkich wierzchołków v_i , $0 \leq i \leq \frac{3k}{2}$, zaś pozostałe ważne stopnie są równe

$$wd(v_i) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{dla } i = \frac{3k}{2} + 1, \\ \frac{k}{2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - \lceil \frac{i}{2} \rceil + 1 & \text{dla } \frac{3k}{2} + 2 \leq i \leq 2k + 1, \\ \frac{5k}{2} - i + 1 & \text{dla } 2k + 2 \leq i \leq \frac{5k}{2}, \\ 0 & \text{dla } \frac{5k}{2} + 1 \leq i \leq 3k + 1, \\ 2(i - 3k - 1) & \text{dla } 3k + 2 \leq i \leq 4k + 1. \end{cases}$$

W kolejnym etapie nadajemy wagę 1 krawędziom $(v_{\frac{3k}{2}+1}, v_j)$ dla $\frac{3k}{2} + 2 \leq j \leq \frac{5k}{2}$. Jeżeli $\frac{k}{2}$ jest liczbą nieparzystą, krawędź $(v_{\frac{3k}{2}+1}, v_{\frac{5k}{2}+1})$ otrzymuje wagę 1, a w przeciwnym razie wagę 2. Dla $\frac{3k}{2} + 2 \leq i \leq 2k + 1$ nadajemy ponadto krawędziom wagi

$$w((v_i, v_j)) = 1, \quad \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k.$$

Po tym etapie końcowe wartości osiągają ważne stopnie wierzchołków v_i , $0 \leq i \leq 2k + 1$, pozostałe zaś są równe

$$wd(v_i) = \begin{cases} 3k + 2 - i & \text{dla } 2k + 2 \leq i \leq 3k + 1, i \neq \frac{5k}{2} + 1, \\ 2\lceil \frac{k}{4} \rceil + 1 & \text{dla } i = \frac{5k}{2} + 1, \\ 2(i - 3k - 1) & \text{dla } 3k + 2 \leq i \leq 4k + 1. \end{cases}$$

Dla $2k + 2 \leq i \leq 3k - 1$, $i \neq \frac{5k}{2} + 1$, krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k - 2\lceil \frac{i-2k}{2} \rceil, \\ 2 & \text{dla } i + k - 2\lceil \frac{i-2k}{2} \rceil + 1 \leq j \leq i + k, \end{cases}$$

zaś dla $i = \frac{5k}{2} + 1$ wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq 3k + 1, \\ 2 & \text{dla } 3k + 2 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Po przypisaniu podanych wag docelowy poziom osiągają ważne stopnie wierzchołków v_i , $0 \leq i \leq 3k - 1$. Ważone stopnie pozostałych wierzchołków są równe

$$wd(v_i) = \begin{cases} k & \text{dla } i = 3k, \\ 2 \lfloor \frac{3k}{4} \rfloor - 2 & \text{dla } i = 3k + 1, \\ 2k - 2 & \text{dla } 3k + 2 \leq i \leq 4k, \\ 2k & \text{dla } i = 4k + 1. \end{cases}$$

Dla $i = 3k$, wagi przyjmują wartość

$$w((v_{3k}, v_j)) = 2, \quad \text{dla } 3k + 1 \leq j \leq 4k$$

. Z kolei dla $i = 3k + 1$ krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq 2 \lfloor \frac{7k}{4} \rfloor + 1, \\ 2 & \text{dla } 2 \lfloor \frac{7k}{4} \rfloor + 2 \leq j \leq i + k. \end{cases}$$

Po tym etapie ostateczne wartości osiągają ważne stopnie wierzchołków v_i dla $0 \leq i \leq 3k + 1$. Ważone stopnie pozostałych wierzchołków są natomiast równe

$$wd(v_i) = \begin{cases} 2k + 1 & \text{dla } 3k + 2 \leq i \leq \frac{7k}{2}, \\ 2 \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \frac{3k}{2} + 1 & \text{dla } i = \frac{7k}{2} + 1, \\ 2k + 2 & \text{dla } \frac{7k}{2} + 2 \leq i \leq 4k + 1. \end{cases}$$

Dla $3k + 2 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{7k}{4} \rfloor + 1$, krawędzie otrzymują wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i + 1 \leq j \leq 4k - 2 \lfloor \frac{i-3k}{2} \rfloor + 1, \\ 2 & \text{dla } 4k - 2 \lfloor \frac{i-3k}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq 4k + 1. \end{cases}$$

Po tym przypisaniu swoje końcowe wartości osiągają ważne stopnie wszystkich wierzchołków v_i dla $0 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{7k}{4} \rfloor + 1$. Pozostałe ważne stopnie są równe

$$wd(v_i) = 2 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - k - 2(\frac{k}{2} \bmod 2) + 2.$$

W ostatnim etapie nadajemy wszystkim pozostałym krawędziom wagę 2, dzięki czemu wszystkie ważne stopnie osiągają końcowe wartości.

Przypadek 2: k jest liczbą nieparzystą.

Rozpatrzmy podgraf grafu $D = D^{(k)}$ izomorficzny z $D^* = D^{(k^*)}$, $k^* = k - 1$, o zbiorze wierzchołków $V(D^*) = (v_0^*, v_1^*, \dots, v_{4k^*+1}^*)$, gdzie $v_i^* = v_{i-4}$ dla

$i = 0, \dots, 4(k-1) + 1$. Do zważenia krawędzi grafu D^* używamy algorytmu 1.21. Oznaczmy wagi nadane początkowo wierzchołkom przez $l^*(v_i)$. Oczywiście $l^*(v_i) = l(v_i) - 2$ dla $3k + 2 \leq i \leq 4k + 1$. Rozważmy otrzymane częściowe zważenie krawędzi grafu D . Niech $wd^*(v_i)$ oznacza tymczasowy ważony stopień wierzchołka v_i , zaś $wd(v_i)$ jego wartość docelową. Zauważmy, że:

$$wd^*(v_i) = \begin{cases} wd(v_i) & \text{dla } 0 \leq i \leq 1 \\ wd(v_i) - 2 & \text{dla } 2 \leq i \leq 3 \\ wd(v_i) - 4 & \text{dla } 4 \leq i \leq 4k + 1 \end{cases}$$

Zamieńmy wagi wierzchołków $l^*(v_i)$ na $l(v_i)$. To podnosi o 2 wartości $wd^*(v_i)$ dla $3k + 2 \leq i \leq 4k + 1$.

Krawędzie (v_i, v_{i+k}) dla $4 \leq i \leq 3k + 1$ nie są na razie zważone. Przypisujemy im wagę 2. Ponieważ ważne stopnie wzrastają o 2 lub 4, w zależności od liczby incydentnych krawędzi, otrzymujemy:

$$wd^*(v_i) = \begin{cases} wd(v_i) & \text{dla } 0 \leq i \leq 1 \\ wd(v_i) - 2 & \text{dla } 2 \leq i \leq k + 3 \\ wd(v_i) & \text{dla } k + 4 \leq i \leq 4k + 1 \end{cases}$$

Jeżeli $k \geq 5$, krawędzie (v_i, v_{i+1}) dla $6 \leq i \leq k + 2$ mają przypisaną wagę 0 (odpowiadają im krawędzie (v_i^*, v_{i+1}^*) grafu D^* dla $2 \leq i \leq k^* - 1$). Taka sama jest waga krawędzi (v_6, v_{k+3}) (czyli krawędzi $(v_2^*, v_{k^*}^*)$ w D^*). Zmieniamy te wagi na 1. Podobnie, krawędzie (v_2, v_3) , (v_3, v_4) , (v_4, v_5) i (v_2, v_5) mają przypisaną wagę 0, którą zmieniamy na 1. Wszystkim jeszcze niezważonym krawędziom grafu D (nie należącym do D^*) przypisujemy wagę 0.

W przypadku, gdy $k = 3$, przypisujemy wagę 1 krawędziom (v_2, v_3) , (v_3, v_6) , (v_5, v_6) , (v_4, v_5) i (v_2, v_4) (wszystkie miały dotychczas wagę 0 albo nie były zważone). W ten sposób otrzymujemy pożądane zważenie.

Aby wykazać, że część (ii) lematu jest prawdziwa, zauważmy, że po przetworzeniu wszystkich wierzchołków każdy z nich oprócz v_0, v_1, v_{4k} i v_{4k+1} jest incydentny do co najmniej dwóch krawędzi z wagą 1. Skoro ważne stopnie są parzyste, liczby incydentnych krawędzi z tą wagą również muszą być parzyste. Ponadto, podgraf jest spójny gdy k jest parzyste lub $k = 3$ i składa się z dwóch składowych w przeciwnym przypadku. Gdy k jest liczbą parzystą, waga 1 jest przypisana w szczególności krawędziom

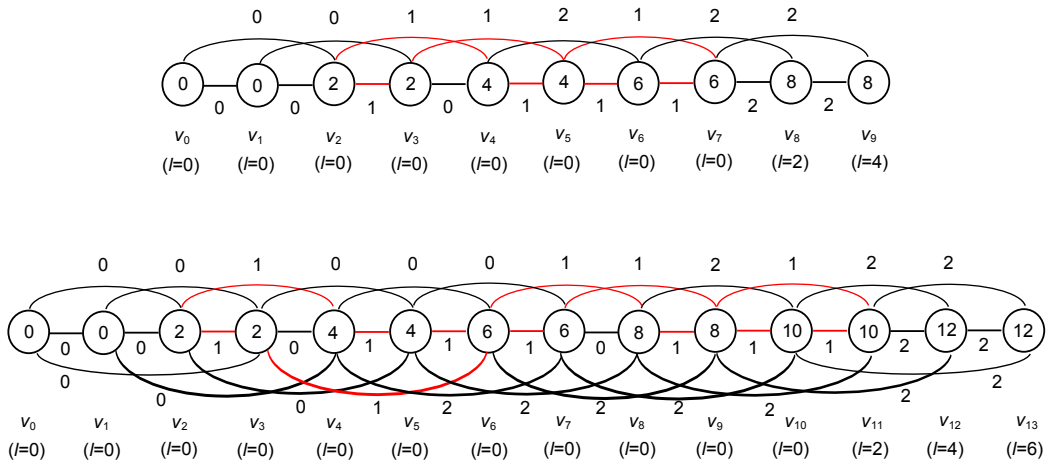
$$\begin{aligned} & (v_i, v_{k+2}) && \text{dla } 2 \leq i \leq k, \\ & (v_k, v_i) && \text{dla } k + 1 \leq i \leq 2k, \\ & (v_{2k}, v_i) && \text{dla } 2k + 1 \leq i \leq 3k, \\ & (v_{2k+1}, v_{3k+1}), \\ & (v_{3k+1}, v_{3k+2}), \\ & (v_{3k+2}, v_i) && \text{dla } 3k + 3 \leq i \leq 4k - 1. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $k \geq 5$ jest nieparzyste, odpowiednie krawędzie tworzą graf eulerowski o wierzchołkach v_i , $6 \leq i \leq 4k - 1$, a drugą składową stanowi podgraf o wierzchołkach v_2, v_3, v_4 i v_5 . Przypadek $k = 3$ został przedstawiony na rysunku 1.4. \square

Poniżej przedstawiony został przykład pokazujący ważenie grafów $D^{(2)}$ i $D^{(3)}$.

Przykład 1.22 (Ważenie grafów $D^{(2)}$ i $D^{(3)}$).

Ważenie grafów $D^{(2)}$ i $D^{(3)}$ przedstawia rysunek 1.4. Grafy eulerowskie utworzone z krawędzi z wagą 1 zostały zaznaczone kolorem czerwonym. Ważone stopnie wierzchołków znajdują się wewnątrz reprezentujących je okręgów.



Rysunek 1.4: Lemat 1.20 - ważenie grafów $D^{(2)}$ i $D^{(3)}$

Powróćmy do dowodu twierdzenia 1.16. Rozróżniamy kilka przypadków w zależności od relacji między n i k .

Przypadek 1: $n = 2k + 1$.

W tym przypadku graf C_n^k jest izomorficzny z grafem pełnym K_n i dowód równości

$$tvs(C_n^k) = tvs(K_n) = 2$$

można znaleźć np. w pracy M. Baćy i in. [8].

Przypadek 2: $n = 2k + 2$.

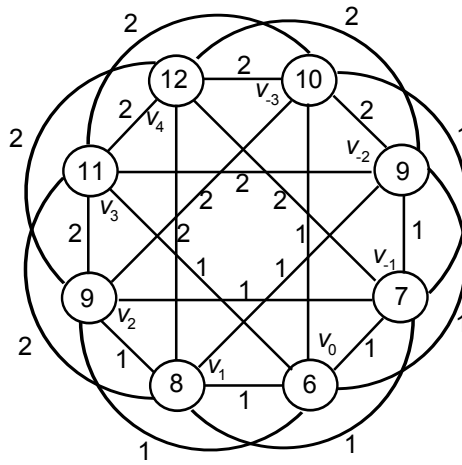
Przypiszmy wierzchołkom C_n^k indeksy $-k, -k + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, k, k + 1$. Nadajmy wagi krawędziom w następujący sposób:

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i| + |j| \leq k \vee (|i| + |j| = k + 1 \wedge \max\{i, j\} \leq 0), \\ 2 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Po przypisaniu takich wag, ważone stopnie wierzchołków są równe:

$$wd(v_i) = \begin{cases} 2k - 2i - 2 & \text{dla } -k \leq i \leq -\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1 \\ 2k - 2i - 1 & \text{dla } -\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq i \leq -1 \\ 2k + 2i & \text{dla } 0 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \\ 2k + 2i - 1 & \text{dla } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq k \\ 2k + 2i - 2 & \text{dla } i = k + 1 \end{cases}$$

Dla przykładu, ważenie dla $k = 3$ przedstawione zostało na rysunku 1.5.



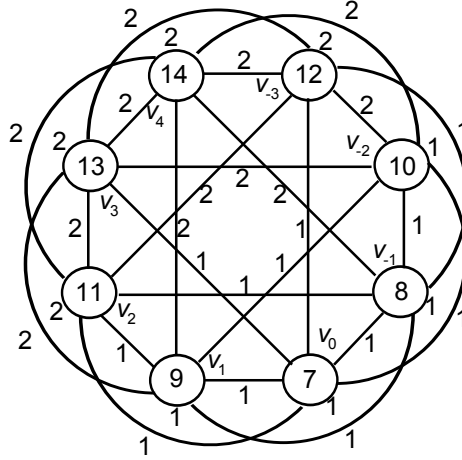
Rysunek 1.5: Graf C_8^3 - ważenie krawędzi

Oznacza to, że ważone stopnie wierzchołków v_i , $-\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, są różnymi liczbami całkowitymi ze zbioru $\{2k, \dots, 3k\}$, zaś ważone stopnie pozostałych wierzchołków różnymi liczbami ze zbioru $\{3k, \dots, 4k\}$. W celu otrzymania totalnego nieregularnego ważenia przypisujemy wierzchołkom z pierwszej grupy wagę 1, a pozostałym wagę 2. Końcowe ważenie dla przypadku $k = 3$ przedstawia rysunek 1.6.

Przypadek 3: $n > 2k + 2$.

Liczbę wierzchołków grafu $G = C_n^k$ możemy przedstawić jako $n = t(4k + 2) + r$, gdzie $t \geq 0$ i $1 \leq r \leq 4k + 2$ są pewnymi liczbami całkowitymi.

Dzielimy G na pewną liczbę segmentów, z których wszystkie oprócz dwóch są izomorficzne z $S^{(k)}$, jeden z $S^{(g)}$ i jeden z $S^{(h)}$ albo $D^{(h)}$, gdzie $g, h \leq k$, $|g - h| \leq 1$. Dla pewnych wartości r konieczne jest dołączenie dodatkowego wierzchołka. Korzystając z lematów 1.17 i 1.20 konstruujemy ważenia dla segmentów, następnie rozszerzamy je na wszystkie krawędzie i wierzchołki grafu G .


 Rysunek 1.6: Graf C_8^3 - końcowe ważenie

Konstrukcja ważenia przebiega w odmienny sposób dla różnych zależności między r i k , z tego względu rozpatrujemy trzy przypadki. Ze względu na powtarzanie się niektórych pojęć i elementów konstrukcji, najpierw opisany został przypadek $2k + 3 \leq r \leq 4k + 2$, następnie $2 \leq r \leq 2k + 1$, na końcu zaś $r \in \{1, 2k + 2\}$.

Przypadek 3.1: $2k + 3 \leq r \leq 4k + 2$.

Niech $g = \lfloor \frac{r-2}{4} \rfloor$. Rozważmy $2t$ grafów S_1, S_2, \dots, S_{2t} izomorficznych z $S^{(k)}$ i dwa dodatkowe grafy $S_{2t+1} \cong S^{(h)}$ i $S_{2t+2} \cong S^{(g)}$ gdzie $h = g$ jeżeli r jest liczbą nieparzystą i $h = g + 1$ w przeciwnym przypadku.

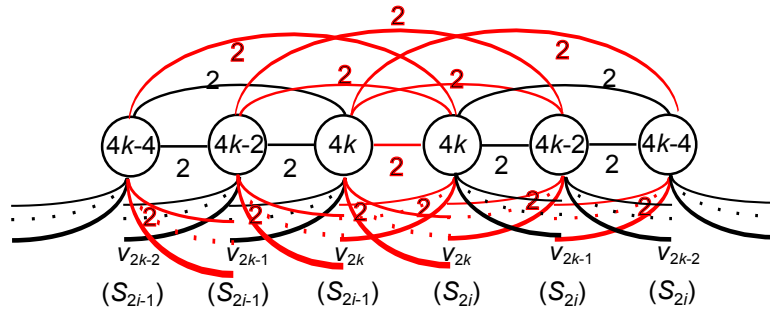
Oznaczmy wierzchołki G przez $v_0(G), \dots, v_{n-1}(G)$. Dzielimy graf na segmenty w taki sposób, że wierzchołki grafów S_j , $1 \leq j \leq 2t$ (oznaczone $v_0(S_j), \dots, v_{2k+1}(S_j)$), S_{2t+1} (oznaczone $v_0(S_{2t+1}), \dots, v_{2h}(S_{2t+1})$) i S_{2t+2} (oznaczone $v_0(S_{2t+2}), \dots, v_{2g}(S_{2t+2})$) utożsamiamy z kolejno po sobie następującymi podzbiórami zbioru wierzchołków G , przy czym dla rosnących indeksów wierzchołków w G indeksy wierzchołków w S_j rosną dla $j = 2i - 1$ i maleją dla $j = 2i$, $1 \leq i \leq t + 1$. Innymi słowy, jeżeli wierzchołki $v_i(G)$ i $v_{i+1}(G)$ (albo $v_{n-1}(G)$ i $v_0(G)$) należą do dwóch sąsiednich segmentów S_j i S_{j+1} (odpowiednio S_{2t+2} i S_1), to albo oba mają najwyższe indeksy w segmentach (czyli $v_i(G) = v_{2k}(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_{2k}(S_{j+1})$, względnie $v_i(G) = v_{2h}(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_{2g}(S_{j+1})$), albo $v_i(G) = v_0(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_0(S_{j+1})$. Jeżeli $r \bmod 4 \in \{1, 3\}$, pozostawiamy dodatkowy wierzchołek $v^* = v_{n-2h-2}(G)$ pomiędzy S_{2t+1} i S_{2t+2} .

Ważenie grafu G przeprowadzamy w dwóch krokach. Zaczynamy od zdefiniowania wstępnego ważenia krawędzi $w^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, następnie

przekształcamy wagi krawędzi i ważymy wierzchołki w celu otrzymania ważenia $w : E(G) \cup V(G) \rightarrow \{1, \dots, s\}$.

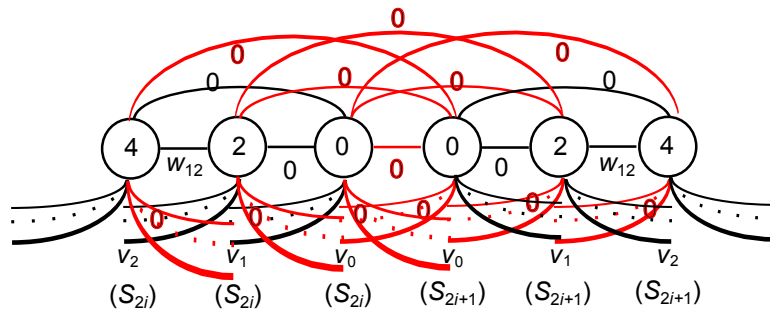
Konstrukcję w^* zaczynamy od zważenia segmentów za pomocą algorytmu 1.18. Następnie przechodzimy do ważenia pozostałych krawędzi G (czyli krawędzi $e \in E(G) \setminus \bigcup_{j=1}^{2t+2} E(S_j)$).

Jeżeli dwoma kolejnymi segmentami są S_{2i-1} i S_{2i} , $1 \leq i \leq t$ (czyli należące do nich skrajne wierzchołki mają stopień $2k$), przypisujemy wagę 2 wszystkim łączącym je krawędziom (nie należących do segmentów, ale należących do G). Ilustruje to rysunek 1.7. Na czerwono zostały zaznaczone krawędzie nie należące do segmentów.



Rysunek 1.7: Łączenie segmentów (1)

Krawędziom łączącym S_{2i} i S_{2i+1} , $1 \leq i \leq t$ albo S_{2t+2} i S_1 przypisujemy wagę 0. Ilustruje to rysunek 1.8. Waga krawędzi $(v_1(S_{2i}), v_2(S_{2i}))$ i $(v_1(S_{2i+1}), v_2(S_{2i+1}))$ została oznaczona przez w_{12} .



Rysunek 1.8: Łączenie segmentów (2)

Zauważmy, że ważone stopnie wierzchołków nie ulegają zmianie, gdyż sumy wag krawędzi łączących segmenty grafu G nie należących do S_j są równe wagom $l(v)$ z lematu 1.17.

Jeżeli $r \bmod 2 = 0$, przypisujemy wagę 2 krawędziom

$$(v_{h+i}(S_{2t+1}), v_{2g-j+1}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i,$$

a w przeciwnym razie krawędziom

$$\begin{aligned} &(v_{h+i}(S_{2t+1}), v_{2g-j+2}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 2 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i-1, \\ &(v^*, v_{h+i}(S_{2t+1})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq g+1, \\ &(v^*, v_{2g-i+1}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq g+1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia operacja może powiększyć o 2 ważne stopnie niektórych wierzchołków $v \in V(S_{2t+2})$, jednak po jej wykonaniu pozostają spełnione warunki

$$wd^*(v) \leq 2k \quad \text{dla } v \in V(S_{2t+1}) \cup V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\}$$

oraz

$$|\{v \in V(S_{2t+1}) \cup V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\} : wd^*(v) = 2i\}| \leq 2 \quad \text{dla } i = 0, \dots, k,$$

gdyż $wd(v^*) \neq wd(v_{2g}(S_{2t+2}))$.

Aby zakończyć konstrukcję ważenia w^* , przypisujemy wagę 0 wszystkim jeszcze nie zważonym krawędziom G .

Ostatecznie otrzymujemy więc ważenie $w^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że wszystkie ważne stopnie są parzyste, podgraf złożony z krawędzi o wagach równych 1 ma co najwyżej $2t + 2$ składowych, z których każda jest grafem eulerowskim, a ponadto

$$|\{v \in V(G) : wd^*(v) = 2i\}| \leq 2t + 2 \quad \text{dla } i = 0, \dots, k.$$

Niech $s = \lceil \frac{n+2k}{2k+1} \rceil$ (zauważmy, że s jest liczbą nieparzystą). Definiujemy ważenie $w : E(G) \cup V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$ w następujący sposób:

$$w(e) = \frac{s-1}{2}w^*(e) + 1 \quad \text{dla } e \in E(G), \quad (1.19)$$

$$w(v) = \begin{cases} j & \text{dla } v \in V(S_j), 1 \leq j \leq 2t+1, \\ 2t+2 & \text{dla } v \in V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Jak widać, wagi krawędzi zostały przekształcone w taki sposób, że dla otrzymanego ważenia $w : E(G) \rightarrow \{0, \frac{s+1}{2}, s\}$ sumy wag krawędzi incydenentnych z różnymi wierzchołkami w każdym segmencie S_j różnią się o co najmniej $s-1$. Przypisując wierzchołkom różne wagi ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2t+2\}$ rozróżniamy ważne stopnie w całym grafie, gdyż $2t+2 \leq s-1$.

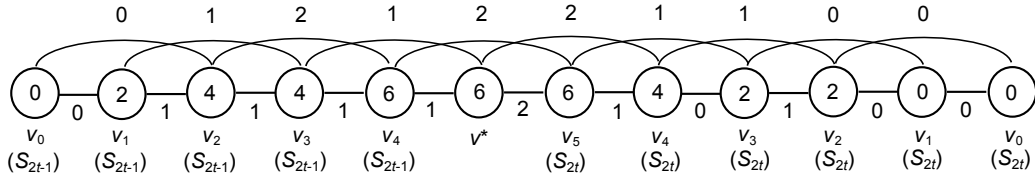
Przypadek 3.2: $2 \leq r \leq 2k + 1$.

Niech $g_1 = \lfloor \frac{4k+r+1}{6} \rfloor$. Jeżeli $g_1 \geq 2$, Postępujemy podobnie jak w poprzednim przypadku, tym razem używając $2t - 2$ grafów $S_1, S_2, \dots, S_{2t-2}$ izomorficznych z $S^{(k)}$ i dwóch dodatkowych grafów $S_{2t} \cong D^{(g_1)}$ i $S_{2t-1} \cong S^{(g_2)}$, gdzie

$$g_2 = \begin{cases} g_1 & \text{dla } (4k + r \bmod 6) \in \{1, 2\}, \\ g_1 + 1 & \text{dla } (4k + r \bmod 6) \in \{3, 4\}, \\ g_1 - 1 & \text{dla } (4k + r \bmod 6) \in \{0, 5\}. \end{cases}$$

Ważymy wszystkie grafy $S_j, 1 \leq j \leq 2t - 1$, za pomocą algorytmu 1.18, a graf S_{2t} za pomocą algorytmu 1.21, przy czym stosujemy dodatkową modyfikację gdy g_1 jest liczbą nieparzystą (patrz dowód lematu 1.20).

Niech $g = \min\{g_1, g_2\}$ i $h = \max\{g_1, g_2\}$. Jeżeli $g_1 = 1$ (wtedy na pewno $g_2 = 2$), w przypadku sumy grafów S_{2t-1} i S_{2t} zamiast wskazanych algorytmów stosujemy ważenie jak na rysunku 1.9 (musimy uwzględnić dodatkowe wierzchołki v^* , zaś wszystkie nie uwzględnione na rysunku krawędzie, należące do S_{2t-1} lub S_{2t} albo łączące te grafy ze sobą i z v^* , otrzymują wagę 0).



Rysunek 1.9: Ważenie segmentów S_{2t-1} i S_{2t} oraz krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v^* , gdy $g_1 = 1$

Identyfikujemy wierzchołki segmentów $S_j, 1 \leq j \leq 2t$, z kolejnymi podzbiarami wierzchołków G i ważymy pozostałe krawędzie (z wyjątkiem łączących S_{2t-1} z S_{2t}) jak w poprzednim przypadku. Tym razem dodatkowy wierzchołek v^* włączmy pomiędzy S_{2t-1} i S_{2t} jeżeli r jest liczbą parzystą i $g_1 > 1$. W tym przypadku przypisujemy wagę 2 krawędziom

$$\begin{aligned} & (v_{2g_2-h+i}(S_{2t-1}), v_{4g_1-j+3}(S_{2t})) && \text{dla } 2 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i - 1, \\ & (v^*, v_{2g_2-h+i}(S_{2t-1})) && \text{dla } 1 \leq i \leq g + 1, \\ & (v^*, v_{4g_1-i+2}(S_{2t})) && \text{dla } 1 \leq i \leq g + 1. \end{aligned}$$

Jeżeli r jest nieparzyste, wagę 2 przypisujemy krawędziom

$$(v_{2g_2-h+i}(S_{2t-1}), v_{4g_1-j+2}(S_{2t})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i.$$

W przypadku gdy $g_1 = 1$, wierzchołek v^* dołączamy w miejscu wskazanym na rysunku 1.9.

Wszystkim niezważonym krawędziom nadajemy wagę 0. Ostatecznie otrzymujemy ważenie krawędzi $w^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że wszystkie ważone stopnie są parzyste, podgraf indukowany krawędziami z wagą 1 ma co najwyżej $2t + 1$ składowych, z których każda jest grafem eulerowskim, a ponadto

$$|\{v \in V(G) : wd^*(v) = 2i\}| \leq 2t + 1 \quad \text{dla } i = 0, \dots, k.$$

Tym razem s jest liczbą parzystą, więc musimy nieco zmienić konstrukcję ważenia w . Pierwsza modyfikacja polega na tym, że używamy wzoru (1.19) tylko dla krawędzi e , dla których $w^*(e) \in \{0, 2\}$. W przypadku krawędzi e , dla których $w^*(e) = 1$, postępujemy w następujący sposób. Dla każdej składowej złożonej z krawędzi z wagą 1 (będącej grafem eulerowskim) zaczynamy od pewnego wierzchołka i poruszając się wzdłuż obchodu Eulera nadajemy kolejnym krawędziom na przemian wagi:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(e) &= \frac{s-2}{2}w^*(e) + 1, \\ w^{(2)}(e) &= \frac{s}{2}w^*(e) + 1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Jeżeli długość cyklu jest parzysta, nowe ważone stopnie w każdym segmencie będą się różnić o co najmniej $s - 1$, jak w poprzednim przypadku. Jeżeli jest nieparzysta, jedynymi wyjątkami mogą być wierzchołki, od których rozpoczynaliśmy ważenie cykli i ich sąsiedzi, gdyż początkowe wierzchołki mogą mieć ważony stopień o 1 mniejszy od pożądanego. Niech V_0 będzie zbiorem wszystkich takich wierzchołków. Aby dokończyć ważenie, przypisujemy wierzchołkom wagi zgodnie ze wzorem

$$w(v) =: \begin{cases} j & \text{dla } v \in V(S_j), 1 \leq j \leq 2t - 2, \\ w_0 \in \{2t - 1, 2t, 2t + 1\} & \text{dla } v \in V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\}. \end{cases} \tag{1.22}$$

Liczby $w_0 \in \{2t - 1, 2t, 2t + 1\}$ przypisujemy w taki sposób, aby każde dwa wierzchołki $v', v'' \in V(S_{2t-1}) \cup V(S_{2t}) \cup \{v^*\}$, dla których

$$wd^*(v') = wd^*(v''),$$

otrzymały dwie różne wagi. Takie przypisanie jest możliwe, gdyż

$$|\{v \in V(S_{2t-1}) \cup V(S_{2t}) \cup \{v^*\} : wd^*(v) = 2i\}| \leq 3 \quad \text{dla } i = 0, \dots, k.$$

Aby zakończyć konstrukcję, dodajemy 1 do wagi każdego z wierzchołków $v \in V_0$. W ten sposób powstaje totalne nieregularne ważenie, ponieważ $2t + 1 \leq s - 1$.

Przypadek 3.3: $r = 1$ lub $r = 2k + 2$.

W takiej sytuacji ważymy we właściwy sposób C_{n-1}^k za pomocą metody przedstawionej w jednym z dwóch poprzednich przypadków. Zauważmy, że maksymalny ważony stopień jest równy $(2k+1)s-1$ (dla pewnego wierzchołka z wagą $s-1$, którego wszystkie incydentne krawędzie mają wagę s). Niech v_i i v_{i+1} będą dwoma sąsiednimi wierzchołkami o wszystkich incydentnych krawędziach z wagą s . Usuwamy krawędzie

$$\begin{aligned} &(v_j, v_{j+k}) \quad \text{dla } i - k + 1 \leq j \leq i, \\ &(v_{j-k}, v_j) \quad \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k, \end{aligned}$$

a następnie dołączamy wierzchołek v^{n-1} i krawędzie

$$\begin{aligned} &(v_j, v_{n-1}) \quad \text{dla } i - k + 1 \leq j \leq i, \\ &(v_{n-1}, v_j) \quad \text{dla } i + 1 \leq j \leq i + k, \end{aligned}$$

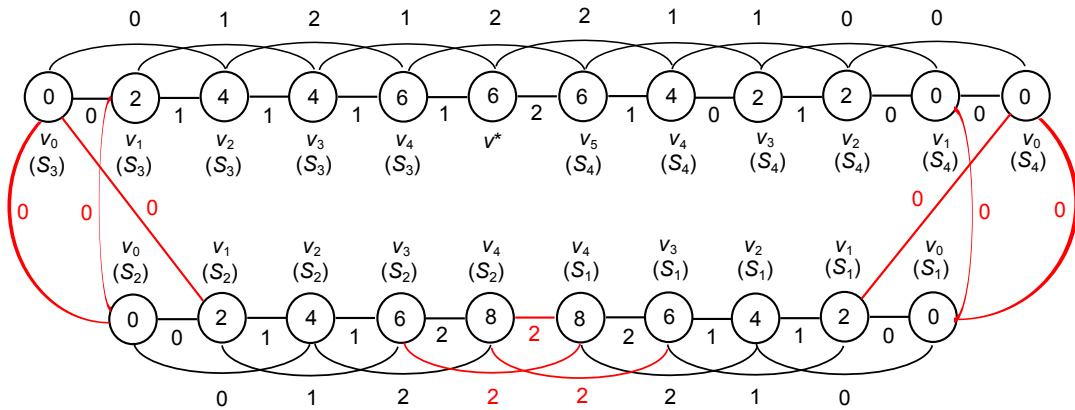
którym przypisujemy wagę s . Aby zakończyć konstrukcję nieregularnego totalnego ważenia w , ustalamy $w(v_{n-1}) = s$. \square

Na zakończenie przedstawiamy przykład ilustrujący konstrukcję ważenia w jednym z opisanych powyżej przypadków.

Przykład 1.23 (Konstrukcja ważenia dla grafu C_{22}^2).

Mamy $n = 22$, $k = 2$, $s = 6$, $t = 4$, $r = 2$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g = 1$ i $h = 2$.

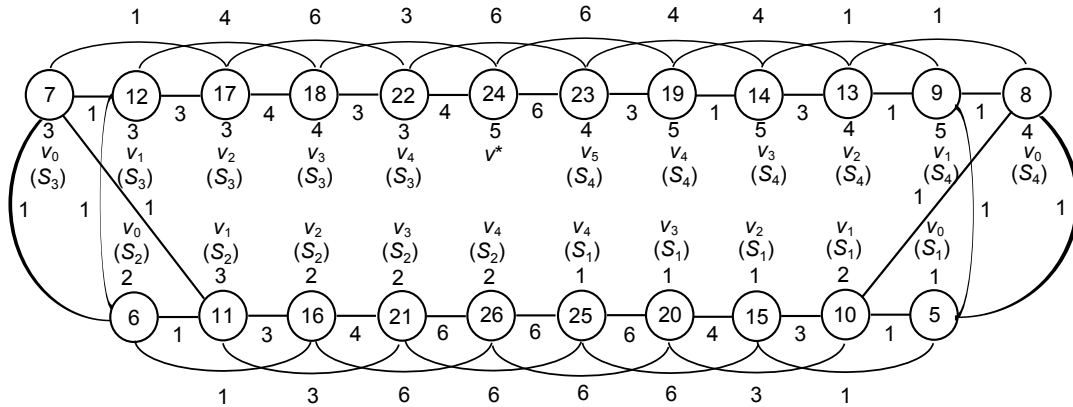
Ważenie w^* zostało przedstawione na rysunku 1.10. Na czerwono zostały zaznaczone krawędzie łączące ze sobą wierzchołki z różnych segmentów.



Rysunek 1.10: Ważenie w^*

Ponieważ s jest liczbą parzystą, ostateczne wagi krawędzi e , dla których $w^*(e) \in \{0, 2\}$ ustalamy za pomocą wzoru (1.19), zaś krawędzi, dla

których $w^*(e) = 1$ za pomocą wzorów (1.21). Dwa obchody Eulera - $(v_1(S_1), v_2(S_1), v_3(S_1), v_1(S_1))$ i $(v_1(S_2), v_2(S_2), v_3(S_2), v_1(S_2))$ - mają długość 3, a więc $|V_0| = 2$. Przyjmujemy, że $V_0 = \{v_1(S_1), v_1(S_2)\}$, a więc wskazanym wierzchołkom przypisujemy wagi o 1 większe, niż wynikałoby z ogólnych wzorów. Końcowe ważenie zostało przedstawione na rysunku 1.11.



Rysunek 1.11: Końcowe ważenie w

Rozdział 2

Siła nieregularności

2.1 Wprowadzenie

Rozważmy graf prosty G bez składowych K_2 i z co najwyżej jednym izolowanym wierzchołkiem. Przyjmijmy, że dana jest funkcja $w : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ zwana ważeniem krawędzi. Ważony stopień wierzchołka v definiujemy jako sumę:

$$wd_G(v) = \sum_{e \ni v} w(e) \quad (2.1)$$

Ważenie nazywamy nieregularnym, gdy ważone stopnie wszystkich wierzchołków są różne. Oznaczmy najwyższą użytą wagę przez s . Siła nieregularności $s(G)$ jest równa najmniejszej wartości s , dla której istnieje nieregularne ważenie.

Parametr ten został zdefiniowany po raz pierwszy w 1988 roku w pracy [10] przez G. Chartranda i in. Mimo ponad dwudziestoletniej historii badań nad nim, jego dokładna wartość została podana jedynie dla nielicznych klas grafów. Znany jest jednak szereg oszacowań dla dowolnych grafów i grafów regularnych.

Oszacowanie dolne pochodzi z pracy [10] (n_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i):

$$s(G) \geq \max_{1 \leq i \leq \Delta} \left\lceil \frac{n_i + i - 1}{i} \right\rceil. \quad (2.2)$$

W przypadku grafów r -regularnych sprowadza się ono do postaci:

$$s(G) \geq \left\lceil \frac{n + r - 1}{r} \right\rceil. \quad (2.3)$$

W przypadku ogólnym pierwsze oszacowanie górne równe $2n - 3$ podano w pracy [10]. Kolejne oszacowania, równe $n + 1$ i $n - 1$ pojawiły się w pracach M.S. Jacobsona i J. Lehela [20], M. Aignera i E. Triescha [1] oraz T. Nierhoffa [26]. Oszacowanie dla grafów r -regularnych równe $n/2 + 9$ zostało udowodnione w pracy R.J. Faudree i J. Lehela [16]. Pierwsze oszacowania uwzględniające stopnie wierzchołków podali A. Frieze i in. w [17]. Zostały one następnie nieznacznie poprawione w pracach J. Przybyło [29] i [30]. Najlepsze jak dotąd oszacowanie górne podane zostało w pracy M. Kalkowskiego, M. Karońskiego i F. Pfendera [24] i wynosi $6n/\delta$ dla dowolnego grafu.

Znana jest dokładna wartość $s(G)$ dla pewnych klas grafów. Są to w szczególności: ścieżki (G. Chartrand i in. [10]), drzewa bez wierzchołków stopnia 2 (D. Amar i O. Togni [3] oraz O. Togni [32]), cykle (R.J. Faudree i in. [15]), grafy, których składowe są cyklami i ścieżkami (L. Kinch i J. Lehel [25] oraz M. Aigner i E. Triesch [1]), kraty (G. Chartrand i in. [10], J.H. Dinitz i D.K. Garnick [11], G. Ebert i in. [13], J.H. Dinitz, D.K. Garnick i A. Gyárfás [12], D.K. Garnick [18]), grafy pełne (G. Chartrand i in. [10]), grafy pełne dwu- i k -dzielne (G. Chartrand i in. [10], R.J. Faudree i in. [15], A. Gyárfás [19]), gęste grafy regularne (D. Amar [2] oraz R.J. Faudree i in. [15]), suma klik (R.J. Faudree i in. [15], R.J. Faudree i in. [14], S. Jendroľ i M. Tkáč [21], S. Jendroľ, M. Tkáč i Z. Tuza [22]), uogólniony graf Petersena (S. Jendroľ i V. Žoldák [23]), torusy i kraty toroidalne (O. Togni [32], [33] i [34]) i pewna klasa grafów cyklicznych (J.-L. Baril, H. Kheddouci i O. Togni [9]).

2.2 Potęgi cykli

Podobnie, jak w przypadku $tvs(G)$, również w przypadku siły nieregularności jedna z ważniejszych hipotez dotyczy grafów regularnych. Została ona postawiona w pracy G. Chartranda i in. [10] i głosi, że wartość $s(G)$ dla każdego grafu r -regularnego różni się co najwyżej o stałą od dolnego ograniczenia danego wzorem (2.3), czyli istnieje stała c taka, że dla każdego r -regularnego grafu G spełniona jest zależność

$$s(G) \leq \left\lceil \frac{n+r-1}{r} \right\rceil + c. \quad (2.4)$$

Dotychczas nie znaleziono kontrprzykładu, a wszystkie uzyskane wyniki sugerują, że wspomniana hipoteza jest prawdziwa. Poniżej przedstawiony został dowód jej prawdziwości dla pewnej rodziny grafów regularnych.

Jak zostało wspomniane wyżej, w pracy [9] J.L.-Baril, H. Kheddouci i O. Togni rozważali szczególny typ grafów cyklicznych (patrz definicja 1.14). Wykazali mianowicie, że

$$s(Ci_n(1, s_2)) = \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil. \quad (2.5)$$

o ile $s_2 \geq 2$ and $n \geq 4s_2 + 1$. Ponadto z powyższego wynika, że dla $n \geq 4s_k + 1$:

$$s(Ci_n(1, s_2, \dots, s_k)) \leq \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil. \quad (2.6)$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, przedmiotem naszych zainteresowań będzie inna rodzina grafów cyklicznych, a mianowicie grafy postaci $Ci_n(1, 2, \dots, k)$, czyli potęgi cykli. Poniżej udowodnimy następujące twierdzenie, przedstawione w pracy [4]:

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli $k \geq 2$ i $n \geq 2k + 1$, to

$$s(C_n^k) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2k-1}{2k} \right\rceil + 1, & (n \bmod 4k = 2k + 1 \wedge k \bmod 2 = 1) \vee n = 2k + 1, \\ \left\lceil \frac{n+2k-1}{2k} \right\rceil, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Podobnie jak w przypadku dowodu twierdzenia 1.16, dzielimy graf na segmenty i najpierw ważymy każdy z nich, a następnie przekształcamy wagi, aby otrzymać pożądane nieregularne ważenie. Podobnie jak w poprzednim przypadku potrzebować będziemy dwóch technicznych lematów, z których pierwszy stanowi rozwinięcie lematu 1.17.

Lemat 2.2.

Niech $R = R^{(k)}$ będzie grafem o $2k$ wierzchołkach v_1, v_2, \dots, v_{2k} ($k \geq 1$) ze zbiorem krawędzi złożonym z par (v_i, v_{i+j}) , gdzie $i = 1, \dots, 2k - 1$ i $j = 1, 2, \dots, \min\{k, 2k - i\}$. Niech każdemu wierzchołkowi v_i przypisana będzie waga $l(v_i)$, gdzie

$$l(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \leq k \\ 2(i - k) & \text{dla } i > k. \end{cases}$$

Wtedy istnieje ważenie $w : E(R) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że:

(i) Dla każdego wierzchołka v_i , $1 \leq i \leq 2k$:

$$\sum_{e \ni v_i} w(e) + l(v_i) = 2i.$$

(ii) Podgraf grafu R indukowany krawędziami z wagami 1 i 2 zawiera wszystkie jego wierzchołki i posiada podgraf F będący cyklem Hamiltona albo krawędzią z wagą 2.

Dowód.

Do ważenia krawędzi używamy zmodyfikowanej wersji algorytmu 1.18.

Algorytm 2.3.

(i) Niech i będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że wszystkie wierzchołki v_j dla $1 \leq j \leq i-1$ są zamknięte, i niech

$$p = 2i - \sum_{j=\max\{1, i-k\}}^{i-1} w((v_j, v_i)) - l(v_i).$$

Jeżeli $1 \leq p \leq k$, przypisz krawędziom wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i+1 \leq j \leq i+k-p \\ 1 & \text{dla } i+k-p+1 \leq j \leq i+k. \end{cases}$$

Jeżeli natomiast $p \geq k+1$, wagi

$$w((v_i, v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i+1 \leq j \leq i+2k-p \\ 2 & \text{dla } j \geq i+2k-p+1. \end{cases}$$

Przejdź do kroku (iii).

(ii) Zamknij wierzchołek v_i . Jeżeli $i = 2k+1$, STOP. W przeciwnym razie wróć do kroku (ii).

Dowód części (i) przebiega podobnie, jak w przypadku lematu 1.17 - analizując działanie algorytmu pomijamy jedynie wierzchołek v_0 i incydentne krawędzie.

Aby wykazać prawdziwość (ii) zauważmy, że jeżeli $k \geq 3$ jest liczbą parzystą, to cykl Hamiltona F tworzy ciąg wierzchołków

$$v_{k+1}, v_1, v_k, v_2, v_{k-1}, \dots, v_{k/2-1}, v_{k/2+2}, v_{k/2}, v_{k/2+1}, v_{3k/2}, v_{3k/2-1}, v_{3k/2+1}, \\ v_{3k/2-2}, v_{3k/2+2}, \dots, v_{k+3}, v_{2k-3}, v_{k+2}, v_{2k-2}, v_{2k-1}, v_{2k}, v_{k+1},$$

a w przeciwnym przypadku ciąg

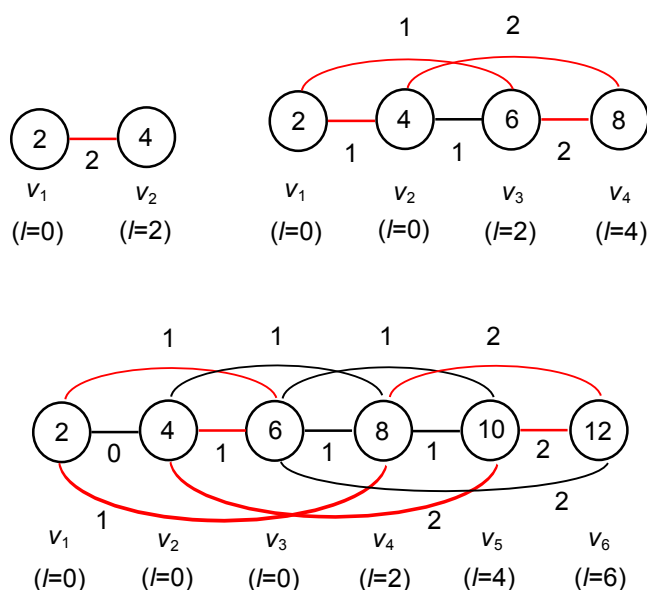
$$v_{k+1}, v_1, v_k, v_2, v_{k-1}, \dots, v_{k/2-3/2}, v_{k/2+5/2}, v_{k/2-1/2}, v_{k/2+3/2}, v_{k/2+1/2}, v_{3k/2-1/2}, \\ v_{3k/2+1/2}, v_{3k/2-3/2}, v_{3k/2+3/2}, \dots, v_{k+3}, v_{2k-3}, v_{k+2}, v_{2k-2}, v_{2k-1}, v_{2k}, v_{k+1}.$$

Bardziej precyzyjnie, cykl ów składa się z krawędzi

$$\begin{aligned} (v_i, v_{k-i+1}) & \quad \text{dla } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\ (v_i, v_{k-i+2}) & \quad \text{dla } 1 \leq i \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil, \\ (v_i, v_{3k-i}) & \quad \text{dla } k+2 \leq i \leq \lceil \frac{3k}{2} \rceil - 1, \\ (v_i, v_{3k-i-1}) & \quad \text{dla } k+2 \leq i \leq \lfloor \frac{3k}{2} \rfloor - 1, \\ (v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}, v_{\lfloor \frac{3k}{2} \rfloor}), \\ (v_{k+1}, v_{2k}), \\ (v_{2k-1}, v_{2k}), \\ (v_{2k-2}, v_{2k-1}). \end{aligned}$$

Jeżeli $k = 3$, cykl Hamiltona F można zdefiniować za pomocą ciągu wierzchołków $v_1, v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_1$, zaś w przypadku $k = 2$ ciągu v_1, v_3, v_4, v_2, v_1 . Jeżeli $k = 1$, jedyna krawędź (v_1, v_2) ma wagę 2, więc jest szukanym podgrafem F . \square

Przykład 2.4 (Ważenie grafów $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(3)}$). Ważenie grafów $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(3)}$ przedstawia rysunek 2.1. Podgrafy F zostały zaznaczone kolorem czerwonym. Ważone stopnie wierzchołków znajdują się wewnątrz reprezentujących je okręgów.



Rysunek 2.1: Lemat 2.2 - ważenie grafów $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(3)}$

Drugi lemat gwarantuje istnienie nieregularnego ważenia grafów $S^{(k)}$ i $R^{(k)}$ (pierwsza rodzina została zdefiniowana w lemacie 1.17). Mówiąc dokładniej, gwarantuje, że używając wyłącznie wag $-1, 0$ i 1 można otrzymać nieregularne ważenie wspomnianych grafów takie, że wszystkie ważone stopnie są kolejnymi liczbami całkowitymi (z jednym możliwym wyjątkiem).

Lemat 2.5.

Niech $S^{(k)}$ i $R^{(k)}$ będą grafami zdefiniowanymi jak w lemacie 1.17 i 2.2, $k \geq 2$. Jeżeli $G \cong S^{(k)}$ lub $G \cong R^{(k)}$, to istnieje ważenie $f : E(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ takie, że ważone stopnie wierzchołków G są różnymi liczbami ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, |V(G)| - 1\}$ gdy k jest liczbą parzystą i różnymi liczbami ze zbioru $\{-1, 1, 2, \dots, |V(G)| - 1\}$ gdy k jest liczbą nieparzystą.

Dowód.

Przypisujemy krawędziom wagi według wzoru:

$$f(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 2k + 1 - |V(G)| \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, \\ -1 & \text{dla } k + 1 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + k - 3, j = i + 1, \\ -1 & \text{dla } i = 2k - 1, j = 2k. \end{cases} \quad (2.7)$$

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, przypisujemy również $f(v_{2k-2}, v_{2k}) = -1$.
Wszystkie pozostałe krawędzie otrzymują wagę 0.

Opisane ważenie spełnia tezę lematu, gdyż

$$wd(v_i) = \begin{cases} |V(G)| - k + i - 1 & \text{dla } i \leq k, \\ 2k - i & \text{dla } k + 1 \leq i \leq 2k - 1, \end{cases}$$

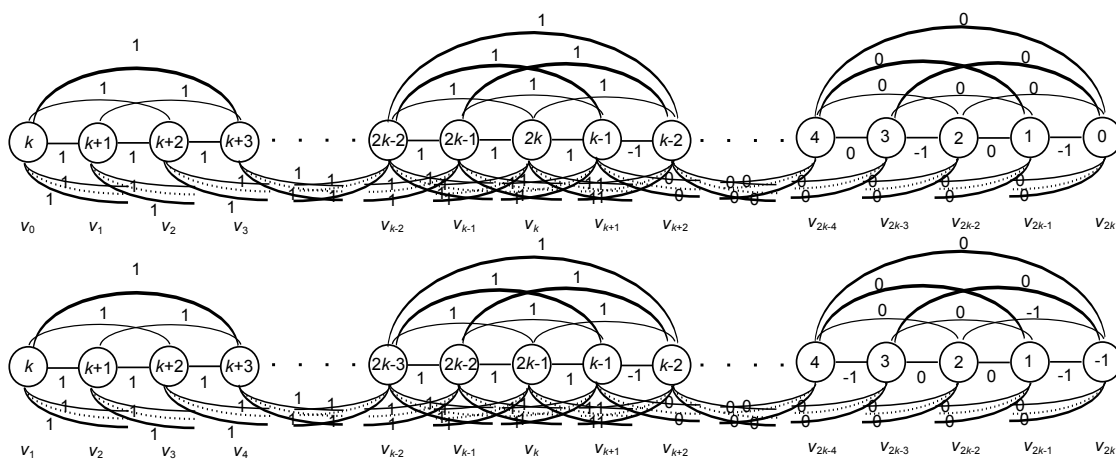
oraz

$$wd(v_{2k}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \bmod 2 = 0, \\ -1 & \text{dla } k \bmod 2 = 1. \end{cases}$$

□

Przykład 2.6 (Ilustracja lematu 2.5).

Rysunek 2.2 ilustruje opisane ważenie dla grafów $S^{(k)}$ ($k \bmod 2 = 0$) i $R^{(k)}$ ($k \bmod 2 = 1$).



Rysunek 2.2: Lemat 2.5 - ilustracja ważenia

Powróćmy do dowodu twierdzenia 2.1. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1.16, konstrukcja nieregularnego ważenia przebiega odmiennie dla różnych relacji między n i k , więc rozpatrujemy kilka przypadków.

Przypadek 1: $n = 2k + 1$.

W tym przypadku graf C_n^k jest izomorficzny z grafem pełnym K_n i dowód równości

$$tvs(C_n^k) = tvs(K_n) = 3$$

można znaleźć np. w pracy G. Chartranda i in. [10].

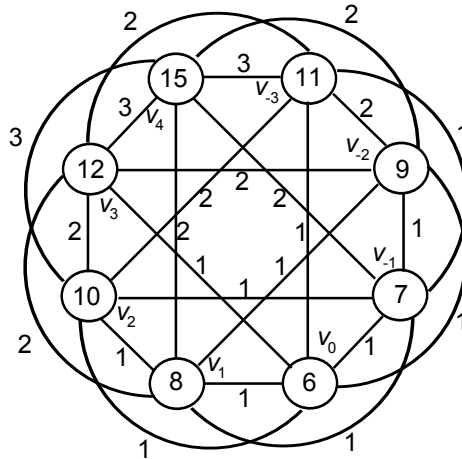
Przypadek 2: $n = 2k + 2$.

Używamy takiego samego ważenia krawędzi $w : E(C_n^k) \rightarrow \{1, 2\}$ jak w dowodzie twierdzenia 1.16 (przypadek 2). Przypomnijmy, że sumy wag krawędzi incydentnych z wierzchołkami $v_i, -\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ są różnymi liczbami ze zbioru $\{2k, \dots, 3k\}$, podczas gdy sumy wag krawędzi incydentnych z pozostałymi wierzchołkami - różnymi liczbami ze zbioru $\{3k, \dots, 4k\}$.

Dodajemy 1 do wag krawędzi (v_i, v_{k+1}) dla $-k \leq i \leq -\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$ lub $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq k$. Taka zmiana sprawia, że ważne stopnie wszystkich wierzchołków przyjmują różne wartości ze zbioru $\{2k, \dots, 4k\} \cup \{5k\}$. Ponieważ do ważenia krawędzi użyliśmy wyłącznie liczb 1, 2 i 3, siła nieregularności równa jest $s(C_{2k+2}^k) = 3$.

Przykład 2.7 (Ważenie grafu C_8^3).

Ważenie dla $k = 3$ zostało przedstawione na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Graf C_8^3 - końcowe ważenie

Przypadek 3: $n > 2k + 2$.

Liczbę wierzchołków grafu $G = C_n^k$ możemy przedstawić jako $n = 4kt + r$, gdzie $t \geq 0$ i $1 \leq r \leq 4k$ są pewnymi liczbami całkowitymi.

Dzielimy G na pewną liczbę segmentów, z których wszystkie oprócz dwóch są izomorficzne z $R^{(k)}$, jeden z $R^{(g)}$ i jeden z $R^{(h)}$, gdzie $g, h \leq k$, $|g - h| \leq 1$. Dla pewnych wartości r konieczne jest dołączenie dodatkowego wierzchołka lub dodatkowej kopii grafu $R^{(r')}$ albo $S^{(r')}$, gdzie $r' = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$. Korzystając z lematów 2.2 i 2.5 konstruujemy ważenia dla segmentów, następnie rozszerzamy je na wszystkie krawędzie i wierzchołki grafu G .

Konstrukcja ważenia przebiega w odmienny sposób dla różnych zależności między r i k , z tego względu rozpatrujemy trzy przypadki. Ze względu na powtarzanie się niektórych pojęć i elementów konstrukcji, najpierw opisany został przypadek $2k + 2 \leq r \leq 4k$, następnie zaś $1 \leq r \leq 2k + 1$.

Przypadek 3.1: $2k + 2 \leq r \leq 4k$.

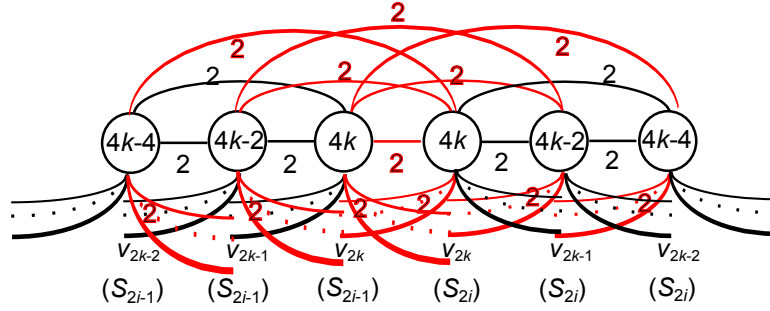
Niech $g = \lfloor \frac{r}{4} \rfloor$. Rozważmy $2t$ grafów S_1, S_2, \dots, S_{2t} izomorficznych z $R^{(k)}$ oraz dwa grafy $S_{2t+1} \cong R^{(h)}$ i $S_{2t+2} \cong R^{(g)}$, przy czym $h = g$ gdy $r \bmod 4 \in \{0, 1\}$ i $h = g + 1$ gdy $r \bmod 4 \in \{2, 3\}$.

Oznaczmy wierzchołki G przez $v_0(G), \dots, v_{n-1}(G)$. Dzielimy graf na segmenty w taki sposób, że wierzchołki grafów S_j , $1 \leq j \leq 2t$ (oznaczone $v_1(S_j), \dots, v_{2k+1}(S_j)$), S_{2t+1} (oznaczone $v_1(S_{2t+1}), \dots, v_{2h}(S_{2t+1})$) i S_{2t+2} (oznaczone $v_1(S_{2t+2}), \dots, v_{2g}(S_{2t+2})$) utożsamiamy z kolejno po sobie następującymi podzbiórmi zbioru wierzchołków G , przy czym dla rosnących indeksów wierzchołków w G indeksy wierzchołków w S_j rosną dla $j = 2i - 1$ i maleją dla $j = 2i$, $1 \leq i \leq t + 1$. Innymi słowy, jeżeli wierzchołki $v_i(G)$ i $v_{i+1}(G)$ (albo $v_{n-1}(G)$ i $v_0(G)$) należą do dwóch sąsiednich segmentów S_j i S_{j+1} (odpowiednio S_{2t+2} i S_1), to albo oba mają najwyższe indeksy w segmentach (czyli $v_i(G) = v_{2k}(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_{2k}(S_{j+1})$), względnie $v_i(G) = v_{2h}(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_{2g}(S_{j+1})$), albo $v_i(G) = v_1(S_j)$ i $v_{i+1}(G) = v_1(S_{j+1})$. Jeżeli $r \bmod 4 \in \{1, 3\}$, pozostawiamy dodatkowy wierzchołek $v^* = v_{n-2h-1}(G)$ pomiędzy S_{2t+1} i S_{2t+2} .

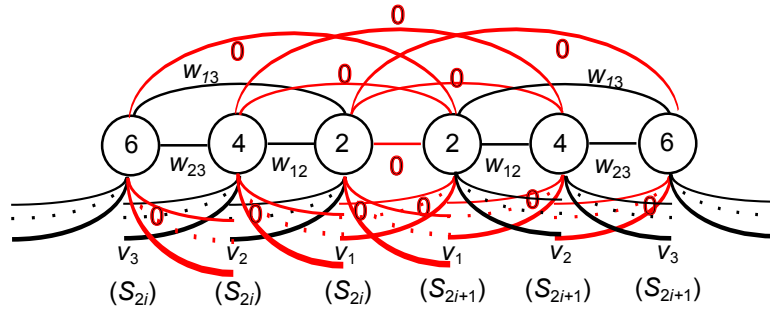
Ważenie grafu G przeprowadzamy w dwóch krokach. Zaczynamy od zdefiniowania wstępnego ważenia krawędzi $w^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, następnie przekształcamy wagi krawędzi w celu otrzymania ważenia $w : E(G) \rightarrow \{1, \dots, s\}$.

Konstrukcję w^* rozpoczynamy od nadania wag krawędziom poszczególnych segmentów za pomocą algorytmu 2.3. Następnie ważymy pozostałe krawędzie G (czyli $e \in E(G) \setminus \bigcup_{j=1}^{2t+2} E(S_j)$).

Jeżeli dwoma kolejnymi segmentami są S_{2i-1} i S_{2i} , $1 \leq i \leq t$ (czyli należące do nich skrajne wierzchołki mają stopień $2k$), przypisujemy wszystkim łączącym je krawędziom wagę 2. Krawędziom łączącym S_{2i} i S_{2i+1} , $1 \leq i \leq t$, oraz S_{2t+2} i S_1 nadajemy wagę 0. Przedstawiają to rysunki 2.4 i 2.5.



Rysunek 2.4: Łączenie segmentów (1)



Rysunek 2.5: Łączenie segmentów (2)

Zauważmy, że ważone stopnie nie ulegają zmianie, gdyż sumy wag krawędzi łączących segmenty grafu G nie należących do S_j są równe wagom $l(v)$ z lematu 2.2.

Jeżeli $r \bmod 2 = 0$, przypisujemy wagę 2 krawędziom

$$(v_{h+i}(S_{2t+1}), v_{2g-j+1}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i,$$

a w przeciwnym razie krawędziom

$$\begin{aligned} &(v_{h+i}(S_{2t+1}), v_{2g-j+2}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 2 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i-1, \\ &(v^*, v_{h+i}(S_{2t+1})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq g+1, \\ &(v^*, v_{2g-i+1}(S_{2t+2})) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq g+1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia operacja może powiększyć o 2 ważne stopnie niektórych wierzchołków $v \in V(S_{2t+2})$, jednak po jej wykonaniu pozostają spełnione warunki

$$wd^*(v) \leq 2k \quad \text{dla } v \in V(S_{2t+1}) \cup V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\}$$

oraz

$$|\{v \in V(S_{2t+1}) \cup V(S_{2t+2}) \cup \{v^*\} : wd^*(v) = 2i\}| \leq 2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k,$$

gdyż $wd(v^*) \neq wd(v_{2g}(S_{2t+2}))$.

Aby zakończyć konstrukcję ważenia w^* , przypisujemy wagę 0 wszystkim jeszcze nie zważonym krawędziom G .

Ostatecznie otrzymujemy więc ważenie $w^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ takie, że wszystkie wazone stopnie są parzyste, segmenty S_j posiadają podgrafy F o własnościach zdefiniowanych w lemacie 2.2, a ponadto

$$|\{v \in V(G) : wd^*(v) = 2i\}| \leq 2t + 2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Niech $s = \lceil \frac{n+2k-1}{2k} \rceil$ (zauważmy, że s jest liczbą nieparzystą). Definiujemy nowe ważenie $w : E(G) \rightarrow \{0, \frac{s+1}{2}, s\}$ w następujący sposób:

$$w(e) = \frac{s-1}{2}w^*(e) + 1 \quad \text{dla } e \in E(G), \quad (2.8)$$

Po tej modyfikacji wazone stopnie wierzchołków w dowolnym segmencie S_j różnią się o co najmniej $s-1$. Ponieważ nie możemy przypisywać wag wierzchołkom, rozróżniamy ich stopnie używając podgrafów F z lematu 2.2.

Stopnie wierzchołków należących do S_j , $1 \leq j \leq 2t$, obniżamy w następujący sposób. Jeżeli $j \bmod 2 = 0$, zmniejszamy wagę każdej krawędzi należącej do podgrafu F o $\frac{j}{2}$. W przeciwnym razie zmniejszamy je na przemian o $\frac{j-1}{2}$ i $\frac{j+1}{2}$ (każdy z podgrafów F jest cyklem o parzystej długości).

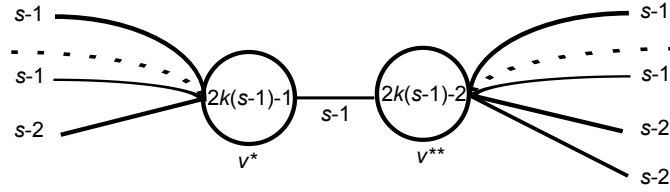
Jeżeli $h > 1$, zmniejszamy wagi krawędzi S_{2t+1} na przemian o t i $t+1$. W przeciwnym razie zmniejszamy wagę jedynej krawędzi tego segmentu $(v_1(S_{2t+1}), v_2(S_{2t+1}))$ o $2t+1$.

Jeżeli $g = k$ (zauważmy, że jest to możliwe tylko, gdy $r = 4k$), w ten sam sposób zmniejszamy wazone stopnie w S_{2t+2} . W przeciwnym razie nie zmieniamy wag krawędzi w S_{2t+2} ani krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v^* (jeżeli został wyodrębniony).

Postępując w przedstawiony sposób zmniejszamy wazone stopnie w kolejnych segmentach S_j o różne wartości ze zbioru $\{0, 1, \dots, 2t+1\}$ albo $\{1, 2, \dots, 2t+2\}$ i ostatecznie rozróżniamy wszystkie wazone stopnie w grafie G , gdyż $2t+2 \leq s-1$.

Przypadek 3.2: $1 \leq r \leq 2k+1$.

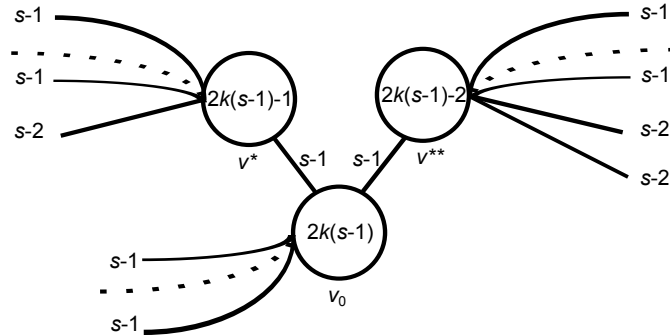
Rozpoczynamy od znalezienia nieregularnego ważenia grafu C_{4kt}^k za pomocą metody przedstawionej w poprzednim paragrafie. Niech $s = 2t+2$. Zauważmy, że najwyższą wagą użytą do tej pory jest $s-1$ i dwa najwyższe wazone stopnie wynoszą $wd(v^*) = 2k(s-1) - 1$ i $wd(v^{**}) = 2k(s-1) - 2$



Rysunek 2.6: Sąsiednie wierzchołki o najwyższych stopniach

dla wierzchołków $v^* = v_{2k}(S_1)$ i $v^{**} = v_{2k}(S_2)$. Zauważmy też, że wszystkie krawędzie pomiędzy S_1 i S_2 mają wagę $s - 1$. Ilustruje to rysunek 2.6.

Jeżeli $r = 1$, to wstawiamy dodatkowy wierzchołek v_0 pomiędzy v^* i v^{**} usuwając i dodając w razie potrzeby krawędzie, aby otrzymać C_{4kt+1}^k . Przypisujemy wagę $s - 1$ wszystkim krawędom incydentnym z v_0 . Stopień v_0 przyjmuje wartość $wd(v_0) = 2k(s - 1)$, a pozostałe ważone stopnie nie ulegają zmianie, więc otrzymujemy w ten sposób nieregularne ważenie G , gdyż $\left\lfloor \frac{4kt+1+2k-1}{2k} \right\rfloor = s - 1$. Opisaną sytuację ilustruje rysunek 2.7.



Rysunek 2.7: Wstawienie jednego wierzchołka

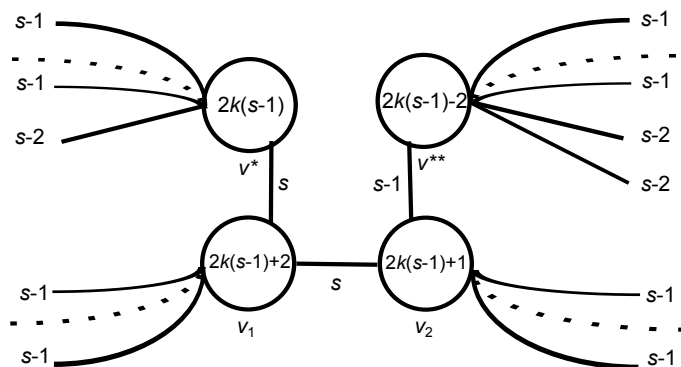
Jeżeli $r = 2$, to wstawiamy dwa wierzchołki v_1 i v_2 pomiędzy v^* i v^{**} , a następnie przypisujemy wagę $s - 1$ wszystkim dodanym krawędom z wyjątkiem (v_1, v^*) i (v_1, v_2) , które otrzymują wagę s . W wyniku tego wartości ważonych stopni wierzchołków $v \in V(C_n^k) \setminus \{v^*, v_1, v_2\}$ nie zmieniają się, a więc pozostają różnymi liczbami ze zbioru

$$\{2k, \dots, 2k(s - 1) - 2\},$$

a ponadto

$$\begin{aligned} wd(v^*) &= 2k(s - 1), \\ wd(v_1) &= 2k(s - 1) + 2, \\ wd(v_2) &= 2k(s - 1) + 1. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że w jest nieregularnym ważeniem grafu G . Przedstawia to rysunek 2.8.



Rysunek 2.8: Wstawienie dwóch wierzchołków

Jeżeli $r = 3$, to wstawiamy trzy wierzchołki v_1 , v_2 i v_3 pomiędzy v^* i v^{**} , a następnie przypisujemy wagę $s - 1$ wszystkim nowym krawędziom poza następującymi:

$$w(v^*, v_1) = s - 2,$$

$$w(v^{**}, v_2) = w(v_1, v_2) = w(v_1, v_3) = w(v_2, v_3) = s.$$

W wyniku powyższych zmian ważone stopnie wierzchołków

$$v \in V(C_n^k) \setminus \{v^*, v^{**}, v_1, v_2, v_3\}$$

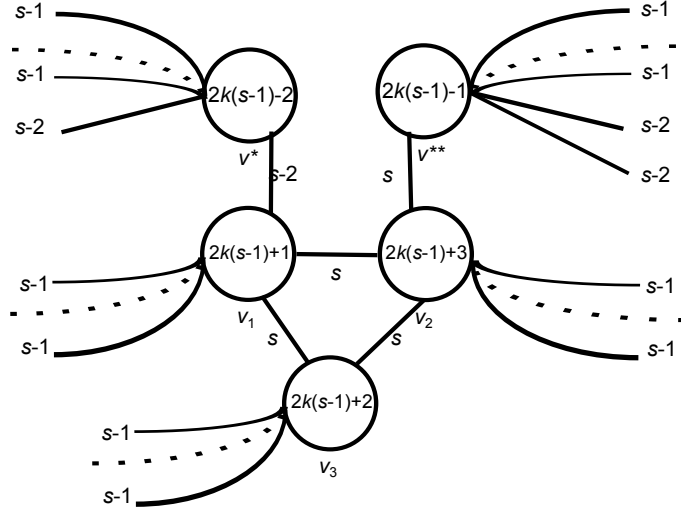
są różnymi liczbami ze zbioru

$$\{2k, \dots, 2k(s - 1) - 3\},$$

a ponadto

$$\begin{aligned} wd(v^*) &= 2k(s - 1) - 2, \\ wd(v^{**}) &= 2k(s - 1) - 1, \\ wd(v_1) &= 2k(s - 1) + 1, \\ wd(v_2) &= 2k(s - 1) + 3, \\ wd(v_3) &= 2k(s - 1) + 2, \end{aligned}$$

więc w jest nieregularnym ważeniem G . Opisana sytuacja została przedstawiona na rysunku 2.9.



Rysunek 2.9: Wstawienie trzech wierzchołków

Przejdźmy do przypadku, gdy $4 \leq r \leq 2k + 1$. Zauważmy, że tym razem $\left\lceil \frac{4kt+r+2k-1}{2k} \right\rceil = s$.

Wstawiamy pomiędzy v^* i v^{**} graf H , gdzie

$$H \cong \begin{cases} S^{(r')} & \text{gdy } r \bmod 2 = 1, \\ R^{(r')} & \text{gdy } r \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

oraz

$$r' = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor.$$

Niech $V(H) = \{v_0(H), v_1(H), \dots, v_{|V(H)|-1}(H)\}$. Wstawiamy H między v^* a v^{**} w taki sposób, aby v^* sąsiadował z wierzchołkami

$$v_j(H) \quad \text{dla } 0 \leq j \leq \min\{k-1, |V(H)|-1\},$$

a v^{**} z wierzchołkami

$$v_{|V(H)|-j-1}(H) \quad \text{dla } 0 \leq j \leq \min\{k-1, |V(H)|-1\}.$$

Przypisujemy wagę $s-1$ wszystkim nowym krawędziom, w tym krawędziom grafu H . Wynikowe ważenie $w_1 : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, s-1\}$ przypisuje ważony stopień równy $2k(s-1)$ każdemu z wierzchołków grafu H i nie zmienia ważonych stopni pozostałych wierzchołków grafu G (w tym v^* i v^{**}). W celu rozróżnienia ważonych stopni wierzchołków $v \in V(H)$ wyznaczamy wagi f krawędzi grafu H za pomocą wzoru (2.7) (patrz lemat 2.5). Jeżeli $k \bmod 2 = 0$, definiujemy $w : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$ za pomocą wzoru:

$$w(e) = \begin{cases} w_1(e) & \text{dla } e \in E(G) \setminus E(H), \\ w_1(e) + f(e) & \text{dla } e \in E(H). \end{cases} \quad (2.9)$$

Ponieważ $s \geq 3$, nowe wagi krawędzi spełniają warunek $1 \leq w(e) \leq s$ i wszystkie ważne stopnie są różne, gdyż zgodnie z lematem 2.5 ważne stopnie wierzchołków $v \in V(H)$ przyjmują różne wartości ze zbioru

$$\{2k(s-1), 2k(s-1)+1, \dots, 2k(s-1)+r\},$$

zaś ważne stopnie wierzchołków $v \in V(G) \setminus V(H)$ różne wartości ze zbioru

$$\{2k, 2k+1, \dots, 2k(s-1)-1\}$$

(nie ulegają one zmianie po wstawieniu grafu H).

Jeżeli $k \bmod 2 = 1$, również używamy wzoru (2.9) w celu zdefiniowania nowego ważenia w . Jednakże tym razem

$$wd(v^*) = wd(v_{2r'}) = 2k(s-1) - 1.$$

Jeżeli $r \leq 2k$, zmieniamy wagę krawędzi

$$w(v^*, v_{r'}) = s.$$

Jak można łatwo zaobserwować, po tej operacji

$$\begin{aligned} wd(v_{r'}) &= 2k(s-1) + r + 1, \\ wd(v_*) &= 2k(s-1), \\ wd(v_{2r'}) &= 2k(s-1) - 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

więc w jest poszukiwanym nieregularnym ważeniem grafu G , gdyż ważne stopnie wierzchołków $v \in V(C_n^k) \setminus (V(G) \cup \{v^*\})$ są różne i mniejsze niż $2k(s-1)-1$, a ważne stopnie wierzchołków $v \in V(G) \setminus \{v_{r'}, v_{2r'}\}$ są różnymi liczbami ze zbioru $\{2k(s-1)+2, \dots, 2k(s-1)+r-1\}$.

Jeżeli $r = 2k+1$, to $(v^*, v_{r'}) \notin E(G)$, więc musimy postąpić inaczej. Redefiniujemy ważenie przypisując

$$w(v_k(H), v_{2k}(H)) = s + 1.$$

W ten sposób $wd(v_k(H))$ i $wd(v_{2k}(H))$ wzrastają o 1, więc ważne stopnie wszystkich wierzchołków $v \in V(G)$ przyjmują różne wartości. Zauważmy, że $w(v_k(H), v_{2k}(H)) = s + 1 = \lceil \frac{n+2k-1}{2k} \rceil + 1$.

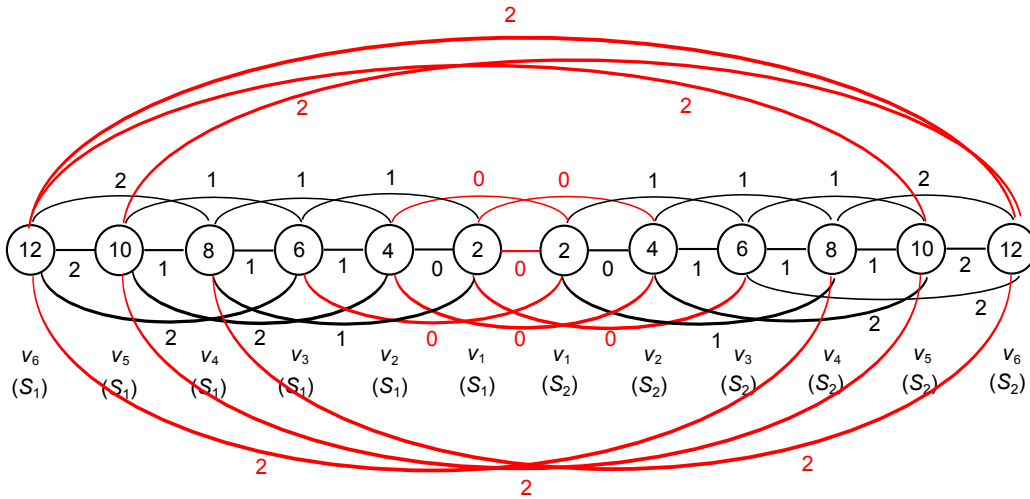
Założmy, że wagi $1, 2, \dots, s$ wystarczą do utworzenia nieregularnego ważenia, gdy $r = 2k+1$ i $k \bmod 2 = 1$. W takim razie ważne stopnie wierzchołków

$v \in V(G)$ muszą przyjąć wszystkie wartości ze zbioru $\{2k, \dots, 4kt + 4k\}$, co oznacza, że ich suma jest równa nieparzystej liczbie $k(2t+3)(4kt+2k+1)$. To jest jednak niemożliwe (suma stopni musi być liczbą parzystą). Otrzymana sprzeczność oznacza, że użycie wagi $s + 1$ jest niezbędne. \square

Na zakończenie przedstawiamy przykład ilustrujący konstrukcję ważenia w jednym z opisanych powyżej przypadków.

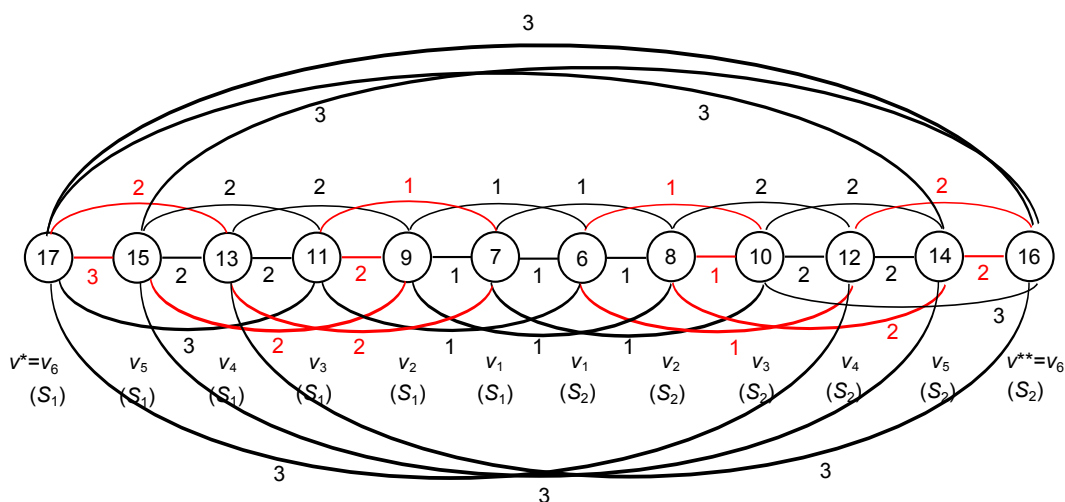
Przykład 2.8 (Konstrukcja ważenia dla grafu C_{19}^3).

Mamy $n = 19$, $k = 3$, $t = 1$, $r = 7 = 2k + 1$, więc rozpoczynamy od zważenia grafu C_{12}^3 . Przypisanie mu wag 0, 1 i 2 przedstawia rysunek 2.10. Na czerwono zostały zaznaczone krawędzie łączące ze sobą wierzchołki z różnych segmentów.



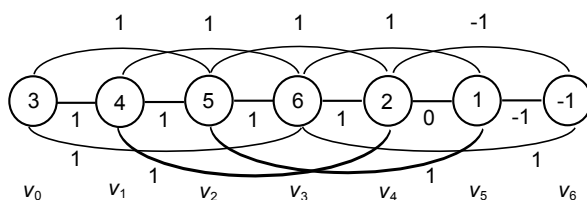
Rysunek 2.10: Wążenie krawędzi grafu C_{12}^3 za pomocą wag 0, 1 i 2

Zauważmy, że $s(C_{12}^3) = s - 1 = 3$ jest liczbą nieparzystą, więc wagi przekształcamy zgodnie ze wzorem (1.19). Następnie redukujemy wagi krawędzi używając podgrafów F , odejmując 1 od co drugiej krawędzi cyklu w segmencie S_1 i od wszystkich w segmencie S_2 . Końcowe ważenie grafu C_{12}^3 zostało przedstawione na rysunku 2.11 (oba cykle zostały zaznaczone na czerwono).



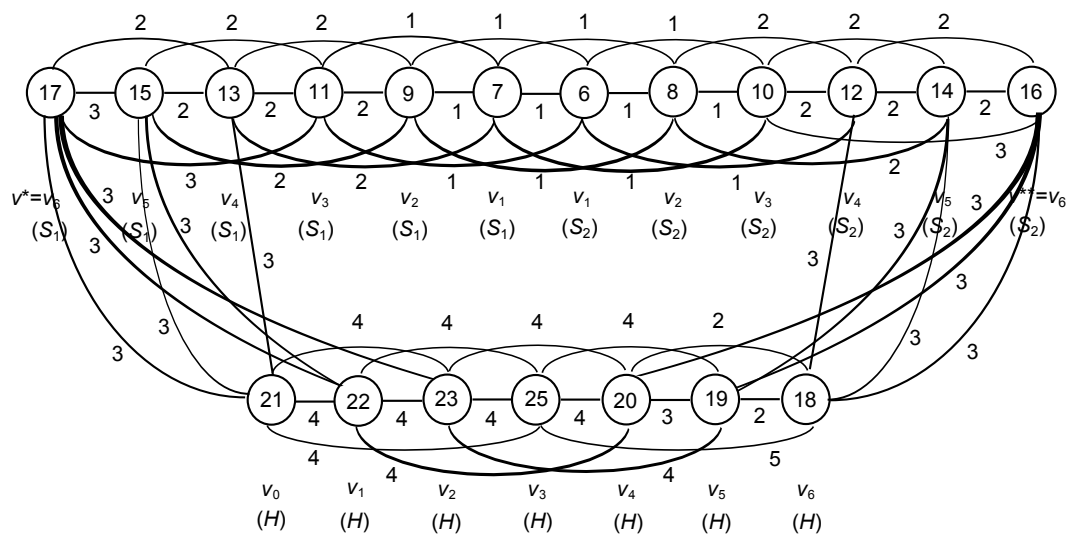
Rysunek 2.11: Końcowe ważenie grafu C_{12}^3

W następnym kroku konstruujemy ważenie f grafu $H = S^{(3)}$ zgodne z lematem 2.5. Zostało ono przedstawione na rysunku 2.12.



Rysunek 2.12: Lemat 2.5 - ważenie f grafu $H = S^{(3)}$

Aby zakończyć, wstawiamy graf $H \cong S^{(3)}$ między wierzchołki $v^* = v_6(S_1)$ i $v^{**} = v_6(S_2)$, nadając wszystkim nowym krawędziom $e \notin E(H)$ wagę $s - 1$, a krawędziom $e \in E(H)$ wagę $s - 1 + f(e)$. Ponieważ $r = 2k + 1$, przypisujemy $w(v_3(H), v_6(H)) = s - 1 + f(v_3(H), v_6(H)) + 1 = 5$. W ten sposób otrzymujemy poszukiwane nieregularne ważenie, przedstawione na rysunku 2.13.



Rysunek 2.13: Końcowe ważenie grafu C_{19}^3

Rozdział 3

Iloczynowa siła nieregularności

3.1 Wprowadzenie

Rozważmy prosty nieskierowany graf $G = (V(G), E(G))$ bez pętli i izolowanych krawędzi i z co najwyżej jednym izolowanym wierzchołkiem. Przypisujemy każdej krawędzi $e \in E(G)$ dodatnią całkowitą wagę $w(e)$. Dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ definiujemy jego *iloczynowy stopień* jako

$$pd_G(v) = \begin{cases} \prod_{e \ni v} w(e) & \text{gdy } d_G(v) > 0, \\ 0 & \text{gdy } d_G(v) = 0, \end{cases}$$

gdzie $d_G(v)$ oznacza stopień wierzchołka v w G .

Ważenie w nazywamy *iloczynowo nieregularnym* jeżeli dla każdej pary różnych wierzchołków $u, v \in V(G)$ zachodzi $pd_G(u) \neq pd_G(v)$. *Siła ważenia* w jest zdefiniowana jako

$$ps_w(G) = \max\{w(e) | e \in E(G)\},$$

zaś *iloczynowa siła nieregularności* grafu G jako

$$ps(G) = \min\{ps_w(G) | w \text{ jest iloczynowo nieregularne}\}.$$

Poniżej zostały przedstawione dolne i górne ograniczenia wartości $ps(G)$ dla różnych rodzin grafów. W szczególności w kolejnych podrozdziałach zostały przedstawione ograniczenia dla ogólnych grafów i dokładne wartości dla grafów pełnych i gwiazd. Na końcu rozdziału zostały przedstawione główne wyniki, czyli górne oszacowania dla cykli, ścieżek i krat.

3.2 Ogólne oszacowania

Zauważmy, że do otrzymania różnych stopni iloczynowych, konieczne jest użycie różnych multizbiorów wag do zważenia krawędzi incydenentnych z każdym z wierzchołków. Niech n_d oznacza liczbę wierzchołków stopnia d i niech s będzie największą liczbą użytą w ważeniu. Wówczas

$$n_d \leq \binom{s+d-1}{s-1},$$

wiec dla każdego $\delta(G) \leq d \leq \Delta(G)$,

$$s \geq \left\lceil \frac{d}{e} n_d^{1/d} - d + 1 \right\rceil.$$

Wynikają stąd w prosty sposób następujące dwie obserwacje, pochodzące z pracy [5].

Obserwacja 3.1.

Dla każdego grafu G

$$ps(G) \geq \max_{\delta(G) \leq d \leq \Delta(G)} \left\{ \left\lceil \frac{d}{e} n_d^{1/d} - d + 1 \right\rceil \right\}.$$

Obserwacja 3.2.

Dla każdego r -regularnego grafu G o n wierzchołkach

$$ps(G) \geq \left\lceil \frac{r}{e} n^{1/r} - r + 1 \right\rceil.$$

Rozważmy teraz górne ograniczenia na $ps(G)$. Zauważmy, że jeżeli przypiszemy poszczególnym krawędziom różne liczby pierwsze, wszystkie iloczyny muszą być różne. Wynika stąd kolejna obserwacja przedstawiona w [5].

Obserwacja 3.3.

Dla każdego grafu G bez izolowanych krawędzi i z co najwyżej jednym izolowanym wierzchołkiem, $ps(G) \leq p(|E(G)|)$, gdzie $p(n)$ oznacza n -tą liczbę pierwszą.

O. Pikhurko w pracy [28] udowodnił, że dla wystarczająco dużej wartości $|E(G)|$, każdy graf G z $|E(G)|$ krawędziami jest *iloczynowo antymagiczny*, to znaczy bijekcja ze zbioru krawędzi na zbiór $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ taka, że wszystkie iloczynowe stopnie są parami różne. Wynika stąd prawdziwość następującego faktu.

Obserwacja 3.4. Dla każdego wystarczająco dużego grafu G bez izolowanych krawędzi i z co najwyżej jednym izolowanym wierzchołkiem, $ps(G) \leq |E(G)|$.

3.3 Gwiazdy i grafy pełne

W tym podrozdziale przedstawione zostały wartości iloczynowej siły nieregularności dla dwóch rodzin grafów.

Fakt 3.5.

Niech $K_{1,n}$ będzie gwiazdą o n wiszących wierzchołkach. Wówczas

$$ps(K_{1,n}) = \begin{cases} 3 & \text{gdy } n = 2, \\ n & \text{gdy } n \geq 3. \end{cases}$$

Dowód. W przypadku gwiazdy $K_{1,n}$ każdy wierzchołek stopnia 1 ma ważony stopień równy wadze incydentnej z nim krawędzi. Z tego względu $ps(K_{1,n}) \geq n$. Z drugiej strony, wierzchołek stopnia n ma ważony stopień równy iloczynowi wag wszystkich krawędzi, czyli w $n!$ przypadku użycia n kolejnych wag. Ponieważ dla $n! > n$ dla $n \geq 3$, użycie wag $1, \dots, n$ gwarantuje otrzymanie nieregularnego ważenia. W przypadku $K_{1,3}$ konieczne jest użycie wag 2 i 3, gdyż 1 i 2 nie gwarantują uzyskania trzech różnych stopni. \square

Fakt 3.6.

Niech K_n będzie grafem pełnym o n wierzchołkach, $n \geq 3$. Wówczas

$$ps(K_n) = 3.$$

Dowód. W przypadku grafu pełnego K_n użycie wag 1 i 2 pozwala na uzyskanie ważonych stopni równych kolejnym potęgom liczby 2: $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Co prawda liczb tych jest dokładnie tyle, ile wierzchołków, jednak nie mogą one wszystkie wystąpić jednocześnie: gdyby któryś z wierzchołków miał ważony stopień 1, żaden nie mógłby być incydentny wyłącznie z krawędziami o wadze 2, więc niemożliwe byłoby pojawienie się ważonego stopnia 2^{n-1} . Z tego względu konieczne jest użycie co najmniej wag 1, 2 i 3. Z drugiej strony wagi te wystarczą do uzyskania nieregularnego ważenia. Aby to wykazać, zastosujemy indukcję, wykazując, że dla każdego n istnieje iloczynowo nieregularne ważenie K_n takie, że jeżeli n jest parzyste, to żaden z wierzchołków nie ma ważonego stopnia równego 2^{n-1} , zaś w przypadku n nieparzystego - ważonego stopnia równego 3^{n-1} . Ważenie K_3 o podanej własności uzyskujemy przypisując poszczególnym krawędziom wagi 1, 2 i 3. W przypadku $n \geq 4$, zakładamy, że istnieje ważenie o podanej własności grafu K_{n-1} . W przypadku, gdy n jest parzyste, ważymy w odpowiedni sposób krawędzie dowolnego podgrafu izomorficznego z K_{n-1} , a pozostałym krawędziom (incydentnym z pewnym wierzchołkiem v) przypisujemy wagę 3. Ponieważ ważenie K_{n-1} jest nieregularne, a przypisanie wag krawędziom incydentnym z v powoduje

potrojenie wszystkich ważonych stopni, pozostają one różne. Z drugiej strony, po zastosowaniu wskazanego ważenia K_{n-1} nie zawiera żadnego wierzchołka o ważonym stopniu równym 3^{n-2} , więc również żaden z wierzchołków $u \neq v$ nie może mieć ważonego stopnia równego 3^{n-1} w K_n , a stąd v jest jedynym wierzchołkiem o tej cesze i uzyskane ważenie jest nieregularne. Jeżeli n jest nieparzyste, postępujemy w analogiczny sposób, tym razem przypisując wszystkim krawędziom incydentnym z v wagę 2. \square

Rezultaty przedstawione w kolejnych podrozdziałach pochodzą z pracy [5].

3.4 Cykle i ścieżki

W tym podrozdziale przedstawione zostały oszacowania iloczynowej siły nieregularności cyklu C . W rzeczywistości można użyć poniższych oszacowań $ps(C)$ również do wyznaczenia górnych ograniczeń dla ścieżek oraz grafów hamiltonowskich i półhamiltonowskich (graf nazywamy półhamiltonowskim, gdy posiada ścieżkę Hamiltona). Aby otrzymać nieregularne ważenie ścieżki, usuwamy dowolną krawędź z wagą 1 z cyklu o tej samej liczbie wierzchołków (wszystkie poniższe konstrukcje gwarantują istnienie takiej krawędzi). W przypadku grafów hamiltonowskich i półhamiltonowskich znajdujemy nieregularne ważenie cyklu albo ścieżki Hamiltona, a następnie przypisujemy wagę 1 wszystkim pozostałym krawędziom grafu.

Niech C_k oznacza cykl o długości k . Wtedy:

Fakt 3.7.

$$\begin{aligned} ps(C_3) &= ps(C_4) = ps(C_5) = ps(C_6) = 3 \\ ps(C_7) &= ps(C_8) = 4 \\ ps(C_9) &= ps(C_{10}) = ps(C_{11}) = ps(C_{12}) = ps(C_{13}) = ps(C_{14}) = 5 \\ ps(C_n) &\geq 6 \text{ dla wszystkich } n > 14 \end{aligned}$$

Dowód. Najpierw wykażemy, że wymienione wartości $ps(C_n)$ są najmniejszymi możliwymi.

Jak można łatwo zauważyć, użycie dwóch wag 1 i 2 pozwala wygenerować trzy różne iloczyny: 1, 2 i 4, jednak nie można w ten sposób utworzyć nieregularnego ważenia C_3 , gdyż żaden z możliwych do otrzymania ciągów wag: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$ nie jest ważeniem iloczynowo nieregularnym. W związku z tym, aby otrzymać nieregularne ważenie C_3 i dowolnego dłuższego cyklu, potrzeba co najmniej trzech wag.

W ten sam sposób zauważamy, że używając wag 1, 2, 3 można otrzymać sześć różnych ważonych stopni: 1, 2, 3, 4, 6 i 9, więc co najmniej cztery wagi

są potrzebne do utworzenia nieregularnego ważenia C_7 i wszystkich dłuższych cykli.

Używając wag 1, 2, 3 i 4 można otrzymać dziewięć iloczynów: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 i 16. Jednakże liczby te nie mogą stanowić ciągu ważonych stopni cyklu C_9 , gdyż niemożliwe jest jednoczesne otrzymanie wszystkich wielokrotności liczby 3 przy użyciu wag 1, 2, 3 i 4. Aby się o tym przekonać zauważmy, że aby otrzymać ważony stopień 9, trzeba dwóm sąsiadującym krawędziom nadać wagę 3. Pozwoliłoby to otrzymać ważony stopień 9 w środku i dwa inne stopnie podzielne przez trzy na końcach pewnej ścieżki złożonej z dwóch krawędzi - łącznie trzy wielokrotności. W celu otrzymania czwartej wielokrotności 3 należałoby użyć tej wagi na jeszcze jednej krawędzi, powtarzając ważony stopień 9 albo uzyskując dwie inne wielokrotności, łącznie pięć. W związku z tym potrzeba co najmniej pięciu wag do zważenia cyklu C_9 i wszystkich dłuższych.

Za pomocą wag 1, 2, 3, 4 i 5 można utworzyć czternaście iloczynów: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20 i 25. Wynika stąd, że w celu zważenia C_{15} i każdego dłuższego cyklu konieczne jest wykorzystanie co najmniej siedmiu różnych wag.

Poniżej przedstawione zostały przykładowe ciągi wag krawędzi minimalizujące wartość $ps(C_n)$ dla każdego cyklu C_n , $3 \leq n \leq 14$:

$$\begin{aligned} S_3 &= (1, 2, 3), S_4 = (1, 1, 2, 3), S_5 = (1, 1, 2, 2, 3), S_6 = (1, 1, 2, 2, 3, 3) \\ S_7 &= (1, 1, 2, 2, 4, 3, 3), S_8 = (1, 1, 2, 2, 4, 4, 3, 3), S_9 = (1, 1, 2, 5, 5, 4, 4, 3, 3) \\ S_{10} &= (1, 2, 5, 1, 4, 2, 3, 5, 4, 3), S_{11} = (1, 1, 2, 5, 1, 4, 2, 3, 5, 4, 3) \\ S_{12} &= (1, 1, 2, 5, 5, 1, 4, 2, 3, 5, 4, 3), S_{13} = (1, 1, 2, 5, 5, 1, 4, 4, 2, 3, 5, 4, 3) \\ S_{14} &= (1, 1, 2, 5, 5, 1, 4, 4, 2, 3, 3, 5, 4, 3) \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Przedstawimy teraz dolne i górne oszacowania dla cyklu C_n o dowolnej długości. Używając podobnego rozumowania, jak w obserwacji 3.1, możemy wykazać prawdziwość następującego ograniczenia.

Obserwacja 3.8.

Dla każdego $n > 2$

$$ps(C_n) \geq \left\lceil \sqrt{2n} - \frac{1}{2} \right\rceil.$$

Powyższe oszacowanie można polepszyć. Zakładając, że używamy wyłącznie wag ze zbioru $\{1, \dots, s\}$, postawmy następujące pytanie: jaka jest maksymalna długość cyklu, jaki możemy za ich pomocą nieregularnie zważyć?

Jeżeli $q > s$ jest liczbą pierwszą i q jest dzielnikiem x , to x nie może być ważonym stopniem żadnego z wierzchołków C_n .

Dla $1 \leq i \leq s$ istnieje co najwyżej $\pi(\lfloor s^2/i \rfloor) - \pi(s)$ liczb pierwszych q takich, że $x = iq \leq s^2$. Wynika stąd, że

$$n \leq s^2 - \sum_{i=1}^s \left(\pi \left(\left\lfloor \frac{s^2}{i} \right\rfloor \right) - \pi(s) \right).$$

W pracy [31] J.B. Rosser i L. Schoenfeld pokazali, że dla $n > 17$,

$$\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1.25506 \frac{n}{\ln n}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} n &\leq s^2 + s\pi(s) - \sum_{i=1}^s \pi \left(\left\lfloor \frac{s^2}{i} \right\rfloor \right) \\ &\leq s^2 + 1.25506 \frac{s^2}{\ln s} - \sum_{i=1}^s \frac{s^2}{i \ln(s^2/i)} \\ &= s^2 + 1.25506 \frac{s^2}{\ln s} - s^2 \left(\frac{1}{2 \ln s} + \sum_{i=2}^s \frac{1}{i(2 \ln s - \ln i)} \right) \\ &\leq s^2 + 1.25506 \frac{s^2}{\ln s} - s^2 \left(\frac{1}{2 \ln s} + \int_1^s \frac{1}{i(2 \ln s - \ln i)} di \right) \\ &= s^2(1 - \ln 2) + 0.75506 \frac{s^2}{\ln s}. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdy

$$s \geq \left\lceil \left(\frac{n}{1 - \ln 2} \right)^{1/2} \right\rceil.$$

Jako, że $\ln 2 > 0.5$, następujące ograniczenie nieco poprawia wynik z obserwacji 3.8.

Obserwacja 3.9.

Dla każdego $n > 17$

$$ps(C_n) \geq \left\lceil \left(\frac{n}{1 - \ln 2} \right)^{1/2} \right\rceil.$$

Przejdziemy teraz do szacowania górnych ograniczeń na $ps(C_n)$.

Lemat 3.10.

Dla każdego $s \geq 3$

- istnieje iloczynowo nieregularne ważenie cyklu C_{2s} wykorzystujące wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$ (i tylko te liczby) takie, że sześć kolejnych krawędzi ma wagi $s - 1, s - 1, s, s, s - 2, s - 2$;
- istnieje iloczynowo nieregularne ważenie cyklu C_{2s+1} wykorzystujące wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, s + 1\}$ (i tylko te liczby) takie, że siedem kolejnych krawędzi ma wagi $s - 1, s - 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 2$.

Dowód. Dla C_6 , pożądany ciąg wag jest postaci 2, 2, 3, 3, 1, 1. Teraz, mając dany cykl C_{2s} , gdzie $s \geq 3$, założmy, że sześć jego kolejnych krawędzi ma wagi $s - 1, s - 1, s, s, s - 2, s - 2$ (w tej lub odwrotnej kolejności). Możemy teraz dodać krawędź (albo dwie kolejne krawędzie) z wagą $s + 1$ pomiędzy krawędziami z wagami $s - 1$ i s i otrzymać iloczynowo nieregularne ważenia C_{2s+1} i C_{2s+2} z najwyższą wagą równą $s + 1$, przy czym drugie ważenie ma pożądaną strukturę. Aby wykazać prawdziwość tezy, wystarczy więc zastosować indukcję względem s . \square

Lemat 3.11.

Dla każdego $s \geq 7$:

- istnieje iloczynowo nieregularne ważenie cyklu C_{3s} , wykorzystujące wszystkie liczby ze zbioru $1, 2, \dots, s$ (i tylko te liczby) takie, że jedenaste kolejnych krawędzi ma wagi $s - 4, s - 1, s - 2, s - 2, s, s, s - 1, s - 1, s - 3, s - 2, s - 5$;
- istnieje iloczynowo nieregularne ważenie cyklu C_{3s+1} wykorzystujące wszystkie liczby ze zbioru $1, 2, \dots, s + 1$ (i tylko te liczby) takie, że dwanaście kolejnych krawędzi ma wagi $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$;
- istnieje iloczynowo nieregularne ważenie cyklu C_{3s+2} wykorzystujące wszystkie liczby ze zbioru $1, 2, \dots, s + 1$ (i tylko te liczby) takie, że trzynaście kolejnych krawędzi ma wagi $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s + 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$;

Dowód. Dla C_{21} , odpowiednie ważenie składa się z liczb 3, 6, 5, 5, 7, 7, 6, 6, 4, 5, 2, 2, 7, 1, 1, 5, 3, 4, 4, 7, 3. Mając dany cykl C_{3s} , gdzie $s \geq 7$, założmy, że wagi jego jedenastu kolejnych krawędzi tworzą ciąg S_0 : $s - 4, s - 1, s - 2, s - 2, s, s, s - 1, s - 1, s - 3, s - 2, s - 5$ (w tej lub odwrotnej kolejności). Postępujemy w następujący sposób:

- zapisujemy S_0 w odwrotnym porządku: $s - 5, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s, s, s - 2, s - 2, s - 1, s - 4$;
- zmieniamy położenie krawędzi z wagą $s - 2$ (zamieniamy pozycje pary $(s - 2, s - 2)$ i pojedynczej krawędzi z wagą $s - 2$): $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$;
- dodajemy nową krawędź z wagą $s + 1$: $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$; w ten sposób otrzymujemy iloczynowo nieregularne ważenie cyklu o długości $3s + 1$;
- dodajemy krawędź z wagą $s + 1$: $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s - 1, s - 1, s + 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$; w ten sposób otrzymujemy iloczynowo nieregularne ważenie cyklu o długości $3s + 2$;
- dodajemy krawędź z wagą s : $s - 5, s - 2, s - 2, s - 3, s, s - 1, s - 1, s + 1, s + 1, s, s, s - 2, s - 1, s - 4$; w ten sposób otrzymujemy iloczynowo nieregularne ważenie cyklu o długości $3(s + 1)$ mające pożądaną strukturę (aby to stwierdzić, wystarczy sprawdzić ostatnie jedenaście wag).

Stosując indukcję względem s kończymy dowód. \square

Z powyższych lematów wynikają następujące ograniczenia dla cykli, prawdziwe również dla ścieżek i grafów (pół-) hamiltonowskich:

Twierdzenie 3.12.

$$ps(C_n) \leq \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{gdym } n \geq 6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{gdym } n \geq 21 \end{cases} .$$

Przejdźmy do oszacowań iloczynowej siły nieregularności dla długich cykli.

Twierdzenie 3.13.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że dla każdego $n \geq n_0$

$$ps(C_n) \leq \lceil (1 + \varepsilon)\sqrt{2n \ln n} \rceil .$$

Dowód. Niech $s = \lceil (1 + \varepsilon)\sqrt{2n \ln n} \rceil$ i niech p będzie największą liczbą pierwszą taką, że $p \leq \pi(s)$. Z twierdzenia Bertranda-Czebyszewa wynika, że $p \geq \pi(s)/2 + 1$ dla wystarczająco dużego s .

Dla każdego $q < p/2$ możemy zdefiniować ciąg: $0, q \bmod p, 2q \bmod p, \dots, (p - 1)q \bmod p, pq \bmod p = 0$. W dalszej części dowodu będziemy nazywać taki ciąg "łańcuchem".

Jak możemy zauważyć, w dowolnym ustalonym łańcuchu, każda liczba a , $0 \leq a \leq p-1$, występuje dokładnie raz, ponieważ q i p są względnie pierwsze, w związku z czym rząd q w addytywnej grupie Z_p wynosi $p-1$. Stąd, jeżeli połączymy wszystkie łańcuchy razem i zamkniemy cykl (w taki sposób, aby zera były wspólnymi elementami każdej pary sąsiadujących łańcuchów), każda para liczb z rozpatrywanego zbioru wystąpi obok siebie co najwyżej raz (tutaj potrzebne jest założenie, że $q < p/2$). Ponumerujemy liczby pierwsze: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ i tak dalej i niech $p_0 = 1$. Zastępujemy każdą liczbę a w skonstruowanym powyżej cyklu przez p_a . Skoro żadna para się nie powtarza, również żaden iloczyn nie wystąpi dwukrotnie. Ponadto z faktu, że sąsiadujące wagi są zawsze różne, żaden z iloczynów nie jest kwadratem liczby naturalnej. Pozostaje pokazać, że możemy w podany sposób zważyć n krawędzi. Jako, że używamy p wag w każdym łańcuchu, a każdemu łańcuchowi odpowiada inna liczba naturalna $q < p/2$, możemy zważyć

$$m \geq \frac{p(p-1)}{2} \geq \frac{(\pi(s))^2}{8} \geq \frac{1}{8} \left(\frac{s}{\ln s} \right)^2$$

krawędzi. Wybór s gwarantuje, że dla wystarczająco dużych n zachodzi nierówność $m > n$.

Wykorzystujemy największą liczbę łańcuchów pozwalającą zważyć co najwyżej n krawędzi. Liczba krawędzi, którym przypisaliśmy wagi, mieści się pomiędzy $n-p+1$ i n . Niech t oznacza liczbę pozostałych krawędzi. Oczywiście, $0 \leq t < p$. Dotychczas użyliśmy dokładnie p wag i żaden iloczyn nie jest kwadratem liczby naturalnej. Zastępujemy każdą z t ostatnich krawędzi w ostatnim łańcuchu dwiema sąsiadującymi krawędziami (nie zmieniając wag). To nie zmieni żadnego z dotychczas otrzymanych ważonych stopni, gdyż ciągi postaci p_i, p_j, p_k zmieniają się w p_i, p_j, p_j, p_k . Dodanie nowych krawędzi powoduje jedynie pojawienie się nowych ważonych stopni będących kwadratami różnych liczb pierwszych użytych w ważeniu. Tak więc ważenie pozostaje iloczynowo nieregularne i otrzymujemy ostatecznie prawidłowo ważony cykl o długości n , co kończy dowód. \square

3.5 Kraty i kraty toroidalne

Niech będzie dane k ścieżek P_j ($j = 1, 2, \dots, k$) ze zbiorami wierzchołków V_j ($j = 1, 2, \dots, k$), gdzie $|V_j| = n_j$. Definiujemy kratę $G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$ jako iloczyn kartezjański tych ścieżek. Dokładniej, zbiór wierzchołków V grafu $G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$ jest produktem kartezjańskim zbiorów wierzchołków V_j ($j = 1, 2, \dots, k$): $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$. Możemy postrzegać elementy V jak punkty w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej z i -tą

współrzedną równą pozycji wierzchołka na ścieżce P_k . Dwa wierzchołki $(u_1, u_2, \dots, u_k), (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V$ są przyległe, jeżeli wszystkie ich współrzedne poza jedną, powiedzmy j -tą, są takie same i $|u_j - v_j| = 1$.

Rozpatrując cykle zamiast ścieżek (w tej sytuacji wierzchołki ze V mogą być postrzegane jako elementy produktu kartezjańskiego k grup cyklicznych Z_{n_j} , $j = 1, 2, \dots, k$, zamiast przestrzeni euklidesowych), otrzymujemy kratę toroidalną $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$.

Lemat 3.14.

Założmy, że n_1, n_2, \dots, n_k są liczbami naturalnymi, przy czym $n_j \geq 3$ dla każdego $j = 1, 2, \dots, k$.

1. *Niech p_1, p_2, \dots, p_k będą k liczbami naturalnymi (niekoniecznie różnymi) takimi, że p_j liczb pierwszych wystarczy do uzyskania iloczynowo nieregularnego ważenia cyklu C_{n_j} ($j = 1, 2, \dots, k$). Wtedy $\sum_{j=1}^k p_j$ liczb pierwszych wystarczy do uzyskania iloczynowo nieregularnego ważenia kraty toroidalnej $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$.*
2. *Niech p_1, p_2, \dots, p_k będą k liczbami naturalnymi (niekoniecznie różnymi) takimi, że p_j liczb pierwszych wystarczy do uzyskania iloczynowo nieregularnego ważenia ścieżki P_{n_j} ($j = 1, 2, \dots, k$). Wtedy $\sum_{j=1}^k p_j$ liczb pierwszych wystarczy do uzyskania iloczynowo nieregularnego ważenia kraty $G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$.*

Dowód. Zaczniemy od krat toroidalnych. Udowodnimy lemat przez indukcję względem k . Prawdziwość dla $k = 1$ jest oczywista. Założmy, że zdołaliśmy zważyć $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}}$ za pomocą $\sum_{j=1}^{k-1} p_j$ liczb pierwszych. W celu skonstruowania $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$, łączymy n_k kopii grafu $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}}$ w taki sposób, że dla każdego wierzchołka $v \in V(T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}})$, wszystkie jego kopie są połączone z jedną kopią C_{n_k} . Zbiory wag krawędzi incydentnych z każdą kopią v są różne, gdyż składają się z ustalonego zbioru wag użytych do zważenia $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}}$ i zmieniających się par wag na krawędziach C_{n_k} (zawsze różnych od tych użytych do ważenia $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}}$). Powyższe jest prawdziwe dla każdego wierzchołka $v \in V(T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1}})$, więc otrzymaliśmy iloczynowo nieregularne ważenie $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$ używając tylko p_k nowych liczb pierwszych. To daje nam pożądaną liczbę wag.

W przypadku kraty $G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$ dowód przebiega identycznie, musimy jedynie zamiast C_{n_j} użyć P_{n_j} . \square

Korzystając z powyższego lematu, możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.15.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $n_j^{(0)}, j = 1, \dots, k$ takie, że dla każdej k -tki (n_1, n_2, \dots, n_k) , $n_j \geq n_j^{(0)}, j = 1, 2, \dots, k$,

$$1. \text{ps}(T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}) \leq [(1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j)];$$

$$2. \text{ps}(G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}) \leq [(1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j)].$$

Dowód. Na początek zauważmy, że liczba liczb pierwszych niezbędna do zważenia cyklu C_n (lub ścieżki P_n) jest nie większa, niż $\lceil \sqrt{2n} \rceil + 1$. Faktycznie, używając tylu liczb pierwszych, jesteśmy w stanie zważyć (patrz dowód twierdzenia 3.13)

$$m \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil \frac{\lceil \sqrt{2n} \rceil}{2} \geq n$$

krawędzi. Jedyne problem stanowi fakt, że p musi być pierwsza, więc musimy wykorzystać $2\lceil \sqrt{2n} \rceil$ liczb. Wtedy, postulat Bertranda gwarantuje istnienie p takiego, że $p \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil + 1$. Z powyższego i z lematu 3.14 wynika, że do zważenia kraty $G_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$ (kraty toroidalnej $T_{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}$) potrzebujemy co najwyżej

$$m_0 = 2 \sum_{j=1}^k \lceil \sqrt{2n_j} \rceil$$

różnych liczb pierwszych. Jeżeli s ma wartość jak w założeniu tego twierdzenia, liczba dostępnych liczb pierwszych jest, dla wystarczająco dużych n_j ($j = 1, 2, \dots, k$), nie mniejsza niż

$$\pi(s) \geq \frac{(1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j)}{\ln((1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j))}.$$

Stosując nierówność Cauchy'ego-Schwartz'a do sumy w mianowniku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \pi(s) &\geq \frac{(1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j)}{\ln((1 + \varepsilon)\sqrt{2k} \sqrt{\sum_{j=1}^k n_j} \ln(\sum_{j=1}^k n_j))} \\ &\geq \frac{(1 + \varepsilon)\sqrt{2}(\sum_{j=1}^k \sqrt{n_j}) \ln(\sum_{j=1}^k n_j)}{\ln((1 + \varepsilon)\sqrt{2k}) + \frac{1}{2} \ln(\sum_{j=1}^k n_j) + \ln \ln(\sum_{j=1}^k n_j)}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla wystarczająco dużych n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) jest spełniona nierówność $\pi(s) > m_0$, otrzymujemy ostatecznie tezę twierdzenia. \square

Bibliografia

- [1] Aigner M., Triesch E., *Irregular assignments of trees and forests*, SIAM Journal on Discrete Mathematics Vol.3 No.4 (1990), 439 - 449.
- [2] Amar D., *Irregularity strength of regular graphs of large degree*, Discrete Mathematics 114 (1993), 9 - 17.
- [3] Amar D., Togni O., *Irregularity strength of trees*, Discrete Mathematics 190 (1998), 15 - 38.
- [4] Anholcer M., *Irregular labelings of circulant graphs*, preprint.
- [5] Anholcer M., *Product irregularity strength of graphs*, Discrete Mathematics 309 (2009), 6434-6439.
- [6] Anholcer M., Kalkowski M., Przybyło J., *A new upper bound for the total vertex irregularity strength of graphs*, Discrete Mathematics 309 (2009), 6316-6317.
- [7] Anholcer M., Karoński M., Pfender F., *Total vertex irregularity strength of forests*, preprint.
- [8] Bača M., Jendrol S., Miller M., Ryan J., *On irregular total labelings*, Discrete Mathematics 307 (2007), 1378 - 1388.
- [9] Baril J.-L., Kheddouci H., Togni O., *The irregularity strength of circulant graphs*, Discrete Mathematics, 304 (2005), 1-10.
- [10] Chartrand G., Jacobson M.S., Lehel J., Oellermann O.R., Ruiz S., Saba F., *Irregular networks*, Congressus Numerantium 64 (1988), 187 - 192.
- [11] Dinitz J.H., Garnick D.K., *Minimal irregular weightings of $X_{m,n}$ for $3 \leq m, n \leq 16$* , Research Report 91 - 8, Department of Mathematics and Statistics, University Vermont, Burlington, June (1991).

- [12] Dinitz J.H., Garnick D.K., Gyárfás A., *On the irregularity strength of the $m \times n$ grid*, Journal of Graph Theory Vol.16 No.4 (1992), 355 - 374.
- [13] Ebert G., Hemmeter J., Lazebnik F., Woldar A., *Irregularity strengths of certain graphs*, Congressus Numerantium 71 (1990), 39 - 52.
- [14] Faudree R.J., Jacobson M.S., Kinch L., Lehel J., *Irregularity strength of dense graphs*, Discrete Mathematics 91 (1991), 45 - 59.
- [15] Faudree R.J., Jacobson M.S., Lehel J., Schelp R.H., *Irregular networks, regular graphs and integer matrices with distinct row and column sums*, Discrete Mathematics 76 (1989), 223 - 240.
- [16] Faudree R.J., Lehel J., *Bound on the irregularity strength of regular graphs*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 52, Combinatorics, Eger (Hungary), North - Holland, Amsterdam 1987, 239 - 246.
- [17] Frieze A., Gould R.J., Karoński M., Pfender F., *On graph irregularity strength*, Journal of Graph Theory 41, 120-137.
- [18] Garnick D.K., *The irregularity strength of $m \times n$ grids for $m, n \geq 18$* , Ars Combinatoria 40 (1995), 143 - 151.
- [19] Gyárfás A., *The irregularity strength of $K_{m,m}$ is 4 for odd m* , Discrete Mathematics 71 (1988), 273-274.
- [20] Jacobson M.S., Lehel J., *Upper bound on the irregularity strength of a simple graph*, manuscript.
- [21] Jendroř S., Tkáč M., *The irregularity strength of tK_p* , Discrete Mathematics 145 (1995), 301 - 305.
- [22] Jendroř S., Tkáč M., Tuza Z., *The irregularity strength and cost of the union of cliques*, Discrete Mathematics 150 (1996), 179 - 186.
- [23] Jendroř S., Źoldák V., *The irregularity strength of generalized Petersen Graphs*, Mathematica Slovaca Vol.45 No.2 (1995), 107 - 113.
- [24] Kalkowski M., Karoński M., Pfender F., *A new upper bound for the irregularity strength of graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, to appear.
- [25] Kinch L., Lehel J., *The irregularity strength of tP_3* , Discrete Mathematics 94 (1991) 75 - 79.

- [26] Nierhoff T., *A tight bound on the irregularity strength of graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics Vol. 13 (2000), No 3, 313 - 323.
- [27] Nurdin, Baskoro E.T., Salman A.N.M., Gaos N.N., *On the total vertex irregularity strength of trees*, Discrete Mathematics 310 (2010), 3043-3048.
- [28] Pikhurko O., *Characterization of product anti-magic graphs of large order*, Graphs & Comb, 23 (2007), 681-689.
- [29] Przybyło J., *Irregularity strength of regular graphs*, Electron. J. Combin. 15 (2008), (1), #R82.
- [30] Przybyło J., *Linear bound on the irregularity strength and the total irregularity strength of graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol 23 (2008), No 1, 511-516.
- [31] Rosser J. B., Schoenfeld L., *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64-97.
- [32] Togni O., *Force des graphes. Indice optique des réseaux*, Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur, Université de Bordeaux 1, École doctorale de mathématiques et d'informatique, 1998.
- [33] Togni O., *Irregularity strength and compound graphs*, Discrete Mathematics 218 (2000), 235 - 243.
- [34] Togni O., *Irregularity strength of the toroidal grid*, Discrete Mathematics 165/166 (1997), 609 - 620.