ALEKSANDER ZELIAŚ

PRÓBA KONSTRUKCJI MODELU EKONOMETRYCZNEGO DLA OKREŚLENIA PROGNOZY PLONÓW PODSTAWOWYCH ZBÓŻ

I. UWAGI WSTĘPNE

Badania nad praktycznym wykorzystaniem modeli ekonometrycznych dla potrzeb wnioskowania w przyszłość zajmują jedno z czołowych miejsc wśród badań ekonometrycznych. Aczkolwiek literatura naukowa z dziedziny predykcji[1] jest dość obszerna, nie jest rzeczą niniejszego artykułu omawianie lub podsumowanie licznych rozważań na ten temat. Należy na wstępie podkreślić, że przeważnie wszystkie publikacje z tego zakresu omawiają metody predykcji w zastosowaniu do badań popytu i produkcji przemysłowej. Nie podejmowano, jak dotąd, szerszych prób zastosowania nowoczesnych metod ekonometrycznych do przewidywania w dziedzinie produkcji rolnej [2]. O znaczeniu tego rodzaju badań dla celów planowania gospodarczego pisano już wiele i nie ma potrzeby uzasadniania ich przydatności również i w planowaniu produkcji rolnej.

Celem niniejszego artykułu jest:

1) przedstawienie prostego ekonometrycznego równania wzrostu plonów zbóż oraz określenia jego walorów poznawczych i przydatności praktycznej w badaniach ekonomiczno-rolniczych;

2) wysunięcie prognozy w zakresie produkcji dwóch podstawowych zbóż: pszenicy i żyta.

[1] Zgodnie z przyjętą terminologią (por. pracę: Z. Pawłowski, *Ekonometria,* Warszawa 1966) termin „predykcja" oznacza wnioskowanie na podstawie ekonometrycznego modelu. Natomiast termin „prognoza" oznacza ilościowy wynik wnioskowania dla ustalonego okresu czasu.

[2] W dość obfitej literaturze przedmiotu początkowego przeważał werbalno-opisowy sposób podchodzenia do zagadnienia. Następnie w coraz większym stopniu zaczęto stosować metody statystyki opisowej. Duże zasługi w stosowaniu metod matematyczno-statystycznych do ustalenia krótkookresowych prognoz rozwoju pogłowia zwierząt w Polsce położyli S. Schmidt i J. Steczkowski. Z zakresu zastosowania analizy regresji do ustalania prognoz na odcinku produkcji czterech zbóż należy Wymienić pracę S. Wacławowicza, *Metodyka określenia stanu i kierunku rozwoju produkcji podstawowych zbóż,* Kraków 1960.

Opracowanie problematyki, zakreślonej tematem niniejszej pracy opieramy na materiałach statystycznych odnoszących się do gospodarstw indywidualnych w całej Polsce. Dane liczbowe obejmują informacje o plonach pszenicy, żyta, nawozach mineralnych i oborniku. Podstawowy materiał statystyczny pochodzi z Roczników Statystycznych za lata 1955 - - 1966 oraz z Małego Rocznika Statystycznego za 1967 r. Całokształt materiału źródłowego obejmuje więc dwunastoletni okres czasu, tzn. lata gospodarcze 1954/55 - 1965/66.

II. OKREŚLENIE I DOBÓR ZMIENNYCH OBJAŚNIAJĄCYCH

O poziomie plonów w rolnictwie decyduje kompleks czynników przyrodniczych, agrotechnicznych, ekonomicznych i organizacyjnych. Spośród zespołu czynników przyrodniczych układ warunków klimatycznych należy do tych, które wciąż jeszcze leżą poza sferą świadomego kształtowania ich przez producenta. Oznacza to, że głównym czynnikiem, powodującym, iż wahania plonów ziemiopłodów mają charakter losowy, są zmienne czynniki klimatyczne. Wśród czynników decydujących o poziomie plonów i zależnych od woli gospodarującego, główną rolę odgrywa agrotechnika uprawy. Wobec tego postęp kultury rolnej, nawożenie gleby, zmiany w sposobie siewu, pielęgnacji itd. są to najistotniejsze przyczyny kształtujące ogólną tendencję rozwojową poziomu plonów.

Ogólnie należy stwierdzić, że nawożenie, zarówno mineralne, jak i organiczne, uważane jest powszechnie za szczególnie skuteczny i efektywny sposób zwiększenia plonów. Z tego też względu inwestycje w zakresie nawożenia powinny być traktowane jako jeden z podstawowych czynników prowadzących do zwiększenia efektów produkcyjnych.

Z uwagi na powyższe, spośród czynników, które naszym zdaniem w głównej mierze determinują poziom plonów, należy wziąć pod uwagę: 1) nawożenie organiczne, 2) nawożenie mineralne, 3) postęp agrotechniczny i organizacyjny, 4) przemienność plonowania. Uważamy, że czynniki te mają podstawowe znaczenie dla produkcji zbóż. Ze względu na wciąż ograniczony brak rzetelnych danych, poza obrębem analizy pozostaje wiele innych czynników, tak o charakterze wymiernym jak i niewymiernym (np. jakość i racjonalność nakładów, żyzność gleby, jakość materiału siewnego, terminowość upraw itp.).

Przy określaniu poziomu nawożenia stosowana jest różna podstawa odniesienia, jak 1 ha zasiewów, 1 ha gruntów ornych, 1 ha użytków rolnych lub wreszcie 1 ha przeliczeniowy. Przyjmowanie różnej podstawy odniesienia wynika zarówno z braku informacji liczbowych dotyczących zużycia nawozów pod poszczególne uprawy, jak i trudności w określeniu wpływu nawozów na poszczególne rośliny. Wystarczy podkreślić, że nawożenie łąk i pastwisk nawozami organicznymi ma u nas charakter ra-

czej sporadyczny, w postaci pogłównego nawożenia gnojówką, obornikiem lub kompostem. Wraz ze wzrostem kultury rolnej i cywilizacji technicznej również nawożenie mineralne w coraz większym stopniu stosowane jest na trwałych użytkach zielonych.

Wydaje się, że najbardziej słuszne będzie przeliczanie nawożenia organicznego na 1 ha gruntów ornych, a nawożenia mineralnego na 1 ha użytków rolnych. Uważamy przy tym, że przyjęcie zużycia nawozów na 1 ha powierzchni zasianej dałoby chyba zbyt przesadną ocenę poziomu nawożenia. Jest to zgodne z aktualnymi poglądami, których wyrazicielami w tej mierze są: Z. Grochowski, J. Steczkowski, S. Wacławowicz, A. Woś.

Wyjaśnienia wymaga sposób kwantytatywnego określenia nawożenia organicznego. W tym względzie punkt wyjścia szacunku stanowią dane GUS-u o stanie inwentarza żywego w Polsce w interesującym nas okresie. W rachunku uwzględniamy produkcję obornika od całego inwentarza i przyjmujemy następujące ilości obornika od 1 sztuki statystycznej[3]:

bydło	65 q	obornika	rocznie
konie	50 q	„	„
trzoda chlewna	12 q	„	„
owce	6 q	„	„

Należy dodać, że normy te niewiele odbiegają od norm wydajności obornika od 1 sztuki, przyjętych przez GUS, które wynoszą dla bydła 75 q, dla koni 55 q, dla trzody chlewnej natomiast 11,5 q obornika. Tak uzyskaną szacunkową ilość obornika przeliczono przez ilość ha gruntów ornych w danym roku. Podkreślamy przy tym, że nie jest to szacunek dokładny, ale dla potrzeb naszej analizy dokładność ta wydaje się wystarczająca.

W tabeli 1 zamieszczamy podstawowy materiał liczbowy potrzebny do omówienia podjętej problematyki. Zestaw danych w tabeli 1 zezwala na poznanie stanu rzeczywistego, jaki istnieje w zakresie poziomu nawożenia mineralnego i obornikowego. Zużycie nawozów mineralnych w czystym składniku NPK na 1 ha użytków rolnych waha się w granicach 23 - 57 kg. Jeśli natomiast chodzi o poziom nawożenia obornikowego, wskaźniki zużycia na 1 ha gruntów ornych wahają się w granicach 54 - 66 q. Z tabeli 1 wynika, że wzrost nawożenia organicznego w badanym okresie był bardzo powolny w porównaniu do nawożenia mineralnego, które wzrosło w 1966 r. w stosunku do 1955 r. około 2,4 razy. Warto jednak przy tym pamiętać, że możliwości nawożenia organicznego są ograniczone głównie przyrostem pogłowia zwierząt gospodarskich, a szczególnie bydła rogatego.

[3] Normy te zostały przyjęte na podstawie obliczenia Z. Grochowskiego i S. Wacławowicza. Por. w tej sprawie prace: Z. Grochowski, *Efektywność nawożenią w Polsce i za granicą,* Zagadnienia Ekonomiki Rolnej 1960, nr 3, S Wacławowicz, op. cit.

Tabela 1

Lata	Plon (w q/ha)		Obornik (w ton/1 ha gruntów ornych)	Nawozy mineralne w czystym składniku (w kg/1 ha użytków rolnych)
	Pszenica	Żyto		
1955	14,5	14,2	5,37	23,4
1956	14,6	13,4	5,62	25,5
1957	16,1	14,8	5,46	27,5
1958	15,9	14,1	5,45	24,5
1959	17,3	15,6	5,47	29,8
1960	16,9	15,4	5,67	32,5
1961	20,1	17,2	5,88	33,8
1962	19,3	14,2	6,04	38,8
1963	20,0	16,4	6,01	40,3
1964	18,5	15,7	6,15	42,9
1965	20,5	18,5	6,32	49,3
1966	21,5	17,8	6,58	56,7

Rezultaty uzyskane na podstawie analizy danych empirycznych świadczą — o czym już wyżej wspomniano — że nawożenie organiczne w porównaniu do nawożenia mineralnego wykazywało bardzo powolny wzrost. Skoro tak jest, to wydaje się, że w przypadku gdy obserwowane w próbie statystycznej wartości zmiennej objaśniającej są mało zróżnicowane, jest rzeczą wskazaną nie tylko z punktu widzenia estymacji parametrów, ale i z punktu widzenia predykcji, by takiej zmiennej nie uwzględniać w modelu. Jest to zgodne z aktualnym poglądem, który w tej mierze reprezentuje Z. Pawłowski [4].

Nie negując wpływu nawożenia obornikowego na wzrost plonów, ograniczymy się do określenia prawidłowości zachodzących jedynie między wysokością plonów a nawożeniem mineralnym, postępem techniki rolnej i zjawiskiem przemienności plonowania. Stosujemy więc świadomie klauzulę ceteris paribus conditionibus, tzn. nawożenie obornikowe uznajemy w badanym okresie za mniej więcej stałe.

W dalszym toku naszych rozważań nieco uwagi poświęcimy kształtowaniu się przeciętnych plonów pszenicy i żyta. Z liczb przedstawionych w tabeli 1 wynika, że poziom plonów pszenicy i żyta jest poważnie zróżnicowany. Odnosi się to zwłaszcza do plonów żyta. Wyjaśnienie tego zjawiska wydaje się dość skomplikowane i na ten temat ostateczny sąd powinni sformułować przedstawiciele nauk agrotechnicznych. Sugerować tu można jedynie, iż przyczyna tego stanu rzeczy leży albo w mniejszej stabilności plonowania stosowanych w naszym kraju odmian żyta w stosunku do pszenicy, lub też w tym, że żyto uprawiane jest w zasadzie na glebach lżejszych, co w konsekwencji prowadzi do jego większej wrażliwości na poziom opadów i ich rozmieszczenie w czasie.

[4] Por. pracę Z. Pawłowskiego, op. cit., s. 145.

Analizując liczby zawarte w tabeli 1 należy ogólnie stwierdzić, że plony badanych ziemiopłodów wykazują wyraźną cykliczność o długości cyklu równej dwa lata[5]. W latach nieparzystych plony te wykazywały tendencje do kształtowania się na względnie wysokim poziomie, a w latach parzystych — na niskim. Wiąże się to ze znanym w rolnictwie zjawiskiem przemienności plonowania zbóż, które w badaniach empirycznych zauważył również autor[6]. W związku z tym, było konieczne uwzględnienie w badaniach dodatkowej zmiennej objaśniającej, mającej na celu pomiar efektów cyklicznych zmian poziomu urodzaju[7].

Na uwagę zasługuje również odpowiedź na pytanie, jak wzrost postępu techniki rolnej i organizacji wpływa na poziom wydajności zbóż w ha. Dla uściślenia naszych rozważań przyjęto, że w ciągu badanego okresu czasu nastąpił pewien postęp techniki rolnej, który wyrażał się w dodatkowym wzroście produkcji zbóż. Dlatego też analizę czynników determinujących poziom plonów poszerzamy o zmienną mającą mierzyć efekty podanych rodzajów postępu[8].

III. MODEL EKONOMETRYCZNY DLA WYZNACZANIA PROGNOZY PLONÓW PSZENICY I ŻYTA

W naszych badaniach podjęliśmy próbę oszacowania wpływu uprzednio określonych czynników na kształtowanie się plonów pszenicy i żyta w oparciu o funkcję[9]:

$$Y_{lt} = 10^{\log \alpha_0} \cdot X_t^{\alpha_1} \cdot 10^{\alpha_2 t} \cdot 10^{\alpha_3 E_t} \cdot 10^{\xi_{lt}}, \tag{1}$$

lub w przekształconej postaci:

$$\log Y_{lt} = \log \alpha_0 + \alpha_1 \log X_t + \alpha_2 t + \alpha_3 E_t + \xi_{lt}, \tag{2}$$

[5] Z ciekawym spojrzeniem na wahania plonów w kolejnych latach wystąpiła ostatnio G. Niewiadomska-Kozieł, por. *Wyodrębnienie trendu i wahań cyklicznych plonów głównych ziemiopłodów,* Przegląd Statystyczny 1966, nr 4.

[6] Por. A. Zeliaś, *Zastosowanie dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji w planowaniu wysokości plonów,* Przegląd Statystyczny 1968, nr 1.

[7] Wpływ czynnika z natury jakościowego na wyróżnioną zmienną endogeniczną można badać, między innymi, poprzez wprowadzenie do budowanego modelu tak zwanych zmiennych zero-jedynkowych. Przyjmuje się wtedy, że wprowadzona do modelu zmienna zero-jedynkowa jest równa jeden, gdy wyróżniony czynnik jakościowy występuje i jest równa zero wtedy, gdy czynnik ten nie występuje.

[8] Ekonometryczny pomiar efektów postępu techniki rolnej i organizacji możliwy jest do przeprowadzenia na kilka różnych sposobów. Powszechnie znaną i prostą metodą oceny podanych rodzajów postępu jest metoda polegająca na modyfikacji funkcji produkcji typu Cobb-Douglasa.

[9] Należy zwrócić tu uwagę, że wyrażenie 10 log a_0 jest równe a_0. Zapis ten umożliwia względnie łatwe dokonywanie na modelu (1) złożonych operacji rachunkowych, które byłyby trudne do przeprowadzenia przy zastosowaniu zapisu tradycyjnego.

gdzie poszczególne symbole określają: Y_{lt} — przeciętne plony badanych ziemiopłodów w q/ha w okresie t obliczone z funkcji (1); X_t — zużycie nawozów mineralnych w czystym składniku NPK na 1 ha użytków rolnych w okresie t; t — zmienna czasowa przyjmująca w kolejnych okresach czasu wartości całkowite; E_t — zmienna zero-jedynkowa, przyjmująca wartość 1 w latach nieparzystych i wartość 0 w latach parzystych; a_0, a_1, a_2, a_3 — parametry, przy czym a_1 jest współczynnikiem elastyczności plonów względem nawożenia mineralnego; a_2 określa wpływ postępu technicznego i organizacyjnego; a_3 jest miarą periodycznych wzrostów plonów pszenicy i żyta w latach urodzaju, które przypadają, jak widać, na lata nieparzyste; ξ_{lt} — składnik losowy o nadziei matematycznej wynoszącej zero i stałej w czasie wariancji σ^2.

Szacując parametry modelu (2) metodą najmniejszych kwadratów na podstawie 12-letniego szeregu czasowego (dane zawarte w tabeli 1), otrzymujemy następujące równania[10]:
dla plonów pszenicy

$$\log Y_{1t} = \underset{(0,2182)}{1,055816} + \underset{(0,1660)}{0,063314}\log X_t + \underset{(0,0057)}{0,013245}\,t + \underset{(0,0084)}{0,015252}\,E_t + \varepsilon_{1t}; \tag{3}$$

dla plonów żyta

$$\log Y_{2t} = \underset{(0,2811)}{0,889376} + \underset{(0,2141)}{0,164659}\log X_t + \underset{(0,0073)}{0,004707}\,t + \underset{(0,0108)}{0,031783}\,E_t + \varepsilon_{2t}; \tag{4}$$

gdzie t przyjmuje wartości całkowite[11].

Znając oszacowania parametrów funkcji (2), tzn. wartości log a_0, a_1, a_2 oraz a_3, wyliczamy ocenę wariancji składnika losowego ξ_t posługując się wzorem:

$$S_l^2 = \frac{1}{n-k}\sum_t \varepsilon_{lt}^2, \tag{5}$$

gdzie: n — liczba obserwacji; ε_{lt} — wartości resztowe równania; k — liczba szacowanych parametrów.

Wartości ε_{lt} określone są jako różnice

$$\varepsilon_{lt} = \log Y_{lt} - \log Y'_{lt}. \tag{6}$$

We wzorze (6) log Y_{lt} oznacza wartość zmiennej log Y_l obliczoną z tabeli 1, zaś log Y'_{lt} wyliczamy na podstawie równania (3) i (4).

Wartość ocen wariancji składnika losowego dla plonów pszenicy i żyta

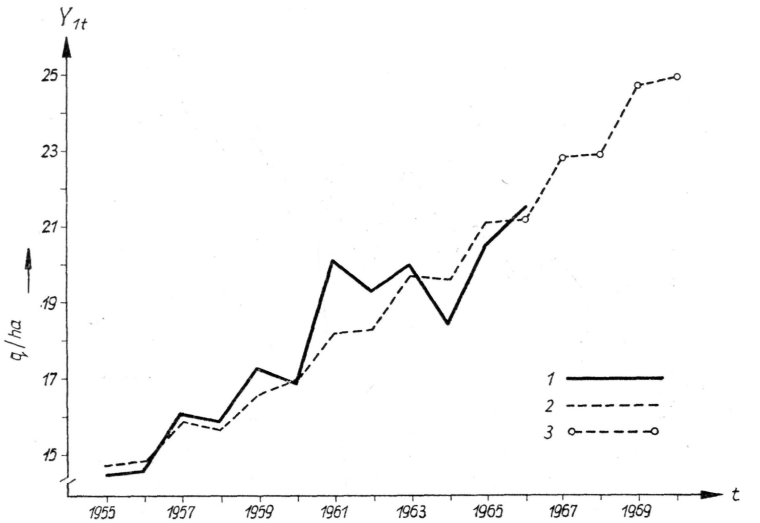
[10] Symbol ε_{lt} zastąpił symbol ξ_{lt}, by podkreślić, że różnice między log Y_{lt} a funkcją (3) oraz (4) wynikają nie tylko z przyczyn przypadkowych, których efekt jest równy ξ_{lt} ale i z tego, że oceny parametrów log a_0, a_1, a_2 i a_3 są również obciążone pewnym błędem.

[11] We wzorze (4) i w dalszych wyrażenia w nawiasach są średnimi błędami szacunku parametrów.

wynosi odpowiednio: s_1^2=0,00020698, s_2^2=0,00034416. Natomiast wartości odchylenia standardowego są odpowiednio równe: s_1=0,01438, s_2=0,01855.

Dla celów analizy porównawczej bardziej wymowne i łatwiej porównywalne są odchylenia standardowe wyrażone w procentach. Dla uzyskania procentowych odchyleń standardowych składnika losowego zastosowano wzór:

$$S_l\% = (10^{Sl} - 1) \cdot 100. \tag{7}$$



Ryc. 1. Plony pszenicy w Polsce w latach 1955 -1966
1 — wartość rzeczywista, 2 — krzywa teoretyczna
(Y_{1t}=11,37$x_t^{0,063314}$ $10^{0,013245t}$ $10^{0,01525\,2E_t}$ $10^{\varepsilon_{1t}}$), 3 — prognoza

Obliczone na podstawie wzoru (7) odchylenie standardowe dla plonów pszenicy oraz żyta jest równe odpowiednio: s_1=3,4%, s_2=4,3%. Porównując procentowe odchylenia standardowe zauważamy, że rozbieżności między plonami rzeczywistymi a otrzymanymi z obliczenia są względnie niewielkie. Dowodzi to, że wybrany model wzrostu plonów dobrze odzwierciedla zależność zmiennej wynikowej od określających ją czynników.

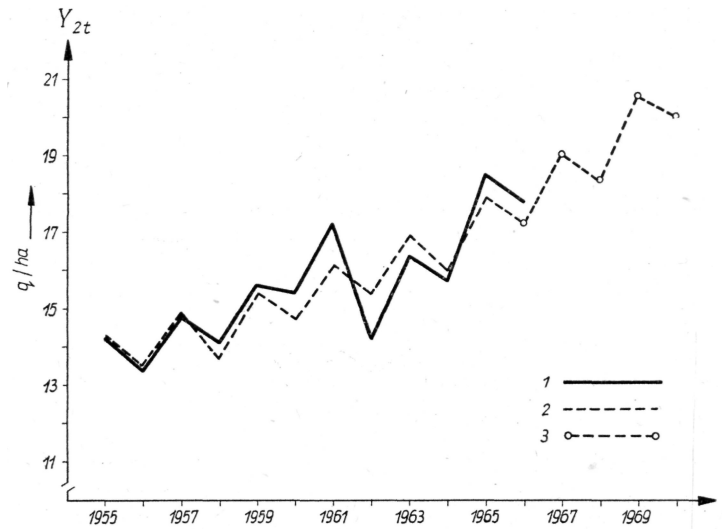
Na podstawie danych zamieszczonych w tabeli 1 i równań (3—4) sporządzono wykresy (ryc. 1—2).

W celu określenia, w jakim stopniu przyjęte zmienne wyjaśniają dany poziom plonów, obliczamy dla badanych ziemiopłodów wskaźnik zbieżności φ^2 według wzoru

$$\varphi_l^2 = \frac{\sum_t (\log Y_{lt} - \log Y'_{lt})^2}{\sum_t (\log Y_{lt} - \bar{\log} Y_{lt})^2}, \tag{8}$$

gdzie $\bar{\log}\, Y_{lt}$ jest średnią arytmetyczną wartości zmiennej log Y_{lt}.

Otrzymany wskaźnik zbieżności dla pszenicy oraz żyta jest równy odpowiednio: 0,0476 i 0,1437. Jak więc widzimy, wariancja poziomu plonów pszenicy oraz żyta jest objaśniona przez modele (3—4) odpowiednio w 95,2% i 85,6%. Dowodzi to, że zaproponowane równanie wzrostu plonów badanych ziemiopłodów osiąga wymagany stopień dokładności.



Rye. 2. Plony żyta w Polsce w latach 1955 -1966
1 — wartość rzeczywista, 2 — krzywa teoretyczna
$(Y_{2t}=7{,}75x_t^{\,0{,}164659}\,10^{0{,}004707t}\,10^{0{,}031783E_t}\,10^{\delta_{2t}})$, 3 — prognoza

W dalszym toku naszych rozważań omówimy pokrótce wartości oszacowań parametrów funkcji (3) i (4). Z równań (3 - 4) wynika, że wraz ze wzrostem nawożenia mineralnego (parametr a_1) o 10% średni roczny przyrost poziomu plonów pszenicy i żyta wynosi odpowiednio 0,6% i 1,6%. Parametr a_2 jest miernikiem efektów postępu techniki rolnej i organizacji w tym sensie, że mierzy on, o ile wzrósłby lub zmalał poziom plonów w okresie t+1 w stosunku do okresu t, gdyby założyć stały poziom i strukturę nakładów. Jak łatwo sprawdzić, przy założeniu, że $X_{it} = X_{it+1}$ (dla i=1, 2, ..., k) otrzymamy:

$$\frac{Y_{lt+1}}{Y_{lt}}=10^{\alpha_2}. \tag{9}$$

Obliczony przy tym założeniu przyrost plonów wynika z lepszego wykorzystania istniejących zasobów materialnych i pracy ludzkiej, a więc oznacza efekt pewnego postępu technicznego i organizacyjnego. Z wzoru (9) wyraźnie widać, że indeks poziomu plonów zależy tylko od parametru a_2. Wartość tego indeksu może być większa, równa lub mniejsza od jedności, w zależności od tego, czy $a_2 > 0$, $a_2=0$, czy też $a_2 < 0$. Jeżeli

$a_2>0$, istnieje dodatni efekt postępu technicznego i organizacyjnego. Jeżeli $a_2=0$, brak efektu postępu i wreszcie przy $a_2<0$ mamy do czynienia z ujemnym wpływem tego postępu. Można wtedy przypuszczać, że z okresu na okres wykorzystanie środków materialnych i pracy ludzkiej jest nieracjonalne, co pociąga za sobą spadek plonów.

Łatwo zauważyć, że występująca we wzrorze (9) równość daje po prostych przekształceniach procentowy roczny wzrost poziomu plonów. Wynika to z formuły:

$$\left(\frac{Y_{lt+1}-Y_{lt}}{Y_{lt+1}}\right)\cdot 100=100(10^{\alpha_2}-1). \tag{10}$$

Zgodnie z powyższym wzorem, otrzymana ocena parametru a_2 wskazuje, że średnio rzecz biorąc, efekt postępu techniki rolnej i organizacji wyraził się dodatkowym wzrostem plonów pszenicy o około

$100(10^{0,013245}-1)=3,1\%$, a dla żyta o około $100(^{0,004707}-1)=1,1\%$ w skali rocznej.

Na koniec ocena parametru a_3 świadczy, że średnio rzecz biorąc, w latach nieparzystych plony pszenicy i żyta odchylają się od zasadniczej tendencji wzrostu plonów w górę odpowiednio o około:

$$100\,(10^{0,015252}-1)=3,5\%,\quad 100\,(10^{0,031783}-1)=7,6\%,$$

natomiast w latach parzystych obserwuje się odchylenia od trendu w dół odpowiednio o około 3,5%, 7,6%. Jednocześnie trzeba podkreślić, że wahania periodyczne dla plonów żyta są przeszło dwukrotnie większe niż dla pszenicy.

Błędy średnie szacunków parametrów równania (2) z uwzględnieniem wyrażenia (3) i (4) obliczono korzystając ze wzoru

$$D(a_i)=\sqrt{\sigma^2\cdot\gamma_{ii}},\qquad (i=0,1,2,\ldots,k), \tag{11}$$

gdzie σ^2 jest wariancją składnika losowego ξ_t, γ_{ii} są elementami diagonalnymi macierzy $\Gamma=C^{-1}$, odwrotnej do macierzy C o elementach c_{ij}.

Warto zwrócić uwagę, że elementy c_{ij} macierzy C są znane i pełnią rolę współczynników w układzie równań normalnych, przez rozwiązanie którego otrzymano wartości ocen parametrów funkcji (2). Macierz $\Gamma=C^{-1}$ jest w naszym przypadku równa:

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 229,674688 & -174,755396 & 5,833765 & 0,667594 \\ -174,755396 & 133,206580 & -4,484331 & -0,648070 \\ 5,833765 & -4,484331 & 0,158106 & 0,028960 \\ 0,667594 & -0,648070 & 0,028960 & 0,343629 \end{bmatrix}.$$

Obliczona uprzednio według wzoru (5) ocena parametru σ^2 wynosi dla plonów pszenicy oraz żyta odpowiednio: 0,00020698, 0,00034416. Podstawiając te oceny w miejsce σ^2 do wzoru (11), otrzymujemy przybliżone wielkości błędów średnich poszczególnych ocen parametrów równania (3) i (4). W tabeli 2 podajemy obliczone błędy średnie szacunku parametrów log a_0, a_1, a_2, a_3.

Dla sprawdzenia, czy dla określonego z góry prawdopodobieństwa popełnienia błędu zbudowane przedziały ufności pokryją nieznane rzeczywiste parametry funkcji (2) korzystamy ze wzoru

$$P\{a_i - t_\gamma \cdot D(a_i) \leqslant \alpha_i \leqslant a_i + t_\gamma \cdot D(a_i)\} = \gamma, \tag{12}$$

gdzie liczba $t\gamma$ wyznaczona jest z warunku

$$\int_{-t_\gamma}^{+t_\gamma} f(v)\,dv = \gamma, \tag{13}$$

przy czym poszczególne symbole mają następujące znaczenie: a_i — ocena parametru a_i ; $D(a_i)$ — średni błąd szacunku parametru a_i ; γ — współczynnik ufności; $f(v)$ — funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej o rozkładzie Studenta i n — k stopniach swobody.

Określenie poziomu współczynnika ufności jest całkowicie umowne. Ustalenie go w poszczególnych dyscyplinach zależy od wymaganej precyzji badań. W rolnictwie przyjmuje się zazwyczaj współczynnik ufności na poziomie $\gamma=0,90$. Znając γ, znamy również t_γ. W przypadku małych prób wartość t_γ odczytujemy w tablicach rozkładu Studenta. Tablica ta dla $r=n-k$ stopni swobody (n — ilość obserwacji, k — ilość szacowanych parametrów) daje wartość t_γ odpowiadającą przyjętemu z góry współczynnikowi ufności. Gdy γ=0,90, a stopnie swobody $r=n-k=12-4=8$, to wartość t_γ=1,860, a z kolei przedziały ufności dla log a_0, a_1, a_2, a_3 są określone następującymi nierównościami:

dla plonów pszenicy	dla plonów żyta
$0,649964 \leqslant \log \alpha_0 \leqslant 1,461668$	$0,366530 \leqslant \log \alpha_0 \leqslant 1,412222$
$-0,245446 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0,372074$	$-0,233567 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0,562885$
$0,002643 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0,023847$	$-0,008871 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0,018285$
$-0,000372 \leqslant \alpha_3 \leqslant 0,030876$	$0,011695 \leqslant \alpha_3 \leqslant 0,051871$

Chcąc sprawdzić, czy rzeczywiście wyróżnione w funkcji (2) zmienne objaśniające wpływają na poziom plonów, trzeba zweryfikować przy poziomie istotności $1-\gamma$=0,10 hipotezę $H_0 : a_i=0$. Jako sprawdzian hipotezy H_0 przyjmujemy zmienną losową

$$t = \frac{a_i - \alpha_i}{D(a_i)}. \tag{14}$$

Ponieważ przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa a_i=0, dlatego ostatecznie

Tabela 2

Parametr α_i	Pszenica					Żyto				
	ocena parametru[a] a_i	wariancja estymatora $D^2(a_i)$	błąd średni szacunku $D(a_i)$	błąd średni (w % oceny parametru)	wartość stosunku $t=\frac{a_i}{D(a_i)}$	ocena parametru a_i	wariancja estymatora $D^2(a_i)$	błąd średni szacunku $D(a_i)$	błąd średni (w % oceny parametru)	Wartość stosunku $t=\frac{a_i}{D(a_i)}$
$\log \alpha_0$	1,055816*	0,04753807	0,2182	20,7	4,8387	0,889376*	0,07904484	0,2811	36,6	3,1639
α_1	0,063314	0,02757110	0,1660	262,2	0,3814	0,164659	0,04584438	0,2141	130,0	0,7691
α_2	0,013245*	0,00003272	0,0057	43,0	2,3237	0,004707	0,00005441	0,0073	155,1	0,6448
α_3	0,015252	0,00007112	0,0084	55,1	1,8157	0,031783*	0,00011826	0,0108	34,0	2,9429

[a] Przez symbol *ai** rozumiemy wartości ocen tych parametrów, które w sposób statystycznie istotny różnią się od zera.

Tabela 3

Okres czasu T	Pszenica					Żyto				
	wartość prognozy		błąd średni predykcji			wartość prognozy		błąd średni predykcji		
	(p) $\log y_{1T}$	w q/ha	(p) $D(\log y_{1T}-\log Y_{1T})$	w %	w q/ha	(p) $\log y_{2T}$	w q/ha	(p) $D(\log y_{2T}-\log Y_{2T})$	w %	w q/ha
1967	1,357307	22,76	0,01922	4,5	1,02	1,278967	19,01	0,02251	5,3	1,01
1968	1,359485	22,88	0,02215	5,2	1,19	1,262775	18,31	0,02506	5,9	1,08
1969	1,392984	24,71	0,02802	6,6	1,63	1,312273	20,52	0,03037	7,2	1,48
1970	1,397061	24,95	0,03687	8,8	2,19	1,301020	20,00	0,03868	9,3	1,86

$$t = \frac{a_i}{D(a_i)}. \tag{15}$$

Zauważmy, że zmienna losowa t określona wzorem (15) ma rozkład Studenta o $n—k$ stopniach swobody. Z tablic rozkładu t Studenta odczytujemy wartość t_γ (przy 8 stopniach swobody), która spełnia warunek $P\{|t| \geq t_\gamma\}=0{,}10$. Tak więc do obszaru krytycznego (obszar krytyczny zbudowany jest centralnie) należą wszystkie wartości sprawdzianu większe od 1,860. Temu obszarowi krytycznemu odpowiada hipoteza alternatywna $H_1 : a_i \neq 0$. Obliczone wartości sprawdzianu

$$t = \frac{a_i}{D(a_i)}$$

przedstawiamy w tabeli 2.

Z tego względu, że odpowiednia wartość t_γ z rozkładu t Studenta wynosi 1,860, można stwierdzić, iż przy 0,10 poziomie istotności współczynniki log a_0 i a_2 w modelu (3) oraz log a_0 i a_3 w modelu (4) mają istotne znaczenie. Prawdopodobieństwa związane z tymi wartościami są mniejsze niż 0,10 i stąd pojawienie się wartości zerowych tych współczynników jest mało prawdopodobne. Ponieważ wartość sprawdzianu odpowiadająca współczynnikom a_1, a_3 w modelu (3) oraz a_1, a_2 w modelu (4) znalazła się w obszarze przyjęcia, nie ma podstaw do odrzucenia sprawdzonej hipotezy Ho, czyli współczynniki te nie są statystycznie istotne [12]. Nie oznacza to jeszcze, że można automatycznie przyjąć hipotezę H_0. Może się bowiem zdarzyć, że prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju jest bardzo duże.

Oceniając uzyskane wyniki należy stwierdzić, że potęgowa forma zależności między wysokością plonów badanych ziemiopłodów a nawożeniem mineralnym, postępem techniki rolnej i zjawiskiem przemienności planowania przyniosła dobre rezultaty. Wydaje się, że można na podstawie obliczonych równań (3 - 4) dokonać prognozy wzrostu plonów pszenicy i żyta na lata 1967-1970.

IV. PROGNOZA KSZTAŁTOWANIA SIĘ PLONÓW PSZENICY I ŻYTA W LATACH 1967-1970

Z kolei przystępujemy do ustalenia prognozy na podstawie przyjętych z góry dwu podanych niżej warunków, przy czym warunek (1) odgrywa rolę decydującą:

[12] Trzeba zdać sobie sprawę z faktu, że wybór funkcji o dużej liczbie parametrów, przy małej liczbie obserwacji, powoduje z reguły wzrost błędów średnich ocen poszczególnych parametrów funkcji, a zarazem nieistotność oszacowań. Z tych to względów przy opisie badanego zjawiska bardziej celowe jest posługiwanie się klasą funkcji o względnie niewielkiej liczbie parametrów, nawet o bardziej złożonej budowie.

1) Postać analityczna modelu (2) nie może ulec zmianie w okresie, dla którego sporządza się prognozę;

2) Podobnie oszacowane wcześniej parametry strukturalne funkcji (2) pozostaną nadal adekwatne dla tego okresu. Jeśli chodzi o pierwszy warunek, to wiadomo, że przebieg zmian z roku na rok w postępie techniki rolnej, organizacji, nawożenia itd. nie ma charakteru skokowego i wobec tego można przyjąć, iż nie wystąpi pod ich wpływem zmiana postaci analitycznej modelu. W związku z tym można także oczekiwać, że przyszłe relacje między poszczególnymi argumentami funkcji (2) nie wywołują istotnych zmian parametrów strukturalnych modelu [13].

Dla obliczenia wynikającej z prognozy wartości zmiennej $\log Y_1$, $\log Y_2$ w okresie T należy posłużyć się równaniem:

$$\log y_{1T}^{(p)} = \log a_0 + a_1 \log X_T + a_2 T + a_3 E_T \tag{16}$$

i podstawić w nim jako zmienne objaśniające założone wartości dla okresu T[14]. Przewidywaną wartość zmiennej objaśniającej $\log X_T$ można oszacować najprościej poprzez wyznaczenie, a następnie ekstrapolację trendu wartości tej zmiennej. W tym celu na podstawie danych w tabeli 1 oszacowano parametry krzywej trendu dla zmiennej X_t charakteryzującej zużycie nawozów mineralnych na 1 ha użytków rolnych.

Zastosowano następującą postać krzywej trendu:

$$X_t = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t}. \tag{17}$$

Po dokonaniu odpowiedniej transformacji zmiennych rozpatrywana funkcja trendu przyjmie postać liniową względem parametrów a_0, a_1. Wtedy:

$$\frac{1}{X_t} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t, \tag{18}$$

[13] Oczywiście pożądane jest sprawdzenie, czy można zakładać stabilność struktury modelu w okresie, na który dokonuje się prognozy. Istnieje szereg metod badania, czy parametry strukturalne modelu są stałe w czasie. Por. w tej sprawie Z. Pawłowski, op. cit., s. 141 - 146. Tak szerokie potraktowanie zagadnienia przekracza zakres jego opracowania i wymagałoby bardziej rozległych studiów niż te, które mogły być podjęte dla celów niniejszej pracy.

[14] Traktując składnik ξ_{lt} tego równania jako czysto losowy, można założyć, że wartość ξ_{lt} w okresie przyszłym na który sporządza się prognozę, jest równa zeru. Metody, za pomocą których można badać, czy składniki losowe tworzą proces czysto przypadkowy, zostały omówione w pracy Z. Pawłowskiego, *Modele ekonometryczne równań opisowych,* Warszawa 1963 s. 172 - 183. Gdy wystąpi autokorelacja składnika losowego, w prognozie musi być uwzględniona odpowiednia korekta. Idea ta leży u podstaw metody podanej przez Z. Pawłowskiego, tzw. metody uściślania prognozy, wykorzystującej autokorelację składnika losowego. Por. w tej sprawie Z. Pawłowski, *Ekonometryczne metody badania popytu konsumpcyjnego,* Warszawa 1961, s. 189 - 196.

gdzie: X_t — zmienna mierząca zużycie nawozów mineralnych w czystym składniku NPK w kg/ha użytków rolnych; t — zmienna czasowa; a_0, a_1 — szacowane parametry; ξ_t — składnik losowy, który charakteryzuje odchylenia przypadkowe X_t od funkcji trendu.

Szacując parametry równania (18) za pomocą metody najmniejszych kwadratów, otrzymujemy:

$$\frac{1}{X'_t} = \underset{(0{,}00109)}{0{,}045005} - \underset{(0{,}00015)}{0{,}002246}\, t + \varepsilon_t . \tag{19}$$

Jak można sprawdzić, suma kwadratów zaobserwowanych różnic $\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X'_t}$, gdzie $\frac{1}{X'_t}$ jest teoretyczną wartością zmiennej $\frac{1}{X_t}$, równa się 0,00003137. Stąd ocena wariancji składnika losowego $s^2 = \frac{1}{12-2} \cdot 0{,}00003137 = 0{,}000003137$ oraz $s = 0{,}0018$.

Obliczony wskaźnik zbieżności φ^2 dla zużycia nawozów mineralnych jest równy 0,0178. Z wielkości tej wynika, że wariancja poziomu zużycia nawozów mineralnych jest objaśniona przez równanie (19) w 98,2%. Ponadto oceny parametrów równania (18) mają istotne znaczenie przy 0,001 poziomie istotności. Oznacza to, że istnieje trend rozpatrywanej wartości $\frac{1}{X_t}$ i to — ze względu na ujemną wartość a_1 — trend malejący, a tym samym dla wartości X_t trend rosnący [15].

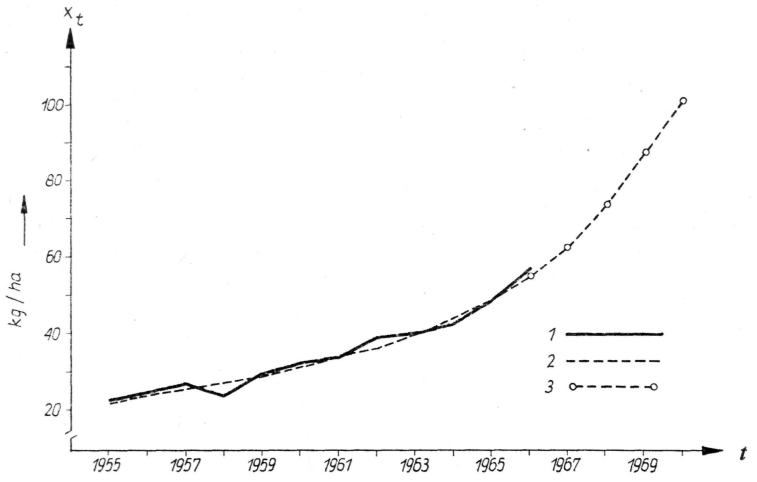
Z powyżej przeprowadzonych rozważań wynika, że równanie (19) można uznać na pewno za poprawne. Przebieg wyznaczonej funkcji trendu i rzeczywiste obserwacje zamieszczamy na rycinie 3.

Przewidywane zużycie nawozów mineralnych według wyznaczonej funkcji trendu kształtuje się następująco:

T	X_T	log X_T
1967	63,3	1,8014
1968	73,7	1,8675
1969	88,4	1,9465
1970	110,3	2,0426

[15] Podkreślić należy, że w naszym przypadku pole funkcji $\frac{1}{X_t} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t$ ograniczone jest do wartości argumentu

$$t < \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \text{ dla } \alpha_1 < 0.$$



Ryc. 3. Zużycie nawozów mineralnych w Polsce w latach 1955 -1966
1 — wartość rzeczywista, 2 — krzywa teoretyczna $\left(X_t^{\cdot}=\frac{1}{0{,}045005-0{,}002246+\varepsilon_t}\right)$, 3 — prognoza

Korzystając z wzoru (16) znajdujemy w prognozie wartości dla plonów pszenicy i żyta, które ujmuje tabela 3.

Z kolei przechodzimy do problemu obliczenia błędu średniego predykcji [16]. Błąd średni predykcji obliczamy według ogólnego wzoru [17]:

$$D(y_{1T}^{(p)}-Y_{1T})=\sqrt{\sum_{i=0}^{k} D^2(a_i)\cdot X_{iT}^2+2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j>i} C(a_i, a_j)\,X_{iT}\cdot X_{jT}+\sigma^2}, \qquad \textbf{(20)}$$

gdzie $D^2(a_i)$ — wariancja estymatora parametru a_i; $C(a_i, a_j)$ — kowariancja estymatorów parametrów a_i i a_j ; X — założone dla okresu T wartości zmiennych objaśniających; σ^2 — wariancja składnika losowego.

Macierz wariancji i kowariancji estymatorów parametrów przedstawia się jak poniżej :

$$D^2(a)=\begin{bmatrix} 0{,}04753807 & -0{,}03617087 & 0{,}00120747 & 0{,}00013818 \\ -0{,}03617087 & 0{,}02757110 & -0{,}00092817 & -0{,}00013414 \\ 0{,}00120747 & -0{,}00092817 & 0{,}00003272 & 0{,}00000599 \\ 0{,}00013818 & -0{,}00013414 & 0{,}00000599 & 0{,}00007112 \end{bmatrix}$$

Z obliczeń według wzoru (20) otrzymujemy w rezultacie błędy średnie predykcji, które ujmuje tabela 3. Przeprowadzone obliczenia wskazują,

[16] Zagadnienie oceny dokładności predykcji omówione zostało obszernie w pracy Z. Pawłowskiego, *Modele ekonometryczne równań opisowych,* op. cit., s. 197 - 217.

[17] Przy obliczaniu błędu średniego predykcji warto pamiętać, że występowanie

że rząd możliwych odchyleń rzeczywistych plonów pszenicy oraz żyta od plonów przewidywanych jest względnie mały. Z tego wynika, że wybór analitycznej postaci modelu, jak i zmiennych objaśniających wydaje się prawidłowy. Dalsze zwiększenie stopnia dokładności prognozy można by osiągnąć albo poprzez zwiększenie wielkości próby lub rozbudowanie modelu, tj. wprowadzenie do niego dodatkowych zmiennych objaśniających, skorelowanych ze zmienną wynikową. Należy zwrócić tu uwagę na to, że przy posługiwaniu się danymi mającymi postać szeregów czasowych, zbytnie powiększanie liczby obserwacji z reguły prowadzi do uzyskania próby niejednorodnej. W rezultacie więc trzeba zdecydować się na pewien kompromis w tym względzie.

V. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w niniejszym artykule rozważania pozwalają na sformułowanie szeregu wniosków i postulatów.

1) Rozszerzony i zmodyfikowany stochastyczny model funkcji potęgowej, ujmujący zależność między wysokością plonów badanych ziemiopłodów a nawożeniem mineralnym, postępem techniki rolnej i organizacji oraz zjawiskiem przemienności plonowania, przyniósł zadowalające rezultaty, na co wskazują niskie wartości oszacowań wariancji składnika losowego, współcznnika zbieżności i kowariancji estymatorów.

2) Potęgowa postać zależności zezwala na poznanie mechanizmu kształtowania się plonów w zależności od działania czynników wpływających na urodzaj.

3) Zaprezentowane wyniki potwierdziły tezę, że zaproponowany ekonometryczny model może być podstawą dokonywania prognoz plonów pszenicy i żyta.

4) Ustalona wartość prognozy dla plonów pszenicy oraz żyta na lata 1967 - 1970 może mieć znaczenie dla podejmowania decyzji planistycznych odnośnie do dostosowania produkcji zbóż dla zaistniałych potrzeb ludności (określenie przyszłej podaży badanych ziemiopłodów).

5) Istnieje pilna potrzeba, szczególnie na obecnym etapie badań, stosowania nowoczesnych metod ekonometrycznych przy analizie plonów zbóż.

6) W związku z tym rodzą się poważne wymagania w zakresie materiału liczbowego. Powinien on być przystosowany do tego kierunku badań.

7) W dalszych opracowaniach na ten temat byłoby rzeczą nader wskazaną badanie osobno plonów zbóż ozimych i jarych oraz objęcie analizą dalszych podstawowych ziemiopłodów, np. ziemniaków.

w równaniu (2) wyrazu wolnego $\log a_0$ jest tożsame założeniu, że występuje w nim czwarta zmienna objaśniająca, przyjmująca stale wartość 1.

AN ATTEMPT AT CONSTRUCTION OF AN ECONOMETRICAL MODEL FOR THE DETERMINATION OF THE PROGNOSIS FOR THE BASIC CROPS

Summary

The article contains the considerations concerning the use of an econometrical model for the determination of the prognosis of two basic crops: wheat and rye.

At the base of the constructed function of production there was estimated the influence of mineral fertilization, of the progress of agricultural technology and organization and the phenomenon of transformation of the crops on harvesting.

The results of the examinations formed also the base of forming the prognosis in the scope of crops of the examined agricultural products for the years 1967 -1970.